SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLVI — ANNO CXVIII

(gennaio - dicembre 1979)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1980

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLVI — ANNO CXVIII

(gennaio - dicembre 1979)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1980

L'equazione di Keplero e la scuola matematica napoletana

Nota di ENNIO BADOLATI
presentata dal socio ordinario TITO NICOLINI

(Adunanza del 20 gennaio 1979)

RIASSUNTO. — Si espone lo sviluppo storico della risoluzione dell'equazione di Keplero in Italia, con particolare attenzione alla scuola matematica napoletana. Si prendono in esame le soluzioni di V. Riccati, Lorgna, Cagnoli, Oriani, Carlini e Frisiani, e quindi, per la scuola matematica napoletana, le soluzioni di N. Fergola, Scorza e de Gasparis.

ABSTRACT. — In this paper we expose the historical development of the solution of Kepler's equation in Italy, with particular care for the Neapolitan mathematical school. We examine the solutions of V. Riccati, Lorgna, Cagnoli, Oriani, Carlini and Frisiani, and after the solutions of the Neapolitan mathematicians: N. Fergola, Scorza and de Gasparis.

1. — Come è noto l'equazione di Keplero

$$M = E - \varepsilon \sin E \qquad (0 \leq \varepsilon < 1) \tag{1}$$

fu trovata ai primi del '600, ma cominciò a destare l'interesse degli astronomi e dei matematici solo nel secolo successivo [1]. Da allora non mancarono in ogni regione d'Europa degli studi sulla risoluzione della (1) ed anche i matematici napoletani non si mantennero estranei a questo importante argomento con delle soluzioni che vogliamo richiamare nel presente lavoro, non trascurando tuttavia, per una naturale esigenza di confronto, le soluzioni elaborate nello stesso periodo dagli altri matematici ed astronomi italiani.

[1] I motivi di questo ritardo vanno ricercati nell'iniziale ostilità alla teoria copernicana ed anche nella circostanza che taluni astronomi (Ward, Boulliau, G. D. Cassini e Mercatore), pur accettando l'ipotesi copernicana, supposero che il moto planetario avvenisse in maniera diversa da quella ipotizzata da Keplero.

§ 1. - L'EQUAZIONE DI KEPLERO NELLA LETTERATURA SCIENTIFICA ITALIANA

2. — Per quanto è a nostra conoscenza, la prima soluzione della (1) escogitata in Italia è dovuta al padre Vincenzo Riccati [2], che la trovò nel 1751 per poi pubblicarla sul primo tomo della raccolta « Opusculorum ad res Physicas, & Mathematicas pertinentium » (Bologna 1757).

È innegabile un certo ritardo rispetto agli altri paesi, cosa che sembra essere dovuta al concorso di molti motivi, tra cui non ultimo il ritardo della nascita in Italia di sistematici studi astronomici [3]. La soluzione o meglio le soluzioni del Riccati, quindi, apparvero in un momento in cui erano già diffuse altre soluzioni, tra le quali le più famose erano quelle dovute ad Horrebow, ad Hermann, ai matematici della scuola inglese (Wren, Wallis, Newton e Machin) ed a Jacques Cassini, la cui soluzione ebbe in Italia maggior rilievo e diffusione.

Tuttavia, prima di procedere oltre nella nostra esposizione, occorre ricordare che a quei tempi la (1) veniva presentata nella forma

$$m = \theta + \varepsilon \sin \theta \tag{2}$$

usandosi allora misurare le anomalie dell'afelio anziché del perielio; inoltre spesso si preferiva enunciare il problema in termini geometrici e cioè: « Dividere un semicerchio da un punto assegnato del diametro in due parti di assegnato rapporto » [4].

La prima delle tre soluzioni proposte dal Riccati consiste nel ricondurre la (2) al sistema

$$\begin{cases} m = \theta + \varepsilon y \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

che è la comune soluzione grafica [5] riportata su tutti i testi d'astronomia, mentre la seconda si basa sull'intersezione fra l'arco di cicloide ordinaria

$$\begin{aligned} x &= \varphi + \sin \varphi \\ y &= 1 + \cos \varphi \end{aligned} \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

[2] Era il figlio di Jacopo Riccati, al cui nome è legata la ben nota equazione differenziale.

[3] In Italia i primi osservatori astronomici sorsero verso la metà del secolo XVIII (Brera 1760; Padova 1767,...) contro i principali osservatori esteri che furono costruiti nel secolo XVII (Observatoire de Paris 1672, Greenwich 1675,...).

[4] Corrisponde al celebre enunciato di Keplero: « *Aream semicirculi ex quoquunque puncto diametri in data ratione secare* ».

[5] Per maggiori dettagli su questa soluzione, come pure per la storia della soluzione grafica della (1) ottenuta per mezzo della sinusoide, si veda: E. BADOLATI, *Sintesi storica di talune soluzioni della equazione di Keplero*, Atti Acc. Pontaniana, (XXVI) 1977.

e la semiellisse

$$\begin{aligned} x &= m + (1 - \varepsilon) \sin \varphi \\ y &= 1 + \cos \varphi \end{aligned} \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

in quanto, detto L il punto d'intersezione e detto φ_0 il corrispondente valore del parametro, avremo

$$\varphi_0 + \varepsilon \sin \varphi_0 = m$$

Queste due soluzioni, siccome c'informa lo stesso autore, si presentavano come un perfezionamento delle precedenti soluzioni dell'Hermann e dei matematici inglesi in quanto il primo aveva usato al posto della sinusoide la quadratrice di Tschirnhaus [6], mentre i secondi avevano fatto uso della cicloide allungata: come osserva il Montucla il loro principale pregio consiste nell'eleganza [7].

Del tutto diversa è la terza soluzione, basata sul metodo d'iterazione: questo procedimento non era una novità perché qualche anno prima Eulero [8] lo aveva adoperato, anche se incidentalmente, ma è lecito dubitare che il Riccati avesse preso visione della memoria di Eulero, in cui peraltro quest'argomento occupa solo poche righe. È pur vero che il matematico trevigiano parla di metodo non originale, ma la sua frase: « Methodus a nobis usurpata, quae innititur in aequalitate inter sectorem... et triangulum... » accenna chiaramente alla soluzione del Cassini, per cui non è errato pensare di trovarsi difronte ad un caso di simultaneità, così comune nella storia della scienza.

3. — L'ultima soluzione del Riccati fa intendere l'importanza avuta dalla soluzione del Cassini sugli studi compiuti in Italia sull'equazione di Keplero e poiché per la soluzione del Lorgna e per altre ancora la memoria [9] dell'astronomo francese costituisce un'insopprimibile premessa, crediamo bene di riassumerne i principali tratti.

[6] È la curva di equazione $y = \sin \frac{\pi}{2} x$.

[7] « Elles sont toutes deux fort élégantes » (Hist. des Math. t. II, pag. 344).

[8] Nella memoria « Emendatio tabularum astronomicarum... » che fu stampata nel 1750.

[9] Fu pubblicata col titolo « Methode de déterminer la premiere Equation des Planetes... » sulle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1719 e poi inserita nel trattato « Elemens d'astronomie » (Parigi 1740).

Sia dunque un semicerchio di raggio unitario (fig. 1) e sia S (con $\overline{SC} = \varepsilon$) il punto prefissato del diametro [10] dal quale dividere, mediante il segmento SI, il semicerchio in due parti di assegnato rapporto, ovvero in due parti di cui una di area nota. Allora il triangolo mistilineo SIA dovrà avere per area $\frac{1}{2} m$ per cui, detta θ la misura [11] dell'arco AI, si ha subito la (2).

Chiamando AD l'arco che ha misura m e togliendo il settore comune ICA, si vede che risultano eguali il settore DIC e il triangolo

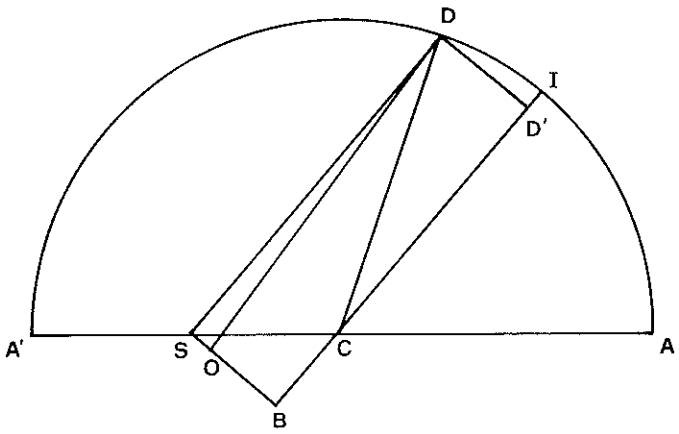


FIG. 1

SIC per cui, detta λ la misura dell'arco DI e detta SB l'altezza del triangolo SIC rispetto al lato CI, si ha

$$\lambda = \overline{SB}$$

Tirando ora da D la parallela DO ad IC si avrà che

$$\overline{SO} = \overline{SB} - \overline{OB} = \lambda - \overline{DD'} = \lambda - \sin \lambda$$

e quindi, sviluppando in serie e tenendo presente che

$$\lambda = \theta - m = \varepsilon \sin \theta$$

[10] È chiaro che tale punto coincide con il fuoco dell'orbita occupato dal Sole.
[11] Le misure degli archi (e quelle degli angoli) s'intendono prese nell'intervallo $[0\,\pi]$.

si ha [12]

$$\overline{SO} = \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots = \frac{\varepsilon^3 \sin^3 \theta}{3!} + \ldots$$

per cui, per piccole eccentricità, il segmento SO è quasi trascurabile e pertanto, in prima approssimazione, i segmenti DS ed IC possono ritenersi paralleli. Seguono quindi le formule

$$(3') \qquad \overline{DS} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos m}$$

$$(3'') \qquad \sin \theta_1 = \frac{\sin m}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos m}}$$

ove θ_1 indica il valore approssimato di θ che deriva dal precedente ragionamento. Tale valore può ulteriormente migliorarsi con la seguente correzione (necessaria, a detta del Cassini, quando l'angolo λ « excede deux degrés »): detta $\Delta\lambda$ la misura dell'angolo SDO, si ha

$$(4) \qquad \sin \Delta\lambda = \frac{\overline{OS}}{\overline{DS}} = \frac{\lambda - \sin \lambda}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos m}}$$

ove λ può approssimarsi con $m - \theta_1$ [13].

Come già detto la soluzione del Cassini ebbe vasta rinomanza e non solo in Italia, giacché nel 1850 il celebre astronomo tedesco Encke la prese a modello per uno studio approfondito dell'equazione di Keplero [14], tuttavia è il caso di ricordare che l'astronomo francese non era eccessivamente favorevole all'ipotesi di Keplero, in quanto dagli « Elemens d'astronomie » emerge una certa propensione per l'ipotesi ellittica semplice che consentiva lo studio dei moti planetari con una « précision géométrique, à laquelle on ne peut pas arriver par l'hypothese de Képler ».

4. — Alle soluzioni del Riccati seguono quelle del Lorgna che le pubblicò col titolo: « De locis planetarum in orbitis ellypticis » nella raccolta « Opuscula mathematica et physica » (1770). Tali soluzioni

[12] Questa formula non compare negli scritti di Cassini perché manca proprio una stima dell'errore. Invece la (3') e la (3''), pur non comparendo esplicitamente, sono diretta conseguenza del linguaggio geometrico di Cassini.

[13] Cassini costruì in appendice alla sua soluzione una tavola dei valori di $\lambda - \sin \lambda$, avvertendo che tale quantità poteva bastare, come correzione, per piccoli valori dell'eccentricità.

[14] Nella memoria « Ueber die Auflösung der Kepler'schen Gleichung », Astr. Nach., 714 (30 Bd.), 1850.

sono, in sostanza, dei perfezionamenti del metodo di Cassini: così la prima, che consiste nel costruire per via geometrica l'anomalia vera [15], nota la media, si basa sul seguente ragionamento.

Sia un semicerchio di raggio unitario e centro E e sia S il prefissato punto del diametro (fig. 2); se l'arco AC ha per misura l'anomalia media, allora da E tiriamo la parallela ad SC, sia EM, e poi da C tiriamo la tangente al cerchio che incontrerà la retta passante per EM in L ed infine tiriamo LS che taglierà il circolo in K. Ora si tratta di far vedere che l'anomalia eccentrica è compresa fra gli archi AK ed AM: infatti si vede subito che risultano eguali i triangoli [16] LCE e LSE per cui, tolto LNE, risulta

$$CNL = SNE$$

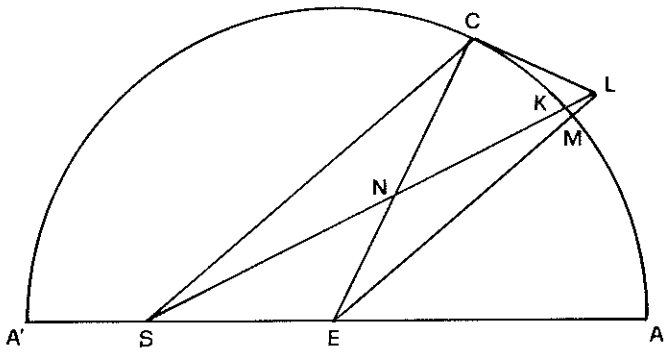


FIG. 2

Ma poiché CNL risulta maggiore del settore CNK, aggiungendo ad entrambi il quadrilatero mistilineo ENKA, sarà

$$KSA > ECA$$

il che dimostra la prima parte dell'asserto. Per la seconda parte basta osservare che, essendo eguali i triangoli MSE e MCE ed aggiungendo ad entrambi il settore MEA, si ha

$$MSA = MCEA$$

[15] Lorgna adopera al posto del termine « anomalia vera » la vecchia denominazione di Keplero « anomalia cocquata ». Nel suo lavoro, inoltre, manca il termine « anomalia eccentrica ».

[16] Per semplicità LCE, LSE, etc. indicano sia le figure che le aree.

e poiché il settore ECA risulta maggiore del quadrilatero mistilineo MCEA viene in definitiva

$$MSA < ECA$$

Trovate queste limitazioni, col metodo di falsa posizione si può avere un valore approssimato dell'anomalia eccentrica e quindi dell'anomalia vera.

A questa costruzione l'autore fa seguire un altro metodo geometrico per risolvere la (2), basato sempre sulla soluzione del Cassini, ma integrato con la correzione (4). Completano l'opuscolo, infine, dei metodi per il calcolo pratico delle anomalie e che traducono in chiave trigonometrica i precedenti procedimenti.

Il lavoro del Lorgna, dunque, appare di limitato interesse per il linguaggio geometrico, inadatto a questo tipo di problema, per l'assoluta mancanza di formule nel testo e più in generale per il metodo stesso, antiquato e poco originale. Queste circostanze, inoltre, assumono particolare rilievo se si pensa che proprio in quel periodo veniva pubblicata la ben nota memoria di Lagrange sul problema di Keplero [17].

Al contrario i miglioramenti apportati alla soluzione del Cassini appaiono di un certo interesse [18].

5. — Le soluzioni del Lorgna e del Riccati non ebbero, come già detto, vasta diffusione: al contrario la soluzione [19] elaborata dal Cagnoli, che adesso andremo a riassumere, ebbe una certa notorietà e non solo in Italia. Considerata dunque la (2) nella forma

$$m = x + \varepsilon \sin x \tag{2'}$$

il Cagnoli osserva che la nota formula (che si ottiene differenziando la (2')) [20]

$$dx = \frac{dm}{1 + \varepsilon \cos x}$$

[17] « Sur le problème de Képler » (Hist. Ac. Berlino 1769 (stamp. 1771)).

[18] Così, ad es., la considerazione della tangente al cerchio in C (fig. 2) verrà ripresa dall'Encke nella memoria citata. Aggiungiamo che l'opuscolo del Lorgna ebbe le lodi del Lalande e del Montucla.

[19] Fu pubblicata sul trattato « Trigonometria piana e sferica » (1ª ed. Parigi 1786, 2ª ed. Bologna 1804).

[20] Questa formula appare in un volume di Simpson (Essays... - Londra 1760) ma era già nota a Newton. Su quest'argomento, come pure per delle interessanti note sul metodo di Cagnoli, si veda: J. C. ADAMS, *On Newton's solution of Kepler's problem*, M.N.R.A.S., (XLIII) 1882.

è vantaggiosa solo quando « i differenziali sieno infinitamente piccoli » e pertanto propone di considerare, al posto degli incrementi infinitesimi, degli incrementi finiti. Si ha quindi

$$\Delta m = \Delta x + \varepsilon \Delta \sin x = \Delta x + \varepsilon \Delta x \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

da cui

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{1 + \varepsilon \cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)} \tag{5}$$

È chiaro che tale formula rappresenta solo una correzione e pertanto occorre un valore iniziale abbastanza prossimo al vero. Inoltre il Δx entro parentesi deve necessariamente darsi per noto, il che può farsi o prendendolo eguale a Δm oppure adoperando la (5) come seconda correzione e prendendo quindi per Δx il valore fornito dalla prima correzione.

Oltre a questa, Cagnoli elaborò anche altre soluzioni basate sull'uso delle serie, secondo una metodologia già introdotta da altri matematici come Jeaurat e Lagrange [21].

Per avere un'idea di tali soluzioni consideriamo la (2') e sviluppiamo in serie il seno in modo da avere

$$m = (1 + \varepsilon)\, x - \varepsilon \frac{x^3}{3!} + \varepsilon \frac{x^5}{5!} - \varepsilon \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{6}$$

e quindi, invertendo la serie che compare nella (6), si ottiene l'espressione

$$x = \frac{m}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3!\,(1 + \varepsilon)^4} m^3 + \frac{9\varepsilon^2 - \varepsilon}{5!\,(1 + \varepsilon)^7} m^5 + \ldots$$

che costituisce un interessante risultato sull'equazione di Keplero.

6. — Quest'ultima circostanza e cioè la soluzione della (1) per mezzo di serie ci dà lo spunto per introdurre gli altri studi compiuti in Italia sull'equazione di Keplero, in quanto gli astronomi milanesi

[21] Abbiamo già citato la memoria di Lagrange; quella di Jeaurat, invece, comparve sulla rivista « Mémoires... présentés à l'Ac. ... par divers savants » (t. IV-1763) col titolo: « Sur le mouvement des planètes.. ».

furono, tra gli studiosi italiani, i più sensibili alla problematica che questo tipo di soluzione presentava.

Cominciò l'Oriani, che nel 1805 pubblicò una memoria sull'equazione del centro, nella quale stabiliva la non facile espressione dei coefficienti in funzione dell'eccentricità: nonostante la presenza di qualche errore numerico [22], la memoria ebbe buona fama e vasta diffusione e probabilmente anche il merito d'incoraggiare studi di tal genere.

Fece seguito alla memoria dell'Oriani una memoria di Carlini, la quale per comune consenso è da riguardare come il più notevole lavoro scritto in Italia sul problema di Keplero. Tale memoria (Ricerche sulla convergenza della serie che serve a risolvere il problema di Keplero) rappresenta un punto fermo in almeno tre settori distinti della storia della matematica e cioè nella storia delle funzioni di Bessel, nella storia degli sviluppi asintotici e nella storia del problema di Keplero, come attestano i numerosi riferimenti al lavoro del Carlini da parte di illustri matematici [23].

Per inquadrare l'argomento ricorderemo che Lagrange era pervenuto alla serie [24]

$$(7) \qquad f(\mathrm{E}) = f(\mathrm{M}) + \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\,\mathrm{M}^{k-1}} \sin^k \mathrm{M}\, f'(\mathrm{M})$$

e quindi, dopo qualche trasformazione, alla serie

$$\mathrm{E} = \mathrm{M} + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \mathrm{A}_n(\varepsilon) \sin\, n\,\mathrm{M}$$

allo sviluppo in serie del raggio vettore

$$\frac{r}{a} = \mathrm{B}_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \mathrm{B}_n(\varepsilon) \cos\, n\,\mathrm{M}$$

[22] Furono segnalati da Schubert e da Degen. L'Oriani stesso, in una nota del 1822, riconobbe i propri errori.

[23] Infatti Jacobi e Scheibner presero spunto dal lavoro del Carlini per ulteriori ricerche sugli sviluppi asintotici dei coefficienti dell'equazione del centro e del raggio vettore. Molto più numerosi risultano i lavori sugli sviluppi asintotici delle funzioni di Bessel, per i quali si rinvia al classico trattato del Watson.

In tempi più recenti illustri trattatisti quali il Watson (Bessel functions, 2ª ed., cap. I, pag. 6) ed il Sansone (Eq. diff. nel campo reale, 2ª ed., p. II, cap. VII, pag. 70) hanno riportato nei loro trattati delle brevi sintesi delle ricerche del Carlini.

[24] Lagrange non diede il raggio di convergenza dello sviluppo (7), che fu poi trovato da Laplace. È il caso di ricordare che la (7), come serie doppia in ε e M, converge solo semplicemente, per cui la convergenza dipende in maniera essenziale dal metodo di sommazione. Per maggiori ragguagli si veda: E. Badolati, *Sintesi storica della risoluzione dell'eq. di K. per mezzo della serie di Lagrange*, Rend. Acc. Sc. Napoli, (XLIII), 1976.

ed all'equazione del centro (essendo w l'anomalia vera)

$$w = M + \sum_{1}^{\infty}{}_n C_n(\varepsilon) \sin n M$$

Rimaneva aperto, tuttavia, il problema di studiare le proprietà dei coefficienti A_n, B_n e C_n la cui espressione, in termini di ε, non appariva facile e difatti si troverà in seguito che tali coefficienti si possono esprimere in termini di funzioni di Bessel [25].

Al tempo in cui scriveva Carlini, la teoria delle funzioni di Bessel non era neanche impostata, tuttavia l'astronomo milanese, con dei calcoli laboriosissimi, riuscì a trovare l'espressione asintotica dei coefficienti del raggio vettore e dell'equazione del centro. Tali risultati non erano immuni da errori [26], che furono corretti da Jacobi nel 1848 e poi nel 1850 quando l'illustre matematico tedesco, resosi conto dell'importanza delle ricerche di Carlini, volle tradurre in tedesco la memoria dell'astronomo milanese.

Altri risultati sulla (1) furono ottenuti dall'astronomo Frisiani, il quale inserì l'argomento nel più generale studio delle equazioni algebriche e trascendenti. In particolare nella memoria « Metodi d'approssimazione... » egli ricorse al metodo d'iterazione per risolvere la (1), completandolo però con la verifica della convergenza delle iterate e servendosi, per tale verifica, della ben nota condizione sulla derivata della funzione iteranda [27].

E concludiamo questa rassegna con l'ultimo articolo della scuola milanese sull'equazione di Keplero che fu scritto da Carlini nel 1852. In esso il celebre astronomo, ormai settuagenario, descrisse un congegno meccanico di sua invenzione per la soluzione della (2). L'idea era ingegnosa, ma più che descrivere tale macchinetta preferiamo ricordare che in quest'articolo il Carlini ebbe a fare delle interessanti considerazioni storiche sull'origine dell'equazione di Keplero.

[25] Ad es. si trova

$$A_n = \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \qquad B_n = -\frac{2\varepsilon}{n} \frac{d J_n(n\varepsilon)}{d\varepsilon}$$

ove $J_n(z)$ indicano le funzioni di Bessel di prima specie e di ordine intero (coefficienti di Bessel).

[26] Tra gli errori del Carlini segnaliamo il fatto che egli ritenne convergenti le serie per $0 \leqslant \varepsilon < 0.66$ mentre in realtà lo sono per $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Jacobi segnalò tale errore col commento, invero poco diplomatico: « Dies ist offenbar falsch ».

[27] È noto che una condizione necessaria per la convergenza del procedimento iterativo relativo all'equazione $x = \Phi(x)$ è che in un intorno della radice sia $|\Phi'(x)| < 1$. Questa condizione, ignorata dai matematici del '700, cominciò a diffondersi ai primi dell'800. La questione trovò sistemazione definitiva in una nota di Schröder (Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann., 1870).

§ 2. - L'EQUAZIONE DI KEPLERO E LA SCUOLA MATEMATICA NAPOLETANA

7. — Nel 1817 venivano stampate a Palermo le « Lezioni elementari di astronomia » del padre Piazzi, col che anche il regno delle Due Sicilie poté vantare, al pari delle altre nazioni, un buon trattato d'astronomia [28]. In esso, per quanto riguarda la soluzione della (2), lo scopritore di Cerere pensò di servirsi del metodo di Cagnoli, aggiungendo però un criterio per la scelta del valore da prendere per prima approssimazione: tale criterio deriva essenzialmente dal metodo di Cassini, ma non sarà inutile darne un breve cenno.

Con riferimento alla fig. 1 si consideri il triangolo SDC e sia θ_1 la misura dell'angolo DSC; si vede subito che l'angolo SDC ha per misura $m - \theta_1$ per cui, applicando il teorema di Nepero, si ha la formula

$$\operatorname{tg}\left(\theta_1 - \frac{m}{2}\right) = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{m}{2}$$

dalla quale si può facilmente ricavare θ_1 e quindi, facendo uso della (5), una buona approssimazione dell'anomalia eccentrica.

8. — Come già detto questa soluzione fu la prima ad essere stampata nel reame napoletano, ma in effetti essa era stata preceduta da altre, elaborate dai matematici napoletani, che tuttavia per un complesso di circostanze erano rimaste allo stato di manoscritto e quindi del tutto ignorate. Ciò si può spiegare tenendo presenti alcuni aspetti tipici della scuola matematica napoletana: è noto infatti che il primo nonché maggior esponente di tale scuola, Nicola Fergola, per una sorta di modestia incredibilmente esasperata [29], preferiva lasciare in manoscritto i suoi lavori o addirittura pubblicarli anonimi, per cui, quando nel 1824 egli venne a morte, si scatenò fra i suoi allievi la caccia ai suoi manoscritti, che infine vennero acquistati in buona parte dal Flauti. Questi, però, non riuscì a pubblicarli tutti anche perché, notoriamente, a quei tempi il regime non aveva una grande sensibilità per le attività culturali, per cui i lavori scientifici si stampavano con un certo ritardo.

[28] Questo trattato ebbe le lodi del Gauss e fu tradotto in tedesco. Per una bibliografia sul Piazzi si veda il relativo articolo di Gabba sull'Enciclopedia Italiana.

[29] È il caso di ricordare le parole del Colletta: « Morì Niccola Fergola, dotto in matematica, autore di molte opere, modesto e cristianamente umile, sino a pubblicare col nome di alcun discepolo i prodotti del proprio ingegno a fin di scemarsi gli onori: ma gli crescevano ». (Storia del reame di Napoli, libro X, par. XXIII).

Quando però il de Gasparis cominciò ad interessarsi del problema di Keplero, il Flauti volle riesumare il manoscritto del suo Maestro riguardante il « problema delle anomalie » e decise di pubblicarlo sulle Memorie della Società delle Scienze di Napoli assieme ad un altro lavoro, dovuto ad un altro allievo di Fergola a nome Giuseppe Scorza, e rimasto anch'esso in manoscritto per dei motivi non molto diversi da quelli visti per Fergola [30].

9. — In sintesi la soluzione del Fergola procede alla seguente maniera: prendendo dalla (1) il coseno di ambo i membri, si ha

$$\cos (E - \varepsilon \sin E) = \cos M$$

ovvero

$$\cos E \cos (\varepsilon \sin E) + \sin E \sin (\varepsilon \sin E) = \cos M .$$

Sviluppando in serie le funzioni di argomento $\varepsilon \sin E$ e trascurando le potenze di ε superiori alla seconda, si ha

$$\cos E \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 E\right) + \varepsilon \sin^2 E = \cos M$$

da cui

$$1 - \sin^2 E = \left(\frac{\cos M - \varepsilon \sin^2 E}{1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 E} \right)^2$$

e quindi, trascurando sempre le potenze di ε superiori alla seconda, si ha [31]

$$\sin E = \frac{\sin M}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2 \varepsilon \cos M}} \tag{8}$$

e l'autore aggiunge che il radicando che compare a denominatore è sempre reale perché (per $0 < \varepsilon < 1$)

$$1 + \varepsilon^2 > 2 \varepsilon \geq 2 \varepsilon \cos M$$

[30] È estremamente difficile datare questi scritti, tuttavia, seguendo il Flauti, si può avanzare l'ipotesi che il lavoro del Fergola risalga ai primi dell'800 e quello dello Scorza sia posteriore a quello del suo Maestro.

[31] De Gasparis annotava che spingendo l'approssimazione ai termini in ε^4, si sarebbe pervenuti ad un'equazione trinomia di soluzione elementare. Inoltre egli osservava che la (8) si prestava ad una facilissima costruzione grafica dell'angolo E, che coincide essenzialmente col triangolo SCD della fig. 1.

È innegabile la rassomiglianza fra la (8) e la (3″), ma è difficile pensare che il Fergola intendesse tradurre in chiave analitica il metodo del Cassini, sia perché, come già detto, la (3″) non compare esplicitamente nel lavoro dell'astronomo francese, sia perché la deduzione del Fergola è completamente diversa da quella del Cassini.

A questa risoluzione il matematico napoletano ne fece seguire un'altra basata sull'uso della cicloide. Questo, della cicloide, era un metodo già adoperato dai matematici inglesi (Wren, Wallis e Newton) ai tempi in cui la cicloide era al centro dell'attenzione dei matematici, ma, esauritosi tale argomento e constatato che tale metodo era poco utile nella pratica, il ricorso alla cicloide era divenuto una sorta di esercizio letterario e ben se ne rese conto il Flauti quando, commentando il lavoro del Fergola, ebbe a dire che questa soluzione poteva servire « alla costruzione di uno strumento anomalistico ».

La soluzione procede così: considerata la semiellisse β di equazione

$$y = (1 + \varepsilon)\sqrt{1 - x^2} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

e l'arco di cicloide γ di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} y &= \varphi + \sin\varphi \\ y &= \cos\varphi \end{aligned} \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

costruiamo un circolo di centro l'origine e raggio unitario e prendiamo su di esso un punto Q tale che l'arco PQ misuri θ.

Detti ora G, H e F i punti in cui la retta per Q, ortogonale al diametro, incontra il diametro stesso, β e γ, si ha

$$\overline{FH} = \overline{FG} - \overline{HG} = \theta - \varepsilon \sin\theta$$

e quindi, se $\overline{FH} = m$, il punto H (o meglio il parametro ad esso corrispondente) risolve il problema. In definitiva il problema è ricondotto ad inserire fra β e γ un segmento di data misura ($\overline{FH} = m$) e di « dato sito » (e cioè di data direzione), il che può farsi abbassando da P un segmento PP″, ortogonale al diametro e di misura m, e quindi tirare da P″ un arco di cicloide, parallelo a γ, il quale intersecherà β nel punto H voluto.

Anche qui non si può negare un'analogia con la seconda soluzione del Riccati, ma le diversità di procedimento e d'impostazione portano a ritenere indipendenti le due soluzioni.

In definitiva il maggior risultato del Fergola è la (8) che, del resto, è una delle pochissime formule che diano direttamente ed in

termini finiti E in funzione di ε e di M [32]. Aggiungiamo che l'errore che si commette usando la (8) è dell'ordine di ε^3, come facilmente si può vedere [33]; infatti, per una nota formula relativa ai polinomi di Legendre, si ha

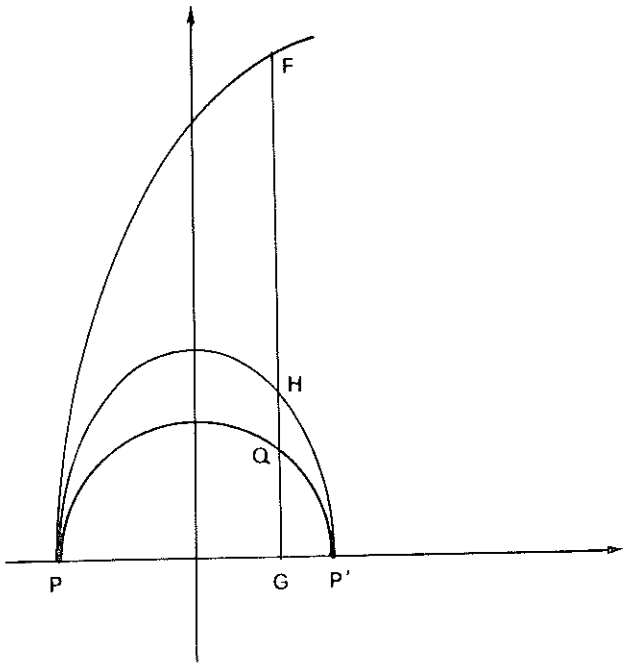


FIG. 3

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,\varepsilon \cos M + \varepsilon^2}} = 1 + \varepsilon \cos M + \frac{\varepsilon^2}{4}\,(1 + 3 \cos 2\,M) + \dots$$

per cui la (8) diviene

[32] Un'altra formula di tal genere fu ottenuta da Pacassi e comunicata in una lettera a Nicola Fuss (Nova Acta Ac. Sc. Petropolitanae (VIII) 1790). In sintesi, posto nella (2) $u = m - \theta$, si ha $u = \varepsilon \sin (m - u)$ e poiché u è molto piccolo (per piccoli valori di ε) si può porre $u \simeq \sin u$ per avere

$$\sin u = \varepsilon\,(\sin m \cos u - \cos m \sin u)$$

e quindi, in definitiva, la formula

$$\mathrm{tg}\,(m - \theta) = \frac{\varepsilon \sin m}{1 + \varepsilon \cos m}$$

Anche questa formula è deducibile dalla soluzione del Cassini.

[33] Nè Fergola nè i suoi commentatori si preoccuparono di trovare l'errore relativo all'uso della (8).

$$\sin E = \sin M + \varepsilon \sin M \cos M + \varepsilon^2 \frac{\sin M}{4} (1 + 3 \cos 2 M) + \ldots$$

che non differisce, per i primi tre termini, dallo sviluppo in serie di Lagrange (7) della funzione sin E

$$\sin E = \sin M + \varepsilon \sin M \cos M + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{d M} \cos M \sin^2 M + \ldots$$

10. — Lo Scorza, invece, per risolvere la (2) pensò di servirsi del metodo d'iterazione assieme ad una verifica della convergenza delle iterate e quest'ultima circostanza costituisce un elemento di notevole interesse rispetto alle soluzioni precedenti. Purtroppo tale verifica risulta piuttosto maldestra e confusa: infatti, dopo aver scritto la (2) nella forma

$$\Phi = \Psi + n \sin \Psi$$

e dopo aver dimostrato che, per piccoli incrementi, le variazioni dell'anomalia eccentrica $\Delta \Psi$ sono proporzionali alle corrispondenti variazioni dell'anomalia media $\Delta \Phi$, l'autore, col metodo d'iterazione, ottiene dei valori approssimati Ψ_n dell'incognita Ψ, la cui approssimazione può valutarsi con la differenza delle rispettive anomalie medie. Quando infine questa differenza risulta minore di 45″[34], allora col metodo di falsa posizione si può risolvere il problema.

In definitiva lo Scorza non vede nel metodo d'iterazione un algoritmo infinito, capace di risolvere la (2), ma solo un mezzo per impostare la soluzione definitiva. Inoltre il linguaggio geometrico e talune inutili lungaggini rendono la memoria farraginosa e di pesante lettura, in contrasto con lo stile agevole e piano del Fergola.

Ciò non costituisce, tuttavia, un severo giudizio in quanto la fama dello Scorza poggia su ben altro ed inoltre torna spontaneo pensare che il manoscritto pubblicato da Flauti fosse solo l'abbozzo di una memoria che poi non fu più completata.

11. — La soluzione dello Scorza ci dà lo spunto per una breve digressione sulla risoluzione per iterazione dell'equazione di Keplero. Il concetto d'iterazione risale, come è noto, alla fine del '600, ma la sua applicazione all'equazione di Keplero risale alla metà del '700

[34] Questo il valore che dové sembrare sufficiente allo Scorza, ma la validità del metodo rimane se al posto di 45′ si pone una qualsiasi prefissata quantità.

quando tale metodo apparve nelle pubblicazioni, precedentemente viste, di Eulero e di Riccati. Nel lavoro del matematico italiano il metodo è visto essenzialmente in chiave geometrica, mentre nella memoria di Eulero l'iterazione è presentata in maniera analitica e soprattutto risulta ben chiaro il fatto che l'iterazione costituisce un algoritmo infinito. Questo procedimento, tuttavia, era come nascosto nella memoria di Eulero, dedicata più generalmente alla costruzione delle tavole astronomiche, per cui Nicola Fuss nel 1788 pensò di riesumare l'argomento, esponendolo con maggiori dettagli e con applicazioni pratiche.

Mancava, però, una giustificazione della convergenza delle iterate [35] ed in tal senso vanno visti i lavori successivi dello Scorza e del Frisiani [36]; in particolare il lavoro del Frisiani, sul quale ci siamo già dilungati, costituisce già una sistemazione soddisfacente del problema.

Infine segnaliamo una memoria di Grunert (del 1852), nella quale la convergenza viene stabilita alla seguente maniera: dal procedimento interativo (con $E_0 = M$)

$$E_{m+1} = M + \varepsilon \sin E_m \tag{9}$$

si ricava

$$E_{m+1} - E_m = \varepsilon (\sin E_m - \sin E_{m-1}) = 2\,\varepsilon \sin \frac{E_m - E_{m-1}}{2} \cos \frac{E_m + E_{m-1}}{2}$$

e quindi le diseguaglianze

$$| E_{m+1} - E_m | \leq \varepsilon | E_m - E_{m-1} | \leq \varepsilon^m | E_1 - M |$$

che giustificano la convergenza del procedimento (9).

12. — Con de Gasparis la scuola matematica napoletana trovò il suo più celebre esponente, almeno per quanto riguarda la soluzione della (1), forse anche perché l'astronomo di Bugnara, a differenza dei suoi predecessori, invece di tener celati i suoi risultati si preoccupò di diffonderli sia in Italia che all'estero.

I lavori del de Gasparis riguardano soprattutto regole pratiche e tavole numeriche per la soluzione della (1) e procurarono al suo

[35] Occorre dire che nel '700 i matematici erano poco sensibili ai problemi di convergenza degli algoritmi infiniti.

[36] Poiché lo Scorza venne a morte nel 1843, il suo lavoro è certamente anteriore a quello del Frisiani. È invece possibile che il matematico napoletano fosse a conoscenza delle altre memorie sull'argomento.

autore lodi da parte di autorevoli astronomi [37], ma anche critiche [38]: essi sono tutti di agevole lettura e facile reperimento, il che ci esime dal riassumerli, tuttavia è da tener presente che essi furono concepiti con lo scopo di risolvere la (1) con « operazioni numeriche dirette, spedite ed elementarissime » e che quindi rimasero strettamente legati all'utilità che potevano dare nei calcoli. Tale giovamento, notevole a quei tempi (onde la notorietà in Italia ed all'estero dell'autore), è poi diminuito fino a svanire completamente col moderno calcolo elettronico.

Con questo non vogliamo dire che il de Gasparis abbia preso delle vie errate per risolvere l'equazione di Keplero, ma solo che la fatalità spesso gioca ruoli determinanti nella storia della scienza. Al contrario le ricerche del de Gasparis sulla meccanica celeste ed i suoi studi matematici rimangono tuttora di grande interesse.

13. — Certamente quest'argomento è troppo particolare per poterne trarre delle deduzioni sulla scuola matematica napoletana, ma esso, pur nella sua frammentarietà, ci consente qualche considerazione nel senso che, se da un lato vengono confermate talune note caratteristiche di questa scuola quali la superiorità del Maestro (Fergola) sui suoi allievi e la passione di costoro verso una matematica che vorremmo definire neoclassica, dall'altro emergono taluni aspetti che sarà bene puntualizzare.

È noto che la scuola matematica napoletana, pur non essendo tra le più prestigiose d'Italia, ebbe la sorte di suscitare in modo particolare l'interesse degli storici con un certo numero di studi, effettuati, però, in un momento in cui era ancora vivo il ricordo del profondo legame che univa i principali esponenti della scuola al passato regime borbonico ed in un'atmosfera ancora permeata del risentimento, acre ma anche ingeneroso, dei matematici liberali che, dopo l'unità d'Italia, li avevano in gran parte sostituiti nelle cariche pubbliche.

Inoltre gli storici della scuola matematica napoletana (Loria ed Amodeo) erano essenzialmente dei geometri e pertanto portati naturalmente ad esaminare la produzione geometrica più che non quella relativa all'analisi o all'algebra e su questa produzione geometrica principalmente diedero i loro giudizi. Viceversa noi, pur esprimendo

[37] Tra questi ricorderemo il Lehmann ed il Klinkerfues. Ricordando la lode del Klinkerfues, il de Gasparis ebbe a dire che per questa lode avrebbe volentieri donato cinque asteroidi.

[38] Uno dei suoi lavori (Regola per la soluzione del problema di Keplero) provocò una vivace polemica col Bellavitis.

delle riserve sui loro canoni di valutazione, riteniamo che la storia della scuola matematica napoletana, come attestano la formula del Fergola e la capacità numerica del de Gasparis, possa ancora arricchirsi di importanti contributi.

§ 3. - I MATEMATICI ITALIANI E LA STORIA DELL'EQUAZIONE DI KEPLERO

14. — Aggiungiamo ancora, a guisa d'appendice, che fra gli studi compiuti in Italia sulla (1) compaiono anche delle note storiche, sulle quali vogliamo dare un breve cenno. In realtà, come del resto succede anche oggi, quasi tutti gli studiosi visti in precedenza erano soliti premettere alle loro ricerche delle note informative sui lavori precedenti che riguardavano l'argomento della loro pubblicazione ed in quest'ordine di idee occorre considerare alcune di queste note che, per estensione, spiccano maggiormente delle altre.

Fergola fu il primo a scrivere sulla storia dell'equazione di Keplero, in quanto in un suo volume del 1791 [39] tracciò lo sviluppo storico delle soluzioni della (1) a partire dagli scritti di Keplero fino alla serie di Lagrange, non trascurando l'ipotesi ellittica semplice e le soluzioni meno note [40]. La sua esposizione, elegante ed accurata, è tra i primi esempi di storia delle risoluzioni dell'equazione di Keplero. In seguito il Carlini, nella memoria già citata « Descrizione di una macchinetta... », ebbe a soffermarsi sull'origine della (1), sulle difficoltà incontrate da Keplero per la sua soluzione e sui problemi posti dalla (1) per le orbite di elevata eccentricità.

È interessante notare il risalto dato dal Carlini alle risoluzioni per serie della (1), in quanto, riferendosi alla (1), egli ebbe a dire che: « ... i geometri posteriori non fecero altro passo fuori di quello dell'applicazione ad essa della teoria delle serie... » e del resto non ci si poteva attendere altro giudizio da un così celebre studioso di serie astronomiche.

E chiudiamo col de Gasparis il quale, nella memoria « Altra soluzione numerica del problema detto di Keplero » (del 1877), volle proporre una classificazione delle soluzioni della (1), che qui riportiamo:

1) Metodi basati sull'uso delle serie.
2) Metodi grafici.

[39] « Prelezioni a' Principi matematici della Filosofia Naturale del cav. Isacco Newton... » (vol. I).

[40] Quando il Flauti riesumò la soluzione del Fergola, volle aggiornare la nota storica del suo Maestro, aggiungendo i nomi degli altri solutori della (1).

3) Metodi meccanici.
4) Metodi numerici.
5) Metodi fondati sull'uso di una tavola.

Naturalmente il celebre astronomo era portato ad esaltare i metodi numerici, anche se sorprende una certa durezza di giudizio verso gli altri metodi ed in particolare contro l'uso delle serie. Nondimeno il senso critico e l'iniziativa stessa di classificare le soluzioni della (1) rendono di grande interesse la lettura della nota storica del de Gasparis.

In definitiva queste note storiche si rivelano degne d'attenzione e contribuiscono ad accrescere l'importanza degli studi compiuti in Italia sull'equazione di Keplero.

BIBLIOGRAFIA

Sulla storia dell'equazione di Keplero:

J. C. ADAMS, *On Newton's solution of Kepler's problem* (M.N.R.A.S. (XLIII) 1882).
E. BADOLATI, *Sintesi storica della risoluzione dell'eq. di K. per mezzo della serie di Lagrange* (Rend. Acc. Sc. Napoli (XLIII) 1976).
E. BADOLATI, *Sintesi storica di talune soluzioni dell'eq. di K.* (Atti Acc. Pontaniana (XXVI) 1977).
J. BRINKLEY, *An examination of various solutions of Kepler's problem* (Trans. R. Irish Academy (IX) 1802).
J. E. MONTUCLA, *Histoire des mathématiques* - vol. II (2ª ed. Parigi 1799).
R. RADAU, *Bibliographie du problème de K.* (Bull. Astr. 1900).
G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions* (2ª ed. Cambridge, rist. 1966).

Studi italiani sull'eq. di K.:

A. CAGNOLI, *Trigonometria piana e sferica* (2ª ed. Bologna 1804).
F. CARLINI, *Ricerche sulla convergenza della serie...* (Eff. Astr. Milano 1818).
F. CARLINI, *Tavole del calcolo dell'anomalia vera...* (Eff. Astr. Milano 1832).
F. CARLINI, *Descrizione d'una macchinetta...* (Mem. Ist. Lombardo - 3ª s. - (V) (1856).
P. FRISIANI, *Analisi di alcune equazioni trascendenti* (Eff. Astr. Milano 1845).
P. FRISIANI, *Metodi d'approssimazione...* (Eff. Astr. Milano 1847).
P. FRISIANI *Ricerche sopra alcune serie astronomiche* (Men. Ist. Lombardo - 3ª s. - (V) 1856).
A. M. LORGNA, *Opuscula mathematica et psysica* (Verona 1770).
B. ORIANI, *Equazione del centro...* (Eff. Astr. Milano 1805).
B. ORIANI, *Nota sull'equazione del centro...* (Eff. Astr. Milano 1822).
V. RICCATI, *Opusculorum...* - t. I - (Bologna 1757).

Sul problema aperto da Carlini segnaliamo le seguenti memorie:

C. G. J. JACOBI, *Ueber die annähernde Bestimmung...* (Astr. Nach. 665 (28 Bd) 1849).

C. G. J. JACOBI, *Untersuchungen über die Convergenz...* (*Traduzione della memoria del Carlini*) (Astr. Nach. 709/712 (30 Bd) 1850).
W. SCHEIBNER, *Ueder die asymptotischen Werthe...* (due note) (Math. Ann. (XVII) 1880).

Sulla scuola matematica napoletana:

F. AMODEO, *Vita matematica napoletana* (2 voll.) (Napoli 1924).
G. LORIA, *N. Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Atti Univ. Genova 1892).
G. LORIA, *Pro veritate, risposta alle osservazioni del prof. Pascal* (Rivista di Mat. 1893).
C. MIRANDA, *Breve storia e prospettive future...* (Rend. Acc. Sc. Napoli (XLIV) 1977).
E. PASCAL, *A proposito di un libro del prof. Loria...* (Rivista di Mat. 1892).

Memorie della scuola matematica napoletana sull'eq. di K.:

A. DE GASPARIS, *Nota alla soluzione del prof. Fergola.*
V. FLAUTI (a cura di), *Il problema di K. risolto dal fu illustre geometra N. Fergola.*
G. SCORZA, *Metodo per rinvenire l'anomalia eccentrica, data la media.*

Tutte queste memorie si trovano su - Mem. Acc. Sc. Napoli (II) 1857.

Segnaliamo inoltre il trattato:

G. PIAZZI, *Lezioni elementari di astronomia,* vol. II (Palermo 1817).

e le seguenti memorie del de Gasparis:

Formule e tavole per la soluzione del problema di K. (Mem. Acc. Sc. Napoli (II) 1857).
Table pour la solution du problème de K. (Ast. Nach. 1082-1084 (46 Bd) 1857).
Regola per la soluzione del problema di K. (Rend. Acc. Sc. Napoli 1862).
Regle pour la solution du problème de K. (Compt. Rend. (LIV) 1862).
Vorschrift zur Auflösung des Kepler'schen Problem (Astr. Nach. 1365 (57 Bd) 1862).
Sur le problème de K. (Compt. Rend. LXXXIV) 1877).
Altra soluzione numerica del problema detto di K. (Rend. Acc. Sc. Napoli 1877).
Tavola per la soluzione numerica del problema di K. (Rend. Acc. Sc. Napoli 1881).
Altre serie fra anomalia e raggio vettore nelle ellissi planetarie (Rend. Acc. Sc. Napoli 1881).
Sur le problème de K. (Compt. Rend. (XCV) 1882).

Memorie sulla risoluzione dell'eq. di K. col metodo d'iterazione:

L. EULERO, *Emendatio tabularum astronomicarum...* (Comm. Ac. Sc. Petropolitanae (XII) 1740 (stamp. 1750)).
P. FRISIANI, *Metodi d'approssimazione...* (loc. cit.).
N. FUSS, *Remarque sur une nouvelle méthode...* (Nova Acta Ac. Sc. Petropolitanae (III) 1788).
J. A. GRUNERT, *Ueber das Kepler'sche Problem* (Astr. Nach. 781 (33 Bd) 1852).
V. RICCATI, *loc. cit.*
G. SCORZA, *loc. cit.*

Per notizie biografiche relative ai matematici ed astronomi italiani incontrati nel presente lavoro si rinvia a:

D. E. SMITH, *History of mathematics* - vol. I - (Boston 1923).
Osservatori astronomici e vulcanologici italiani (a cura del Ministero P. I.) (Roma 1956).

In particolare: su Vincenzo Riccati

A. A. MICHIELI (Atti Ist. Veneto (Cl. L) (CIII) 1943-44).

su Anton Maria Lorgna
F. JACOLI (Bull. Bibl. e Storia delle Sc. (X) 1877).

su Antonio Cagnoli
G. B. FANTONETTI (Mem. Ist. Lombardo (2ª s.) (V) 1838).

su Barnaba Oriani
E. BIANCHI (Mem. Soc. Astr. It. (VI) 1932/33).
— (M.N.R.A.S. (II) 1833 (pag. 148)).

su Francesco Carlini
G. V. SCHIAPARELLI (Atti Ist. Lombardo (III) 1862).

su Paolo Frisiani
E. CORNALIA (Rend. Ist. Lombardo (XIII) 1880).

Per le biografie dei matematici napoletani rinviamo al volume dell'Amodeo, segnalando tuttavia:

ANONIMO (LUIGI TELESIO), *Elogio di N. Fergola scritto da un suo discepolo* (Napoli 1830).
V. FLAUTI, *Elogio storico di N. Fergola* (Napoli 1824).
V. FLAUTI, *Elogio di G. Scorza* (Rend. Acc. Napoli 1843).

Infine su Annibale de Gasparis, oltre alla commemorazione

C. MANCINI (Atti Acc. Pontaniana (XXII) 1892).

segnaliamo il volume

C. CIANCI (a cura di), *Annibale de Gasparis* (Roma 1955).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci T. Nicolini, C. Miranda e C. Tolotti.

Teorema dell'energia nell'urto elastico di una corda in un caso non lineare

Nota di BERARDINO D'ACUNTO *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 20 gennaio 1979)

RIASSUNTO. — Si calcola l'energia di una corda, nel caso non lineare, lungo una linea, con orientamento di spazio, del piano (x, t), quando il processo d'urto è in corso e nel fenomeno fisico interviene la reazione vincolare incognita.

ABSTRACT. — One calculates the string energy, in a nonlinear case, along a spacelike line of the (x, t)-plane, when the impact process takes place and the unknown constraint reaction intervenes in the physical phenomenon.

1. — Si consideri il moto di una corda in presenza di un ostacolo. Le vibrazioni siano rette dall'equazione (nel senso delle distribuzioni)

$$v_{tt} - v_{xx} = 2\,q\,(x,\ t, v) + 2\,\mathrm{J}, \tag{1.1}$$

dove $v(x, t)$ indica, nel piano (x, v), lo spostamento del punto della corda di ascissa x al tempo t, $2\,q\,(\mathrm{P}, v)$ indica la forza esterna per unità di lunghezza e $2\,J$ la reazione *incognita* dell'ostacolo. Si osservi che, in coordinate caratteristiche

$$\xi = 2^{-\frac{1}{2}}\,(x + t),\ \eta = 2^{-\frac{1}{2}}\,(-\,x + t),$$

la (1.1) è equivalente alla seguente:

$$v_{\xi\eta} = q\,(\xi, \eta, v) + \mathrm{J}. \tag{1.2}$$

L'urto elastico di una corda, le cui vibrazioni siano rette dalla (1.2), contro un ostacolo rettilineo, coincidente con il segmento $[o, l]$, è stato da me considerato in [9]. Un teorema di esistenza e unicità è

* Istituto di Meccanica Razionale della Facoltà di Ingegneria di Napoli. L'autore aderisce al G.N.F.M. del C.N.R.

stato stabilito nella striscia $\Delta = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t < +\infty\}$, sotto le *ipotesi seguenti*:

$$(1.3)\quad \begin{cases} q(P, o) \in L^1(\Delta_T)\ \forall\, T > 0, \text{ con } \Delta_T = \{0 \leq t \leq T,\ 0 \leq x \leq l\}, \\ q(P, v) \text{ misurabile } \forall\ v, \end{cases}$$

$$(1.4)\quad |q(P, v_1) - q(P, v_2)| \leq L\,|v_1 - v_2|,$$

$$(1.5)\quad q(P, v) \geq 0, \text{ se } v \geq 0,$$

e con le *condizioni iniziali* e al *contorno* seguenti:

$$(1.6)\quad v(x, o) = f(x) > 0, \quad v_t(x, o) = g(x), \quad f'(x), g(x) \in L^1([o, l]),$$

$$(1.7)\quad v(l, t) = b(t) > 0, \quad v(o, t) = a(t) > 0,$$
$$a(t), b(t) \in C^o([o, +\infty[).$$

La funzione $u(P)$, *soluzione del problema con ostacolo*, risulta $\in C^o(\Delta)$. La dimostrazione del teorema di esistenza e unicità si poggia sul concetto introdotto da AMERIO-PROUSE [1] (e ripreso da AMERIO [8] con condizioni, per i dati, in cui rientrano le ipotesi qui fatte) *di linea di influenza dell'ostacolo*, che, nel piano (x, t), è una linea λ, di equazione $t = t(x)$, continua, lipschitziana con costante ≤ 1. Tale linea è sostanzialmente caratterizzata dal fatto che per $t < t(x)$ la *soluzione del problema con calcolo* $u(P)$ non è influenzata dalla presenza dell'ostacolo e, pertanto coincide con la *soluzione libera* $v(P)$, con le stesse condizioni iniziali e al contorno.

Scopo di questa Nota è di calcolare *l'energia della corda lungo una linea qualsiasi* $\bar{\lambda} \subset \Delta$ (con orientamento di spazio), quando il processo d'urto è in corso e nel fenomeno fisico interviene la reazione vincolare (incognita). Ricordiamo che, per $q = 0$ e supponendo che $\bar{\lambda}$ non intersechi linee di influenza, la stessa questione è stata oggetto di una precedente Nota di CITRINI [4].

Ci varremo del seguente noto lemma, relativo al *problema libero*, riportandone per comodità la dimostrazione.

LEMMA 1. — *Se la* (1.4) *è verificata e se inoltre*

$$(1.8)\quad v(x, o) = f(x), v_t(x, o) = g(x), \quad f'(x), g(x) \in L^2([o, l]),$$

$$(1.9)\quad v(o, t) = a(t), \quad v(l, t) = b(t), \quad a'(t), b'(t) \in L^2([o, T])\ \forall\, T > 0,$$

$$(1.10)\quad q(P, o) \in L^2(\Delta_T)\ \forall\, T > 0, \quad q(P, v) \text{ misurabile } \forall\ v,$$

la soluzione libera $v(P)$ *(cioè la soluzione di* (1.2) *per* $J = 0$*), che esiste continua ed unica in* Δ*, è dotata di derivate* $v_\xi, v_\eta \in L^2(\Delta_T)$*. Inoltre*

$\nu_\xi(\xi, \eta)$ *esiste* $\forall (\xi, \eta)$, *escluso gli* ξ *appartenenti ad un insieme di misura lineare nulla, e, similmente* $\nu_\eta(\xi, \eta)$ *esiste* $\forall (\xi, \eta)$ *escluso gli* η *appartenenti ad un insieme di misura lineare nulla.*

Dim. — Nel triangolo $T = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq x, 0 \leq t \leq l - x\}$ (fig. 1 α), si consideri la *soluzione libera* $v(P)$ *del problema di Cauchy*

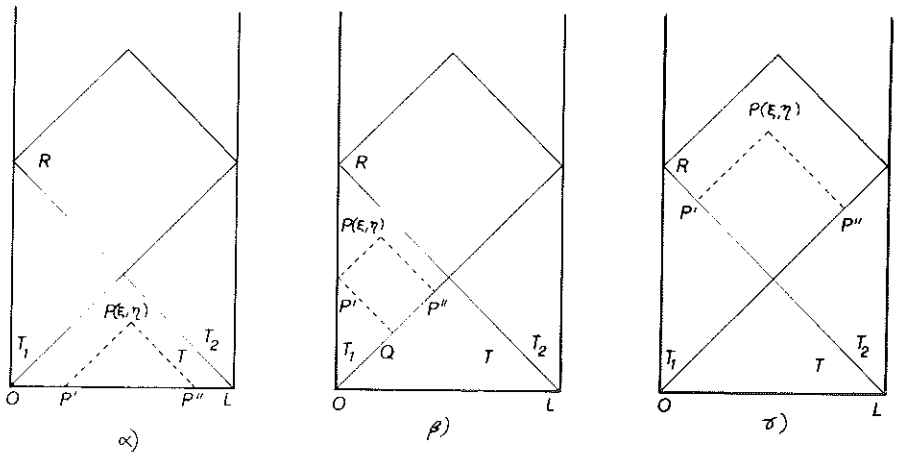


FIG. 1

(per l'equazione (1.2) con $J = 0$) con i dati iniziali (1.8), e si osservi che $v(P) \in C^0(T)$ ed inoltre

$$(1.11)\qquad \begin{cases} \nu_\xi(P) = \nu_\xi(P'') + \displaystyle\int_{-\xi}^{\eta} q\,[\xi, \eta_1, v(\xi, \eta_1)]\, d\eta_1\,, \\ \nu_\eta(P) = \nu_\eta(P') + \displaystyle\int_{-\eta}^{\xi} q\,[\xi_1, \eta, v(\xi_1, \eta)]\, d\xi_1\,, \end{cases}$$

dove $P', P'' \in \{t = 0,\ 0 \leq x \leq l\}$ sono ordinatamente, la ξ-proiezione e la η-proiezione di P sulla retta $t = 0$. Nel sistema (1.11), $\nu_\xi(P'')$ e $\nu_\eta(P')$ sono a quadrato sommabile per ipotesi. Per quanto riguarda gli integrali, prendiamo in considerazione, per esempio il primo. Essendo $q \in L^2(\Delta_T)$ si ha $\forall P(\xi, \eta) \in T$

$$\int_{-\eta}^{l/\sqrt{2}} d\xi \int_{-\xi}^{\eta} q^2\,[\xi, \eta_1, v(\xi, \eta_1)]\, d\eta_1 < +\infty$$

donde

$$\int_{-l/\sqrt{2}}^{0} d\eta \int_{-\eta}^{l/\sqrt{2}} d\xi \int_{-\xi}^{\eta} q^2 [\xi, \eta_1, v(\xi, \eta_1)]\, d\eta_1 < +\infty .$$

Da questa, essendo

$$\left(\int_{-\xi}^{\eta} q\, d\eta_1 \right)^2 \leq (\eta + \xi) \int_{-\xi}^{\eta} q^2\, d\eta_1 \leq l/2^{1/2} \int_{-\xi}^{\eta} q^2\, d\eta_1 .$$

si trae

$$\int_{-l/\sqrt{2}}^{0} d\eta \int_{-\eta}^{l/\sqrt{2}} d\xi \left(\int_{-\xi}^{\eta} q [\xi, \eta_1, v(\xi, \eta_1)]\, d\eta_1 \right)^2 < +\infty ;$$

l'integrale considerato risulta, pertanto, a quadrato sommabile. Analogamente si procede per l'altro integrale. Poiché la somma di due funzioni a quadrato sommabile è ancora a quadrato sommabile, si ha

$$v_\xi(P), v_\eta(P) \in L^2(T).$$

Con riferimento alla $(1.11)_1$, si osservi che, per l'ipotesi (1.8), $v_\xi(P'')$ esiste q.o. in $[o, l]$; pertanto $v_\xi(\xi, \eta)$ esiste $\forall (\xi, \eta) \in T$, escluso gli ξ appartenenti ad un insieme di misura lineare nulla. Analogamente $v_\eta(\xi, \eta)$ esiste $\forall (\xi, \eta) \in T$ escluso gli η appartenenti ad un insieme di misura lineare nulla.

Nel triangolo $T_1 = \left\{ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} l,\ x \leq t \leq l - x \right\}$ (fig. 1 β) si consideri la *soluzione libera* del *problema di Goursat* con i dati assegnati su $\{x = 0,\ 0 \leq t \leq l\} \cup \left\{ t = x,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} l \right\}$; si indichi con P' la ξ-proiezione di P su $\{x = 0\}$ e con P'' e Q le η-proiezioni su $\{t = x\}$ rispettivamente di P e P' e si osservi che $v(P) \in C^0(T_1)$ ed inoltre

$$(1.12) \qquad \begin{cases} v_\xi(P) = v_\xi(P'') + \displaystyle\int_{P''}^{P} q [\xi, \eta_1, v(\xi, \eta_1)]\, d\eta_1 , \\ v_\eta(P) = -\, v_\xi(Q) + 2^{1/2} a'(P') + \displaystyle\int_{P'}^{P} q [\xi_1, \eta, v(\xi_1, \eta)]\, d\xi_1 - \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{Q}^{P'} q [\eta, \eta_1, v(\eta, \eta_1)]\, d\eta_1 . \end{cases}$$

Da (1.12), tenendo conto di (1.4), (1.9), (1.10) e di quanto dimostrato precedentemente, si trae ancora

$$\nu_\xi(P), \nu_\eta(P) \in L^2(T_1). \tag{1.13}$$

Da $(1.12)_1$ si vede che $\nu_\xi(P)$ è definita $\forall(\xi,\eta) \in T_1$, escluso gli ξ appartenenti ad un insieme di misura lineare nulla; da $(1.12)_2$ segue, poi, che $\nu_\eta(P)$ non esiste sia se non esiste $a'(P')$ e sia se non esiste $\nu_\xi(Q)$, cioè $\nu_\eta(P)$ esiste $\forall(\xi,\eta)$ escluso gli η appartenenti ad un insieme di misura lineare nulla. Analogamente, posto $T_2 = \left\{\frac{1}{2} l \leq x \leq l, \right.$ $\left. x \geq t \geq l - x\right\}$, si dimostra che

$$\nu_\xi(P), \nu_\eta(P) \in L^2(T_2). \tag{1.14}$$

Nel rettangolo caratteristico $R = \{0 \leq x \leq l,\ l - x \leq t \leq l + x,$ $x \leq t \leq 2l - x\}$ (fig. 1 γ), si consideri la *soluzione libera del problema di Darboux* con i dati assegnati su $\{t = l - x\} \cup \{t = x\}$; sia P' (risp. P'') la ξ-proiezione (risp. η-proiezione) di P su $\{t = l - x\}$ (risp. $\{t = x\}$) e si osservi che $\nu(P) \in C^0(R)$ e

$$\begin{cases} \nu_\xi(P) = \nu_\xi(P'') + \displaystyle\int_{P''}^{P} q\,[\xi, \eta_1, \nu(\xi, \eta_1)]\, d\eta_1 \\ \nu_\eta(P) = \nu_\eta(P') + \displaystyle\int_{P'}^{P} q\,[\xi_1, \eta, \nu(\xi_1, \eta)]\, d\xi_1 . \end{cases} \tag{1.15}$$

Da (1.15), se si tiene conto di (1.13), (1.14) e di (1.4), (1.10) segue che $\nu_\xi(P), \nu_\eta(P) \in L^2(R)$. È chiaro, inoltre, che in R, $\nu_\xi(P)$ (risp. $\nu_\eta(P)$) esiste $\forall(\xi,\eta)$ escluso gli ξ (risp. η) appartenenti ad un insieme di misura lineare nulla.

Possiamo, ora provare il seguente lemma.

LEMMA 2. — *Si supponga che le ipotesi del lemma* 1 *siano verificate e si consideri una curva continua* $\lambda^* \subset \Delta$, *di equazione* $t = t^*(x)$, *lipchitziana con costante* ≤ 1, *con il primo estremo* $A^* \in \{x = 0, t > 0\}$ *e il secondo estremo* $B^* \in \{x = l, t > 0\}$. *Risulta allora* $\nu_\xi^2\, d\xi \geq 0$, $\nu_\eta^2\, d\eta \leq 0$ *e*

$$\int_{\lambda^*} (\nu_\xi^2\, d\xi - \nu_\eta^2\, d\eta) < +\infty. \tag{1.16}$$

Dim. — L'integrale (1.16) ha senso in quanto dal lemma precedente segue che $\nu_\xi(P)$ e $\nu_\eta(P)$, con $P \in \lambda^*$, esistono rispettivamente

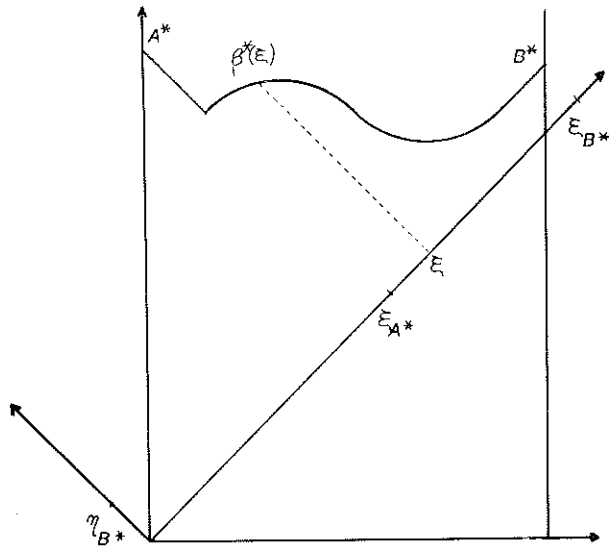


FIG. 2

per quasi ogni ξ e per quasi ogni η. Indichiamo con $\eta = \beta^*(\xi)$ l'equazione di λ^* privata dei segmenti caratteristici η (fig. 2) ed osserviamo che la funzione $\nu_\xi(P)$, $P \in \lambda^*$, può scriversi,

$$(1.17) \qquad \nu_\xi(\xi, \eta)\,|_{\eta=\beta^*(\xi)} = \nu_\xi(\xi, \eta_{B^*}) + \int_{\eta_{B^*}}^{\beta^*(\xi)} q\,[\xi, \eta_1, \nu(\xi, \eta_1)]\,d\,\eta_1\,.$$

per quasi ogni $\xi \in [\xi_{A^*}, \xi_{B^*}]$.

Essendo $q \in L^2(\Delta_T)$, si ha,

$$(1.18) \qquad \int_{\xi_{A^*}}^{\xi_{B^*}} d\,\xi \int_{\eta_{B^*}}^{\beta^*(\xi)} q^2\,[\xi, \eta_1, \nu(\xi, \eta_1)]\,d\,\eta_1 < +\,\infty\,.$$

ed anche, per il teorema di Fubini, per quasi ogni ξ,

$$(1.19) \qquad \int_{\eta_{B^*}}^{\beta^*(\xi)} q^2\,[\xi, \eta_1, \nu(\xi, \eta_1)]\,d\,\eta_1 < +\,\infty\,.$$

Da (1.19), per la diseguaglianza di Schwarz, segue

$$(1.20) \qquad \left(\int_{\eta_{B^*}}^{\beta^*(\xi)} q\,d\,\eta_1\right)^2 \leq [\beta^*(\xi) - \eta_{B^*}] \int_{\eta_{B^*}}^{\beta^*(\xi)} q^2\,d\,\eta_1 \leq (\eta_{A^*} - \eta_{B^*}) \int_{\eta_{B^*}}^{\beta^*(\xi)} q^2\,d\,\eta_1\,.$$

Da (1.18), tenendo conto di (1.20), si trae

$$\int_{\xi_{A^*}}^{\xi_{B^*}} d\xi \left(\int_{\eta_{B^*}}^{\beta^*(\xi)} q \, d\eta_1 \right)^2 < +\infty,$$

cioè l'integrale a secondo membro di (1.17) $\in L^2([\xi_{A^*}, \xi_{B^*}])$; poiché, d'altra parte dal lemma 1 segue che $\nu_\xi(\xi, \eta_{B^*}) \in L^2([\xi_{A^*}, \xi_{B^*}])$, si conclude che

$$\int_{\lambda^*} \nu_\xi^2 \, d\xi < +\infty. \tag{1.21}$$

Analogamente si prova che

$$-\int_{\lambda^*} \nu_\eta^2 \, d\eta < +\infty. \tag{1.22}$$

Da (1.21), (1.22) segue (1.16).

Sussiste il seguente teorema.

TEOREMA. — *Se le* (1.4), (1.5), (1.8), (1.9), (1.10) *sono soddisfatte, e se inoltre*

$$f(x) > 0, \; a(t) > 0, \; b(t) > 0, \tag{1.23}$$

allora la soluzione del problema con ostacolo $u(P)$ (Cfr. [9]) *esiste continua ed unica in* Δ. *Inoltre.*

a) $u_\xi(P)$, $u_\eta(P) \in L^2(\Delta_T)$.

b) *le derivate* u_ξ, u_η *esistono rispettivamente* $\forall \xi$ *e* $\forall \eta$ *escluso al più insiemi di misura lineare nulla.*

Dim. — La esistenza e unicità di $u(P)$ in Δ è stata dimostrata in [9] nelle ipotesi (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7); poiché, nell'ipotesi (1.23)

$$(1.8), (1.9), (1.10) \Rightarrow (1.3), (1.6), (1.7),$$

necessariamente sussiste anche nel nostro caso.

Per quanto riguarda la a), indicato con $t = t_1(x)$ l'equazione della prima linea di influenza λ_1, si osservi che per $t < t_1(x)$ la *soluzione del problema con ostacolo* $u(P)$ coincide con la *soluzione libera* $v(P)$

(Cfr. [1], [8], [9]) e, pertanto, tenendo conto del lemma 1, si può affermare che la proposizione a) è certamente vera per $t < t(x)$. Al di sopra della prima linea di influenza $\lambda_1 = A_1 B_1$ e all'interno di $\Omega_1 = A_1 B_1 C_1$, la *soluzione* $u(P)$ *del problema con ostacolo* si definisce con la seguente equazione integrale di Volterra (Cfr. [9])

$$(1.24)\qquad \begin{cases} u(P) = v(P') + v(P'') + v(P_0) + 2\sum_{i=1}^{m_P} v(N_i) + \\ \quad + \int_{R_P''} q(Q, u(Q))\, d\Delta - \int_{R_P'} q(Q, v(Q))\, d\Delta. \end{cases}$$

In questa (fig. 3)

1) P′ (risp. P″) è la ξ-proiezione (risp. η-proiezione) di P su λ_1;

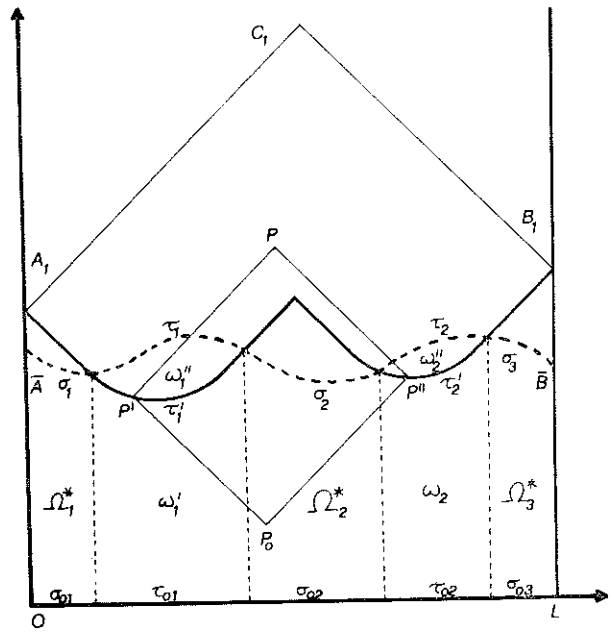


FIG. 3

2) il punto P_0 si ottiene come intersezione della caratteristica ξ per P″ e della caratteristica η per P′;

3) m_P è il numero (anche $= +\infty$) delle *coppie* di segmenti (ξ, η) di λ_1 *strettamente* comprese tra P′ e P″;

4) $R_P = R_P' \cup R_P''$ è il rettangolo caratteristico di vertici $PP'P_0P''$ e R_P' (risp. R_P'') è il sottoinsieme di R superiormente (risp. inferiormente) limitato da λ_1.

Poiché $v_\xi \in L^2(\Delta_T)$, l'equazione integrale (1.24), in maniera equivalente (Cfr. [9]) si scrive

$$(1.25)\qquad \begin{cases} u(P) - v(P') = \displaystyle\int_{\xi_{P_0}}^{\xi} \pm v_\xi(\bar{S})\, d\xi_1 + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\xi_{P_0}}^{\xi} d\xi_1 \int_{\bar{S}}^{S} q(\xi_1, \eta_1, u(\xi_1, \eta_1))\, d\eta_1 , \end{cases}$$

dove S è un punto variabile sul segmento $[P'P]$, $\bar{S}$ è la η-proiezione di S su λ_1 ed inoltre, nel primo integrale a secondo membro di (1.25), si usa il segno $-$ se $\bar{S}$ è un *punto d'urto* (Cfr. [8]) e il segno $+$ se $\bar{S}$ non è un punto d'urto. Da (1.25) segue

$$(1.26)\quad u_\xi(P) = \pm v_\xi(P'') + \int_{P''}^{P} q(\xi, \eta_1, u(\xi, \eta_1))\, d\eta_1 \quad \text{q.o. in } \Omega_1 .$$

Dalla (1.26), con ragionamento analogo a quello già fatto a proposito del Lemma 1, si prova che $u_\xi \in L^2(\Omega_1)$.

Essendo $v_\eta \in L^2(\Delta_T)$, l'equazione integrale (1.24) si può anche scrivere

$$(1.27)\qquad \begin{cases} u(P) - v(P'') = \displaystyle\int_{\eta_{P_0}}^{\eta} \pm v_\eta(\bar{S})\, d\eta_1 + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\eta_{P_0}}^{\eta} d\eta_1 \int_{\bar{S}}^{S} q(\xi_1, \eta_1, u(\xi_1, \eta_1))\, d\xi_1 , \end{cases}$$

dove, ora, S è il generico punto $\in [P'', P]$ e $\bar{S}$ è la sua ξ-proiezione su λ_1. Da (1.27) si ha

$$(1.28)\quad u_\eta(P) = \pm v_\eta(P') + \int_{P'}^{P} q(\xi_1, \eta_1, u(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1 \quad \text{q.o. in } \Omega_1 ,$$

e, pertanto, anche $u_\eta \in L^2(\Omega_1)$.

Nel *caso generale*, poi, (quando, cioè, al variare di P in Ω_1, il punto P_0 non necessariamente $\in \Delta_T$), l'equazione integrale (1.24) definisce la soluzione $u(P)$ solo in un sottoinsieme di Ω_1 (cfr. [8] e [9]); la $u(P)$ viene prolungata in Ω_1 risolvendo un numero finito di problemi di Darboux. Si realizza, così, che il teorema continua a sussistere anche in questo caso in quanto, come si vede con riferimento al lemma 1, la soluzione del problema di Darboux è dotata di derivate parziali prime $\in L^2$ se le funzioni costituenti i dati hanno derivate parziali prime $\in L^2$.

La b), poi, segue dalle espressioni stesse (1.26) e (1.28) di u_ξ e u_η.

Osservazione. — Per $P \in \lambda_1$, risulta, in armonia con la definizione d'urto elastico (Cfr. [8] e [9])

$$u_\xi(P^+) = \pm\, u_\xi(P^-),\ u_\eta(P^+) = \pm\, u_\eta(P^-),$$

cioè

$$u_\xi^2(P^+) = u_\xi^2(P^-),\ u_\eta^2(P^+) = u_\eta^2(P^-), \tag{1.29}$$

rispettivamente per quasi ogni ξ e per quasi ogni η.

2. — Si consideri la *soluzione libera* $v(P)$. Da (1.2), per $J = 0$, si trae

$$2^{-1/2}(v_\xi + v_\eta)\, 2\, q = 2\, v_{\xi\eta}(v_\xi + v_\eta)\, 2^{-1/2},$$

cioè

$$2^{-1/2}(v_\xi + v_\eta)\, 2\, q = 2^{-1/2}\left(\frac{\partial}{\partial \eta} v_\xi^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} v_\eta^2\right). \tag{2.1}$$

Essendo $v_t = 2^{-1/2}(v_\xi + v_\eta)$, il primo membro di (2.1) esprime la potenza delle forze esterne per unità di lunghezza.

Sia $t = t^*(x)$ l'equazione di una linea continua $\lambda^* \subset \Delta$, lipschitziana con costante ≤ 1, con gli estremi A^* e B^* rispettivamente sugli assi $x = 0$ e $x = l$ e si ponga $\Delta^* = \{0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq t^*(x)\}$. Definiamo (Cfr. [4]) *energia della corda sulla linea* $t = t^*(x)$ il funzionale

$$E^* = E(\lambda^*) = \int_{A^*}^{B^*} 2^{-1/2}(v_\xi^2\, d\xi - v_\eta^2\, d\eta)_{t=t^*(x)}, \tag{2.2}$$

che esiste per quanto provato nel lemma 2.

Tenendo presente che $q \in L^2(\Delta_T)$ e che per il lemma 1, v_ξ, $v_\xi \in L^2(\Delta_T)$, da (2.1) si ha

$$\int_{\Delta^*} 2^{-1/2} (v_\xi + v_\eta) 2 q \, d\Delta = \int_{\Delta^*} 2^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} v_\xi^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} v_\eta^2 \right) d\Delta,$$

cioè

$$\int_{\Delta^*} 2^{-1/2} (v_\xi + v_\eta) 2 q \, d\Delta = \int_{\partial\Delta^*} 2^{-1/2} (- v_\xi^2 \, d\xi + v_\eta^2 \, d\eta).$$

Di qui, essendo $\partial \Delta^* = 0\,L \cup L\,B^* \cup B^*\,A^* \cup A^*\,0$, si trae

$$(2.3) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{A^*}^{B^*} 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{t=t^*(x)} = \\ \displaystyle= \int_{\Delta^*} 2^{-1/2} (v_\xi + v_\eta) 2 q \, d\Delta + \int_0^L 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{t=0} + \\ \displaystyle+ \int_L^{B^*} 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=l} + \int_{A^*}^0 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=0} . \end{cases}$$

Da (2.3) si nota che l'energia della corda sulla linea $t = t^*(x)$ è data dalla somma di:

1) il lavoro compiuto (in Δ^*) dalle forze esterne;

2) l'energia della corda al tempo $t = 0$:

$$E_o = \int_0^L 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{t=0} = \int_0^l \frac{1}{2} (v_x^2 (x, o) + v_t^2 (x, o)) \, dx ;$$

3) il lavoro compiuto dalla tensione agente agli estremi:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_L^{B^*} 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=l} + \int_{A^*}^0 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=o} = \\ \displaystyle= \int_L^{B^*} v_x (l, t) \, v_t (l, t) \, dt + \int_{A^*}^0 v_x (o, t) \, v_t (o, t) \, dt . \end{cases}$$

Si noti che se A* e B* non sono i punti estremi della corda, il funzionale (2.2) fornisce l'energia sulla linea del tratto di corda $x_{A^*} \leq x \leq x_{B^*}$.

3. — Si osservi che la (2.3) vale per la *soluzione libera* $v\,(P)$.

Si consideri ora la *soluzione del problema con ostacolo* $u\,(P)$ e proponiamoci di far vedere che il funzionale (2.2) rappresenta ancora l'energia che compete alla corda sulla linea. Si dimostrerà, inoltre, che tale integrale permette di determinare l'enercia anche mentre il processo d'urto è in corso.

LEMMA. — *Siano* X_1 *e* Y_1 *due punti appartenenti alla prima linea di influenza* λ_1. *Risulta allora*

$$(3.1)\qquad \int_{X_1}^{Y_1} 2^{-1/2}\,(v_\xi^2\,d\xi - v_\eta^2\,d\eta)_{t=t_1(x)} = \int_{X_1}^{Y_1} 2^{-1/2}\,(u_\xi^2\,d\xi - u_\eta^2\,d\eta)_{t=t_1(x)}\ .$$

Dim. — Entrambi i membri di (3.1) hanno senso per quanto provato nei lemmi e nel teorema del n. 1. L'uguaglianza, poi, è ovvia conseguenza della (1.29).

Dimostriamo ora il *teorema dell'energia.*

TEOREMA. — *Sia* $\bar{\lambda}$ *una linea continua, di equazione* $t = \bar{t}\,(x)$, *lipschitziana con costante* ≤ 1, *di estremi* $\bar{A} \in \{x = 0, t > 0\}$ *e* $\bar{B} \in \{x = l, t > 0\}$. *Supposto che intersechi solamente la prima linea di influenza* λ_1 (*in un numero finito o infinito di punti*), *si prova che il funzionale* (2.2) *porge ancora la energia totale della corda sulla linea* $t = \bar{t}\,(x)$.

Dim. — Siano (fig. 3) σ_i, $(i = 1 \ldots \mu)$, le parti (anche infinite) di $\bar{\lambda}$ per cui risulta $\bar{t}\,(x) \leq t_1(x)$ e τ_j, $(j = 1 \ldots \nu)$, le parti (anche infinite) di $\bar{\lambda}$ per cui è $\bar{t}\,(x) > t_1(x)$; siano, poi, σ_{oi} e τ_{oj} le t-proiezioni di σ_i e τ_j sulla retta $t = 0$; infine sia τ_j' la proiezione di τ_j su λ_1. Indichiamo con Ω_i^*, $(i = 1 \ldots \mu)$ i domini delimitati da σ_i, σ_{oi} e dalle parallele condotte per gli estremi (di σ_i), e con $\omega_j' \cup \omega_j''$, $(j = 1 \ldots \nu)$, i domini analogamente determinati con riferimento a τ_j essendo ω_j' la parte limitata superiormente da λ_1 e ω_j'' la parte compresa tra λ_1 e $\bar{\lambda}$. Si osservi che, per il teorema ed i lemmi limostrati nel n. 1,

l'integrale

$$\int_{\bar{A}}^{\bar{B}} 2^{-1/2} (u_\eta^2 \, d\xi - u_\xi^2 \, d\eta)_{t=\bar{t}(x)}$$

esiste e si ha

$$(3.2) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\bar{A}}^{\bar{B}} 2^{-1/2} (u_\xi^2 \, d\xi - u_\eta^2 \, d\eta)_{t=\bar{t}(x)} = \sum_{i=1}^{\mu} \int_{\sigma_i} 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - \\ - v_\eta^2 \, d\eta)_{t=\bar{t}(x)} + \displaystyle\sum_{j=1} \int_{\tau_j} 2^{-1/2} (u_\xi^2 \, d\xi - u_\eta^2 \, d\eta)_{t=\bar{t}(x)} . \end{cases}$$

Si osservi che con riferimento a Ω_i^* si può utilizzare la (2.3) per calcolare ciascuno integrale esteso a σ_i:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\sigma_i} 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{t=\bar{t}(x)} = \int_{\Omega_i''} 2^{-1/2} (v_\xi + v_\eta) \, 2 \, q \, d\Delta + \\ + \mathrm{E}(\sigma_{oi}) + e_i, \quad i = 1 \ldots \mu, \end{cases}$$

dove e_i indica il lavoro compiuto dalla tensione agli estremi.

È ancora possibile utilizzare la (2.3) per calcolare sia l'energia

$$(3.4) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\tau_j'} 2^{-1/2} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{t=t_1(x)} = \int_{\omega_j'} 2^{-1/2} (v_\xi + v_\eta) \, 2 \, q \, d\Delta + \\ + \mathrm{E}(\tau_{oj}) + \varepsilon_i, \quad j = 1 \ldots \nu, \end{cases}$$

sia il funzionale

$$(3.5) \quad \begin{cases} \mathrm{E}(\tau_j) = \displaystyle\int_{\tau_j'} 2^{-1/2} (u_\xi^2 \, d\xi - u_\eta^2 \, d\eta)_{t=t_1(x)} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\omega_j''} 2^{-1/2} (u_\xi + u_\eta) \, 2 \, q \, d\Delta, \quad j = 1 \ldots \nu, \end{cases}$$

dove ε_j, analogamente a e_i, tiene conto del lavoro delle tensioni agli estremi. D'altra parte il lemma precedente implica

$$(3.6) \qquad \int_{\tau_j'} 2^{-\frac{1}{2}} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{t=t_1(x)} = \int_{\tau_j'} 2^{-\frac{1}{2}} (u_\xi^2 \, d\xi - u_\eta^2 \, d\eta)_{t=t_1(x)} \, .$$

Sommiamo le (3.3), (3.5) tenendo conto di (3.6) e del fatto che risulta

$$\sum_{i=1}^{\mu} e_i + \sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j = \int_{\bar{A}}^{0} 2^{-\frac{1}{2}} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=0} + \int_{L}^{\bar{B}} 2^{-\frac{1}{2}} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=l} \, .$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\bar{A}}^{\bar{B}} 2^{-\frac{1}{2}} (u_\xi^2 \, d\xi - u_\eta^2 \, d\eta)_{t=\bar{t}(x)} &= \int_{\bar{A}}^{0} 2^{-\frac{1}{2}} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=0} + \\ &+ \int_{L}^{\bar{B}} 2^{-\frac{1}{2}} (v_\xi^2 \, d\xi - v_\eta^2 \, d\eta)_{x=0} + E_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{\Omega_i''} 2^{-\frac{1}{2}} (v_\xi + v_\eta) \, 2 \, q \, d\Delta + \\ &+ \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\omega_j'} 2^{-\frac{1}{2}} (v_\xi + v_\eta) \, 2 \, q \, d\Delta + \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\omega_j''} 2^{-\frac{1}{2}} (u_\xi + u_\eta) \, 2 \, q \, d\Delta \end{aligned}$$

cioè il funzionale a primo membro è uguale alla somma dell'energia che la corda possiede nell'istante $t = 0$ e del lavoro eseguito dalle forze esterne e dalle tensioni agli estremi nel tempo $0 \leq t \leq t(x)$. Q.E.D.

Nel teorema si è fatto riferimento a λ_1, e si è supposto che $\bar{\lambda}$ intersechi solamente λ_1, ma è chiaro che continua a sussistere in riferimento ad una qualsiasi λ_n ed anche se $\bar{\lambda}$ incontra più linee di influenza.

Dal teorema segue, come caso particolare per $\mu = 0$, il seguente corollario.

COROLLARIO. — *Se la linea* $\bar{\lambda}$, *definita nell'enunciato del teorema precedente, non interseca linee di influenza ed inoltre* $\bar{t}(x) > t_1(x)$, *il teorema continua a sussistere.*

Si può concludere che il *funzionale* (2.2) *rappresenta l'energia della corda anche in presenza di ostacolo* ed è pienamente giustificato il nome di *funzionale dell'energia* che ad esso è stato dato.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AMERIO and G. PROUSE, *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle.* Rend. di Matematica, (2), 2, ser. VI (1975).

[2] C. CITRINI, *Sull'urto parzialmente elastico o anelastico di una corda vibrante contro un ostacolo.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 49, serie VIII (1975).

[3] L. AMERIO, *Su un problema di vincoli unilaterali per l'equazione non omogenea della corda vibrante.* I.A.C., Pubblicazioni, serie III, n. 109 (1976).

[4] C. CITRINI, *Energia ed impulso nell'urto parzialmente elastico o onelastico di una corda vibrante contro un ostacolo.* Rend. Ist. Lomb. (1976).

[5] L. AMERIO, *On the motion of a string vibrating through a moving ring with continously variable diameter.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, LXII, serie VIII (1977).

[6] C. CITRINI, *The enery theorem in the impact of a string vibrating against a point-shaped obstacle.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, LXII, serie VIII (1977).

[7] L. AMERIO, *A unilateral problem for a nonlinear vibrating string equation.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei LXIV, serie VIII (1978).

[8] L. AMERIO, *Continouous solutions of the problem of a string vibrating against an obstacle.* Rend. Sem. Mat. Università di Padova (in corso di stampa)(1978).

[9] B. D'ACUNTO, *Sull'urto elastico di una corda in un caso non lineare.* Ricerche di Matematica, 27, n. 2 (1978).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e M. Curzio.

Su un problema di minimalità riguardante le torri di Sylow nei gruppi finiti

Nota di CLORINDA DE VIVO (Napoli)
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 20 gennaio 1979)

SUMMARY — In [3] we defined the $\tau_{\langle 2}$-groups, if $\langle$ denotes a well order of the primes, and we characterized the simple $\tau_{\langle 2}$-groups. In this paper we construct the non solvable $\tau_{\langle 2}$-groups and we investigate the Sylow's structure of solvable $\tau_{\langle 2}$-groups.

SOMMARIO. — In [3] sono stati definiti i $\tau_{\langle 2}$-gruppi, dove $\langle$ denota un buon ordinamento dei primi, e sono stati caratterizzati i $\tau_{\langle 2}$-gruppi semplici. Nella presente nota si caratterizzano i $\tau_{\langle 2}$-gruppi non risolubili e si indaga sulla struttura di Sylow di quelli risolubili.

In una precedente nota [3] sono stati definiti i $\tau_{\langle 2}$-gruppi finiti, dove $\langle$ denota un buon ordinamento dei primi, alla maniera seguente.

Sia G un gruppo finito e si denoti con $\pi(G)$ l'insieme dei divisori primi di $|G|$. Fissato nell'insieme dei numeri primi un buon ordinamento (che sarà denotato con il simbolo $\langle\ \rangle$), si dirà che G possiede torre di Sylow di tipo $\langle$ (o che G è un $\tau_{\langle}$-gruppo oppure che $G \in (\tau_{\langle})$), se, posto $p_1 \langle p_2 \langle \ldots \langle p_t\ (p_i \in \pi(G))$, esiste un sottogruppo normale di G di ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$, per ogni $i = 1,2,\ldots,t$, dove è $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$.

Un gruppo $G \notin (\tau_{\langle})$ e tale che $H \in (\tau_{\langle})$, per ogni sottogruppo proprio H di G, sarà detto $\tau_{\langle 1}$-gruppo (ovvero si dirà che $G \in (\tau_{\langle 1})$). Un $\tau_{\langle 2}$-gruppo sarà definito dall'asse $G \notin (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$ e $H \in (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$, per ogni sottogruppo proprio H di G.

In [3] sono stati caratterizzati i $\tau_{\langle 2}$-gruppi semplici. Nella presente nota si dà un procedimento atto a costruire i $\tau_{\langle 2}$-gruppi non risolubili e si indaga sulla struttura di Sylow dei $\tau_{\langle 2}$-gruppi risolubili.

Le notazioni e la terminologia sono « standard ».

1. Si richiamano, per comodità di lettura, alcuni risultati contenuti in [3].

1.1. (RÉDEI [6]) — *Per un gruppo minimale non nilpotente* G *si ha*:

(a) $|G| = p^m q^n$ ($p \neq q$ *primi distinti*), *con* $G_p \lhd G$ *e* G_q *ciclico*
(b) $\Phi(G_p) \cup \Phi(G_q) \leq Z(G)$
(c) *exp.* $G_p \leq p^2$, *exp.* $G_p = p$ *quando* $p > 2$
(d) $G_p/\Phi(G_p)$ *normale minimale in* $G/\Phi(G_p)$.

1.2. (MILLER-MORENO-RÉDEI) [6] — *Sia* G *minimale non abeliano e* G *abbia ordine non potenza di numero primo. Allora*:

(a) $|G| = p^m q^n$ ($p \neq q$ *primi distinti*), *con* $G_p \lhd G$ *e* G_q *ciclico*
(b) *exp.* $G_p = p$
(c) G_p *normale minimale in* G
(d) $Z(G) = \Phi(G_q)$.

1.3. (ITÔ [5]) — *Sia p un numero primo. Se* G *è un gruppo minimale non p-nilpotente, allora* G *è minimale non nilpotente.*

1.4. — *Se* G *è un gruppo minimale non nilpotente con un sottogruppo di Sylow normale e ciclico, si ha*:

(a) G *è minimale non abeliano*
(b) $|G| = p\, q^n$ ($p > q$) *e* $G_p \lhd G$

Dim. — Cfr., ad esempio, [1].

1.5. — *Un gruppo diedrale minimale non nilpotente ha ordine* $2p$ (p *primo* > 2).

Dim. — Caso particolare di 1.4.

1.6. — *Un gruppo* G *è* $\tau_{\langle 1}$*-gruppo se, e solo se, è minimale non nilpotente* (*d'ordine* $p^m q^n$, $q < p$ *e* $G_p \lhd G$).

Dim. — Cfr. 1.6 di [3].

1.7. — *Un* $\tau_{\langle 2}$*-gruppo ha tutti i sottogruppi propri risolubili.*

Dim. — Cfr. 1.7. di [3].

1.8. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *ed* H *un sottogruppo normale di* G. *Si ha* $G/H \in (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1}) \cup (\tau_{\langle 2})$.

Dim. — Ovvia.

Si richiama infine il teorema conclusivo di [3].

TEOREMA 1.9. — *I* $\tau_{\langle 2}$*-gruppi semplici sono tutti e soli i gruppi seguenti*:

(I) $PSL(2, p)$, *p primo* > 3; $p^2 \not\equiv 1$ (*mod.* 5); $p^2 \not\equiv 1$ (*mod.* 16), *con*

(I_1) $\langle$ *ordinamento qualsiasi dei primi se* $p = 5$;

(I_2) $\langle$ *ordinamento dei primi per cui* $2 = max_{\langle} \pi(PSL(2, p))$;

$p \langle q$ *per ogni* $q \backslash p - 1/2$, *se* $p \neq 5$ *e* $p - 1/2$, $p + 1/2$ *non primi*;

(I_3) $\langle$ *ordinamento dei primi di uno dei tipi seguenti*:

($I_{3,1}$) $2 = max_{\langle} \pi(PSL(2, p))$,

($I_{3,2}$) $p = max_{\langle} \pi(PSL(2,p))$; $q \langle 2$ *per ogni* $q \backslash p + 1/2((q \neq 2)$,

($I_{3,3}$) $p - 1/2 = max_{\langle} \pi(PSL(2, p))$; $q \langle 2$ *per ogni* $q \in \pi(PSL(2, p)) - \{2, p, p - 1/2\}$,

se $p \neq 5$ *e* $p - 1/2$ *primo;*

(I_4) $\langle$ *ordinamento dei primi di uno dei tipi seguenti*:

($I_{4,1}$) $= (I_2)$

($I_{4,2}$) $p + 1/2 = max_{\langle} \pi(PSL(2, p))$; $p = min_{\langle} \pi(PSL(2, p))$; $q \langle 2$ *per ogni* $q \in \pi(PSL(2, p)) - \{2, p + 1/2\}$,

se $p \neq 5$ *e* $p + 1/2$ *primo;*

(II) $PSL(2, 2^p)$, *p primo;* $2^p - 1$ *primo, con*

(II_1) $\langle$ *ordinamento qualsiasi dei primi se* $p = 2$;

(II_2) $\langle$ *ordinamento dei primi di uno dei tipi seguenti*:

($II_{2,1}$) $2 = max_{\langle} \pi(PSL(2, 2^p))$,

($II_{2,2}$) $2^p - 1 = max_{\langle} \pi(PSL(2,2^p))$; $q \langle 2$ *per ogni* $q \backslash 2^p + 1$,

se $p \neq 2$;

(III) $\mathrm{PSL}(2,3^p)$, *p primo* > 2, *con*

(III$_1$) $<$ *ordinamento dei primi per cui* $2 = max_{<} \pi(\mathrm{PSL}(2, 3^p))$;

$3 < q$ *per ogni* $q \backslash 3^p - 1/2$, *se* $3^p - 1/2$ *non primo;*

(III$_2$) $<$ *ordinamento dei primi di uno dei tipi seguenti:*

(III$_{2,1}$) $2 = max_{<} \pi(\mathrm{PSL}(2, 3^p))$,

(III$_{2,2}$) $3 = max_{<} \pi(\mathrm{PSL}(2,3^p))$; $q < 2$ *per ogni* $q \backslash 3^p + 1/2$ $(q \neq 2)$

(III$_{2,3}$) $3^p - 1/2 = max_{<} \pi(\mathrm{PSL}(2,3^p))$; $q < 2$ *per ogni* $q \backslash 3^p + 1/2\,(q \neq 2)$,

se $3^p - 1/2$ *primo;*

(IV) $\mathrm{S}_z(2^p)$, *p primo* > 2; $2^p - 1$ *primo, con*

(IV$_1$) $<$ *ordinamento dei primi per cui* $2^p - 1 = max_{<} \pi(\mathrm{S}_z(2^p))$; $q < 2$ *per ogni* $q \in \pi(\mathrm{S}_z(2^p)) - \{2, 2^p - 1\}$.

Dim. — Cfr. [3].

2. - $\tau_{<2}$-GRUPPI NON RISOLUBILI

Un $\tau_{<2}$-gruppo risolubile può non essere semplice, come prova la considerazione del gruppo speciale lineare SL (2, 5), che è $\tau_{<2}$-gruppo rispetto all'ordinamento inverso dell'ordinamento naturale tra i primi (cfr. [2]).

Determinati i $\tau_{<2}$-gruppi semplici (TEOR. 1.9), si perverrà ad una costruzione dei $\tau_{<2}$-gruppi non risolubili attraverso le considerazioni seguenti.

2.1. — *Sia* $G \in (\tau_{<2})$ *e non risolubile. Allora* $\Phi(G)$ *è il massimo sottogruppo normale di* G *e* $G/\Phi(G)$ *è isomorfo ad uno dei gruppi di cui al* TEOR 1.9. *Si ha inoltre* $\Phi(G) = Z(G)$.

Dim. — Sia H un sottogruppo normale proprio di G e, negando la tesi, si abbia $H \not\leq \Phi(G)$. Risulta $G = HM$, per un conveniente sottogruppo massimale M e si ha $G/H \simeq M/M \cap H$, da cui la risolubilità di G, come conseguenza di quella di $H \in (\tau_{<}) \cup (\tau_{<1})$ e di $M \in (\tau_{<}) \cup (\tau_{<1})$.

Si è così provato che $\Phi(G)$ è il massimo sottogruppo normale proprio di G e che $G/\Phi(G)$ è un $\tau_{\langle 2}$-gruppo semplice e quindi isomorfo ad uno dei gruppi di cui al TEOR. 1.9.

Sia ora M massimale in G ed $M \in (\tau_{\langle 1})$; si ha (cfr. 1.6.) M minimale non nilpotente e quindi, avendosi $M/\Phi(G)$ massimale in $G/\Phi(G) \simeq$ ad uno dei gruppi di cui al TEOR. 1.9., sarà $\Phi(G) \leq Z(M)$ (cfr. 1.1.); ne segue $M \leq C_G(\Phi(G)) \lhd G$ e quindi, essendo $G/\Phi(G)$ semplice, $G = C_G(\Phi(G))$, ossia $\Phi(G) \leq Z(G)$.

La dimostrazione si completa facilmente, ove si ricordi che $\Phi(G)$ è il massimo sottogruppo normale proprio di G.

2.2. - *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *e* $G/\Phi(G) \simeq A_5$. *Allora* $\Phi(G) = Z(G)$ *e exp.* $\Phi(G) \leq 2$. *In particolare, se* $2 \neq max_{\langle}\, \pi(G)$, *è* $|\Phi(G)| \leq 2$.

Dim. — Siano M, N ed L sottogruppi massimali di G tali che sia: $M/\Phi(G) \simeq A_4$, $N/\Phi(G)$ ed $L/\Phi(G)$ diedrale di ordini rispettivamente 10 e 6. Con q divisore primo di $|\Phi(G)|$, se fosse $q = 5$, M ed L sarebbero $\tau_{\langle}$-gruppi, in quanto $|\tau(M)| = |\pi(L)| = 3$, quindi tali sarebbero anche $M/\Phi(G)$ ed $L/\Phi(G)$, da cui l'assurdo $2 \langle 3$ e $3 \langle 2$ simultaneamente; così è $\Phi(G) = \Phi(G)_2 \times \Phi(G)_3$.

Si supponga, in primo luogo, $2 = min_{\langle}\, \pi(G)$: si ha $N/\Phi(G) \in \in (\tau_{\langle 1})$ e quindi $N \in (\tau_{\langle 1})$, da cui N minimale non 5-nilpotente (cfr. (1.6.), ne segue $\Phi(G)_3 = 1$ e $\Phi(G) = \Phi(G)_2$ ciclico, al pari di N_2 (cfr. 1.1.). D'altro canto, essendo $M_2 = G_2$, si ha $\Phi(G) = \Phi(G_2)$, ove si tenga conto che $M_3/\Phi(G)$ è abeliano elementare e che $\Phi(G) < N_2$ ciclico.

Sia ora K massimale in M e K non nilpotente; poiché $K \in (\tau_{\langle})$, si ha $K_2\,\Phi(G) = K_2\,\Phi(G_2) \lhd M$, da cui, tenuto conto che $M_2/\Phi(G)$ è normale minimale in $M/\Phi(G)$, $K_2\,\Phi(G_2) = M_2 = G_2$ e quindi l'assurado $G_2 = K_2$.

Quanto visto assicura che M è minimale non nilpotente, ne segue *exp.* $\Phi(G) \leq 2$ e quindi $|\Phi(G)| \leq 2$, ove si ricordi che $\Phi(G)$ è ciclico.

Sia ora $2 \neq \min_{\langle}\, \pi(G)$ e si distinguano i casi seguenti:

1) $2 \langle 3$

Si ha $L \in (\tau_{\langle 1})$ ossia (cfr. 1.6.) L minimale non 3-nilpotente, ne segue *exp.* $L_3 = 3$ e $\Phi(G)_2$ ciclico al pari di L_2. D'altra parte, avendosi $\Phi(G) = Z(G)$ (cfr. 2.1.) ed $|L_3/\Phi(G)_3| = 3$, sarà L_3 abeliano e quindi (cfr. 1.2.) $\Phi(G)_3 = 1$. Ragionando poi su M come si è fatto nel caso precedente, si trova $|\Phi(G)| \leq 2$.

2) $3 \langle 2$

Si ha $M \in (\tau_{\langle 1})$, ossia M minimale non 2-nilpotente, ne segue $G_3 = M_3$ ciclico ed *exp.* $\Phi(G)_2 \leq 2$. D'altro canto è $G_3 \simeq L_3$ ciclico, ne segue $\Phi(G)_3 = 1$, in quanto $\Phi(G) = Z(G)$ ed $L/\Phi(G)$ diedrale di ordine 6. Infine, se è anche $2 \langle 5$, si ha $N \in (\tau_{\langle 1})$ e quindi, come in precedenza, $|\Phi(G)| \leq 2$.

2.3. — *Sia* $G/\Phi(G) \simeq A_5$, $\Phi(G) = Z(G)$ *e* *exp.* $\Phi(G) \leq 2$. *Allora* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *per qualche ordinamento* $\langle$ *dei primi. In particolare si ha*

(I) $\langle$ *è un ordinamento qualsiasi dei primi, se* $|\Phi(G)| \leq 2$;

(II) $\langle$ *è un ordinamento dei primi per cui* $2 = max_{\langle}\, \pi(G)$, *se* $|\Phi(G)| > 2$.

Dim. — Nelle ipotesi di cui all'enunciato si ha ([2]) $G \in (S_2)$[1], ne segue $G \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento dei primi per cui $2 = max_{\langle}\, \pi(G)$, ove si osservi che G non possiede sottogruppi di ordine divisibile per 15.

Sia ora, in particolare, $|\Phi(G)| \leq 2$ e siano M, N e L come nella dim. 2.2.

Se $|\Phi(G)| = 1$, l'asserto $G \in (\tau_{\langle 2})$, qualunque sia l'ordinamento $\langle$, segue dal TEOR. 1.9. Sia allora $|\Phi(G)| = 2$.

Si ha M minimale non nilpotente: infatti, se ciò non fosse, esisterebbe in M un sottogruppo massimale K non nilpotente e quindi $K \not\trianglelefteq \Phi(G)$, ne seguirebbe $M = K \times \Phi(G)$, quindi $G_2 = M_2 = K_2 \times \Phi(G)$ e, per un noto teorema di *Gashütz*, si avrebbe lo spezzamento di G su $\Phi(G)$. Dopo di ciò è $M \in \tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$, qualunque sia l'ordinamento $\langle$.

D'altro canto non può essere M_2 abeliano, (altrimenti (cfr. 1.2.) sarebbe M_2 normale minimale in M), ne segue $M_2 \simeq Q_8$ da cui N_2 ed L_2 ciclici e quindi N ed L minimali non nipotenti, ossia $N \in (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$ ed $L \in (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$, per ogni ordinamento $\langle$ dei primi.

Dopo quanto sopra è $G \in (\tau_{\langle 2})$, qualunque sia l'ordinamento $\langle$.

2.4. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *e* $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, p)$, *con p primo* > 5 *e* $p^2 \not\equiv 1$ (*mod.* 5 *e* 16). *Allora* $\Phi(G) = Z(G) = A \times B$, *dove exp.* $A \leq 2$ *e* B *è un 3-gruppo ciclico. In particolare si ha*:

(I) *se* $2 \neq max_{\langle}\, \pi(G)$, *è* $|\Phi(G)| \leq 2$;

(II) *se* $2 = max_{\langle}\, \pi(G)$ *e* $\Phi(G) \neq 1$, *è* $p \langle q$ *per ogni* $q \backslash p - 1/2$.

[1] Con S si è denotata la proprietà gruppale della supersolubilità.

Dim. — Siano M, L, N ed R sottogruppi massimali di G tali che sia: $M/\Phi(G) \simeq A_4$, $L/\Phi(G)$ ed $N/\Phi(G)$ diedrali di ordini rispettivamente $p+1$ e $p-1$, $R/\Phi(G)$ prodotto semidiretto (non diretto) di un gruppo di ordine p per un gruppo (ciclico) di ordine $p-1/2$.

Il TEOR. 1.9. assicura che $<$ è un ordinamento per cui $3 < 2$, ne segue $M \in (\tau_{(1})$, ossia (cfr. 1.6.) M minimale non 2-nilpotente e quindi $\Phi(G) = \Phi(G)_2 \times \Phi(G)_3$, dove $exp.\, \Phi(G)_2 \leq 2$ e $\Phi(G)_3$ ciclico al pari di M_3. Sia ora $2 = max_{<}\, \pi(G)$ e $\Phi(G) \neq 1$.

Se $p-1/2$ non è primo, l'asserto $p < q$, per ogni $q \backslash p - 1/2$, discende dal TEOR. 1.9. Sia allora $p-1/2$ primo. Se fosse $p-1/2 < p$, R sarebbe $\tau_{(1}$-gruppo, in quanto non p-nilpotente, contro il fatto che è $|\pi(R)| > 2$, e quindi si ha ancora $p < q$, per ogni $q \backslash p - 1/2$.

Si supponga infine $2 \neq max_{<}\, \pi(G)$ e $\Phi(G) \neq 1$. Per il TEOR. 1.9. sono possibili solo le due eventualità seguenti:

1) $p-1/2$ primo

Posto $r = max_{<}\, \pi(G)$, il TEOR. 1.9. assicura che $r = p$ oppure $r = p - 1/2$. Il primo caso non può presentarsi, in quanto si avrebbe, come visto in precedenza, $R \in (\tau_{(1})$, contro l'essere $|\pi(R)| > 2$. È quindi $p - 1/2 = max_{<}\, \pi(G)$, da cui $N \in (\tau_{(1})$, in quando non p-$1/2$-nilpotente, ne segue $\Phi(G)_3 = 1$ e $\Phi(G)_2$ ciclico al pari di N_2, quindi $|\Phi(G)| = 2$, ove si ricordi che $exp.\, \Phi(G)_2 \leq 2$.

2) $p+1/2$ primo

Dal TEOR. 1.9. discende $p + 1/2 = max_{<}\, \pi(G)$, ne segue $L \in (\tau_{(1)}$, in quanto non $p+1/2$-nilpotente e quindi, come nel caso precedente, $\Phi(G)_3 = 1$ e $|\Phi(G)| = 2$.

2.5. — *Sia* $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, p)$, *con* p *primo* > 5, $p^2 \not\equiv 1$ (*mod.* 5 *e* 16), $\Phi(G) = Z(G) = A \times B$, *dove exp.* $A \leq 2$ *e* B 3*-gruppo ciclico. Allora* $G \in (\tau_{(2})$ *per qualche ordinamento* $<$ *dei primi. In particolare si ha*:

(I) $<$ *è un ordinamento dei primi per cui* $2 = max_{<}\, \pi(G)$ *e* $p < q$ *per ogni* $q \backslash p - 1/2$, *se* $|\Phi(G)| > 2$;

(II) $<$ *è un ordinamento di uno dei tipi seguenti*

(II_1) = (I)

(II_2) $p - 1/2 = max_{<}\, \pi(G)$ *e* $q < 2$ *per ogni* $q \backslash p + 1/2$, *se* $p - 1/2$ *è primo,*

(II_3) $p + 1/2 = max_{\langle}\, \pi(G)$, $p = min_{\langle}\, \pi(G)$ *e* $q < 2$ *per ogni* $q \backslash p - 1/2$, *se* $p + 1/2$ *è primo,*

se $|\Phi(G)| = 2$.

Dim. — Nelle ipotesi di cui all'enunciato si ha $G \in (S_2)$ ([2]) e quindi $G \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (I), ove si tenga presente che $\Phi(G) = Z(G)$ e che $G/\Phi(G)$ non possiede sottogruppi di ordine divisibile né per pr, *con* r *primo* $\neq 2$ e $r \backslash p + 1/2$, né per $r_1 r_2$, con r_i primo $\neq 2$ $(i = 1, 2)$ ed $r_1 \backslash p - 1/2$ e $r_2 \backslash p + 1/2$.

Dopo quanto sopra, per completare la dimostrazione, basterà provare che, se è $|\Phi(G)| = 2$, si ha $G \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (II_2) o (II_3), a seconda che sia rispettivamente $p - 1/2$ primo oppure $p + 1/2$ primo, in quanto nella dim. di 2.4. si è provato che, se $\Phi(G) \neq 1$ e $2 \neq max_{\langle}\, \pi(G)$, è $max_{\langle}\, \pi(G) = p \pm 1/2$, a seconda che sia $p + 1/2$ primo oppure $p - 1/2$ primo.

Con M, N, L ed R con il significato come nella dim. di 2.4., si supponga, in primo luogo, $p - 1/2$ primo. Dal TEOR. 1.9. discende $G/\Phi(G) \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (II_2). Si ha allora $M/\Phi(G) \in (\tau_{\langle 1})$, da cui M minimale non 2-nilpotente: infatti, se così non fosse, si avrebbe, come visto in casi precedenti, che G si spezza su $\Phi(G)$; è allora $M \in (\tau_{\langle 1})$. D'altro canto, poiché $\Phi(G) \lhd M$, l'essere M minimale non 2-nilpotente comporta M_2 non abeliano e quindi $M_2 \simeq Q_8$: da ciò e dall'essere $M_2 = G_2$ si deduce che L_2 ed R_2 sono ciclici e quindi che L ed R sono minimali non nilpotenti; dopo di ciò è $G \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (II_2), ove si osservi che $N \in (\tau_{\langle})$.

Sia ora $p + 1/2$ primo. Il TEOR. 1.9. fornisce $G/\Phi(G) \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (II_3) e l'asserto $G \in (\tau_{\langle 2})$ segue con considerazioni strettamente analoghe a quelle fatte nel caso precedente.

2.6. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *e* $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 2^p)$, *con* p *primo* > 2 *e* $2^p - 1$ *primo. Allora* $\Phi(G) = Z(G)$ *ed exp.* $\Phi(G) \leq 2$. *In particolare, se* $2 \neq max_{\langle}\, \pi(G)$, *è* $\Phi(G) = 1$.

Dim. — Siano M, N ed L sottogruppi massimali di G tali che sia: $M/\Phi(G)$ prodotto semidiretto (non diretto) di un gruppo di ordine 2^p (normale minimale in $M/\Phi(G)$) per un gruppo di ordine $2^p - 1$, $N/\Phi(G)$ ed $L/\Phi(G)$ diedrali di ordini rispettivamente $(2^p - 1)2$ e $(2^p + 1)2$.

Il TEOR. 1.9. assicura che per $\langle$ sono possibili le due eventualità seguenti:

1) $2 = \max_{\langle} \pi(G)$

Si ha $M \in (\tau_{\langle 1})$, ossia M minimale non $(2^p - 1)$-nilpotente, ne segue *exp.* $M_2 \leq 4$ e M_{2^p-1} ciclico $\Phi(G) = \Phi(G)_2 \times \Phi(G)_{2^p-1}$, con *exp* $\Phi(G)_2 \leq 2$ e $\Phi(G)_{2^p-1}$ ciclico.

D'altro canto è $N_{2^p-1} \simeq M_{2^p-1} = G_{2^p-1}$ e quindi N_{2^p-1} ciclico; ne segue $\Phi(G)_{2^p-1} = 1$, ove si tenga presente che è $\Phi(G) = Z(G)$ ed $N/\Phi(G)$ diedrale di ordine $(2^p - 1)\,2$.

2) $2^p - 1 = \max_{\langle} \pi(G)$, $q \langle 2$ per ogni $q \backslash 2^p + 1$.

Si ha $N \in (\tau_{\langle})$, ossia N minimale non $(2^p - 1)$-nilpotente, ne segue $\Phi(G) = \Phi(G)_{2^p-1} \times \Phi(G)_2$, *exp.* $N_{2^p-1} = 2^p - 1$ e $\Phi(G)_2$ ciclico, al pari di N_2. Con considerazioni già fatte in casi precedenti, si ottiene N_{2^p-1} normale minimale in N, quindi $\Phi(G)_{2^p-1} = 1$ e M minimale non 2-nilpotente, quindi $|\Phi(G)| \leq 2$.

Sia, per assurdo $|\Phi(G)| = 2$. Poiché M è minimale non nilpotente, con $M_2 = G_2 > N_2$ ciclico, sarà $N_M(N_2) = G_2$, ne segue che i sottogruppi minimali di $G_2/\Phi(G)$, essendo in numero di $2^p - 1 = |M/N_M(N_2)|$, sono tutti e soli i coniugati di $N_2/\Phi(G)$ in $M/\Phi(G)$: da ciò e dall'essere $G_2/\Phi(G)$ normale minimale in $M/\Phi(G)$ si deduce che [2] G_2 ha tutti i sottogruppi normali, ossia G_2 abeliano oppure $G_2 \simeq Q_8$: nel primo caso si ha l'assurdo G_2 non normale minimale in M, nel secondo caso si avrebbe $p = 2$, contro l'ipotesi.

2.7. — *Sia* $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 2^p)$, *con p primo* > 2, $2^p - 1$ *primo,* $\Phi(G) = Z(G)$ *di esponente* ≤ 2. *Allora* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *per qualche ordinamento* $\langle$ *dei primi. In particolare, se* $\Phi(G) \neq 1$, $\langle$ *è un ordinamento per cui* $2 = max_{\langle} \pi(G)$.

Dim. — Nelle ipotesi di cui all'enunciato si ha $G \in (S_2)$ ([2]) e quindi $G \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento per cui $2 = \max_{\langle} \pi(G)$, ove si tenga presente che $\Phi(G) = Z(G)$ e che $G/\Phi(G)$ non possiede sottogruppi di ordine divisibile per $(2^p - 1)\,r$, con r divisore primo di $2^p + 1$. La dimostrazione si completa tenendo presente 2.6.

[2] Con $K \trianglelefteq G_2$ si ha $\Phi(K) = 1$ e quindi, con $x \in K$ è $\langle x, \Phi(G) \rangle/\Phi(G)$ non coniugato a $N_2/\Phi(G)$.

2.8. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *e* $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 3^p)$, *con* p *primo* > 2. *Allora* $\Phi(G) = Z(G)$ *ed exp.* $\Phi(G) \leq 2$ *oppure exp.* $\Phi(G) \leq 3$. *In particolare si ha*:

(I) *Se* $2 \neq max_{\langle} \pi(G)$ *e* $\Phi(G) \neq 1$, *è* $3 = max_{\langle} \pi(G)$, $3^p - 1/2$ *primo* $\langle 2$ *e exp.* $\Phi(G) = 3$

(II) *se* $2 = max_{\langle} \pi(G)$ *e* $\Phi(G) \neq 1$, *è exp.* $\Phi(G) = 2$ *e* $3 \langle q$ *per ogni* $q \backslash 3^p - 1/2$.

Dim. — Siano M, N, L ed R sottogruppi massimali di G tali che sia $M/\Phi(G) \simeq A_4$, $N/\Phi(G)$ e $L/\Phi(G)$ diedrali di ordini rispettivamente $3^p - 1$ e $3^p + 1$, $R/\Phi(G)$ prodotto semidiretto (non diretto) di un gruppo di ordine 3^p (normale minimale in $R/\Phi(G)$) per un gruppo (ciclico) di ordine $3^p - 1/2$.

Supposto $\Phi(G) \neq 1$, sia, in primo luogo, $2 \neq \max_{\langle} \pi(G)$.

Dal TEOR. 1.9. discende $3^p - 1/2$ primo e le due eventualità seguenti per l'ordinamento $\langle$:

1) $3^p - 1/2 = max_{\langle} \pi(G)$, $q \langle 2$ per ogni $q \backslash 3^p + 1/2$ $(q \neq 2)$

Si ha $N \in (\tau_{\langle 1})$, ossia (cfr. 1.6.) N minimale non-$(3^p - 1/2)$-nilpotente, ne segue $\Phi(G) = \Phi(G)_2 \times \Phi(G)_{3^p-1/2}$, exp. $N_{3^p-1/2} = 3^p - 1/2$ e $\Phi(G)_2$ ciclico al pari di N_2; poiché $\Phi(G) = Z(G)$ (cfr. 2.1.) e $3^p - 1/2 = |N_{3^p-1/2}/\Phi(G)_{3^p-1/2}|$, sarà $N_{3^p-1/2}$ abeliano e quind i (cfr. 1.2) $\Phi(G)_{3^p-1/2} = 1$.

D'altro canto sarà M minimale non nilpotente [3] e quindi $|\Phi(G)| = 2$, ove si ricordi che $1 \neq \Phi(G) = \Phi(G)_2$ ciclico; ma l'essere M minimale non nilpotente comporta $G_2 = M_2$ abeliano oppure $M_2 \simeq Q_8$: il primo caso non può presentarsi in quanto $\Phi(G) \lhd M$ (cfr. 1.2.); il secondo caso conduce all'assurdo L_2 ciclico, contro l'essere $L/\Phi(G)$ diedrale.

2) $3 = \max_{\langle} \pi(G)$, $q \langle 2$ per ogni $q \backslash 3^p + 1/2$ $(q \neq 2)$

Si ha $R \in (\tau_{\langle 1})$, ossia R minimale non 3-nilpotente, ne segue $\Phi(G) = \Phi(G)_3 \times \Phi(G)_{3^p-1/2}$, exp. $R_3 = 3$ e $\Phi(G)_{3^p-1/2}$ ciclico, al pari di $R_{3^p-1/2} = G_{3^p-1/2}$.

[3] Se esistesse un K massimale in M, con K non nilpotente, si avrebbe $M = K\Phi(G)$, ne seguirebbe, come visto in casi precedenti, $G_2/K_2 \cap \Phi(G) = M_2/K_2 \cap \Phi(G) = K_2/K_2 \cap \Phi(G) \times \Phi(G)/K_2 \cap \Phi(G)$, da cui lo spezzamento di $G/K_2 \cap \Phi(G)$ su $\Phi(G)/K_2 \cap \Phi(G)$.

D'altro canto è $N_{3^p-1/2}$ ciclico, perché isomorfo a $G_{3^p-1/2}$, ne segue [4] A minimale non nilpotente, dove si è denotato con A il $\{3^p - 1/2\}$, sottogruppo di Hall normale di N, e quindi $|A_{3^p-1/2}| = |N_{3^p-1/2}| = 3^p - 1/2$, ossia $\Phi(G)_{3^p-1/2} = 1$.

Infine non può aversi $2 < 3^p - 1/2$, in quanto, se così fosse, si avrebbe $N \in (\tau_{<1})$, contro l'essere $|\pi(N)| > 3$, per l'ipotesi $\Phi(\Phi) = \Phi(G)_3 \neq 1$.

Da quanto sopra si deduce immediatamente $\exp. \Phi(G) = \exp. \Phi(G)_3 = \exp. R_3 = 3$ e $3^p - 1/2 < 2$, ossia la (I).

Sia ora $\Phi(G) \neq 1$ e $2 = max_{<} \pi(G)$.

Poiché è $3 < 2$, si ha $M \in (\tau_{<1})$, ossia M minimale non 2-nilpotente, ne segue $\Phi(G) = \Phi(G)_2 \times \Phi(G)_3$, $\exp. \Phi(G)_2 \leq 2$ e $\Phi(G)_3$ ciclico, al pari di M_3.

Si ha poi $\Phi(G_3) = \Phi(R_3) = \Phi(G)_3$, ove si tenga presente che $G_3/\Phi(G)_3$ è normale minimale in $R/\Phi(G)_3$ e che M_3 è ciclico.

Ciò premesso, sia q un divisore primo di $3^p - 1/2$ e sia $S/\Phi(G)$ un sottogruppo di $R/\Phi(G)$ di ordine $3^p q$; l'essere p primo e $q \neq 2$ comporta $p = gss(3, q)$ e quindi $S_3/\Phi(G_3) = R_3/\Phi(G_3)$ normale minimale in $S/\Phi(G_3)$; denotato con H il $\{3, q\}$-sottogruppo di Hall normale di S, sarà H minimale non nilpotente [5], quindi $H_3 = S_3 = R_3$ di esponente 3, da cui $\Phi(G)_3 = 1$.

Si ha poi $3 < q$, per ogni $q \backslash 3^p - 1/2$, perché l'essere $\Phi(G) \neq 1$ e $\Phi(G)_3 = 1$ comporta $|\pi(R)| > 2$, ossia $R \in (\tau_{<})$.

Dopo quanto sopra si deduce immediatamente la (II).

2.9. — *Sia* $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 3^p)$, *con p primo* > 2, $\Phi(G) = Z(G)$ *e* $\exp. \Phi(G) \leq 2$ *oppure* $3^p - 1/2$ *primo ed* $\exp. \Phi(G) \leq 3$. *Allora* $G \in (\tau_{<2})$, *per qualche ordinamento* $<$ *dei primi. In particolare si ha:*

(I) $<$ *è un ordinamento per cui* $2 = max_{<} \pi(G)$ *e* $3 < q$, *per ogni* $q \backslash 3^p - 1/2$, *se* $\exp. \Phi(G) = 2$;

(II) $<$ *è un ordinamento per cui* $3 = max_{<} \pi(G)$, $3^p - 1/2 < 2$ *e* $q < 2$ *per ogni* $q \backslash 3^p + 1/2$, *se* $\exp. \Phi(G) = 3$ *e* $3^p - 1/2$ *è primo.*

Dim. — Se $\Phi(G) = 1$, l'asserto segue dal TEOR. 1.9. Sia quindi $\Phi(G) \neq 1$ e si supponga, in primo luogo, $\exp. \Phi(G) = 2$.

[4] Con K non nilpotente e massimale in A sarebbe $A_{3^p-1/2} = N_{3^p-1/2} = K_{3^p-1/2} \cdot \Phi(G)_{3^p-1/2} = K_{3^p-1/2} \cdot \Phi(G_{3^p-1/2})$, contro l'essere $N_{3^p-1/2}$ ciclico.

[5] L'esistenza in H di un sottogruppo massimale K non nilpotente comporterebbe l'assurdo che $G/K_3 \cap \Phi(G)_3$ si spezza su $\Phi(G)_3/K_3 \cap \Phi(G)_3$.

Nel seguito M, N, L ed R avranno il significato come nella dim. di 2.8. Dall'essere $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 3^p)$ si deduce subito che N, L ed R sono $\tau_{\langle}$-gruppi e che $M/\Phi(G) \in (\tau_{\langle 1})$, con $\langle$ ordinamento dei primi del tipo (I).

Con considerazioni analoghe ad altre già fatte in casi precedenti si trova M minimale non nilpotente e quindi $M \in (\tau_{\langle 1})$, ossia $G \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (I).

Sia ora *exp.* $\Phi(G) = 3$ e $3^p - 1/2$ primo

Poiché $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 3^p)$, si ha che M, L ed N sono $\tau_{\langle}$-gruppi e che $R/\Phi(G) \in (\tau_{\langle 1})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (II).

Ragionando su R come su M nel caso precedente, si ottiene R minimale non nilpotente, quindi $R \in (\tau_{\langle 1})$ e $G \in (\tau_{\langle 2})$, con $\langle$ ordinamento del tipo (II).

2.10. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *e* $G/\Phi(G) \simeq S_z(2^p)$ *con* p *primo* > 2 *e* $2^p - 1$ *primo. Allora* $\Phi(G) = 1$.

Dim. — Dal TEOR. 1.9. discende $2^p - 1 = max_{\langle}\, \pi(G)$ e $q \langle 2$, per ogni $q \backslash 2^{2p} + 1$.

Siano M ed R sottogruppi massimali di G tali che sia: $M/\Phi(G)$ diedrale di ordine $(2^p - 1)2$ ed $R/\Phi(G) = N_{G/\Phi(G)}(G/\Phi(G))_2$ di ordine $2^{2p}(2^p - 1)$. Poiché $2^p - 1 = max_{\langle}\, \pi(G)$, si ha $M \in (\tau_{\langle 1})$ e quindi $\Phi(G) = \Phi(G)_{2^p-1} \times \Phi(G)_2$, exp. $M_{2^p-1} = 2^p - 1$ e $\Phi(G)_2$ ciclico al pari di M_2, ne segue $\Phi(G)_{2^p-1} = 1$, ove si tenga presente che $\Phi(G) = Z(G)$ (cfr. 2.1) e che $|M_{2^p-1}/\Phi(G)_{2^p-1}| = 2^p - 1$.

Sia ora $R_2 = G_2 > M_2$. Poiché $|M_2/\Phi(G)| = 2$, si ha[6] $M_2/\Phi(G) \leq Z(R_2/\Phi(G))$ e $N_R(M_2) = R_2$, ne segue che i sottogruppi minimali di $Z(R_2/\Phi(G))$ sono tutti e soli i coniugati di $M_2/\Phi(G)$ in $R/\Phi(G)$; posto allora $S_2/\Phi(G) = Z(R_2/\Phi(G))$ e ragionando su S_2 come si è fatto su M_2 nella dim. di 2.6., si ottiene, nell'ipotesi $\Phi(G) \neq 1$, $S_2 \simeq Q_8$ oppure S_2 abeliano: il primo caso non può presentarsi perché è $p > 2$; il secondo caso nega l'essere $S_2/\Phi(G)$ normale minimale in $R/\Phi(G)$.

Da quanto sopra segue facilmente l'asserto $\Phi(G) = 1$.

TEOREMA 2.11. — *Sia* G *un gruppo non risolubile. Si ha* $G \in (\tau_{\langle 2})$, *per qualche buon ordinamento* $\langle$ *dei primi, se, e solo se,* G *è un gruppo di uno dei tipi seguenti*:

[6] Si ricordi che un 2-sottogruppo di Sylow P di $S_z(2^p)$ $(p > 2)$ ha il centro abeliano elementare di ordine 2^p, contenente tutte le involuzioni e con normalizzante coincidente con P.

(I) $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, p)$; *p primo* > 3, $p^2 \not\equiv 1$ (*mod.* 5 *e* 16), $Z(G) = \Phi(G) = A \times B$, *dove exp.* $A \leq 2$, B *3-gruppo ciclico e* $<$ *ordinamento di uno dei tipi seguenti*:

(I_1) $2 = max_{<} \pi(G)$ *e* $p < q$, *per ogni* $q \backslash p - 1/2$, *se* $|\Phi(G)| > 2$;

(I_2) $<$ *ordinamento di uno dei tipi*

($I_{2,1}$) *qualsiasi se* $p = 5$

($I_{2,2}$) $= (I_1)$

($I_{2,3}$) $p - 1/2 = max_{<} \pi(G)$ *e* $q < 2$, *per ogni* $q \backslash p + 1/2$, *se* $p - 1/2$ *è primo*

($I_{2,4}$) $p + 1/2 = max_{<} \pi(G)$, $p = min_{<} \pi(G)$ *e* $q < 2$, *per ogni* $q \backslash p - 1/2$, *se* $p + 1/2$ *è primo*

se $|\Phi(G)| = 2$

(I_3) $<$ *ordinamento di uno dei tipi di cui alla* (I) *del* TEOR. 1.9.,

se $\Phi(G) = 1$;

(II) $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 2^p)$; *p primo* > 2, $2^p - 1$ *primo*, $Z(G) = \Phi(G)$, *exp.* $\Phi(G) \leq 2$ *e* $<$ *ordinamento di uno dei tipi seguenti*:

(II_1) *qualsiasi se* $p = 2$ *e* $|\Phi(G)| \leq 2$

(II_2) $2 = max_{<} \pi(G)$, *se* $p \neq 2$ *e* $\Phi(G) \neq 1$ *oppure se* $p = 2$ *e* $|\Phi(G)| > 2$

(II_3) $<$ *ordinamento di uno dei tipi di cui alla* (II) *del* TEOR. 1.9.,

se $\Phi(G) = 1$;

(III) $G/\Phi(G) \simeq PSL(2, 3^p)$; *p primo* > 2, $Z(G) = \Phi(G)$, *exp.* $\Phi(G) \leq 2$ *oppure* $3^p - 1/2$ *primo ed exp.* $\Phi(G) \leq 3$ *e* $<$ *ordinamento di uno dei tipi seguenti*:

(III_1) $2 = max_{<} \pi(G)$ *e* $3 < q$, *per ogni* $q \backslash 3^p - 1/2$ *se exp.* $\Phi(G) = 2$

(III_2) $3 = max_{<} \pi(G)$, $3^p - 1/2 < 2$ *e* $q < 2$, *per ogni* $q \backslash 3^p + 1/2$, *se exp.* $\Phi(G) = 3$ *e* $3^p - 1/2$ *è primo*

(III_3) $<$ *ordinamento di uno dei tipi di cui alla* (III) *del* TEOR. 1.9., *se* $\Phi(G) = 1$;

(IV) $G \simeq Sz(2^p)$; *p primo* > 2, $2^p - 1$ *primo e* $<$ *ordinamento dei primi per cui* $2^p - 1 = max_{<} \pi(G)$ *e* $q < 2$, *per ogni* $q \backslash 2^{2p} + 1$.

Dim. — Ovvia a partire dal TEOR. 1.9. e dalle proposizioni 2.1 ÷ 2.10.

Il TEOR. 2.11. fornisce una caratterizzazione dei $(\tau_{\langle 2})$-gruppi non risolubili.

3. - $\tau_{\langle 2}$GRUPPI RISOLUBILI

Si indagherà sulla struttura di Sylow dei $\tau_{\langle 2}$-gruppi risolubili, pervenendo ai TEORR. 3.3. ÷ 3.8.

3.1. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$. *Se ogni sottogruppo massimale di* G *è r-nilpotente, dove* $r = max_{\langle}\, \pi(G)$, G *è r-nilpotente ed ammette un sottogruppo di Sylow normale.*

Dim. — G non può essere minimale non *r*-nilpotente, altrimenti sarebbe minimale non nilpotente (cfr. 1.3.) e si avrebbe l'assurdo $G \in (\tau_{\langle 1})$; così G è *r*-nilpotente e possiede quindi un sottogruppo H normale, tale che $G/H \simeq G_r$. Il gruppo $H \in (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$ è dotato di un sottogruppo di Sylow $H_p \lhd H$ ed ovviamente $H_p = G_p \lhd G$.

3.2. — *Sia* G *un* $\tau_{\langle 2}$*-gruppo risolubile. Se* $|\pi(G)| = 3$, G *ammette un sottogruppo di Sylow normale.*

Dim. — Si ponga $G = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ $(p < q < r)$. A causa di 3.1. ci si riconduce a supporre G dotato di un sottogruppo massimale K non *r*-nilpotente. Dopo di ciò, denotato con M un sottogruppo normale massimale di G, si distinguano i casi seguenti:

1) $|G/M| = q$ oppure $|G/M| = r$

Sia, tanto per fissare le idee, $|G/M| = q$. Se $\beta = 1$, un sottogruppo di Sylow normale di $M \in (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$ è pure sottogruppo di Sylow normale di G.

Se $\beta > 1$, $M \in (\tau_{\langle})$, in quanto $|\tau(M)| > 2$, e quindi $G_p \lhd M$, da cui $G_p \lhd G$.

(2) $|G/M| = p$ e $\alpha = 1$

Un sottogruppo di Sylow normale di M è pure sottogruppo di Sylow normale di G.

3) $|G/M| = p$ e $\alpha > 1$

K ha indice in G potenza di primo e d'altra parte $|\pi(K)| = 2$ ed r divide $|K|$; ne segue $|K| = r^\gamma q^\beta$ oppure $|K| = r^\gamma p^\alpha$. Il primo caso non può presentarsi, perché sarebbe $K < M < G$, contro la massimalità di K, così $|K| = r^\gamma p^\alpha$ e i p-sottogruppi di Sylow di K (di G) sono ciclici, perché K è minimale non nilpotente.

Si ha $|\pi(M)| = 3$ e quindi $M \in (\tau_{\{}$), sicché $M_p \lhd M$ e quindi $M_p \lhd G$ e $|M_p| = p^{\alpha-1}$. È inoltre $M_p < K_p$ e, tenuto conto che K è minimale non nilpotente e che K_p è ciclico, si ha che il centralizzante $Z_G(M_p)$ include K. Se $Z_G(M_p) \neq G$, è $Z_G(M_p) = K \lhd G$ e quindi $G_r \lhd G$. Se $Z_G(M_p) = G$, si ottiene $M = M_p \times H$, con $|H| = r^\gamma q^\beta$ e un sottogruppo di Sylow normale di H è anche sottogruppo di Sylow normale di G.

TEOREMA 3.3. — *Sia* G *un* $\tau_{\{2}$*-gruppo risolubile. Allora:*

I) $|\pi(G)| \leq 3$,

II) G *possiede al più due sottogruppi di Sylow normali,*

III) *Se* G *possiede due sottogruppi di Sylow normali, allora* $|\pi(G)| = 3$ *ed esiste un sottogruppo di Sylow normale minimale,*

IV) *se* $|\pi(G) = 3$, G *è con torre di Sylow, per qualche ordinamento dei primi.*

Dim. di I) — Sia H massimale in G, tale che $H \in (\tau_{\{1}$). Si ha $|\pi(H)| = 2$ e l'asserto segue in maniera ovvia, ove si tenga conto che, per l'essere G risolubile, H ha in G indice potenza di primo.

Dim. di II) — Ovvia dopo I).

Dim. di III) — Si ponga $G = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ $(p < q < r)$. Si ha $G_r \lhd G$, perché $G \notin (\tau_{\{}$). Sia, tanto per fissare le idee, $G_p \lhd G$. Denotato con K un sottogruppo massimale di G che appartenga a $(\tau_{\{1}$), sarà K minimale con r-nilpotente oppure $|K| = p^\alpha q^\beta$.

Se è $|K| = p^\alpha q^\beta$ e se esistesse un $H \lhd G$ e $1 < H < G_r$, si otterrebbe $K < HK$, contro la massimalità di K, ne segue G_r normale minimale in G.

Se K è minimale non r-nilpotente, sarà $|K| = r^\gamma q^\beta$ e, con $H \lhd G$ e $1 \leq H \leq G_p$, si ha $H = 1$ oppure $H = G_p$, sicché G_p normale minimale in G.

Dim. di IV) — Denotato con G_s un s-sottogruppo di Sylow normale di G, si ha $G/G_s \simeq G_{s'} \in (\tau_{\langle}) \cup (\tau_{\langle 1})$, ne segue che G/G_s possiede Torre di Sylow e quindi la possiede G.

TEOREMA 3.4. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *risolubile e* $|\pi(G)| = 3$. *Se* G *possiede due sottogruppi di Sylow normali, si ha* $G_r \lhd G$, *dove* $r = max_{\langle} \pi(G)$ *e*

I) $G_r/\Phi(G_r)$ *normale minimale in* $G/\Phi(G_r)$,

II) $exp.\, G_r \leq r^2$ *e, se* $r > 2$, $exp.\, G_r = r$,

III) $exp.\, G_r' \leq r$,

IV) $\Phi(G_r) \leq Z(G)$,

V) *un sottogruppo di Sylow non normale è ciclico.*

Dim. — È immediato constatare che G_r è normale in G.

Denotato con K un sottogruppo massimale di G tale che $K \in (\tau_{\langle 1})$, sarà $|K| = p^\alpha q^\beta$ oppure K minimale non r-nilpotente e quindi $|K| = r^\gamma s^\delta$, dove $G_s \not\lhd G$.

Se è $|K| = p^\alpha q^\beta$, G_r è normale minimale in G e I) ÷ IV) seguono banalmente.

Sia allora $|K| = r^\gamma s^\delta$ (con $G_s \not\lhd G$). I), II), III) e V) seguono dall'essere K minimale non nilpotente. Con $G_t \lhd G$ (t primo $\neq r$) si ha $G_t \Phi(G_r) = G_t \times \Phi(G_r)$ e la IV) segue immediatamente, ove si tenga presente che è $\Phi(G_r) \leq Z(K)$.

TEOREMA 3.5. — *Sia* $G \in (\tau_{\langle 2})$ *risolubile e* $|\pi(G)| = 3$. *Se è* $G_p \lhd G$, *dove* $p = min_{\langle} \pi(G)$, *si ha, posto* $r = max_{\langle} \pi(G)$,

I) G_p *normale minimale in* G,

II) G_q *ciclico* ($q \neq p$ ed r),

III) $exp.\, G_r \leq r^2$ *e, se* $r > 2$, $exp.\, G_r = r$,

IV) $exp.\, G_r' \leq r$.

Dim. — Sia $G_{p'}$ un p-complemento di Sylow di G. Non può aversi $G_{p'} \in (\tau_{\langle})$, altrimenti sarebbe $G \in (\tau_{\langle})$; ne segue $G_{p'}$ massimale e quindi l'asserto, ove si tenga conto che $G_{p'}$ è minimale non r-nilpotente.

Un gruppo $G \in (\tau_{\langle 2})$ e tale che $|\pi(G) = 2$ può essere privo di sottogruppi di Sylow normali, ad esempio: l'olomorfo completo del gruppo di Klein.

TEOREMA 3.6. — Sia $G \in (\tau_{\{2}})$ *e d'ordine* $p^\alpha q^\beta$ ($p \neq q$ *primi distinti*), *dove* $p = min_{\{} \pi(G)$. *Se* $G_q \lhd G$ *e* G_p *non è ciclico, si ha*:

I) $G_q/\Phi(G_q)$ *normale minimale in* $G/\Phi(G_q)$,

II) *exp.* $G_q \leq q^2$ *e, se* $q > 2$, *exp.* $G_q = q$,

III) *exp.* $G_q' \leq q$,

IV) *un sottogruppo massimale* $U \geq G_p$ *è prodotto diretto* $U = G_p \times \Phi(G_q)$,

V) $\Phi(G_q) \leq Z(G)$,

VI) G_p *è abeliano di tipo* $(p, p^{\alpha-1})$ *oppure è a fattoriali abeliani e minimale non abeliano.*

Dim. di I) — Siano M_1 ed M_2 due sottogruppi massimali di un G_p. Non può essere allo stesso tempo $G_q M_1 = G_q \times M_1$ e $G_q M_2 = G_q \times M_2$, altrimenti si otterrebbe l'assurdo $G_p = M_1 M_2 \lhd G$. Ne segue l'esistenza di un sottogruppo massimale $M > G_q$ non nilpotente e quindi M minimale non q-nilpotente. $G_q/\Phi(G_q)$ è normale minimale in $M/\Phi(G_q)$ e, tenuto conto che $G_q \lhd G$, resta provata la I).

Dim. di II) e III) — Seguono dall'essere M minimale non nilpotente.

Dim. di IV) — Sia U massimale e $U \geq G_p$. Posto $T = U \cap G_q$, riesce $U = G_p T$ e $T \lhd U$.

Si ha $\Phi(G_q) \leq \Phi(G) \leq U$ e quindi $\Phi(G_q) \leq T$, dopodiché, tenuto conto che $G_q/\Phi(G_q)$ è normale minimale in $G/\Phi(G_q)$, si ha $T = \Phi(G_q)$.

Se non fose $G_p \lhd U$, U sarebbe minimale non q-nilpotente e quindi G_p ciclico, contro l'ipotesi.

Dopo quanto sopra si ha $U = G_p \times \Phi(G_q)$.

Dim. di V) — $\Phi(G_q) \leq Z(M)$ e $\Phi(G_q) \leq Z(U)$ implicano $\Phi(G_q) \leq Z(G)$.

Dim. di VI) — Si proverà in primo luogo che G_p possiede al più un sottogruppo massimale non ciclico. Negando la tesi, siano M_1 ed M_2 due sottogruppi massimali non ciclici di G_p. $G_q M_i$ ($i = 1, 2$) non sarà minimale non q-nilpotente (in quanto gli M_i non sono ciclici), ne segue, essendo $G \in (\tau_{\{2}})$, $G_q M_i$ nilpotente e quindi $G_p \lhd G$, contro l'essere $G \in (\tau_{\{2}})$.

Da quanto sopra si deduce $|\Phi(G_p)| = p^{\alpha-2}$. Se abeliano, G_p è chiaramente di tipo $(p, p^{\alpha-1})$. Sia allora G_p non abeliano. Con M_1 ed M_2

sottogruppi massimali ciclici di G_p, si ha che $\Phi(G_p)$ centralizza ogni elemento di $M_1 M_2 = G_p$, ne segue subito $Z(G_p) = \Phi(G_p)$ e allora, ricordato che $\Phi(G_p)$ è ciclico di ordine $p^{\alpha-2}$, G_p risulta a fattoriali abeliani e minimale non abeliano.

COROLLARIO 3.7. — *Sia* $G \in (\tau_{\{2\}})$ *e d'ordine* $p^\alpha q^\beta$ $(p \neq q$ *primi distinti*), *dove* $p = min_{\{} \pi(G)$. *Se* $G_q \lhd G$, *ogni* G_p *è di uno dei tipi seguenti*:

I) *ciclico*

II) *abeliano di tipo* $(p, p^{\alpha-1})$

III) *a fattori abeliani e minimale non abeliano.*

Dim. — Ovvia a partire dal TEOR. 3.6.

N.B. — Nel TEOR. 3.6. l'ipotesi G_p non ciclico non può essere soppressa (cfr. [2] pag. 323).

TEOREMA 3.8. — *Sia* $G \in (\tau_{\{2\}})$, *d'ordine* $p^\alpha q^\beta$ $(p \neq q$ *primi distinti*), *con* $p = min_{\{} \pi(G)$ *e privo di sottogruppi di Sylow normali. Se esiste un sottogruppo normale* M *di indice* q, *si ha*:

I) $M = [M_q] G_p$,

II) G_p *è ciclico*,

III) *exp.* $G_q \leq q^3$ *e, se* $q > 2$, *exp.* $G_q \leq q^2$,

IV) $M_q/\Phi(M_q)$ *normale minimale in* $G/\Phi(M_q)$,

V) $G/\Phi(M_q)$ *si spezza su* $M_q/\Phi(M_q)$,

VI) *esiste un'immersione supersolubile di* $\Phi(M_q)$ *in* G.

Dim. di I) — M non è q-nilpotente, altrimenti si avrebbe l'assurdo $M_p = G_p \lhd G$, ne segue M minimale non q-nilpotente e quindi $M = [M_q] G_p$.

Dim. di II) e III) — Seguono dall'essere M minimale non nilpotente.

Dim. di IV) — $M_q/\Phi(M_q)$ è normale minimale in $M/\Phi(M_q)$ e quindi anche in $G/\Phi(M_q)$.

Dim. di V) — A causa di II), non può essere $N_G(G_p) = G_p$, altrimenti, per il teorema di *Burnside*, G sarebbe p-nilpotente. Si ha allora $G = M_q N_G(G_p)$.

Posto $\Phi = \Phi(M_q)$, il sottogruppo $M_q/\Phi \cap N_G(G_p)\Phi/\Phi$ è normale in G/Φ, in quanto tale in $N_G(G_p)\Phi/\Phi$ e nel gruppo abeliano elementare M_q/Φ; ma M_q/Φ è normale minimale in G/Φ e pertanto $M_q/\Phi \cap N_G(G_p)$ $\Phi/\Phi = \Phi/\Phi$, come era sufficiente provare.

Dim. di VI) — Avendosi $\Phi(M_q) \lhd G_q$, esiste un'immersione supersolubile

$$(\alpha) \qquad 1 = H_1 < H_2 \ldots < H_n = \Phi(M_q)$$

di $\Phi(M_q)$ in G_q. Il gruppo $M = [M_q]\, G_p$ è minimale non q-nilpotente e quindi $\Phi(M_q)$ centralizza G_p; dopo di ciò (α) è anche immersione supersolubile di $\Phi(M_q)$ in G.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Curzio, *Su un problema di minimalità per gruppi finiti*, Rend. Ist. di Matem. Univ. di Trieste, 4, fasc. I, (1972), pp. 78-83.
[2] C. De Vivo, *Sugli S_2-gruppi finiti*, Ann. di Matem., IV, (1975), Vol. CIV, pp. 113-325.
[3] C. De Vivo, *Gruppi semplici finiti minimali non torre di Sylow*, Le Matematiche, fasc. I (1976), pp. 176-192.
[4] B. Huppert, *Endliche Gruppen, I*, Springer, Berlin (1967).
[5] N. Itô, *Note on* (LM)*-groups of finite order*, Kodai Math. Sem. Rep. (1951), pp. 1-6.
[6] L. Rédei, *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen*, Publ. Math. Debrecen, **4**, (1956), pp. 303-324.
[7] M. Suzuki, *On a class of doubly transitive groups*, Ann. of Math., **75**, (1962), pp. 105-145.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e G. Panella.

Sulle pseudoconnessioni di prima specie su uno spazio fibrato principale differenziabile

Nota di ANGELA FARINOLA e MARGHERITA LEUCI
presentata dal socio corrispondente ANTONIO AVANTAGGIATI

(Adunanza del 20 gennaio 1979)

SUNTO. — In questo lavoro si considerano particolari pseudoconnessioni di prima specie su uno spazio fibrato principale differenziabile P e si studiano, relativamente ad esse, il sollevamento orizzontale di una curva, il trasporto parallelo in P e nei fibrati associati e la nozione di pseudoderivazione covariante.

INTRODUZIONE

In [1] è stata introdotta la nozione di pseudoconnessione su uno spazio fibrato principale differenziabile P(M, G). Successivamente, essendo stato introdotto in [2] un nuovo tipo di pseudoconnessione su P(M, G) sono state chiamate pseudoconnessioni di prima specie quelle definite in [1] e pseudoconnessioni di seconda specie quelle definite in [2]. In questo lavoro si prendono in considerazione le pseudoconnessioni di prima specie su P e tra queste si studiano in particolare quelle per le quali non esiste un vettore non nullo tangente a P che sia contemporaneamente verticale e orizzontale.

Più precisamente si introducono e si studiano, relativamente alle pseudoconnessioni suddette, le nozioni di sollevamento orizzontale di una curva e trasporto parallelo in P e nei fibrati vettoriali associati e la nozione di pseudoderivazione covariante.

1. - PSEUDOCONNESSIONI DI PRIMA SPECIE SU UNO SPAZIO FIBRATO PRINCIPALE DIFFERENZIABILE

Sia (P, G, π) uno spazio fibrato principale differenziabile di base M, gruppo strutturale G e proiezione canonica π.

Si indichino con $\mathfrak{F}(P)$ l'anello delle funzioni differenziabili su P, con $\mathfrak{X}(P)$ l'$\mathfrak{F}(P)$-modulo (algebra di Lie su $\mathbb{R}$) dei campi vettoriali

differenziabili su P, con $\mathfrak{B}(P)$ il sottomodulo di $\mathfrak{X}(P)$ dei campi vettoriali verticali, con $\mathfrak{T}_1^1(P)$ l'$\mathfrak{F}(P)$-modulo dei campi tensoriali differenziabili su P di specie (1,1), con R_a, per ogni $a \in G$, la trasformazione differenziabile di P definita da $R_a(u) = u\,a$, per ogni $u \in P$.

DEFINIZIONE 1. — Un campo tensoriale $\Gamma \in \mathfrak{T}_1^1(P)$ definisce una *pseudoconnessione di prima specie*[1] su P se e solamente se soddisfa le seguenti proprietà:

$a_1)$ $\Gamma(X) \in \mathfrak{B}(P), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(P)$

$b_1)$ $\Gamma \circ (R_a)_* = (R_a)_* \circ \Gamma, \quad \forall a \in G$

DEFINIZIONE 2. — Per ogni $u \in P$, si chiama *sottospazio orizzontale* di $T_u(P)$ rispetto a Γ, il nucleo H_u dell'endomorfismo Γ_u. Gli elementi di H_u si chiamano *vettori orizzontali*.

Indicato con V_u, per ogni $u \in P$, il sottospazio di $T_u(P)$, dei vettori verticali (tangenti in u alla fibra passante per u) sia assegnata su P una pseudoconnessione Γ soddisfacente l'ulteriore seguente proprietà:

$$H_u \cap V_u = \{0\}, \quad \forall u \in P. \tag{1.1}$$

Si prova, allora, la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 1. — *La ridotta della restrizione ad* H_u *del differenziale di* π *in un qualunque punto* $u \in P$ *è un isomorfismo di* H_u *su* $\pi_*(H_u)$.

Osservato che, se u ed u' sono due elementi di P tali che $\pi(u) = \pi(u')$, si ha che $\pi_*(H_u) = \pi_*(H_{u'})$, si indichi con K_p il sottospazio $\pi_*(H_u)$ di $T_p(M)$, dove u è un qualunque elemento di P tale che $\pi(u) = p$.

DEFINIZIONE 3. — Sia $X_p \in K_p$; per ogni $u \in P$ tale che $\pi(u) = p$, si chiama *sollevamento orizzontale di* X_p *in* u il vettore orizzontale X_u^* tale che $\pi_*(X_u^*) = X_p$.

[1] Nel seguito ometteremo la precisazione che le pseudoconnessioni considerate sono di prima specie.

DEFINIZIONE 4. — Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che $X_p \in K_p$, per ogni $p \in M$; inoltre, per ogni $u \in P$, sia X^*_u il sollevamento orizzontale in u di $X_{\pi(u)}$. Il campo vettoriale $X^* = (X^*_u)_{u \in P}$, si chiama *sollevamento orizzontale* di X.

Si provano facilmente le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 2. — *Il sollevamento orizzontale* X^* *di ogni campo vettoriale* X *differenziabile su* M, *è un campo vettoriale differenziabile su* P.

PROPOSIZIONE 3. — *Il sollevamento orizzontale* X^* *di ogni campo vettoriale* X *è invariante per* R_a, *per ogni* $a \in G$.

PROPOSIZIONE 4. — *Siano* $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, *tali che* X_p *e* Y_p *appartengono a* K_p, *per ogni* $p \in M$ *ed* $f \in \mathfrak{F}(M)$. *Si ponga* $f^* = f \circ \pi$ *e siano* X^*, Y^* *i sollevamenti orizzontali di* X *e* Y. *Si ha che* $X^* + Y^*$ *è il sollevamento orizzontale di* $X + Y$ *ed* $f^* X^*$ *è il sollevamento orizzontale di* $f X$.

Indicate con n ed m le dimensioni rispettivamente di M e di G, si proverà che:

PROPOSIZIONE 5. — *Sia* Γ *una pseudoconnessione su* P *di rango costante* r *in ogni punto* $u \in P$, *soddisfacente alla* (1.1). *Posto* $K_p = \pi_*(H_u)$ *con* $u \in P$ *tale che* $\pi(u) = p$, *la famiglia* $K = (K_p)_{p \in M}$ *è una distribuzione differenziabile di* M *di dimensione* $m + n - r$.

Sia p_0 un qualunque punto di M e siano U un intorno aperto P-semplice (pag. 85 cfr. [4]) di p_0 e $\sigma : U \to \pi^{-1}(U)$ una sezione differenziabile. Posto $u_0 = \sigma(p_0)$, poiché la famiglia $H = (H_u)_{u \in P}$ è una distribuzione differenziabile di P di dimensione $m + n - r$ (prop. 1 par. 3 cfr. [1]) esiste V aperto di $\pi^{-1}(U)$ tale che $u_0 \in V$ ed esistono $m + n - r$ campi vettoriali differenziabili su V $(X^*_\alpha)_{r+1 \leqslant \alpha \leqslant n+m}$ tali che, per ogni $u \in V$, $(X^*_{\alpha_u})_{r+1 \leqslant \alpha \leqslant n+m}$ è una base di H_u.

Posto $U' = \sigma^{-1}(V)$, U' è un aperto di U tale che $p_0 \in U'$. Si consideri allora per $\alpha = r + 1, \ldots n + m$ il campo vettoriale differenziabile X_α su U' definito da:

$$X_{\alpha_p} = \pi_* (X^*_{\alpha_{\sigma(p)}}), \qquad \forall\, p \in U'$$

È immediato verificare infine che, per ogni $p \in U'$, $(X_{\alpha_p})_{r+1 \leqslant \alpha \leqslant n+m}$ è una base di K_p.

2. - Sollevamento di una curva e trasporto parallelo in P

Siano Γ una pseudoconnessione su P verificante la (1.1) e $\gamma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile di classe C^1 su M. Per ogni $t \in [a, b]$ si indichi con $\dot{\gamma}(t)$ il vettore tangente in $\gamma(t)$ alla curva γ e si supponga sia soddisfatta la seguente propietà:

$$\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)} \qquad \forall\, t \in [a, b] \tag{2.1}$$

Definizione 1. — Una curva $\gamma^* : [a,b] \to P$ differenziabile di classe C^1, si dice *orizzontale* se, per ogni $t \in [a, b]$, il vettore $\dot{\gamma}^*(t)$ è orizzontale.

Definizione 2. — Sia $\gamma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile di classe C^1 soddisfacente la (2.1). Si chiama *sollevamento orizzontale di* γ in P ogni curva orizzontale $\gamma^* : [a, b] \to P$ differenziable di classe C^1 tale che

$$\pi \circ \gamma^* = \gamma$$

Si proverà ora la seguente proposizione:

Proposizione 1. — *Sia* $\gamma : [a, b] \to M$ *una curva differenziabile di classe* C^1 *tale che* $\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)}$, *per ogni* $t \in [a, b]$. *Allora, per ogni punto* u_o *della fibra di* P *su* $\gamma(a)$, *esiste un unico sollevamento orizzontale* γ^* *di* γ *tale che* $\gamma^*(a) = u_o$.

Poiché P è localmente banale, esiste una curva $\bar{\gamma} : [a, b] \to P$ differenziabile di classe C^1 tale che $\pi \circ \bar{\gamma} = \gamma$ e $\bar{\gamma}(a) = u_o$.

Sia, per ogni $t \in [a, b]$, $X^*_{\bar{\gamma}(t)}$ il sollevamento orizzontale in $\bar{\gamma}(t)$ di $\dot{\gamma}(t)$. Se γ^* è un sollevamento orizzontale di γ tale che $\gamma^*(a) = u_o$, poiché, per ogni $t \in [a, b]$, $\pi(\gamma^*(t)) = \gamma(t) = \pi(\bar{\gamma}(t))$, deve esistere un $c_t \in G$ tale che $\gamma^*(t) = \bar{\gamma}(t)\, c_t$. L'ulteriore ipotesi $\gamma^*(a) = u_o$ implica che $\bar{\gamma}(a)\, c_a = u_o = \bar{\gamma}(a)$, da cui necessariamente $c_a = e$ (unità di G).

Un tale sollevamento orizzontale γ^* di γ, se esiste, deve essere quindi del tipo:

$$\gamma^*(t) = \bar{\gamma}(t)\, c_t \tag{2.2}$$

dove $t \to c_t$ è una curva differenziabile di classe C^1 in G tale che $c_a = e$.

Dalla (2.2) e dal fatto che $X^*_{\bar\gamma(t)}$ è il sollevamento orizzontale di $\dot\gamma(t)$ in $\bar\gamma(t)$ e $\dot\gamma^*(t)$ è il sollevamento orizzontale di $\dot\gamma(t)$ in $\gamma^*(t)$, segue:

$$\dot\gamma^*(t) = (R_{c_t})_* (X^*_{\bar\gamma(t)}) \qquad \forall\, t \in [a, b] \tag{2.3}$$

Si osservi che, considerata l'applicazione $(\bar\gamma, c)$ di $[a, b]$ in $P \times G$ definita, per ogni $t \in [a, b]$, da $(\bar\gamma, c)(t) = (\bar\gamma(t), c_t)$, risulta $\gamma^* = \psi \circ (\bar\gamma, c)$ dove ψ è l'applicazione di $P \times G$ in P secondo cui G opera differenziabilmente a destra. Ne consegue, allora, che per ogni $t \in [a, b]$, $\dot\gamma^*(t) = \psi_* (\dot{\bar\gamma}(t), \dot c_t)$. Applicando la formula di Leibniz relativamente all'applicazione ψ si ottiene:

$$\dot\gamma^*(t) = (R_{c_t})_* (\dot{\bar\gamma}(t)) + (\psi_{\bar\gamma(t)})_* (\dot c_t) \tag{2.4}$$

dove $\psi_{\bar\gamma(t)}$ è l'applicazione di G in P che ad $a_t \in G$ associa $\bar\gamma(t)\, a_t$.

Dalle (2.3) e (2.4) discende che

$$(R_{c_t})_* (X^*_{\bar\gamma(t)} - \dot{\bar\gamma}(t)) = (\psi_{\bar\gamma(t)})_* (\dot c_t)$$

e considerando l'immagine di ambo i membri mediante $(R_{c_t^{-1}})_*$ e tenendo conto che $(R_{c_t^{-1}})_* \circ (R_{c_t})_* = i_*$ si avrà equivalentemente che

$$X^*_{\bar\gamma(t)} - \dot{\bar\gamma}(t) = (R_{c_t^{-1}})_* (\psi_{\bar\gamma(t)})_* (\dot c_t) \tag{2.5}$$

Usando il simbolo di $R_{c_t^{-1}}$ per indicare, oltre che la trasformazione di P definita da $R_{c_t^{-1}}(u) = u\, c_t^{-1}$, per ogni $u \in P$, anche la traslazione destra di G definita da c_t^{-1} si ha:

$$R_{c_t^{-1}} \circ \psi_{\bar\gamma(t)} = \psi_{\bar\gamma(t)} \circ R_{c_t^{-1}}$$

In conseguenza la (2.5) diventa del tipo

$$X^*_{\bar\gamma(t)} - \dot{\bar\gamma}(t) = (\psi_{\bar\gamma(t)})_* ((R_{c_t^{-1}})_* (\dot c_t)) \tag{2.6}$$

Poiché $X^*_{\bar\gamma(t)} - \dot{\bar\gamma}(t)$ è un vettore verticale, indicato con $\psi^{-1}_{\bar\gamma(t)}$ l'inversa della ridotta di $\psi_{\bar\gamma(t)}$, prendendo l'immagine di ambo i membri della (2.6) mediante $(\psi^{-1}_{\bar\gamma(t)})_*$ si ottiene:

$$(\psi^{-1}_{\bar\gamma(t)})_* (X^*_{\bar\gamma(t)} - \dot{\bar\gamma}(t)) = (R_{c_t^{-1}})_* (\dot c_t) \tag{2.7}$$

Per il lemma di pag. 69 [2], esiste in G un'unica curva $(c_t)_{t\in[a,b]}$ differenziabile di classe C^1 tale che sia soddisfatta la (2.7) e tale che $c_a = e$.

Restano così provate l'esistenza e l'unicità del sollevamento orizzontale γ^* di γ tale che $\gamma^*(a) = u_0$.

Per la proposizione precedente si può dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3. — Sia $\gamma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile di classe C^1 tale che, per ogni $t \in [a, b]$, si abbia $\dot\gamma(t) \in K_{\gamma(t)}$. Posto $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$, si indichino con P_p e P_q le rispettive fibre. L'applicazione

$$\tau_\gamma : P_p \to P_q$$

che ad $u \in P_p$ associa $\gamma^*(b)$, essendo γ^* il sollevamento orizzontale di γ tale che $\gamma^*(a) = u$, si chiama *trasporto parallelo di* P_p *in* P_q *associato alla curva* γ.

PROPOSIZIONE 2. — *Con le notazioni precedenti si provano le seguenti proprietà*:

a) $\tau_\gamma(u\,c) = (\tau_\gamma(u))\,c, \quad \forall\, u \in P_p, \quad \forall\, c \in G$

b) τ_γ *è un diffeomorfismo di* P_p *su* P_q.

Osservato che se, $\gamma : [a, b] \to M$ è una curva differenziabile di classe C^1 tale che $\dot\gamma(t) \in K_{\gamma(t)}$, per ogni $t \in [a, b]$, anche la curva $\gamma^{-1} : [a, b] \to M$ definita, per ogni $t \in [a, b]$, da $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$ è una curva di fferenziabile di classe C^1 tale che

$$\dot\gamma^{-1}(t) \in K_{\gamma^{-1}(t)}, \quad \forall\, t \in [a, b]. \tag{2.8}$$

Si ha

$$\tau_{\gamma^{-1}} = (\tau_\gamma)^{-1}$$

3. - SOTTOSPAZI ORIZZONTALI NEI FIBRATI ASSOCIATI

Siano $P(M, G, \pi)$ uno spazio fibrato principale differenziabile, V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e ρ una rappresentazione lineare di G in V. Si indichi con E lo spazio fibrato vettoriale associato a P con fibra tipo V sulla quale G opera differenziabilmente a sinistra mediante ρ. Siano τ la surgezione canonica di $P \times V$ su E

e π_E la proiezione canonica di E su M. Per ogni $z \in E$ si indichi con V_z lo spazio vettoriale tangente in z alla fibra di E passante per z; V_z si chiama sottospazio verticale di $T_z(E)$. Inoltre, per ogni $\xi \in V$ sia τ_ξ l'applicazione di P in E che ad $u \in P$ associa $\tau(u, \xi)$; τ_ξ è ovviamente differenziabile.

Si consideri su P una pseudoconnessione Γ e sia, per ogni $u \in P$, H_u il sottospazio orizzontale di $T_u(P)$.

Poiché se $\tau(u, \xi) = \tau(u', \xi')$, risulta $(\tau_\xi)_*(H_u) = (\tau_{\xi'})_*(H_{u'})$, ha senso dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. — Per ogni $z \in E$, si chiama *sottospazio orizzontale* di $T_z(E)$ il sottospazio $H_z = (\tau_\xi)_*(H_u)$ di $T_z(E)$ dove (u, ξ) è una qualunque coppia di $P \times V$ tale che $\tau(u, \xi) = z$. Gli elementi di H_z si dicono *vettori orizzontali*. Un *campo vettoriale* X su E si dice *orizzontale* se X_z, per ogni $z \in E$, è un vettore orizzontale. Una *curva* su E differenziabile di classe C^1 è *orizzontale* se i vettori ad essa tangenti in ogni suo punto sono orizzontali.

Sotto l'ipotesi che la pseudoconnessione Γ soddisfa la proprietà (1.1) si ha che:

$$H_z \cap V_z = \{0\}, \quad \forall z \in E \tag{3.1}$$

e quindi si può provare la:

PROPOSIZIONE 2. — *La ridotta della restrizione ad* H_z *del differenziale di* π_E *in un qualunque punto* z *di* E *è un isomorfismo di* H_z *su* $(\pi_E)_*(H_z)$.

Osservato che, se z e z' sono due elementi di E tali che $\pi_E(z) = \pi_E(z')$, risulta $(\pi_E)_*(H_z) = (\pi_E)_*(H_{z'})$, per ogni $p \in M$, il sottospazio $K_p = \pi_*(H_u)$ con $u \in P$ tale che $\pi(u) = p$, coincide con il sottospazio $(\pi_E)_*(H_z)$ dove z è un qualunque elemento di E tale che $\pi_E(z) = p$.

DEFINIZIONE 2. — Sia $X_p \in K_p$; per ogni $z \in E$ tale che $\pi_E(z) = p$, si chiama *sollevamento orizzontale* di X_p in z, il vettore orizzontale X_z tale che $(\pi_E)_*(X_z) = X_p$.

4. - SOLLEVAMENTO DI UNA CURVA E TRASPORTO PARALLELO NEI FIBRATI ASSOCIATI

Sia Γ una pseudoconnessione sullo spazio fibrato principale P soddisfacente la (1.1), e sia E(M, V, G, P) lo spazio fibrato vettoriale associato a P. Per ogni $p \in M$ si indichino con P_p ed E_p le fibre di P

e di E su p e, per ogni $u \in P$, si indichi con $\tilde{u}$ l'applicazione di V su $E_{\pi(u)}$ definita da:

$$\tilde{u}(\xi) = \tau(u, \xi), \quad \forall \xi \in V.$$

Si consideri una curva $\gamma : [a, b] \to M$ differenziabile di classe C^1 tale che per ogni $t \in [a, b]$, $\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)}$ e siano γ_1^* e γ_2^* due sollevamenti orizzontali di γ in P. Si osservi che, essendo $\pi(\gamma_1^*(a)) = \pi(\gamma_2^*(a))$, esiste un elemento $c \in G$ tale che $\gamma_2^*(a) = \gamma_1^*(a)\, c$ e siano ξ_1 e ξ_2 che elementi di V tali che

$$\tau(\gamma_1^*(a), \xi_1) = \tau(\gamma_2^*(a), \xi_2) \tag{4.1}$$

Posto $\bar{\gamma}^* = R_c \circ \gamma_1^*$, si ha che la curva differenziabile di classe C^1 $\bar{\gamma}^*$ è un sollevamento orizzontale di γ in P tale che $\bar{\gamma}^*(a) = \gamma_2^*(a)$.

Poiché $\gamma_1^*(a)c$ è un elemento della fibra di P su $\gamma(a)$ e γ_2^*, $\bar{\gamma}^*$ sono due sollevamenti orizzontali di γ in P che assumono in a lo stesso valore $\gamma_1^*(a)\, c$, segue, per l'unicità di un tale sollevamento, che

$$\gamma_2^* = R_c \circ \gamma_1^*. \tag{4.2}$$

Dalle (4.2) e (4.1) segue che

$$\tau_{\xi_1} \circ \gamma_1^* = \tau_{\xi_2} \circ \gamma_2^* \tag{4.3}$$

In virtù della (4.3) si può dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. — Sia $\gamma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile di classe C^1 tale che $\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)}$, per ogni $t \in [a, b]$. Per ogni $z \in E_{\gamma(a)}$ si chiama *sollevamento orizzontale di* γ *in* E, *di origine* z, la curva $\tilde{\gamma}$ su E definita da

$$\tilde{\gamma} = \tau_\xi \circ \gamma^*$$

dove γ^* è un qualunque sollevamento orizzontale di γ in P e ξ un punto di V tale che $\tau(\gamma^*(a), \xi) = z$.

La definizione precedente è giustificata dalla seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1. — *Il sollevamento orizzontale* $\tilde{\gamma}$ *di* γ *in* E *di origine* z, *è una curva orizzontale tale che*

a) $\tilde{\gamma}(a) = z$

b) $\pi_E \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

DEFINIZIONE 2. — Sia $\gamma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile di classe C^1 tale che $\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)}$, per ogni $t \in [a, b]$. Posto $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$, si indichi con τ^E_γ l'applicazione di E_p in E_q definita, per ogni $z \in E_p$, da

$$\tau^E_\gamma(z) = \tilde{\gamma}(b)$$

essendo $\tilde{\gamma}$ il sollevamento orizzontale di γ in E, di origine z. L'applicazione τ^E_γ si chiama *trasporto parallelo di* E_p *in* E_q *associato alla curva* γ.

Usando le notazioni introdotte si prova facilmente che:

PROPOSIZIONE 2. — *Sia* γ^* *un qualunque sollevamento orizzontale di* γ *in* P. *Posto* $\gamma^*(a) = u$ *e* $\gamma^*(b) = v$ *risulta*

$$\tau^E_\gamma = \tilde{v} \circ \tilde{u}^{-1}$$

τ^E_γ *è quindi un isomorfismo di* E_p *su* E_q.

5. - PSEUDODERIVAZIONE COVARIANTE

Siano $P(M, G, \pi)$ uno spazio fibrato principale ed E il fibrato vettoriale associato a P con fibra tipo V sulla quale G opera mediante la rappresentazione lineare ρ di G in V.

È noto che per ogni insieme aperto U di M esiste una corrispondenza biunivoca tra le sezioni differenziabili di E definite su U e le funzioni di tipo (ρ, V) (0-forme tensoriali di tipo (ρ, V)) su $\pi^{-1}(U)$. Se $\Phi : U \to E$ è, infatti, una sezione differenziabile, la funzione $\tilde{\Phi}$ di tipo (ρ, V) su $\pi^{-1}(U)$ ad essa associata è definita da

$$\tilde{\Phi}(u) = \tilde{u}^{-1}(\Phi(\pi(u))), \quad \forall\, u \in \pi^{-1}(U)$$

dove $\tilde{u}$ è l'isomorfismo di V sulla fibra $E_{\pi(u)}$ definito nel par. 4.

OSSERVAZIONE 1. — Siano Φ una sezione differenziabile di E definita in un intorno aperto U di un punto p di M, $\tilde{\Phi}$ la funzione di tipo (ρ, V) su $\pi^{-1}(U)$ associata a Φ e $X_p \in K_p$. Se u ed u' sono due elementi di P tali che $\pi(u) = \pi(u') = p$ ed $X^*_u, X^*_{u'}$, i sollevamenti orizzontali di X_p rispettivamente in u ed in u', allora si ha:

$$\tilde{u}'(X^*_{u'}(\tilde{\Phi})) = \tilde{u}(X^*_u(\tilde{\Phi})). \tag{5.1}$$

L'osservazione 1 giustifica la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. — Sia Φ una sezione differenziabile di E definita in un intorno aperto U di un punto p di M e sia $X_p \in K_p$. Si chiama *pseudoderivata covariante di* Φ *in direzione di* X_p il punto $\nabla_{X_p}\Phi$ di E_p definito da

$$\nabla_{X_p}\Phi = \tilde{u}\,(X_u^*(\tilde{\Phi})) \tag{5.2}$$

dove $\tilde{\Phi}$ è la funzione di tipo (ρ, V) associata a Φ, u un qualunque punto di P tale che $\pi(u) = p$ *ed* X_u^* il sollevamento orizzontale di X_p in u.

PROPOSIZIONE 1. — *Siano* X_p, $Y_p \in K_p$, $a \in \mathbb{R}$, Φ *e* ψ *due sezioni differenziabili di* E *definite in un intorno aperto* U *di* p, f *una funzione reale differenziabile su* U. *Si ha*:

$$\nabla_{X_p+Y_p}\Phi = \nabla_{X_p}\Phi + \nabla_{Y_p}\Phi \tag{5.3}$$

$$\nabla_{X_p}(\Phi + \psi) = \nabla_{X_p}\Phi + \nabla_{X_p}\psi \tag{5.4}$$

$$\nabla_{aX_p}\Phi = a\,\nabla_{X_p}\Phi \tag{5.5}$$

$$\nabla_{X_p}(a\,\Phi) = a\,\nabla_{X_p}\Phi \tag{5.6}$$

$$\nabla_{X_p}(f\,\Phi) = f(p)\,\nabla_{X_p}\Phi + X_p(f)\,\Phi(p). \tag{5.7}$$

DEFINIZIONE 2. — Sia Φ una sezione differenziabile di E definita su un aperto U di M e sia X un campo vettoriale differenziabile su U tale che $X_p \in K_p$, *per ogni* $p \in U$. *Si chiama pseudoderivata covariante di* Φ *in direzione di* X la sezione differenziabile $\nabla_X\Phi : U \to E$ definita da

$$(\nabla_X\Phi)(p) = \nabla_{X_p}\Phi, \qquad \forall\, p \in U.$$

Sono di immediata dimostrazione le seguenti due proposizioni:

PROPOSIZIONE 2. — *Siano* X *un campo vettoriale differenziabile su un aperto* U *di* M, *tale che* $X_p \in K_p$, *per ogni* $p \in U$ *e* $\Phi : U \to E$ *una sezione differenziabile. Indicati con* X^* *il sollevamento orizzontale di* X *in* P *e con* $\tilde{\Phi}$ *la funzione del tipo* (ρ, V) *associata a* Φ, *allora la funzione* $X^*(\tilde{\Phi})$ *è la funzione di tipo* (ρ, V) *associata alla sezione* $\nabla_X\Phi$.

PROPOSIZIONE 3. — *Siano* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ *con* U *aperto di* M, *tali che* X_p, Y_p *appartengano a* K_p, *per ogni* $p \in U$, $f \in \mathfrak{F}(U)$, $a \in \mathbb{R}$ *e* Φ, ψ *due sezioni differenziabili di* E *su* U. *Si ha*:

$$\nabla_{X+Y}\Phi = \nabla_X \Phi + \nabla_Y \Phi \tag{5.10}$$

$$\nabla_X (\Phi + \psi) = \nabla_X \Phi + \nabla_X \psi \tag{5.11}$$

$$\nabla_{fX} \Phi = f \nabla_X \Phi \tag{5.12}$$

$$\nabla_X a\Phi = a \nabla_X \Phi \tag{5.13}$$

$$\nabla_X (f\Phi) = f \nabla_X \Phi + X(f)\Phi \tag{5.14}$$

Si supponga ora assegnata sullo spazio fibrato $P(M, G, \pi)$ una pseudoconnessione Γ soddisfacente alla (1.1) di rango costante r in ogni punto u di P. Allora, comunque si considerino un punto p_o di M, U intorno aperto P-semplice di p_o ed un vettore $X_{p_o} \in K_{p_o}$, esiste una curva $\gamma : [a, b] \to U$ differenziabile di classe C^1, tale che $\gamma(a) = p_o$, $\dot{\gamma}(a) = X_{p_o}$ e $\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)}$, per ogni $t \in [a, b]$.

Infatti, siano $\sigma : U \to \pi^{-1}(U)$ una sezione differenziabile, $u_o = \sigma(p_o)$ ed $X^*_{u_o}$ il sollevamento orizzontale di X_{p_o} in u_o.

Costruito su $\pi^{-1}(U)$ un campo vettoriale differenziabile Y^* tale che $Y^*_u \in H_u$, per ogni $u \in \pi^{-1}(U)$ ed $Y^*_{u_o} = X^*_{u_o}$, la curva γ richiesta è allora una curva integrale del campo vettoriale differenziabile X su U definito da:

$$X_p = \pi_* (Y^*_{\sigma(p)}), \qquad \forall\, p \in U.$$

Ciò premesso si può dimostrare la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 4. — *Siano* $p_o \in M$, Φ *una sezione differenziabile di* E *definita in un aperto* U P-*semplice contenente* p_o, $X_{p_o} \in K_{p_o}$ *e* $\gamma : [a, b] \to U$ *la curva differenziabile di classe* C^1 *tale che* $\gamma(a) = p_o$, $\dot{\gamma}(a) = X_{p_o}$ *e* $\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)}$, *per ogni* $t \in [a, b]$. *Allora, indicato con* τ_t *il trasporto parallelo della fibra* E_{p_o} *nella fibra* $E_{\gamma(t)}$ *associato alla curva* γ *si ha*:

$$\nabla_{X_{p_o}} \Phi = \lim_{t \to a} \frac{\tau_t^{-1} (\Phi(\gamma(t))) - \Phi(\gamma(a))}{t - a} - \tag{5.15}$$

6. - Sezioni parallele

Definizione 1. — Siano U un aperto di M e Φ una sezione differenziabile di E definita su U. Si dice che Φ è una *sezione parallela rispetto* a Γ se per ogni curva $\gamma : [a, b] \to U$ differenziabile di classe C^1 e tale che $\dot{\gamma}(t) \in K_{\gamma(t)}$, per ogni $t \in [a, b]$, risulta

$$\tau_{\gamma}^{E}(\Phi(\gamma(a))) = \Phi(\gamma(b))$$

dove τ_{γ}^{E} è il trasporto parallelo della fibra $E_{\gamma(a)}$ sulla fibra $E_{\gamma(b)}$ associato alla curva γ.

Con le notazioni della definizione 1 si prova facilmente la seguente

Proposizione 1. — *Φ è parallela se e solamente se per ogni curva γ, $\Phi \circ \gamma$ è un sollevamento orizzontale di γ in* E.

Se Γ è una pseudoconnessione su P di rango costante r in ogni punto $u \in P$, dalla proposizione 4 del par. 5 segue immediatamente la seguente

Proposizione 2. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché Φ sia parallela è che*

$$\nabla_X \Phi = 0$$

per ogni $X \in \mathfrak{X}(U)$ tale che $X_p \in K_p$, per ogni $p \in U$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Di Comite, *Pseudoconnessioni su uno spazio fibrato principale,* Annali di Mat., serie IV, t. XCVI-1973.

[2] C. Di Comite, *Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale,* Annali di Mat. pura e appl., serie IV, t. IC-1974.

[3] S. Kobayashiy - K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Interscience publisher, New York, 1963.

[4] Phamé Mau Quam, *Introduction à la Géométrie des variétés différentiables,* Dunod, Paris, 1969.

[5] A. Verona, *Connexions généralisées,* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., t. XIII, no. 6, Bucarest, 1968.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione dei soci A. Avantaggiati, C. Miranda e A. Franchetta.

Alcuni monomorfismi tra reticoli di sottogruppi

Nota di SILVANA FRANCIOSI (in Napoli)
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 20 gennaio 1979)

SOMMARIO. — Siano G e H due gruppi e $\varphi : 1(G) \to 1(H)$ un monomorfismo tale che $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$; sotto certe condizioni aggiuntive la struttura di G determina quella di H. Si noti che se $s\,n(H) = n(H)$ il problema è stato già studiato in [1].

SUMMARY. — Let G, H be groups and $\varphi : 1(G) \to 1(H)$ a monomorphism such that $\varphi(1(G)) \leq s\,n(H)$; under some conditions on φ the structure of G determines that of H. Notice that if $s\,n(H) = n(H)$, the problem has been already studied in [1].

I sottogruppi subnormali di un gruppo G riempiono una parte $s\,n(G)$ dell'insieme $l(G)$ dei sottogruppi di G [1], mentre i sottogruppi normali di G costituiscono un sottoreticolo $n(G)$ di $l(G)$. È ben noto (cfr. ad es. [4]) che non sempre $s\,n(G)$ è sottoreticolo di $l(G)$.

In una nota del 1974, C. DE VIVO [1] ha studiato alcuni monomorfismi $\vee$-completi [2] $\varphi : l(G) \to n(H)$ tali che $\varphi(G) = H$, $\varphi(1) = 1$ e $Y \in \varphi(l(G))$ ogni qualvolta Y è caratteristico in qualche $X \in \varphi(l(G))$. Nel presente lavoro si otterranno alcuni risultati che generalizzano parzialmente i TEOREMI 1 e 5 di [1].

Saranno considerati gruppi G e H e monomorfismi $\varphi : l(G) \to l(H)$ tali che $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ verificanti le condizioni

a) $\varphi(G) = H$ e $\varphi(1) = 1$

b) φ è $\vee$-completo

c) se Y è caratteristico in X e $X \in \varphi(l(G))$, si ha $Y \in \varphi(l(G))$.

[1] Con A e B sottogruppi di G, $A \vee B$ è il sottogruppo generato da $A \cup B$ e $A \wedge B = A \cap B$. Per le operazioni $\wedge$ e $\vee$, $l(G)$ è un reticolo completo.

[2] Nel senso che $\bigvee_{i \in I} \varphi A_i = \varphi\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)$ per ogni famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di sottogruppi di G.

Si perverrà ai seguenti:

TEOREMA 1. — *Siano* G *un p-gruppo abeliano non localmente ciclico,* H *un gruppo risolubile di torsione e* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ *e verificante* a), b), c); *allora* H *è un q-gruppo (localmente nilpolente)*[3].

TEOREMA 2. — *Siano* G *un gruppo abeliano senza torsione,* H *un gruppo risolubile e* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ *e verificante* a), b), c); *allora* H *è abeliano senza torsione o è abeliano di esponente primo.*

OSSERVAZIONE. — Nel teorema 1 G non può essere supposto localmente ciclico, come mostra l'esempio: se G è ciclico di ordine 4 e se H è il gruppo totale di grado 3, esiste un monomorfismo $\varphi : l(G) \to l(H)$ tale che $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ e verificante a), b), c).

Si farà spesso uso delle seguenti ovvie proposizioni:

PROPOSIZIONE 1. — *Siano* G, H *gruppi e* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ *e verificante una delle condizioni* a), b), c); *allora se* $K \leq G$, φ *induce un monomorfismo* $l(K) \to l(\varphi(K))$ *verificante le medesime condizioni.*

PROPOSIZIONE 2. — *Siano* G, H *gruppi e* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ *e verificante una delle condizioni* a), b); *allora se* $K \lhd G$ *e* $\varphi(K) \lhd H$, φ *induce un monomorfismo* $l(G/K) \to l(H/\varphi(K))$ *verificante le medesime condizioni.*

PROPOSIZIONE 3. — *Siano* G, H *gruppi e* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ *e verificante la condizione* c); *allora se* $K \lhd G$ *e* $\varphi(K)$ *è caratteristico in ogni sottogruppo di* H, φ *induce un monomorfismo* $l(G/K) \to l(H/\varphi(K))$ *verificante le medesimi condizioni.*

PROPOSIZIONE 4. — *Siano* G, H *gruppi e* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ *e verificante le condizioni* a) *e* b); *allora se* $K \leq G$ *è prodotto diretto* $K = \bigtimes_{i \in I} K_i$, *si ha* $\varphi(K) = \bigvee_{i \in I} \varphi(K_i)$.

PROPOSIZIONE 5. — *Siano* G, H *gruppi e* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$ *e verificante la condizione* b);

[3] Naturalmente p e q denotano numeri primi.

se $K_1 \leq K_2 \leq \ldots$ *è una catena di sottogruppi di* G, *si ha* $\varphi(K_1) \leq \leq \varphi(K_2) \leq \ldots$ *e* $\bigcup_{n\in N} \varphi(K_n) = \varphi(\bigcup_{n\in N} K_n)$.

Allo scopo di provare i teoremi 1 e 2 si premettono alcuni lemmi.

LEMMA 1. — *Siano* G *un p-gruppo abeliano elementare,* H *un gruppo risolubile di torsione,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo verificante* a), b), c) *e con* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$; *allora* H *è un q-gruppo (localmente nilpotente).*

Dimostrazione. — Se $|G| = p$, $H = \varphi(G)$ è privo di sottogruppi caratteristici non banali e quindi è un q-gruppo abeliano elementare. Sia ora $G = \times_{i\in I} P_i$ con $|I| > 1$ e con ogni P_i di ordine p. Si ha $H = \vee_{i\in I} \varphi(P_i)$ con $\varphi(P_i)$ abeliano di esponente q_i; si riconoscerà in primo luogo che $q_i = q_j$ per ogni coppia $(i, j) \in I \times I$. Negando la tesi esistono degli indici i, j tali che $q_i \neq q_j$.

Per ogni $x \in \varphi(P_i)$ e per ogni $y \in \varphi(P_j)$, $< x >$ e $< y >$ sono subnormali in H in quanto rispettivamente normali nei gruppi abeliani $\varphi(P_i)$ e $\varphi(P_j)$; inoltre $< x > \vee < y >$ ha ordine finito essendo H localmente finito, sicché, tenuto conto che $< x >$ e $< y >$ sono coprimi, si ottiene (WIELANDT [3]) $< x > \vee < y > = < x > \times < y >$ e perciò anche $\varphi(P_i) \vee \varphi(P_j) = \varphi(P_i) \times \varphi(P_j)$. Esiste un $P < G$ tale che $P \times P_i = P \times P_j = P_i \times P_j$ onde $\varphi(P_i) \times \varphi(P_j) = \varphi(P) \times \varphi(P_i) = = \varphi(P) \times \varphi(P_j)$ e così $|\varphi(P_i)| = |\varphi(P_j)|$ contro l'aver supposto $q_i \neq q_j$.

Le considerazioni precedenti assicurano che H è un q-gruppo, invero ogni $x \in H$ appartiene a qualche $\varphi(P_{i_1}) \vee \ldots \vee \varphi(P_{i_n})$ e quest'ultimo è un q-gruppo perché da $x_{i_r} \in \varphi(P_{i_r})$ discende $< x_{i_r} > \lhd\lhd H$ con $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} >$ q-gruppo, per un teorema di WIELANDT [3].

LEMMA 2. — *Siano* G *un p-gruppo abeliano finito non ciclico,* H *un gruppo risolubile di torsione,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo verificante* a), b), c) *e tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$; *allora* H *è un q-gruppo (localmente nilpotente).*

Dimostrazione. — Sia $|G| = p^m$. Se $m = 2$ l'asserto segue dal LEMMA 1. Supposto $m \geq 3$ si procederà per induzione su m.

Detto K il penultimo sottogruppo della serie derivata di H, si può assumere $K \neq H$, in quanto se H è abeliano l'asserto segue da un risultato di C. DE VIVO (cfr. [1] TEOR. 1). Ciò premesso, denotato con M un sottogruppo di G massimale e non ciclico, conviene distinguere i casi seguenti:

1) $K \not\leq \varphi(M)$.

Si ha $H = K \cdot \varphi(M)$ e per l'ipotesi induttiva $H/_K \simeq \dfrac{\varphi(M)}{K \wedge \varphi(M)}$ è un q-gruppo al pari di $\varphi(M)$. Per assurdo K non sia un q-gruppo. Esiste allora una componente q_1-primaria T di K con $T \neq 1$ e $q_1 \neq q$, onde $G = M \times \varphi^{-1}(T)$ e $|\varphi^{-1}(T)| = p$.

Detto P un sottogruppo di ordine p di M, $P \times \varphi^{-1}(T)$ è abeliano elementare e così (LEMMA 1) $\varphi(P) \vee T$ è un q-gruppo contro l'essere $q \neq q_1$.

2) $K \leq \varphi(M)$ e $H' \not\leq \varphi(M)$.

Riesce $H = H' \cdot \varphi(M)$ e $H/_{H'} \simeq \dfrac{\varphi(M)}{\varphi(M) \wedge H'}$ è un q-gruppo, inoltre tale è pure $K \leq \varphi(M)$. Il sottogruppo $M/_{\varphi^{-1}(K)} \leq G/_{\varphi^{-1}(K)}$ è non identico, invero da $M = \varphi^{-1}(K)$ seguirebbe l'assurdo $H = \varphi(M) \cdot H' = K \cdot H' = H'$; in più $M/_{\varphi^{-1}(K)}$ non è confrontabile con $\varphi^{-1}(H')/_{\varphi^{-1}(K)}$; in tal modo $G/_{\varphi^{-1}(K)}$ è un p-gruppo abeliano non ciclico di ordine $< p^m$. L'ipotesi di induzione assicura che $H/_K$ è un q_1-gruppo e perciò un q-gruppo, essendo $\dfrac{H/_K}{H'/_K} \simeq H/_{H'}$. Allora H, al pari di K e di $H/_K$ è un q-gruppo.

3) $H' < \varphi(M)$.

$H' < \varphi(M)$ è un q-gruppo e quindi tale è pure $\varphi(M)/_{H'} \neq 1$. Per assurdo esista un q_1-sottogruppo di Sylow $S/_{H'} \neq 1$ di $H/_{H'}$ con $q_1 \neq q$. Ovviamente S è caratteristico in H e la c) comporta l'esisteza di $\varphi^{-1}(S)$; il reticolo $l(H/_{H'}) = s\,n(H/_{H'})$ è riducibile contro l'essere irriducibile $l(G/_{\varphi^{-1}(H')})$.

4) $H' = \varphi(M)$.

$H' = \varphi(M)$ è un q-gruppo. $G/_M$ ha ordine p e quindi (LEMMA 1) $H/_{H'}$ è un q_1-gruppo abeliano elementare. Detti M_1 ed M_2 altri due sottogruppi massimali di G tali che $M \wedge M_1 = M \wedge M_2 = M_1 \wedge M_2$, risulta $G/_{M \wedge M_1} = M/_{M \wedge M_1} \times M_1/_{M \wedge M_1} = M/_{M \wedge M_1} \times M_2/_{M \wedge M_1} = M_1/_{M \wedge M_1} \times M_2/_{M \wedge M_1}$, e $\varphi(M \wedge M_1) = \varphi(M) \wedge \varphi(M_1) = H' \wedge \varphi(M_1) \lhd \varphi(M_1)$ e $\varphi(M \wedge M_1) = \varphi(M \wedge M_2) = \varphi(M) \wedge \varphi(M_2) = H' \wedge \varphi(M_2) \lhd \varphi(M_2)$ sicché $\varphi(M \wedge M_1) \lhd \varphi(M_1) \vee \varphi(M_2) = H$. Si ha allora $H/_{\varphi(M \wedge M_1)} = \dfrac{\varphi(M)}{\varphi(M \wedge M_1)} \vee \dfrac{\varphi(M_1)}{\varphi(M \wedge M_1)} = \dfrac{\varphi(M)}{\varphi(M \wedge M_1)} \vee \dfrac{\varphi(M_2)}{\varphi(M \wedge M_1)} =$

$= \frac{\varphi(M_1)}{\varphi(M \wedge M_1)} \vee \frac{\varphi(M_2)}{\varphi(M \wedge M_1)}$. Riesce $\frac{\varphi(M)}{\varphi(M \wedge M_1)} = \frac{H'}{\varphi(M \wedge M_1)} \lhd$ $\lhd \frac{H}{\varphi(M \wedge M_1)}$ e quindi $\frac{\varphi(M_1)}{\varphi(M \wedge M_1)} \simeq \frac{H/_{\varphi(M \wedge M_1)}}{\varphi(M)/_{\varphi(M \wedge M_1)}} \simeq H/_{H'} \simeq$ $\simeq \frac{\varphi(M_2)}{\varphi(M \wedge M_1)}$ onde $\frac{\varphi(M_1)}{\varphi(M \wedge M_1)}$ e $\frac{\varphi(M_2)}{\varphi(M \wedge M_1)}$ sono q_1-gruppi abeliani elementari. Con ragionamento analogo a quello usato nella dimostrazione del LEMMA 1 si riconosce che $H/_{\varphi(M \wedge M_1)} = \frac{\varphi(M_1)}{\varphi(M \wedge M_1)} \vee$ $\vee \frac{\varphi(M_2)}{\varphi(M \wedge M_1)}$ è un q_1-gruppo e, poiché $H/_{\varphi(M \wedge M_1)}$ contiene il q-gruppo $H'/_{\varphi(M \wedge M_1)} \neq 1$, resta provato che $H/_{\varphi(M \wedge M_1)}$ è un q-gruppo. Ricordato che $\varphi(M \wedge M_1) \leq \varphi(M)$ è un q-gruppo, anche H lo è.

LEMMA 3. — *Siano* G *un p-gruppo abeliano limitato e non ciclico,* H *un gruppo risolubile di torsione,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo verificante* a), b), c) *e tale che* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$; *allora* H *è un q-gruppo (localmente nilpotente).*

Dimostrazione. — Si ha ([2], p. 44) $G = \underset{i \in I}{\times} P_i$ con ogni P_i ciclico e $|I| > 1$. Risulta $H = \underset{i \in I}{\vee} \varphi(P_i)$ e per ogni coppia $(i, j) \in I \times I$ con $i \neq j$, dal LEMMA 2 segue che $\varphi(P_i) \vee \varphi(P_j)$ è un q-gruppo; ovviamente q non dipende da (i, j).

Con ragionamento analogo a quello usato nella dimostrazione del LEMMA 1, resta provato che H è un q-gruppo.

LEMMA 4. — *Siano* G *un gruppo abeliano libero,* H *un gruppo risolubile,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un monomorfismo verificante* a), b), c) *e con* $\varphi(l(G)) \leq s\,n(H)$; *allora o* H *è abeliano senza torsione o abeliano di esponente primo.*

Dimostrazione. — Sia K il penultimo derivato di H e per assurdo sia $K \neq H$. Per la c) ha senso considerare $\varphi^{-1}(K) < G$ e poiché $\varphi^{-1}(K) \neq 1$, esiste $g \in \varphi^{-1}(K) - \{1\}$.

Si ha $G = \underset{i \in I}{\times} G_i$ con ogni G_i ciclico infinito e quindi g si esprime in unico modo sotto la forma $g = g_{i_j} g_{i_2} \ldots g_{i_t}$ con ogni $g_{i_j} \in G_{i_j} - \{1\}$. Detto j un elemento di $\{1, \ldots, t\}$, esiste un sottogruppo massimale M_{i_j} di G_{i_j} tale che $g_{i_j} \notin M_{i_j}$. Posto $M = M_{i_j} \times (\underset{i \neq i_j}{\times} G_i)$, M è massimale in G e $g \notin M$ al pari di g_{i_j}; allora M è un sottogruppo massi-

male di G non includente $\varphi^{-1}(K)$, sicché $G = M \cdot \varphi^{-1}(K)$ e quindi $H = K \cdot \varphi(M)$. Il sottogruppo subnormale $\varphi(M) < H$ è incluso in qualche sottogruppo normale $N < H$; si ottiene così $H = N \cdot K$ e quindi $H/_N = \dfrac{N \cdot K}{N} \simeq K/_{N \wedge K}$ e pertanto $H/_N$ è abeliano al pari di K.

L'abelianità di $H/_N$ comporta $N \geq H' \geq K$, sicché $H = N \cdot K = N$ il che è manifestamente assurdo.

Dopo quanto sopra H è abeliano e l'asserto segue da un risultato di C. De Vivo (cfr. 3.2 di [1]).

Si è finalmente in grado di provare i Teoremi 1 e 2.

Dimostrazione del teorema 1

Se G è limitato il teorema si riconduce al Lemma 3.

Sia quindi G non limitato e per ogni $n \in N$ si indichi con M_n il massimo sottogruppo di esponente p^n; G non è localmente ciclico e quindi ogni M_n non è ciclico, pertanto (Lemma 3) $\varphi(M_n)$ è un q_n-gruppo e manifestamente q_n non dipende da n in quanto si ha $M_1 \leq M_2 \leq \leq \ldots \leq M_n \leq \ldots$ Avendosi $G = \bigcup_{n \in N} M_n$ e quindi $H = \bigcup_{n \in N} \varphi(M_n)$, resta provato che H è un q-gruppo.

Dimostrazione del teorema 2

G è unione di una successione crescente $(G_n)_{n \in N}$ di gruppi abeliani liberi (Kulikov cfr. [2], p. 47). Per il Lemma 4 ogni $\varphi(G_n)$ o è abeliano senza torsione o abeliano di esponente primo p_n, inoltre si ha $H = \bigcup_{n \in N} \varphi(G_n)$. Supposto H non senza torsione, ne segue che per la monotonia della successione $(G_n)_{n \in N}$, tutti i $\varphi(G_n)$ hanno il medesimo esponente primo p, onde H ha esponente p.

BIBLIOGRAFIA

[1] De Vivo C., *Monomorfismi tra reticoli di sottogruppi e reticoli di sottogruppi normali*, Rend. Circolo mat. Palermo, XXIII (1974), 1-11.

[2] Fuchs L., *Abelian groups*, Publ. of the hungarian acad. of sciences, Budapest (1965).

[3] Scott W. R., *Group theory*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc. (1964).

[4] Zassenhaus H., *The theory of groups* 2 edit. Gottingen; Vandenhoeck. Ruprecht (1956).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e G. Panella.

Dualità e semicontinuità per integrali del tipo dell'area *

Nota di NICOLA FUSCO **
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 20 gennaio 1979)

RIASSUNTO. — Viene data una rappresentazione della regolarizzata s.c.i. in L^1 di un funzionale integrale del tipo dell'area, fornendone anche, in un caso particolare, un calcolo esplicito.

SUMMARY. — A representation of L^1-l.s.c. regularization of integral functionals area-like is given with an explicit calculation in some examples.

In [2], [1] si è provato che la regolarizzata s.c.i. in L^1 di un funzionale del tipo

$$u \in C^1 \to \int_\Omega f(x, Du)$$

è un integrale dello stesso tipo, risultato che ivi discende da più generali teoremi di Γ-convergenza e di dimostrazione alquanto laboriosa.

In questa nota proviamo direttamente il teorema 2.4 considerando, come si faceva in [2], [1], la variabilità di Ω, ma utilizzando procedimenti di dualità.

Sono poi considerati due esempi « classici » di integrali unidimensionali del tipo dell'area di cui si calcola esplicitamente la regolarizzata s.c.i.

1. — Siano V e V^*, Y e Y^* due coppie di spazi vettoriali topologici in dualità. Indicheremo nel seguito con $<\cdot\,,\cdot>$ la dualità fra

* Lavoro eseguito nell'ambito di una borsa di studio del C.N.R. per laureandi per l'anno accademico 1977-78.
** Istituto Matematico « R. Caccioppoli », via Mezzocannone 8, Napoli.

V e V^*, Y e Y^* indifferentemente. Sia inoltre $\Phi(u, p)$ una funzione definita in $V \times Y$ a valori in $\bar{R}$.

Consideriamo il problema di minimo:

$$(\mathcal{S}) \qquad \inf_{u \in V} \Phi(u, o).$$

Per ogni $p \in Y$ possiamo considerare, come in [3], accanto al precedente, il problema

$$(\mathcal{S}_p) \qquad \inf_{u \in V} \Phi(u, p)$$

che chiameremo *problema perturbato* del problema $\mathcal{S}$.

Si dirà allora *problema duale* di $\mathcal{S}$ relativamente a Φ (o, meglio, relativamente alle perturbazioni considerate) il problema

$$(\mathcal{S}^*) \qquad \sup_{p^* \in Y^*} \{ - \Phi^*(o, p^*) \},$$

dove con $\Phi^*(u^*, p^*)$ indichiamo la funzione coniugata di $\Phi(u, p)$ secondo Fenchel nella dualità fra $V \times Y$ e $V^* \times Y^*$. Una prima relazione fra i problemi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^*$ è data da

$$(1.1) \qquad - \infty \leq \sup \mathcal{S}^* \leq \inf \mathcal{S} \leq + \infty.$$

Definiamo poi $\forall\, p \in Y$

$$(1.2) \qquad h(p) = \inf \mathcal{S}_p = \inf_{u \in V} \Phi(u, p).$$

Si ha allora ([3])

PROPOSIZIONE 1.1 — *Se la funzione $\Phi(u, p)$ è convessa nel complesso delle variabili, allora la funzione $h(p)$ definita dalla* (1.2) *è convessa. Inoltre le due condizioni seguenti sono equivalenti*:

(i) *$\mathcal{S}$ è « stabile », cioè $h(o)$ è finito e h è sottodifferenziabile in o;*

(ii) $\inf \mathcal{S} = \sup \mathcal{S}^* < + \infty$ *e $\mathcal{S}^*$ possiede soluzione.*

Un criterio di stabilità di facile dimostrazione e che sarà utile in seguito è dato dalla seguente

PROPOSIZIONE 1.2 — *Se $\Phi(u, p)$ è convessa,* $\inf \mathcal{S}$ *è finito ed inoltre esiste $u_o \in V$ tale che la funzione $p \to \Phi(u_o, p)$ è finita e continua in o, allora il problema $\mathcal{S}$ è stabile.*

2. — Nel seguito indicheremo con $f(x, z)$ un integrando normale (v. [3] cap. VII, def. 1.1) definito in $R^n \times R^n$, convesso in z e tale che

$$o \leq f(x, z) \leq s(1 + |z|). \tag{2.1}$$

$\forall u \in C^1(R^n)$ e $\forall \Omega \in Ap_n$ (famiglia degli aperti limitati di R^n) poniamo

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega f(x, Du) \tag{2.2}$$

e inoltre indichiamo con

$$\bar{F}(\Omega, u) = sc^-(\sigma_\Omega) \int_\Omega f(x, Du) \tag{2.3}$$

la regolarizzata semicontinua inferiormente del funzionale $F(\Omega, u)$ in $C^1(R^n)$ rispetto alla topologia σ_Ω generata dalla distanza $\delta_\Omega(u, v) = \int_\Omega |u - v|$, mentre con

$$\bar{F}_o(\Omega, u) = sc^-(\sigma'_\Omega) \int_\Omega f(x, Du) \tag{2.4}$$

indicheremo la regolarizzata s.c.i. del funzionale $F(\Omega, u)$ in $C^1(R^n)$ rispetto alla topologia σ'_Ω generata dalla distanza estesa

$$\delta'_\Omega(u, v) = \begin{cases} \int_\Omega |u - v| & \text{se } \operatorname{supp}(u - v) \subset \Omega \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

LEMMA 2.1 — *Se $f(x, z)$ è un integrando normale non negativo, $u \in C^1(R^n)$ e $\Omega \in Ap_n$, allora, posto*

$$F'(\Omega, u) = \sup_{\substack{p^* \in [L^\infty(\Omega)]^n \\ \operatorname{div} p^* \in L^\infty(\Omega)}} \left\{ -\int_\Omega f^*(x, p^*) + \int_\Omega p^* Du \right\}, \tag{2.5}$$

$$F'_o(\Omega, u) = \sup_{\substack{p^* \in [L^\infty(\Omega)]^n \\ \operatorname{div} p^* \in L^\infty(\Omega),\ p^* \nu|_{\partial\Omega} = 0}} \left\{ -\int_\Omega f^*(x, p^*) + \int_\Omega p^* Du \right\}, \tag{2.6}$$

[1] $p^* \nu|_{\partial\Omega}$ (ν = normale esterna a $\partial\Omega$ va inteso nel senso di [4]).

si ha

$$F'(\Omega, u) = F'_0(\Omega, u). \tag{2.7}$$

Dim. — Essendo ovviamente

$$F'_0(\Omega, u) \leq F'(\Omega, u), \tag{2.8}$$

per avere la (2.7) basterà dimostrare la disuguaglianza opposta.

Sia quindi $p^* \in [L^\infty(\Omega)]^n$ con $\operatorname{div} p^* \in L^\infty(\Omega)$. Fissato $\varepsilon > 0$, indichiamo con K_ε un compatto contenuto in Ω e tale che $\operatorname{mis}(\Omega - K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sia inoltre $\varphi_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1 & \forall\, x \in \Omega \\ \varphi_\varepsilon(x) = 1 & \forall\, x \in K_\varepsilon\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ovviamente $p^* \varphi_\varepsilon \in [L^\infty(\Omega)]^n$, $\operatorname{div}(p^* \varphi_\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)$ e $(p^* \varphi_\varepsilon)\, \nu\, |_{\partial\Omega} = 0$. Inoltre, utilizzando la convessità di $f^*(x, z^*)$ e la (2.9):

$$\left(-\int_\Omega f^*(x, p^*) + \int_\Omega p^*\, Du \right) - \left(-\int_\Omega f^*(x, p^* \varphi_\varepsilon) + \int_\Omega p^* \varphi_\varepsilon\, Du \right) =$$

$$\int_{\Omega - K_\varepsilon} [f^*(x, p^* \varphi_\varepsilon) - f^*(x, p^*)] + \int_{\Omega - K_\varepsilon} p^*(1 - \varphi_\varepsilon)\, Du \leq$$

$$\int_{\Omega - K_\varepsilon} (\varphi_\varepsilon - 1) f^*(x, p^*) + \int_{\Omega - K_\varepsilon} (1 - \varphi_\varepsilon)\, f^*(x, o) + \int_{\Omega - K_\varepsilon} p^*(1 - \varphi_\varepsilon)\, Du\,;$$

da questa relazione, essendo $f(x, z) \geq 0$ e quindi $f^*(x, o) \in L^1_{loc}(R^n)$, per la (2.6), facendo tendere ε a zero, si ha:

$$-\int_\Omega f^*(x, p^*) + \int_\Omega p^*\, Du \leq F'_0(\Omega, u)$$

da cui, per l'arbitrarietà di p^* e per le (2.5) e (2.8), la tesi.

LEMMA 2.2 — *Sia $f(x, z)$ un integrando normale convesso in z verificante la* (2.1). *Allora il funzionale $\bar{F}(\Omega, u)$ definito dalla* (2.3) *è, $\forall\, u \in C^1(R^n)$ fissato, un funzionale additivo rispetto a $\Omega \in Ap_n$ e inoltre si ha*

$$\bar{F}(\Omega, u) = \bar{F}_0(\Omega, u). \tag{2.10}$$

Dim. — Fissato $u \in C^1(R^n)$ si verifica facilmente che (cfr. anche [2]) $\forall\, \Omega \in A p_n$

$$(2.11) \qquad \bar{F}(\Omega, u) = \lim_{\lambda \to +\infty} \inf_{v \in C^1(R^n)} \left\{ \int_\Omega f(x, Dv) + \lambda \int_\Omega |u - v| \right\}$$

e analogamente:

$$(2.12) \qquad \bar{F}_0(\Omega, u) = \lim_{\lambda \to +\infty} \inf_{v - u \in C_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega f(x, Dv) + \lambda \int_\Omega |u - v| \right\}.$$

Poniamo dunque, con le stesse notazioni del par. 1,

$$V = C^1(R^n) \quad V^* = \text{duale di V rispetto alla topologia di } H^{1,1}(\Omega)$$

$$Y = L^1(\Omega) \times [L^1(\Omega)]^n \qquad Y^* = L^\infty(\Omega) \times [L^\infty(\Omega)]^n$$

e denotiamo con $\wedge : V \to Y$ l'operatore $\wedge v = (v, Dv)$, che è certamente continuo fra gli spazi V e Y muniti delle rispettive topologie. Fissato inoltre $\lambda > 0$, sia

$$G_\lambda(p_0, p_1) = \int_\Omega f(x, p_1) + \lambda \int_\Omega |u - p_0| \qquad \forall\, (p_0, p_1) \in Y,$$

$$P(v) = 0 \ \ \forall\, v \in V \quad \text{e} \quad \Phi_\lambda(v, p) = P(v) + G_\lambda(\wedge v - (p_0, p_1)).$$

Consideriamo il problema

$$(\mathcal{F}_\lambda) \qquad \inf_{v \in V} \Phi_\lambda(v, o)$$

e il suo duale che nel nostro caso possiamo scrivere come:

$$(\mathcal{F}_\lambda^*) \qquad \sup_{(p_0^*, p_1^*) \in Y^*} \{ - P^*(\wedge^*(p_0^*, p_1^*)) - G_\lambda^*(-(p_0^*, p_1^*)) \}.$$

Osserviamo che

$$(2.13) \qquad \bar{F}(\Omega, u) = \lim_{\lambda \to +\infty} \inf \mathcal{F}_\lambda .$$

Inoltre, grazie alle ipotesi fatte su $f(x, z)$, possiamo dire che (v. [3]) $p_1 \to \int_\Omega f(x, p_1)$ è un funzionale continuo in $[L^1(\Omega)]^n$ e quindi che G_λ è continuo in Y; si ha allora, per le proposizioni 1.1 e 1.2:

$$(2.14) \qquad \inf \mathcal{F}_\lambda = \sup \mathcal{F}_\lambda^* .$$

Scriviamo dunque esplicitamente il problema $\mathcal{F}^*_\lambda$. $\forall (p_0^*, p_1^*) \in Y^*$

$$P^*(\Lambda^*(p_0^*, p_1^*)) = \sup_{v \in C^1(\mathbb{R}^n)} \left\{ \int_\Omega p_0^* v + \int_\Omega p_1^* \, Dv \right\}$$

da cui:

$$(2.15) \quad P^*(\Lambda^*(p_0^*, p_1^*)) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_0^* = \operatorname{div} p_1^* \text{ e } p_1^* \nu|_{\partial\Omega} = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si verifica poi facilmente che:

$$G^*_\lambda(p_0^*, p_1^*) = \int_\Omega f^*(x, p_1^*) +$$

$$+ \sup_{p_0 \in L^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega p_0^*(p_0 - u) + \int_\Omega |u - p_0| \right\} + \int_\Omega p_0^* u \,.$$

Da questa relazione si ha quindi

$$(\mathcal{F}^*_\lambda) \qquad \sup_{\substack{(p_0^*, p_1^*) \in Y^* \\ \|p_0^*\|_\infty \le \lambda \\ p_0^* = \operatorname{div} p_1^* \text{ e } p_1^* \nu|_{\partial\Omega} = 0}} \left\{ -\int_\Omega f^*(x, -p_1^*) + \int_\Omega p_0^* u \right\}$$

vale a dire

$$(\mathcal{F}^*_\lambda) \qquad \sup_{\substack{p_1^* \in [L^\infty(\Omega)]^n \\ \|\operatorname{div} p_1^*\|_\infty \le \lambda,\ p_1^* \nu|_{\partial\Omega} = 0}} \left\{ -\int_\Omega f^*(x, p_1^*) + \int_\Omega p_1^* \, Du \right\} .$$

Passando al limite per $\lambda \to +\infty$ e utilizzando la (2.14) e la (2.13)

$$\bar{F}(\Omega, u) = \sup_{\substack{p_1^* \in [L^\infty(\Omega)]^n \\ \operatorname{div} p_1^* \in L^\infty(\Omega),\ p_1^* \nu|_{\partial\Omega} = 0}} \left\{ -\int_\Omega f^*(x, p_1^*) + \int_\Omega p_1^* \, Du \right\} .$$

Analogamente si dimostra che

$$(2.16) \qquad \bar{F}_0(\Omega, u) = \sup_{\substack{p_1^* \in [L^\infty(\Omega)]^n \\ \operatorname{div} p_1^* \in L^\infty(\Omega)}} \left\{ -\int_\Omega f^*(x, p_1^*) + \int_\Omega p_1^* \, Du \right\} ,$$

tenendo presente, però, che la funzione $P(v)$ prima considerata va sostituita con

$$P_0(v) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \operatorname{supp}(u - v) \subset \Omega \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e che

$$P_0^*(\wedge^*(p_0^*, p_1^*)) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p_0^* = \operatorname{div} p_1^* \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per quanto dimostrato si ha dunque, dal lemma 2.1:

$$\bar{F}(\Omega, u) = F_0'(\Omega, u) = F'(\Omega, u) = \bar{F}_0(\Omega, u)$$

Osservando poi che il funzionale $\bar{F}_0(\Omega, u)$ è, per la (2.12), subadditivo rispetto a $\Omega \in Ap_n$, mentre $\bar{F}(\Omega, u)$ è superadditivo, dalla relazione appena dimostrata segue la tesi.

LEMMA 2.3 — *Nelle ipotesi del lemma precedente, fissato* $u \in C^1(R^n)$, $F_0(\Omega, u)$ *coincide con la restrizione a* Ap_n *di una misura.*

Dim. — Fissati $u \in C^1(R^n)$ e $\Omega \in Ap_n$, sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ aperto e $u_h \xrightarrow{\sigma'_{1,n'}} u$ tale che $\bar{F}_0(\Omega', u) = \lim_h \int_{\Omega'} f(x, Du_h)$. Si ha allora:

$$\liminf_h \int_{\Omega} f(x, Du_h) \leq \bar{F}_0(\Omega', u) + s \int_{\Omega - \Omega'} (1 + |Du|).$$

da cui:

$$\bar{F}_0(\Omega', u) \leq \bar{F}_0(\Omega, u) \leq \bar{F}_0(\Omega, u) + s \int_{\Omega - \Omega'} (1 + |Du|).$$

Da questa relazione, utilizzando la finita additività di $\bar{F}_0(\Omega, u)$, segue subito la tesi.

Grazie ai due lemmi precedenti, utilizzando un ragionamento del tipo di quello fatto in [1] nel teorema 3.2, si ha

TEOREMA 2.4 — *Se $f(x, z)$ è un integrando normale convesso verificante la* (2.1), *allora esiste un integrando normale convesso $g(x, z)$, anch'esso verificante la stessa relazione, tale che* $\forall\, u \in C^1(R^n)$ *e* $\forall\, \Omega \in Ap_n$

$$\bar{F}(\Omega, u) = \bar{F}_0(\Omega, u) = \int_\Omega g(x, Du).$$

3. — In [5] è stata esplicitamente calcolata la regolarizzata s.c.i. in L^1 su $H^{1,2}$ di un funzionale del tipo $\int_\Omega a(x) |\dot{u}|^2$, con Ω intervallo aperto della retta reale e $o \leq a(x) \leq \wedge$ funzione misurabile. Un calcolo analogo mostra che la regolarizzata s.c.i. L^1 su $H^{1,p}$ $(p > 1)$ di un funzionale del tipo $\int_\Omega a(x) |\dot{u}|^p$ è data dal funzionale $\int_\Omega b(x) |\dot{u}|^p dx$ con

$$b(x) = \lim_{\varepsilon \to o} \left[\frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} [a(t)]^{\frac{-1}{p-1}} dt \right]^{-(p-1)} \text{ q.o.}$$

Da questa formula si deduce che *condizione sufficiente affinché il funzionale* $\int_\Omega a(x) |\dot{u}|^p dx \,(p > 1)$ *sia* L^1*-s.c.i su* $H^{1,p}$ *è che* $[a(x)]^{\frac{-1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Allo scopo di estendere tale risultanto al caso $p = 1$ dimostriamo la seguente

PROPOSIZIONE 3.1 — *Se* $0 \leq a(x) \leq \wedge$ *è una funzione reale misurabile, posto* $\forall\, \Omega \in Ap(R)$ *e* $\forall\, u \in H^{1,1}(\Omega)$

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega a(x) |\dot{u}| dx,$$

si ha che $\forall\, u \in H^{1,1}(\Omega)$

$$\bar{F}(\Omega, u) = sc^-(L^1(\Omega)) F(\Omega, u) = \int_\Omega b(x) |\dot{u}| dx,$$

dove $b(x)$ è la massima funzione semicontinua inferiormente minorante $a(x)$ q.o.

Dim. — Per la lipschitzianità del funzionale $F(\Omega, u)$, dal teorema 2.4 segue che esiste un integrando normale convesso $g(x, z)$ tale che $\forall\, \Omega \in Ap_n$ e $\forall\, u \in H^{1,1}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} g(x, Du) = \bar{F}_0(\Omega, u) = \bar{F}(\Omega, u). \tag{3.1}$$

Da questa relazione e dalla (2.16), osservando che, posto $f(x, z) = a(x)\,|z|$,

$$f^*(x, z^*) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |z^*| \leq a(x) \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si ha che $\forall\, z \in R$ e che $\forall\, \Omega \in Ap$

$$\int_{\Omega} g(x, z) = \sup_{\substack{p^* \in L^\infty(\Omega) \\ \operatorname{div} p^* \in L^\infty(\Omega) \\ |p^*| \leq a(x)\ \text{q.o.}}} \left\{ \int_{\Omega} p^* z \right\} = \int_{\Omega} b(x)\,|z|$$

con $b(x) = \operatorname{Sup}\{p^*(x) \in L^\infty(\Omega)\colon \operatorname{div} p^* \in L^\infty(\Omega),\ |p^*| \leq a(x)\ \text{q.o.}\}$.

Ma, poiché la regolarizzata s.c.i. di $a(x)$ in R non è altro che l'estremo superiore delle funzioni continue minoranti $a(x)$, si ha

$$b(x) = sc^-(R)\, a(x) \quad \text{q.o.}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di Ω e di z, la tesi.

Da quanto appena dimostrato si deduce che *condizione necessaria e sufficiente affinché* $\int_{\Omega} a(x)\,|\dot{u}|\,dx$ *sia s.c.i. in* L^1 *è che* $a(x)$ *coincida q.o. con una funzione semicontinua inferiormente.*

Questa condizione, come si vede facilmente con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente, è ancora sufficiente, nel caso pluridimensionale, ad assicurare la semicontinuità inferiore in L^1 del funzionale $\int_{\Omega} a(x)\,|Du|$.

Osservazione. — La proposizione 3.1 e quanto prima osservato sussiste anche per il funzionale $\int_{\Omega} \sqrt{1 + a(x)\,|\dot{u}|^2}$ la cui regolarizzata s.c.i. in L^2 data da $\int_{\Omega} \sqrt{1 + b(x)\,|\dot{u}|^2}$ con $b(x) = sc^-(R)\, a(x)$ q.o.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CARBONE - C. SBORDONE, *Some properties of Γ-limts of integral functionals*, in corso di stampa su Ann. Mat. Pura e Appl.

[2] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area*, Rend. Mat. Roma, **8**, 277-294 (1975).

[3] I. EKELAND - R. TEMAN, *Analyse Convexe et problémes variationnels*, Dunod Gauthier-Villars, 1974.

[4] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, Parigi, volume 3, 1968.

[5] P. MARCELLINI, *Some problems of semicontinuity and of Γ-convergence for integrals of the calculus of variations*. Proceedings Int. Meeting « Recent Methods in Non Linear Analysis » Rome, May 1978, Pitagora ed.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e M. Curzio.

Analisi di mezzi di contrasto radiologici mediante cromatografia liquida ad alta pressione in coppie ioniche a fasi invertite

Nota di Maria Immacolata La Rotonda, Silvana Salvati e Oreste Schettino
presentata dal socio ordinario Mario Covello

(Adunanza del 3 febbraio 1979)

Riassunto. — La tecnica cosiddetta « soap chromatography » ha dato risultati lusinghieri nella separazione di composti radiopachi utilizzati come mezzi di contrasto nella diagnostica radiologica. Come contro ione si è utilizzato un detergente quaternario, il bromuro di cetiltrimetilammonio che forma coppie ioniche con i gruppi carbossilici. Le separazioni sono state condotte su colonna μ-Bondapak-C_{18} utilizzando un eluente costituito da una miscela tamponata di acqua e propanolo addizionata del controione.

Tale tecnica è risolutiva per il frazionamento di mezzi di contrasto radiologici e non richiede alcun trattamento preliminare del campione.

Summary. — The technique of « soap chromatography » has proved to be remarkably effective for the resolution of radioopaque contrast media.

The technique employs a long-chain cationic detergent, « cetrimide » (cetyltrimethylammnoium bromide), wich form ion pairs with carboxyl groups.

The counter ion, cetrimide, is dissolved in a buffered water/n-propanol mobile phase.

The separation is performed on a reserve phase μ-Bondapak C_{18} column.

This technique is applicable for the resolution of radiopaque contrast media without prior cleanup.

L'attuale diagnostica radiologica dispone di un elevato numero di mezzi di contrasto artificiali che trovano indicazione per i diversi organi e sistemi dell'organismo umano. Tra tali mezzi una importanza particolare riveste il gruppo di sostanze iodorganiche costituite da un anione, acido organico iodurato, che rappresenta il vettore dell'elemento radiopaco, salificato da un catione che è quasi sempre sodio e/o meglumina. Gli acidi organici sono generalmente o derivati dell'acido 2, 4, 6 triiodobenzoico o acidi arilalifatici iodosostituiti.

Il contenuto di iodio presente nella molecola è direttamente proporzionale al grado di opacità acquisito, ma è, contemporanea-

mente, responsabile della eventuale tossicità dell'intera molecola. Manifestazioni di idiosincrasia ed allergia sono, infatti, frequenti soprattutto in corso di colangiografie, angiografie ed urografie.

L'analisi quali-quantitativa di tali molecole, oltre ad essere fondamentale per il controllo delle forme farmaceutiche, risulta quindi di particolare interesse per tutta una serie di accertamenti di carattere fisiopatologico e farmacocinetico in relazione ai fenomeni tossici su indicati.

Dalla bibliografia in materia [1-9] risulta che i metodi analitici qualitativi proposti si avvalgono generalmente della cromatografia o elettroforesi su carta e della cromatografia su strato sottile, mentre la valutazione quantitativa si basa sulla determinazione dello iodio totale risultando, quindi, sostanzialmente aspecifica.

In considerazione dell'aspecificità dei procedimenti analitici fino ad oggi applicati, ci è sembrato utile mettere a punto una metodica quali-quantitativa suscettibile di condurre a valutazioni specifiche delle diverse molecole, sia nelle specialità farmaceutiche che nei liquidi biologici.

La cromatografia ad alta pressione, che permette di stabilire con rapidità ed in condizioni operative blande e quindi non distruttive, l'identità, la purezza ed il titolo di un principio attivo e di isolarlo dai componenti di una forma farmaceutica, ci è sembrata la metodologia più valida per la risoluzione di tale problema analitico.

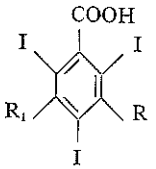
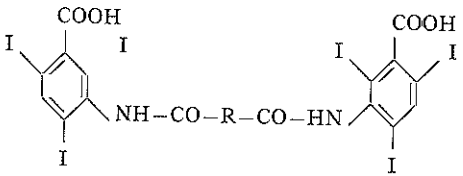
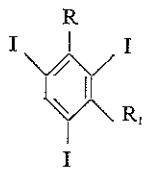
Nella tabella n. 1 si riportano le formule di struttura ed i valori delle costanti di acidità determinate da FELDER e coll. [11] mediante la costante di acidità apparente in metilcellosolve-acqua (80:20 v/v), relative ai composti iodorganici esaminati.

Il frazionamento di sostanze ionizzabili, quali i prodotti oggetto del presente lavoro, mediante cromatografia liquida ad alta pressione, richiede in via preliminare l'esame di una serie di problemi connessi all'efficienza della colonna, in termini di piatti teorici, ai fenomeni di ritenzione, alla conseguente maggiore o minore simmetria dei picchi. L'applicazione della cromatografia di adsorbimento, utilizzata peraltro da A. J. Falk nella determinazione del sodioo-iodoippurato [10], porta a codature piuttosto pronunciate dei picchi, conseguenti alla scarsa omogeneità superficiale dell'adsorbente che viene esaltata dall'uso, inevitabile, di eluenti polari.

La presenza di picchi asimmetrici rappresenta un elemento limitante soprattutto nella valutazione quantitativa dei risultati ottenuti.

Questo inconveniente, come è noto, può essere evitato mediante l'impiego di cromatografia a scambio ionico e con l'uso di opportuni tamponi i quali siano in grado di assicurare la costanza del grado di ionizzazione lungo la colonna. Tale tecnica, impiegata nella HPLC

Struttura di radiopachi iodurati impiegati quali mezzi di contrasto in radiologia.

R	R_1	$pK^{25°}_{H_2O}$ (11)		Nome generico	Nomi brevettati	Impieghi
		pK_1	pK_2			
						
$-NHCOCH_3$	$-NHCOCH_3$	2.05	—	Acido diatrizoico	Angiografin	Urografia Angiografia
$-NHCOCH_3$	$-CONHCH_3$	1.74	—	Acido iotalamico	Conray 24% 36% 60% 400 Angio-Conray 80%	Urografia Angiografia Aortografia
$-NHCOCH_3$	$-CH_2NHCOCH_3$	1.88	—	Iodamide	Uromiro 30% Uromiro 300 Uromiro 380	Urografia
						
$-(CH_2)_4$		1.74	2.76	Iodipamide	Biligrafin	Colangiocolecistografia
$-CH_2-O-CH_2$		1.67	2.68	Acido ioglicamico	Biligram	Colangiocolecistografia
$-CH_2-(CH_2-OCH_2)_4-CH_2$		1.78	2.80	Acido iodossamico	Endobil	Colangiocolecistografia
						
$-CH_2-CH(C_2H_5)-COOH$	$-NH_2$	5.6	—	Acido iopanoico	Cistobil	Colecistografia

per la separazione di composti fortemente polari è caratterizzata, però, da una scarsa efficienza, in particolare nella separazione di serie analoghe di composti.

Quale alternativa atta a risolvere molteplici problemi del tipo sopra delineato è stata proposta da alcuni autori in epoca recente [12-15] l'applicazione della tecnica denominata « ion pair », ovvero a coppie di ioni, alla cromatografia liquida ad alta pressione per la separazione di composti ionici o ionizzabili.

Composti solubili in acqua sono resi più solubili nei solventi organici mediante la formazione di coppie ioniche utilizzando un « contro-ione » di carica opposta. Le coppie ioniche si presentano come molecole neutre capaci di ripartirsi tra fase acquosa e fase organica secondo l'equilibrio:

$$A^+_{aq} + B^-_{aq} \rightleftarrows A\,B_{org}$$

dove *aq* e *org* rappresentano rispettivamente la fase acquosa e la fase organica. Il coefficiente di ripartizione è dato da:

$$K_{AB} = \frac{[A^+]_{aq}\,[B^-]_{aq}}{[A\,B]_{org}}$$

Nella cromatografia in coppie ioniche a « fasi invertite » generalmente viene utilizzato come fase stazionaria « octadecilsilano » ed il « contro-ione » è addizionato alla fase mobile polare costituita da una soluzione tampone addizionata a sua volta di un « modificatore » organico.

Tutti i parametri che influenzano un processo di ripartizione nella cromatografia liquido-liquido a fasi invertite possono essere direttamente estrapolati alla cromatografia di « coppie ioniche » in fasi invertite.

È stato tuttavia osservato che nel frazionamento di molecole supportanti raggruppamenti fortemente polari, ad es. $-SO_3H$, l'adozione della tecnica sopra delineata non sempre consentiva di evitare la formazione di picchi codati.

Per ovviare a questo inconveniente KNOX e LAIRD [16] idearono nel 1976 una particolare versione della tecnica a coppia di ioni, in cui, partendo dall'idea di impiegare come contro ione sostanze capaci di dare coppie ioniche di elevata stabilità, quali ad esempio alcuni detergenti ammonici quaternari, sperimentarono l'aggiunta della « cetrimide » (bromuro di cetiltrimetilammonio) ad un eluente idroalcolico nella cromatografia di acidi solfonici.

Essi ottennero risultati insperati con questa tecnica che definirono « soap chromatography ». Notarono, infatti, che l'aggiunta di cetrimide ai sistemi eluenti consentiva di migliorare nettamente il frazionamento di una serie di acidi solfonici, e preconizzarono l'estensione di questa tecnica a molte altre sostanze di elevata polarità.

Le difficoltà da noi incontrate nel frazionamento dei radiopachi iodurati, che conseguono alle considerazioni sopra riportate, ci hanno indotto a sperimentare tale tecnica in questo caso particolare.

Parte sperimentale.

L'apparecchiatura cromatografica è costituita da un cromatografo in fase liquida Perkin Elmer mod. 601 equipaggiato con spettrofotometro LC-55, valvola di introduzione Rheodyne mod. 7105, registratore « Recorder 56 ».

La colonna utilizzata è una μ-Bondapak C_{18} della Waters Associates (3,9 mm I.D. × 25 cm.). Gli acidi iodurati, delle ditte Bracco e Schering, vengono iniettati in colonna mediante microsiringa Hamilton da 1 mcl a concentrazione di 0,5-0,7 mcg/mcl.

Le fasi mobili utilizzate nella separazione dei composti in esame sono:

— acqua bidistillata - n.propanolo 5:2 v/v; tampone fosfato a ph 7,4 - n.propanolo (nei rapporti 6:1; 5:2 5:3,5 v/v); tampone borato a pH 8,4 - n.propanolo (nei rapporti 5:2; 5:3,5 v/v). A ciascuno di questi eluenti è stato addizionato, per trasformare gli acidi in esame in coppie ioniche neutre, come « contro-ione » la cetrimide a concentrazione dell'1 % p/v.

La preparazione dei tamponi fosfato e borato (0,1 M) è stata eseguita rispettivamente secondo Sorënsen e Clark e Lubs.

I prodotti impiegati per la preparazione delle fasi eluenti e cioè: acido borico, potassio cloruro, sodio idrossido, potassio fosfato bibasico, sodio fosfato monobasico e alcool n-propilico sono della Ditta Carlo Erba. Le cetrimide è un prodotto « purum » Fluka.

Gli eluenti, prima di essere utilizzati vengono filtrati attraverso filtri Millipore tipo H A 0,45 μm e successivamente degasati. È sempre necessario, nel cambiamento di eluente, equilibrare la colonna fino all'ottenimento di una linea di base stabile. Per raggiungere tale condizione è, generalmente, necessario lasciare eluire circa 100 ml di fase mobile.

L'analisi dei composti è stata condotta ad una velocità di flusso di 1 ml/min. (2.000 psi). Gli eluati vengono rilevati a lunghezza d'onda di 240 nm.

RISULTATI E DISCUSSIONI.

Il vantaggio della « soap chromatography » nell'analisi di composti supportanti gruppi polari ionizzabili è, come già si è accennato nella parte introduttiva, quello di mascherare l'influenza dei gruppi polari mediante la formazione di coppie ioniche particolarmente stabili e di realizzare, quindi, una normale cromatografia di ripartizione a fasi invertite.

I parametri che possono essere variati al fine di ottimizzare le condizioni di separazione dei composti in esame sono fondamentalmente la concentrazione del « contro-ione » e la concentrazione del propanolo.

KNOX e LAIRD [16] infatti hanno ipotizzato che il propanolo, componente meno polare della fase eluente, venga adsorbito parallelamente alla cetrimide sulla superficie del supporto lipofilo agevolando il formarsi di una interfaccia « fase stazionaria-eluente » attiva ai fini del frazionamento.

Tra tale interfaccia e l'eluente si stabiliscono una serie di complessi equilibri rappresentabili con lo schema seguente:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{nC^+_{aq}} & + & \underline{A^{n-}_{aq}} & \underset{K_{aq}}{\rightleftarrows} & (nC, A)_{aq} \\ \Updownarrow \beta & & \Updownarrow \alpha & & \\ \underline{nC^+_{ads}} & + & A^{n-}_{ads} & \underset{K_{ads}}{\rightleftarrows} & \underline{(nC, A)_{ads}} \end{array}$$

dove C^+_{aq} è A^{n-}_{aq} rappresentano rispettivamente le concentrazioni della cetrimide e dell'acido iodurato in forma ionizzata nella fase eluente; C^+_{ads} e A^{n-}_{ads} rappresentano le concentrazioni dei medesimi ioni adsorbiti nell'interfaccia. $(nC, A)_{aq}$ e $(nC, A)_{ads}$ sono le coppie ioniche rispettivamente nella fase eluente e in quella stazionaria. Nello schema riportato le specie sottolineate sono quelle presentanti in maggiore concentrazione.

La concentrazione ottimale di cetrimide è risultata essere dell'1 %. Tale valore rappresenta la media delle concentrazioni (0,8-1,2) alle quali, sperimentalmente non si sa alcuna rilevante variazione di k_1, $\left(\frac{V_t - V_o}{V_o}\right)$, per ciascun prodotto esaminato e rappresenta, quindi, la concentrazione critica necessaria per assicurare un'efficiente presenza di cationi alchilammonici sulla superficie del supporto lipofilo.

Qualora agli eluenti precedentemente indicati non si aggiunga cetrimide, cioè quando il frazionamento avviene mediante semplice

cromatografia a fasi invertite, i composti non vengono trattenuti ad eccezione dell'acido iopanoico, e ciò in funzione della diversa struttura chimica di tale prodotto.

L'utilizzazione delle soluzioni tampone è giustificata dalla necessità di ottenere i composti in forma ionizzata, in modo da assicurare la loro quantitativa trasformazione in coppie ioniche con i cationi ammonici quaternari.

Dall'esame della fig. n. 1 si nota come un aumento del pH faccia decrescere, a parità di concentrazione di propanolo, i valori di k_1.

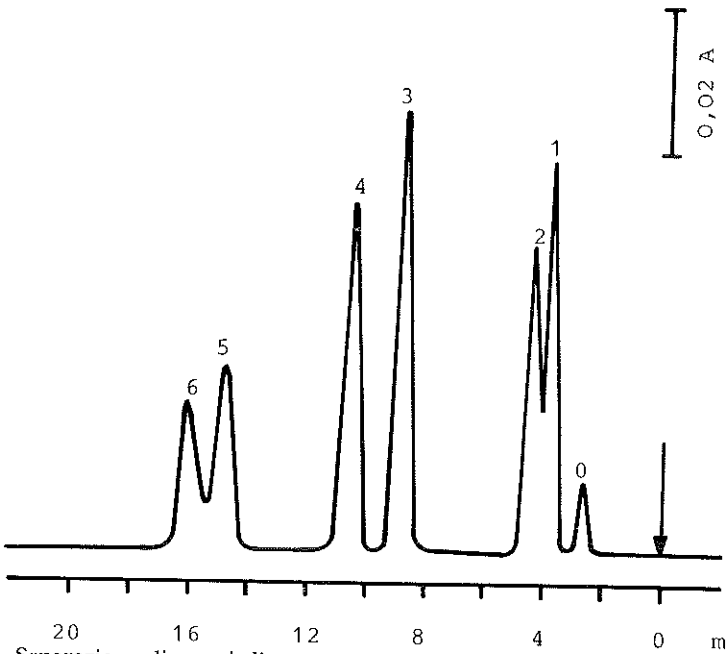


FIG. 1. - Separazione di mezzi di contrasto radiologici mediante soap chromatography - Colonna μ Bondapak C_{18} (Waters); eluente n. 4 - Picchi in ordine di eluizione; 0 = metanolo; 1 = iodamide; 2 = acido iotalamico; 3 = acido iodossamico; 4 = acido ioglicamico; 5 = iodipamide; 6 = acido iopanoico.

È da osservare anche (tabella n. 2) che a parità di concentrazione di propanolo (70 %) un aumento del pH (tampone pH 8,4) non dà separazione soddisfacenti forse per il sovrapporsi di fenomeni di trascinamento a quelli di ripartizione.

Il rapporto propanolo-tampone (16,6-70 %) non ha effetto significativo sull'ordine di eluizione dei vari prodotti, ma i valori di k_1 (tabella n. 2) diminuiscono con l'aumentare del contenuto in propanolo (fig. n. 2) e ciò è naturale che accada in un sistema a fasi invertite. Infatti dall'esame comparativo delle tabelle n. 1 e 2, nelle quali rispettivamente vengono riportati le strutture chimiche dei prodotti esaminati ed i valori dei tempi di ripartizione (k_1 e relativo

TABELLA 2

Valori di k_1 relativi ai diversi eluenti utilizzati.

	Eluente 1		Eluente 2		Eluente 3		Eluente 4		Eluente 5		Eluente 6	
	k_1	Log k_1	k_1	Log k_1	k_1	Log k_1	k_1	Log k_1	k_1	Log k_1	k_1	Log k_1
Acido iotalamico	1.10	0.0413	0.73	−0.1366	0.47	−0.3279	0.20	−0.6989	0.27	−0.5686	*	
Acido diatrizoico	1.27	0.1038	0.87	−0.0604	0.50	−0.3010	0.12	−0.9208	0.30	−0.5228	*	
Iodamide	0.93	−0.0315	0.66	−0.1804	0.43	−0.3665	0.15	−0.8239	0.20	−0.6989	*	
Acido ioglicamico	11.0	1.0413	13	1.1139	7.9	0.8976	0.92	−0.0362	3.97	0.5987	*	
Acido iodossamico	8.17	0.9122	8.8	0.9444	4.8	0.6812	0.6	−0.2218	2.40	0.3802	*	
Iodipamide	12.0	1.0791	14.8	1.1702	8.9	0.9493	1.13	0.0530	4.07	0.6095	*	
Acido iopanoico	11.27	1.0519	19.3	1.2855	6.33	0.8014	1.32	0.1205	4.17	0.6201	0.37	−0.4317

Eluente 1 = H_2O distillata - n-propanolo 5:2 v/v.
Eluente 2 = Tampone fosfato pH 7,4 - n-propanolo 6:1 v/v.
Eluente 3 = Tampone fosfato pH 7,4 - n-propanolo 5:2 v/v.
Eluente 4 = Tampone fosfato pH 7,4 - n-propanolo 5.3,5 v/v.
Eluente 5 = Tampone borato pH 8,4 - n-propanolo 5:2 v/v.
Eluente 6 = Tampone borato pH 8,4 - n-propanolo 5.3,5 v/v.

A tutti i sistemi eluenti è stata addizionata, come contro ione, la cetrimide a concentrazione dell'1 %.

* Euiscono contemporaneamente al metanolo.

logaritmo) si nota che i tempi di eluizione, nella quasi totalità, sono funzione della lipofilicità della molecola.

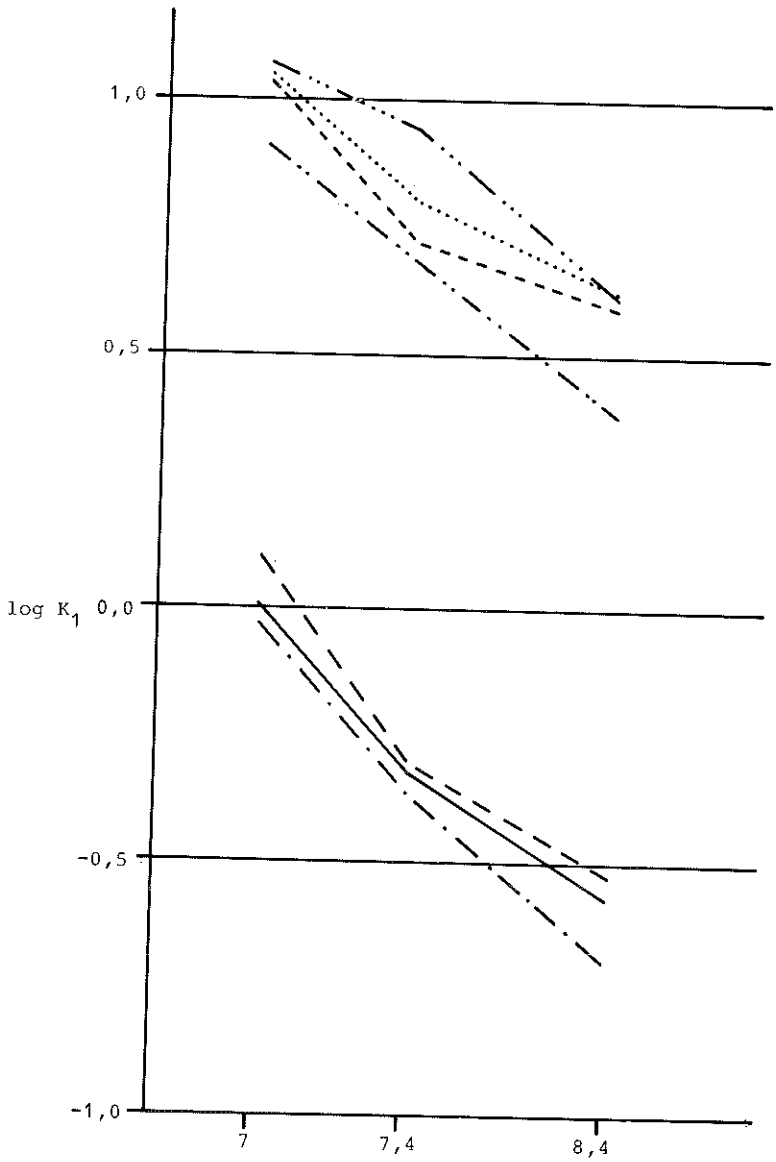


FIG. 2. - Variazione del log di k_t in funzione del pH.
—— acido iotalamico — — acido diatrizoico . — iodamide — — acido ioglicamico
. . — acido iodossamico . . . — iodipamide . . . . . acido iopanoico.

È anomalo l'andamento della iodamide. Tale composto eluisce prima dell'ecido diatrizoico pur supportando a parità della restante struttura molecolare un gruppo CH_2 in più.

In figura 3 si porta a titolo di esempio un cromatogramma relativo alla miscela di sei dei sette composti esaminati. La separazione

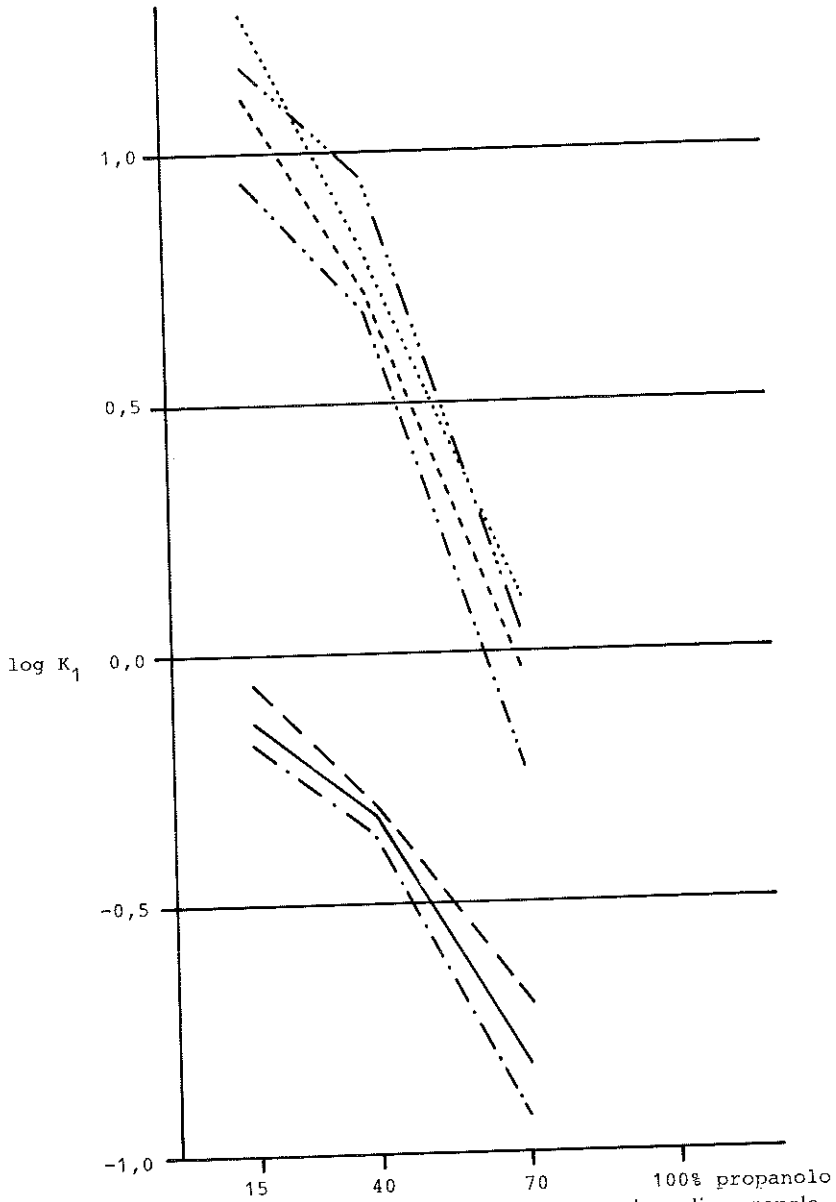


FIG. 3. - Variazione del log. k_i in funzione della concentrazione di propanolo.
—— acido iotalamico — — acido diatrizoico . — iodamide — — acido ioglicamioc
. . — acido iodossamico . . . — iodipamide . . . . . acido iopanoico.

è decisamente buona, i tempi di ritenzione sono, infatti, sufficientemente differenziati anche per quei composti che hanno una struttura

chimica molto vicina. È da notare, comunque, che in commercio non esistono formulazioni in cui siano associati più prodotti. Una tale tecnica di frazionamento potrà risultare particolarmente utile nell'individuare tali molecole, o loro eventuali metaboliti, nei fluidi biologici.

CONCLUSIONI.

La tecnica messa a punto ha consentito di frazionare in maniera soddisfacente il gruppo di farmaci radiopachi presi in considerazione, anche in quei casi in cui le minime differenze strutturali rendevano tale frazionamento difficile con le usuali metodologie cromatografiche.

La presenza del propanolo, buon solvente per le coppie ioniche a base di cetrimide [17], e nella fase eluente e nell'interfaccia, costituisce un elemento di equilibrio nella ripartizione delle coppie ioniche tra eluente idrofilo e supporto di natura lipofila, il che si traduce in picchi ottimamente definiti.

I risultati conseguiti ci inducono ad estendere i nostri studi nel settore, specialmente in vista di una utilizzazione quantitativa della metodica.

Gli AA. ringraziano il perito chimico Sig. Vincenzo Rullo per la collaborazione prestata nell'elaborazione e allestimento dei grafici.

BIBLIOGRAFIA

[1] KOIKE N., KOIKE H., Berl. Med., **7**, 215 (1956).
[2] KOIKE N., KOIKE H., Berl. Med., **7**, 270 (1956).
[3] LANGECKER H., Ketin. Wschr, **378**, 471 (1959).
[4] PITRÉ D., FUMAGALLI L., Rad. Med., LVI, 836 (1970).
[5] FELDER E., TIEPOLO U., ZINGALES H., Il Farmaco, ed. p. XXVIII, 607 (1973).
[6] Farmacopea Ufficiale della Repubblica Italiana, VIII, ed. 1973.
[7] FELDER E., PITRÉ D., ROSATI G., TIZONE P., Rad. Med., LX, 209 (1974).
[8] PITRÉ D.. FELDER E., Il Farmaco (ved. il 74-75).
[9] The United States Pharmacopeia, XIX, 1975.
[10] FALK A. J., J. Pharm. Sci., **63**, 274 (1974).
[11] FELDER E. PITRÉ D., GRANDI M., Il Farmaco ed. sci., **28**, 486 (1973).
[12] EKSBORG S., SCHILL G., Anal Chem., **45**, 2092 (1973).
[13] KARGER B. L., PERSONN B. A., J. Chromtaog. Sci., **12**, 521 (1974).
[14] KARGER B. L. e coll., J. Chromatog. Sci., **12**, 678 (1974).
[15] KNOX J. H., JURAND J., J. Chromatog., **103**, 311 (1975).
[16] KNOX J. H., LAIRD G. G., J. Chromatog., **122**, 17 (1976).
[17] SCHILL G., MODIN R., PERSSON B. A., Acta Pharm. Succica, **2**, 199 (1965).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Covello, Lorenzo Mangoni, Rodolfo Nicolaus.

Su alcuni sistemi di assiomi gruppali definiti rispetto al Booleano del sostegno di una relazione ternaria

Nota di DOMENICO LENZI *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 3 febbraio 1979)

SUMMARY. — In the present work, after a first introductory part, we consider the system of axioms given in reference [L] and we adapt them to a non-empty set G endowed with a ternary relation σ that has a property of associativity. Moreover (see N. 2) we study which ones among the systems of axioms mentioned above provide G (in a sense to be clarified later) with a group structure (see also [B.L.]).

The above systems of axioms are then further weakened (see N. 3), by adapting the to them power set $\mathfrak{B}$ (G) of G so as to obtain again a group structure.

SOMMARIO. — In questo lavoro, dopo una prima parte introduttiva, si prendono i sistemi di assiomi riportati in [L], adattandoli ad un insieme non vuoto G dotato di una relazione ternaria σ che gode di una certa proprietà di associatività. Tra l'altro (vedi N. 2) si esamina quali dei citati sistemi di assiomi conferiscono a G (in un senso che verrà chiarito in seguito) una struttura di gruppo (vedere anche [B.L.]).

Successivamente (vedi N. 3) detti sistemi di assiomi vengono ulteriormente attenuati, adattandoli al Booleano di G ($\mathfrak{B}$ (G)), al fine di ottenere ancora una struttura di gruppo.

N. 1. - GENERALITÀ.

Ricordiamo che per operazione binaria (non necessariamente ovunque definita) su di un insieme G può intendersi una qualsiasi relazione ternaria $\sigma \subseteq G^3$ che goda della proprietà per cui, dati comunque $a, b, c, c' \in G$, se $(a, b, c) \in \sigma$ e $(a, b, c') \in \sigma$ allora $c = c'$. In particolare l'operazione risulta ovunque definita se dati comunque $a, b \in G$ esiste un (unico) $c \in G$ tale che $(a, b, c) \in \sigma$.

Orbene, data un'operazione su G, può essere definita in maniera naturale (vedi [Z.P.], pag. 25) un'operazione binaria sull'insieme $\mathfrak{B}$ (G) (Booleano di G) costituito da tutti i sottoinsiemi di G; operazione che

* Istituto di Matematica dell'Università di Lecce.

può essere generalizzata anche al caso di una relazione ternaria qualsiasi $\sigma \subseteq G^3$ ponendo, dati comunque $A, B \in \mathfrak{B}(G)$,

$$A \cdot B = \{c \in G \mid \exists\ a \in A,\ \exists\ b \in B : (a, b, c) \in \sigma\}^1.$$

Dati ora $A, B, C \in \mathfrak{B}(G)$, se $A \cdot B = C$ ed $A = \{a\}$, con $a \in G$, alla scrittura $\{a\} \cdot B = C$ conveniamo di sostituire la scrittura $a \cdot B = C$, usando la stessa convenzione nel caso in cui $B = \{b\}$ oppure $C = \{c\}$. Ne consegue che, nel caso in cui σ è un'operazione e si adopera la notazione moltiplicativa, la scrittura $a \cdot b = c$ viene ad avere un duplice significato, il che non crea inconvenienti dal momento che l'applicazione che ad un generico $x \in G$ associa $\{x\} \in \mathfrak{B}(G)$ è chiaramente un monomorfismo di G in $\mathfrak{B}(G)$ (strutturati rispettivamente con σ e con l'operazione che σ associa naturalmente a $\mathfrak{B}(G)$). Di conseguenza diverse delle tradizionali definizioni di gruppo riferite ad un insieme G strutturato con un certa operazione possono essere riferite indifferentemente all'operazione relativa a G o all'operazione naturalmente associata a $\mathfrak{B}(G)$ indotta sull'insieme (algebricamente chiuso) delle parti di G costituite da un solo elemento.

Per l'operazione poc'anzi definita sussistono, con ovvio significato per i simboli usati, le seguenti proprietà di immediata dimostrazione:

a) $$A \cdot \emptyset = \emptyset \cdot B = \emptyset;$$

b) se $A \subseteq A'$ e $B \subseteq B'$ allora $A \cdot B \subseteq A' \cdot B'$.

Inoltre se I è un insieme non vuoto, $(A_i)_{i \in I}$ è una famiglia di parti di G e B è un sottoinsieme di G, risulta:

c) $$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cdot B = \bigcup_{i \in I} (A^i \cdot B);$$

infatti dalla b) si ha $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cdot B \supseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \cdot B)$, d'altro canto detto c un elemento di $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cdot B$ allora debbono esistere $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ e $b \in B$ tali che $(a, b, c) \in \sigma$, ne consegue che $a \in A_{\bar{i}}$ per qualche $\bar{i} \in I$, donde la tesi.

In maniera analoga si ha:

d) $$A \cdot (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i).$$

[1] Per cui l'operazione in questione, intesa come relazione ternaria su $\mathfrak{B}(G)$, viene ad essere l'insieme delle terne ordinate di elementi di $\mathfrak{B}(G)$ del tipo $(A, B, A \cdot B)$.

Dalla c) e dalla d) discendono rispettivamente:

c') $\quad A \cdot B = \bigcup_{a \in A} (a \cdot B) \qquad$ (per $A \neq \emptyset$);

d') $\quad A \cdot B = \bigcup_{b \in B} (A \cdot b) \qquad$ (per $B \neq \emptyset$).

Osservazione 1. — Si può vedere agevolmente che una delle tradizionali definizioni di gruppo si può attenuare con l'affermazione che un gruppo è un insieme G con una relazione ternaria $\sigma \subseteq G^3$ tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

1) Dati comunque $a, b, c \in G$ risulta $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (dove ora e nel seguito, salvo diverso avviso, si fa riferimento all'operazione tra parti di G naturalmente associata a σ);

2) esiste un elemento $e \in G$ per cui si abbia:

2') per ogni $a \in G$ risulta $e \cdot a = a$;

2'') per ogni $a \in G$ esiste un elemento $a' \in G$ tale che $a' \cdot a = e$.

Affinché le proprietà citate permettano a σ di conferire a G una struttura di gruppo basta ovviamente provare che dati comunque $a, b \in G$ l'insieme $a \cdot b$ ha uno ed un solo elemento. All'uopo osserviamo intanto che $a \cdot b \neq \emptyset$, infatti se $a \cdot b = \emptyset$ allora si ha $b = (a' \cdot a) \cdot b = a' \cdot (a \cdot b) = a' \cdot \emptyset = \emptyset$ (dove a' è uno degli elementi associati ad a grazie a 2''), il che è assurdo. D'altro canto $a \cdot b$ non può avere più di un elemento, infatti se x ed y sono elementi di $a \cdot b$, allora $\emptyset \neq a' \cdot x \subseteq a' \cdot (a \cdot b) = b$ e $\emptyset \neq a' \cdot y \subseteq a' \cdot (a \cdot b) = b$, onde $a' \cdot x = a' \cdot y$, per cui $a'' \cdot (a' \cdot x) = a'' \cdot (a' \cdot y)$ (dove a'' è uno degli elementi associati ad a' da 2'') e quindi $x = y$.

Ora ci proponiamo di mettere in luce che se σ è una relazione ternaria su G tale che dati comunque $a, b, c \in G$ risulti $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ allora dati comunque $A, B, C \in \mathfrak{B}(G)$ risulta $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. All'uopo proviamo che $(A \cdot B) \cdot C \subseteq A \cdot (B \cdot C)$. Sia dunque y un elemento di $(A \cdot B) \cdot C$ (supposto non vuoto). Allora esistono $x \in A \cdot B$ e $c \in C$ tali che $(x, c, y) \in \sigma$; orbene, poiché $x \in A \cdot B$ equivale a dire che esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $(a, b, x) \in \sigma$, si può concludere che $y \in (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \subseteq A \cdot (B \cdot C)$. In maniera analoga si prova che $A \cdot (B \cdot C) \subseteq (A \cdot B) \cdot C$.

N. 2. - Gli assiomi di [L] riferiti ad una relazione ternaria.

Ora ci proponiamo di studiare se i sistemi di assiomi esaminati in [L], opportunamente interpretati in un insieme G dotato di una

relazione ternaria, conferiscono a G una struttura di gruppo. Comunque preannunciamo che solo per il sistema di assiomi di cui al teorema 1 di [L] la risposta è affermativa. Diamo intanto il seguente

TEOREMA 1. — *Condizione sufficiente (ed ovviamente necessaria) affinché un insieme* G *munito di una relazione ternaria associativa*[2] *sia un gruppo è che esista in* G *un elemento* u *tale che siano soddisfatti in seguenti assiomi* (cfr. teor. 1 di [L]):

1) Per ogni $a \in G$ esiste $x \in G$ tale che $a = u \cdot x$;

2) Per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che $a' \cdot a = u$.

Dimostrazione. — Osserviamo in via preliminare che da 1) e da 2) si ricava subito che per ogni $a \in G$ esiste $y \in G$ tale che $y \cdot u = a$; infatti (con ovvio significato per i simboli usati) $a = u \cdot x = (x'' \cdot x') \cdot x = x'' \cdot (x' \cdot x) = x'' \cdot u$. In particolare $u = e \cdot u$, con e elemento opportuno di G.

Orbene, dato un qualsiasi $a \in G$ e posto (in virtù di 1)) $a = u \cdot x$, si ha che $e \cdot a = e \cdot (u \cdot x) = (e \cdot u) \cdot x = u \cdot x = a$. D'altro canto per l'osservazione iniziale, esiste $z \in G$ tale che $e = z \cdot u$, onde $(z \cdot a') \cdot a = z \cdot (a' \cdot a) = z \cdot u = e$, il che assicura che esiste $\bar{a} \in z \cdot a'$ tale che $\bar{a} \cdot a = e$. Tenendo conto dell'osservazione 1, si ha immediatamente la tesi. c.v.d.

Il teorema precedente ci dà risposta affermativa nei riguardi del sistema di assiomi del teorema 1 di [L]. Se ora consideriamo un insieme G munito di una relazione ternaria associativa σ e ad esso adattiamo, sulla falsa riga di quanto fatto nel teorema precedente, i sistemi di assiomi che in [L] sono presentati nei teoremi successivi al primo, possiamo vedere con due contro esempi che G non assume necessariamente una struttura di gruppo. Infatti se G è costituito da due soli elementi, che per semplicità indichiamo con 1 ed u, e consideriamo la relazione ternaria σ che si ottiene ponendo $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$, $u \cdot u = \emptyset$ (onde $\sigma = \{(1, 1, 1), (1, u, u), (u, 1, u)\}$) nonché la relazione ternaria σ' che si ottiene dalla σ ponendo $u \cdot u = \{1, u\}$ invece che $u \cdot u = \emptyset$ (onde $\sigma' = \{(1, 1, 1), (1, u, u), (u, 1, u), (u, u, u), (u, u, 1)\}$) si verifica facilmente che σ e σ' sono associative e che per esse vengono soddisfatte le condizioni relative ai sistemi di assiomi di cui ai teoremi di [L] successivi al primo. Pur tuttavia si può provare che se nei vari sistemi di assiomi ora citati aggiungiamo la condizione per cui esiste un intero naturale $m \geq 2$ tale che u^m ha uno ed un solo elemento allora i sistemi di assiomi così completati

[2] Cioè tale che dati comunque $a, b, c \in G$ risulti $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

fanno si che σ conferisca a G una struttura di gruppo. Quanto detto è conseguenza immediata dei teoremi di [L] successivi al primo nonché del seguente

TEOREMA 2. — *Condizione suffciente affinche un insieme* G *munito di una relazione ternaria associativa* σ *sia un semigruppo è che esista un elemento* $u \in G$ *tale che, per qualche intero naturale* $m \geq 2$ u^m *abbia un solo elemento e tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi*:

1) Dati comunque $x, y \in G$ se $u \cdot x = u \cdot y$ allora $x = y$;

2) Per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che $a' \cdot a = u$.

Dimostrazione [3]. — Naturalmente per provare il teorema è sufficiente dimostrare che, dati comunque $x, y \in G$, $x \cdot y$ ha uno ed un solo elemento.

Osserviamo preliminarmente che per ogni intero naturale non nullo n che sia strettamente minore di m risulta $u^n \neq \emptyset$; infatti se fosse $u^n = \emptyset$ allora risulterebbe $u^m = u^n \cdot u^{m-n} = \emptyset \cdot u^{m-n} = \emptyset$, il che è assurdo. Quanto visto assicura che per ogni $x \in G$ $x \cdot u \neq \emptyset$, infatti se fosse $x \cdot u = \emptyset$ si avrebbe $\emptyset \neq u \cdot u = (x' \cdot x) \cdot u = x' \cdot (x \cdot u) = x' \cdot \emptyset = \emptyset$ (dove x' è uno degli elementi associati dall'assioma 2) ad x). Possiamo allora affermare che per ogni $x \in G$ $u \cdot x \neq \emptyset$, dal momento che $u \cdot x = (x'' \cdot x') \cdot x = x'' \cdot (x' \cdot x) = x'' \cdot u \neq \emptyset$ (essendo x'' uno degli elementi associati dall'assioma 2) ad x').

Siamo ora in grado di affermare che dati comunque $x, y \in G$ $x \cdot y$ ha almeno un elemento, in quanto se fosse $x \cdot y = \emptyset$ avremmo $\emptyset \neq u \cdot y = (x' \cdot x) \cdot y = x' \cdot (x \cdot y) = x' \cdot \emptyset = \emptyset$.

Prima di dimostrare che $x \cdot y$ non ha più di un elemento facciamo vedere che dati comunque $a, x, y \in G$, se $a \cdot x = a \cdot y$ allora $x = y$; infatti da $a \cdot x = a \cdot y$ si ha che $a' \cdot (a \cdot x) = (a \cdot y)$, onde $u \cdot x = (a' \cdot a) \cdot x = a' \cdot (a \cdot x) = a' \cdot (a \cdot y) = (a' \cdot a) \cdot y = u \cdot y$ e quindi $x = y$.

Quanto visto or ora consente di provare che, dati comunque $a \in G$ e $B \in \mathfrak{B}(G)$, se B ha più di un elemento anche $a \cdot B$ ha più di un elemento. Infatti se x ed y sono elementi distinti di B allora $ax \neq ay$, $\emptyset \neq a \cdot x \subseteq a \cdot B$ e $\emptyset \neq a \cdot y \subseteq a \cdot B$, onde $a \cdot B$ ha almeno due elementi distinti in quanto $a \cdot B \supseteq a \cdot x \cup a \cdot y$ ed $a \cdot x \cup a \cdot y$ è l'unione dei due sottinsiemi di G non vuoti e distinti. Come conseguenza immediata di ciò si ha che per ogni intero naturale non

[3] La presente dimostrazione è stata svolta rielaborando due dimostrazioni date indipendentemente dall'autore e dal co-autore di [L] A. LENZI.

nullo n strettamente minore di m il sottoinsieme non vuoto u^n ha un solo elemento, dal momento che se u^n avesse più di un elemento allora anche $u^m = u(\ldots(u \cdot u^n))$ dovrebbe avere più di un elemento, il che contraddice le nostre ipotesi.

Siamo ora in grado di provare che, dati comunque $x, y \in G$, $x \cdot y$ ha un solo elemento. Infatti è stato già visto che $x \cdot y \neq \emptyset$; se dunque $x \cdot y$ avesse più di un elemento risulterebbe che $x' \cdot (x \cdot y) = (x' \cdot x) \cdot y = u \cdot y$ ha più di un elemento, onde $u \cdot u = (y''' \cdot y'') \cdot (y' \cdot y) = y''' \cdot ((y'' \cdot y') \cdot y) = y''' \cdot (u \cdot y)$ (con ovvio significato per i simboli usati) dovrebbe avere più di un elemento, il che è assurdo dal momento che si è già provato che $u \cdot u$ ha un solo elemento. c.v.d.

N. 3. - Un'ulteriore attenuazione degli assiomi di [L].

Formuliamo ora il seguente teorema, la cui dimostrazione discenderà immediatamente dalla successiva osservazione 1', dal successivo Lemma 5 e dal teorema 1 di N. 2.

Teorema 1'. — *Condizione suffciente (ed ovviamente necessaria) affinché un insieme* G *munito di una relazione ternaria associativa sia un gruppo è che esista in* $\mathfrak{B}(G)$ *un elemento* U *(ovviamente non vuoto) tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi* (cfr. teor. 1 di [L]):

1) per ogni $a \in G$ esiste $X \in \mathfrak{B}(G)$ tale che $a = U \cdot X$.

2) per ogni $a \in G$ esiste $A' \in \mathfrak{B}(G)$ tale che $A' \cdot a = U$.

Osservazione 1'. — Notiamo che l'elemento $X \in \mathfrak{B}(G)$ di cui all'assioma 1) (come anche l'elemento A' di cui all'assioma 2)) deve essere non vuoto in forza della proprietà *a*) di N. 1, allora da $a = U \cdot X$ si ha (vedi proprietà *d'*) di N. 1) che $a = \bigcup_{x \in X} (U \cdot x)$, per cui l'assioma 1) può essere espresso equivalentemente nella seguente forma:

1') Per ogni $a \in G$ esiste $x \in G$ tale che $a = U \cdot x$.

Notiamo inoltre che se $U \cdot x = a$ allora per ogni $u \in U$ risulta $u \cdot x = a$; infatti per la proprietà *c'*) di N. 1 risulta $U \cdot x = \bigcup_{a \in U} (u \cdot x) = a$, onde per ogni $u \in U$ deve essere $u \cdot x = a$ oppure $u \cdot x = \emptyset$. Orbene da $u \cdot x = \emptyset$, poiché per l'assioma 2) deve esistere $U' \in \mathfrak{B}(G)$ tale che $U' \cdot u = U$, si ricava che $\emptyset = U' \cdot (u \cdot x) = (U' \cdot u) \cdot x = U \cdot x = a$, il che è assurdo.

Sia ora σ una relazione ternaria associativa definita sull'insieme non vuoto G, sia inoltre U un sottoinsieme di G per cui valgono l'assioma 1') dell'osservazione 1' e l'assioma 2) del teorema 1'. Sussistono allora i seguenti 5 lemmi

LEMMA 1. — *Per ogni* $a \in G$ *esiste* $v \in U$ *ed esiste* $z \in G$ *tale che* $z \cdot v = a$.

Dimostrazione. — Sia a un qualsiasi elemento di G. Allora per l'assioma 1') esiste $x \in G$ tale che $U \cdot x = a$. D'altro canto per l'assioma 2) esiste $Y \in \mathfrak{B}(G)$ tale che $Y \cdot x = U$. Orbene, poiché $Y \neq \emptyset$, $Y \cdot x = \bigcup_{y \in Y} (y \cdot x)$, onde per un certo $y \in Y$ deve aversi $U \supseteq y \cdot x \neq \emptyset$. Sia ora $Z \in \mathfrak{B}(G)$ tale che $Z \cdot y = U$, risulta perciò $a = U \cdot x = (Z \cdot y) \cdot x = Z \cdot (y \cdot x)$, onde per un opportuno $z \in Z$ e per un opportuno $v \in y \cdot x \subseteq U$ deve aversi $z \cdot v = a$. c.v.d.

LEMMA 2. — *In* G *esiste un elemento* e *tale che per ogni* $a \in G$ *risulta* $e \cdot a = a$.

Dimostrazione. — Sia u un elemento di U. Allora per il lemma 1 esiste $v \in U$ ed esiste $e \in G$ tale che $e \cdot v = u$. Orbene per ogni $a \in G$ esiste $x \in G$ tale che $U \cdot x = a$, onde $v \cdot x = u \cdot x = a$ (vedi seconda parte dell'osservazione 1'); di conseguenza $e \cdot a = e \cdot (v \cdot x) = (e \cdot v) \cdot x = u \cdot x = a$. c.v.d.

LEMMA 3. — *Dati comunque due elementi* $a, b \in G$ *risulta* $a \cdot b \neq \emptyset$.

Dimostrazione. — Supponiamo che per qualche $a, b \in G$ risulti $a \cdot b = \emptyset$. Poiché per l'assioma 2) esiste $A' \in \mathfrak{B}(G)$ tale che $A' \cdot a = U$, ne consegue che $\emptyset = A' \cdot (a \cdot b) = (A' \cdot a) \cdot b = U \cdot b$. Consideriamo ora l'elemento e di cui al lemma 2, allora per il lemma 1 esiste $v \in U$ ed esiste $z \in G$ tale che $z \cdot v = e$. Poiché $U \cdot b = \emptyset$, anche $v \cdot b = \emptyset$ e quindi $\emptyset = z \cdot (v \cdot b) = (z \cdot v) \cdot b = e \cdot b = b$, il che è assurdo. c.v.d.

LEMMA 4. — *Per ogni* $a \in G$ *e per ogni* $v \in U$ *esiste* $z \in G$ *tale che* $z \cdot v = a$.

Dimostrazione. — Siano $x \in G$ ed $Y \in \mathfrak{B}(G)$ gli elementi considerati nella dimostrazione del lemma 1, onde $U = Y \cdot x = \bigcup_{y \in Y} (y \cdot x)$, e quindi per ogni $v \in U$ esiste $y \in Y$ tale che $U \supseteq y \cdot x \ni v$. Sia ora $Z \in \mathfrak{B}(G)$ tale che $Z \cdot y = U$, risulta perciò $a = U \cdot x = (Z \cdot y) \cdot x =$

$= Z \cdot (y \cdot x)$. Tenendo allora conto del lemma precedente si ha che per ogni $z \in Z$ e per ogni $u \in y \cdot x$ risulta $z \cdot u \neq \emptyset$, onde $z \cdot u = a$. Essendo v un elemento di $y \cdot x$ si ha immediatamente la tesi. c.v.d.

LEMMA 5. — *Il sottoinsieme* U *ha un solo elemento.*

Dimostrazione. — Siano u_1 ed u_2 due elementi di U, allora per l'assioma 1') e per la seconda parte dell'osservazione 1' esistono y_1, $y_2 \in G$ tali che $u_1 = U \cdot y_1 = u_1 \cdot y_1$ ed $u_2 = U \cdot y_2 = u_2 \cdot y_2$. D'altro canto per il lemma 4 esistono x_1, $x_2 \in G$ tali che $e = x_1 \cdot u_1$ ed $e = x_2 \cdot u_2$. Di conseguenza $e = x_1 \cdot u_1 = x_1 \cdot (u_1 \cdot y_1) = (x_1 \cdot u_1) \cdot y_1 = y_1$, ed analogamente $e = y_2$, onde $y_1 = y_2$. Da ciò segue subito la tesi, infatti $u_1 = U \cdot y_1 = U \cdot y_2 = u_2$. c.v.d.

In N. 2 è stato già messo in luce con due contro esempi che se si adattano, sulla falsa riga di quanto fatto nel teorema 1 di N. 2, i sistemi di assiomi riportati in [L] successivamente al teorema 1 ad un insieme G munito di una relazione ternaria non si ottiene necessariamente una struttura di gruppo. Ciò vale a maggior ragione se quei sistemi di assiomi vengono generalizzati sulla falsariga di quanto fatto nel teorema 1' del presente numero. Pur tuttavia basta aggiungere anche ora la condizione per cui esiste un intero naturale $m \geq 2$ tale che U^m abbia un solo elemento per poter avere una struttura di gruppo. Sussiste infatti il seguente teorema, analogo al teorema 2 di N. 2.

TEOREMA 2'. — *Condizione sufficiente affinché un insieme G munito di una relazione ternaria associativa σ sia un semigruppo è che esista un elemento* $U \in \mathfrak{B}(G)$ *tale che, per qualche intero naturale* $m \geq 1$, U^m *abbia un solo elemento, e tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi*:

1'') Dati comunque $x, y \in G$ se $U \cdot x = U \cdot y$ allora $x = y$;

2) Per ogni $a \in G$ esiste $A' \in G$ tale che $A' \cdot a = U$.

Dimostrazione. — Naturalmente per provare il teorema è sufficiente dimostrare che U ha un solo elemento u; infatti da $A' \cdot a = u$ si ha (non potendo essere $A' = \emptyset$) che deve esistere un elemento $a' \in A'$ tale che $a' \cdot a = u$, il che permette di ricondursi al teorema 2 di N. 2. Supponiamo perciò, per assurdo che $m > 1$ e che U abbia almeno due elementi distinti. Allora per l'assioma 1'') non può essere $U \cdot u = \emptyset$ per ogni $u \in U$, sia dunque $v \in U$ tale che $U \cdot v \neq \emptyset$.

Se ora si riesce a provare che dati comunque $a, b \in G$ risulta $a \cdot b \neq \emptyset$ si può concludere facilmente (procedendo per induzione, te-

nendo conto dell'assioma 1''), nonché del fatto che per $B \neq \emptyset$ risulta $U \cdot B = \bigcup_{b \in B} (U \cdot b)$) che U^m ha più di un elemento, il che è assurdo. Proviamo dunque che $a \cdot b \neq \emptyset$ per ogni $a, b \in G$. Orbene, con ovvio significato per i simboli usati, se per qualche $a, b \in G$ risulta $a \cdot b = \emptyset$ allora $\emptyset = A' \cdot (a \cdot b) = (A' \cdot a) \cdot b = U \cdot b$; ma da $B' \cdot b = U$ si ha che per qualche $b' \in B$ deve essere $b' \cdot b \ni v$, quindi $\emptyset = U \cdot b = (B'' \cdot b') \cdot b = B'' \cdot (b' \cdot b) \supseteq b'' \cdot v$, con b'' elemento qualsiasi di B''. Ora da $\emptyset = b'' \cdot v$ segue che $\emptyset = B''' \cdot (b'' \cdot v) = (B''' \cdot b'') \cdot v = U \cdot v$, il che contraddice il fatto che $U \cdot v \neq \emptyset$. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[B.L.] R. Baer, F. Levi, *Vollständige irreduzible Systeme von Gruppenaxionem*, AKAD. Wiss, Heidelberg, 1932.

[L] D. Lenzi, A. Lenzi, *Sugli assiomi gruppali*, Atti sem. Mat. Fis. Univers. Modena XXIII (1974).

[Z.P.] G. Zappa, R. Permutti, *Gruppi, Corpi equazioni*, Feltrinelli, Milano, 1965.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e C. Miranda.

Una generalizzazione di certi sistemi di assiomi gruppali relativamente alla famiglia dei Booleani successivi del sostegno di una relazione ternaria

Nota di DOMENICO LENZI *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 3 febbraio 1979)

SUMMARY. — In this paper, concluding the work wich was made in reference [L_1] and [L_2], we consider the system of group axioms considered in N. 3 of [L_2], making them weaker and using them for the successive power sets on a non empty set G (the power set of G, the power set of the power set of G, and so on, . . .) endowed with a ternary relation $\sigma \subseteq G^3$, so as to obtain for G a group structure again.

SOMMARIO. — In questo lavoro, concludendo una ricerca iniziata in [L_1] e proseguita in [L_2], si considerano i sistemi di assiomi gruppali riportati in [L_2] e li si attenua adattandoli alla famiglia dei Booleani successivi ($\mathfrak{B}(G), \ldots \mathfrak{B}(\ldots \mathfrak{B}(G))\ldots$) di un insieme non vuoto G dotato di una relazione ternaria associativa (vedi parte iniziale di [L_2]) $\sigma \subseteq G^3$, al fine di ottenere per G ancora una struttura di gruppo.

Dato un insieme G, indichiamo con $\mathfrak{B}_0(G)$ lo stesso G, indichiamo poi con $\mathfrak{B}_1(G)$ l'insieme $\mathfrak{B}(G)$ costituito da tutti i sottoinsiemi di G (Booleano di G); è possibile allora dar significato in maniera univoca alla scrittura $\mathfrak{B}_n(G)$ (per ogni intero naturale $n \geq 2$) ponendo $\mathfrak{B}_n(G) = \mathfrak{B}(\mathfrak{B}_{n-1}(G))$.

Dato poi un elemento $x \in G$ indichiamo con $\{x\}^{(0)}$ lo stesso elemento x e con $\{x\}^{(1)}$ l'insieme $\{x\}$; è possibile allora dar significato univocamente alla scrittura $\{x\}^{(n)}$ (per ogni intero naturale $n \geq 2$) ponendo $\{x\}^{(n)} = \{\{x\}^{(n-1)}\}$.

Supponiamo ora G dotato di una relazione ternaria $\sigma \subseteq G^3$. Allora σ permette di definire un'operazione binaria in $\mathfrak{B}(G)$ ponendo, dati comunque $A, B \in \mathfrak{B}(G)$, $A \cdot B = \{c \in G \mid \exists\ a \in A,\ \exists\ b \in B : (a, b, c) \in \sigma\}$ [1]. È possibile, di conseguenza, definire un'operazione binaria

* Istituto di Matematica dell'Università di Lecce.

[1] Per alcune proprietà significative di tale operazione si veda la prima parte di [L_2].

in $\mathfrak{B}_2(G)$ ponendo, dati comunque $A, B \in \mathfrak{B}_2(G)$, $A \cdot B = \{c \in \mathfrak{B}(G) \mid \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B : a \cdot b = c\}$.

Procedendo in maniera analoga è possibile allora definire in maniera univoca (per ogni intero naturale $n \geq 3$) un'operazione binaria[2] in $\mathfrak{B}_n(G)$ ponendo, dati comunque $A, B \in \mathfrak{B}_n(G)$, $A \cdot B = \{c \in \mathfrak{B}_{n-1}(G) \mid \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B : a \cdot b = c\}$.

N. B. 1. — È quasi superfluo notare che, potendosi riguardare un'operazione binaria su di un insieme come una particolare relazione ternaria sullo stesso insieme, l'operazione poc'anzi definita in $\mathfrak{B}_n(G)$ è dello stesso tipo di quella definita in $\mathfrak{B}(G)$. Ne consegue che se σ è associativa, cioè dati comunque $a, b, c \in G$ risulta $(\{a\} \cdot \{b\}) \cdot \{c\} = \{a\} \cdot (\{b\} \cdot \{c\})$, anche l'operazione binaria su $\mathfrak{B}_n(G)$ di cui sopra è associativa (cfr. parte iniziale di [L_2] dove per semplicità si è preferito scrivere $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$).

Si fa inoltre notare che se $n \geq 2$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ (con $a, b \in \mathfrak{B}_{n-1}(G)$) allora $A \cdot B = \{a\} \cdot \{b\} = \{a \cdot b\}$, onde in tal caso $A \cdot B$ ha un solo elemento.

Diamo ora il seguente

Teorema 1. — *Condizione sufficiente (ed ovviamente necessaria) affinché una relazione ternaria associativa σ su di un insieme non vuoto G conferisca ad esso una struttura di gruppo è che esista un intero naturale $q \geq 1$ tale che per un opportuno $U \in \mathfrak{B}_q(G)$ risultino soddisfatti i due seguenti assiomi:*

1) per ogni $a \in G$ esistono un intero naturale p ed un intero naturale n (con $q \leq n$ e $p \leq n$) tali che per qualche $X \in \mathfrak{B}_p(G)$ risulti in $\mathfrak{B}_n(G)$:

$$\{U\}^{(n-q)} \cdot \{X\}^{(n-p)} = \{a\}^{(n)};$$

2) per ogni $a \in G$ esistono un intero naturale s ed un intero naturale r (con $q \leq r$ ed $s \leq r$) tali che per qualche $A' \in \mathfrak{B}_s(G)$ risulti in $\mathfrak{B}_r(G)$:

$$\{A'\}^{(r-s)} \cdot \{a\}^{(r)} = \{U\}^{(r-q)}.$$

Per rendere agevole la dimostrazione introduciamo alcune importanti funzioni, nonché alcuni lemmi significativi. Dato perciò un

[2] Per non appesantire le notazioni non useremo simboli diversi per indicare operazioni diverse; comunque in ogni occasione avremo cura di far intendere dal contesto a quale specifica operazione vogliamo riferirci.

qualsiasi intero naturale $n \geq 2$, indichiamo con $\mathcal{A}_n$ la funzione da $\mathcal{B}_n(G)$ verso $\mathcal{B}_{n-1}(G)$ ottenuta ponendo, per ogni $Y \in \mathcal{B}_n(G)$, $\mathcal{A}_n(Y) = \bigcup_{X \in Y} X$; inoltre per ogni intero naturale $n \geq 1$ indichiamo con $\mathcal{A}_n^0$ la funzione identica su $\mathcal{B}_n(G)$.

Possiamo allora definire (per ogni intero naturale i compreso tra 1 ed $n-1$) una funzione $\mathcal{A}_n^i$ di $\mathcal{B}_n(G)$ in $\mathcal{B}_{n-1}(G)$ ponendo $\mathcal{A}_n^i = \mathcal{A}_{n-i+1} \circ \ldots \circ \mathcal{A}_{n-1} \circ \mathcal{A}_n$ se $i \neq 1$, e ponendo $\mathcal{A}_n^1 = \mathcal{A}_n$.

N. B. 2. — Osserviamo che se $Z \in \mathcal{B}_{n-1}(G)$, con $n \geq 2$, allora $\mathcal{A}_n(\{Z\}) = Z$; più in generale se $Z \in \mathcal{B}_m(G)$, $1 \leq m \leq n$ e $0 \leq i \leq n - m$, allora $\mathcal{A}_n^i(\{Z\}^{(n-m)}) = \{Z\}^{(n-m-i)}$.

Osserviamo inoltre che $\mathcal{A}_n^i = \mathcal{A}_{n-h}^{i-h} \circ \mathcal{A}_n^h$ (con h intero naturale tale che $0 \leq h \leq i$).

LEMMA 1. — *Dati comunque* $A, B \in \mathcal{B}_n(G)$ con $n \geq 2$, se $A \subseteq B$ allora $\mathcal{A}_n(A) \subseteq \mathcal{A}_n(B)$ (e quindi $\mathcal{A}_n^i(A) \subseteq \mathcal{A}_n^i(B)$, qualunque sia i compreso tra 0 ed $n-1$).

Dimostrazione. — Basta osservare che $\mathcal{A}_n(A) = \bigcup_{X \in A} X \subseteq \bigcup_{X \in B} X = \mathcal{A}_n(B)$. c.v.d.

LEMMA 2. — *Data una famiglia* $(Y)_{i \in I}$ *(con* $I \neq \emptyset$*) di elementi di* $\mathcal{B}_n(G)$ *(con* $n \geq 2$*) risulta:*

$$\mathcal{A}_n\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{A}_n(Y_i)).$$

Dimostrazione. — Ovviamente $\mathcal{A}_n(\bigcup_{i \in I} Y_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} (\mathcal{A}_n(Y_i))$ in forza del lemma 1, proviamo che vale anche l'altra inclusione. Sia dunque x un elemento di $\mathcal{A}_n(\bigcup_{i \in I} Y_i)$, allora deve esistere (per definizione di $\mathcal{A}_n$) un elemento $X \in \bigcup_{i \in I} Y_i$ tale che $x \in X$, onde per un certo $\bar{\imath} \in I$ deve aversi $x \in X \in Y_{\bar{\imath}}$, per cui $x \in \mathcal{A}_n(Y_{\bar{\imath}})$, donde la tesi. c.v.d.

LEMMA 3. — *Se* $n \geq 2$ *ed* $a, b \in \mathcal{B}_{n-1}(G)$ *allora* $\mathcal{A}_n(\{a\} \cdot \{b\}) = \mathcal{A}_n(\{a\}) \cdot \mathcal{A}_n(\{b\})$.

Dimostrazione. — Poiché $\{a\} \cdot \{b\} = \{a \cdot b\}$ (vedi N.B.1), tenendo conto di N.B.2 si ha che $\mathcal{A}_n(\{a\} \cdot \{b\}) = \mathcal{A}_n(\{a \cdot b\}) = a \cdot b = \mathcal{A}_n(\{a\}) \cdot \mathcal{A}_n(\{b\})$. c.v.d.

LEMMA 4. — *Dati comunque* $A, B \in \mathfrak{B}_n(G)$, *allora* $\mathfrak{A}_n^i(A \cdot B) = \mathfrak{A}_n^i(A) \cdot \mathfrak{A}_n^i(B)$ (dove $1 \leq i \leq n-1$).

Dimostrazione. — Naturalmente basta provare che $\mathfrak{A}_n(A \cdot B) = \mathfrak{A}_n(A) \cdot \mathfrak{A}_n(B)$. Ciò è immediato se $A = \emptyset$ oppure $B = \emptyset$, dal momento che in tal caso $A \cdot B = \emptyset$, inoltre $\mathfrak{A}_n(\emptyset) = \bigcup_{X \in \emptyset} X = \emptyset$; ne consegue che $\mathfrak{A}_n(A \cdot B) = \emptyset = \mathfrak{A}_n(A) \cdot \mathfrak{A}_n(B)$. Siano quindi $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Allora tenendo conto delle proprietà *c*) e *d*) riportate nel numero N. 1 di [L_2] e tenendo conto dei lemmi 2 e 3 si ricava:

$$\mathfrak{A}_n(A \cdot B) = \mathfrak{A}_n\Big(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \cdot B)\Big) = \mathfrak{A}_n\Big(\bigcup_{a \in A}\Big(\bigcup_{b \in B}(\{a\} \cdot \{b\})\Big)\Big) =$$

$$= \bigcup_{a \in A}\Big(\bigcup_{b \in B}(\mathfrak{A}_n(\{a\}) \cdot \mathfrak{A}_n(\{b\}))\Big) = \bigcup_{a \in A}\Big(\mathfrak{A}_n(\{a\}) \cdot \Big(\bigcup_{b \in B}\mathfrak{A}_n(\{b\})\Big)\Big) =$$

$$= \Big(\bigcup_{a \in A}\mathfrak{A}_n(\{a\})\Big) \cdot \Big(\bigcup_{b \in B}\mathfrak{A}_n(\{b\})\Big) = \mathfrak{A}_n\Big(\bigcup_{a \in A}\{a\}\Big) \cdot \mathfrak{A}_n\Big(\bigcup_{b \in B}\{b\}\Big) =$$

$$= \mathfrak{A}_n(A) \cdot \mathfrak{A}_n(B).$$

Ed ora possiamo dare la

Dimostrazione del teorema 1. — Dall'assioma 1) di cui all'enunciato del teorema 1 si ha, applicando il lemma 4,

$$\mathfrak{A}_n^{n-1}(\{U\}^{(n-q)}) \cdot \mathfrak{A}_n^{n-1}(\{X\}^{(n-p)}) = \mathfrak{A}_n^{n-1}(\{a\}^{(n)}),$$

da cui, tenendo conto del N.B.2, si ricava:

$$\mathfrak{A}_{n-(n-q)}^{n-1-(n-q)} \circ \mathfrak{A}_n^{n-q}(\{U\}^{(n-q)}) \cdot \mathfrak{A}_{n-(n-p)}^{n-1-(n-p)} \circ \mathfrak{A}_n^{n-p}(\{X\}^{(n-p)}) = \{a\},$$

onde

$\mathfrak{A}_q^{q-1}(U) \cdot \mathfrak{A}_p^{p-1}(X) = \{a\}$ (dove $\mathfrak{A}_q^{q-1}(U)$, $\mathfrak{A}_p^{p-1}(X)$ ed $\{a\}$ sono elementi di $\mathfrak{B}(G)$.

Analogamente dall'assioma 2) di cui all'enunciato del teorema 1 si ha di seguito

$$\mathfrak{A}_r^{r-1}(\{A'\}^{(r-s)}) \cdot \mathfrak{A}_r^{r-1}(\{a\}^{(r)}) = \mathfrak{A}_r^{r-1}(\{U\}^{(r-q)}),$$

$$\mathfrak{A}_{r-(r-s)}^{r-1-(r-s)} \circ \mathfrak{A}_r^{r-s}(\{A'\}^{(r-s)}) \cdot \{a\} = \mathfrak{A}_{r-(r-q)}^{r-1-(r-q)} \circ \mathfrak{A}_r^{r-q}(\{U\}^{(r-q)}),$$

$\mathfrak{A}_s^{s-1}(A') \cdot \{a\} = \mathfrak{A}_q^{q-1}(U)$ (dove anche $\mathfrak{A}_s^{s-1}(A')$, $\{a\}$ ed $\mathfrak{A}_q^{q-1}(U)$ sono elementi di $\mathfrak{B}(G)$).

Applicando il teorem a 1′ di [L_2] (dove a sta per $\{a\}$) si ha immediatamente la tesi. c.v.d.

Diamo ora un teorema che permette di ottenere vari sistemi di assiomi gruppali (ricavandoli dai sistemi di assiomi incontrati in [L_1] successivamente al teorema 1) sulla falsariga di quanto enunciato nelle premesse ai teoremi 2 e 2′ di [L_2].

TEOREMA 2. — *Condizione sufficiente affinché un insieme* G *munito di una relazione ternaria associativa* σ *risulti essere un semigruppo è che esista un intero naturale* $q \geq 1$ *tale che per un opportuno* $U \in \mathfrak{B}_q(G)$ *risultano soddisfatti l'assioma* 2) *di cui al teorema* 1, *nonché i seguenti assiomi*:

1′) dati comunque $x, y \in G$ risulta

$$U \cdot \{x\}^{(q)} = U \cdot \{y\}^{(q)} \Rightarrow x = y;$$

3) per qualche intero naturale $m \geq 1$ $\mathfrak{A}_q^{q-1}(U^m)$ ha un solo elemento.

Dimostrazione. — Per la dimostrazione basta verificare che sono soddisfatti gli assiomi di cui al teorema 2′ di [L_2] relativamente all'elemento $\mathfrak{A}_q^{q-1}(U) \in \mathfrak{B}(G)$.

Orbene per il lemma 4 $(\mathfrak{A}_q^{q-1}(U))^m = \mathfrak{A}_q^{q-1}(U^m)$, onde $(\mathfrak{A}_q^{q-1}(U))^m$ ha un solo elemento u in virtù dell'assioma 3.

Sia ora, nella notazione di [L_2], $\mathfrak{A}_q^{q-1}(U) \cdot x = \mathfrak{A}_q^{q-1}(U) \cdot y$; allora nella nostra notazione $\mathfrak{A}_q^{q-1}(U) \cdot \{x\} = \mathfrak{A}_q^{q-1}(U) \cdot \{y\}$, da cui si ricava immediatamente $(\mathfrak{A}_q^{q-1}(U))^m \cdot \{x\} = (\mathfrak{A}_q^{q-1}(U))^m \cdot \{x\}$, cioè $\{u\} \cdot \{x\} = \{u\} \cdot \{y\}$ (dove u è l'unico elemento di $(\mathfrak{A}_q^{q-1}(U))^m$. Tenendo ora conto dell'assioma 2 si ha, con ovvio significato per i simboli usati, $\{U'\}^{(r-s)} \cdot \{u\}^{(r)} = \{U\}^{(r-q)}$. D'altro canto per quanto già visto $\{\{u\} \cdot \{x\}\}^{(r-1)} = \{\{u\} \cdot \{y\}\}^{(r-1)}$, onde $\{u\}^{(r)} \cdot \{x\}^{(r)} = \{u\}^{(r)} \cdot \{y\}^{(r)}$.

Ne consegue immediatamente che $\{U'\}^{(r-s)} \cdot \{u\}^{(r)} \cdot \{x\}^{(r)} = \{U'\}^{(r-s)} \cdot \{u\}^{(r)} \cdot \{y\}^{(r)}$ (vedi N. B. 1 relativamente a relazione ternarie associative), per cui $\{U\}^{(r-q)} \cdot \{x\}^{(r)} = U^{(r-q)} \cdot \{y\}^{(r)}$, quindi $\mathfrak{A}_r^{r-q}(\{U\}^{(r-q)}) \cdot \mathfrak{A}_r^{r-q}(\{x\}^{(r)}) = \mathfrak{A}_r^{r-q}(\{U\}^{(r-q)}) \cdot \mathfrak{A}_r^{r-q}(\{y\}^{(r)})$, onde $U \cdot \{x\}^{(q)} = U \cdot \{y\}^{(q)}$, da cui si conclude (per l'assioma 1′) che $x = y$.

Infine da $\{A'\}^{(r-s)} \cdot \{a\}^{(r)} = \{U\}^{(r-q)}$ si ha che $\mathfrak{A}_r^{r-1}(\{A'\}^{(r-s)}) \cdot \mathfrak{A}_r^{r-1}(\{a\}^{(r)}) = \mathfrak{A}_r^{r-1}(\{U\}^{(r-q)})$, onde $\mathfrak{A}_s^{s-1}(A') \cdot \{a\} = \mathfrak{A}_q^{q-1}(U)$, cioè (nella notazione di [L_2]) $\mathfrak{A}_s^{s-1}(A') \cdot a = \mathfrak{A}_q^{q-1}(U)$. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[L_1] D. Lenzi, A. Lenzi, *Sugli assiomi gruppali*, atti sem. Mat. Fis., Università di Modena XXII (1974).

[L_2] D. Lenzi, *Su alcuni sistemi di assiomi gruppali definiti rispetto al Booleano del sostegno di una relazione ternaria.* Atti Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, vol. XLV, 1979.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e C. Miranda.

Un procedimento di calcolo per il disegno delle sezioni delle travi in precompresso

Nota di LUCIO TOSCANI *
presentata dal socio corrispondente ELIO GIANGRECO

(Adunanza del 3 febbraio 1979)

SOMMARIO. — Si propone un semplice procedimento di calcolo per determinare rapidamente tutte le dimensioni della sezione delle travi precompresse rispettando rigorosamente le sollecitazioni prefissate per i bordi della sezione stessa nelle diverse fasi della costruzione.

SUMMARY. — In this paper an easy proceeding is developed for the design of prestressed concreete beams subjected to bending which allows to quicly fix all sizes of the section while prefixed stresses for the edges are strictly kept during the different times of his construction.

1. INTRODUZIONE, TEORIA E PRIMA EQUAZIONE

Si considerino le condizioni di sollecitazione e di carico indicate in appresso che sono un dato del problema e si supponga, ad esempio, che la trave debba sostenere un solaio di copertura (nel caso di trave

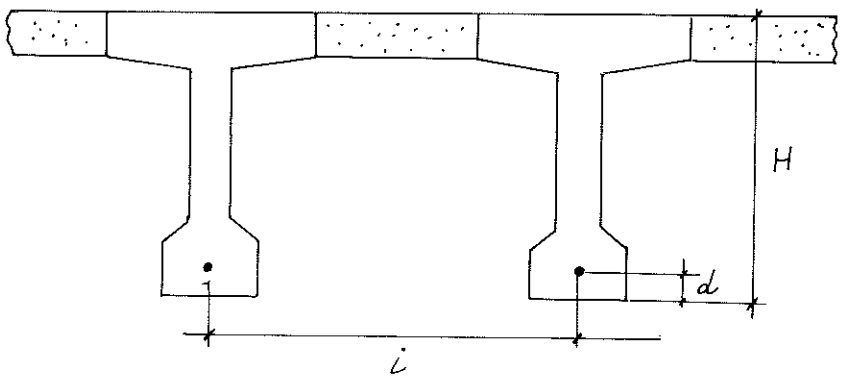


FIG. 1.

* Istituto di Tecnica delle Costruzioni - Napoli - 10 novembre 1977.

da ponte si tratterà di impalcato, zavorra o altro). I carichi e le altre grandezze saranno denotate come in appresso e come riportato nelle figure 1 e 2.

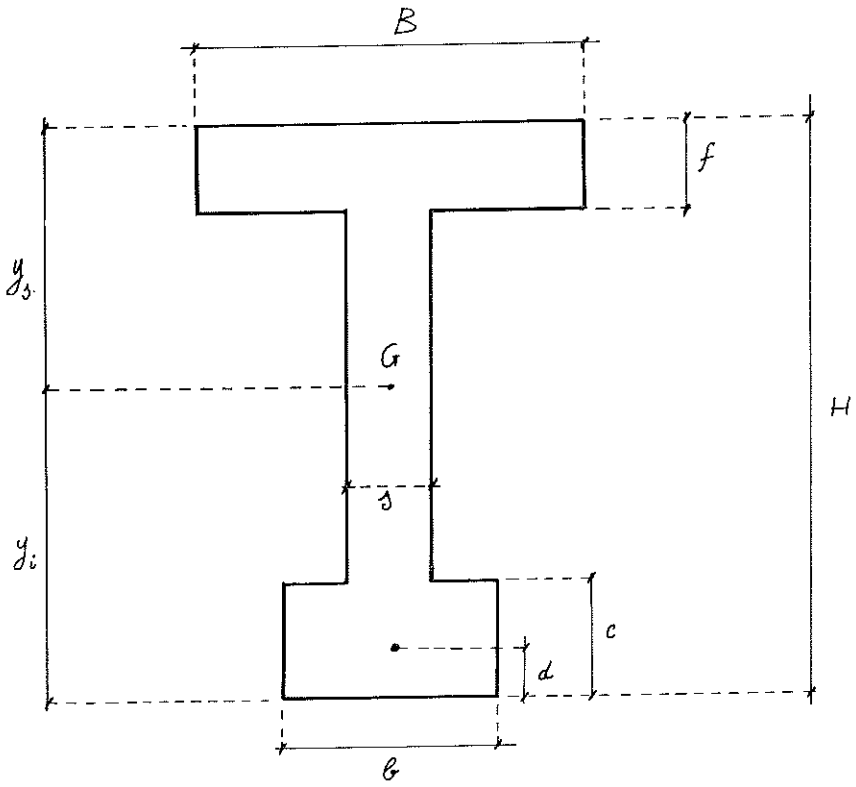


FIG. 2.

Nella risoluzione del problema si assume in partenza:

$$H = \frac{1}{20} \div \frac{1}{30} l; \qquad d = 0{,}08\ H$$

Si denotano con:

H altezza della trave;

l luce della trave;

p_s peso del solaio grezzo all'atto del tiro, in tonn/mq, o altro carico presente al tiro;

p_u carico utile costituito da sovraccarichi fissi quali massetti, intonaci, pavimenti, ecc. più i carichi accidentali previsti, in tonn/mq;

d distanza lembo inferiore-baricentro di precompressione;

A area della sezione della trave in mq;

i interasse tra le travi;

A x 2,5 peso proprio della trave in tonn/m, avendo assunto un peso specifico per il calcestruzzo armato di 2,5 t/mc.

Le espressioni dei momenti sono le seguenti:

$$M_{min} \text{ (al tiro)} = \frac{2,5}{8} A l^2 + p_s (i - 0,5\,H) * \frac{l^2}{8} = g\,A + q\frac{l^2}{8}$$

$$M_u \text{ (utile)} = p_u\, i \frac{l^2}{8}$$

$$M_{max} = \frac{2,5}{8} l^2 A + p_s (i - 0,5\,H) \frac{l^2}{8} + p_u\, i \frac{l^2}{8}$$

avendo denotato ancora con:

$$g = 2,5 \frac{l^2}{8} = p_c \frac{l^2}{8}; \qquad q = p_s (i - 0,5\,H) \text{ in t/m}$$

che rappresentano rispettivamente: il momento g di una trave avente la sezione di 1 mq; il carico q per metro lineare, eventualmente presente al tiro, del solaio grezzo gravante sulla trave all'atto del tiro o di impalcato o di zavorra appositamente disposta per ridurre le tensioni al tiro. Ed ancora con:

$$m_1 = p_s (i - 0,5\,H) \frac{l^2}{8} + p_u\, i \frac{l^2}{8}$$

e si ha:

$$M_{max} = g\,A + m_1 = M_{min} + M_u$$

N sforzo di precompressione in tonn.

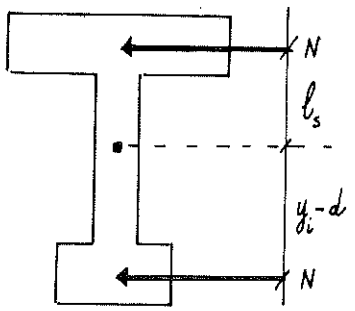


FIG. 3.

* In via approssimata, si è preliminarmente assunta la larghezza dell'ala pari a 0,5 H.

Le tensioni assunte si indicano con:

al tiro:	in esercizio:
$\sigma_s^\circ \geq 0$	$\sigma_s^1 = K_s^1$
$\sigma_i^\circ = K_i^\circ$	$\sigma_i^1 \approx 0$

Passando dalla fase di tiro, nella quale lo sforzo di precompressione, nell'ipotesi di assenza di tutti i carichi, agirebbe nel baricentro dei cavi, alla fase di esercizio, si ha, come noto, un'escursione della linea d'azione dello sforzo N, che, rispettando le tensioni assunte, si localizzerà al punto limite superiore l_s. Il momento massimo sarà così equilibrato dalla coppia avente il braccio sotto indicato:

$$M_{max} = N\,(l_s + y_i - d). \tag{1}$$

Le sollecitazioni seguiranno indicativamente i seguenti diagrammi:

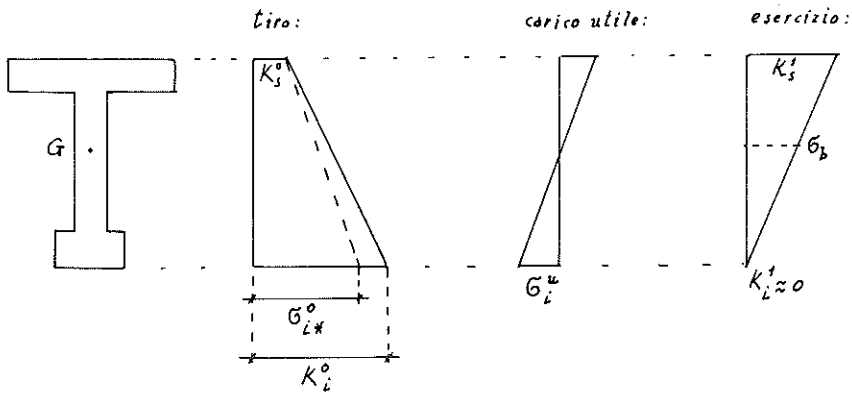


FIG. 4.

L'espressione di un punto limite sia:

$$l_s = \frac{\rho^2}{y_i}\left(1 - \frac{K_i^1}{\sigma_b}\right) \tag{2}$$

avendo indicato con ρ e σ_b il raggio d'inerzia della sezione e la sollecitazione baricentrica in esercizio.

Ai fini della presente trattazione si assume inoltre un'altra condizione, ben nota, che risponde a buon criterio di economia dell'area della sezione e che inoltre deriva dall'esperienza delle sezioni già

progettate. Detta condizione consiste nell'assumere l'espressione $\frac{\rho^2}{y_i\, y_s}$, (3) che si denota rendimento geometrico della sezione, pari a 0,5.

Tale dato si introduce nell'espressione del detto punto limite, che diventa:

$$l_s = 0{,}5\,(H - y_i)\left(1 - \frac{K_i^1}{\sigma_b}\right) = 0{,}5\,H - 0{,}5\,y_i\,(1 - 0) = 0{,}5\,(H - y_i).$$

L'avere assunto $K_i^1 = 0$, costituisce un'approssimazione prossima al vero, che si introduce necessariamente nella presente trattazione e che comunque non ne altera i risultati.

Essendo inoltre:

$$\frac{\rho^2}{y_i} = 0{,}5\,y_s = 0{,}5\,(H - y_i)$$

ed avendo assunto $d = 0{,}08\,H$, dato anch'esso rispondente a valori ben convalidati dall'esperienza, l'espressione (1) del momento massimo diventa:

$$\begin{aligned} M_{max} &= N\,(0{,}5\,H - 0{,}5\,y_i + y_i - 0{,}08\,H) = \\ &= M_{max} = N\,(0{,}42\,H + 0{,}5\,y_i) \end{aligned} \tag{4}$$

Si ha ancora:

$$N = \sigma_b\,A;\quad \frac{\sigma_b}{y_i} \cong \frac{K_s^1}{H}$$

da cui:

$$N = \frac{K_s^1}{H}\,A\,y_i$$

e quindi:

$$M_{max} = K_s^1\,A\,y_i\left(0{,}42 + \frac{0{,}5}{H}\,y_i\right) = g\,A + m_1 \tag{5}$$

da cui:

$$A = \frac{m_1}{0{,}42\,K_s^1\,y_i + \frac{0{,}5}{H}\,K_s^1\,y_i^2 - g} \tag{6}$$

Questa è la prima equazione risolutiva del problema che contiene le incognite A ed y_i.

2. La seconda equazione

La seconda equazione risolvente si ottiene considerando l'aliquota di sollecitazione σ_u cui viene sottoposta la trave al lembo inferiore, v. fig. 4, per effetto del solo carico utile, ossia:

$$M_u = \frac{J}{y_i}\,\sigma_u \tag{7}$$

Ma σ_u è anche incognita.

Si può però dire (si osservino i diagrammi delle sollecitazioni) che σ_u è la differenza fra $K_i^1 \cong 0$ e $\sigma_{i^*}^o$, dove $\sigma_{i^*}^o$ rappresenta idealmente il valore che assumerebbe la tensione al tiro se avvenissero subito tutte le cadute di tensione. Si scriverà quindi, essendo $K_i^1 \cong 0$, e introducendo il valore del rendimento geometrico:

$$\begin{aligned} M_u &= \frac{\rho^2 A}{y_i}\,(\sigma_{i^*}^o - K_i^1) = 0{,}5\, y_s\, A\, \sigma_{i^*}^o \\ M_u &= 0{,}5\,(H - y_i)\, A\, \sigma_{i^*}^o \end{aligned} \tag{8}$$

È questa la seconda equazione risolutiva, che contiene però ora l'incognita $\sigma_{i^*}^o$ che occorre determinare, per cui occorrerà istituire una terza equazione.

3. L'espressione della tensione al tiro $\sigma_{i^*}^o$, depurata delle cadute di tensione

Si considerano le equazioni delle sollecitazioni della trave precompressa *al tiro al lembo inferiore*, la prima affetta dal coefficiente β, che tiene conto delle cadute di tensione (e che si pone, ad esempio, pari a 1,25) e l'altra no e che rappresenterà proprio il valore della tensione $\sigma_{i^*}^o$ depurata delle cadute di tensione. Si ha pertanto:

$$\beta\,\frac{N}{A} + \beta\,\frac{N_e}{W_i} - \frac{M_{min}}{W_i} = K_i^o$$

$$\frac{N}{A} + \frac{N_e}{W_i} - \frac{M_{min}}{W_i} = \sigma_{i^*}^o$$

dividendo i termini della prima per β e sottraendo le due equazioni:

$$\frac{M_{min}}{W_i} - \frac{M_{min}}{\beta W_i} = \frac{K_i^o}{\beta} - \sigma_{i^*}^o$$

$$\sigma_{i^*}^o = -\frac{K_i^o}{\beta} + M_{min}\left(\frac{1}{\beta W_i} - \frac{1}{W_i}\right) = \frac{K_i^o}{\beta} + M_{min}\frac{(1-\beta)}{\beta W_i}$$

essendo:

$$W_i = \frac{J}{y_i} = \frac{\rho^2 A}{y_i} = 0{,}5\, y_s A = 0{,}5\,(H - y_i)\,A.$$

Introducendo l'espressione di M_{min}, vista all'inizio, e cambiando di segno, si ha:

(9) $$\sigma_{i^*}^o = \frac{K_i^o}{\beta} - \left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right)\frac{g A + q\frac{l^2}{8}}{0{,}5\,(H - y_i)\,A}$$

Questa è la terza equazione occorrente.

4. Il sistema per la ricerca delle prime tre incognite A, y_i e $\sigma_{i^*}^o$

Si riportano le tre equazioni derivanti dai precedenti sviluppi e che formano il sistema che determinerà i valori delle incognite A, y_i e $\sigma_{i^*}^o$:

(6) $$A = \frac{m_1}{0{,}42\, K_s^1\, y_i + \frac{0{,}5}{H} K_s^1\, y_i^2 - g}$$

(8) $$M_u = 0{,}5\,(H - y_i)\,A\,\sigma_{i^*}^o$$

(9) $$\sigma_{i^*}^o = \frac{K_i^o}{\beta} - \frac{(\beta - 1)}{\beta}\,\frac{g A + q\frac{l^2}{8}}{0{,}5\,(H - y_i)\,A}$$

Avendo posto, per agevolare gli sviluppi:

$$c_1 = \frac{\beta - 1}{\beta}\,\frac{g}{M_u}; \qquad c_2 = \frac{\beta - 1}{\beta}\,\frac{q\frac{l^2}{8}}{M_u}$$

$$c_3 = \mathrm{H} - \frac{2\,\beta\,\mathrm{M}_u\,c_1}{\mathrm{K}_i^\circ} = \mathrm{H} - \frac{2\,(\beta - 1)\,g}{\mathrm{K}_i^\circ}$$

$$c_4 = \frac{2\,\beta\,\mathrm{M}_u\,(1 + c_2)}{\mathrm{K}_i^\circ} = \frac{[(p_u\,i + q)\,\beta - q]\,l^2}{4\,\mathrm{K}_i^\circ}$$

e risolvendo il sistema delle (6), (8) e (9), si ottiene:

(6) $$\mathrm{A} = \frac{m_1}{\mathrm{K}_s^1 \left(0{,}42 + \frac{0{,}5}{\mathrm{H}}\,y_i\right) y_i - g}$$

$$y_i = c_3 - \frac{c_4}{\mathrm{A}} \quad (13); \qquad \sigma_{i^*}^\circ = \frac{\mathrm{K}_i^\circ}{\beta\,(1 + c_1\,\mathrm{A} + c_2)} \qquad (11)$$

Ponendo y_i della (13) nella (6) e introducendo, per agevolare gli sviluppi, i seguenti altri simboli:

$$c_5 = 0{,}42\,\mathrm{K}_s^1 + \frac{0{,}5\,\mathrm{K}_s^1}{\mathrm{H}}\,c_3$$

$$c_6 = c_3\,c_5 - g = \mathrm{K}_s^1\,c_3 \left(0{,}42 + \frac{0{,}5\,c_3}{\mathrm{H}}\right) - g$$

$$c_7 = c_5\,c_4 + \frac{0{,}5\,\mathrm{K}_s^1}{\mathrm{H}}\,c_3\,c_4 + m_1 = \left(0{,}42 + \frac{c_3}{\mathrm{H}}\right)\mathrm{K}_s^1\,c_4 + m_1$$

$$c_8 = \frac{0{,}5\,\mathrm{K}_s^1}{\mathrm{H}}\,c_4^2$$

dal sistema della (6) e della (13) si ottiene:

(14) $$c_6\,\mathrm{A}^2 - c_7\,\mathrm{A} + c_8 = 0$$

da cui si ricava A e, di conseguenza, dalla (13) anche y_i ed y_s. Dalla (11) si otterrà poi $\sigma_{i^*}^\circ$. In questa prima fase occorre quindi calcolare i soli coefficienti: c_3, c_4, c_6, c_7 e c_8.

5. Il momento d'inerzia della sezione

Si può ricavare da:

$$J = \rho^2 A = 0{,}5\, y_i\, y_s\, A \text{ ed anche da:}$$

$$J = y_i \frac{M_u}{\overset{\circ}{\sigma}_{i^*}}.$$

6. La determinazione delle dimensioni della sezione

Determinate le grandezze A, y_i ed J, il che potrebbe indicarsi come una « prima fase » della risoluzione, si passa alla « seconda fase » ossia alla determinazione delle altre dimensioni della sezione che sono: B, *f*, *b*, *c* ed *s*, come riportate in fig. 2.

Le equazioni che si hanno a disposizione sono, come si vedrà, soltanto tre e quindi occorre fissare in partenza due delle 5 incognite ora viste e precisamente **f** e **c**.

Se si tratta di copertura, volendo raccordare l'ala della trave col solaio, che d'altra parte non può avere, per regolamento, altezza inferiore a 1/30 dell'interesse **i** fra le travi di appoggio, conviene porre

$$f \cong \frac{1}{30} i + 2 \div 3 \text{ cm}.$$

Se manca la detta indicazione del solaio, si darà ad *f* altro opportuno valore quale 0,15 H.

L'altra incognita **c**, ossia l'altezza del bulbo, si pone in partenza pari a 0,2 H. Tale valore rappresenta un minimo al disotto del quale si rischerebbe di assumere un copriferro insufficiente per l'alloggio dei cavi.

Dagli sviluppi che seguono si ottengono i valori di B, *b* ed *s*.

I valori di B e *b* non sono soggetti a particolari limitazioni, mentre il valore di **s**, che si ottiene dal calcolo, non deve differire molto da 1/10 H per potere l'anima della trave contenere i cavi e non assumere eccessiva sollecitazione da taglio. Se **s** è eccessivo (o viceversa) la risoluzione va ripetuta e, lasciando inalterato il valore di A, di y_i e di J, basterà ovviamente aumentare (o diminuire) lievemente l'altezza del bulbo ripetendo il calcolo col nuovo valore di partenza di **c** fino ad ottenere un valore accettabile di **s**. Come detto, le equazioni disponibili sono tre e sono quelle in appresso indicate.

Una prima equazione definisce l'area della sezione:

$$f\,B + c\,b + s\,(H - c - f) = A$$

Una seconda equazione esprime l'eguaglianza dei momenti statici delle varie parti della sezione rispetto all'asse baricentrico:

$$\mathrm{B}\,f\,(y_s - 0{,}5\,f) = s\,(\mathrm{H} - c - f)\,\{[(\mathrm{H} - c - f)\,0{,}5 + f] - y_s\} + \\ + b\,c\,(y_i - 0{,}5\,c) \tag{15}$$

Ponendo per comodità:

$$a_1 = \mathrm{H} - c - f$$

$$a_2 = \mathrm{H} - c$$

$$a_3 = (\mathrm{H} - c)\,0{,}5 - y_s$$

$$a_4 = c\,(y_i - 0{,}5\,c)$$

... e sviluppando, la (15) diventa:

$$(y_s - 0{,}5\,f)\,f\,\mathrm{B} - a_4\,b - [(y_s - 0{,}5\,f)\,f + a_2\,a_3]\,s = 0.$$

Ed infine, una terza equazione definisce il momento d'inerzia della sezione (il cui valore, come visto, è stato al n. 5 già determinato) ed è la seguente:

$$\frac{\mathrm{B}\,f^3}{12} + \mathrm{B}\,f\,(y_s - 0{,}5\,f)^2 + \frac{s}{12}(\mathrm{H} - c - f)^3 + \\ + s\,(\mathrm{H} - c - f)\;[(\mathrm{H} - c - f)\,0{,}5 + f - y_s]^2 + \\ + \frac{b\,c^3}{12} + b\,c\,(y_i - 0{,}5\,c)^2 = \mathrm{J}.$$

Introducendo i simboli **a** prima visti ed i seguenti altri:

$$a_5 = f\,(y_s - 0{,}5\,f);$$

$$a_6 = \frac{f^3}{3} - y_s\,f^2 + y_s^2\,f\,;$$

$$a_7 = \frac{c^3}{12} + (y_i - 0{,}5\,c)^2\,c\,;$$

$$a_8 = \frac{a_2^3}{3} + y_s^2\;a_2 - a_2^2\;y_s - a_6\,;$$

$$a_9 = a_5 + a_2\,a_3\,.$$

... dopo opportuni sviluppi, l'equazione del momento d'inerzia si scrive brevemente così:

$$a_6\,\mathrm{B} + a_7\,b + a_8\,s = \mathrm{J}.$$

Riepilogando, il sistema risolutivo sarà dunque il seguente:

$$\begin{aligned} f\,\mathrm{B} + c\,b + a_1\,s &= \mathrm{A} \\ a_5\,\mathrm{B} - a_4\,b - a_9\,s &= 0 \\ a_6\,\mathrm{B} + a_7\,b + a_8\,s &= \mathrm{J}. \end{aligned} \tag{15a}$$

Risolvendo si ottiene:

$$b = \frac{a_5\,\mathrm{A} - (a_9 f + a_5 a_1)\,s}{a_4 f + a_5 c} = \frac{a_5\,\mathrm{A} - (a_9 f + a_5 a_1)\,s}{r_1} \tag{16}$$

$$\mathrm{B} = \frac{a_4\,b + a_9\,s}{a_5} \text{ ed anche } \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A} - c\,b - a_1\,s}{f} \tag{17}$$

... dalla prima equazione del sistema (15a).

Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} &[(a_4 f + a_5 c)\,a_8 - (a_6 a_4 + a_5 a_7)\,a_1 + (a_6 c - a_7 f)\,a_9]\,s = \\ &= \mathrm{J}\,(a_4 f + a_5 c) - (a_6 a_4 + a_5 a_7)\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

da cui, con l'introduzione delle altre seguenti abbreviazioni:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_4 f + a_5 c \\ r_2 &= a_6 a_4 + a_5 a_7 \\ r_3 &= a_6 c + a_7 f \end{aligned}$$

si può esprimere, in forma più concisa, il valore di s:

$$s = \frac{\mathrm{J}\,r_1 - \mathrm{A}\,r_2}{r_1 a_8 - r_2 a_1 + r_3 a_9} \tag{18}$$

Sostituendo s nelle (16) e (17) si ricaveranno tutte le dimensioni della sezione.

7. Scelta e semplificazione dei coefficienti risolutivi

Si cerca ora di scegliere e di semplificare i coefficienti che figurano nelle (16, (17) e (18) per rendere più spedito il calcolo di questa « seconda fase » del problema.

Iniziando dall'equazione (18), si semplificano in ordine i coefficienti che vi compaiono e si cerca di eliminare quelli superflui ai fini della risoluzione. Si ha dunque:

$$r_1 = a_4 f + a_5 c = c\left(y_i - \frac{c}{2}\right) f + \left(y_s - \frac{f}{2}\right) f c$$

da cui, dopo alcuni sviluppi:

$$r_1 = c f\left(\mathrm{H} - \frac{c+f}{2}\right) = \frac{c f}{2}[2\,\mathrm{H} - (c+f)] = \frac{c f}{2}[\mathrm{H} + \mathrm{H} - (c+f)]$$

e quindi:

$$r_1 = \frac{c f}{2}(\mathrm{H} + a_1); \quad \text{se} \quad c = f$$

$$r_1 = f^2\left(\mathrm{H} - \frac{2f}{2}\right) = f^2 a_2$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$r_2 = a_6 a_4 + a_5 a_7 = \left(\frac{f^3}{3} - y_s f^2 + y_s^2 f\right) a_4 + \left[\frac{c^3}{12} + a_4\left(y_i - \frac{c}{2}\right)\right] a_5$$

ma

$$a_6 = \frac{f^3}{3} - y_s f^2 + y_s^2 f = \frac{f^3}{12} + \frac{f^3}{4} - y_s f^2 + y_s^2 f$$

e sviluppando si ha:

$$a_6 = \frac{f^3}{12} + \frac{a_5^2}{f}$$

ma

$$a_7 = \frac{c^3}{12} + \frac{a_4^2}{c}$$

e quindi:

$$r_2 = \left(\frac{f^3}{12} + \frac{a_5^2}{f}\right) a_4 + \left(\frac{c^3}{12} + \frac{a_4^2}{c}\right) a_5 .$$

Introducendo i valori di a_4 ed a_5, sviluppando e sommando i termini, si ottiene infine:

$$r_2 = \frac{f^3 y_i c + c^3 y_s f}{3} - \frac{f^3 c^2 + c^3 f^2}{6} +$$

$$+ y_i y_s f c a_1 - \frac{f c}{2}(y_s^2 c + y_i^2 f) + \frac{c^2 f^2}{2} H$$

se $f = c$ si ottiene:

$$r_2 = f^4 \left(\frac{5}{6} H - \frac{f}{3} \right) + y_i y_s f^2 a_1 - \frac{f^3}{2}(y_s^2 + y_i^2)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$a_8 = \frac{a_2^3}{3} + y_s^2 a_2 - a_2^2 y_s - a_6 =$$

$$= \frac{a_2^3}{3} + y_s^2 a_2 - a_2^2 y_s - \frac{f^3}{3} + y_s f^2 - y_s^2 f =$$

$$= \frac{a_2^3 - f^3}{3} + y_s^2 (a_2 - f) + y_s (f^2 - a_2^2) =$$

$$a_8 = \frac{a_2^3 - f^3}{3} + y_s^2 a_1 + y_s (f^2 - a_2^2)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$r_3 = a_6 c - a_7 f = \left(\frac{f^3}{12} + \frac{a_5^2}{f} \right) c - \left(\frac{c^3}{12} + \frac{a_4^2}{c} \right) f =$$

$$= f c \frac{(f^2 - c^2)}{12} + \frac{a_5^2}{f} - \frac{a_4^2 f}{c}.$$

Introducendo a_5 ed a_4 e sviluppando si ha:

$$r_3 = f c \left(\frac{f^2 - c^2}{3} + y_s^2 - y_i^2 - f y_s + c y_i \right)$$

se $f = c$

$$r_3 = f^2 [y_s^2 - y_i^2 - f(y_s - y_i)]$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$a_9 = a_5 + a_2 a_3 = y_s f - \frac{f^2}{2} + a_2 \left(\frac{a_2}{2} - y_s \right) =$$

$$= y_s f - \frac{f_2}{2} - a_2 y_s + \frac{a_2^2}{2} = y_s (f - a_2) - \frac{(f^2 - a^2)}{2}$$

ed infine:

$$a_9 = \frac{a_2^2 - f^2}{2} - a_1 y_s .$$

Si semplifica ora anche l'espressione di **b** (16) vista prima:

$$b = \frac{a_5 \mathrm{A} - (a_9 f + a_5 a_1) s}{r_1} = \frac{a_5 (\mathrm{A} - a_1 s) - a_9 f s}{r_1} =$$

$$= \frac{y_s f \mathrm{A} - \frac{f^2}{2} \mathrm{A} - y_s f a_1 s + \frac{f^2}{2} a_1 s - f s \frac{a_2^2 - f^2}{2} + f s a_1 y_s}{r_1}$$

da cui infine:

$$(19) \qquad b = \frac{f \mathrm{A} \left(y_s - \frac{f}{2} \right) - \left(\frac{a_2^2 - f^2 - f a_1}{2} \right) f \cdot s}{r_1}$$

8. Riepilogo delle espressioni e dei coefficienti risolutivi

a) « Prima fase » della risoluzione. (Determinazione di A, y_i ed J).

$$c_6 \mathrm{A}^2 - c_7 \mathrm{A} + c_8 = 0$$

$$y_i = c_3 - \frac{c_4}{\mathrm{A}} ; \quad \mathrm{J} = 0{,}5\, y_i\, y_s\, \mathrm{A}$$

dove:

$$c_3 = \mathrm{H} - \frac{2\,(\beta - 1)\,g}{\mathrm{K}_i^{\circ}} = \mathrm{H} - \frac{0{,}625\,(\beta - 1)\,l^2}{\mathrm{K}_i^{\circ}}$$

$$c_4 = \frac{[\beta\, p_u\, i + q\,(\beta - 1)]\, l^2}{4\,\mathrm{K}_i^{\circ}}$$

$$c_6 = \mathrm{K}_s^{1}\, c_3 \left(0{,}42 + \frac{0{,}5\, c_3}{\mathrm{H}} \right) - g$$

$$c_7 = \left(0{,}42 + \frac{c_3}{\mathrm{H}} \right) \mathrm{K}_s^{1}\, c_4 + q\, \frac{l^2}{8} + \mathrm{M}_u$$

$$c_8 = \frac{0{,}5\, \mathrm{K}_s^{1}}{\mathrm{H}}\, c_4^2 .$$

b) « Seconda fase » (Determinazione delle seguenti dimensioni della sezione: B, b, s).

(19) $$b = \frac{f\,\mathrm{A} \left(y_s - \frac{f}{2} \right) - \left(\frac{a_2^2 - f^2 - f\,a_1}{2} \right) f\,s}{r_1}$$

(17) $$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A} - c\,b - a_1\,s}{f}$$

(18) $$s = \frac{\mathrm{J}\, r_1 - \mathrm{A}\, r_2}{r_1\, a_8 - r_2\, a_1 + r_3\, a_9}$$

in cui:

$$a_1 = \mathrm{H} - c - f; \qquad a_2 = \mathrm{H} - c$$

ed ancora:

$$r_1 = \frac{c\,f}{2}\,(\mathrm{H} + a_1); \quad \text{se} \quad f = c,\ r_1 = f^2\, a_2$$

$$r_2 = \frac{f^3\, y_i\, c + c^3\, y_s\, f}{3} - \frac{f^3\, c^2 + c^3\, f^2}{6} +$$

$$+ y_i\, y_s\, f\, c\, a_1 - \frac{f\,c}{2}\,(y_s^2\, c + y_i^2\, f) + \frac{c^2\, f^2}{2}\,\mathrm{H}; \quad \text{se} \quad f = c$$

$$r_2 = f^4\left(\frac{5}{6}\,\mathrm{H} - \frac{f}{3}\right) + y_i\, y_s\, f^2\, a_1 - \frac{f^3}{2}\,(y_s^2 + y_i^2)$$

$$a_8 = \frac{a_2^3 - f^3}{3} + y_s^2\, a_1 + y_s\,(f^2 - a_2^2)$$

$$r_3 = f\,c\left(\frac{f^2 - c^2}{3} + y_s^2 - y_i^2 - f\,y_s + c\,y_i\right) \quad \text{se} \quad f = c$$

$$r_3 = f^2\,[y_s^2 - y_i^2 - f\,(y_s - y_i)] = f^2\,(y_s^2 - y_i^2) - f^3\,(y_s - y_i)$$

$$a_9 = \frac{a_2^2 - f^2}{2} - a_1\, y_s.$$

Il procedimento è agevolmente programmabile anche su minicalcolatori che daranno subito i dati richiesti. Basterà comporre i programmi per i vari coefficienti ora visti e quindi per le espressioni finali.

9. Esempio numerico

Si debba disegnare la sezione di mezzeria di una trave in precompresso a cavi scorrevoli, con estremi appoggiati, per copertura di ambiente. La luce sia di m 26 e le travi, che reggono il solaio, gettato con esse e presente al momento del tiro, siano disposte ad un interasse di m 5.

Carichi:

peso solaio grezzo, p_s	150	kg/mq
impermeabilizzazione, intonaci, ecc.	80	»
sovraccarico	250	»
carico utile p_u =	330	kg/mq

Tensioni:

con $R'_{bk} = 350$ kg/cmq

al tiro	in esercizio
$K_s^o \geq 0$	$K_i^1 \cong 0$
$K_i^o = 1680$ t/mq	$K_s^1 = 1330$ t/mq.

Si vedano in fig. 2 i simboli delle varie dimensioni della sezione e si assuma:

$$H = \frac{1}{18} l = 1{,}45 \text{ m}; \qquad d = 0{,}08\ H = 12 \text{ cm} \qquad \beta = 1{,}25$$

si ha ancora:

$$i = \text{m } 5; \qquad g = 2{,}5 \frac{l^2}{8} = 211 \text{ t/m}$$

$$q = p_s\,(5\text{-}0{,}5\ H) = 0{,}64 \text{ t/m}$$

$$M_u = p_u\, i \frac{l^2}{8} = 139 \text{ t/m} \qquad P_u = p_u\, i = 1{,}65 \text{ t/m}.$$

Relativamente a quella che era stata denotata come una prima fase del calcolo, sono anzitutto da determinare l'area della sezione A, il suo momento d'inerzia J, y_i e y_s.

Occorrerà anzitutto risolvere la (14):

$$c_6\, a^2 - c_7\, A + c_8 = 0.$$

A tal fine, si determinino i coefficienti indicati al n. 8 e si ha:

$$c_3 = H - \frac{0{,}625\,(\beta - 1)\, l^2}{K_i^o} = 1{,}3871 \text{ m}$$

$$c_4 = \frac{[\beta\, P_u + (\beta - 1)\, q]\, l^2}{4\, K_i^o} = 0{,}22357 \text{ m}^3$$

$$c_6 = K_s^1\, c_3 \left(0{,}42 + \frac{0{,}5\, c_3}{H} \right) - g = 1446{,}24 \text{ t/m}$$

$$c_7 = \left(0{,}42 + \frac{c_3}{H} \right) K_s^1\, c_4 + q \frac{l^2}{8} + M_u = 602{,}49 \text{ tm}$$

$$c_8 = \frac{0{,}5\, K_s^1}{H}\, c_4^2 = 22{,}923 \text{ tm}^3.$$

La (14) si scrive:

$$1446{,}24\ A^2 - 602{,}49\ A + 22{,}92 = 0$$

da cui:

$$A = 0{,}3742\ m^2$$

e dalle (13):

$$y_i = c_3 - \frac{c_4}{A} = 0{,}79\ m; \qquad y_s = 0{,}66\ m$$

$$J = \rho^2 A = 0{,}5\ y_i\ y_s\ A = 0{,}09755\ m^4.$$

Si passa ora alla « seconda fase » del calcolo, ossia alla ricerca delle altre grandezze della sezione: B, b, f, c ed s.

Secondo quanto già detto, si pone:

$$f = \frac{1}{30} - i + 2 \div 3\ cm = 19\ cm \text{ che si porta a } 25\ cm$$

$c = 0{,}2\ H = 29\ cm$, che si riduce, per comodità di calcolo, a cm 25, onde avere $f = c$.

Si hanno quindi i seguenti valori in metri:

$H = 1{,}45$; $f = c = 0{,}25$; $y_i = 0{,}79$

$y_s = 0{,}66$; $a_1 = H - (c + f) = 0{,}95$

$a_2 = H - c = 1{,}20$; $A = 0{,}3742\ m^2$

$J = 0{,}09755\ m^4$

da cui i coefficienti risolutivi finali:

$$r_1 = f^2\ a_2 = 0{,}075 \qquad r_2 = 0{,}027074$$

$$r_3 = -\ 0{,}00975 \qquad a_3 = 0{,}07546$$

$$a_9 = 0{,}06175.$$

Dalla (18) si ricava lo spessore dell'anima s:

$$s = 13{,}62\ cm \cong 14\ cm$$

e dalle (19) e (17) la larghezza delle suole:

$$b = 0{,}4013 \text{ m}; \quad B = 0{,}5634 \text{ m}.$$

Si può così disegnare la sezione:

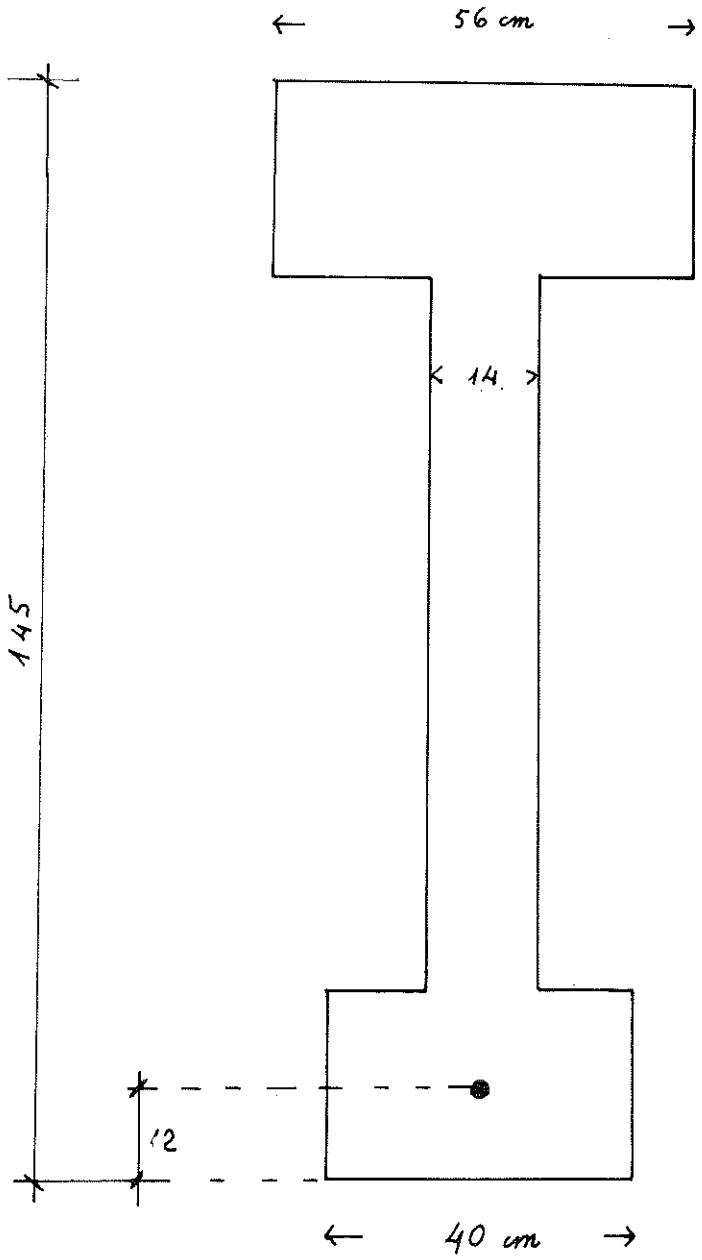


FIG. 5.

Si procede infine al controllo delle tensioni.
Si avrà:

$$e = y_i - d = 0{,}79\text{-}0{,}12 = 0{,}67$$

$$W_i = -\frac{J}{y_i} = \frac{0{,}09755}{0{,}79} = 0{,}123481 \text{ cm}^3$$

$$W_s = 0{,}147803; \quad M_{min} = g\,A + q\frac{l^2}{8} = 133 \text{ tm}$$

$$M_{max} = 272 \text{ tm}$$

$$K_s^1 = N\left(\frac{1}{A} - \frac{e}{W_s}\right) + \frac{M_{max}}{W_s} \text{ da cui } N = 274{,}24 \text{ t}$$

da cui $K_s^1 = 133$ kg/cmq

$$K_i^o = \beta\frac{N}{A} + \beta\frac{N_e}{W_i} - \frac{M_{min}}{W_i} = 169{,}9 \cong 170 \text{ kg/cmq.}$$

Si vede così che le tensioni imposte in partenza sono perfettamente rispettate. Le altre tensioni sono:

$$K_s^o = \beta N\left(\frac{1}{A} - \frac{e}{W_s}\right) + \frac{M_{min}}{W_s} = 26 \text{ kg/cmq}$$

$$K_i^1 = N\left(-\frac{1}{A} + \frac{e}{W_i}\right) - \frac{M_{max}}{W_i} = 1{,}8 \text{ kg/cmq.}$$

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci E. Giangreco, F. Stoppelli e C. Miranda.

Forma e genesi di alcuni versanti di faglia in rocce carbonatiche: il riscontro naturale di un modello teorico *

Nota di LUDOVICO BRANCACCIO **, ALDO CINQUE e ITALO SGROSSO **
presentata dal socio corrispondente BRUNO D'ARGENIO

(Adunanza del 3 marzo 1979)

RIASSUNTO. — I versanti di faglia a profilo trasversale rettilineo, molto frequenti nei rilievi calcareo-dolomitici dell'Appennino meridionale, vengono analizzati e interpretati sulla base del modello teorico di Lehmann.

La esposizione, per grandi linee, della teoria della trasformazione indiretta dei pendii ad opera della recessione è seguita da una analisi degli assunti basilari del modello attraverso la discussione di situazioni riscontrabili nella realtà geologica e geomorfologica dell'Appennino meridionale.

Oltre ai casi di buona corrispondenza tra situazioni reali e modello teorico, vengono illustrate le situazioni in cui la geometria del versante si discosta alquanto da quella che può calcolarsi teoricamente, a causa del mancato o parziale verificarsi di qualcuno degli assunti.

La congruenza di dette difformità con i meccanismi fondamentali del modello di Lehmann costituisce a sua volta una conferma della sua validità nell'area sud-appenninica, purché si tenga conto che i processi morfogenetici discussi si sono sviluppati durante gli episodi glaciali del Pleistocene, allorquando la intensa gelifrazione costituiva il fattore erosivo areale sul quale si fonda il modello denudazionale di Lehmann.

ABSTRACT. — The frequent occurrence of right cross-profile fault scarps in the calcareous-dolomitic slopes of the Southern Apennines, is an interpretative key in the Lehmann's theory of the rectilinear parallel recession slopes.

After brief accounts on the « indirect transformation » processes of a slope through « parallel recession », a detailed analysis of this erosional pattern in the Southern Apennines follows.

In the surveyed region several fault scarps are very well fitting within the Lehmann's theoretical model because all the expected conditions occur during the recessional evolution of the slope. Moreover in some instances differences have been observed between th natural and expected forms.

* Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto Finalizzato Geodinamica, Pubbl. n. 204, e presentato al Congresso « Processi paleocarsici e neocarsici e loro importanza economica nell'Italia meridionale » tenuto a Napoli il 30 e 31 marzo 1978.

** Istituto di Geologia e Geofisica dell'Università di Napoli.

However it may be shown that these differences are congruent with the mechanism of the parallel recession model, being the basic morphoclimatic conditions of this erosional pattern verified in the surveyed area. In particular, the most important of these conditions: the prevalence of areal degradation, occurred during the Pleistocene glaciations, when the gelifraction represented the prevailing erosional agent. Therefore we must look upon these fault scarps with right cross-profile, so frequently shaping the carbonatic slopes of the Southern Apennines, as relict forms of a past morphogenetic system.

1. Premessa.

Nei rilievi calcarei dell'Appennino meridionale, pur essendo molto diffuse le forme carsiche superficiali ed ipogee, ben raramente è possibile osservare versanti di faglia che mostrino una evoluzione interamente imputabile a fenomeni carsici. Molto più frequenti, invece, sono le forme connesse con fenomeni di erosione areale e, più specificamente, con degradazione crioclastica. Si tratta di versanti denudazionali dal profilo pressocché rettilineo, con forti accumuli detritici basali raccordati e con pendenza media compresa tra 35° e 45°.

Detti versanti sono impostati su faglie dirette con piani subverticali e con rigetti sovente dell'ordine delle migliaia di metri (faglie perimetrali dei massicci carbonatici e delle piane costiere). Talora queste faglie dissezionano preesistenti forme carsiche, anche ipogee (per esempio quella di S. Barbara presso Agerola, Brancaccio, Cinque, Sgrosso, 1976).

Le forti pendenze che tuttora conservano detti versanti non hanno consentito l'impostazione di forme carsiche, anche perché durante le fasi climatiche fredde del Pleistocene, il modellamento carsico sul pendio è stato largamente sopravanzato da quello crioclastico, il quale è caratterizzato da velocità di smantellamento nettamente superiori. Ciò è testimoniato dalla entità e dalle caratteristiche degli accumuli detritici basali, oltreché dalla quasi perfetta planazione del pendio che pure si apre spesso in rocce fagliate e/o fratturate, nelle quali sarebbe logico aspettarsi quelle forme di erosione susseguenti che caratterizzano il modellamento carsico.

Di notevole importanza, invece, deve essere stato il ruolo svolto dalla dissoluzione nella genesi delle incisioni torrentizie che spesso dissecano i versanti denudazionali. L'ampiezza di certe testate torrentizie, infatti, troverebbe difficilmente una giustificazione nella sola capacità di erosione meccanica delle acque dilavanti. Analoga constatazione vale per l'approfondimento di certe forre in calcari, del tutto sproporzionate rispetto alla esiguità dei ventagli di testata.

In definitiva però, come detto in precedenza, il modello erosionale largamente prevalente sui versanti di faglia dell'Appennino car-

bonatico è quello di denudazione areale, che ricalca con notevole fedeltà un modello teorico proposto da LEHMANN (1933) e rivisto da BAKKER e LE HEUX (1952).

2. IL MODELLO TEORICO DI LEHMANN.

Il modello teorico di Lehmann fornisce, a nostro avviso, uno strumento di interpretazione molto valido della genesi di un pendio rettilineo, che viene identificato come il risultato della trasformazione indiretta, ad opera della recessione parallela, di una iniziale parete più o meno acclive. Un valido contributo all'esatta interpretazione di queste forme è venuto inoltre dai successivi lavori di BAKKER e LE HEUX (1952), i quali inquadrano i casi studiati da Lehmann nella loro più generale teoria dei « versanti di recessione non necessariamente parallela ». Gli stessi autori espressero la « legge dei pendii di denudazione (*denudational slopes*) con profilo trasversale rettilineo » nella quale veniva precisato che « *in ogni tipo di recessione approssimativamente continua (ad opera della sola degradazione) di un gradino sovrastante un plateau ed impostato in roccia omogenea, si formerà un versante con profilo trasversale rettilineo avente la pendenza dell'angolo di scarpata naturale del detrito generato. Ciò semprecché detto angolo non vari notevolmente nel corso del processo e che nessun apprezzabile deposito di detrito si formi al piede della parete* ».

Il caso specifico al quale questa legge fa riferimento è quello noto in letteratura come « versante di Richter », il quale è caratterizzato dall'avere il profilo rettilineo interamente impostato in roccia (RICHTER 1901). Le precisazioni di Bakker e Le Heux sono però applicabili anche agli altri casi previsti dalla trattazione di Lehmann, a quelle situazioni cioè, nelle quali al piede della parete in recessione si formano degli accumuli detritici più o meno cospicui: in tali casi si avrà ugualmente un profilo rettilineo con angolo pari a quello di attrito interno del detrito, anche se impostato almeno parzialmente nelle falde detritiche. Il versante assume cioè le caratteristiche in parte di una forma di erosione e in parte di una forma di accumulo.

Il profilo assunto dal nucleo roccioso sepolto dal detrito avrà invece una forma paraboloidica esprimibile dalla seguente equazione logaritmica:

$$x = \int k\,(l + m)\,\frac{dy}{m - y} - \int k\,dy + \mathrm{A}$$

nella quale

A = costante di integrazione;

$$k = \frac{a - ac - b}{c};$$

$$l = h\frac{b}{a - ac - b};$$

$$m = \frac{h}{c};$$

$a = \cot \alpha$;

$b = \cot \beta$;

$$c = \frac{\text{volume detrito - volume roccia}}{\text{volume detrito}};$$

α = angolo di scarpa del detrito;

β = angolo della parete iniziale;

x, y = coordinate della curva in un sistema di assi aventi origine al piede della parete iniziale

(vedi fig. 1).

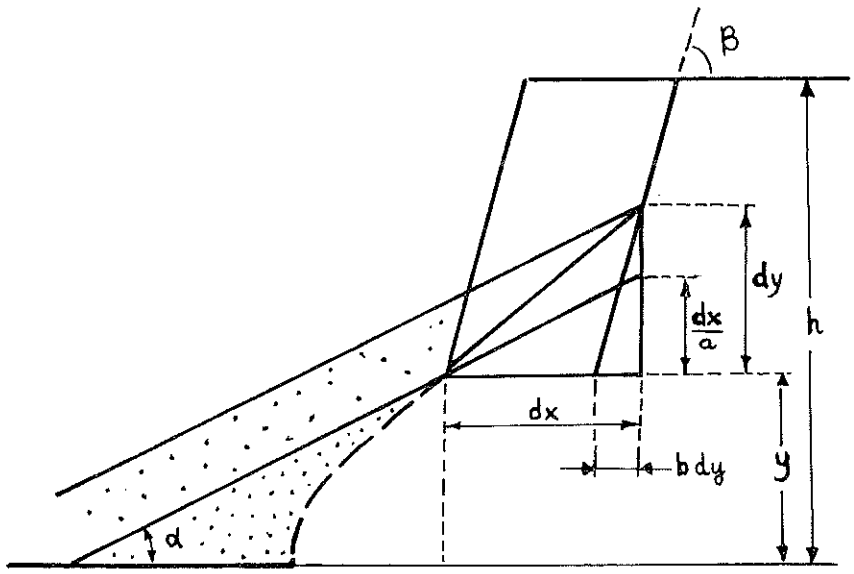


FIG. 1. - Diagramma per l'impostazione del modello matematico. Viene considerato un incremento infinitesimale (*dx*) della recessione. (Da Lehmann, 1933; ridis.).

La figura 2 evidenzia il ruolo svolto dalle variabili sopracitate nella determinazione della forma del profilo roccioso. È particolarmente evidente l'influenza del fattore *c* il quale rappresenta, in definitiva, il grado di ablazione del detrito prodotto nel corso della recessione.

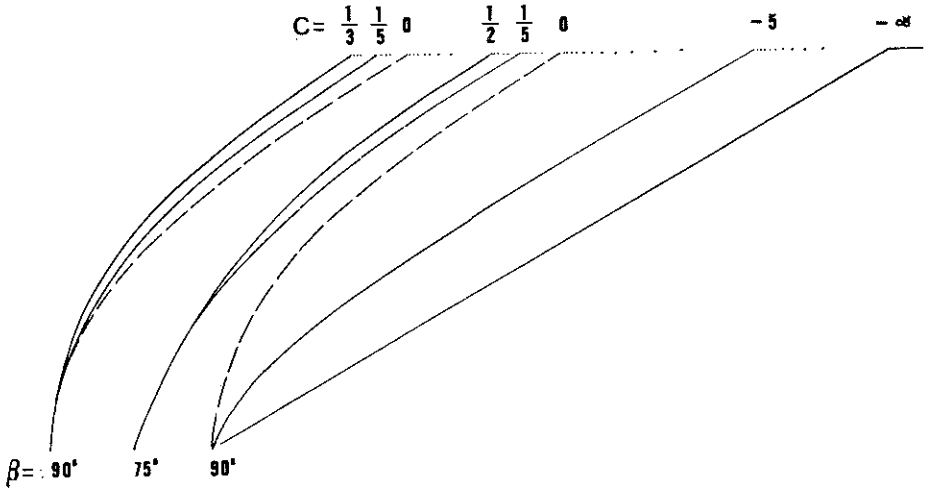


FIG. 2. - L'influenza della costante *c* sul profilo del nucleo roccioso. Per $c = -\infty$ si ha il « versante di Richter »; per $c = 0$ si ha la parabola descritta da Fisher. Tutte le curve illustrate sono state calcolate per $\alpha = 30°$. (Da Lehmann, 1933; ridis.).

Il caso precedentemente citato del « versante di Richter » si verifica per valori di *c* tendenti a $-\infty$ (in pratica a partire da valori di -4 o -5 in poi).

Come chiaramente esposto dagli AA. citati, questo modello matematico, che pure prevede attraverso le variabili α, β, *c*, una notevole gamma di casi, resta valido e applicabile solo nell'ambito di una serie di assunzioni le quali ben raramente trovano riscontro nello stesso tempo in situazioni reali.

Nell'Appennino meridionale carbonatico esistono frequenti forme naturali che richiamano con notevole fedeltà il modello teorico sopra descritto; per altre invece, che apparentemente se ne discostano in qualche maniera, un esame accurato delle forme permette il più delle volte di riconoscere degli elementi di collegamento con il modello stesso. A nostro avviso le discrepanze tra le forme calcolate teoricamente e i casi reali in questione non inficiano necessariamente la teoria, in quanto esse sono collegabili con il mancato verificarsi di alcuni degli assunti cui abbiamo fatto riferimento sopra.

L'esame dettagliato degli assunti consente di chiarire quali di essi sono generalmente verificati e quali non lo sono nelle condizioni naturali che si sono succedute durante la storia geologica (in particolare dall'inizio degli eventi neotettonici ad oggi) dell'Appennino meridionale carbonatico.

2.1. *La roccia si comporta come omogenea.*

Le rocce carbonatiche meso-cenozoiche dell'Appennino meridionale sono nella quasi totalità stratificate, con successioni di strati talora di diverso spessore e con variabili tessiture e grado di cementazione. Tuttavia questa variabilità non sembra di regola influenzare i processi morfogenetici analizzati. Solo nel caso di forti diversità di spessore degli strati e/o di fasce cataclastiche la roccia si comporta come non omogenea e si possono notare alterazioni nella geometria del pendio (vedi cap. 4).

2.2. *Il versante è sottoposto alla sola degradazione diffusa ed alle relative rimozioni superficiali.*

Questa condizione si è verificata nell'Appennino meridionale nel corso delle glaciazioni, durante le quali alla distruzione della copertura vegetale e dei suoli è succeduta un'intensa degradazione crioclastica di tipo areale, accompagnata e/o alternata ad altri processi geomorfici (ad esempio dissoluzione carsica, erosione lineare, dilavamento laminare, ecc.) peraltro del tutto subordinati. I versanti di recessione si vengono così ad identificare come relitti climatici più o meno ritoccati dai processi morfogenetici intervenuti in successivi e differenti sistemi morfoclimatici (ad esempio: i versanti di recessione dissecati a « faccette triangolari »).

2.3. *L'effetto della degradazione impone alla parete in recessione un angolo costante.*

Non abbiamo elementi precisi per poter affermare che queste condizioni siano rispettate; è nostra opinione però che nella maggior parte dei casi esse si siano nell'insieme verificate. Infatti le cornici sommitali dei versanti, quando sono presenti, sembrano avere una pendenza assai vicina a quella originaria della faglia che ha prodotto il versante.

2.4. *La parete in recessione è limitata in alto e in basso da un plateau; il plateau basale ha una estensione tale da consentire l'accumulo del detrito.*

Questa è una condizione che si verifica con una certa frequenza. Basta pensare a quale è stata, a grandi linee, la dinamica morfologica dell'Appennino carbonatico nel corso del Plio-Pleistocene: ad un episodio di modellamento subaereo che ha in parte spianato i corpi carbonatici, dopo averli denudati delle coperture terrigene autoctone e alloctone, è succeduta una importante fase di sollevamento.

Le faglie dirette di questa fase, sulle quali si sono impostati in larga parte i versanti di recessione, hanno sbloccato la preesistente superficie spianata: i suoi lembi, allo stato attuale, costituiscono di regola i *plateaux* sommitali e basali del modello. Naturalmente essi non si configurano quasi mai come piani regolarmente orizzontali, e ciò interferisce con l'evoluzione del versante. In particolare se il *plateau* basale è notevolmente inclinato, può variare la forma del paraboloide in relazione sia alla maggiore o minore ablazione al piede, sia al diverso spessore assunto dalla falda a parità di volume.

2.5. *L'accumulo detritico al piede ha un profilo rettilineo ed un angolo costante nel tempo, sempre inferiore o pari a quello della parete sommitale in recessione.*

Anche questo assunto è rispettato nella maggior parte dei casi, giacché le faglie perimetrali dei massicci carbonatici legate a questo tipo di versanti hanno un assetto quasi sempre sub-verticale, e pertanto una pendenza sempre maggiore dell'angolo di scarpa del detrito.

Piuttosto limitativa si rivela invece la condizione secondo cui detto angolo di assetto del detrito non deve variare durante la evoluzione del pendio. In effetti esso risulta, di solito, molto sensibile ai cambiamenti climatici, i quali possono influire sia sulla granulometria del detrito che sul grado di imbibizione e di cementazione (e quindi sull'angolo di scarpata naturale del materiale). Inoltre anche le variazioni litologiche di cui al punto 2.1. possono far modificare, attraverso soprattutto la granulometria, l'angolo di scarpa del detrito.

2.6. *Il rapporto c rimane costante durante l'evoluzione del pendio.*

Anche questo parametro è soggetto all'influenza delle fluttuazioni climatiche che possono intervenire nel corso della evoluzione e inci-

dere sulla percentuale di materiale evacuato, sia per erosione in massa che per dissoluzione carsica, e, infine, per ablazione torrentizia.

Per quanto riguarda alcune zone dell'Appennino meridionale c'è da tener presente un ulteriore fattore, estraneo al modello teorico, che può aver indotto variazioni del coefficiente *c*. Si tratta dell'accumulo di materiale piroclastico dovuto agli episodi esplosivi dei centri vulcanici dell'Italia centro-meridionale, attivi a più riprese nel corso del Pleistocene, che ha influito aumentando il volume del detrito.

2.7. *Durante l'evoluzione del pendio non si verificano rilevanti episodi erosivi sul plateau basale e non intervengono fatti tettonici a variare l'altezza della parete.*

Quest'ultimo assunto può considerarsi senz'altro teorico: in effetti sono sempre riconoscibili diverse fasi tettoniche di sollevamento che spesso hanno agito sugli stessi versanti riattivando faglie già esistenti e/o creandone di nuove (vedi cap. 4).

Abbiamo già accennato alla possibilità, riscontrata anche in casi reali, che al piede del versante agiscano processi erosivi (legati ad un corso d'acqua parallelo al pendio, al moto ondoso, ecc.) in grado di interferire anche sensibilmente sull'evoluzione e sulla forma definitiva del pendio.

Per concludere è necessario precisare che, anche se il mancato verificarsi di alcune delle assunzioni conferisce talora ai versanti rettilinei nel sud-Appennino carbonatico alcuni caratteri che li differenziano dal modello teorico citato, essi sono ugualmente interpretabili come versanti di recessione e rappresentano una ulteriore convalida qualitativa, e, con le limitazioni espresse, anche quantitativa del modello di Lehmann.

3. Alcuni esempi tipici di versanti di recessione dell'Appennino meridionale carbonatico.

Le figure 3a, 3b e 3c mostrano i profili schematici di alcuni versanti di faglia che hanno avuto, per così dire, una evoluzione « normale »; non si sono verificati, cioè, nel corso della loro evoluzione, apprezzabili eccezioni agli assunti menzionati.

In essi sono presenti tutti gli elementi tipici di un versante di recessione: il nucleo roccioso con profilo paraboloide passante, verso l'alto, a rettilineo; gli accumuli detritici basali con l'apice tangente alla parte alta del pendio; la cornice sommitale più o meno arretrata

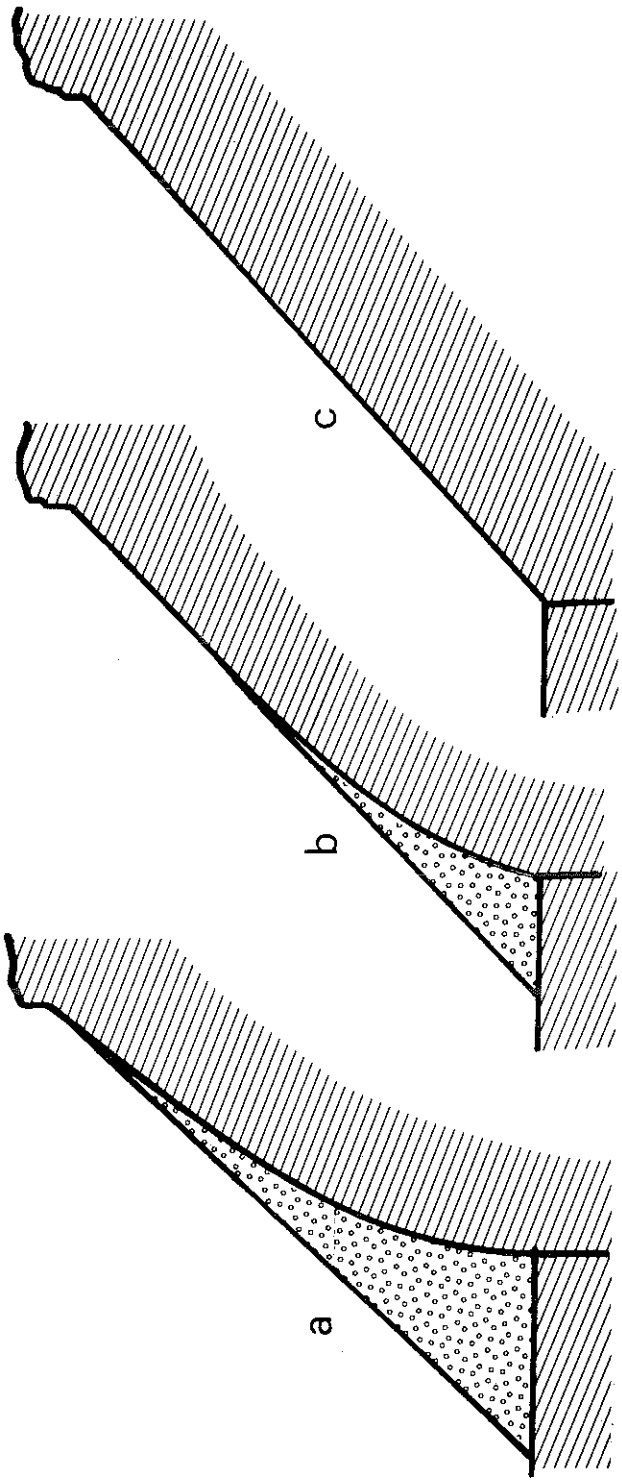


FIG. 3. - Profili trasversali schematici di tre versanti di recessione con diverso grado di ablazione del detrito. Il coefficiente *c* assume rispettivamente i valori di 0; — 5; — ∞.

e ridotta (fino a mancante) a seconda del grado di evoluzione raggiunto dal versante. A tale proposito è interessante notare che, nella stragrande maggioranza dei casi osservati, la eventuale cornice sommitale è sempre sub-verticale e l'angolo di pendenza del versante è costantemente prossimo ai 40°. Ciò attesta in modo evidente che queste forme sono il risultato di una « trasformazione indiretta » del pendio, avvenuta tramite la recessione parallela dell'originaria parete di faglia.

FIG. 4. - Versante rettilineo di Nocelle presso Positano. La parte bassa è costituita dalle brecce della recessione. Il versante, ripreso dall'erosione in conseguenza dei sollevamenti neotettonici, presenta il contatto brecce-calcari (= profilo del nucleo roccioso) a forma paraboloidica.

Per quanto riguarda la forma del nucleo roccioso va osservato che, ovviamente, la sua porzione curva è visibile solo dove successivi fatti erosivi o tettonici hanno asportato almeno in parte la copertura detritica che normalmente lo maschera. Tuttavia è già interessante notare che spesso l'apice della falda detritica risulta tangente al nucleo roccioso in punti notevolmente bassi rispetto all'intera lunghezza del versante. In altre parole, il pendio possiede una notevole porzione rettilinea impostata in roccia e ciò lascia presumere che, secondo quanto previsto dal modello teorico, il rapporto c abbia avuto un valore negativo, anche se di poche unità, e che il profilo

in roccia presenti, al di sotto della falda, un raccordo curvo piuttosto breve (fig. 3b).

Ricordiamo che i valori negativi di *c* indicano che il volume del detrito che si andava accumulando al piede della parete in recessione era inferiore al volume di roccia contemporaneamente degradata. Ciò può essere attribuito sia ai già citati fenomeni erosivi, eventualmente intervenuti in seno alla falda, sia al verificarsi di fenomeni di dissoluzione di tipo carsico.

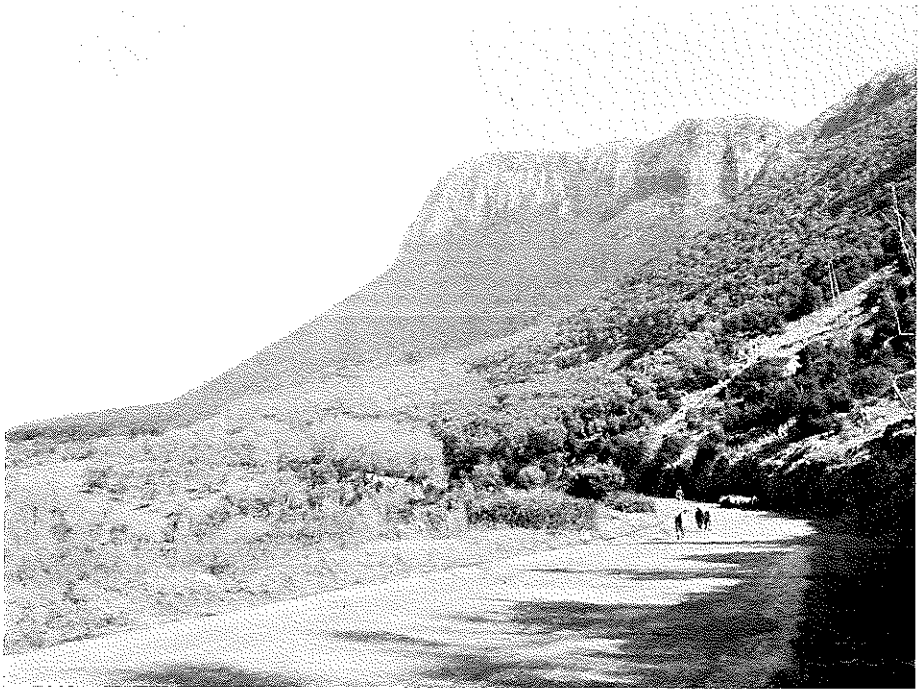


FIG. 5. - Versante rettilineo interamente in roccia (« versante di Richter »): presso Controne ai margini dell'Alburno.

Alcuni casi reali fra i più chiari, riconducibili agli esempi fin qui descritti, sono il versante nord-occidentale dell'Alburno e il versante sud-ovest del M.te S. Angelo a Tre Pizzi in Penisola Sorrentina (a monte della frazione Nocelle di Positano), (fig. 4).

La figura 3c mostra il caso limite in cui il volume degli accumuli detritici è pressocché nullo ed il versante è impostato interamente nella roccia calcarea (versante di Richter). Una situazione reale di questo tipo è quella osservabile sul versante meridionale del M.te Tobenna, nel gruppo dei Monti Picentini, ed ai margini dell'Alburno (fig. 5).

4. Anomalie nella geometria dei versanti di recessione e loro interpretazione.

Mentre in un gran numero di casi sono riconoscibili le linee evolutive generali del modello teorico di recessione, è anche vero che la geometria di dettaglio dei medesimi versanti se ne discosta talvolta per delle anomalie che sono in relazione con il mancato verificarsi, nella fattispecie, degli assunti iniziali. Alcuni di questi casi, riscontrabili con una certa frequenza, vengono qui di seguito descritti ed interpretati.

Nelle figure 6 e 8 vengono illustrate schematicamente le interferenze che si producono rispetto al profilo tipico, quando il ver-

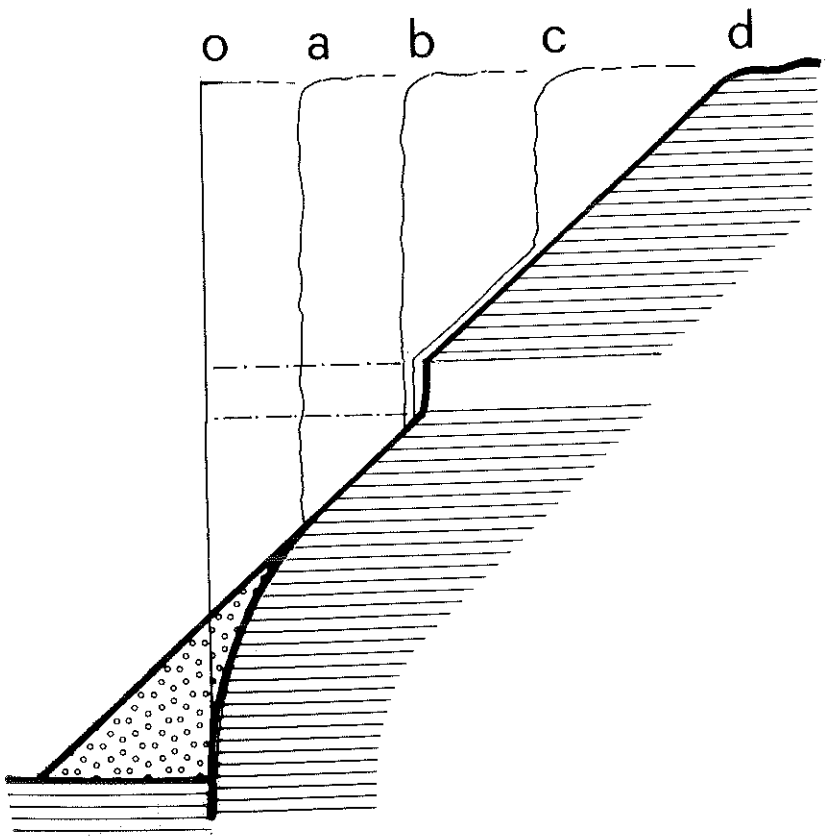


Fig. 6. - Alterazione del profilo dovuta alla presenza di un banco più resistente.

sante di recessione si sviluppa in una assise rocciosa che presenta l'intercalazione di livelli più resistenti (grossi banchi compatti) o meno resistenti alla gelifrazione (livelli sottilmente straterellati, in-

terstrati argillosi, livelli più fratturati, ecc.) rispetto alle caratteristiche medie della massa rocciosa.

Nel primo caso (fig. 6) la evoluzione del versante può essere così ricostruita: la parete iniziale comincia a regredire mantenendo il suo assetto originario e generando un versante rettilineo con curvatura più o meno accentuata del nucleo roccioso (stadio *a*). In questo stadio la presenza di un grosso banco non provoca grandi variazioni sulla geometria della parete in recessione, in quanto la sua testata arretra con la stessa velocità della successione di cui fa parte (gli strati meno resistenti presenti al letto, infatti, lo scalzano e lo fanno arretrare per successivi crolli).

FIG. 7. - Profilo rettilineo impostato sopra e sotto un banco più resistente. Punta Campanella (M.te S. Costanzo) in Penisola Sorrentina.

Quando il pendio in formazione raggiunge la base del bancone (stadio *b*), la possibilità di scalzamento viene ad essere automaticamente esclusa a causa del raggiunto equilibrio degli strati sottostanti.

Proseguendo l'arretramento parallelo della parete, si sviluppa la rimanente parte di versante rettilineo (stadi *c* e *d*) mentre in corrispondenza del livello più resistente, si individua nella roccia in posto una cornice legata a variazioni litologiche, che, in definitiva, separa due tratti di pendio rettilineo-paralleli e sfalsati tra loro.

Ovviamente il gradino così identificato tende, sia pure con lentezza, ad essere regolarizzato attraverso i meccanismi della recessione parallela della parte rettilinea sovrastante che si raccorderà così a quella sottostante al gradino. Questo livellamento può avvenire anche nel corso della stessa recessione parallela della restante parete sommitale, soprattutto ad opera della abrasione esercitata dal detrito in migrazione sul pendio.

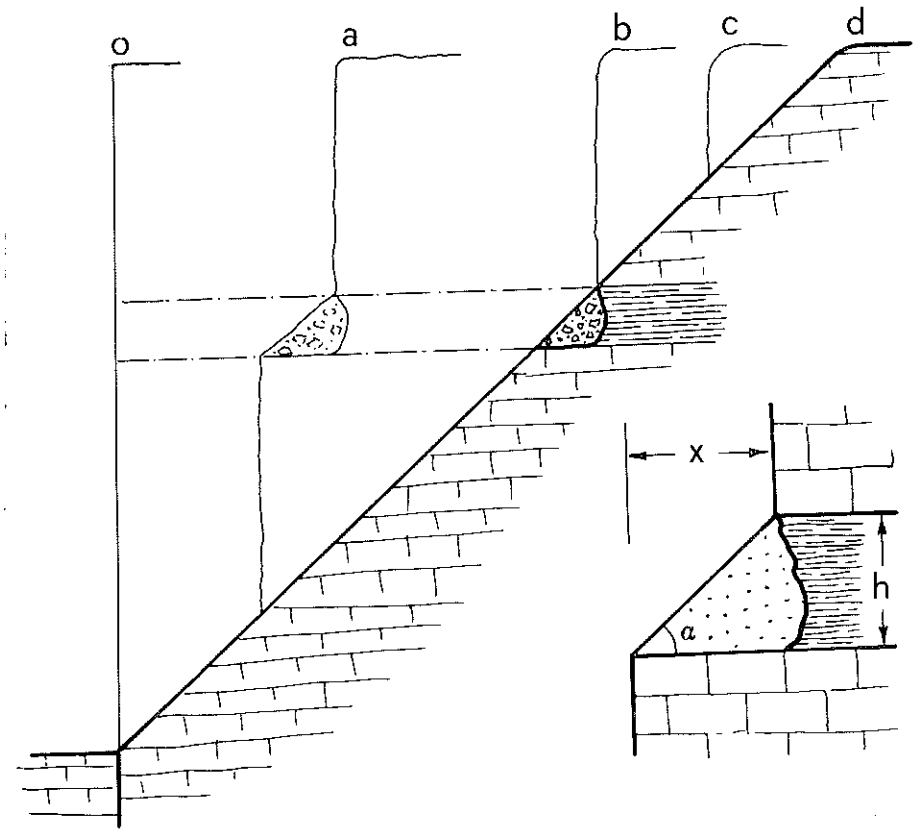


FIG. 8. - Alterazione del profilo dovuta alla presenza di un livello meno resistente (più gelivo).

Un esempio tipico di pendio rettilineo con cornici di origine litologica ancora evidenti è osservabile sul versante sud del M.te S. Costanzo, in Penisola Sorrentina (fig. 7).

Per quanto riguarda invece l'influenza di livelli più gelivi in seno alle sequenze carbonatiche, si veda la fig. 8. Nel primo caso questi livelli hanno provocato una sorta di raddoppio della parete in recessione facendo arretrare più velocemente la porzione più alta

(soggetta a scalzamento e crolli) rispetto a quella bassa (soggetta alla sola degradazione). Si intuisce che l'arretramento relativo fra queste porzioni di parete non può procedere indefinitamente, ma si fermerà ad un valore pari ad $x = h \cot \alpha$, vale a dire quando il detrito prodotto dai crolli avrà occluso il livello gelivo preservandolo da ulteriori sgrottamenti. In definitiva la parete in recessione arretra smembrata in due porzioni che mantengono costantemente fra loro la distanza x così determinata (stadio *a*).

Quando la recessione ha regolarizzato completamente la porzione di parete sottostante il suddetto livello gelivo (*stadio b*) il fenomeno dell'arretramento per crolli è disinnescato in quanto il detrito che occlude il livello gelivo non viene più scalzato al piede. In seguito l'arretramento della parete continua secondo le leggi del modello generale, dando origine ad un versante rettilineo che nel suo assetto morfologico finale non risulta per nulla influenzato dalla presenza del livello gelivo (stadio *c* e *d*).

La figura 9 mostra il profilo schematico di un versante di recessione con andamento anomalo del profilo del nucleo roccioso. La sua evoluzione è stata condizionata dal fatto che il *plateau* basale non ha un'estensione sufficiente a consentire il normale accumulo delle falde

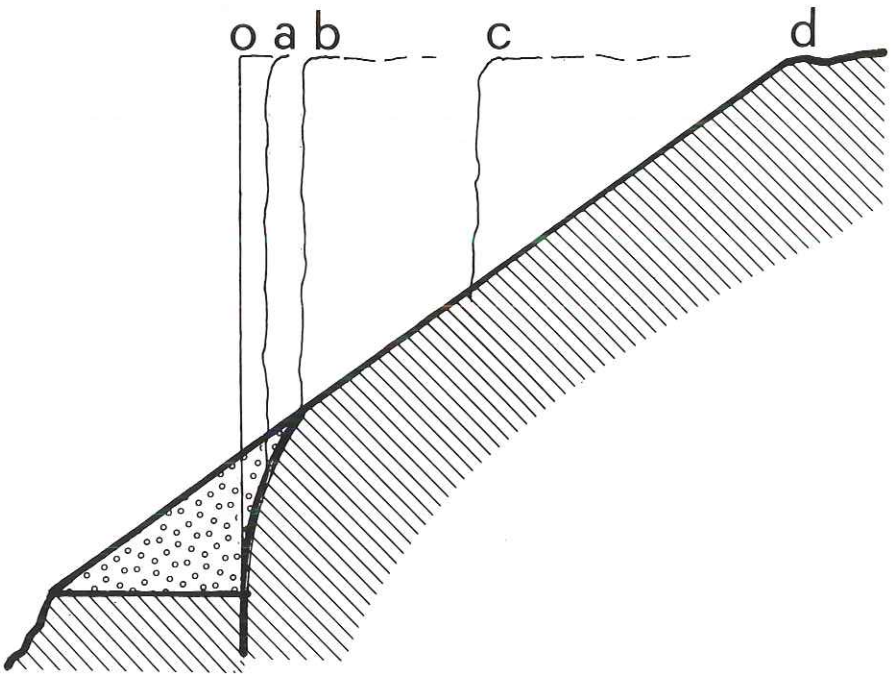


FIG. 9. - Anomalia del profilo dovuta alla insufficiente estensione del *plateau* basale.

detritiche prodottesi nel corso della recessione. Ciò ha comportato che dette falde si sono accumulate regolarmente solo fino ad un certo punto della evoluzione del versante (stadio *a* e *b*).

Dopo questo stadio il detrito prodotto dalla recessione trova completa evacuazione oltre il bordo del *plateau* per cui si ha l'effetto di una brusca variazione del rapporto *c* il quale passa da valori positivi, o comunque prossimi allo zero, a valori tendenti a $-\infty$ (stadi *c* e *d*). La brusca intersezione del paraboloide sul versante, visibile nella figura in prossimità del limite superiore della falda detritica, segna il passaggio dalla fase di recessione con accumulo di detrito (profilo paraboloidico del nucleo roccioso) alla fase di recessione senza accumuli al piede del pendio (versante di Richter).

È opportuno notare che analoghi profili anomali possono svilupparsi anche quando, nel corso dell'evoluzione di un versante, fatti tettonici intervengono a smembrare il *plateau* basale riducendone la estensione. Un caso di questo tipo è riscontrabile sul versante del M.te S. Angelo presso l'abitato di Caggiano (prov. Salerno) (fig. 10).

FIG. 10. - Versante rettilineo presso Caggiano (prov. Salerno). La porzione inferiore è in brecce; l'apice del nucleo roccioso sommerso dalle brecce taglia in maniera anomala il profilo del versante (senza disporsi ad esso tangente). La piccola scarpata al contatto è in parte legata ad una ripresa tettonica, in parte a riesumazione erosiva del paraboloide.

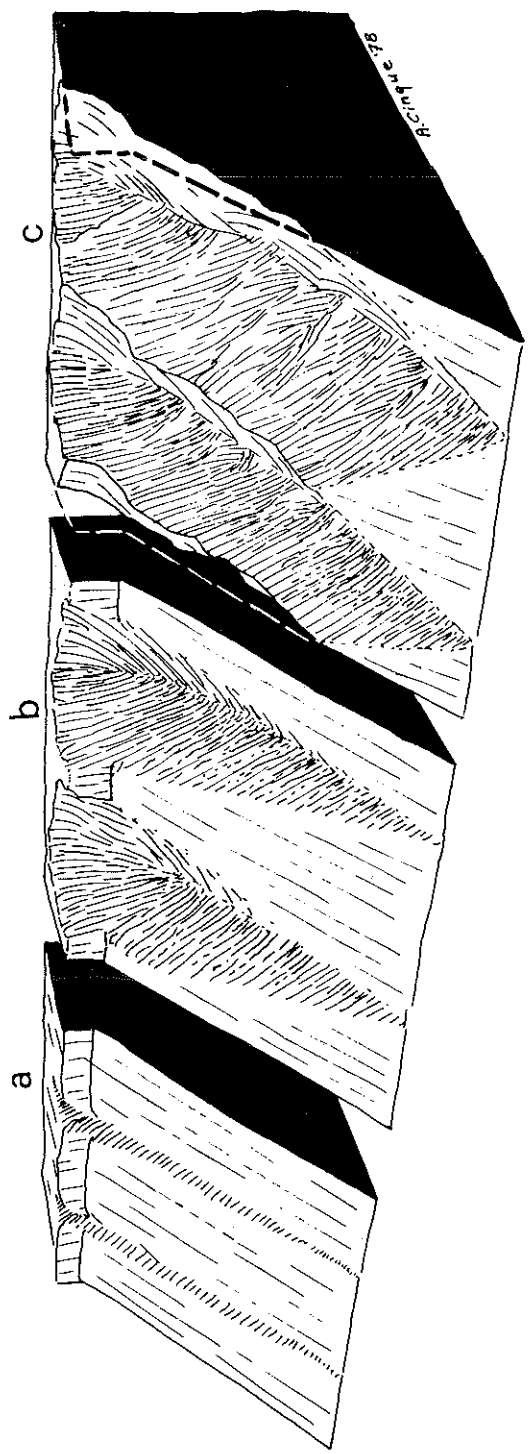


FIG. 11 a, b, c. - Tre stadi di dissecamento di un versante ad opera delle acque dilavanti. A destra lo stadio a « faccette triangolari ».

Vogliamo infine ricordare un fenomeno notevolmente generalizzato sui versanti carbonatici dell'Appennino meridionale: la presenza di forme legate all'erosione lineare sovrapposte alle morfologie di recessione parallela fin qui descritte. In effetti non mancano casi in cui si è verificata una successione inversa dei due tipi di modellamento, tuttavia quella citata rappresenta senz'altro la più diffusa ed evidente.

La figura 11 mostra schematicamente alcuni casi di dissecamento più o meno accentuato di un versante ad opera di acque incanalate. Si passa da semplici canaloni, per solito impostati su linee di faglia o di frattura, che lasciano ancora ampi ed evidenti lembi intatti di versante rettilineo (stadio *a*) a più ampi solchi torrentizi con il ventaglio di testata che va ad incastrarsi anche nel *plateau* sommitale determinando localmente l'arretramento del suo orlo (stadio *b*). Si può arrivare fino a casi in cui l'interferenza di più valli contigue produce un generale arretramento dell'orlo del *plateau* ed una forte alterazione del versante rettilineo del quale restano solo dei relitti nella parte basale sotto forma di « faccette triangolari » (stadio *c*).

Va inoltre notato che, nel caso illustrato nella figura 12, l'ampliamento simmetrico delle testate può dar luogo a spartiacque con-

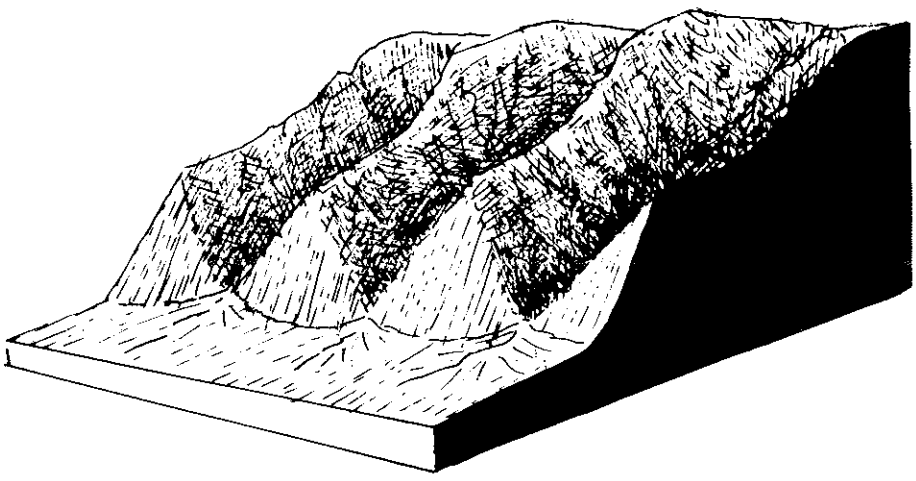


FIG. 12. - Versante di recessione dissecato a facce triangolari con spartiacque apicali disposti alla medesima altezza sì da simulare un antico livello di base dell'erosione.

cavi, tangenti orizzontalmente agli apici delle facce triangolari ed interpretabili come relitti di un ciclo di erosione antico avente il suo livello di base sull'allineamento di detti apici. In tal caso le facce

triangolari potrebbero erroneamente essere interpretate come il relitto di una ripresa tettonica.

Nel caso di una effettiva ripresa tettonica che coinvolga un versante già evoluto a « faccette triangolari », queste ultime potranno trasformarsi in « faccette pentagonali » (BRANCACCIO, CINQUE, SGROSSO, 1978).

Dato che notoriamente la tettonica di sollevamento dell'Appennino meridionale si è realizzata in più fasi, (la maggior parte delle

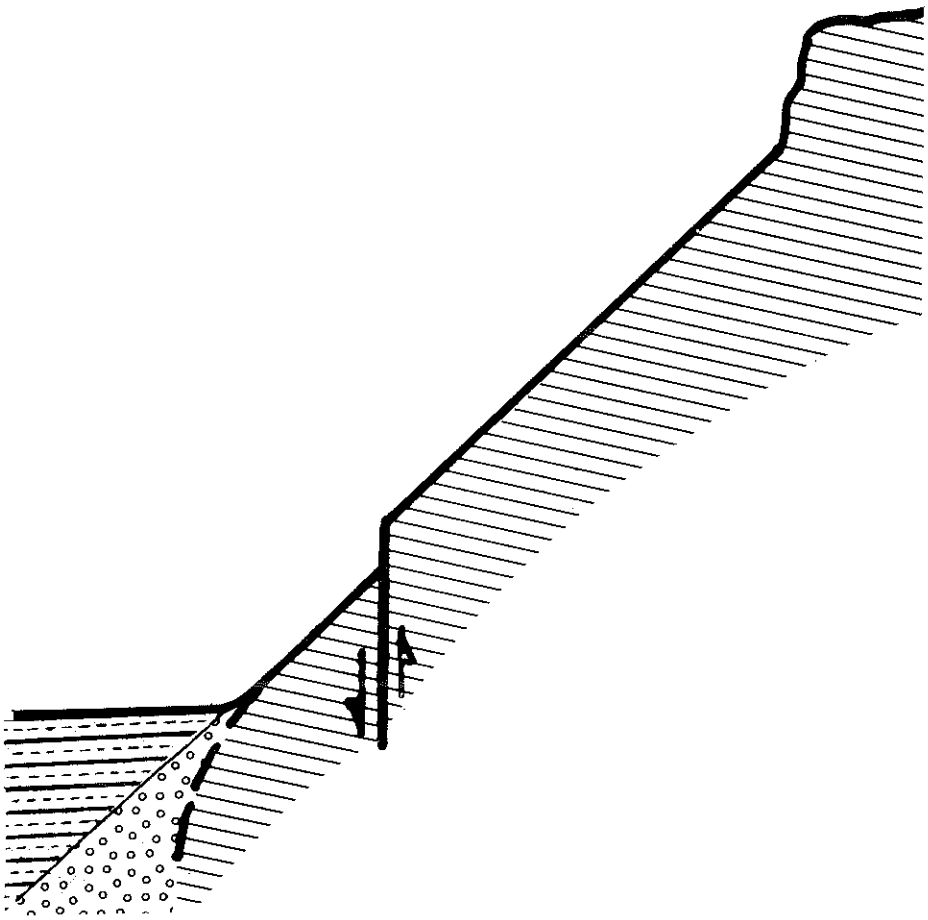


FIG. 13. - Versante di recessione successivamente ripreso ad opera di una faglia.

quali collocabili nel Pleistocene) e intervallate da cicli morfogenetici del tipo qui descritto, è facile comprendere come sia frequente osservare dei versanti di faglia più o meno evoluti, ripresi dalla tettonica e ritoccati da nuovi processi erosivi così innescati.

Dalla ricca casistica di questi tipi di eventi citiamo a titolo di esempio la chiara situazione riscontrabile sul versante nord-occidentale dei M.ti Alburni, presso Postiglione (prov. Salerno), fig. 13.

5. Conclusioni.

Nell'Appennino calcareo meridionale la grande maggioranza dei versanti di faglia originatisi nel corso della tettonica pleistocenica presentano caratteri più o meno evidenti di una evoluzione morfologica inquadrabile nel modello teorico di Lehmann o dei « versanti di recessione parallela ».

Le osservazioni di campagna, schematicamente riportate nel presente lavoro, hanno fornito una sostanziale verifica del suddetto modello teorico anche se, per alcune situazioni, è stato necessario compiere una attenta analisi delle caratteristiche morfologiche, al fine di distinguere tra esse quelle tipiche di una evoluzione per recessione da altre imputabili a diversi processi morfogenetici: processi che, talora, hanno agito sui versanti in concomitanza agli agenti denudazionali e/o in momenti differenti.

In altri casi l'analisi è stata volta a chiarire le modificazioni assunte da alcuni versanti rispetto alle forme tipiche previste dalla teoria (Lehmann, 1933). Chiarendo l'origine di tali differenze si è potuto accertare la reale influenza che esercitano sull'evoluzione del versante le eccezioni agli assunti su cui si basa la teoria di Lehmann. Questo tipo di analisi può consentire anche di desumere dalle caratteristiche di un versante di recessione, quali siano stati i fattori e gli eventi (climatici, strutturali, ecc.) che ne hanno condizionato la evoluzione e quindi la forma (Brancaccio, Cinque, Sgrosso, 1978).

Per quanto riguarda il tipo di processo erosionale che ha agito nella genesi di questi versanti, appare scontato che esso sia stato di tipo denudazionale, e, più precisamente, sia consistito in una degradazione crioclastica della roccia, talora associata, ma sempre in modo subordinato, a processi di dissoluzione e/o di erosione laminare ad opera delle acque dilavanti.

Sono attualmente pressocché assenti, nell'area sudappenninica, processi morfogenetici paragonabili per modalità evolutiva e per intensità a quelli innanzi analizzati. Qualche esempio « attualistico » di produzione di detrito che presenta analogie qualitative e forse anche quantitative è riconoscibile in certi « ghiaioni » del Gran Sasso, che, per altitudine e per latitudine presentano condizioni climatiche diverse da quelle che si riscontrano nei rilievi dell'Appennino meridionale. In definitiva bisogna ammettere che queste forme si siano

modellate in periodi di clima più freddo dell'attuale, cioè durante gli episodi glaciali del Pleistocene. D'altra parte, il fatto che siamo di fronte a delle morfologie fossili è testimoniato anche dalla presenza di forme imputabili a sistemi morfoclimatici simili all'attuale, sovrapposti alle fisiografie denudazionali.

Datare, quindi, caso per caso la genesi di un versante rettilineo è un risultato a cui si può pervenire con l'ausilio di altri dati geologici.

In base a quanto detto ci sembra molto difficile valutare la velocità di arretramento di un versante e, pertanto, risalire all'età della faglia che lo ha determinato sulla base di criteri esclusivamente geomorfologici. La velocità di arretramento infatti ha subito notevoli variazioni connesse con le fluttuazioni climatiche del Quaternario anche nell'ambito di un medesimo ciclo glaciale e, verosimilmente, ha anche risentito di situazioni microclimatiche locali (ad esempio esposizione dei versanti).

BIBLIOGRAFIA

BAKKER J. P., LE HEUX J. W. N., *A remarkable new geomorphological law.* Konikl. Nederl. Ak. Watenhappen. Amsterdam. **55**, pp. 399-410 e 554-562 (1952).

BRANCACCIO L., CINQUE A., SGROSSO I., *La grotta di S. Barbara nel contesto della evoluzione geomorfologica della piana di Agerola (Penisola Sorrentina).* Ann. Speleol. C.A.I., Napoli, 1974-1975 (1976).

BRANCACCIO L., CINQUE A., SGROSSO I., *L'analisi morfologica dei versanti come strumento per la ricostruzione degli eventi neotettonici.* In: « Recenti Sviluppi della ricerca finalizzata », Soc. Geol. It., 69° Congresso, Perugia 2-4 ottobre 1978 (1978).

CHARDON M., *Observations sur la formation des versants régularisés ou versants de Richter.* Actes du Symposium sur les versants en pays méditerranéens, Aix en Provence, 1975. G.E.G.E.R.M., **5**, pp. 25-27 (1976).

FISHER O., *On the distintegration of a chalk cliff.* Geol. Magaz., **3**, pp. 354-356 (1866).

LEHMANN O., *Morphologische Theorie der Verwitterung von Steinshlagwanden.* Viertel. der Naturforsch. Ges. Zurich, pp. 83-236 (1933).

RICHTER E., *Geomorphologische Unterschungen in den Hochalpen.* Petermanns Mitteilungen. Gotha, Erganzunsband, **24**, pp. 1-103 (1901).

YOUNG A., *Slopes.* Oliver and Boyd. Edinburg (1972).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci B. D'Argenio, G. Imbò e A. Scherillo.

Su un operatore lineare e positivo

Nota di GIUSEPPE MASTROIANNI
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 3 marzo 1979)

RIASSUNTO. — In questo lavoro si introduce e si studia un nuovo operatore lineare positivo L_n e si mostrano notevoli proprietà di convergenza. Si definisce poi mediante L_n un nuovo operatore lineare che converge meglio di L_n se applicato a funzioni sufficientemente regolari.

SUMMARY. — A new linear positive operator L_n is introduced and studied. Remarkable properties of convergence are proved. By means of L_n a new linear operator is introduced. This new operator has a better convergente than L_n if it is applied to smooth functions.

1. - INTRODUZIONE.

Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni reali definite su $[0, \infty[$, ivi strettamente monotone e tali da soddisfare le seguenti condizioni:

i) $\varphi_n(0) = 1 \quad (\forall\, n \in \mathrm{N})$

ii) $\forall\, (i, n) \in \mathrm{N}^2$ e $\forall\, x \geq 0$, sia $\quad (-1)^i \varphi_n^{(i)}(x) \geq 0$

iii) Per ogni coppia di numeri naturali k ed n, esistano un $n_k \in \mathrm{N}$ e una funzione reale $\alpha_{n,k}$ definita in $[0, \infty[$ tali che:

$$\varphi_n^{(i+k)}(x) = (-1)^k \varphi_{n_k}^{(i)}(x)\, \alpha_{n,k}(x) \qquad \forall\, x \geq 0 \text{ e } \forall\, i \in \mathrm{N}$$

con

$$\lim_n \frac{n}{n_k} = \lim_n \frac{\alpha_{n,k}(x)}{n^k} = 1$$

Alla successione $\{\varphi_n\}$ possiamo associare una successione $\{L_n\}$ di

operatori lineari e positivi su $C^0[0, \infty[$, definiti dalla relazione:

$$(1.1) \qquad (L_n f)(x) = L_n(f; x) = L_n\left(f\left(\frac{i}{n}\right); x\right) =$$

$$= \sum_0^\infty{}_i (-1)^i \frac{\varphi_n^{(i)}(x)}{i!} x^i f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Numerosi autori, tra cui MIRAKYAN [1], BASKAKOV [2], SZASZ [3], MEYER-KONING und ZELLER [4], SCHURER [5], A. LUPAŞ [6, 7, 8], A. JAKIMOVSKI and D. LEVIATAN [9] ed altri, hanno introdotto e studiato operatori del tutto simili ad L_n, mettendone in luce notevoli caratteristiche.

In questo lavoro mostriamo nuove relazioni e proprietà dell'operatore suddetto. Studiamo, in particolare, la convergenza di $L_n f$, delle sue derivate $(L_n f)^{(p)}$ $(p \geq 0)$ e delle sue iterate $L_n^j f$.

A partire poi da L_n, definiamo un nuovo operatore $L_{n,k}$, che generalizza il precedente nello stesso senso secondo cui in [10] e [11] sono stati generalizzati gli operatori di BERNSTEIN e D. D. STANCU [12].

Al fine di stabilire il grado di esattezza di $L_{n,k}$ e la convergenza per $k \to \infty$, assegniamo delle semplici condizioni necessarie e sufficienti. Studiamo la convergenza di $(L_{n,k} f)^{(p)}$ per $n \to \infty$ e dimostriamo che: « *per ogni funzione f dotata di derivata 2 k-ma limitata,* $(L_{n,k} f)^{(p)} \to f^{(p)}$ *come* n^{-k} »; mettendo quindi in evidenza che $(L_{n,k} f)^{(p)}$ approssima $f^{(p)}$ meglio di $(L_n f)^{(p)}$, nel caso di maggiore regolarità della f medesima.

Nel fare infine qualche esempio, stabiliamo nuove limitazioni e miglioriamo qualche maggiorazione già nota.

2. - SULLA CONVERGENZA DI $\{L_n f\}$.

Derivando successivamente la (1.1), per induzione, si ottiene:

$$(2.1) \qquad (L_n f)^{(k)}(x) =$$

$$= \frac{k!}{n^k} \sum_0^\infty{}_i (-1)^{i+k} \frac{\varphi_n^{(i+k)}(x)}{i!} \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}, \ldots, \frac{i+k}{n}; f\right] x^i$$

da cui, per la iii) del n. 1, si ha:

$$(2.2) \qquad (L_n f)^{(k)}(x) =$$

$$= k! \frac{\alpha_{n,k}(x)}{n^k} \sum_0^\infty{}_i (-1)^i \frac{\varphi_{n_k}^{(i)}(x)}{i!} \left[\frac{i}{n}, \ldots, \frac{i+k}{n}; f\right] x^i .$$

Sviluppando in serie di Mac-Laurin (1.1), si ottiene la formula:

$$(2.3)\qquad (L_n f)(x) = \sum_0^\infty{}_i (-1)^i \frac{\varphi_n^{(i)}(0)}{n^i} \left[0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{i}{n}; f\right] x^i =$$

$$= \sum_0^\infty{}_i (-1)^i \frac{\varphi_n^{(i)}(0)}{i!} \Delta^i_{1/n} f(0)\, x^i.$$

Posto:

$$e_k(x) = x^k \qquad (k \in \mathrm{N}),$$

dalla (2.3), per $x \geq 0$, seguono le identità:

$$(L_n e_0)(x) = 1\,; \qquad (L_n e_1)(x) = -\frac{\varphi_n'(0)}{n} x$$

$$(2.4)$$

$$(L_n e_2)(x) = \frac{\varphi_n''(0)}{n^2} x^2 - \frac{\varphi_n'(0)}{n} x$$

$$(2.5)\qquad \delta_n^2(x) = L_n\left(\left(x - \frac{i}{n}\right)^2; x\right) =$$

$$= \left(1 + 2\frac{\varphi_n'(0)}{n} + \frac{\varphi_n''(0)}{n^2}\right) x^2 - \frac{\varphi_n'(0)}{n^2} x$$

Indicato con $\omega(f;\delta)$ $(\delta > 0)$, il modulo di continuità di f e posto inoltre: $\|f\| = \max_{[0,a]} |f(x)|$, dal teorema di Korovkin, per le (2.4), (2.5) e iii), segue il

TEOREMA. 2.I. — *Per ogni* $f \in C^0[0,a]$ $(a \in R^+)$, $L_n f$ *converge in norma ad* f *e si ha*:

$$\|f - L_n f\| \leq 2\,\omega(f; \|\delta_n\|)$$

$$\|f - L_n f\| \leq a\,\|f'\| \left|1 + \frac{\varphi_n'(0)}{n}\right| + 2\,\|\delta_n\|\,\omega(f'; \|\delta_n\|)$$

$$(f' \in C^0[0,a])$$

Per ogni σ positivo e $x \in [0,a]$, poniamo:

$$I_\sigma = \left\{ i \in \mathrm{N} \,/\, \left| x - \frac{i}{n} \right| \leq \sigma \right\}$$

poiché $\lim_{n\to\infty} \| \delta_n \| = 0$, tenendo conto della prima delle (2.4), si ha il

LEMMA 2.II. — *Sussistono le relazioni di limite*:

$$\lim_n \sum_{i\in I_\sigma} (-1)^i \frac{\varphi_n^{(i)}(x)}{i!} x^i = 1 \qquad (I_\sigma \neq \emptyset)$$

(2.6)

$$\lim_n \sum_{i\in \mathbf{N}-I_\sigma} (-1)^i \frac{\varphi_n^{(i)}(x)}{i!} x^i = 0$$

uniformemente rispetto a x.

Osserviamo che le (2.6) sono equivalenti alle condizioni di Korovkin. Dal lemma 2.II segue facilmente il

TEOREMA 2.III. — *Per ogni* $f \in C^2[0, a]$, *se è verificata la relazione*

$$\| e_1 - L_n e_1 \| = o(\| \delta_n^2 \|) \tag{2.7}$$

si ha:

$$f(x) - (L_n f)(x) = -\delta_n^2(x) \frac{f''(x)}{2} + \theta_n(x) \tag{2.8}$$

ove

$$\theta_n(x) = o(\| \delta_n^2 \|).$$

Si noti che la (2.8) è una generalizzazione di una ben nota formula di VORONOVSKAIA [13].

Come applicazione del teorema 2.III e di un teorema di MUHLBACH [14] si ottiene il

TEOREMA 2.IV. — *Se è verificata la condizione* (2.7) *sussiste l'equivalenza:*

$$f \in \mathrm{Lip}_M 1 \Leftrightarrow \| f - L_n f \| \leq M \| \delta_n^2 \| + o(\| \delta_n^2 \|).$$

Supponiamo ora che sia verificata la condizione:

$$\varphi_n'(0) = -n. \tag{2.9}$$

In tal caso L_n ha grado di esattezza uno e si ha:

$$(2.10)\quad R(e_2; x) = x^2\left(1 - \frac{\varphi_n''(0)}{n^2}\right) - \frac{x}{n} = -\delta_n^2(x) \qquad x \in [0, a]$$

ove

$$R_n f = f - L_n f .$$

Tenendo conto, allora, della (2.8) e di un teorema dimostrato in [15], si ottiene facilmente il

TEOREMA 2.V. — Se è verificata la (2.9), sussistono le uguaglianze:

$$(2.11)\quad (R_n f)(x) = \left[\left(1 - \frac{\varphi_n''(0)}{n^2}\right) x^2 - \frac{x}{n}\right] \frac{f''(\xi)}{2} \qquad (\xi \in]0, a[)$$

$$(2.12)\quad (R_n f)(x) = \left[\left(1 - \frac{\varphi_n''(0)}{n^2}\right) x^2 - \frac{x}{n}\right] \frac{f''(x)}{2} + o(\| \delta_n^2 \|)$$

per ogni $f'' \in C^0[0, a]$.

Infine, dal teorema 2.V, tenendo conto che $(R_n e_2)(x)$ è negativo per x positivo, segue il

TEOREMA 2.VI. — *Per ogni* $f \in C^2[0, a]$, sussiste l'equivalenza:

$$f \text{ è convessa} \iff (R_n f)(x) < 0 \qquad \forall\, x \in]0, a]$$

3. - SULLA CONVERGENZA DI $\{(L_n f)^{(p)}\}_n$.

Da ora innanzi supporremo sempre verificata la (2.9) e la

$$(3.1)\qquad \left(\frac{\alpha_{n,p}(x)}{n^p} - 1\right) = 0(n^{-1}) = \left(\frac{n}{n_p} - 1\right).$$

Inoltre si ponga:

a) $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_p$, $t_k \in [0, 1]$, $k = \overline{0, p}$; $p < n$.

b) $T_p = [0, 1] \times [0, t_1] \times \ldots \times [0, t_{p-1}]$

c) $d\,T_p = d\,t_1 \cdot d\,t_2 \ldots d\,t_p$

d) $\delta^2_{n,p}(x) = p!\, L_{n_p}\left(\int_{T_p} \left(x - \frac{i+t}{n} \right)^2 d\,T_p;\ x \right)$

e) $\frac{\alpha_{n,p}(x)}{n^p} = a_{n,p}(x)\,; \qquad b_{n,p}(x) = n\,|\,1 - a_{n,p}(x)\,|$

f) $c_{n,p}(x) = n \left| \left(1 - \frac{n_p}{n} \right) x - \frac{p}{2n} \right|.$

Un calcolo diretto dà:

$$\delta^2_{n,p}(x) = \frac{d^2_{n,p}(x)}{n}$$

ove

$$d^2_{n,p}(x) = \left\{ \left(1 - \frac{2\,n_p}{n} + \frac{\varphi''_{n,p}(0)}{n^2} \right) x^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{n_p}{n} - p \left(1 - \frac{n_p}{n} \right) \right] \frac{x}{n} + \frac{s_2^{p+2}}{n^2\, s_2^{p+2}} \right\} n$$

$s^i_i = 0$ e s^j_i sono i numeri di Stirling di seconda specie (cfr. Occorsio 1).

Ciò posto, dimostriamo il seguente

TEOREMA 3.1. — *Se* $f \in C^{(p)}[0,a]$, *la successione* $\{(L_n f)^{(p)}\}_n$ *converge in norma ad* $f^{(p)}$ *e si ha:*

$$(3.2)\quad \|\,(R_n f)^{(p)}\,\| \le \|\,a_{n,p}\,\|\,(1 + \|\,d_{n,p}\,\|)\,\omega\,(f^{(p)};\ 1/\sqrt{n}) + \|\,b_{n,p}\,\|\,\frac{\|\,f^{(p)}\,\|}{n}\,.$$

Infatti, per ogni $\delta > 0$, si ha:

$$|\,f^{(p)}(x) - p!\,[i/n, \ldots, (i+p)/n; f]\,| \le$$

$$\le p! \int_{T_p} \left| f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{n} \right) \right| d\,T_p \le p! \int_{T_p} \omega \left(f^{(p)}; \left| x - \frac{i+t}{n} \right| \right) d\,T_p \le$$

$$\le \omega\,(f^{(p)}; \delta)\, p! \int_{T_p} \left[1 + \delta^{-1} \left| x - \frac{i+t}{n} \right| \right] d\,T_p \le$$

$$\le \omega\,(f^{(p)}; \delta) \left[1 + \delta^{-1} \sqrt{p! \int_{T_p} \left(x - \frac{i+t}{n} \right)^2 d\,T_p} \right],$$

da cui segue facilmente:

$$|f^{(p)}(x) - (L_n f)^{(p)}(x)| \leq a_{n,p}(x)\, L_{n_p}\,(|f^{(p)}(x) -$$

$$- p!\,[i/n, \ldots, (i+p)/n; f]\,|; x) + \frac{b_{n,p}(x)}{n}\,\|f^{(p)}\| \leq$$

$$\leq a_{n,p}(x)\,\omega(f^{(p)}; \delta)\left[1 + \delta^{-1} L_{n_p}\left(\sqrt{p!\int_{T_p}\left(x - \frac{i+t}{n}\right) d\,T_p;\; x}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\|b_{n,p}\|}{n}\,\|f^{(p)}\| \leq a_{n,p}(x)\,\omega(f^{(p)}; \delta)\,[1 + \delta^{-1}\delta_{n,p}(x)] +$$

$$+ \frac{\|b_{n,p}\|}{n}\,\|f^{(p)}\|$$

e quindi, per $\delta = 1/\sqrt{n}$, si ottiene la (3.2).

Con procedimento analogo si provano le limitazioni:

$$(3.3)\quad \|(R_n f)^{(p)}\| \leq \|a_{n,p}\|(1 + \|d_{n,p}\|)\,\frac{\|\alpha_{n,p}\|}{\sqrt{n}}\,\omega(f^{(p+1)}; 1/\sqrt{n}) +$$

$$+ \frac{1}{n}\,\|a_{n,p}\|\,\|c_{n,p}\| \cdot \|f^{(p+1)}\| + \frac{\|b_{n,p}\|}{n}\,\|f^{(p)}\|. \qquad f \in C^{(p+1)}[0, a]$$

$$(3.4)\quad \|(R_n f)^{(p)}\| \leq \left[\frac{\|\delta^2_{n,p}\|}{2}\,\|f^{(p+2)}\| + \frac{\|c_{n,p}\|}{n}\,\|f^{(p+1)}\|\right]\|a_{n,p}\| +$$

$$+ \frac{\|b_{n,p}\|}{n}\,\|f^{(p)}\|. \qquad f \in C^{(p+2)}[0, a]$$

Consideriamo ora qualche esempio.

1) Se $\varphi_n(x) = (1 - x)^n\, 0 \leq x \leq 1$, L_n si riduce all'operatore di Bernstein B_n e, in tal caso, si ha:

$$a_{n,p}(x) \equiv 1^{(p,1/n)}; \qquad b_{n,p}(x) \equiv n\,(1 - 1^{(p,1/n)})$$

essendo $y^{(m,h)}$ la pseudopotenza di base y, pseudoesponente m e passo h.

$$c_{n,p}(x) = p\,(x - 1/2); \qquad \|c_{n,p}\| = (1/2)\,p$$

$$\delta^2_{n,p}(x) = \frac{x(1-x)}{n}\,(1 - p(p+1)/n) + \frac{s_2^{p+2}}{s_1^{p+2}\,n^2}$$

$$\| d^2_{n,p} \| = \begin{cases} \dfrac{s_2^{p+2}}{s_1^{p+2}\, n} & \text{se } n \leq p(p+1) \\ \dfrac{1}{4}(1 - p(p+1)/n) + \dfrac{s_2^{p+2}}{s_1^{p+2}\, n} & \text{se } n \geq p(p+1) \end{cases}$$

Quindi, nel caso dell'operatore di Bernstein, le limitazioni (3.1), (3.3) e (3.4) risultano di semplice espressione. Più in particolare, per $p = 1$, si ha:

$$\| (R_n f)' \| \leq (1 + \sqrt{1/4 - 1/6\, n})\, \omega(f'; 1/\sqrt{n}) \qquad (n > 2)$$

$$\| (R_n f)' \| \leq 1/\sqrt{n}\,(1 + \sqrt{1/4 - 1/6\, n})\ \sqrt{1/4 - 1/6\, n}\ \omega(f''; 1/\sqrt{n}) + \\ + (1/2\, n) \| f'' \|$$

$$\| (R_n f)' \| \leq (1/8\, n + 1/12\, n^2) \| f''' \| + (1/2\, n) \| f'' \|$$

T. Popoviciu in [16] aveva dato la seguente limitazione:

$$\| (R_m f)^{(r)} \| < A_{m,r}\, \omega(f^{(r)}; 1/\sqrt{m - r}) + [r(r-1)/2\, m] \| f^{(r)} \|$$

ove

$$A_{m,r} = 3/2 + 2\, r\, \sqrt{m - r}/m$$

D. D. Stancu in [17] aveva dimostrato le diseguaglianze seguenti:

$$\| (R_m f)^{(r)} \| < \left(1 + \frac{2\, r + \sqrt{m + 4\, r^2} - r}{2\, \sqrt{m}}\right) \omega(f^{(r)}; 1/\sqrt{m}) + \\ + [r(r-1)/2\, m] \| f^{(r)} \|$$

$$\| (R_m f)' \| < (1 + 1/\sqrt{m} + (1/2)\, \sqrt{1 + 3\, m})\, \omega(f'; 1/\sqrt{m})$$

2) Sia $\varphi_n(x) = (1 + x)^{-n}$, $x \in [0, a]$. In tal caso si ottiene l'operatore di Baskakov P_n e si ha:

$$a_{n,p}(x) \equiv 1^{(p,-1/n)};\ b_{n,p}(x) = n(1 - 1^{(p,-1/n)});\ c_{n,p}(x) = p\,|\,1/2 - x\,|$$

$$\delta^2_{n,p}(x) = \frac{x(1+x)}{n}(1 + p(p+1)/n) + \frac{s_2^{p+2}}{s_1^{p+1}\, n^2}$$

$$\| d^2_{a\,'u} \| = n\, \delta^2_{a\,'u}(a) = a(a+1)(1 + p(p+1)/n) + s_2^{p+2}/s_1^{p+2}\, n$$

Quindi anche in questo caso le (3.1), (3.3) e (3.4) si particolarizzano facilmente. Per $p = 1$ si ottiene:

$$\| (R_n f)' \| \leq [1 + \sqrt{a(a+1)(1+2/n) + 1/3\,n}]\, \omega(f'; 1/\sqrt{n})$$

$$\| (R_n f)' \| \leq (1/\sqrt{n})\,[1 + \sqrt{a(a+1)(1+2/n) + 1/3\,n}] \cdot$$
$$\cdot \sqrt{a(a+1)(1+2/n) + 1/3\,n}\, \omega(f''; 1/\sqrt{n}) +$$
$$+ \frac{\| f'' \|}{n}(a - 1/2) \qquad (a > 1)$$

$$\| (R_n f)' \| \leq [(1 + 2/n)\, a(a+1)/2\,n + 1/6\,n] \| f''' \| +$$
$$+ \frac{\| f'' \|}{n}(a - 1/2) \qquad (a > 1)$$

3) Nel caso in cui $\varphi_n(x) = e^{-nx}$, $x \geq 0$, si ottiene l'operatore di Mirakyan e si ha:

$$a_{n,p}(x) \equiv 1; \quad b_{n,p}(x) \equiv 0; \quad c_{n,p}(x) \equiv p/2$$

$$\delta^2_{n,p}(x) = x/n + s_2^{p+2}/s_1^{p+2}\, n^2; \qquad \| d^2_{n,p} \| = a + s_2^{p+2}/s_1^{p+2}\, n$$

In tal caso, quindi, le limitazioni risultano di estrema semplicità, e per $p = 1$ si ha:

$$\| (R_n f)' \| \leq (1 + \sqrt{a + 1/3\,n})\, \omega(f'; 1/\sqrt{n})$$

$$\| (R_n f)' \| \leq (1/\sqrt{n})(1 + \sqrt{a + 1/3\,n})\, \sqrt{a + 1/3\,n}\, \omega(f''; 1/\sqrt{n}) +$$
$$+ \| f'' \| 1/2\,n$$

$$\| (R_n f)' \| \leq (1/2\,n)(a + 1/3\,n \| f''' \| + \| f'' \| 1/2\,n$$

4. - L'operatore $L_{n,k}$.

Per ogni intero positivo j, si definisce la potenza o iterata j-ma di L_n mediante le posizioni:

$$L_n^1 = L_n; \quad L_n^j = L_n(L_n^{j-1}) \qquad (j > 1)$$

L_n^j è ancora un operatore positivo ed essendo:

$$\| L_n^j \| \leq \| L_n \|$$

$L_n^j f$, per $n \to \infty$, converge in norma ad f e con lo stesso ordine di convergenza di $L_n f$.

Per quanto poi riguarda la convergenza di $L_n^j f$, per $j \to \infty$, (n fissato), posto:

$$\gamma_{n,2} = \frac{\varphi_n''(0)}{n^2},$$

sussiste il

TEOREMA 4.I. — *Sia* $f \in C^0[0, a]$. *Condizione necessaria e sufficiente perché sussista la relazione*:

$$(4.1) \quad \lim_{j \to \infty} (L_n^j f)(x) = f(0) + n(1 - \gamma_{n,2}) \left[f\left(\frac{n(1 - \gamma_{n,2})}{1} \right) - f(0) \right] x$$

è che $\gamma_{n,2}$ *risulti minore di* 1.

Infatti si ha:

$$(L_n^j e_2)(x) = \gamma_{n,2}^j x^2 + (1 + \gamma_{n,2} + \ldots + \gamma_{n,2}^{j-1}) x/n$$

Quindi la relazione di limite

$$(4.2) \quad \lim_{j \to \infty} (L_n^j e_2)(x) = \frac{x}{n(1 - \gamma_{n,2})}$$

sussiste se e solo se $\gamma_{n,2} < 1$.

D'altra parte, per un corollario del teorema di KOROVKIN [18], la (4.2) è equivalente alla (4.1) e il teorema è provato.

Si osservi che dalla (2.11) segue che $L_n f$ interpola la funzione f nei punti $x = 0$ e $x = 1/n(1 - \gamma_{n,2})$. Quindi il teorema ora dimostrato assicura che nell'ipotesi su $\gamma_{n,2}$ (e solo in questo caso), $(L_n f)$, $(L_n^j f)$, e $\lim_{j \to \infty} (L_n^j f)$ interpolano la funzione f negli stessi punti.

Nel caso particolare dell'operatore di Bernstein si ha:

$$\gamma_{n,2} = 1 - 1/n \qquad (n > 1)$$

e la (4.1) restituisce una ben nota relazione [19].

Nel caso invece degli operatori di Baskakov e Mirakian la (4.1) non è vera: infatti $\gamma_{n,2}$ è rispettivamente maggiore e uguale a 1.

Consideriamo ora l'operatore:

$$(4.3) \qquad L_{n,k} = I - (I - L_n)^k = \sum_1^k {}_j (-1)^{j-1} \binom{k}{j} L_n^j$$

ove k è un intero positivo e I è l'operatore identico.

$L_{n,k}$ è un operatore lineare, definito su $C^0[0, \infty]$, ivi in generale non positivo e rappresenta una generalizzazione di L_n.

Inoltre, per ogni $f \in C^0[0, \infty[$, si ha l'identità:

$$f = L_{n,k} f + R_{n,k} f$$

ove $R_{n,k}$ è definito dalla relazione medesima e si ha:

$$R_{n,k} = R_n^k$$

Al fine di stabilire il grado di esattezza di $L_{n,k}$, dimostreremo il seguente

TEOREMA 4.II. — *Il grado di esattezza di* $L_{n,k}$ *non supera* k. *Precisamente, posto* $\gamma_{n,i} = (-1)^i \varphi_n^{(i)}(0)/n^i$, il grado di esattezza è $h < k$ se e solo se:

$$\gamma_{n,i} \equiv 1 \quad (i = \overline{1, h}) \; e \; \gamma_{n,h+1} \neq 1$$

ed è proprio k *se e solo se*:

$$\gamma_{n,i} \equiv 1 \qquad i = \overline{1, s} \qquad (s \geq k)$$

Infatti dalla (2.3) segue:

$$(4.4) \qquad (R_n e_h)(x) = -\gamma_{n,1} \frac{x}{n^{h-1}} - \gamma_{n,2} \frac{x^2}{n^{h-2}} s_{h-2}^h - \ldots -$$

$$- \gamma_{n,h-1} \frac{x^{h-1}}{n} s_1^h + (1 - \gamma_{n,h}) x^h$$

Quindi nel caso in cui $\gamma_{n,i} \equiv 1$ $(i = \overline{1, h})$ e solo in questo caso, R_n trasforma ogni polinomio di grado $r \leq h$ in un altro di grado $r - 1$. Essendo poi $R_n e_1 \equiv 0$, $h - 1$ applicazioni di R_n alla (4.4) danno $R_{n,h} e_h \equiv 0$ e quindi $R_{n,k} e_h \equiv 0$.

Inoltre è:

$$(4.5) \qquad (R_n e_{h+1})(x) = -\frac{x}{n^h} - \frac{x^2}{n^{h-1}} s_{h-1}^{h+1} - \ldots -$$

$$- \frac{x^h}{n} s_1^{h+1} + (1 - \gamma_{n,h+1}) x^{h+1}$$

Quindi, se e solo se $\gamma_{n,h+1} \neq 1$, R_n conserva il grado $(h+1)$ di ogni polinomio; per cui si ha: $R_{n,k}\, e_{h+1} \not\equiv 0$.

Un ragionamento perfettamente analogo mostra che il teorema è vero per $s = k$. Nel caso in cui $s = k+1$, si ha facilmente:

$$(R_{n,k}\, e_k) \equiv 0\,; \quad (R_{n,k}\, e_{k+1}) = -\frac{s_1^{k+1}}{n}\,(R_{n,k-1}\, e_k)\,,$$

da cui segue:

$$(R_{n,k}\, e_{k+1})(x) = \frac{(-1)^k\,[(k+1)\,!]^2}{(2n)^k\,(k+1)}\,x \tag{4.6}$$

Il teorema risulta perciò dimostrato.

Per citare qualche esempio, $L_{n,k}$, nei casi degli operatori di Bernstein e Baskakov, ha grado di esattezza 1 e nel caso dell'operatore di Mirakyan ha grado di esattezza k.

Al fine di esaminare la convergenza di $L_{n,k}\, f$ per $k \to \infty$ (fissato n), seguendo un procedimento usato in [11], si dimostra il

TEOREMA 4.III. — *Sia* $f \in C^0\,[0, \infty[$. *Se e solo se è verificata la* limitazione

$$\gamma_{n,i} < 2 \qquad (i \geq 2)$$

si ha:

$$\lim_{k\to\infty} (L_{n,k}\, f)(x) = f(0) + \tag{4.7}$$

$$+ \sum_1^\infty{}_i\; x(x - 1/n) \cdot \ldots \cdot (x - (i-1)/n)\left[0, 1/n, \ldots, \frac{i-1}{n}; f\right],$$

sempre che abbia significato la serie a secondo membro.

Il teorema non si applica al caso dell'operatore di Baskakov mentre per l'operatore di Bernstein restituisce un risultato ottenuto in [11]; di particolare interesse è per l'operatore di Mirakyan. In tal caso, infatti, posto

$$\rho_{k-1,n} = I + R_n + \ldots + R_n^{k-1}$$

da $R_{n,k}\, e_k \equiv 0$ segue $\rho_{k-1}(e_i; x) = x^{(i,1/n)}$ $(i \leq k)$. Essendo inoltre:

$$\rho_{k,n}(e_{k+1}; x) = \rho_{k-1}(e_{k+1}; x) + R_{n,k}(e_{k+1}; x)$$

da cui

$$x^{(k+1,\,1/m)} = \rho_{k-1}(e_{k+1};\, x) + \frac{(-1)^k\,[(k+1)\,!]^2}{(2n)^k\,(k+1)}\,x,$$

si ha la uguaglianza:

$$(4.8) \qquad (\mathrm{L}_{n,k}\,f)(x) =$$

$$= \mathfrak{L}_{k+1}(f;\, x) + \frac{(-1)^k\,[(k+1)\,!]^2}{(2n)^k\,(k+1)}\left[0,\, 1/n,\, \ldots,\, \frac{k+1}{n};\, f\right] x + \sigma_{n,k+2}$$

ove $\mathfrak{L}_{k+1}(f;\, x)$ è il polinomio interpolante di Lagrange sui nodi $(j/n)_{j=\overline{0,k}+1}$ e $\sigma_{n,k+2} = \sum_{k+2}^{\infty}{}_{\nu}\, \rho_{k+1,n}(e_\nu;\, x)\,[0,\, \ldots,\, \nu/n;\, f]$

5. - Sulla convergenza della successione $\{\mathrm{L}_{n,k}\,f)^{(p)}\}$.

Sia $f \in \mathrm{C}^0\,[0, a]$. Poiché si ha:

$$\|\,\mathrm{L}_{n,k}\,\| \leq (2^k - 1)\,\|\,L_n\,\|\,,$$

segue facilmente che $(\mathrm{L}_{n,k}\,f)^{(p)}\,(p \geq 0)$ converge in norma ad $f^{(p)}$ e lo stesso ordine di convergenza di $(\mathrm{L}_n\,f)^{(p)}$.

Mostreremo ora che l'operatore $L_{n,k}$, al contrario di quanto accade per L_n, ha la proprietà di migliorare l'approssimazione al crescere della regolarità della funzione approssimanda.

Posto all'uopo:

i) $\mathrm{C}_{n,p}(x) = (1/2)\,a_{n,p}(x)\,d_{n,p}(x) + n\,c_{n,p}(x)\,a_{n,p}(x) + b_{n,p}(x)$

ii) $\|f\|_0 = \|f\|\,, \quad \|f\|_m = \max\{\,\|f\|_{m-1},\, \mathrm{M}_m\} \quad m > 0$
con $\mathrm{M}_j = \operatorname*{Sup}_{[0,a]} |\,f^{(j)}(x)\,|\,;$

se $f^{(p+2)}$ è limitata, si ha:

$$(5.1) \qquad \|\,(\mathrm{R}_n\,f)^{(p)}\,\| \leq n^{-1}\,\|\,\mathrm{C}_{n,p}\,\| \cdot \|\,f^{(p)}\,\|_2$$

da cui, per una iterata applicazione della medesima, segue:

$$(5.2) \quad \|\,(\mathrm{R}_n\,f)^{(p)}\,\|_k \leq n^{-1}\,\Gamma_{n,p+k}\,\|\,f^{(p)}\,\|_{k+2} \quad \text{ove} \quad \Gamma_{n,m} = \max_{0 \leq i \leq m}\,\|\,\mathrm{C}_{n,p+i}\,\|$$

Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA 5.I. — *Se* $f^{(p+2k)}(x) \leq M_{p+2k}$ $(k \geq 1$ *e* $p + 2k - 2 < n)$, *sussiste la limitazione*:

$$\| (R_{n,k} f)^{(p)} \| \leq n^{-k} \prod_{0}^{k-1}{}_i \, \Gamma_{n,p+2i} \, \| f^{(p)} \|_{2k} \tag{5.3}$$

Infatti, per la (5.1) il teorema è vero se $k = 1$. Procedendo per induzione, si supponga vera la limitazione:

$$\| (R_{n,k-1} f)^{(p)} \| \leq n^{-k+1} \prod_{0}^{k-2}{}_i \, \Gamma_{n,p+2i} \, \| f^{(p)} \|_{2k-2}$$

da cui, sostituendo $R_n f$ ad f e tenendo conto della (5.2), si ha:

$$\| (R_{n,k} f)^{(p)} \| \leq n^{-k} \left(\prod_{0}^{k-2}{}_i \, \Gamma_{n,p+2i} \right) \Gamma_{n,p+2k-2} \, \| f^{(p)} \|_{2k}$$

e pertanto l'assunto.

Dalla (5.3) segue ancora:

$$\| R_{n,k+1} f)^{(p)} \| \leq n^{-k} \prod_{0}^{k-1}{}_i \, \Gamma_{n,p+2i} \, \| (R_n f)^{(p)} \|_{2k} \tag{5.4}$$

Da quest'ultima e in virtù delle (3.2) e (3.3), si ottengono facilmente i seguenti corollari.

COROLLARIO 5.II. — *Se* $f^{(p)} \in C^{(2k)}[0, a]$ *con* $k \geq 1$ *e* $p + 2k < n$, *si ha*:

$$\lim_n n^k (R_{n,k+1} f)^{(p)} = 0 \tag{5.5}$$

COROLLARIO 5.III. — *Se* $f^{(p+2k)} \in C^1[0, a]$ *con* $k \geq 1$ *e* $p + 2k < n$, *si ha*:

$$\lim_n n^{k+1/2} (R_{n,k+1} f)^{(p)} = 0 \tag{5.6}$$

COROLLARIO 5.IV. — *Se* $f^{(p+2k+1)} \in \mathrm{Lip}_M 1$ con $k \geq 1$ *e* $p + 2k < n$, *si ha*:

$$(R_{n,k+1} f)^{(p)} = 0(n^{-k-1}) \tag{5.7}$$

Osserviamo che le (5.5), (5.6) e 5.3) possono considerarsi una generalizzazione rispettivamente delle (3.2), (3.3) e (3.4). Quindi, come è stato già detto all'inizio di questo numero, $(L_{n,k} f)^{(p)}$ è un'approssimante di $f^{(p)}$ migliore di $(L_n f)^{(p)}$ nel caso di maggiore regolarità della f medesima; precisamente mentre l'ordine di $(L_n f)^{(p)}$ è al più $0(n^{-1})$ quando $f^{(p+1)} \in \mathrm{Lip_M}\, 1$, l'ordine di $(L_{n,k} f)^{(p)}$ è al più $0(n^{-k})$ se $f^{(p+2k-1)} \in \in \mathrm{Lip_M}\, 1$.

Ricordiamo che BUTZER [20] ha dimostrato che « *per ogni f avente* $f^{(2k)}$ *limitata, esiste una combinazione lineari di polinomi di Bernstein* $\mathcal{L}_{2^{k-1}n} f$, *il cui ordine di approssimazione è di* $0(n^{-k})$. *Inoltre il grado di* $\mathcal{L}_{2^{k-1}n} f$ *è* $n\,2^{k-1}$, *se n è il grado del polinomio di Bernstein relativo ad f* ».

Successivamente FRENTIU [21] trovò una diversa combinazione lineari di polinomi di Bernstein $F_{nk} f$ di grado $n\,k$ e approssimante f con l'ordine di $0(n^{-k})$, se $f^{(2k)}$ è limitata. Lo stesso autore estese poi il risultato all'operatore di Mirakyan.

Dunque $L_{n,k} f$ (che è naturalmtene diversa da $\mathcal{L}_{2^{k-1}n} f$ e F_{nk}), unitamente alle sue derivate, ai fini dell'approssimazione, ha lo stesso comportamento di $\mathcal{L}_{2^{k-1}n} f$ e F_{nk} ; in più, nel caso sia un polinomio, ha grado $n < k\,n \leq n\,2^{k-1}$ $(n > 1)$.

Al fine di fare qualche applicazione della formula (5.3), osserviamo che le $\Gamma_{n,i}$ sono indipendenti dalla funzione e possono quindi calcolarsi una volta per tutte. D'altra parte si possono trovare semplici limitazioni per le $\| C_{n,i} \|$. Ad esempio, nel caso dell'operatore di Bernstein si ha:

$$\| C_{n,i} \| \leq 1 + (\| d^2_{n,i} \|/2 + i/2 - 1)\, 1^{(i,s/n)}$$

e nel caso dell'operatore di Baskakov si ottiene:

$$\| C_{n,p} \| \leq 1 + \left[\frac{a(a+1)}{2} \left(1 + \frac{p(p+1)}{n} \right) + s_2^{p+2}/n\, s_1^{p+2} + \right.$$
$$\left. + p \left(a - \frac{1}{2} \right) - 1 \right] 1^{(p,\,-1/n)} \quad (a > 1)$$

Per l'operatore di Mirakyan si ha infine:

$$\| C_{n,p} \| \leq \frac{a}{2} \left(1 + \frac{p}{a} + \frac{s_2^{p+2}}{a\, n\, s_1^{p+2}} \right)$$

e poiché, per ogni a e n fissati, è:

$$\| C_{n,i} \| < \| C_{n,i+1} \|$$

la (5.3) diventa:

$$(5.8) \qquad \| (R_{n,k} f)^{(p)} \| \leq \left(\frac{a}{2n} \right)^k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{2i}{a} + \frac{s_2^{2i+2}}{a n s_1^{2i+2}} \right) \| f^{(p)} \|_{2k}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] MIRAKYAN G., *Approximation des fonctions continues au moyen de polynome de la forme* ... Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 31 (1941).

[2] BASKAKOV V. A., *An example of a sequence of linear positive operator in the spaces of continuous functions.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 113 (1957).

[3] SZASZ O., *Generaliizatio of S. Bernstein's polynomials to infinite interval.* J. Res. Bur. Standards, 45 (1950).

[4] MEYER-KONING und ZELLER, *Bernsteinsche Potenzreihen.* Stud. Math., 19 (1960).

[5] SCHURER F., *On linear positive operator in approximation theory.* Doctoral dissertation, Uitgeverij Waltman, Delft 1965.

[6] LUPAS A., *On Bernstein Power Series.* Mathematica, Vol. 8 (31), 2 (1966).

[7] LUPAS, *Some properties of the linear positive Operator* (I). Mathematica, Vol. 9 (32), 1 (1967).

[8] LUPAS, *Some properties of the linear positive operator* (II). Mathematica, Vol. 9 (32), 2 (1967).

[9] A. JAKIMOVSKI and LEVIATAN, *Generalized Szasz operator for the approximation in the infinite interval.* Mathematica, Vol. 11 (34), 1 (1969).

[10] G. MASTROIANNI e M. R. OCCORSIO, *Una generalizzazione dell'operatore di Bernstein.* Rend. Accad. Scien. fis. etc. Napoli Ser. IV, Vol. XLIV (1977).

[11] G. MASTROIANNI e M. R. OCCORSIO, *Una generalizzazione dell'operatore di Stancu.* In corso di pubblicazione (1978).

[12] D. D. STANCU, *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators.* Rev. Roum. Math. Pur. et Appl. Tome XIII, n. 8, Bucarest (1968).

[13] E. VORONOVSKAJA, *Determination de la forme asimptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein.* Compte Rendus Acad. Sci. URSS (1932).

[14] G. MUIILBACH, *Operatoren von Bernsteinchen typ.* J. Approx. Th. 3 (1970).

[15] G. MASTROIANNI, *Sui resti di alcune formule lineari di approssimazione.* In corso di pubblicazione su CALCOLO.

[16] T. POPOVICTU, *Despre cea mai buna aproximatie a functiilor prin polinoame.* Cluij 1937.

[17] D. D. STANCU, *Sur l'approximation des derivées des fonctions par les derivées correspondantes de certains polynomes du type Bernstein.* Matematica, Vol. 2 (25), 2 (1960).

[18] S. KARLIN and Z. ZIEGLER, *Iteration of positive approximation operators.* Jour. of Approx. Theory 3 (1970).

[19] R. P. KELISKY and T. J. RIVLIN, *Iterates of Bernstein Polinomial.* Pacific J. Math., 21 (1967).

[20] P. L. BUTZER, *Linear combinations of Bernstein Polinomyals.* Canadian J. of Math., 5 (1953).

[21] M. FRENTIU, *Combinatii liniare de polinoame Bernstein si de operatori Mirakyan.* Mathematica-Meccanica, 1 (1970).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero G. Scorza Dragoni e C. Miranda.

Sugli stems sul cui quadrato esiste una involuzione

Nota di CELESTINA FERRERO COTTI *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 7 aprile 1979)

SUMMARY. — One study j-stems, namely near-rings N such that there is an involution on N^2. A special study is devoted to the j-stems that are sum of center and j-center (the j-center of N is thet set $K_j(N) = \{x \in N \mid j(xy) = yx$ and $j(yx) = xy, \forall y \in N\}$).

RIASSUNTO. — Si studiano j-stems, cioè stems N tali che esiste una involuzione su N^2. Approfondiamo in particolare il caso degli j-stems che sono somma di centro e j-centro (ove lo j-centro di N è l'insieme $K_j(N) = \{x \in N \mid j(xy) = yx$ e $(yx) = xy$, $\forall y \in N\}$).

INTRODUZIONE

Gli anelli con involuzione sono stati studiati da vari autori e di recente i risultati relativi a questa teoria sono stati raccolti da HERSTEIN in un trattato (cfr. [5]). Non sembra invece siano stati considerati gli stems con involuzione e neppure pare sia stato fatto nulla né sugli stems né sugli anelli sul cui quadrato è definita un'involuzione.

D'altronde i lavori sugli anelli con involuzione trovano un'importante applicazione nello studio delle algebre con operatori, delle algebre di Lie e delle algebre di Jordan ed anche dunque in varie questioni di analisi funzionali (cfr. ad es. [4], [10]).

La teoria degli stems, d'altra parte, trova notevoli applicazioni in analisi funzionale (cfr. ad es. [6], [7], [11]) e questo è abbastanza naturale dal momento che le funzioni di un gruppo G in sè, le funzioni continue da un gruppo topologico in sé e le funzioni differenziabili da $\mathbb{R}$ in sé costituiscono i più rilevanti esempi di stems. È dunque naturale che recentemente gli studi sugli stems si rivolgano in particolare verso gli stems con operatori, per il cui studio appare notevole la considerazione degli stems con involuzione.

* Istituto Matematico - Università - 43100, Parma. Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Con questo in mente abbiamo in [1] considerato gli stems in cui $x\,y = z\,t$ implica $y\,x = t\,z$ ed abbiamo ivi osservato che questo conduce in modo naturale allo studio degli stems N (che abbiamo chiamato J*-stems) in cui la $j^* : \sum_1^n{}_i\ x_i\,y_i \to \sum_1^n{}_i\ y_i\,x_i$ è un omomorfismo additivo, verificando che allora j^* risulta una involuzione sul quadrato di N.

Una prima naturale generalizzazione di [1] è costituita dallo studio degli stems N sul cui quadrato N^2 è definita una involuzione j; essi sono oggetto del presente lavoro: li chiameremo j-stems.

Abbiamo chiamato j-centro di uno j-stem N l'insieme $K_j(N) = \{x \in N \mid j(x\,y) = y\,x \text{ e } j(y\,x) = x\,y, \ \forall\, y \in N\}$ ed abbiamo osservato (Oss. 7) che, sotto opportune condizioni, lo j-centro di uno j-stem è uno J*-stem. Questo collega strettamente la presente ricerca con il lavoro [1].

Ha dunque senso affrontare il problema della decomponibilità di uno j-stem in somma del suo centro e del suo j-centro.

Dapprima proviamo (Th. 2) che se uno j-stem N possiede un non divisore dello zero a sinistra, allora esso è abeliano ed è estensione essenziale dell'anello (con involuzione) N^2 e che se $N^{(2)} = \{x\,y \mid x, y \in N\}$ è privo di nilpotenti ed N è uno j-stem, allora N è un anello con involuzione (Th. 3). Una costruzione effettiva (Th. 5) fornisce una classe abbastanza ampia di j-stems che risultano somma di centro e j-centro e nel Th. 7 e nel Cor. 2 proviamo che sotto opportune condizioni uno j-stem somma di centro e j-centro possiede immagini omomorfe che sono $\bar{j}$-stems somma di centro e $\bar{j}$-centro. Sfruttando infine il Teorema 4, nel quale proviamo che sotto opportune condizioni se uno stem N possiede una immagine omomorfa N/I che sia un anello con involuzione j allora esiste una involuzione $\bar{j}$ su N^2 (cioè N è uno $\bar{j}$-stem), mostriamo (utilizzando anche il Corollario 1) che se N/I è somma di centro e j'-centro allora N è uno $\bar{j}'$-stem distributivo somma di centro e $\bar{j}'$-centro (Th. 8).

1. - Sulla struttura degli j-stems

1. — Incominciamo a fissare la nomenclatura con la:

Definizione A. — *Sia* N *uno stem; diciamo antimorfismo involutorio o involuzione su* N *ogni automorfismo* j *del gruppo additivo* N^+ *di* N *che soddisfi alle*:

1. - $j(x\,y) = j(y) \cdot j(x), \ \forall\, x, y \in N$;

2. - $j^2 = i$ (*i identità di* N).

Inoltre se N è uno stem sinistro ad M un suo sottoinsieme, poniamo $M^{(2)} = \{x \cdot y \mid x, y \in M\}$ ed indichiamo con M^2 il sottostem di N generato da $M^{(2)}$. Indichiamo poi con $C(N) = \{x \in N \mid x\,y = y\,x,\ \forall\, y \in N\}$ il centro moltiplicativo di N e poniamo $A_d(N) = \{x \in N \mid y\,x = 0,\ \forall\, y \in N\}$, $A_s(N) = \{x \in N \mid x\,y = 0,\ \forall\, y \in N\}$ ed $A(N) = A_d(N) \cap A_s(N)$.

Diciamo che un $a \in N$ è un divisore dello zero a destra (sinistra) se $\exists\, y \in N \setminus \{0\}$ tale che $y\,a = 0$ ($a\,y = 0$). Chiaramente se in N esiste un non divisore dello zero a destra (sinistra) allora $A_s(N) = \{0\}$ ($A_d(N) = \{0\}$).

In tutto il lavoro chiameremo j-stem uno stem N *sul cui quadrato* N^2 *esista una involuzione j.*

Molto utilizzati nel seguito sono gli insiemi che vengono introdotti nella definizione che segue.

DEFINIZIONE B. — *Sia* N *uno j-stem; chiamiamo j-centro sinistro di* N *l'insieme* $k_{jl}(N) = \{x \in N \mid j(x\,y) = y\,x,\ \forall\, y \in N\}$; *j-centro destro l'insieme* $K_{jd}(N) = \{x \in N \mid j(y\,x) = x\,y,\ \forall\, y \in N\}$ *e j-centro l'insieme* $K_j(N) = K_{jl}(N) \cap K_{jd}(N)$.

Usando, senza esplicito richiamo, la nomenclatura di [9], si ha subito la:

OSSERVAZIONE 1. — *Uno j-stem* N *è zero-simmetrico ed il suo quadrato* N^2 *è distributivo.*

Infatti N^2 è distributivo perché, per $x, y, z \in N^2$, risulta:

$$j((x + y)\,z) = j(z) \cdot j(x + y) = j(z) \cdot j(x) + j(z) \cdot j(y) =$$
$$= j(x\,z) + j(y\,z) = j(x\,z + y\,z).$$

Ne segue subito che N è zero-simmetrico (oss. 1 di [3]).

OSSERVAZIONE 2. — *In uno j-stem* N *risulta* $K_{jl} = K_{jd} = K_j$.

Infatti se $x \in K_{jl}(N)$ allora risulta $x\,y = j^2(x\,y) = j(y\,x)$, $\forall\, y \in N$, e dunque $x \in K_{jd}(N)$ onde $K_{jl} \subseteq K_{jd}$.

L'inclusione opposta si mostra in modo analogo.

Le precedenti Osservazioni 1, 2 verranno spesso utilizzate senza esplicito richiamo.

OSSERVAZIONE 3. — *Sia* N *uno j-stem; allora*:

1. - *per* $x, y \in N$, $z \in K_j(N)$ *risulta* $(x + y)z = xz + yz$;
2. - $K_j^{(s)} \subseteq C(N)$ *per* s *pari e* $K_j^{(r)}(N) \subseteq K_j(N)$, *per* r *dispari*;
3. - *per* $x \in N$, $z, t \in K_j(N)$ *e per* $n \geq 2$, *risulta* $(xzt)^n = x^n z^n t^n$.

1. - Per $x, y \in N$, $z \in K_j(N)$ si ha $(x+y)z = j(z(x+y)) = j(zx + zy) = j(zx) + j(zy) = xz + yz$.
2. - Per $x \in N$ e $z, t \in K_j(N)$ si ha $j((tx)z) = ztx$ e $j(t(xz)) = xzt$ onde $(zt)x = x(zt)$ e $zt \in C(N)$.

Siano $z_1, \ldots, z_r \in K_j(N)$ (con r dispari): risulta $j(x(z_1 \cdot \ldots \cdot z_{r-1})z_r) = z_r \cdot x \cdot z_1 \cdot \ldots \cdot z_{r-1} = (z_r x) \cdot (z_1 \cdot \ldots \cdot z_{r-1}) = (z_1 \cdot \ldots \cdot z_r) \cdot x$ (perché $K_j^{(2)} \subseteq C(N)$ e $z_1 \cdot \ldots \cdot z_{r-1} \in C(N)$). Ne segue l'asserto

3. - Procediamo per induzione sull'intero n: l'affermazione vale per $n = 2$; infatti, per $x \in N$ e $z, t \in K_j(N)$, risulta $(xzt)^2 = x(zt)x(zt) = x^2(zt)(zt) = x^2 z(zt)t = x^2 z^2 t^2$ perché $k_j^{(2)} \subseteq C(N)$).

Sia, per ipotesi induttiva, $(xzt)^n = x^n z^n t^n$; allora risulta $(xzt)^{n+1} = x^n z^n t^n xzt = x^n z^n zt t^n x = x^n z^{n+1} t^{n+1} x$; ma $z^{n+1} t^{n+1} \in C(N)$: si ha l'asserto.

Per induzione l'affermazione vale per ogni $n \geq 2$.

OSSERVAZIONE 4. — *In uno j-stem* N *risulta* $A(N) \subseteq C(N) \cap K_j(N)$.

È ovvio che $A(N) \subseteq C(N)$; d'altra parte se $x \in A(N)$, allora, per $y \in N$, è $j(xy) = j(0) = 0 = yx$ e dunque $x \in K_j(N)$.

OSSERVAZIONE 5. — *Sia* N *uno stem e* j *una involuzione su* N; *risulta* $j(N^k) = N^k$, *quanlunque sia l'intero* k.

Infatti è $j(N^k) \subseteq N^k$ perché $j(\sum_1^n{}_i\, x_i^1 \cdot x_i^2 \cdot \ldots \cdot x_i^k) = \sum_1^n{}_i\, j(x_i^k) \cdot j(x_i^{k-1}) \cdot \ldots \cdot j(x_i^1)$; inoltre risulta $N^k \subseteq j(N^k)$ perché $j^2 = i$.

2. — Possiamo ora dare alcuni teoremi di struttura.

TEOREMA 1. — *Uno j-stem* N *un cui elemento non divide lo zero a sinistra è abeliano.*

Se a è un non divisore dello zero a sinistra di N, lo è anche a^3; poiché N^2 è distributivo, N^4 è un anello (cfr. [9], prop. 1.107) e dunque risulta $a^3(x + y) = a^3 x + a^3 y = a^3 y + a^3 x = a^3(y + x)$ onde $x + y = y + x$.

In analogia con la teoria degli anelli e dei semigruppi (cfr. per es. [8]), conviene dire che uno stem N è *estensione* di uno stem N' se N' è un ideale di N e dire che N è *estensione* essenziale di N' se N' è un *ideale essenziale* di N, vale a dire se $N' \cap I \neq \{0\}$, qualunque sia l'ideale $I \neq \{0\}$ di N.

TEOREMA 2. — *Uno j-stem* N *che possiede un non divisore dello zero a sinistra è una estensione essenziale dell'anello* N^2.

È immediato vedere che N^2 è un ideale di N perché N^+ è abeliano (Teorema 1). Sia a un non divisore dello zero a sinistra di N e sia I un ideale proprio di N tale che $I \cap N^2 = \{0\}$. Risulta $N^2 I = \{0\}$ e dunque $N I \subseteq A_d(N)$; visto che $A_d(N) = \{0\}$ perché N possiede un non divisore dello zero a sinistra, risulta $N I = \{0\}$ onde $I \subseteq A_d(N) = \{0\}$ ed $I = \{0\}$. Inoltre N^2 è un anello per la Oss. 1 e per il Th. 1.

OSSERVAZIONE 6. — *Se* N *è un anello con involuzione lo è anche* N/A(N). *Se inoltre* N^2 *è privo di nilpotenti non nulli lo è anche* N/A(N).

Sia j una involuzione su N; l'ideale A(N) risulta uno j-ideale (nel senso che $j(A(N)) \subseteq A(N)$, cfr. per es. [5]) perché per $x \in A(N)$ ed $y \in N$ si ha $xy = yx = 0$ e dunque $j(y)j(x) = j(x)j(y) = 0$ onde $j(x) \in A(N)$ perché $j(N) = N$.

Ne segue che N/A(N) è un anello con involuzione: infatti la $j^* : N/A(N) \to N/A(N)$ definita da $x + A(N) \to j(x) + A(N)$ è, come subito si verifica, una involuzione su N/A(N). Inoltre (in virtù della oss. 3 punto 2 e della oss. 3 di [3]) A(N) contiene i nilpotenti di N e dunque N/A(N) è privo di nilpotenti non nulli.

TEOREMA 3. — *Uno j-stem* N *tale che* $N^{(2)}$ *sia privo di nilpotenti non nulli è un anello con involuzione che coincide col proprio quadrato.*

Visto che (Oss. 1) N è zero-simmetrico possiamo applicare il corollario 2 di [3]; risulta pertanto $N = N^2$. Ne segue che N è un anello con involuzione (cfr. anche [9] prop. 1.107).

3. — Il teorema 4, che segue (che può essere inteso come un parziale inverso del precedente Teorema 3), mostra anche l'esistenza di j-stems non banali.

TEOREMA 4. — *Sia* N *uno stem e sia* I *un ideale di* N *con* $I \cap N^2 = \{0\}$. *Se* N/I *è un anello con una involuzione* j *allora* N *è distribu-*

tivo ed N^2 *è un anello con una involuzione* $\bar{j}$ *tale che* $\forall\, \bar{x} \in N^2$ *si abbia* $\bar{j}(\bar{x}) + I = j(\bar{x} + I)$ [1].

Poiché per ipotesi N/I è un anello risulta, $\forall\, x, y, z \in N$, $(x+y)z - yz - xz \in I \cap N^2 = \{0\}$, onde N è *distributivo*; ne segue che N^2 *è un anello* (cfr. [9] prop. 1.107).

Sia j una involuzione su N/I ed osserviamo che ovviamente $(N/I)^2 = \{x + I \mid x \in N^2\}$ e che, per l'Osservazione 5, $j((N/I)^2) = (N/I)^2$.

Sia $\bar{x} + I \in (N/I)^2$, $\bar{x} \in N^2$; *dimostriamo che* $(\bar{x} + I) \cap N^2 = \bar{x}$.

Infatti $\bar{x} \in (\bar{x} + I) \cap N^2$ ed inoltre se $\bar{y} \in (\bar{x} + I) \cap N^2$ allora $\bar{x} - \bar{y} \in I \cap N^2 = \{0\}$ e dunque $\bar{x} = \bar{y}$.

Per questo e perché j è una involuzione su N/I ha senso considerare la *funzione* $\bar{j} : N^2 \to N^2$ definita dalla $\bar{j}(\bar{x}) = j(\bar{x} + I) \cap N^2$, $\bar{x} \in N^2$.

Intanto $\bar{j}^2 = i$: infatti per $x \in N^2$ risulta $\bar{j}(x) = j(x + I) \cap N^2$ e posto $\bar{j}(x) = x' = j(x + I) \cap N^2$ risulta $x' + I = j(x + I)$ e dunque $j(x' + I) = x + I$ (perché $j^2 = i$). Abbiamo allora $\bar{j}^2(x) = \bar{j}(\bar{j}(x)) = \bar{j}(x') = j(x' + I) \cap N^2 = (x + I) \cap N^2 = x$.

Dunque $\bar{j}$ è una biiezione di N^2 in sé; la $\bar{j}$ conserva la somma perché, posto $x' = j(x + I) \cap N^2$ ed $y' = j(y + I) \cap N^2$ $(x, y \in N^2)$ possiamo scrivere $\bar{j}(x) + \bar{j}(y) = x' + y'$ mentre risulta $\bar{j}(x + y) = (j(x + I) + j(y + I)) \cap N^2$. Ne segue che esistono elementi $i, i' \in I$ tali che $\bar{j}(x + y) = (j(x + I) + j(y + I)) \cap N^2 = x' + i + y' + i' = x' + y' - y' + i + y' + i' = x' + y' + 0 = \bar{j}(x) + \bar{j}(y)$, visto che $-y' + i + y' + i' \in N^2 \cap I = \{0\}$ (ricordando che I è un sottogruppo normale del gruppo additivo N^+ di N e che, per le posizioni fatte, risulta $x' + i + y' + i' \in N^2$ ed anche $-y' - x' \in N^2$). Mostriamo che $\bar{j}(xy) = \bar{j}(y) \cdot \bar{j}(x)$, $(x, y \in N^2)$: infatti, con le posizioni precedenti, esistono elementi $\bar{\imath}, \bar{\imath}' \in I$ tali che $(y' + \bar{\imath}) \cdot (x' + \bar{\imath}) = (j(y + I) \cdot j(x + I)) \cap N^2 = j(xy + I) \cap N^2$; d'altra parte $(y' + \bar{\imath}) \cdot (x' + \bar{\imath}') = y'x' + y'\bar{\imath}' + \bar{\imath}x' + \bar{\imath}\bar{\imath}' = y'x' = (j(y + I) \cap N^2) \cdot (j(x + I) \cap N^2) = \bar{j}(y) \cdot \bar{j}(x)$ ricordando che N è distributivo e che $y'\bar{\imath}'$, $\bar{\imath}x'$, $\bar{\imath}\bar{\imath}'$ sono elementi di $N^2 \cap I = \{0\}$).

Infine sia $\bar{j}(\bar{x}) = j(\bar{x} + I) \cap N^2$ con $\bar{x} \in N^2$; allora $j(\bar{x} + I) = \bar{j}(\bar{x}) + I$ e dunque la $\bar{j}$ individua la restrizione di j ad $(N/I)^2$, restrizione che, in virtù della Osservazione 5, risulta ancora una involuzione su $(N/I)^2$.

COROLLARIO 1. — *Sia* N *uno stem e sia* I *un suo ideale tale che* $I \cap N^2 = 0$. *Se* N/I *è uno* j*-anello, allora* N^2 *è un anello ed* N *è uno* $\bar{j}$*-stem distributivo ove* $\bar{j} : N^2 \to N^2$ *è definita dalla* $\bar{j}'(x) = j'(x + I) \cap N^2$.

[1] La dimostrazione del teorema permette di costruire effettivamente una tale $\bar{j}$.

Basta ripetere la dimostrazione del Teorema 4, partendo dalla restrizione j' ad $(N/I)^2$ di j; la j' risulta infatti una involuzione su $(N/I)^2$ per la Osservazione 5.

2. - STEMS SOMMA DI CENTRO E j-CENTRO

4. — Passiamo ora allo studio della decomponibilità di uno j-stem N in somma dal suo centro e del suo j-centro, iniziando con la costruzione di una notevole classe di stems soddisfacenti alla condizione che ci interessa.

LEMMA 1. — *Lo j-centro $K_j(N)$ di uno j-stem distributivo N è un ideale se e solo se*

$$x\,y\,z = z\,x\,y \quad e \quad x\,z\,y = y\,x\,z \quad per \quad x, y \in N, z \in K_j(N).$$

Se $K_j(N)$ è un ideale di N, è $K_j(N) \cdot N \subseteq K_j(N)$ ed $N \cdot K_j(N) \subseteq K_j(N)$ (perché N è distributivo); ne segue che, per $x, y \in N$, $z \in K_j(N)$ si ha $j(x(y\,z)) = (y\,z)\,x = y(z\,x) = j((z\,x)\,y)$ onde $(x\,y)\,z = z(x\,y)$ (perché j è iniettiva), che è una parte delle tesi; l'altra si dimostra in modo analogo.

Viceversa se, $\forall\, x, y \in N$ e $\forall\, z \in K_j(N)$, è $(x\,y)\,z = z(x\,y)$ e $(x\,z)\,y = y(x\,z)$ risulta $j((x\,z)\,y) = j(y(x\,z)) = j((y\,x)\,z) = z(y\,x) = (y\,x)\,z = y(x\,z)$; dunque $N \cdot K_j(N) \subseteq K_j(N)$. Analogamente si mostra che $K_j(N) \cdot N \subseteq K_j(N)$. Per la distributività di N, $K_j(N)$ risulta normale in N^+ [2] e tutto è dimostrato.

In [1] abbiamo chiamato J^*-stem uno stem (sinistro) N in cui la $j^* : N^2 \to N^2$ definita dalla $j^* \sum_1^n x_i\,y_i = \sum_1^n y_i\,x_i$ è un omomorfismo additivo. Si osserva che banalmente uno J^*-stem è uno j^*-stem [3].

TEOREMA 5. — *Siano N uno j-stem commutativo ed N^* uno J^*-stem; sia $N' = N \oplus N^*$. Allora N'^2 è un anello su cui esiste una involuzione j' tale che $K_{j'}(N') = K_j(N) \oplus N^*$ ed inoltre $K_{j'}(N')$ e $C(N')$ risultano ideali di somma N'.*

Incominciamo con l'osservare che, poiché N, N^* sono distributivi [4], tale risulta anche $N' = N \oplus N^*$; inoltre ovviamente $N'^2 = N^2 \oplus N^{*2}$.

[2] Infatti $\forall\, x \in K_j(N)$ e $\forall\, x, y \in N$ risulta $j(y(x + z - x)) = j(y\,x + y\,z - y\,x) = j(y\,x) + j(y\,z) - j(y\,x) = j(y\,z) = z\,y = (x + z - x) \cdot y$.

[3] Abbiamo costruito in [1] classi di J^*-stems non banali; qui indichiamo l'involuzione con j^* anziché con j (come in [1]) per evitare equivoci.

[4] La distributività di N^* segue dalla oss. 3 di [1].

Si ha dunque che N'^2 è un anello (cfr. [9] prop. 1.107).

Considerata ora la $j' : N'^2 \to N'^2$ definita da $j'(< x, y >) = < j(x), j^*(y) >$, si vede subito che j' risulta una involuzione su N'^2 e dunque N' è uno j'-stem.

Dimostriamo che $K_{j'}(N') = K_j(N) \oplus N^*$: ovviamente $K_j(N) \oplus N^* \subseteq K_{j'}(N')$ ed inoltre se $< a, b > \in K_{j'}(N')$ allora $b \in N^*$ per ipotesi ed inoltre, per $< z, t > \in N'$, risulta $j'(< a, b > < z, t >) = < z, t > < a, b > = < z\,a, t\,b > = j'(< a\,z, b\,t >) = < j(a\,z), j^*(b\,t) >$. Di qui $j(a\,z) = z\,a\ (\forall\, z \in N)$ e perciò $a \in K_j(N)$ e dunque $K_{j'}(N') \subseteq K_j(N) \oplus N^*$.

Ora possiamo affermare che $K_{j'}(N')$ è un ideale di N' perché $K_j(N)$ è un ideale di N (per il Lemma 1, qui applicabile perché N è commutativo).

Poiché ovviamente $C(N') = N \oplus C(N^*)$ e $C(N^*)$ è un ideale di N^* (teorema 11 di [1]), si ha che $C(N')$ risulta un ideale di N'.

Infine, visto che $C(N') \supseteq N$ e $K_{j'}(N') \supseteq N^*$, si ha subito $N' = C(N') + K_{j'}(N')$.

OSSERVAZIONE 7. — *Lo j-centro* $K_j(N)$ *di uno j-stem* N *è uno* J^**-stem se e solo se*

$$(x - y)\,z = x\,z - y\,z \quad e \quad y\,z\,x = z\,x\,y, \quad per \quad x, y \in K_j(N) \quad e \quad z \in N.$$

Se $K_j(N)$ è uno J^*-stem è un sottostem di N e pertanto $x - y \in K_j(N)\ (\forall\, x, y \in K_j(N))$. Ne segue che risulta $j(z(x - y)) = (x - y) \cdot z\ (\forall\, z \in N)$ ed anche $j(z(x - y)) = x\,z - y\,z$; per confronto si ottiene la prima delle relazioni da provare.

Inoltre, con le stesse posizioni, $j(z(xy)) = xyz$ (perché $K_j^2(N)$ deve essere contenuto in $K_j(N)$); ma $j(z(x\,y)) = j((z\,x)\,y) = y\,z\,x$. Per confronto si ha $x\,y\,z = y\,z\,x$ e tenendo presente che $K_j^2(N) \subseteq C(N)$, si ha $x\,y\,z = z\,x\,y$; ancora per confronto si ottiene la seconda relazione.

Sia, *viceversa*, per $x, y \in K_j(N)$ e $z \in N$, $(x - y)\,z = x\,z - y\,z$ e $y\,z\,x = z\,x\,y$. Allora $j(z(x - y)) = j(z\,x - z\,y) = j(z\,x) - j(z\,y) = x\,z - y\,z = (x - y)\,z$ onde $K_j(N)$ è un sottogruppo del gruppo additivo N^+ di N.

Inoltre $j(z\,x\,y) = j((z\,x)\,y) = y\,z\,x = z\,x\,y$ ed $x\,y \in K_j(N)$. Ne segue che $K_j(N)$ è uno stem; inoltre, per $x, y \in K_j(N)$, si ha $j(x\,y) = y\,x$ onde la restrizione di j a $K_j^2(N)$ coincide con la j^* definita in [1] e tale restrizione risulta un omomorfismo additivo: dunque $K_j(N)$ risulta uno J^*-stem.

5. — Vogliamo ora occuparci più in generale di j-stems somma del proprio centro e del proprio j-centro.

OSSERVAZIONE 8. — *Sia* N *uno j-stem somma di centro e j-centro;* N^2 *è un anello se, e solo se,* N *è distributivo.*

Sia N^2 un anello e siano $x, y, z \in N$ con $z = c + k$, per $c \in C(N)$ e $k \in K_j(N)$. Ricordando anche la precedente Oss. 3, risulta $(x + y)z = (x + y)(c + k) = (x + y)c + (x + y)k = xc + yc + xk + yk = xc + xk + yc + yk = x(c + k) + y(c + k) = xz + yz$ onde N è distributivo. L'inverso è conseguenza della proposizione 1.107 di [9].

Grazie a questa osservazione nel seguito, considerando *j*-stems somma di centro e *j*-centro, potremo trattare come condizioni equivalenti la distributività e la richiesta che il quadrato sia un anello.

LEMMO 2. — *Sia* N *uno j-stem distributivo somma di centro e j-centro;* C(N) *è un ideale di* N *se e solo se* $N^2 \subseteq C(N)$.

Sia infatti C(N) un ideale di N; ricordato che $K_j^{(2)}(N) \subseteq C(N)$ (Oss. 3) e posto $x = c + k$, $y = c' + k'$ (con $c, c' \in C(N)$ e $k, k' \in K_j(N)$) risulta $xy = (c + k)(c' + k') = cc' + ck' + kc' + kk' \in C(N)$ onde $N^2 \subseteq C(N)$.

Sia, *viceversa*, $N^2 \subseteq C(N)$; allora $N \cdot C(N) = C(N) \cdot N \subseteq N^2 \subseteq C(N)$; inoltre $C(N)^+$ è un sottogruppo normale di N^+ perché, essendo N distributivo, N^2 è un anello e dunque, per $c \in C(N)$ ed $x, y \in N$, si ha $y(x + c - x) = yx + yc - yx = yc = cy = (x + c - x)y$.

TEOREMA 6. — *Sia* N *un j-stem e sia* $\bar{N} = \varphi(N)$ *una immagine omomorfa di* N. *Per* $x' \in \bar{N}^2$ *sia* $x \in N^2$ *tale che* $\varphi(x) = x'$; *la corrispondenza* $\bar{j}$ *da* $\bar{N}^2$ *a* $\bar{N}^2$ *che associa* $\varphi(j(x))$ *ad* x' *è una involuzione su* $\bar{N}^2$ *se e solo se* $j(\operatorname{Ker}\varphi \cap N^2) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$.

Sia $\bar{N} = \varphi(N)$ una immagine omomorfa di N tale che $j(\operatorname{Ker}\varphi \cap N^2) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$. Visto che $\bar{N}^2 = (\varphi(N))^2 = \varphi(N^2)$, $\forall x' \in \bar{N}^2$ esiste almeno un $x \in N^2$ tale che $\varphi(x) = x'$. Inoltre se $\varphi(x) = \varphi(\bar{x})$ $(x, \bar{x} \in N^2)$ è $x - \bar{x} \in \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$ e dunque $j(x - \bar{x}) \in \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$ onde $\varphi(j(x - \bar{x})) = \varphi(j(x)) - \varphi(j(\bar{x})) = 0$ e $\varphi(j(x)) = \varphi(j(\bar{x}))$.

Possiamo dunque considerare la funzione $\bar{j}$: $\bar{N}^2 \to \bar{N}^2$ definita ponendo $\bar{j}(x') = \varphi(j(x))$ per $x \in \bar{N}^2$ tale che $x' = \varphi(x)$. Risulta $\bar{j}^2 = i$: infatti, con le posizioni precedenti, si ha $\bar{j}^2(x') = \bar{j}(\varphi(j(x)))$; posto $x'' = \varphi(j(x))$ esiste almeno un $\bar{x}'' \in N^2$ tale che $x'' = \varphi(\bar{x}'')$ e dunque risulta $\varphi(j(x)) = \varphi(\bar{x}'')$ onde $j(x) - \bar{x}'' \in \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$ ed anche $x - j(\bar{x}'') \in \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$. Ne segue che $\varphi(x) = \varphi(j(\bar{x}''))$ e pertanto $\bar{j}^2(x') = \bar{j}(\varphi(j(x))) = \varphi(j(\bar{x}'')) = \varphi(x) = x'$.

Ora, $\forall x', y' \in \bar{N}^2$, $\exists x, y \in \bar{N}^2$ tali che $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$, e $\bar{j}(x' + y') = \varphi(j(x + y)) = \varphi(j(x)) + \varphi(j(y)) = \bar{j}(x') + \bar{j}(y')$. Analogamente si vede che $\bar{j}(x'y') = \bar{j}(y')\bar{j}(x')$; $\bar{j}$ è una involuzione su $\bar{N}^2$.

Sia *viceversa*, per $x' \in \bar{N}^2$ ed $x \in N^2$ tale che $x' = \varphi(x)$, $\bar{j}(x') = \varphi(j(x))$ una involuzione su $\bar{N}^2$. Se $\varphi(x) = \varphi(\bar{x})$ $(x, \bar{x} \in N^2)$ allora $\varphi(j(x)) = \varphi(j(\bar{x}))$. Sia $y \in \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$;risulta $\varphi(y) = \varphi(0)$ onde $\varphi(j(y)) = \varphi(j(0)) = 0$ e perciò $j(y) \in \operatorname{Ker}\varphi$ e $j(y) \in N^2$ in quanto j è una involuzione su N^2. Ne segue che $j(\operatorname{Ker}\varphi \cap N^2) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$.

TEOREMA 7. — *Sia* N *uno j-stem somma di centro e j-centro. Se* $\bar{N} = \varphi(N)$ *è una immagine omomorfa di* N *con* $j(\operatorname{Ker}\varphi \cap N^2) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$ *allora esiste una involuzione* $\bar{j}$ *su* $\bar{N}^2$ *tale che* $\bar{N}$ *è uno* $\bar{j}$*-stem somma di centro e* $\bar{j}$*-centro.*

Nel precedente Teorema 6 è stata infatti definita una involuzione $\bar{j}$ su $\bar{N}^2$ tale che $\bar{N}$ è uno $\bar{j}$*-stem.*

Inoltre, per ipotesi, $N = C(N) + K_j(N)$ e dunque $\bar{N} = \varphi(N) = \varphi(C(N)) + \varphi(K_j(N))$. D'altra parte, ovviamente, $\varphi(C(N)) \subseteq C(\bar{N})$ e $\varphi(K_j(N)) \subseteq K_{\bar{j}}(\bar{N})$ perché se $z \in K_j(N)$ ed $x \in N$, risulta $\bar{j}(\varphi(z) \cdot \varphi(x)) = \bar{j}(\varphi(zx)) = \varphi(j(zx)) = \varphi(xz) = \varphi(x) \cdot \varphi(z)$; perciò $\varphi(z) \in K_{\bar{j}}(\bar{N})$ perché, essendo la φ suriettiva, $\varphi(x)$ descrive tutto $\bar{N}$. Dunque $\bar{N} = C(\bar{N}) + K_{\bar{j}}(\bar{N})$.

OSSERVAZIONE 8. — *Sia* N *uno j-stem distributivo, somma di centro e j-centro e sia* $\bar{N} = \varphi(N)$ *una sua immagine omomorfa tale che* $j(\operatorname{Ker}\varphi \cap N^2) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$. *Se* $C(N)$ *e* $K_j(N)$ *sono ideali di* N *allora* $C(\bar{N})$ *e* $K_{\bar{j}}(\bar{N})$ *sono ideali dello* $\bar{j}$*-stem* $\bar{N}$ *individuato come nel Teorema* 6.

Intanto $\bar{N}$ è uno $\bar{j}$-stem somma di centro e $\bar{j}$-centro in virtù del Teorema 7 e risulta distributivo perché lo è N. Sia $C(N)$ un ideale di N, allora $C(\bar{N})$ risulta un ideale di $\bar{N}$ in virtù del Lemma 2 in quanto $N^2 \subseteq C(N)$ e dunque $\bar{N}^2 = \varphi(N^2) \subseteq \varphi(C(N)) \subseteq C(\bar{N})$.

Anche $K_{\bar{j}}(N)$ è un ideale di $\bar{N}$ perchè, essendo $\bar{N}^2 \subseteq C(\bar{N})$, valgono le relazioni del Lemma 1 ed inoltre $\bar{N}$ è distributivo.

Un caso particolare notevole può essere enunciato nascondendo l'ipotesi aggiuntiva $j(\operatorname{Ker}\varphi \cap N^2) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \cap N^2$ e meglio segnala la portata del Teorema 7.

COROLLARIO 2. — *Sia* N *uno j-stem distributivo somma di centro e j-centro. Esiste una immagine omomorfa* $\bar{N}$ *di* N *ed una involuzione* $\bar{j}$ *su* $\bar{N}^2$ *tale che* $\bar{N}$ *è uno* $\bar{j}$*-anello somma di centro e* $\bar{j}$*-centro.*

Poiché N è distributivo, $A(N^2)$ risulta un ideale di N che contiene il derivato N' di N^+. Se $A(N^2) = \{0\}$ allora N è un anello e l'asserto segue dal Teorema 7 per $\bar{N} = N$.

Sia $A(N^2) \neq \{0\}$; si verifica subito che $j(A(N^2) \cap N^2) \subseteq A(N^2) \cap N^2$ e dunque $\bar{N} = N/A(N^2)$ è una immagine omomorfa di N soddisfacente alle ipotesi del Teorema 7 ed inoltre $\bar{N}$ è un anello. Di qui e dal Teorema 7 segue subito l'asserto.

Un parziale inverso del Corollario 2 e in un certo senso anche del Teorema 3 è fornito dal

TEOREMA 8. — *Sia* N *uno stem ed* I *un suo ideale con* $I \cap N^2 = \{0\}$. *Se* $\bar{N} = N/I$ *è un* j'*-anello somma di centro e* j'*-centro, allora esiste una involuzione* $\bar{j}'$ *su* N^2 *tale che* N *risulta uno* $\bar{j}'$*-stem distributivo somma di centro e* $\bar{j}'$*-centro.*

Incominciamo con l'osservare che, in virtù del Corollario 1, N risulta uno $\bar{j}'$-stem distributivo, con $\bar{j}'(x) = j'(x + I) \cap N^2$ per $x \in N^2$. *Dimostriamo che* $I \subseteq C(N) \cap K_{\bar{j}'}(N)$: infatti, per $x \in N$ e $i \in I$, si ha $\bar{j}'(x\,i) = j'(x\,i + I) \cap N^2 = j'(I) \cap N^2 = I \cap N^2 = \{0\}$ e pertanto $\bar{j}'(x\,i) = 0$.

Visto che $\bar{j}'$ è una involuzione, riesce $i\,x = x\,i = 0$ ($\forall\, x \in N$, $\forall\, i \in I$) e dunque $I \subseteq A(N)$; ma $A(N) \subseteq C(N) \cap K_{\bar{j}'}(N)$ (Oss. 4), da cui si ha l'asserto.

Risulta $C(\bar{N}) = C(N)/I$: infatti ovviamente $C(N)/I \subseteq C(\bar{N})$ e $C(\bar{N}) \subseteq C(N)/I$ perché se $x + I \in C(\bar{N})$ allora ($\forall\, z \in N$) si ha $(x + I)(z + I) = (z + I)(x + I)$ e dunque $x\,z - z\,x \in I \cap N^2 = \{0\}$ onde $x \in C(N)$ e $x + I \in C(N)/I$.

Inoltre $K_{j'}(\bar{N}) = K_{\bar{j}'}(N)/I$: infatti se $x + I \in K_{\bar{j}'}(N)/I$ risulta, per $z + I \in N/I$, $\bar{j}'(x\,z) = j'(x\,z + I) \cap N^2 = z\,x$ (perché $x \in K_{\bar{j}'}(N)$) e dunque $z\,x \in j'(x\,z + I)$ onde $j'(x\,z + I) = z\,x + I$.

Ne segue che $K_{\bar{j}'}(N)/I \subseteq K_{j'}(\bar{N})$. Sia ora $y + I \in K_{j'}(\bar{N})$; allora ($\forall\, z \in N$) risulta $j'(y\,z + I) = z\,y + I$. Ne segue che $\bar{j}'(y\,z) = j'(y\,z + I) \cap N^2 = (z\,y + I) \cap N^2 = z\,y$ onde $y \in K_{\bar{j}'}(N)$ ed $y + I \in K_{\bar{j}'}(N)/I$, onde $K_{j'}(\bar{N}) = K_{\bar{j}'}(N)/I$.

Visto che per ipotesi risulta $\bar{N} = C(\bar{N}) + K_{j'}(\bar{N})$ si ha $N/I = C(N)/I + K_{\bar{j}'}(N)/I$ e cioè $N/I = (C(N) + K_{\bar{j}'}(N))/I$.

Sia $z \in N$ e consideriamo $z + I \in N/I$; esistono allora un $c \in C(N)$ ed un $k \in K_{\bar{j}'}(N)$ tali che $z + I = (c + k) + I$. Ne segue che $z - (c + k) \in I \subseteq C(N)$ e dunque esiste un $\bar{c} \in C(N)$ tale che $z - (c + k) = \bar{c}$. Si ha dunque $z = \bar{c} + c + k$ e questo basta per concludere che $N = C(N) + K_{\bar{j}'}(N)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] FERRERO COTTI C., *Sugli stems in cui la corrispondenza* $x\,y \to y\,x$ *è una funzione*, Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, (2), **44** (1977), 265-277.

[2] FERRERO COTTI C., *Quozienti di stems rispetto a particolari annullatori*, Riv. Mat. Univ. Parma, (4), **4** (1978).

[3] FERRERO COTTI C., *Sugli stems il cui semigruppo moltiplicativo possiede un ideale con proprietà commutative deboli*, Rend. Sem. Math. Univers. Politec. Torino, **36** (1977-78).

[4] HARPE P., *Classical Banach-Lie Algebras and Banach-Lie Groups of Operators in Hilbert Space*, Lecture Notes in Math., 285, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[5] HERSTEIN N. I., *Rings with involution*, Chicago Lectures in Math., Chicago Univ. (1976).

[6] NEUBERGER J. W., *Toward a characterization of the identity component of rings and nears-rings continuous transformations*, J. Reine Angew. Math., **238** (1969), 100-104.

[7] NEUBERGER J. W., *Differentiability of the exponential of a member of a near-ring*, Proc. Amer. Math. Soc., **48** (1975), 98-100.

[8] PETRICH M., *Rings and semigroups*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin (1974).

[9] PILZ G., *Near-rings*, North-Holland, N. Y. (1977).

[10] TOPPING D., *Transcendental quasinilpotents in operator algebras*, J. Functional Analysis, **2** (1968), 342-351.

[11] YAMAMURO S., *A note on near-ring of mapping*, J. Austr. Math. Soc. **16** (1973), 214-215.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e G. Panella.

Le derivate di ordine frazionario e gli spazi $W_o^s(\Omega)$

Nota di LOREDANA BIACINO e DORIANO MISERENDINO (a Napoli) *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 7 aprile 1979)

SOMMARIO. — In questo lavoro introduciamo le derivate di ordine generalizzato per le distribuzioni in R^2 e caratterizziamo gli spazi di Sobolev di ordine frazionario $W_o^s(\Omega)$ mediante tali derivate.

SUMMARY. — In this paper derivatives of generalized order for distributions on R^2 are introduced; in terms of such derivatives it is checked a characterization of the Sobolev spaces of fractional order $W_o^s(\Omega)$.

INTRODUZIONE

GUELFAND e CHILOV in [2] definiscono la derivata di ordine generalizzato complesso: $D^\lambda g$, $\lambda \in C$, per una qualsiasi distribuzione g in R con supporto sul semiasse $x \geq 0$.

Nel presente lavoro prendiamo le mosse da questa definizione per introdurre le derivate parziali di ordine generalizzato per una distribuzione in R^2 con supporto contenuto in un qualsiasi semipiano del tipo $x + y \geq a$ con $a \in R$.

Il risultato più importante a cui perverremo sarà una caratterizzazione dello spazio di Sobolev di ordine frazionario $W_o^s(\Omega)$, $s \in R_o^+$, con tali derivate di ordine generalizzato:

se $s \in R_o^+$ ed $s - \frac{1}{2}$ non è intero, e se Ω è un aperto limitato e sufficientemente regolare, $W_o^s(\Omega)$ è costituito da tutte e sole le funzioni di $L^2(R^2)$ con supporto contenuto in $\bar{\Omega}$ e con derivate di ordine generalizzato $D^\alpha u$, con $\alpha \in R_o^+ \times R_o^+$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq s$, sommabili L^2 in R^2.

Dimostreremo poi che per una $u \in W_o^s(\Omega)$, tali derivate di ordine generalizzato $D^\alpha u$ sono dotate di tracce a quadrato sommabile

* Istituto Matematico « R. Caccioppoli ».

sulla frontiera di Ω per $\alpha \in R_o^+ \times R_o^+$, e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 < s - \frac{1}{2}$, e che tali tracce non sono necessariamente nulle, a differenza di quanto accade per le derivate di ordine intero.

Infine studieremo un problema associato ad una forma bilineare in cui compaiono derivate d'ordine generalizzato.

La materia è così suddivisa:

nel n. 1 viene richiamata la definizione di derivata d'ordine generalizzato complesso così come è esposta nel già citato testo di Guelfand e Chilov e vengono esposte certe nozioni di cui si farà uso;

nel n. 2 si dà la definizione di derivata parziale di ordine generalizzato per le distribuzioni in R^2 e si dimostrano alcune proprietà di cui tali derivate godono;

nei numeri 3 e 4 si introducono vari spazi funzionali e si perviene alla caratterizzazione di $W_o^s(\Omega)$ di cui si è detto;

nel n. 5 si estende la diseguaglianza di Gårding ad una forma bilineare in cui compaiono derivate di ordine frazionario e si studia un problema associato a tale forma bilineare.

1. - Alcuni richiami

Guelfand e Chilov in [2] definiscono la derivata di ordine generalizzato $\lambda \in C$ [1] per una qualunque distribuzione $g(x)$ con supporto contenuto nel semiasse $x \geq 0$ mediante la posizione:

$$\frac{d^\lambda g}{d x^\lambda} = g * \Phi_{-\lambda} \tag{1.1}$$

dove:

$$\Phi_\lambda = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \tag{1.2}$$

Al fine di una più agevole lettura del lavoro, conviene richiamare con qualche dettaglio i fatti principali attinenti alla definizione (1.1).

Nella (1.2) x_+^λ è la distribuzione corrispondente alla funzione:

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

[1] Quando $\lambda \in R$ useremo l'espressione « ordine frazionario ».

La (1.3) definisce, per $Re\,\lambda > -1$, un funzionale regolare:

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in C_o^\infty(R)$$

che si prolunga, per $Re\,\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$ mediante la posizione:

$$(1.4) \qquad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1}$$

Infatti il secondo membro della (1.4) è definito per $Re\,\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$ e fornisce una regolarizzazione dell'integrale $\int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx$ in quanto ad esso si riduce nel caso di una φ nulla in un intorno dell'origine.

In maniera analoga si prolunga x_+^λ nel semipiano $Re\,\lambda > -n-1$ per $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$, ponendo:

$$(1.5) \quad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) + \ldots - \frac{x^{n-1} \varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \right] dx$$

$$+ \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda + k)}$$

La (1.5) definisce il funzionale x_+^λ $\forall\, \lambda \neq -1, -2, \ldots$

Nei punti $\lambda = -1, -2, \ldots (x_+^\lambda, \varphi)$ come funzione di λ, per ogni fissata $\varphi \in C_o^\infty(R)$, possiede dei poli del primo ordine ed il residuo in $\lambda = -k$ è fornito da: $\dfrac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$.

Poiché $\varphi^{(k-1)}(0) = (-1)^{k-1} (\delta^{(k-1)}(x), \varphi(x))$, il funzionale x_+^λ possiede per $\lambda = -k$ un polo del primo ordine con residuo:

$$(1.6) \qquad \frac{(-1)^{k-1} \delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$$

Essendo x_+^λ per $Re\,\lambda > -1$ un funzionale regolare corrispondente ad una funzione a crescenza temperata, esso si può prolungare in un funzionale sullo spazio $S(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida. I funzionali x_+^λ ottenuti, per gli altri valori di λ, mediante prolungamento

analitico, si prolungano anche essi sullo spazio S(R) (come risulta ad es. dalla (1.5)).

Consideriamo ora la distribuzione $x_+^\lambda/_{\Gamma(\lambda+1)}$; poiché $\Gamma(\lambda+1)$ presenta nei punti $-1, -2, \ldots, -k, \ldots$ dei poli del primo ordine, con residuo in $\lambda = -k$ eguale a $\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$, tale distribuzione, come funzione di λ, è prolungabile anche in $\lambda = -1, -2, \ldots, -k$, e pertanto risulta una funzione intera di λ.

Fissata $\varphi \in S$, si ha, in base alla (1.6):

$$(1.7) \qquad \left[\frac{(x_+^\lambda, \varphi)}{\Gamma(\lambda+1)}\right]_{\lambda=-k} = \lim_{\lambda\to -k} \frac{(x_+^\lambda, \varphi)}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\operatorname*{res}_{\lambda=-k} (x_+^\lambda, \varphi)}{\operatorname*{res}_{\lambda=-k} \Gamma(\lambda+1)}$$
$$= (\delta^{(k-1)}(x), \varphi) \qquad k = 1, 2, \ldots n, \ldots$$

Conseguentemente la distribuzione $\Phi_\lambda = \dfrac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ che compare nella definizione di derivata di ordine generalizzato è una funzione intera di λ; si ha inoltre, per la (1.7):

$$(1.8) \qquad \varphi_{-k} = \delta^{(k)}(x) \qquad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots$$

e quindi:

$$\frac{d^k g}{d x^k} = g * \delta^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) \qquad \text{per} \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$$

cioè per λ intero non negativo, la definizione di derivata di ordine generalizzato restituisce l'ordinaria definizione di derivata di ordine intero di una distribuzione.

Per il seguito è necessario considerare anche la distribuzione x_-^λ corrispondente alla funzione:

$$x_-^\lambda = \begin{cases} (-x)^\lambda & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Per $Re\,\lambda > -1$ a tale funzione si può associare il funzionale regolare:

$$(1.9) \qquad (x_-^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^{0} (-x)^\lambda \varphi(x)\, dx \qquad \varphi \in C_0^\infty(R)$$

Tale funzionale si può prolungare nel semipiano $Re\,\lambda \leq -1$ esattamente come si è fatto per x_+^λ; anzi conviene scrivere la (1.9) sotto la forma:

$$(1.10) \qquad (x_-^\lambda, \varphi) = \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(-x)\,dx = (x_+^\lambda, \varphi(-x)),$$

ciò che permette di applicare al funzionale x_-^λ i risultati ottenuti per x_+^λ ponendo nelle formule $\varphi(-x)$ al posto di $\varphi(x)$ e quindi $(-1)^k \varphi^{(k)}(0)$ al posto di $\varphi^{(k)}(0)$.

In particolare la distribuzione x_-^λ al pari di x_+^λ è analitica rispetto a λ in tutto il piano eccetto che nei punti $\lambda = -1, -2, \ldots$, punti nei quali presenta dei poli del primo ordine con residuo in $\lambda = -k$ dato da:

$$(1.11) \qquad \operatorname*{res}_{\lambda=-k} x_-^\lambda = \frac{\delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$$

La distribuzione $x_-^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$ risulta funzione intera di λ e:

$$(1.12) \qquad \left[\frac{x_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right]_{\lambda=-k} = (-1)^{k-1}\,\delta^{(k-1)}(x)$$

È utile considerare anche le seguenti funzioni:

$$(x+iy)^\lambda = |x+iy|^\lambda e^{i\lambda\,\mathrm{Arg}(x+iy)} \quad \text{con} \quad \lambda \in C \quad \text{e} \quad x+iy \neq 0$$

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to 0+} (x+iy) = \begin{cases} x^\lambda & \text{se } x > 0 \\ |x|^\lambda e^{i\lambda\pi} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Risulta ovviamente $(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda$ per $\lambda \in C$ e $x \neq 0$ e tale eguaglianza permette di associare a $(x+i0)^\lambda$ una distribuzione analitica rispetto a λ nel piano complesso λ eccetto che nei punti $\lambda = -1, -2, \ldots, -k \ldots$

Indicheremo col simbolo $(x+i0)^\lambda$ tale distribuzione osservando che si tratta di una distribuzione regolare per $Re\,\lambda > -1$, nel qual caso corrisponde alla funzione ordinaria $(x+i0)^\lambda$.

Peraltro nei punti $\lambda = -k$ si verifica immediatamente, servendosi della (1.6) e della (1.11), che x_+^λ e $e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda$ hanno residui opposti e quindi, essendo tali punti dei poli del primo ordine per x_+^λ e $e^{i\lambda\pi} x_-^\lambda$,

si ha che $(x + i\,0)^\lambda$ è prolungabile anche in tali punti e risulta pertanto una funzione intera di λ.

Naturalmente la rappresentazione:

$$(1.13) \qquad (x + i\,0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}\, x_-^\lambda$$

valida nel senso ordinario $\forall\, \lambda \in C$ e $\forall\, x \neq 0$, è valida nel senso delle distribuzioni solo per $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -k, \ldots$

È da osservare ancora che si può dimostrare che la relazione di limite:

$$(1.14) \qquad \lim_{y \to 0+} (x + i\,y)^\lambda = (x + i\,0)^\lambda \qquad \forall\, \lambda \in C \quad \text{e} \quad \forall\, x \neq 0$$

valida nel senso ordinario per definizione, risulta valida anche nel senso delle distribuzioni $\forall\, \lambda \in C$.

Occupiamoci ora della trasformata di Fourier della distribuzione x_+^λ, osservando che ciò ha senso perché, come si è detto, x_+^λ può considerarsi una distribuzione temperata.

All'uopo supponiamo in un primo momento $-1 < Re\,\lambda < 0$. In tale ipotesi, introdotto un parametro $\tau > 0$, la funzione ordinaria $x_+^\lambda\, e^{-\tau x}$ risulta sommabile in R e quindi ha senso considerare la trasformata di Fourier:

$$(1.15) \qquad F(x_+^\lambda\, e^{-\tau x}) = \int_0^{+\infty} x^\lambda\, e^{-i\xi x}\, e^{-\tau x}\, dx = \int_0^{+\infty} x^\lambda\, e^{isx}\, dx.$$

essendo $s = -\xi + i\tau$ e quindi $Im\, s = \tau > 0$. È facile vedere ora, sfruttando il teorema di Lebesgue, che $x_+^\lambda\, e^{-\tau x}$ tende a x_+^λ nel senso delle distribuzioni quando $\tau \to 0$; quindi, per la continuità della trasformata di Fourier in S', la trasformata di Fourier della distribuzione x_+^λ risulta il limite nel senso delle distribuzioni di $F(x_+^\lambda\, e^{-\tau x})$ per τ tendente a zero:

$$(1.16) \qquad F(x_+^\lambda) = \lim_{\tau \to 0} F(x_+^\lambda\, e^{-\tau x}).$$

D'altro canto vale l'eguaglianza:

$$(1.17) \qquad F(x_+^\lambda\, e^{-\tau x}) = \int_0^{+\infty} x^\lambda\, e^{isx}\, dx = i\, e^{i\lambda\frac{\pi}{2}}\, (-\xi + i\tau)^{-\lambda-1}\, \Gamma(\lambda + 1).$$

Da (1.16), (1.17) e (1.14) segue allora che:

$$F(x_+^\lambda) = \lim_{\tau \to 0} F(x_+^\lambda e^{-\tau x}) = \lim_{\tau - 0} i e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} (-\xi + i\tau)^{-\lambda-1} \Gamma(\lambda+1) =$$

$$= i e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} (-\xi + i0)^{-\lambda-1} \Gamma(\lambda+1) \qquad -1 < Re\,\lambda < 0$$

che riscriviamo:

$$F(x_+^\lambda) = i e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} (-\xi + i0)^{-\lambda-1} \Gamma(\lambda+1)$$

L'ipotesi $Re\,\lambda < 0$ assicura che $Re(-\lambda-1) > -1$ e quindi l'ultima eguaglianza fornisce $F(x_+^\lambda)$ come distribuzione regolare.

Poiché $(-\xi + i0)^{-\lambda-1}$ è funzione intera di λ, si può vedere [nota (1) pag. 171 di GUELFAND-CHILOV [2]] che $F(x_+^\lambda)$ si può prolungare in tutto il piano λ eccettuati i punti $\lambda = -1, -2, \ldots, = k, \ldots$ in cui è singolare $\Gamma(\lambda+1)$.

Si ha quindi, in definitiva:

$$F(x_+^\lambda) = i e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} (-\xi + i0)^{-\lambda-1} \Gamma(\lambda+1) \tag{1.18}$$

per $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -k, \ldots$ risultando $F(x_+^\lambda)$ regolare per $Re\,\lambda < 0$.

Per la (1.13) si può anche scrivere:

$$F(x_+^\lambda) = i\Gamma(\lambda+1)[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \xi_-^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} \xi_+^{-\lambda-1}] \tag{1.18'}$$

per $\lambda \neq 0, \mp 1, \mp 2, \ldots, \mp k, \ldots$

Ovviamente $F\left(\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right)$ risulta una funzione intera di λ e vale la rappresentazione:

$$F\left(\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right) = i[e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \xi_-^{-\lambda-1} - e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} \xi_+^{-\lambda-1}] \tag{1.19}$$

per $\lambda \neq 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$

Ne deriva quindi che anche la distribuzione $F(\Phi_{-\lambda})$ è una funzione intera di λ e vale la rappresentazione:

$$F(\Phi_{-\lambda}) = F\left(\frac{x_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}\right) = e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} \xi_+^\lambda + e^{-i\lambda\frac{\pi}{2}} \xi_-^\lambda \tag{1.20}$$

per $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -k, \ldots$

Inoltre $F(\Phi_{-\lambda})$ risulta una distribuzione regolare per $Re\,\lambda > -1$. In particolare per $\lambda = n \in N_0$ la (1.20) dà:

$$F(\Phi_{-n}) = e^{in\frac{\pi}{2}}[(-1)^n \xi_-^n + \xi_+^n] = i^n \xi^n.$$

Si osservi ancora che dalla 1.20) segue:

$$|F(\Phi_{-\lambda})| = |\xi|^{\lambda} \text{ per } \lambda \text{ reale e } \lambda > -1. \tag{1.21}$$

Nel seguito adoperemo il simbolo $\hat{\Phi}_{-\lambda}$ per indicare la trasformata di Fourier di $\Phi_{-\lambda}$.

Osservazioni sulla definizione delle derivate di ordine generalizzato.

Nella definizione di derivata di ordine generalizzato ora data, l'ipotesi che la distribuzione in R, $g(x)$, abbia supporto nel semiasse $x \geq 0$ ha lo scopo di fissare le idee, essendo essenziale la sola ipotesi che il supporto di $g(x)$ sia limitato inferiormente.

In tal caso infatti, poiché anche $\Phi_{-\lambda}$ ha supporto limitato inferiormente, ha senso la convoluzione $g * \Phi_{-\lambda}$ e quindi la definizione $\dfrac{d^{\lambda} g}{d x^{\lambda}} = g * \Phi_{-\lambda}$.

Tale definizione restituirà al solito, per $\lambda \in N_0$, la definizione di derivata di ordine intero di una distribuzione, avendosi, per la (1.8):

$$\frac{d^k g}{d x^k} = g * \Phi_{-k} = g * \delta^{(k)}(x) = g^{(k)} \qquad \text{per } k = 0, 1, \ldots$$

Aggiungiamo anche che ulteriori considerazioni sulle derivate di ordine generalizzato, nel caso particolare che $g(x)$ sia un'ordinaria funzione di una variabile reale definita per $x \geq 0$ e localmente integrabile, si possono trovare nel lavoro di A. ZYGMUND [13].

2. - DERIVATE DI ORDINE GENERALIZZATO PER DISTRIBUZIONI IN R^2

Sia λ un biindice complesso $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ con λ_1 e λ_2 appartenenti a C; introduciamo la funzione ordinaria, definita in R^2:

$$\Phi_{\lambda}(x, y) = \frac{x_+^{\lambda_1 - 1}}{\Gamma(\lambda_1)} \cdot \frac{y_+^{\lambda_2 - 1}}{\Gamma(\lambda_2)} = \begin{cases} \dfrac{x^{\lambda_1 - 1}}{\Gamma(\lambda_1)} \cdot \dfrac{y^{\lambda_2 - 1}}{\Gamma(\lambda_2)} & \text{se } x > 0 \\ & \text{e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2.1}$$

Se $Re\,\lambda_1 > 0$ e $Re\,\lambda_2 > 0$ tale funzione coincide col prodotto diretto delle due distribuzioni regolari:

$$\Phi_{\lambda_1}(x) = \frac{x_+^{\lambda_1 - 1}}{\Gamma(\lambda_1)} \quad \text{e} \quad \Phi_{\lambda_2}(y) = \frac{y_+^{\lambda_2 - 1}}{\Gamma(\lambda_2)}$$

Peraltro il prodotto diretto:

$$\Phi_{\lambda_1}(x) \times \Phi_{\lambda_2}(y) \tag{2.2}$$

ha significato per ogni coppia (λ_1, λ_2) ed ha come supporto $Q = \{(x, y)\, R^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Ebbene continueremo ad indicare tale prodotto diretto con $\Phi_\lambda(x, y)$, precisando, quando se ne presenti la necessità se ci si riferisce alla funzione definita dalla (2.1) oppure alla distribuzione definita dalla (2.2). Si osservi che la (2.2), come funzione della coppia $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ è analitica rispetto ad entrambe le variabili.

In base alla definizione di prodotto diretto ed alla proprietà commutativa di cui gode quest'ultimo, risulta, per ogni $\psi(x, y)$ appartenente a $C_o^\infty(R^2)$:

$$\begin{aligned}(\Phi_\lambda(x, y), \psi(x, y)) &= (\Phi_{\lambda_1}(x), (\Phi_{\lambda_2}(y), \psi(x, y))) \\ &= (\Phi_{\lambda_2}(y), (\Phi_{\lambda_1}(x), \psi(x, y)))\end{aligned} \tag{2.3}$$

Poiché $\Phi_{\lambda_1}(x)$ e $\Phi_{\lambda_2}(y)$ possono prolungarsi in distribuzioni sullo spazio $S(R)$, segue dalla (2.3) che $\Phi_\lambda(x, y)$ si può prolungare in una distribuzione sullo spazio $S(R^2)$.

Sia ora $g(x, y)$ una distribuzione in R^2 col supporto concentrato nel primo quadrante Q; possiamo definire la derivata di $g(x, y)$ di ordine generalizzato $|\lambda|^2 = \lambda_1 + \lambda_2 \in C$, λ_1 rispetto a x, λ_2 rispetto a y, mediante la posizione:

$$D^\lambda g = \frac{\partial^{|\lambda|} g}{\partial x^{\lambda_1}\, \partial y^{\lambda_2}} = g(x, y) * \Phi_{-\lambda}(x, y)^3. \tag{2.4}$$

La convoluzione a secondo membro ha senso, infatti si ha, per ogni ψ appartenente a $C_o^\infty(R^2)$:

$$\begin{aligned}(g * \Phi_{-\lambda}, \psi) &= (g(x_1, y_1) \times \Phi_{-\lambda}(x_2, y_2), \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\ &= (g(x_1, y_1), (\Phi_{-\lambda}(x_2, y_2), \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2)))\end{aligned} \tag{2.5}$$

[2] Dato il biindice complesso $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in C^2$ diciamo lunghezza di λ il numero complesso $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$.

[3] Analogamente al caso di una variabile, quando λ è un biindice reale si parlerà di derivata di « ordine frazionario ».

Detto K il supporto di ψ, poiché K è compatto si possono determinare un $h \geq 0$ ed un $k \geq 0$ tali che:

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin K \qquad \forall (x_2, y_2) \in Q, \forall x_1 \geq h, \forall y_1 \geq k$$

Quindi risulta:

$$(\Phi_{-\lambda}(x_2, y_2), \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = 0 \qquad \forall x_1 \geq h \text{ e } \forall y_1 \geq k$$

Ne segue che l'intersezione del supporto della distribuzione $g(x_1, y_1)$ e del supporto della funzione $(\Phi_{-\lambda}(x_2, y_2), \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2))$ è limitata e pertanto la convoluzione (2.4) ha senso.

Inoltre la (2.4) definisce una distribuzione ancora concentrata in Q. Infatti supponiamo che sia $\psi \in C_0^\infty(R^2)$ e supp $\psi \cap Q = \Phi$; allora fissati comunque $x_1 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$ risulta supp $\psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \cap Q = \Phi$; quindi la funzione di (x_1, y_1)

$$(\Phi_{-\lambda}(x_2, y_2), \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2))$$

è nulla per $x_1 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$ ed ha pertanto supporto contenuto in $R^2 - Q$, disgiunto dal supporto Q di $g(x_1, y_1)$. Dalla (2.5) segue pertanto $(g * \Phi_{-\lambda}, \psi) = 0$, cioè quanto asserito.

In base alla (2.3) risulta:

$$\frac{\partial^{|\lambda|} g}{\partial x^{\lambda_1} \partial y^{\lambda_2}} = \frac{\partial^{|\lambda|} g}{\partial y^{\lambda_2} \partial x^{\lambda_1}} \tag{2.6}$$

Inoltre si verifica facilmente che, se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$:

$$D^{\lambda+\mu} g = D^\lambda D^\mu g \tag{2.7}$$

dove $\lambda + \mu = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2)$.

OSSERVAZIONE. — Se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in N_o \times N_o$ allora la derivata di ordine generalizzato $g * \Phi_{-\lambda}$ di g coincide con la derivata nel senso delle distribuzioni $D^\lambda g$, cioè:

$$(\Phi_{-\lambda} * g, \varphi) = (-1)^{|\lambda|} (g(x, y), D^\lambda \varphi(x, y)) \qquad \forall \varphi \in S(R^2)$$

Infatti risulta:

$$\begin{aligned}(\Phi_{-\lambda} * g, \varphi) &= (g(x_1, y_1) \times \Phi_{-\lambda}(x_2, y_2), \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\ &= (g(x_1, y_1), (\Phi_{-\lambda}(x_2, y_2), \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2))) \\ &= (g(x_1, y_1), (\varphi_{-\lambda_1}(x_2) \times \Phi_{-\lambda_2}(y_2), \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2))\end{aligned}$$

Di qui, tenendo presente la (1.8), segue:

$$\begin{aligned}(\Phi_{-\lambda} * g, \varphi) &= (g(x_1, y_1), (\delta^{(\lambda_1)}(x_2), (\delta^{(\lambda_2)}(y_2), \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2))))\\ &= (g(x_1, y_1), (\delta^{(\lambda_1)}(x_2), (-1)^{\lambda_2}(D_y^{\lambda_2}\varphi)(x_1 + x_2, y_1)))\\ &= (g(x_1, y_1), (-1)^{\lambda_1+\lambda_2}(D_x^{\lambda_1} D_y^{\lambda_2}\varphi)(x_1, y_1))\\ &= (-1)^{|\lambda|}(g(x, y), D^{\lambda}\varphi(x, y))\end{aligned}$$

Poiché $\Phi_{-\lambda}(x, y) \in S'(R^2)$ ha senso considerarne la trasformata di Fourier, e poiché $\Phi_{-\lambda}$ si presenta come prodotto diretto di $\Phi_{-\lambda_1}(x)$ e di $\Phi_{-\lambda_2}(y)$ si ha:

$$\hat{\Phi}_{-\lambda}(\xi, \eta) = \hat{\Phi}_{-\lambda_1}(\xi) \times \hat{\Phi}_{-\lambda_2}(\eta)$$

Tenendo presente la (1.20), si ha allora:

$$(2.8)\qquad \hat{\Phi}_{-\lambda}(\xi, \eta) = (e^{i\lambda_1\frac{\pi}{2}}\xi_+^{\lambda_1} + e^{-i\lambda_1\frac{\pi}{2}}\xi_-^{\lambda_1}) \times (e^{i\lambda_2\frac{\pi}{2}}\eta_+^{\lambda_2} + e^{-i\lambda_2\frac{\pi}{2}}\eta_-^{\lambda_2})$$

Supponiamo ora λ_1 e λ_2 reali e maggiori di -1: i due funzionali al secondo membro della (2.8) sono regolari e quindi il loro prodotto diretto è un prodotto ordinario. Si ha pertanto:

$$(2.9)\qquad \hat{\Phi}_{-\lambda}(\xi, \eta) = \begin{cases} e^{i(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\pi}{2}}\xi^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2} & \text{per } \xi > 0,\ \eta > 0\\ e^{i(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\pi}{2}}\xi^{\lambda_1}(-\eta)^{\lambda_2} & \xi > 0,\ \eta < 0\\ e^{i(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\pi}{2}}(-\xi)^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2} & \xi < 0,\ \eta > 0\\ e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\pi}{2}}(-\xi)^{\lambda_1}(-\eta)^{\lambda_2} & \xi < 0,\ \eta < 0 \end{cases}$$

Risulta evidentemente:

$$(2.10)\qquad |\hat{\Phi}_{-\lambda}(\xi, \eta)| = |\xi|^{\lambda_1}|\eta|^{\lambda_2}$$

da cui, ponendo $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$(2.11)\qquad |\hat{\Phi}_{-\lambda}(\zeta)| \leq |\zeta|^{\lambda_1+\lambda_2} = |\zeta|^{|\lambda|}$$

Si osservi che, se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in N_o \times N_o$, allora si ha:

$$\hat{\Phi}_{-\lambda}(\xi, \eta) = i^{\lambda_1} \xi^{\lambda_1} \cdot i^{\lambda_2} \eta^{\lambda_2} = i^{|\lambda|} \xi^{\lambda_1} \eta^{\lambda_2} \tag{2.12}$$

da cui, posto $\zeta = (\xi, \eta)$, si trae:

$$\hat{\Phi}_{-\lambda}(\zeta) = i^{|\lambda|} \zeta^{\lambda} \tag{2.13}$$

Così come nella definizione di derivata d'ordine generalizzato per una distribuzione in R, $g(x)$, è inessenziale l'ipotesi che $g(x)$ abbia supporto sul semiasse $x \geq 0$, essendo sufficiente l'ipotesi che il supporto di $g(x)$ sia limitato inferiormente, allo stesso modo nella definizione di derivata di ordine generalizzato per una distribuzione $g(x, y)$ in R^2 l'ipotesi che $g(x, y)$ abbia supporto nel primo quadrante serve solo a fissare le idee e può essere sostituita, ad esempio, dall'ipotesi che $g(x, y)$ abbia supporto contenuto in un dominio traslabile nel primo quadrante, e cioè in un dominio del tipo $[a, +\infty[\times [b, +\infty[$ con a e b elementi di R; si verifica facilmente infatti che in tale ipotesi la convoluzione $g * \Phi_{-\lambda}$ ha ancora senso e quindi si può porre $D^{\lambda} g = g * \Phi_{-\lambda}$.

Più in generale ancora, ricordando che la convoluzione di due distribuzioni in R^n ha certamente senso se esse hanno supporti contenuti in due coni aventi lo stesso asse, uno di ampiezza minore od uguale a π, l'altro di ampiezza strettamente minore di π (cfr. HORMANDER [3] pag. 17), ed avendo osservato che $\text{supp } \Phi_{-\lambda} = \text{supp } \Phi_{-\lambda_1}(x) \times \text{supp } \Phi_{-\lambda_2}(y) = ([0, +\infty[)^2$ si può concludere che la convoluzione $g * \Phi_{-\lambda}$ ha certamente senso per ogni distribuzione $g(x, y)$ in R^2 con supporto contenuto in un semipiano del tipo $x + y \geq a$ con $a \in R$ e quindi per una tale distribuzione avrà senso porre:

$$D^{\lambda} g = g * \Phi_{-\lambda}.$$

In particolare potremo considerare derivate di ordine generalizzato di una qualunque distribuzione in R^2 a supporto compatto.

Si osservi a proposito che se $g(x, y)$ ha supporto compatto K, si ha, per $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in C$:

$$\text{supp } D^{\lambda} g = \text{supp } g * \Phi_{-\lambda} \subseteq \text{supp } g + \text{supp } \Phi_{-\lambda} = K + ([0, +\infty[)^2$$

avendo indicato con $A + B$ la somma vettoriale dei due insiemi A e B. Tale inclusione non permette di asserire che le derivate di ordine generalizzato di g sono a supporto compatto come g. Vedremo in seguito che ciò in generale non è vero.

3. - Caratterizzazione dello spazio $H_{\bar{\Omega}}^s$ mediante le derivate dl ordine frazionario

In $S(R^n)$ si definisce il prodotto scalare:

$$(3.1) \qquad (u, v)_s = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \bar{\hat{v}}(\xi) \, d\xi$$

e la norma

$$(3.2) \qquad \| u \|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

dove si è posto $\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x) \, dx$.

Si denota con $H^s(R^n)$ o anche H^s il completamento di $S(R^n)$ rispetto alla norma (3.2); $H^s(R^n)$ risulta uno spazio di Hilbert e può essere identificato con lo spazio delle distribuzioni temperate u tali che $\hat{u}$ è una funzione ordinaria per cui

$$(2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty$$

munito della norma (3.2)[4].

Per $s \in N_o$, $H^s(R^n)$ coincide algebricamente e topologicamente con lo spazio di Sobolev $W^s(R^n)$ ed in particolare si può identificare $H^o(R^n)$ con $L^2(R^n)$; invero si verifica facilmente che per $s \in N_o$ la norma (3.2) è equivalente alla norma:

$$\| u \|_{W^s(R^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{R^n} |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Evidentemente sussiste l'implicazione:

$$s < t \Rightarrow \| u \|_s < \| u \|_t$$

e quindi $H^s \supset H^t$ per $s < t$.

Sussistono le seguenti proposizioni (per le dimostrazioni cfr. O. A. Oleinik e E. V. Radkevič [8]):

Proposizione 3.1. — *Se* $\{u_n\}$ *è una successione di elementi di* H^t *aventi tutti supporto contenuto in un medesimo insieme compatto e le cui norme sono limitate, allora* $\{u_n\}$ *è compatta in* H^s *per* $s < t$.

[4] Lo spazio H^s, per $s \geqslant 0$, può anche definirsi come codominio, opportunamente normato, dell'operatore potenziale di Bessel (cfr. Stein [10]).

PROPOSIZIONE 3.2. — *Se* $u \in H^{l+k}(R^n)$ *con* $2l > n$ *e se* k *è un intero non negativo, allora* $u \in C^{(k)}(R^n)$.

PROPOSIZIONE 3.3. — *Sia* $s_1 < s_2 < s_3$; *allora* $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall u \in H^{s_3}$ *vale la diseguaglianza*:

$$\| u \|_{s_2}^2 \leq \varepsilon \| u \|_2^{s_3} + C_\varepsilon \| u \|_{s_1}^2$$

dove C_ε *è una costante dipendente da* $\varepsilon, s_1, s_2, s_3$.

Sia Ω un aperto limitato di R^n; conformemente alla notazione adottata da VOLEVICH e PANEYAKH [12], diciamo $H_{\bar{\Omega}}^s(R^n)$ lo spazio delle delle distribuzioni di H^s con supporto compatto contenuto in $\bar{\Omega}$. Nel presente paragrafo ci riferiremo per semplicità a distribuzioni in R, ma i risultati ottenuti sono validi anche in R^2.

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA 3.1 — *Se* Ω *è un aperto limitato di* R *ed* $s \in R_o^+$, *lo spazio* $H_{\bar{\Omega}}^s(R)$ *coincide con lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto contenuto in* $\bar{\Omega}$ *dotate di derivate di ordine frazionario* $\alpha \in [0, s]$ *sommabili* L^2 *in* R; *risulta inoltre,* $\forall u \in H_{\bar{\Omega}}^s(R)$ *e* $\forall \alpha \in [0, s]$:

$$\| D^\alpha u \|_o \leq \| u \|_s \tag{3.3}$$

Dim. — Cominciamo col dimostrare che se $u \in H_{\bar{\Omega}}^s(R)$ allora $\forall \alpha \in [0, s]$, $D^\alpha u = u * \Phi_{-\alpha} \in L^2(R)$. Osserviamo intanto che l'ipotesi che Ω sia limitato consente di dare significato a $D^\alpha u$ $\forall \alpha \in C$ e, in particolare, $\forall \alpha \in [0, s]$; inoltre, in base ad un noto teorema sulle convoluzioni (HÖRMANDER [3] Teorema 1.7.6), l'ipotesi $u \in \mathcal{E}'$ e $\Phi_{-\alpha} \in S'$ comporta che $u * \Phi_{-\alpha} \in S'$ e:

$$\widehat{u * \Phi_{-\alpha}} = \hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha} \tag{3.4}$$

Poiché è $\alpha \geq 0$, $\hat{\Phi}_{-\alpha}$ risulta, in base alla (1.20), una distribuzione regolare al pari di $\hat{u}$ (che, per il teorema di Paley-Wiener, è una funzione intera) ed inoltre, per la (1.21), risulta:

$$| \hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha} | = | \xi |^\alpha | \hat{u} | \tag{3.5}$$

Ne segue, per $\alpha \in [0, s]$:

$$| \hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha} |^2 \leq (1 + | \xi |^2)^\alpha | \hat{u} |^2 \leq (1 + | \xi |^2)^s | \hat{u} |^2 \tag{3.6}$$

Dalla (3.6) si deduce, per l'appartenenza di u ad H^s:

$$\hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha} \in L^2 \qquad \forall\, \alpha \in [0, s]$$

Diciamo $g(x)$ l'antitrasformata di $\hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha}$ in $L^2(R)$

$$g_\alpha(x) = \lim_{\substack{h \to +\infty \\ \text{i.m.}\,2}} (2\pi)^{-1} \int_{|\xi| \leqslant h} e^{ix\xi}\, \hat{u}(\xi)\, \hat{\Phi}_{-\alpha}(\xi)\, d\xi$$

Risulta $g_\alpha(x) \in L^2(R)$ e quindi $g_\alpha(x) \in S'$; allora, poiché i due elementi di S', g_α e $u * \Phi_{-\alpha}$, hanno la stessa trasformata di Fourier $\hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha}$ deve aversi:

$$(3.7) \qquad u * \Phi_{-\alpha} = g_\alpha(x) = \lim_{\substack{h \to +\infty \\ \text{i.m.}\,2}} \int_{|\xi| \leqslant h} e^{ix\xi}\, \hat{u}(\xi)\, \hat{\Phi}_{-\alpha}(\xi)\, d\xi$$

e quindi $D^\alpha u = u * \Phi_{-\alpha} \in L^2(R)$ per $\alpha \in [0, s]$.

Dalla (3.6) e dalla eguaglianza di Plancherel segue poi la (3.3).

Viceversa supponiamo che u sia una distribuzione a supporto compatto contenuto in $\bar{\Omega}$ dotata di derivate di ordine frazionario $\alpha \in [0, s]$ sommabili $L^2(R)$: dobbiamo dimostrare che $u \in H^s$. Poiché $D^\alpha u = u * \Phi_{-\alpha} \in L^2(R)$ $\forall\, \alpha \in [0, s]$ si ha che $\widehat{u * \Phi_{-\alpha}} \in L^2(R)$ $\forall\, \alpha \in [0, s]$.

Quindi, tenendo presente la (3.4):

$$|\widehat{u * \Phi_{-\alpha}}|^2 = |\hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha}|^2 = |\hat{u}|^2 \cdot |\xi|^{\alpha 2} \in L^1 \qquad \forall\, \alpha \in [0, s]$$

In particolare risulta $|\hat{u}|^2 \in L^1$, $|\hat{u}|^2 \cdot |\xi|^{2s} \in L^1$; ma si ha anche:

$$(1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 \leq 2^{s-1}(1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}|^2 \in L^1$$

e quindi, come volevasi, $u \in H^s$.

TEOREMA 3.2 — *Sia* Ω *un aperto limitato di* R *e* $s \in R_o^+$, *sia* $\{u_n\}_{n \in N}$ *una successione di elementi di* $H_{\bar{\Omega}}^s(R)$ *ed* $u \in H_{\bar{\Omega}}^s(R.)$. *Allora condizione necessaria e sufficiente affinché* $\{u_n\}_{n \in N}$ *tenda ad* u *in* $H_{\bar{\Omega}}^s(R)$ *è che* $\forall\, \alpha \in [0, s]$ *la successione delle derivate* $\{D^\alpha u_n\}_{n \in N}$ *tenda a* $D^\alpha u$ *in* $L^2(R)$.

Dim. — Che la condizione sia necessaria è una banale conseguenza della (3.3): dimostriamo che è sufficiente. In base alla egua-

glianza di Plancherel e tenendo presenti la (3.4) e la (1.21), possiamo scrivere:

$$\int_R |\, D^\alpha u_n - D^\alpha u \,|^2 \, dx = (2\pi)^{-1} \int_R |\, \widehat{D^\alpha (u_n - u)} \,|^2 \, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_R |\, \widehat{u_n - u} \,|^2 \cdot |\, \Phi_{-\alpha} \,|^2 \, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_R |\, \widehat{u_n - u} \,|^2 \cdot |\, \xi \,|^{2\alpha} \, d\xi$$

Quindi:

$$\lim_n \int_R |\, \widehat{u_n - u} \,|^2 \, |\, \xi \,|^{2\alpha} \, d\xi = 0 \qquad \text{per } \alpha \in [0, s] \tag{3.8}$$

D'altro canto risulta:

$$\| u_n - u \|_s^2 = (2\pi)^{-1} \int_R (1 + |\, \xi \,|^2)^s \, |\, \widehat{u_n - u} \,|^2 \, d\xi \tag{3.9}$$

$$\leq (2\pi)^{-1} 2^{s-1} \left(\int_R |\, \widehat{u_n - u} \,|^2 \, d\xi + \int_R |\, \widehat{u_n - u} \,|^2 \, |\, \xi \,|^{2s} \, d\xi \right)$$

Da (3.8) e (3.9) consegue

$$\lim_n \| u_n - u \|_s = 0 \text{ e cioè } u_n \to u \text{ in } H^s_\Omega(R).$$

OSSERVAZIONE 1 — Se u è una distribuzione a supporto compatto in R, la derivata di ordine generalizzato $D^\alpha u = u * \Phi_{-\alpha}$ con $\alpha \in C$ è una distribuzione di S′ intera come funzione di α al pari di $\Phi_{-\alpha}$. Infatti, intanto si ha che per ogni distribuzione f dipendente da un parametro $\lambda \in C$ sussiste l'equivalenza:

$$(f_\lambda \text{ intera rispetto a } \lambda) \Leftrightarrow (\hat{f}_\lambda \text{ intera rispetto a } \lambda) \tag{3.10}$$

che si dimostra facilmente tenendo presente che:

$$(f_\lambda, \varphi) = (f_\lambda, \hat{\varphi}) \qquad \forall \varphi \in S$$

In base alla (3.10) possiamo quindi asserire che $\hat{\Phi}_{-\alpha}$ risulta funzione intera di α in quanto tale è $\Phi_{-\alpha}$. D'altro canto, come già si è dimostrato nel corso della dimostrazione del teorema 3.1, dall'essere $u \in \mathcal{E}'$ e $\Phi_{-\alpha} \in S'$ segue che $u * \Phi_{-\alpha} \in S'$ e vale la (3.4); pertanto:

$$(3.11) \qquad \forall \varphi \in S \qquad \widehat{(u * \Phi_{-\alpha}, \varphi)} = (\hat{u} \cdot \hat{\Phi}_{-\alpha}, \varphi) = (\hat{\Phi}_{-\alpha}, \hat{u} \cdot \varphi)$$

dove $\hat{u} \cdot \varphi$ è ancora elemento di S in quanto $\hat{u}$ è una funzione di C^∞ a crescenza lenta per il teorema di Paley-Wiener.

Dalla (3.11) segue che $\widehat{u * \Phi_{-\alpha}}$ è intera rispetto ad α al pari di $\hat{\Phi}_{-\alpha}$ e quindi l'enunciato, tenendo ancora conto dell'equivalenza (3.10).

Osserviamo che sostanzialmente si è dimostrata la seguente implicazione relativa alle convoluzioni dipendenti da un parametro:

$$\left(\begin{array}{c} u \in \mathcal{E}',\ v_\lambda \in S' \ \textit{e intera} \\ \textit{rispetto a}\ \lambda \in C \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} u * v_\lambda \ \textit{è una distribuzione} \\ \textit{di}\ S'\ \textit{intera rispetto a}\ \lambda \end{array}\right).$$

OSSERVAZIONE 2 — Sia $u \in H_\Omega^s(R)$ con Ω aperto limitato di R: in base al teorema 3.1 le derivate di ordine frazionario $D^\alpha u$ con $\alpha \in [0, s]$ sono delle funzioni di $L^2(R)$ che, contrariamente a quanto succede per le ordinarie derivate distribuzionali, non sono tenute ad avere il supporto contenuto in $\bar{\Omega}$; anzi, in generale, questa circostanza non si verifica.

Per renderci conto di ciò basta tenere presente che $D^\alpha u$ è funzione intera della variabile complessa α; se $D^\alpha u$ fosse a supporto contenuto in $\bar{\Omega}$ $\forall \alpha \in [0, s]$, risulterebbe a supporto contenuto in $\bar{\Omega}$ anche $\forall \alpha \in C$, in base al principio di identità delle funzioni olomorfe. Infatti, per $\varphi \in C_0^\infty(R - \bar{\Omega})$ si avrebbe:

$$(D^\alpha u, \varphi) = 0 \qquad \forall \alpha \in [0, s] \text{ e quindi}$$

$$(D^\alpha u, \varphi) = 0 \qquad \forall \alpha \in C.$$

In particolare sarebbe a supporto contenuto in $\bar{\Omega}$, per $u \in C_0^\infty(\Omega)$ e positiva, la distribuzione $D^{-1} u$. Ma, essendo $D^{-1} u = u * \Phi_1 = u * x_+^0 = \int_{-\infty}^{x} u(\xi)\, d\xi$ ciò è manifestatamente assurdo.

Beninteso, per gli $\alpha \in N_0$ (che sono punti isolati di C) $D^\alpha u$, coincidendo con l'ordinaria derivata di ordine intero della distribuzione u, è a supporto contenuto in $\bar{\Omega}$ al pari di u.

OSSERVAZIONE 3 — Sia Ω un aperto limitato di R ed $s \in N_0$; per il generico elemento $u \in W_0^s(\Omega)$ indichiamo con U il prolungamento nullo fuori di Ω:

$$U = \begin{cases} u & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } R - \Omega; \end{cases}$$

U ovviamente appartiene ad $H_\Omega^s(R)$ e pertanto per la U ha senso considerare le derivate di ordine frazionario minore o uguale ad s, $D^\alpha U$.

Quando α è intero il supporto di $D^\alpha U$ è contenuto in $\bar{\Omega}$ (vedi osservazione 2) e si presenta naturale la seguente questione:

che relazione c'è tra le restrizioni $D^\alpha U/_\Omega$ e le derivate deboli $D^\alpha u$ della originaria $u \in W_0^s(\Omega)$?

Ebbene si vede facilmente che $D^\alpha U/_\Omega = D^\alpha u$. Infatti si ha:

$$\int_R D^\alpha U \cdot \varphi \, dx = (-1)^\alpha \int_R U \, D^\alpha \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(R)$$

Tale relazione vale in particolare per le $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e quindi:

$$\int_\Omega D^\alpha U/_\Omega \cdot \varphi \, dx = (-1)^\alpha \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx$$

e ciò dimostra appunto che $D^\alpha U/_\Omega$ coincide con la derivata debole $D^\alpha u$ di u in Ω.

Indichiamo ora con Ω un aperto limitato di R^2; ragionando come si è fatto per dimostrare il teorema 3.1 si può provare che vale il seguente teorema:

TEOREMA 3.1′ — *Se* $s \in R_0^+$, *ed* Ω *è un aperto limitato di* R^2, *allora* $H_\Omega^s(R^2)$ *coincide con l'insieme delle distribuzioni u a supporto contenuto in* $\bar{\Omega}$ *e con derivate di ordine frazionario* $D^\alpha u$ *con* $\alpha \in R_0^+ \times R_0^+$ *e* $|\alpha| \in [0, s]$, *sommabili* $L^2(R^2)$.

Allo stesso modo può essere riformulato nel presente caso il teorema 3.2, nonché le osservazioni che lo seguono.

4. - Caratterizzazione dello spazio di ordine frazionario $W_o^s(\Omega)$ mediante le derivate d'ordine frazionario

A questo punto ha interesse chiarire la relazione tra lo spazio $H_{\bar{\Omega}}^s(R^2)$ da noi caratterizzato col teorema 3.1' in base al comportamento delle derivate di ordine frazionario, con alcuni spazi di Sobolev generalizzati.

Ci atterremo prevalentemente alle notazioni a definizioni di E. Magenes [5], Nečas [7], di Volevich e Paneyakh [12] e di Slobodeckĭi [9] e faremo riferimento al caso $s \in R_o^+$ e $\Omega \subseteq R^2$ perché è ad esso che siamo interessati.

Se $s \in N_o$ si indica con $W^s(\Omega)$, come è noto, lo spazio delle funzioni di $L^2(\Omega)$ dotate di derivate deboli $D^\alpha u$ sommabili $L^2(\Omega)$ fino all'ordine s, normato con la norma:

$$\| u \|^2_{W^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_\Omega | D^\alpha u |^2 \, d x.$$

Tale spazio normato, come è noto, è uno spazio di Banach e costituisce uno spazio di Sobolev classico.

Se $s \in R_o^+ - N_o$, si indica con $W^s(\Omega)$ il sottospazio di $W^{[s]}(\Omega)$ costituito dalle funzioni $u \in W^{[s]}(\Omega)$ per cui:

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{| D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) |^2}{| x - y |^{2+2(s-[s])}} \, d x \, d y < + \infty \quad \text{per} \quad | \alpha | = [s]$$

avendo indicato con $[s]$ la parte intera di s.

Tale spazio $W^s(\Omega)$, normato con la norma:

$$\| u \|^2_{W^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant [s]} \int_\Omega | D^\alpha u |^2 \, d x + \tag{4.1}$$

$$+ \sum_{|\alpha| = [s]} \int_\Omega \int_\Omega \frac{| D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) |^2}{| x - y |^{2+2(s-[s])}} \, d x \, d y$$

riesce uno spazio di Banach cui si dà il nome di spazio di Sobolev-Slobodeckĭi o anche spazio di Sobolev di ordine frazionario.

È noto che $W^s(\Omega)$ coincide con il completamento rispetto alla norma (4.1) del sottospazio $C^{\infty^*}(\Omega)$ di $C^\infty(\Omega)$ costituito da quelle funzioni per cui tale norma ha senso (cfr. Volevich e Paneyakh [12] pag. 25).

Ricordiamo che per $s \in R_s^+ - N_0$, $W^s(\Omega)$ può essere definito anche come il sottospazio di $W^{[s]}(\Omega)$ costituito delle funzioni u con derivate deboli $D^\alpha u$ di ordine $[s]$ appartenenti ad uno spazio di interpolazione tra $W^1(\Omega)$ e $W^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ottenuto col cosidetto metodo « delle tracce » di Lions e denotato con $T^{1-\sigma}$ da ADAMS ([1] pag. 204) e $T(W^1(\Omega), W^0(\Omega), 2, 1-\sigma)$ e da E. MAGENES [5] ove $\sigma = s - [s]$.

Noi ci atterremo alla definizione data prima, mediante l'uso della norma « intrinseca » (4.1) ricordando peraltro che le due definizioni si equivalgono se $\Omega = R^2$, oppure se Ω è un semipiano di R^2, oppure se Ω è un aperto di R^2 di classe C^1 e con frontiera limitata (cfr. teorema 7.4.8 di ADAMS [1]).

È noto poi che $W^s(R^2) = H^s(R^2)$ in senso algebrico e topologico, avendosi l'equivalenza delle due norme $\| u \|_{W^s(R^2)}$ e $\| u \|_s$ (cfr. VOLEVICH e PANEYAKH [12] pagg. 24 e 25)

È anche noto che se Ω è un semipiano di R^2 o è un aperto di R^2 di classe $C^{[s]+1}$ e con frontiera limitata, $W^s(\Omega)$ coincide in senso algebrico e topologico con l'insieme delle restrizioni degli elementi di $W^s(R^2) = H^s(R^2)$ ad Ω, normato ponendo:

$$\| u \| = \inf_{\substack{U \in W^s(R^2) \\ U/_\Omega = u}} \| U \|_{W^s(R^2)}$$

Si indica poi con $W_0^s(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^s(\Omega)$.

Si osservi a questo punto che, se s è intero, detto $\tilde{u}$ il prolungamento nullo fuori di Ω di una u definita q.o. in Ω, vale banalmente una maggiorazione del tipo:

$$\| \tilde{u} \|_{W^s(R^2)} \leq K \| u \|_{W_0^s(\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{4.2}$$

Infatti per s intero si ha addirittura l'eguaglianza

$$\| \tilde{u} \|_{W^s(R^2)} = \| u \|_{W_0^s(\Omega)} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

Dalla (4.2) si deduce che, se s è intero,

$$\tilde{u} \in W^s(R^2) \qquad \forall u \in W_0^s(\Omega)$$

e che l'operatore $u \to \tilde{u}$ è continuo da $W_0^s(\Omega)$ a $W^s(R^2)$ qualunque sia l'aperto Ω di R^2.

Nel caso però che s non sia intero, una maggiorazione del tipo (4.2) non è per nulla banale; ciò perché nella norma $\| \tilde{u} \|_{W^s(R^2)}$ com-

paiono integrali del tipo:

$$\int_{R^2} \int_{R^2} \frac{| D^\alpha \tilde{u}(x) - D^\alpha \tilde{u}(y) |^2}{| x - y |^{2+2(s-[s])}} \, dx \, dy$$

che per le $u \in C_o^\infty(\Omega)$ non possono identificarsi con gli stessi integrali estesi ad $\Omega \times \Omega$ in quanto per le $u \in C_o^\infty(\Omega)$ supp. $| D^\alpha \tilde{u}(x) - D^\alpha \tilde{u}(y) | \neq$ $\neq \Omega \times \Omega$. Tuttavia, se Ω è un aperto limitato sufficientemente regolare, si dimostra che una maggiorazione del tipo (4.2) e la conseguente continuità dell'operatore $u \to \tilde{u}$ da $W_o^s(\Omega)$ a $W^s(R^2)$ continuano a valere anche per s non intero, ad eccezione di una infinità numerabile di valori di s, e precisamente ad eccezione dei valori:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n + \frac{1}{2} \quad , \ldots ; \; n \in N_o .$$

Ciò discende dalla seguente:

PROPOSIZIONE 4.1. — *Sia* $s \in R_o^+$ *ed* Ω *limitato e di classe* $C^{[s]+1}$; *l'operatore* $u \to \tilde{u}$ *è lineare e continuo da* W_o^s *a* $W^s(R^2)$ *se e solo se* $s - \frac{1}{2} \notin N_o$.

Se $s - \frac{1}{2}$ è un intero, il prolungamento nullo fuori di Ω di una funzione $u \in W_o^s(\Omega)$ in generale non appartiene a $W^s(R^2)$ (cfr. ad es. E. MAGENES, [5] teor. 6.2, nonché LIONS e MAGENES [4,I] teor. 2.4, e per i valori eccezionali cfr. il contro esempio di LIONS e MAGENES [4,II] pagg. 320-321).

Infine, seguendo una notazione di Volevich e Paneyakh, posto $\mu = \mu_s(\xi) = (1 + | \xi |^2)^{s/2}$ con $\xi \in R^2$, denoteremo con $H_o^\mu(\Omega)$ il completamento di $C_o^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma:

$$\| u \|_s^2 = (2\pi)^{-2} \int_{R^2} (1 + | \xi |^2)^s \, | \hat{u}(\xi) |^2 \, d\xi$$

Lo spazio di Banach $H_o^\mu(\Omega)$ è dunque un sottospazio chiuso di $H^s(R^2)$ e la norma di un elemento di $H_o^\mu(\Omega)$ coincide con la norma di tale elemento in $H^s(R^2)$.

È naturale ora domandarsi quale sia la relazione tra lo spazio $H_{\bar{\Omega}}^s(R^2) = \{u \in H^s(R^2) : \text{supp } u \subseteq \bar{\Omega}\}$ da noi caratterizzato con il teorema 3.1′ e gli spazi ora richiamati.

A tale quesito risponde il seguente teorema che si deduce facilmente dal lemma 3.4 di VOLEVICH e PANEYAKH [12] e dalla proposizione 3.4.

TEOREMA 4.1 — *Sia* $s \in R_o^+$ *e* $\Omega \subseteq R^2$; *allora*:

a) $H_{\bar{\Omega}}^s(R^2)$ *è un sottospazio completo di* $H^s(R^2)$;

b) *se* Ω *ha la proprietà di segmento, si ha*:

$$H_{\bar{\Omega}}^s(R^2) = H_o^\mu(\Omega) \subseteq W_o^s(\Omega)$$

in senso algebrico e topologico;

c) *se* Ω *ha la proprietà di segmento, ed inoltre si presenta uno dei tre casi seguenti*:

$c_1)$ $s \in N_o$; $c_2)$ $\Omega = R^2$; $c_3)$ Ω *limitato e di classe* $C^{[s]+1}$ *e* $s - \frac{1}{2} \notin N^o$;

allora si ha $H_\Omega^s(R^2) = H_o^\mu(\Omega) = W_o^s(\Omega)$ *in senso algebrico e topologico. Se, essendo* Ω *sempre limitato e di classe* $C^{[s]+1}$, $s - \frac{1}{2}$ *è intero, l'ultima eguaglianza non sussiste avendosi l'inclusione propria* $H_o^\mu(\Omega) \subset W_o^s(\Omega)$.

Dim. — Al fine di dimostrare il punto a), si osservi che se $\{u_n\}_{n\in N}$ è una successione di elementi di $H_\Omega^s(R^2)$ che converge ad una $u \in H^s(R)$, poiché è $\|u\|_o \leq \|u\|_s$, la $\{u_n\}_{n\in N}$ converge ad u in media quadratica. Si può allora estrarre dalla $\{u_n\}_{n\in N}$ una successione $\{u_{n_k}\}_{k\in N}$ che converge q.o. in R^2 a u; ne deriva $u = 0$ q.o. in $R^2 - \bar{\Omega}$ e quindi $u \in H_{\bar{\Omega}}^s(R^2)$. Il punto a) è così dimostrato.

Dimostriamo adesso il punto b); per quanto riguarda l'eguaglianza $H_{\bar{\Omega}}^s(R^2) = H_o^\mu(\Omega)$ essa discende dal lemma 3.4 pag. 20 di VOLEVICH e PANEYAKH [12]. Ci limitiamo soltanto ad osservare che l'inclusione $H_o^\mu(\Omega) \subseteq H_{\bar{\Omega}}^s(H^2)$ è banale e vale qualunque sia Ω e che la proprietà di ammissibilità per Ω, richiesta nel lemma 3.4 di Volevich e Paneyakh per dimostrare l'inclusione inversa, equivale alla proprietà di segmento.

Dimostriamo l'inclusione $H_o^\mu(\Omega) \subseteq W_o^s(\Omega)$. A tale scopo si osservi che $H_o^\mu(\Omega)$ e $W_o^s(\Omega)$ sono completamenti di $C_o^\infty(\Omega) = \{u \in C_o^\infty(R^2)$: supp $u \subset \Omega\}$ rispettivamente rispetto alle norme $\|u\|_s$ e $\|u\|_{W^s(\Omega)}$.

Risulta:

$$\| u \|_{W^s(\Omega)} \leq \| u \|_{W^s(R^2)} \leq K \| u \|_s \qquad \forall u \in C_o^\infty(\Omega)$$

avendo tenuto conto dell'equivalenza delle norme $\| u \|_s$ e $\| u \|_{W^s(R^2)}$.

La maggiorazione scritta dimostra l'inclusione algebrica e topologica di $H_o^s(\Omega)$ in $W_o^s(\Omega)$.

Relativamente al punto c) cominciamo con l'osservare che, se $s \in N_o$, si ha:

$$\| u \|_s \leq K \| u \|_{W^s(R^2)} = K \| u \|_{W^s(\Omega)} \qquad \forall u \in C_o^\infty(\Omega)$$

e quindi resta dimostrato che $W_o^s(\Omega)$ è contenuto in $H_o^s(\Omega)$ in senso algebrico e topologico; pertanto in tale caso, supposto sempre che Ω abbia la proprietà di segmento, vale l'eguaglianza asserita in c) in senso algebrico e topologico.

Alla stessa conclusione si perviene ovviamente nell'ipotesi c_2).

Consideriamo ora il caso che Ω sia limitato, di classe $C^{[s]+1}$ e $s \in R_o^+ - \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n + \frac{1}{2}, \ldots \right\}$.

In queste ipotesi, per la proposizione 4.1, l'operatore di prolungamento nullo $u \to \tilde{u}$ è continuo da $W_o^s(\Omega)$ a $W^s(R^2)$; quindi $\exists K > 0$:

$$\| \tilde{u} \|_{W^s(R^2)} \leq K \| u \|_{W_o^s(\Omega)} \qquad \forall u \in W_o^s(\Omega)$$

Varrà allora anche una maggiorazione del tipo:

$$\| \tilde{u} \|_s \leq K' \| u \|_{W_o^s(\Omega)} \qquad \forall u \in C_o^\infty(\Omega)$$

e quindi l'inclusione algebrica e topologica:

$$W_o^s(\Omega) \subseteq H_o^s(\Omega)$$

nonché l'eguaglianza:

$$H_{\tilde{\Omega}}^s(R^2) = H_o^s(\Omega) = W_o^s(\Omega)$$

sempre in senso algebrico e topologico.

Consideriamo infine il caso che, Ω essendo sempre limitato e di classe $C^{[s]+1}$, s coincida con uno dei valori eccezionali $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n + \frac{1}{2}, \ldots$ In questo caso, in base alla proposizione 4.1 esistono

funzioni di $W_0^s(\Omega)$ che (prolungate a zero fuori di Ω) non appartengono a $W^s(R^2) = H^s(R^2)$ e quindi non si trovano in $H_0^\mu(\Omega)$.

Il teorema 4.1 è così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONI

Nel teorema 4.1 l'ipotesi $\Omega \subseteq R^2$ è stata fatta perché è in tale ipotesi che stiamo studiando $H_{\bar{\Omega}}^s(R^2)$, ma è ovvio che il teorema continua a sussistere se Ω è un qualsiasi aperto di R^n.

È da osservare infine che per denotare la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^s(R^2)$ non abbiamo ritenuto opportuno sostituire il simbolo $H_0^\mu(\Omega)$ (adottato da Volevich e Paneyakh) col simbolo $H_0^s(\Omega)$, perché tale secondo simbolo è abitualmente usato per indicare la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ non in $H^s(R^2)$ ma in $H^s(\Omega)$, essendo $H^s(\Omega)$ lo spazio di Banach, definito col cosiddetto metodo di interpolazione « complesso », che viene detto spazio potenziale di Bessel e, talvolta, spazio di Lebesgue, e che coincide, quando $\Omega \equiv R^2$, con lo spazio $H^s(R^2)$ (vedi E. MAGENES [5] pag. 165).

D'altronde, essendo noto che per Ω limitato e sufficientemente regolare, $H^s(\Omega)$ coincide con $W^s(\Omega)$ (cfr. E. MAGENES [5] pag. 166) e quindi $H_0^s(\Omega) = W_0^s(\Omega)$, il teorema 3.3 permette di chiarire il rapporto tra $H_0^\mu(\Omega)$ e $H_0^s(\Omega)$: se Ω è limitato e sufficientemente regolare, si ha: $H_0^\mu(\Omega) = H_0^s(\Omega)$ in senso algebrico e topologico se $s - \frac{1}{2} \notin N_0$; se invece $s - \frac{1}{2} \in N_0$ risulta: $H_0^\mu(\Omega) \subset H_0^s(\Omega)$.

Finalmente, tenendo conto del teorema 3.1 di caratterizzazione $H_{\bar{\Omega}}^s(R)$ in base alla sommabilità delle derivate di ordine frazionario, e tenendo presente il teorema 4.1 ora dimostrato, possiamo pervenire al seguente teorema di caratterizzazione dello spazio di Sobolev di ordine frazionario $W_0^s(\Omega)$:

TEOREMA 4.2. — *Sia* $s \in R_0^+$, $s - \frac{1}{2} \notin N_0$, Ω *un aperto limitato di* R^2 *di classe* $C^{[s]+1}$. *Lo spazio* $W_0^s(\Omega)$, *quando le sue funzioni si considerino prolungate a zero fuori di* $\bar{\Omega}$, *è costituito da tutte e sole le funzioni* u *di* $L^2(R^2)$ *con supporto contenuto in* $\bar{\Omega}$ *e con derivate di ordine frazionario* $D^\alpha u$ *sommabili* $L^2(R^2)$ *per* $\alpha \in R_0^+ \times R_0^+$ *e* $|\alpha| \leq s$.

Dal teorema 4.1 e dal teorema 3.2 che caratterizza la convergenza in $H_{\bar{\Omega}}^s(R^2)$ si deduce il seguente teorema che caratterizza la convergenza in $W_0^s(\Omega)$.

TEOREMA 4.3. — *Sia* $s \in R_0^+$ *e* $s - \frac{1}{2} \notin N_0$ *e sia* Ω *un aperto limitato di* R^2 *di classe* $C^{[s]+1}$. *Una successione* $\{u_n\}_{n\in N}$ *di elementi di* $W_0^s(\Omega)$ *è convergente a una funzione* $u \in W_0^s(\Omega)$ *se e solo se la successione* $\{D^\alpha u_n\}_{n\in N}$ *converge a* $D^\alpha u$ *in* $L^2(R^2)$ $\forall \alpha \in R_0^+ \times R_0^+$ *con* $|\alpha| \leq s$.

Dal teorema 4.1 e dal teorema 3.1 segue poi il seguente teorema di caratterizzazione di $H_0^\mu(\Omega)$, valido senza eccezioni per s.

TEOREMA 4.4. — *Se* Ω *è un aperto limitato godente della proprietà di segmento e se* $s \in R_0^+$, *allora* $H_0^\mu(\Omega)$ *coincide con l'insieme di tutte e sole le funzioni* $u \in L^2(R^2)$ *col supporto contenuto in* $\bar{\Omega}$ *e dotate di derivate di ordine frazionario* $D^\alpha u \in L^2(R^2)$ $\forall \alpha \in R_0^+ \times R_0^+$ *tale che* $|\alpha| \leq s$. *Risulta inoltre* $\|D^\alpha u\|_0 \leq \|u\|_s$ $\forall u \in H_0^\mu(\Omega)$.

Una successione $\{u_n\}_{n\in N}$ *di elementi di* $H_0^\mu(\Omega)$ *converge ad una funzione* $u \in H_0^\mu(\Omega)$ *se e solo se* $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ *in* $L^2(R^2)$ $\forall \alpha \in R_0^+ \times R_0^+$ *tale che* $|\alpha| \leq s$.

Vogliamo ora precisare alcune questioni sulle tracce delle derivate di ordine frazionario per le funzioni di $W_0^s(\Omega)$.

Sia $s > \frac{1}{2}$ e sia Ω un aperto limitato contenuto in R^2 e di classe $C^{[s]+1}$. È noto che in tali ipotesi una funzione $u \in W^s(\Omega)$ è dotata di traccia γu su $\partial\Omega$ a quadrato sommabile, insieme alle sue derivate di ordine intero $D^\alpha u$ con $|\alpha| < s - \frac{1}{2}$; si ha inoltre:

$$\gamma D^\alpha u \in W^{s-|\alpha|-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad \text{per} \quad |\alpha| < s - \frac{1}{2}.$$

(cfr. ad esempio E. MAGENES [5] teorema 2.7 oppure USPENSKII [11.I]).

In particolare, se $u \in W_0^s(\Omega)$ si ha $\gamma D^\alpha u = 0$ per $\alpha \in N_0 \times N_0$ e $|\alpha| < s - \frac{1}{2}$.

Ora in base al teorema 4.2, se $s - \frac{1}{2} \notin N_0$ una $u \in W_0^s(\Omega)$ (prolungata a zero fuori di Ω) è dotata di derivate di ordine frazionario, $D^\alpha u$, a quadrato sommabile in R^2 per $\alpha \in R_0^+ \times R_0^+$ e $|\alpha| \leq s$.

Viene naturale domandarsi se anche tali derivate di ordine frazionario, $D^\alpha u$, sono dotate di tracce su $\partial\Omega$ a quadrato sommabile per $\alpha \in R_0^+ \times R_0^+$ e $|\alpha| < s - \frac{1}{2}$ e se tali tracce sono ancora nulle.

Vale in proposito il seguente teorema:

TEOREMA 4.5. — *Sia* $s > \frac{1}{2}$ *e* $s - \frac{1}{2} \notin \mathrm{N}$ *e sia* Ω *un aperto limitato di* R^2 *di classe* $\mathrm{C}^{[s]+1}$. *Se* $u \in \mathrm{W}_o^s(\Omega)$, *la* u *e le sue derivate di ordine frazionario* $\mathrm{D}^\alpha u$ *sono dotate di tracce a quadrato sommabile su* $\partial\Omega \ \forall \alpha \in \mathrm{R}_o^+ \times \mathrm{R}_o^+ : |\alpha| < s - \frac{1}{2}$.

Tali tracce non sono necessariamente nulle.

Dim. — Sia $u \in \mathrm{W}_o^s(\Omega)$: il prolungamento di u nullo fuori di Ω è una funzione di $\mathrm{H}_{\bar{\Omega}}^s(\mathrm{R}^2)$ per il teorema 4.1. Si verifica facilmente che la derivata di ordine frazionario $\mathrm{D}^\alpha u$ è una funzione di $\mathrm{H}^{s-|\alpha|}(\mathrm{R}^2)$ se $\alpha \in \mathrm{R}_o^+ \times \mathrm{R}_o^+$ e $|\alpha| \leq s$. Infatti risulta, per la (2.11):

$$(1 + |\xi|^2)^{s-|\alpha|} \, |\widehat{\mathrm{D}^\alpha u}|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^{s-|\alpha|} \, |\hat{u} \cdot \hat{\varphi}_{-\alpha}|^2$$

$$\leq (1 + |\xi|^2)^{s-|\alpha|} \, |\hat{u}|^2 \, |\xi|^{2|\alpha|} \leq (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}|^2 \in \mathrm{L}^1(\mathrm{R}^2)$$

Se $|\alpha| < s - \frac{1}{2}$, si ha $s - |\alpha| > \frac{1}{2}$ e quindi $\mathrm{D}^\alpha u$, quale funzione di $\mathrm{H}^{s-|\alpha|}(\mathrm{R}^2)$ è dotata di traccia a quadrato sommabile su $\partial\Omega$ $\gamma \, \mathrm{D}^\alpha u$ (cfr. teorema 2.7 di E. MAGENES [5]).

Si osservi ora che, per l'osservazione 2 relativa ai supporti delle derivate di ordine generalizzato, si ha che $\mathrm{D}^\alpha u$ è una funzione di $\mathrm{H}^{s-|\alpha|}(\mathrm{R}^2)$, ma non necessariamente di $\mathrm{H}_{\bar{\Omega}}^{s-|\alpha|}(\mathrm{R}^2) = \mathrm{H}_o^{\mu_{(s-|\alpha|)}}(\Omega)$. Ne deriva che la traccia su $\partial\Omega$ di $\mathrm{D}^\alpha u$, $\gamma \, \mathrm{D}^\alpha u$, non è necessraiamente nulla.

Il teorema 4.5 è così completamente dimostrato.

5. - UN PROBLEMA ASSOCIATO AD UNA FORMA BILINEARE IN CUI COMPAIONO DERIVATE DI ORDINE FRAZIONARIO

Sia Ω un aperto limitato di R^2, siano u e v delle funzioni appartenenti allo spazio $\mathrm{H}_{\bar{\Omega}}^s(\mathrm{R}^2)$ $(s \geq 0)$ e sia J una parte finita di $\mathrm{R}_o^+ \times \mathrm{R}_o^+$ costituita da biindici α con $|\alpha| \leq s$, tali che, posto $\mathrm{J}_s = \{\alpha \in \mathrm{J} : |\alpha| = s\}$, risulti $\mathrm{J}_s \neq \Phi$.

Consideriamo delle funzioni $a_{\alpha\beta}$, con α e β appartenenti a J, verificanti la condizione:

a) $a_{\alpha\beta}$ sono misurabili e limitate in R^2, e costanti per α e $\beta \in \mathrm{J}_s$.

Definiamo in $H_{\bar{\Omega}}^s(R^2)$ la forma bilineare:

$$B(u, v) = \int_{R^2} \sum_{(\alpha,\beta)\in J^2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \overline{D^\beta v} \, dx \tag{5.1}$$

Relativamente a tale forma bilineare vale il seguente:

LEMMA 5.1. — *Nella ipotesi* a) *la forma bilineare* $B(u, v)$ *verifica la condizione*:

$$\exists c_1 > 0 : |B(u, v)| \leq c_1 \|u\|_s \cdot \|v\|_s \qquad \forall (u, v) \in [H_{\bar{\Omega}}^s(R^2)]^2 \tag{5.2}$$

Dim. — Infatti, poiché i coefficienti $a_{\alpha\beta}$ sono limitati, applicando la diseguaglianza di Schwarz si ha:

$$|B(u, v)| = \left| \sum_{J^2} \int_{R^2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \overline{D^\beta v} \, dx \right| \leq M \sum_{J^2} \int_{R^2} |D^\alpha u| \, |D^\beta v| \, dx$$

$$\leq M \sum_{J^2} \left(\int_{R^2} |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{R^2} |D^\beta v|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$= M \sum_{J^2} \left[(2\pi)^{-2} \int_{R^2} |\widehat{D^\alpha u}|^2 \, d\xi \right]^{1/2} \left[(2\pi)^{-2} \int_{R^2} |\widehat{D^\beta v}|^2 \, d\xi \right]^{1/2}$$

$$= M \sum_{J^2} \left[(2\pi)^{-2} \int_{R^2} |\hat{\Phi}_{-\alpha}|^2 \cdot |\hat{u}|^2 \, d\xi \right]^{1/2} \left[(2\pi)^{-2} \int_{R^2} |\hat{\Phi}_{-\beta}|^2 |\hat{v}|^2 \, d\xi \right]^{1/2}$$

$$\leq M \sum_{J^2} \left[(2\pi)^{-2} \int_{R^2} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}|^2 \, d\xi \right]^{1/2} \left[(2\pi)^{-2} \int_{R^2} |\xi|^{2|\beta|} |\hat{v}|^2 \, d\xi \right]^{1/2}$$

$$\leq M \cdot n \, \|v\|_s \cdot \|u\|_s$$

(Avendo indicato con n il numero dei termini della sommatoria).

Supponiamo inoltre soddisfatta la condizione:

b) $\exists c_0 > 0 : Re \sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta} \hat{\Phi}_{-\alpha}(\xi) \overline{\hat{\Phi}}_{-\beta}(\xi) \geq c_0 |\xi|^{2s} \qquad \forall \xi \in R^2$

Si osservi che se s è intero e se si considerano solo biindici $\alpha, \beta \in N_o \times N_o$ la condizione b) equivale, in base alla (2.13)[5] a:

$$Re \sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta} \xi^{\alpha+\beta} \geq c_o |\xi|^{2s} \quad \forall \xi \in R^2$$

cioè alla ipotesi che la forma bilineare $B(u, v) = \int_{R^2} \sum_{\substack{|\alpha| \leq s \\ |\beta| \leq s}} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \, \overline{D^\beta v} \, dx$ sia uniformemente fortemente ellittica.

Vale il seguente teorema che generalizza la diseguaglianza di Gårding:

TEOREMA 5.1. — *Se si fanno le ipotesi* a) *e* b) *e si suppone inoltre che* $(0, 0) \in J$, *allora esiste una costante* $\lambda_o > 0$ *tale che se* $Re\, a(x) = Re\, a_{(0,0)(0,0)}(x) \geq \lambda_o \ \forall x \in R^2$, *risulta*:

$$\exists c_2 > 0 : Re\, B(u, u) \geq c_2 \|u\|_s^2 \qquad \forall u \in H_\Omega^s(R^2). \tag{5.3}$$

Dim. — Si ha:

$$\begin{aligned} Re\, B(u, u) &= Re \int_{R^2} \sum_{J^2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \, \overline{D^\beta u} \, dx \\ &\geq Re \int_{R^2} \Big(\sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \, \overline{D^\beta u} + a u \bar{u}\Big) dx - \\ &- \Big| \int_{R^2} \sum_{J^2 - J_s^2 - \{(0,0),(0,0)\}} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \, \overline{D^\beta u} \, dx \Big| \end{aligned} \tag{5.4}$$

Allo scopo di ottenere la (5.3) minoreremo in modo opportuno il primo termine che compare all'ultimo membro della (5.4) e maggioreremo il secondo. Tenendo conto della formula di Parseval, possiamo intanto scrivere:

$$\begin{aligned} &Re \int_{R^2} \Big(\sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \, \overline{D^\beta u} + a u \bar{u}\Big) dx \\ &= Re\, (2\pi)^{-2} \sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta} \int_{R^2} \widehat{D^\alpha u} \, \overline{\widehat{D^\beta u}} \, d\xi + Re \int_{R^2} a(x) |u|^2 \, dx \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{R^2} Re \sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta} \hat{\Phi}_{-\alpha} \bar{\hat{\Phi}}_{-\beta} |\hat{u}|^2 \, d\xi + Re \int_{R^2} a(x) |u|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{5.5}$$

[5] Si osservi che nella (2.13) in luogo di $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ figura $\zeta = (\xi, \eta)$.

In virtù dell'ipotesi b) si ha facilmente da (5.5):

$$(5.6)\qquad \mathrm{Re}\int_{R^2}\Big(\sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta u} + a\,u\,\bar{u}\Big)\,dx$$

$$\geq c_o\,(2\pi)^{-2}\int_{R^2}(1+|\xi|^{2s})\,|\hat{u}|^2\,d\xi - c_o\,(2\pi)^{-2}\int_{R^2}|\hat{u}|^2\,d\xi$$

$$+ \inf \mathrm{Re}\, a(x)\int_{R^2}|u|^2\,dx$$

$$\geq \frac{c_o}{2^{s-1}}\,\|u\|_s^2 + [\inf \mathrm{Re}\, a(x) - c_o]\,\|u\|_o^2$$

D'altro canto risulta, per la limitatezza degli $a_{\alpha\beta}$ e per la diseguaglianza di Schwarz:

$$(5.7)\qquad \left|\int_{R^2}\sum_{J^2-J_s^2-\{((0,0),(0,0))\}} a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta u}\,dx\right| \leq \sum_{J^2-J_s^2-\{((0,0),(0,0))\}} M_{\alpha\beta}\,\|u\|_\alpha\,\|u\|_\beta$$

$$\leq K\,\|u\|_s\cdot\|u\|_{s'} \leq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\,\|u\|_s^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\,\|u\|_{s'}^2\right)$$

avendo posto $s' = \max_{\alpha\in J-J_s} |\alpha|$ $(s' < s)$, ed avendo utilizzato la diseguaglianza:

$$2\,|ab| \leq \varepsilon\,|a|^2 + \varepsilon^{-1}\,|b|^2 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Ricaviamo allora da (5.4), (5.6) e (5.7):

$$(5.8)\qquad \mathrm{Re}\,B(u,u) \geq \left(\frac{c_o}{2^{s-1}} - \frac{K\varepsilon}{2}\right)\|u\|_s^2 +$$

$$+ \inf \mathrm{Re}\,(a(x) - c_o)\,\|u\|_o^2 - \frac{K\varepsilon^{-1}}{2}\,\|u\|_{s'}^2$$

Fissiamo ε in modo che si abbia $\frac{c_o}{2^{s-1}} - \frac{K\varepsilon}{2} > 0$ e poniamo:

$$K_1 = \frac{c_o}{2^{s-1}} - \frac{K\varepsilon}{2},\quad K_2 = \frac{K\varepsilon^{-1}}{2}$$

Possiamo allora riscrivere la (5.8) nella forma:

$$\text{(5.9)} \qquad \mathrm{Re}\, B(u,u) \geq K_1 \| u \|_s^2 + (\inf \mathrm{Re}\, a(x) - c_0) \| u \|_0^2 - K_2 \| u \|_{s'}^2$$

Ora, in base alla proposizione (3.3), poiché $0 < s' < s$, $\forall \eta > 0$ $\exists c_\eta > 0$ per cui vale la diseguaglianza:

$$\| u \|_{s'}^2 \leq \eta \| u \|_s^2 + c_\eta \| u \|_0^2$$

Di qui e dalla (5.9), segue:

$$\text{(5.10)} \quad \mathrm{Re}\, B(u,u) \geq (K_1 - \eta K_2) \| u \|_s^2 + (\inf \mathrm{Re}\, a(x) - c_0 - K_2 c_\eta) \| u \|_0^2$$

Fissiamo ora η in modo che $K_1 - \eta K_2 > 0$: posto $c_2 = K_1 - \eta K_2$ e $\lambda_0 = c_0 + K_2 c_\eta$ si ricava dalla (5.10) che, se $\inf \mathrm{Re}\, a(x) \geq \lambda_0$ allora risulta:

$$\mathrm{Re}\, B(u,u) \geq c_2 \| u \|_s^2$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE — Alla condizione b) si soddisfa ad esempio se:

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} = 0 \text{ per } \alpha, \beta \in J_s \text{ e } \alpha \neq \beta; \\ a_{\alpha\beta} = 1 \text{ per } \alpha, \beta \in J_s \text{ e } \alpha = \beta; \\ (s,0), (0,s) \in J_s \ (\Rightarrow a_{(s,0)(s,0)} = a_{(0,s)(0,s)} = 1) \end{cases}$$

In tal caso si ha infatti, per la (2.12):

$$\sum_{J_s^2} a_{\alpha\beta} \hat{\Phi}_{-\alpha}(\xi) \hat{\Phi}_{-\beta}(\xi) = \sum_{\alpha \in J_s} \hat{\Phi}_{-\alpha}(\xi) \hat{\Phi}_{-\alpha}(\xi)$$

$$= \sum_{\alpha \in J_s} |\hat{\Phi}_{-\alpha}(\xi)|^2 = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in J_s} |\xi_1|^{2\alpha_1} |\xi_2|^{2\alpha_2}$$

$$\geq |\xi_1|^{2s} + |\xi_2|^{2s} \geq \frac{1}{2^{s-1}} [|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2]^s = \frac{|\xi|^{2s}}{2^{s-1}}$$

Consideriamo ora il seguente problema:

(I) Assegnata $f \in L^2(R^2)$ determinare $v \in H_\Omega^s(R^2)$ in modo che risulti $B(u,v) = (u,f)_0$ $\forall u \in H_\Omega^s(R^2)$.

È possibile dimostrare il seguente teorema di esistenza e unicità per il problema (I).

TEOREMA 5.2. — *Supponiamo verificare le ipotesi* a) *e* b) *e supponiamo ancora che* $\mathrm{Re}\, a(x) \geq \lambda_0 \ \forall x \in \mathrm{R}^2$ *ove* $\lambda_0 > 0$ *è la costante che compare nel teorema* 5.1. *Allora il problema* (I) *ammette una ed una sola soluzione.*

Dim. — Fissata $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^2)$, $(u, f)_0$ definisce un funzionale lineare e continuo su $\mathrm{H}_{\bar{\Omega}}^s(\mathrm{R}^2)$ in quanto si ha:

$$|(u, f)_0| \leq \|u\|_0 \cdot \|f\|_0 \leq \|u\|_s \cdot \|f\|_0$$

Dopo ciò l'asserto segue immediatamente dal teorema 5.1, dal lemma 5.1 e dal teorema di Lax-Milgram.

OSSERVAZIONE — Se in luogo della forma bilineare (5.1) si considera la forma bilineare:

$$\mathrm{B}'(u, v) = \int_\Omega \sum_{J^2} a_{\alpha\beta}\, \mathrm{D}^\alpha u\, \mathrm{D}^\beta v\, dx$$

dove compaiono le restrizioni ad Ω delle derivate di ordine generalizzato $\mathrm{D}^\alpha u$ e $\mathrm{D}^\beta v$, non si riesce a dimostrare il teorema 5.1: infatti, come è già stato messo in rilievo in una osservazione precedente, pure avendo u e v i supporti contenuti in $\bar{\Omega}$, in generale non altrettanto accade per le derivate di ordine generalizzato di u e v e quindi (non potendosi porre

$$\int_\Omega \sum_{J^2} a_{\alpha\beta}\, \mathrm{D}^\alpha u\, \overline{\mathrm{D}^\beta v}\, dx = \int_{\mathrm{R}^2} \sum_{J^2} a_{\alpha\beta}\, \mathrm{D}^\alpha u\, \overline{\mathrm{D}^\beta v}\, dx$$

risulta in tale caso impossibile applicare l'eguaglianza di Parseval come viene fatto nella (5.5).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).

[2] I. M. GUELFAND e G. E. CHILOV, *Les distributions*, Tomo I, Dunod, Parigi (1972).

[3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin (1963).

[4,I] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problemes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Dunod, Parigi (1968).

[4,II] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problemi ai limiti non omogenei,* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. XV (1961).

[5] E. MAGENES, *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali,* Atti del VII Congresso dell'U.M.I. (1963), 134-197.

[6] C. MIRANDA, *Istituzioni di Analisi funzionale lineare,* Edizioni U.M.I. (1978).

[7] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques,* Masson, Paris (1967).

[8] O. A. OLEYNIK - E. V. RADKEVIČ, *Second order equations with nonnegative characteristic form,* Amer. Math. Soc., Providence Rhode Island and Plenum Press, New York (1973).

[9] L. M. SLOBODECKĬI, *Generalized Sobolev Spaces and theyr applications to boundary problems for partial differential equations,* Amer. Math. Soc. Transl., (2), vol. 57, 207-275, (1966).

[10] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of functions,* Princeton University Press, Princeton, New Jerscy (1970).

[11,I] S. V. USPENSKII, *An Imbedding theorem for S. L. Sobolev classes of fractional order* W_p^r , Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 132-133.

[11,II] S. V. USPENSKII, *Properties of the classes* W_p^r *with fractional derivatives and differentiable manifolds,* Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 495-497.

[11,III] S. V. USPENSKII, *Imbedding theorems for generalized Sobolev Classes* W_p^r , Amer. Math. Soc. Transl., (2), vol. 90, (1970), 45-79.

[12] L. R. VOLEVICH - B. P. PANEYAKH, *Certain Spaces of generalized functions and imbedding theorems,* Surveys Russian, (1975), 1-73.

[13] K. YOSIDA, *Functional Analysis,* Springer-Verlag, Berlin (1968).

[14] A. ZYGMUND, *A theorem on fractional derivatives,* Duke Math. J., **12** (1945), 455-464.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, C. Miranda e G. Cimmino.

n-Quasigruppi mediali idempotenti commutativi

Nota di ELVIRA NATALE *

presentata dal socio corrispondente VITTORIO DALLA VOLTA

(Adunanza del 7 aprile 1979)

SOMMARIO. — Si studiano gli n-quasigruppi cui si perviene assiomatizzando l'operazione n-aria definita sopra ogni gruppo abeliano univocamente n-divisibile da $x_1 x_2 \ldots x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$.

SUMMARY. — In the present paper I study the n-quasigroups obtained by axiomatizing the composition law $(x_1 + x_2 + \ldots x_n)/n$ defined in a uniquely n-divisible abelian group G (+).

1. INTRODUZIONE

Sia $G = E(+)$ un gruppo abeliano univocamente n-divisibile, n intero > 1 cioè $\forall\, a \in E$ l'equazione $n\,x = a$, x variabile in E, è univocamente risolubile. In tale ipotesi, come è subito visto, l'operazione n-aria, $(_n)$ definita su E da:

1.0) $(_n)$: $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in E^n \to x_1 x_2 \ldots x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$

soddisfa ai seguenti assiomi:

1.1) n-Q, di n-quasigruppo:

per $i = 1, \ldots, n$, l'equazione $a_1 \ldots a_{i-1}\, x\, a_{i+1} \ldots a_n = b$, x variabile in E, è univocamente risolubile;

1.2) M, *medialità*:

$$(a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n})\,(a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n}) \ldots (a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn}) =$$

$$= (a_{11}\, a_{21} \ldots a_{n1})\,(a_{12}\, a_{22} \ldots a_{n2}) \ldots (a_{1n}\, a_{2n} \ldots a_{nn})$$ [1]

* Assistente ordinario presso l'Accademia Aeronautica di Pozzuoli.

[1] Gli n-quasigruppi mediali sono stati introdotti da K. TOYODA in [7]. Essi generalizzano i corrispondenti quasigruppi, D. C. MURDOCH, [3], [4], K. TOYODA, [6], [7],

1.3) I, *idempotenza*:

$$\underbrace{a\,a\ldots a}_{n} = a$$

1.4) C, *commutatività*:

il prodotto $a_1\,a_2\ldots a_n$ non dipende dall'ordine dei fattori;

tutto ciò $\forall\, a_j,\ b,\ a_{ik},\ a \in \mathrm{E},\ j, i, k = 1, \ldots, n.$

Scopo della presente Nota è lo studio dei sistemi n-ari $\mathrm{S} = \mathrm{E}(_n)$ soddisfacenti agli assiomi 1.1-1.4 e cioè degli n-quasigruppi mediali idempotenti commutativi, più brevemente n-Q.M.I.C.

Per dare concretezza alla presente ricerca, prima di esporre il contenuto, ricordiamo che il gruppo abeliano $\mathrm{V}(+)$ di uno spazio vettoriale sopra un campo Γ la cui caratteristica p non divide n è univocamente n-divisibile; in particolare è tale il gruppo additivo di Γ; inoltre, come si riconosce facilmente:

un gruppo abeliano finito, di ordine m, è univocamente n-divisibile se, e soltanto se, m ed n sono primi tra loro.

Dopo brevi richiami (n. 2) si prova che se $\mathrm{S} = \mathrm{E}(_n)$ è un qualsivoglia n-Q.M.I.C., esiste un gruppo abeliano su E, univocamente n-divisibile, $\mathrm{G} = \mathrm{E}(+)$, che genera, mediante la (1.0), l'operazione di S; i gruppi abeliani generatori di S sono tra loro isomorfi e sono tutti e soli i quasigruppi $\mathrm{S}_h^+ = \mathrm{E}(\overset{h}{+})$ definiti da:

$$(x \overset{h}{+} y)\underbrace{h\ldots h}_{n-1} = x\,y\underbrace{h\ldots h}_{n-2}$$

Si caratterizza, poi (n. 3) l'insieme degli omomorfismi tra n-Q.M.I.C., S e S′, in termini di gruppi generatori G e G′. Si trova, in particolare, il gruppo degli automorfismi di un n-Q.M.I.C.

2. Notazioni e richiami

Se E, E′ sono insiemi non vuoti, il corrispondente di $x \in \mathrm{E}$ in una applicazione $\theta : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ sarà indicato con $x\,\theta$.

Se $\mathrm{Q} = \mathrm{E}(*)$ è un quasigruppo, in particolare un gruppo, con δ_a^{Q} si indicherà la traslazione destra, rispetto a Q, determinata da $a \in \mathrm{E}$:

$$\delta_a^{\mathrm{Q}} : x \in \mathrm{E} \to x * a \in \mathrm{E}$$

R. H. Bruck, [2], e rientrano, come caso particolare, nella classe di strutture algebriche a più operazioni n, m-arie, recentemente introdotta da V. D. Belousov in [1].

Se $S = E(_n)$, $S' = E'(_n)$ sono n-quasigruppi, una applicazione θ tra i loro sostegni E, E' potrà anche essere indicata con $\theta : S \to S'$ se θ è un omomorfismo di S in S'; in ogni caso $x \in S$ sta per $x \in E$. Ricordiamo che:

2.1) se $Q = E(\cdot)$ è un quasigruppo mediale e $h \in Q$ è idempotente, $h \cdot h = h$, allora la traslazione

$$\delta_h^Q : x \in E \to x \cdot h \in E$$

è un automorfismo di Q;

se, inoltre, Q è commutativo, il quasigruppo $Q_h^+ = E(\overset{h}{+})$ definito da:

$$x \overset{h}{+} y = (x \cdot y)(\delta_h^Q)^{-1}$$

è un gruppo abeliano (cfr. ad es. [2], pag. 46, teorema 12) di cui h è l'elemento nullo.

3. n-Q.M.I.C.

Sia $S = E(_n)$ un n-Q.M.I.C., vale a dire un sistema n-ario soddisfacente gli assiomi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Si osservi anzitutto, che in virtù di 1.1., agli assiomi 1.2 e 1.4 può sostituirsi il seguente:

3.1) *il prodotto* $(a_{11} \dots a_{1n})(a_{21} \dots a_{2n}) \dots (a_{n1} \dots a_{nn})$ *non dipende dall'ordine degli* $a_{ik} \in E$, $i, k = 1, \dots n$.

3.2) LEMMA. — *Sia* $S = E(_n)$ *un* n-Q.M.I.C. *Fissato comunque* $h \in E$, *il quasigruppo* $S_h = E(\overset{h}{\cdot})$, *con*

3.2.1) $$x \overset{h}{\cdot} y = x\, y \underbrace{h \dots h}_{n-2}, \quad (x, y) \in E^2$$

è mediale commutativo, e, rispetto ad esso, h è idempotente. Pertanto, a norma di 2.1, *posto per semplicità di notazione* $\delta_h^{S_h} = \delta_h$ *e cioè:*

3.2.2) $$\delta_h : z \in E \to z \cdot h = z \underbrace{h \dots h}_{n-1} \in E,$$

il quasigruppo $S_+^h = E(\overset{h}{+})$ *definito da*

3.2.3) $$x \overset{h}{+} y = (x \cdot y)\,\delta_h^{-1}\,,\quad (x, y) \in E^2$$

è un gruppo abeliano di cui h *è l'elemento nullo.*

Risulta identicamente:

3.2.4) $$(x_1 \overset{h}{+} x_2 \overset{h}{+} \ldots \overset{h}{+} x_n)\,\delta_h = x_1\, x_2 \ldots x_n$$

e quindi

3.2.5) $$n\,x = \underbrace{x \overset{h}{+} x \overset{h}{+} \ldots \overset{h}{+} x}_{n} = x\,\delta_h^{-1}\,.$$

Dimostrazione. — $S_h = E(\overset{h}{\cdot})$ è chiaramente un quasigruppo commutativo in quanto $S = E(_n)$ è un n-quasigruppo commutativo; S_h è mediale giacché, tenuto conto di I e di 3.1, per $(x, y, z, t) \in E^4$,

$$(x \overset{h}{\cdot} y) \overset{h}{\cdot} (z \overset{h}{\cdot} t) = (x\, y \underbrace{h \ldots h}_{n-2})(z\, t \underbrace{h \ldots h}_{n-2}) \underbrace{h \ldots h}_{n-2} =$$

$$= (x\, z\, h \ldots h)(y\, t\, h \ldots h)\, h \ldots h = (x \overset{h}{\cdot} z) \overset{h}{\cdot} (y \overset{h}{\cdot} t)$$

Inoltre $h \cdot h = h\, h \underbrace{h \ldots h}_{n-2} = h$, per I; e quindi in S_h h è idempotente.

Per stabilire la 3.2.4 proviamo che per s intero, $2 \leq s \leq n-1$, risulta identicamente in $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1} \in E$

3.2.6) $$(x_1\, x_2 \ldots x_s \underbrace{h \ldots h}_{n-s})\,\delta_h^{s-2} \cdot x_{s+1}\,\delta_h^{s-1} = (x_1\, x_2 \ldots x_s\, x_{s+1} \underbrace{h \ldots h}_{n-s-1})\,\delta_h^{s-1}$$

A tale scopo, tenuto conto che δ_h è un automorfismo di S_h, cfr. 2.1, basta mostrare che

$$(x_1\, x_2 \ldots x_s \underbrace{h \ldots h}_{n-s}) \cdot x_{s+1}\,\delta_h = (x_1\, x_2 \ldots x_s\, x_{s+1} \underbrace{h \ldots h}_{n-s-1})\,\delta_h$$

Ora, per 3.1, I,

$$(x_1 x_2 \dots x_s \underbrace{h \dots h}_{n-s}) \cdot x_{s+1}\, \delta_h =$$

$$= (x_1 x_2 \dots x_s \underbrace{h \dots h}_{n-s})(x_{s+1} \underbrace{h \dots h}_{n-1}) \underbrace{h \dots h}_{n-2} =$$

$$= (x_1 x_2 \dots x_s x_{s+1} \underbrace{h \dots h}_{n-s-1})(\underbrace{h \dots h}_{n}) \underbrace{h \dots h}_{n-2} =$$

$$= (x_1 x_2 \dots x_s x_{s+1} \underbrace{h \dots h}_{n-s-1}) \underbrace{h \dots h}_{n-1} = (x_1 x_2 \dots x_s x_{s+1} \underbrace{h \dots h}_{n-s-1})\, \delta_h$$

Ancora per il fatto che δ_h è un automorfismo di S_h e con successive applicazioni della 3.2.6. si trova:

$$\overset{h}{x_1} + \overset{h}{x_2} + \dots + \overset{h}{x_n} = (\dots(((x_1 \cdot x_2)\, \delta_h^{-1} \cdot x_3)\, \delta_h^{-1} \cdot x_4)\, \delta_h^{-1} \cdot \dots \cdot x_n)\, \delta_h^{-1} =$$

$$= (\dots(((x_1 x_2 \underbrace{h \dots h}_{n-2}) \cdot x_3\, \delta_h) \cdot x_4\, \delta_h^2) \cdot \dots \cdot x_n\, \delta_h^{n-2})\, \delta_h^{-(n-1)} =$$

$$= ((x_1 x_2 x_3 \dots x_n)\, \delta_h^{n-2})\, \delta_h^{-(n-1)} = (x_1 x_2 \dots x_n)\, \delta_h^{-1}$$

Di qui la 3.2.4. c.v.d

La 3.2.5 si interpreta nel modo seguente:

detto ν l'endomorfismo $S_h^+ \to S_h^+$ definito da $x\,\nu = n\,x = \overset{h}{x} + \overset{h}{x} + \dots + \overset{h}{x}$ la composizione $\nu\,\delta_h$ è l'identità di S_h^+. Dunque ν è un automorfismo cioè S_h^+ è univocamente n-divisibile; e poiché δ_h è l'automorfismo inverso di ν, la 3.2.4 assume la forma:

3.2.7) $$x_1 x_2 \dots x_n = \frac{\overset{h}{x_1} + \overset{h}{x_2} + \dots + \overset{h}{x_n}}{n}$$

Il LEMMA e le utime osservazioni conducono alla

3.3) PROPOSIZIONE. — *Se* $S = E(_n)$ *è un qualsivoglia* n-Q.M.I.C., *esiste un gruppo abeliano su* E, *univocamente n-divisibile,* $G = E(+)$ *tale che, identicamente in* $x_1, x_2, \dots x_n \in E$,

3.3.1) $$x_1 x_2 \ldots x_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

3.4) DEFINIZIONE. — *Ogni gruppo* G *come in* 3.3 *dicesi generatore di* S.

La 3.2.7 esprime allora che:

3.5) PROPOSIZIONE. — *Dato un* n-Q.M.I.C. $S = E(_n)$, $\forall\, h \in E$ *il gruppo* $S_h^+ = E(\overset{h}{+})$ *definito mediante la* 3.2.3, *genera* S.

La 3.5 si inverte a norma della seguente

3.6) PROPOSIZIONE. — *Se il gruppo* $G = E(+)$ *genera l'*n-Q.M.I.C. $S = E(_n)$ *allora* $G = S_e^+$, *ove* e *è lo zero di* G.

Si trova di più:

3.6.1) *Due qualsivoglia generatori di* S *sono tra loro isomorfi.*

Dimostrazione. — Sia $h \in E$ e si consideri il gruppo $S_h^+ = E(\overset{h}{+})$ di cui alla 3.2.3. Per l'ipotesi, essendo $(x \overset{h}{+} y)\,\delta_h = x \overset{h}{\cdot} y = x\,y\,\underbrace{h \ldots h}_{n-2}$ e $z\,\delta_h = z \overset{h}{\cdot} h = z\,\underbrace{h \ldots h}_{n-1}$ si ha:

$$\frac{(x \overset{h}{+} y) + (n-1)\,h}{n} = \frac{x + y + (n-2)\,h}{n}$$

ciò che fornisce

3.6.2) $$x \overset{h}{+} y = x + y - h$$

Da questa si trae, per $h = e$, lo zero di G,

$$x \overset{e}{+} y = x + y$$

e cioè $G = S_e^+$.

Si trova inoltre che la bigezione

$$\delta_h^G : z \in E \to z + h \in E$$

è un isomorfismo di G su S_h^+ : infatti, per la 3.6.1

$$(x + y)\,\delta_h^G = x + y + h = x\,\delta_h^G \overset{h}{+} y\,\delta_h^G \quad \text{c.v.d.}$$

Consideriamo ora due n-Q.M.I.C. $S = E(_n)$, $S' = E(\ ;_n)$ e siano

4. CONDIZIONI DI OMOMORFISMO TRA n-Q.M.I.C.

$G = E(+)$, $G' = E'(+)$ gruppi generatori rispettivamente di S, e S'.

Se $\tau : E \to E'$ è un omomorfismo di S in S', cioè se

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)\,\tau = x_1\,\tau \cdot x_2\,\tau \cdot \ldots \cdot x_n\,\tau$$

deve essere per definizione di gruppo generatore,

4.1) $$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\,\tau = \frac{x_1\,\tau + x_2\,\tau + \ldots + x_n\,\tau}{n}$$

Da questa per $x_1 = n\,x$, $x_2 = n\,y$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = e$, lo zero di G, si ha:

4.2) $$(x + y)\,\tau = \frac{(n\,x)\,\tau + (n\,y)\,\tau + (n-2)\,e\,\tau}{n}$$

Dalla 4.2, per $y = e$, si ricava

4.3) $$x\,\tau = \frac{(n\,x)\,\tau + (n-1)\,e\,\tau}{n}$$

e quindi

4.4) $$\frac{(n\,x)\,\tau}{n} = x\,\tau - \frac{(n-1)\,e\,\tau}{n}$$

In virtù di questa, sostituendo nel secondo membro di 4.2 si trova infine

4.5) $$(x + y)\,\tau = x\,\tau + y\,\tau - e\,\tau = x\,\tau + y\,\tau - a', \quad a' = e\,\tau$$

Si consideri ora l'applicazione $\Psi : E \to E'$ data da

4.6) $$\Psi = \tau\, \delta^{G'}_{-a'}$$

Ψ è un omomorfismo di G in G' giacché, per 4.5,

$$(x + y)\,\Psi = (x + y)\,\tau\,\delta^{G'}_{-a'} = x\,\tau + y\,\tau - 2\,a' =$$

$$= x\,\tau\,\delta^{G'}_{-a'} + y\,\tau\,\delta^{G'}_{-a'} = x\,\Psi + y\,\Psi$$

Poiché, per la 4.6, $\tau = \Psi\,\delta^{G'}_{a'}$ si trova allora che τ è prodotto di un omomorfismo $\Psi : G \to G'$ per una traslazione $\delta^{G'}_{a'}$ in G'.

Viceversa, se $\theta : E \to E'$ è prodotto di un omomorfismo $\varphi : G \to G'$ per una traslazione $\delta^{G'}_{b'}$ in G', $b' \in E$ arbitrariamente fissato, si ha:

$$(x_1\, x_2 \ldots x_n)\,\theta = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\,\varphi\,\delta^{G'}_{b'} =$$

$$= \frac{x_1\,\varphi + x_2\,\varphi + \ldots + x_n\,\varphi}{n} + b' = \frac{x_1\,\varphi + x_2\,\varphi + \ldots + x_n\,\varphi + n\,b'}{n} =$$

$$= \frac{x_1\,\theta + x_2\,\theta + \ldots + x_n\,\theta}{n} = x_1\,\theta \cdot x_2\,\theta \cdot \ldots \cdot x_n\,\theta$$

cionè θ è un omomorfismo di S in S'.

Vale pertanto la

4.7) PROPOSIZIONE. — *Se* S, S' *sono* n-Q.M.I.C. *generati nell'ordine dai gruppi* G, G', *allora* $\tau : S \to S'$ *è un omomorfismo se e soltanto se* $\tau = \Psi\,\delta^{G'}_{a'}$, con $\Psi : G \to G'$ *omomorfismo e* $a' \in G'$.

COROLLARI. — *Con* S, S' *e* G, G' *come in* 4.7,

4.8) *Ogni omomorfismo di* G *in* G' *è un omomorfismo di* S *in* S'.

4.9) S *ed* S' *sono isomorfi se e soltanto se lo sono* G *e* G'.

Applicando 4.9 al caso S = S' resta confermato che i gruppi generatori di un n-Q.M.I.C. sono isomorfi (cfr. 3.6.1).

Osserviamo che la decomposizione di un omomorfismo $\tau : S \to S'$ fornita dalla 4.7 è unica. Infatti se $\Psi\,\delta^{G'}_{a'} = \varphi\,\delta^{G'}_{b'}$ con $\Psi, \varphi : G \to G'$

omomorfismi, si ha, indicati con e, e' gli elementi nulli di G, rispettivamente G':

$$e\,\Psi\,\delta_{a'}^{G'} = e\,\varphi\,\delta_{b'}^{G'},\ e' + a' = e' + b',\ a' = b',\ \Psi = \varphi$$

Tenuto conto di ciò e dell'isomorfismo naturale $\delta_{a'}^{G'} \to a'$ del gruppo delle traslazioni di G' su G' dalla 4.7 segue, per $S = S'$ e $G = G'$ la

4.10) PROPOSIZIONE. — *Siano* S *un* n-Q.M.I.C., G *un gruppo generatore di* S, $\mathfrak{A}(S)$ *e* $\mathfrak{A}(G)$ *i gruppi degli automorfismi di* S *e di* G, *e si denoti con* $\mathfrak{A}(G) \times G$ *il prodotto combinatorio dei sostegni di* $\mathfrak{A}(G)$ *e* G.

L'applicazione che a $\tau = \Psi\,\delta_a^G \in \mathfrak{A}(S)$ *associa* $(\Psi, a) \in \mathfrak{A}(G) \times G$ *è biunivoca.* $\mathfrak{A}(S)$ *è isomorfo al gruppo su* $\mathfrak{A}(G) \times G$ *definito dalla legge di composizione*

$$(\Psi, a)\,(\varphi, b) = (\Psi\,\varphi,\ a\,\varphi + b)$$

BIBLIOGRAFIA

[1] V. D. BELOUSOV, *A generalized mean value equation*, (Russian) Nets and quasigroups, Mat. Iss led. Vgp, **39** (1976), 21-31, 230.

[2] R. H. BRUCK, *Some results in the theory of quasigroups*, Trans. Am. Math. Soc., **55** (1944), 19-52.

[3] D. C. MURDOCH, *Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws*, Amer. Jour. of Math., **61** (1939), 509-522.

[4] D. C. MURDOCH, *Structure of abelian quasigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **49** (1941), 392-409.

[5] E. NATALE, *Quasigruppi mediali idempotenti commutativi*, La ricerca, 1975.

[6] K. TOYODA, *On axioms of mean transformations and automorphic transformations of abelian groups*, Tohoku Mat., J., **46** (1940), 239-251.

[7] K. TOYODA, *On axioms of linear function*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **17** (1941), 221-227.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Dalla Volta, M. Curzio e A. Franchetta.

Problema di Dirichlet per operatori ellittici in dominii limitati di R^n con punti conici

Nota di DIANA NUNZIANTE *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 7 aprile 1979)

RIASSUNTO. — Questo lavoro consiste nello studio del problema di Dirichlet relativo ad operatori differenziali alle derivate parziali di tipo ellittico, in un dominio limitato di R^n con punti conici. Tale ricerca viene effettuata nell'ambito di spazi di Sobolev con peso. Vengono provati teoremi dimostranti che il suddetto problema, sotto opportune ipotesi, è ad indice.

SUMMARY. — This work is concerned with Dirichlet problem for linear partial differential equations of elliptic type in a bounded domain with conical points. It has been investigated within Sobolev weight spaces. Index theorems have been proved.

INTRODUZIONE

In una memoria di alcuni anni or sono Avantaggiati e Troisi hanno studiato dei problemi ellittici per operatori a coefficienti costanti in un angolo, dimostrando dei teoremi di esistenza e unicità, in spazi di Sobolev con doppio peso; in una successiva memoria, partendo da tali risultati, hanno studiato problemi ellittici per operatori e coefficienti variabili, in un angolo, dimostrando che, salvo valori eccezionali dei parametri rappresentanti i pesi dello spazio, tali problemi sono ad indice; hanno poi esteso tali risultati al caso di dominii limitati con punti angolosi.

Successivamente Alvino e Trombetti hanno dato un teorema di esistenza e unicità per il problema di Dirichlet in un cono G di R^n,

* Borsista del CNR presso l'Istituto Matematico dell'Università di Napoli « R. Caccioppoli ».

relativo al caso di un operatore della forma

$$A(x, \partial) = \sum_{|\mu|=2m} a_\mu \partial^\mu + \frac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}};$$

le soluzioni vengono trovate in spazi di Sobolev con doppio peso, di tipo L^p.

In questa nota mi propongo di determinare, partendo dal risultato di Alvino e Trombetti, risultati analoghi e quelli ottenuti da AVANTAGGIATI e TROISI in [6] e [7], nel caso di operatori a coefficienti variabili, sia in un cono G di R^n, che in dominii limitati di R^n con punti conici, nell'ambito di spazi di Sobolev con peso, di tipo L^p.

Nel n. 1 vengono date le definizioni degli spazi $W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)$, $W^{r-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)$, con $\Gamma = \partial G - \{o\}$.

Nel n. 2 viene dimostrato che il problema di Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} A(x, \partial) u + \dfrac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}} u = f, \text{ in } G \\ \dfrac{d^j u}{d n^j} = \psi_j, \text{ su } \Gamma, \ j = o, \ldots, m-1 \\ (f, \psi_j) \in W^{r-2m}_{s_1,s_2}(G) \times W^{r-j-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma), \end{cases}$$

con $A(x, \partial) = \sum_{|\mu|\leq 2m} a_\mu(x) \partial^\mu$ operatore ellittico, è un problema ad indice sotto opportune ipotesi per gli a_μ, qualora il parametro λ venga scelto abbastanza grande.

Nel n. 3 vengono date le definizioni degli spazi $W^{r,p}_s(\Omega)$ e $W^{r-1/p,p}_s(\partial\Omega)$ con Ω aperto limitato di R^n dotato di un punto conico, e alcuni lemmi preliminari.

Nel n. 4 viene dimostrato che il problema (1) è ad indice in Ω, qualora vengano soddisfatte ipotesi analoghe e quelle date nel n. 2.

1. - DEFINIZIONI PRELIMINARI

Indichiamo con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ il punto generico di R^n e sia $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_o^n$, si pone $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ e $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1}_{x_1} \ldots \partial^{\alpha_n}_{x_n}$.

Siano G un cono aperto di R^n con vertice nell'origine, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ un sistema di coordinate sulla sfera unitaria.

Formuliamo la seguente ipotesi, mantenendo le notazioni introdotte in [1]:

I) Esiste una trasformazione in $\bar{G}-\{o\}$ di classe C^∞ di equazioni

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \\ \omega_i = \omega_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

che muta G in un semicilindro aperto $Q_+ = R_+ \times S$ dello spazio (ρ, ω) e Γ in $\Sigma_+ = R_+ \times \partial S$. Tale trasformazione è biunivoca ed a jacobiano diverso da zero. ∂S è una varietà di classe C^∞ che lascia S localmente da una stessa parte. Le equazioni della trasformazione inversa della (1.1) sono

$$x_i = \rho\, \varphi_i(\omega), \quad i = 1, \ldots, n.$$

DEFINIZIONE (1.1). — *Siano* $r \in N_o$, $p \in]1, +\infty[$, $s \in R$. *Indicheremo con* $W_s^{r,p}(G)$ *il completamento di* $\mathfrak{D}(\bar{G} - \{o\})$ *rispetto alla norma*

$$(1.2)\qquad \| u \|_{W_s^{r,p}(G)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq r} \int_G | x |^{p(s+|\alpha|-r)} | \partial^\alpha u |^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Detta u una funzione definita su $\bar{G} - \{o\}$, poniamo

$$u_\pi(\rho, \omega) = u(\rho\, \varphi_1(\omega), \ldots, \rho\, \varphi_n(\omega)),$$

$$\sigma_b\, u = \sigma_b\, u_\pi = u_\pi(e^\tau, \omega)\, e^{b\tau}.$$

DEFINIZIONE (1.2). — *Siano* $r \in N$, $p \in]1, +\infty[$, $s \in R$. *Indicheremo con* $W_s^{r-1/p,p}(\Gamma)$ *il completamento di* $\mathfrak{D}(\Gamma)$ *rispetto alla norma*

$$(1.3)\qquad \| u \|_{W_s^{r-1/p,p}(\Gamma)} = \| \sigma_{s-r+(n-1)/p}\, u_\pi \|_{W^{r-1/p,p}(\Sigma)},$$

dove $\Sigma = R \times \partial S$.

DEFINIZIONE (1.3). — *Siano* $r \in N_o$, $p \in]1, +\infty[$, $s_1, s_2 \in R$, *con* $s_1 \leq s_2$. *Indicheremo con* $W_{s_1,s_2}^{r,p}(G)$ *lo spazio* $W_{s_1}^{r,p}(G) \cap W_{s_2}^{r,p}(G)$, *munito della norma*

$$(1.4)\qquad \| u \|_{W_{s_1,s_2}^{r,p}(G)} = \left[\| u \|^p_{W_{s_1}^{r,p}(G)} + \| u \|^p_{W_{s_2}^{r,p}(G)} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

DEFINIZIONE (1.4). — *Siano* $r \in N$, $p \in]1, +\infty[$, $s_1, s_2 \in R$, *con* $s_1 \leq s_2$. *Indicheremo con* $W^{r-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)$ *lo spazio* $W^{r-1/p,p}_{s_1}(\Gamma) \cap W^{r-1/p,p}_{s_2}(\Gamma)$, *munito della norma*

$$\| u \|_{W^{r-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)} = \left[\| u \|^p_{W^{r-1/p,p}_{s_1}(\Gamma)} + \| u \|^p_{W^{r-1/p,p}_{s_2}(\Gamma)} \right]^{\frac{1}{p}} . \tag{1.5}$$

Se K è un sottoinsieme di G, indicheremo con $W^{r,p}_{s_1,s_2}(G; K)$ il sottospazio di $W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)$ costituito dalle funzioni aventi supporto contenuto in K.

Sia A un sottoinsieme di R^n.

DEFINIZIONE (1.5). — *Siano* $s \in R$, $p \in]o, +\infty]$. *Indicheremo con* $L^p_s(A)$ *lo spazio delle funzioni u tali che* $|x|^s u \in L^p(A)$, *munito della norma*

$$\| u \|_{L^p_s(A)} = \| |x|^s u \|_{L^p(A)} . \tag{1.6}$$

Per ogni $k \in N_o$ porremo

$$\| \partial^k u \|_{L^p_s(A)} = \sup_{|\alpha|=k} \| \partial^\alpha u \|_{L^p_s(A)} .$$

DEFINIZIONE (1.6). — *Siano* $s, t \in R$, $p \in]o, +\infty]$. *Indicheremo con* $L^p_{s,t}(A)$ *lo spazio delle funzioni u, tali che* $|x|^s \left[\frac{|x|}{1+|x|^2} \right]^t u \in L^p(A)$, *munito della norma*

$$\| u \|_{L^p_{s,t}(A)} = \left\| |x|^s \left[\frac{|x|}{1+|x|^2} \right]^t u \right\|_{L^p(A)} . \tag{1.7}$$

DEFINIZIONE (1.7). — *Siano* $r \in N_o$, $s, t \in R$, $p \in]1, +\infty[$. *Indicheremo con* $V^{r,p}_{s,t}(G)$ *lo spazio delle distribuzioni u su* G, *tali che* $\partial^\alpha u \in L^p_{s+|\alpha|-r,t}(G)$, *per* $|\alpha| \leq r$, *munito della norma*

$$\| u \|_{V^{r,p}_{s,t}(G)} = \sum_{k=o}^{r} \| \partial u \|_{L^p_{s+k-r,t}(G)} . \tag{1.8}$$

2. - PROBLEMA DI DIRICHLET IN UN CONO

Sia G un cono verificante l'ipotesi I) del n. 1) e sia n la normale a $\Gamma = \partial G - \{o\}$ orientata verso l'interno di G.

Sarà utile, per il seguito, richiamare il seguente risultato di ALVINO e TROMBETTI (V. cap. 2 di [1]):

TEOREMA (2.1). — *Siano* $r \in \mathrm{N}$, $s \in \mathrm{R}$, $p \in]1, +\infty[$, $\mathrm{A}(\partial) = \sum_{|\mu|=2m} a_\mu \partial^\mu$ *un operatore lineare ellittico a coefficienti costanti. Esiste* $\lambda_o \in \mathrm{R}_+$ *tale che, per ogni* $\lambda \geq \lambda_o$, *il problema*

$$\begin{cases} \mathrm{A}(\partial)\, u + \dfrac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}} u = f, & \text{in G;} \\ \dfrac{d^j u}{d n^j} = \psi_j, \quad \text{per } j = o, \ldots, m-1, & \text{su } \Gamma; \\ (f, \psi_j) \in \mathrm{W}_s^{r,p}(\mathrm{G}) \times \mathrm{W}_s^{r+2m-j-1/p,p}(\Gamma), \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione u' *e vale la seguente maggiorazione*

$$(2.1) \qquad \| u' \|_{\mathrm{W}_s^{r+2m,p}(\mathrm{G})} \leq k \left[\| f \|_{\mathrm{W}_s^{r,p}(\mathrm{G})} + \sum_{j=o}^{m-1} \| \psi_j \|_{\mathrm{W}_s^{r+2m-j-1/p,p}(\Gamma)} \right],$$

con k *costante dipendente da* λ.

Assegnamo ora i seguenti operatori a coefficienti variabili

$$\mathrm{A}(x, \partial) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x)\, \partial^\mu + \frac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}} = \bar{\mathrm{A}}(x, \partial) + \frac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}}$$

$$\mathrm{B}_j(x, \partial) = \frac{d^j}{d n^j} = \sum_{|\mu|=j} b_{j\mu}(x)\, \partial^\mu, \qquad j = o, \ldots, m-1.$$

Poniamo

$$\mathrm{A}'(x, \partial) = \sum_{|\mu|=2m} a_\mu(x)\, \partial^\mu, \qquad A''(x, \partial) = \sum_{|\mu|<2m} a_\mu(x)\, \partial^\mu.$$

Consideriamo un ricoprimento di $\bar{\mathrm{G}}$ costituito da un numero finito di aperti $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_\nu$ di R^n, tale che $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_3, \ldots, \mathrm{O}_\nu$ siano limitati e che l'origine appartenga solo ad O_1. Inoltre, consideriamo una partizione dell'unità in $\mathrm{C}^\infty(\bar{\mathrm{G}})$, subordinata al dato ricoprimento e costituita dalle funzioni $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$, tali che

$$\xi_i \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{R}^n), \quad \xi_i \geq 0, \quad \operatorname{supp} \xi_i \subset \mathrm{O}_i, \quad i = 1, \ldots, \nu,$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(x) = 1, \qquad \forall\, x \in \bar{\mathrm{G}}.$$

Siano $x^1, x^3, \ldots, x^\nu$ punti di $\bar{G}$, con $x^1 = o$ e $x^i \in O_i \cap G$, $i = 3, \ldots, \nu$. Poniamo

$$A_i'(\partial) = A'(x^i, \partial), \quad i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

dove si intenda

$$a_\mu(x^2) = \lim_{|x|\to\infty} [a_\mu(x)].$$

Siano $p \in]1, +\infty[$, $r_o \in N$, con $r_o > m - 1 - 1/p$ e $r_o \geq 2m$, e $r \geq r_o$.

Formuliamo le seguenti ipotesi

I_1) I coefficienti $a_\mu(x)$, per $|\mu| = 2m$, sono continui in $\bar{G}$ e convergenti all'infinito.

I_2) Per ogni compatto $K \subset \bar{G} - \{o\}$, si ha, nel senso delle distribuzioni,

$$\partial^\alpha a_\mu \in L^\infty(K), \quad \text{per} \quad |\mu| = 2m \quad \text{e} \quad |\alpha| \leq r - 2m,$$

inoltre, riesce

$$\lim_{|x|\to o} \sum_{|\mu|=2m} \sum_{o<|\alpha|\leq r-2m} \left| |x|^{|\alpha|} \partial^\alpha a_\mu(x) \right| =$$

$$= \lim_{|x|\to\infty} \sum_{|\mu|=2m} \sum_{o<|\alpha|\leq r-2m} \left| |x|^{|\alpha|} \partial^\alpha a_\mu(x) \right| = o.$$

I_3) Risulta

$$\partial^\alpha a_\mu \in L^\infty_{2m-|\mu|+|\alpha|}(G), \quad \text{per} \quad |\mu| \leq 2m - 1, \ |\alpha| \leq r - 2m + 1,$$

inoltre, se $\varepsilon > o$,

$$a_\mu \in L^\infty_{2m-|\mu|,-\varepsilon}(G), \quad \text{per} \quad |\mu| \leq 2m - 1.$$

I_4) $\bar{A}$ è ellittico.

I_5) Il parametro λ è non minore del $\max_{i\in\{1,\ldots,\nu\}} \lambda_{o,i}$, dove $\lambda_{o,i}$ è il numero trovato dal teorema (2.1) in corrispondenza degli operatori A_i', $\{B_o, \ldots, B_{m-1}\}$.

I_6) Risulta

$$\partial^\alpha a_\mu \in L^\infty_{2m-|\mu|+|\alpha|,-\varepsilon}(G), \quad \text{per} \quad |\mu| \leq 2m - 1, \ |\alpha| \leq r + 1 - 2m.$$

Sotto le ipotesi poste, l'operatore

$$u \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G) \rightarrow A\,u \in W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)$$

è lineare e continuo, quindi, ha senso andare a considerare la trasformazione lineare e continua

$$\mathcal{A} : W^{r,p}_{s_1,s_2}(G) \ni u \rightarrow (A\,u, B_0\,u, \ldots, B_{m-1}\,u) \in E_{r,s_1,s_2}(G),$$

dove si è posto

$$E_{r,s_1,s_2}(G) = W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G) \times \prod_{j=o}^{m-1} W^{r-j-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma).$$

TEOREMA (2.2). — *Comunque si fissino* $r \in N$, $s_1, s_2 \in R$, $p \in]1, +\infty[$, *con* $r \geq r_o$ *e* $s_1 \leq s_2$, *se sono verificate le ipotesi* I_1), I_2), I_3), I_4) *e* I_5), *allora esiste una costante* $c(\lambda)$ *dipendente da* λ, *tale che*

$$\|u\|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq c(\lambda)\left[\|\mathcal{A}u\|_{E_{r,s_1,s_2}(G)} + \|u\|_{L^p_{(s_1+s_2)/2-r,-(s_1-s_2)/2+\varepsilon}(G)}\right], \qquad \forall\, u \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G). \tag{2.2}$$

Dimostrazione. — Posto

$$\psi_i(v) = \|(A' - A'_i)\,v\|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)}, \qquad i = 1, \ldots, \nu,$$

facciamo vedere in primo luogo che, per ogni $\eta > o$, è possibile scegliere ν e gli aperti $O_1, \ldots, O_\nu$ in modo che si abbia

$$\psi_i(v) \leq \eta \|v\|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)}, \qquad \forall\, v \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G; K_i), \qquad i = 1, \ldots, \nu \tag{2.3}$$

dove si è posto $K_i = \bar{G} \cap \operatorname{supp} \xi_i$.

Sia $v \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G; K_i)$. Posto $a^{(i)}_\mu(x) = a_\mu(x) - a_\mu(x^i)$, dall'ipotesi I_2) e dal teorema (2.2) cap. 1 di [1], si deduce che

$$\psi_i(v) \leq c_1 \sum_{|\mu|=2m} \|\partial^\mu v\|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} \left[\sup_{G\cap O_i} |a^{(i)}_\mu(x)| + \sum_{o<|\alpha|\leq r-2m} \sup_{G\cap O_i} \left|\,|x|^{|\alpha|}\,\partial^\alpha a^{(i)}_\mu(x)\right|\right].$$

Trovato ciò, la (2.3), nel caso $i = 1, 2$, consegue dalle ipotesi I_1) e I_2), mentre nel caso di $i = 3, \ldots, \nu$ consegue ancora dalle ipotesi I_1), I_2) e dal fatto che l'iniezione di $W^{r,p}(R^n; K)$ in $W^{r-1,p}(R^n; K)$ ha norma che tende a zero con il diametro di K (v. lemma (3.1), cap. 2 di [4]). La 2.3 è quindi vera per $i = 1, \ldots, \nu$.

Nel seguito supporremo di aver fissato il ricoprimento $O_1, \ldots, O_\nu$ di G in modo che valga la (2.3).

Poniamo $u_i = \xi_i u$, $\forall u \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)$. Dalle (2.1) e (2.3) segue che

$$(2.4)\qquad \| u_i \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq c_2(\lambda) \left[\left\| A'_i u_i + \frac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}} u_i \right\|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=o}^{m-1} \| B_j u_i \|_{W^{r-j-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)} \right] \leq$$

$$\leq c_3(\lambda) \left[\eta \| u_i \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} + \| A'' u_i \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} + \| \mathcal{A} u_i \|_{E_{r,s_1,s_2}(G)} \right].$$

Dal teorema (3.4), cap. 1 di [1], segue

$$(2.5)\qquad \| A'' u_i \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq \eta \| A'' u_i \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1,s_2+1}(G)} +$$

$$+ c_4(\eta) \| A'' u_i \|_{W^{o,p}_{s_1-r+2m,s_2-r+2m}(G)}.$$

Grazie all'ipotesi I_3), si ha che

$$(2.6)\qquad \| A'' u_i \|^p_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1,s_2+1}(G)} \leq c_5 \sum_{|\mu|<2m} \sum_{j=1}^{2} \sum_{|\alpha|\leq r-2m+1} \sum_{\beta\leq\alpha}$$

$$\int_G |x|^{p(s_j+|\alpha|-r+2m)} |\partial^{\alpha-\beta} a_{i\mu}(x) \partial^{\mu+\beta} u_i|^p \, dx \leq c_6 \| u_i \|^p_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)}.$$

Dal teorema (3.7), cap. 1 di [1] e dall'ipotesi I_3), si ottiene

$$(2.7)\qquad \| A'' u_i \|^p_{W^{o,p}_{s_1-r+2m,s_2-r+2m}(G)} \leq c_7 \| A'' u_i \|^p_{V^{o,p}_{(s_1+s_2)/2-r+2m,-(s_2-s_1)/2}(G)} \leq$$

$$\leq c_8 \sum_{|\mu|\leq 2m-1} \int_G |x|^{p((s_1+s_2)/2-r+2m)} \left[\frac{|x|}{1+|x|^2} \right]^{-p(s_2-s_1)/2} |a_{i\mu} \partial^\mu u_i|^p \, dx \leq$$

$$\leq c_9 \| u_i \|^p_{V^{2m-1,p}_{(s_1+s_2)/2-r+2m-1,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(G)}.$$

Dalle (6.11) di [5] e (2.7) si ha che, per ogni ε esiste $c_{10}(\varepsilon)$ tale che

$$\| A'' u_i \|_{W^{o,p}_{s_1-r+2m,\, s_2-r+2m}(G)} \leq \varepsilon \| u_i \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} + \tag{2.8}$$

$$+ c_{10}(\varepsilon) \| u_i \|_{L^{p}_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(G)} .$$

In definitiva, dalle (2.4), (2.5), (2.6) e (2.8) consegue l'esistenza di una costante $c_{11}(\lambda)$, dipendente da λ, tale che

$$\| u_i \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq \tag{2.9}$$

$$\leq c_{11}(\lambda) \left[\| \mathfrak{A} u_i \|_{E_{r,s_1,s_2}(G)} + \| u_i \|_{L^{p}_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(G)} \right] .$$

Risulta

$$\| A u_i \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq \| \xi_i A u \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} + \tag{2.10}$$

$$+ c_{12} \sum_{|\mu|\leq 2m} \sum_{\alpha<\mu} \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \xi_i \partial^\alpha u \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} .$$

Dal teorema (3.4), cap. 1 di [1] segue che

$$\| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \xi_i \partial^\alpha u \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq \delta \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \xi_i \partial^\alpha u \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1,s_2+1}(G)} + \tag{2.11}$$

$$+ c_{13}(\delta) \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \xi_i \partial^\alpha u \|_{W^{o,p}_{s_1-r+2m,\, s_2-r+2m}(G)} .$$

Poiché ogni ξ_i ha derivate nulle al di fuori di un compatto contenuto in $\bar{G} - \{o\}$ è possibile modificare opportunamente i pesi dello spazio e maggiorare $\partial^{\mu-\alpha} \xi_i$ in modo che riesca, grazie alle ipotesi I_2) e I_3), che

$$\sum_{|\mu|\leq 2m} \sum_{\alpha<\mu} \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \xi_i \partial^\alpha u \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1,s_2+1}(G)} \leq c_{14} \| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} . \tag{2.12}$$

Ancora dalle ipotesi I_2) e I_3) e dal teorema (3.7), cap. 1 di [1] si deduce che

$$\sum_{|\mu|\leq 2m} \sum_{\alpha<\mu} \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \xi_i \partial^\alpha u \|_{W^{o,p}_{s_1-r+2m,\, s_2-r+2m}(G)} \leq \tag{2.13}$$

$$\leq c_{15} \| u \|_{V^{r-1,p}_{(s_1+s_2)/2-1,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(G)} .$$

Dalle (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13) si ottiene che $\forall\ \delta' > o$, $\exists\ c_{16}(\delta')$:

$$\| A\, u_i \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq \| \xi_i\, A\, u \|_{W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G)} + \tag{2.14}$$

$$+ \delta' \| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} + c_{16}(\delta') \| u \|_{V^{r-1,p}_{(s_1+s_2)/2-1,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(G)} .$$

Applicando il teorema di tracce (3.2), cap. 1 di [1], riesce facilmente che

$$\| B_j\, u_i \|_{W^{r-j-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)} \leq \| \xi_i\, B_j\, u \|_{W^{r-j-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)} +$$

$$+ c_{17} \sum_{|\mu|=j} \sum_{\alpha<\mu} \| \partial^{\mu-\alpha}\, \xi_i\, \partial^{\alpha}\, u \|_{W^{r-j,p}_{s_1,s_2}(G)} .$$

Usando lo stesso procedimento seguito per stabilire la (2.14), si ottiene che $\forall\ \gamma > o$, $\exists\ c_{18}(\gamma)$:

$$\| B_j\, u_i \|_{W^{r-j-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)} \leq \| \xi_i\, B_j\, u \|_{W^{r-j-1/p,p}_{s_1,s_2}(\Gamma)} + \tag{2.15}$$

$$+ \gamma \| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} + c_{18}(\gamma) \| u \|_{V^{r-1,p}_{(s_1+s_2)/2-1,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(G)} .$$

Dalle (2.14) e (2.15) si ricava che $\forall\ \gamma' > o$, $\exists\ c_{19}(\gamma')$:

$$\| \mathcal{A}\, u_i \|_{E_{r,s_1,s_2}(G)} \leq \| \xi_i\, \mathcal{A}\, u \|_{E_{r,s_1,s_2}(G)} + \tag{2.16}$$

$$+ \gamma' \| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} + c_{19}(\gamma') \| u \|_{V^{r-1,p}_{(s_1+s_2)/2+1,-(s_2-s_1)/2-\varepsilon}(G)} .$$

In base alla (6.11) di [5] ed al teorema (3.7), cap. 1 di [1], dalle (2.16) e (2.9), osservando che $\Sigma_i\, u_i = u$, si ricava la (2.2), cioè la tesi.

Indichiamo con $\mathcal{A}^*$ l'operatore aggiunto di $\mathcal{A}$, definito dalla posizione

$$\langle \mathcal{A}^*\, V, u \rangle = \langle V, \mathcal{A}\, u \rangle ,$$

per ogni $u \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)$ e per ogni $V \in E'_{r,s_1,s_2}(G)$, dove, con $E'_{r,s_1,s_2}(G)$, denotiamo il duale di $E_{r,s_1,s_2}(G)$. Nel seguito con $(W^{r,p}_{s_1,s_2}(G))'$ indicheremo il duale di $W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)$.

TEOREMA (2.3). — *Se sono verificate le ipotesi del teorema* (2.2) *e l'ipotesi* I_6), *allora esiste una sostante* $c(\lambda)$, *dipendente da* λ, *tale* che

$$\| V \|_{E'_{r,s_1,s_2}(G)} \leq c(\lambda) \Big[\| \mathcal{A}^* V \|_{(W^{r,p}_{s_1,s_2}(G))'} + \| V \|_{E'_{r+1,s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G)} \Big], \tag{2.17}$$

$\forall\ V \in E'_{r,s_1,s_2}(G)$, *dove* ε *è il numero definito dall'ipotesi* I_6).

Dimostrazione. — Continuiamo a mantenere le notazioni introdotte nella dimostrazione del teorema (2.2). Osserviamo che, sotto le ipotesi del teorema (2.2), dal teorema (2.1) consegue che l'operatore

$$\mathcal{A}^i : u \to \left(\left[A'_i + \frac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}} \right] u,\ B_o\, u,\ \ldots,\ B_{m-1}\, u \right)$$

definisce un isomorfismo algebrico e topologico da $W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)$ su $E_{r,s_1,s_2}(G)$.

Indichiamo con $F = (f, f_o, \ldots, f_{m-1})$ l'elemento generico di $E_{r,s_1,s_2}(G)$ e con $V = (v, v_o, \ldots, v_{m-1})$ il generico funzionale lineare e continuo su $E_{r,s_1,s_2}(G)$. Poniamo $V^i = (v^i, v^i_o, \ldots, v^i_{m-1})$, dove

$$v^i = \xi_i\, v \quad \text{e} \quad v^i_k = \xi_i\, v_k, \quad k = o, \ldots, m-1.$$

Assegnamo, per ogni $i \in \{1, \ldots, \nu\}$ una funzione $\varphi_i \in C^\infty(R^n)$, non negativa e tale che

$$\operatorname{supp} \varphi_i \subset O_i, \quad \varphi_i(x) = 1, \quad \forall\ x \in \operatorname{supp} \xi_i,$$

e, per ogni $F = (f, f_o, \ldots, f_{m-1}) \in E_{r,s_1,s_2}(G)$, poniamo $\varphi_i F = (\varphi_i f, \varphi_i f_o, \ldots, \varphi_i f_{m-1})$. Si ha che

$$\| V^i \|_{E'_{r,s_1,s_2}(G)} \leq c_1 \sup_{\substack{u \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G) \\ u \neq o}} \frac{|\langle V^i, \mathcal{A}^i u \rangle|}{\| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)}} \leq \tag{2.18}$$

$$\leq c_1 \sup_{\substack{u \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G) \\ u \neq o}} \frac{|\langle V^i, \mathcal{A}_u \rangle| + |\langle v^i, (A'_i - A')\, u \rangle| + |\langle v^i, A''\, u \rangle|}{\| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)}}.$$

Per la relazione di reciprocità

$$(2.19) \qquad |\langle V^i, \mathcal{A}\, u\rangle| \leq \| \mathcal{A}^* V^i \|_{(W^{r,p}_{s,s}(G))'} \cdot \| \varphi_i\, u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} .$$

Dalla (2.3) segue che

$$(2.20) \quad |\langle v^i, (A_i' - A')\, u\rangle| \leq \eta \| v^i \|_{(W^{r-2m,p}_{s_1,s_2}(G))'} \cdot \| \varphi_i\, u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} ,$$

$$|\langle v^i, A''\, u\rangle| = |\langle v, \xi_i A''(\varphi_i\, u)\rangle| \leq$$

$$\leq \| v \|_{(W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G))'} \cdot \| \xi_i A''(\varphi_i\, u) \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G)} .$$

D'altra parte

$$\| \xi_i A''(\varphi_i\, u) \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G)} \leq c_2 \| A''(\varphi_i\, u) \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G)} ,$$

quindi,

$$(2.21) \quad |\langle v^i, A''\, u\rangle| \leq c_2 \| v \|_{(W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G))'} \cdot \| A''(\varphi_i u) \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G)} .$$

Dal teorema (3.7), cap. 1 di [1] e dall'ipotesi I_6) segue che

$$(2.22) \qquad \| A''(\varphi_i\, u) \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G)} \leq$$

$$(G) \leq c_3 \| A''(\varphi_i\, u) \|_{V^{r+1-2m,p}_{(s_1+s_2)/2+1,\,-(s_2-s_1)/2-\varepsilon}(G)} \leq c_4 \| \varphi_i\, u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} .$$

Dalle (2.21) e (2.22) si ricava che

$$(2.23) \qquad |\langle v^i, A''\, u\rangle| \leq c_5 \| v \|_{(W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G))'} \| \varphi_i\, u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} .$$

Tenendo conto che

$$\| \varphi_i\, u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} \leq c_6 \| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} ,$$

dalle (2.18), (2.19), 2.20) e (2.23) si ottiene per η abbastanza piccolo, l'esistenza di una costante c_7, dipendente da λ, tale che

$$(2.24) \qquad \| V^i \|_{E'_{r,s_1,s_2}(G)} \leq$$

$$\leq c_7 \left(\| \mathcal{A}^* V^i \|_{(W^{r,p}_{s_1,s_2}(G))'} + \| V \|_{E'_{r+1-2m,s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G)} \right) .$$

Si ha

$$(2.25) \qquad \| \mathcal{A}^* V^i \|_{(W^{r,p}_{s_1,s_2}(G))'} \leq c_8 \| \mathcal{A}^* V \|_{(W^{r,p}_{s_1,s_2}(G))'} +$$

$$+ \sup_{\substack{u \in W^{r,p}_{s_1,s_2}(G) \\ u \neq o}} \frac{|\langle v, \xi_i A u - A(\xi_i u)\rangle| + \sum_{j=o}^{m-1} |\langle v_j, \xi_i B_j u - B_j(\xi_i u)\rangle|}{\| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)}}$$

Col procedimento seguito per stabilire le (2.14) e (2.15), analogamente si ottiene che

$$(2.26) \qquad \| \xi_i A u - A(\xi_i u) \|_{W^{r+1-2m,p}_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}(G)} \leq c_9 \| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} ,$$

$$(2.27)_i \qquad \| \xi_i B_j u - B_j(\xi_i u) \|_{W^{r+1-j-1/p,p}_{s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}(\Gamma)} \leq c_{10} \| u \|_{W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)} .$$

Dalle (2.25), (2.26) e (2.27) si ricava che

$$(2.28) \qquad \| \mathcal{A}^* V^i \|_{(W^{r,p}_{s_1,s_2}(G))'} \leq$$

$$\leq c_{11} \left[\| \mathcal{A}^* V \|_{(W^{r,p}_{s_1,s_2}(G))'} + \| V \|_{E'_{r+1-2m, s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}(G)} \right] .$$

Tenuto conto che $\sum_i \xi_i V = \sum_i V^i = V$, dalle (2.24) e (2.28) segue la tesi.

TEOREMA (2.4). — *Se sono verificate le ipotesi del teorema* (2.3), *con* $\varepsilon > o$, *l'operatore* $\mathcal{A}$, *definito in* $W^{r,p}_{s_1,s_2}(G)$ *a valori in* $E_{r,s_1,s_2}(G)$, *è ad indice.*

Dimostrazione. — Se $\varepsilon > o$, dal teorema (3.7), cap. 1 di [1] consegue che l'iniezione

$$W^{r,p}_{s_1,s_2}(G) \hookrightarrow L^p_{(s_1+s_2)/2-r, -(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(G)$$

è compatta. Inoltre, dal teorema (3.8), cap. 1 di [1], segue che, se $\varepsilon > o$, l'iniezione

$$E_{r+1, s_1+1-\varepsilon, s_2+1+\varepsilon}(G) \hookrightarrow E_{r,s_1,s_2}(G)$$

è compatta, e quindi è compatta anche l'iniezione

$$E'_{r,s_1,s_2}(G) \hookrightarrow E'_{r+1,s_1+1-\varepsilon,s_2+1+\varepsilon}(G).$$

Dai teoremi (2.2), (2.3) e dai noti risultati dovuti a J. PEETRE (V. n. 8 di [8]), consegue la tesi.

3. - DEFINIZIONI E LEMMI

Sia Ω un aperto limitato di R^n e sia G un cono aperto di R^n con vertice nell'origine, verificante l'ipotesi I) del n. 1.

Poniamo $\Gamma = \partial G - \{o\}$ e $G_1 = \{x : |x| < 1\} \cap G$.

Supponiamo che l'origine appartenga a $\partial\Omega$ e che esista un intorno U dell'origine tale che $\Omega \cap U = G_1$. Sia inoltre $\partial\Omega - \{o\}$ di classe C^1.

Consideriamo un ricoprimento di $\bar{\Omega}$ mediante gli insiemi aperti limitati $O, O'_o, \ldots, O'_q$, tali che

$$O \subseteq U, \quad \bar{O}'_o \subset \Omega; \quad \{o\} \notin O'_i \quad \text{e} \quad O'_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, q,$$

ed una partizione dell'unità su $\bar{\Omega}$, subordinata al dato ricoprimento, costituita dalle funzioni $\xi, \xi'_o, \ldots, \xi'_q$, di classe $\mathfrak{D}(R^n)$, tali che

$$\operatorname{supp} \xi \subset O; \qquad \operatorname{supp} \xi'_i \subset O'_i, \qquad i = o, \ldots, q.$$

DEFINIZIONE (3.1). — *Siano* $r \in N_o$, $s \in R$, $p \in]1, +\infty[$. *Indicheremo con* $W^{r,p}_s(\Omega)$ *lo spazio delle funzioni u, definite in* Ω, *tali che* $\xi u \in W^{r,p}_s(G)$ *e* $\xi'_i u \in W^{r,p}(\Omega)$, $i = o, \ldots q$, *munito della norma*

$$\|u\|_{W^{r,p}_s(\Omega)} = \|\xi u\|_{W^{r,p}_s(G)} + \sum_{i=o}^{q} \|\xi'_i u\|_{W^{r,p}(\Omega)}. \tag{3.1}$$

DEFINIZIONE (3.2). — *Siano* $r \in N$, $s \in R$, $p \in]1, +\infty[$. *Indicheremo con* $W^{r-1/p,p}_s(\partial\Omega)$ *lo spazio delle funzioni g, definite su* $\partial\Omega$, *tali che* $\xi g \in W^{r-1/p,p}_s(\Gamma)$ *e* $\xi'_i g \in W^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$, $i = 1, \ldots, q$, *munito della norma*

$$\|g\|_{W^{r-1/p,p}_s(\partial\Omega)} = \|\xi g\|_{W^{r-1/p,p}_s(\Gamma)} + \sum_{i=1}^{q} \|\xi'_i g\|_{W^{r-1/p,p}(\partial\Omega)}. \tag{3.2}$$

OSSERVAZIONE (3.1). — Se u è una funzione definita in Ω, tale che supp $u \subset U \cap \bar{\Omega}$, allora $u \in W_s^{r,p}(\Omega)$ se e solo se $u \in W_s^{r,p}(G)$, inoltre le norme di u rispettivamente in $W_s^{r,p}(\Omega)$ e $W_s^{r,p}(G)$ sono tra loro equivalenti. Analogamente, se g è una funzione definita su $\partial\Omega$, tale che supp $g \subset U \cap \partial\Omega$, allora $g \in W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$ se e solo se $g \in W_s^{r-1/p,p}(\Gamma)$, inoltre le norme di g prese in $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$ ed in $W_s^{r-1/p,p}(\Gamma)$ sono tra loro equivalenti.

LEMMA (3.1). — *Comunque si fissino* $r \in N_o$, $s \in R$, $p \in]1, +\infty[$, $\mathfrak{D}(\bar{\Omega} - \{o\})$ *è denso in* $W_s^{r,p}(\Omega)$ *e* $\mathfrak{D}(\partial\Omega - \{o\})$ *è denso in* $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$.

LEMMA (3.2). — *Comunque si fissino* $r, r' \in N_o$, $s, s' \in R$, $p \in]1, +\infty[$, *con* $r' \leq r$ *e* $s' \geq s + r' - r$, *sussise la seguente inclusione algebrica e topologica*

$$W_s^{r,p}(\Omega) \subseteq W_{s'}^{r',p}(\Omega),$$

inoltre, se $r' \geq 1$, *si ha, algebricamente e topologicamente,*

$$W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega) \subseteq W_{s'}^{r'-1/p,p}(\partial\Omega).$$

LEMMA (3.3). — *Siano* $t, \tau, r \in N_o$, $s \in R$, $p \in]1, +\infty[$, con $t < \tau < r$. *Per ogni* $\varepsilon > o$, *esiste una costante* $c(\varepsilon)$ *tale che*

$$\| u \|_{W_{s+\tau-r}^{\tau,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|_{W_{s+t-r}^{t,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_s^{r,p}(\Omega).$$

LEMMA (3.4). — *Comunque si fissino* $s \in R$, $p \in]1, +\infty[$, $r, t \in N_o$, *tali che* $r \geq 1$, $o \leq t < r$, *le iniezioni*

$$W_s^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{s+t-r+\varepsilon}^{t,p}(\Omega), \quad W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega) \hookrightarrow W_{s+t-r+\varepsilon}^{t-1/p,p}(\partial\Omega)$$

sono compatte.

Se A è un sottoinsieme di Ω [risp. $\partial\Omega$], denotiamo con $W_s^{r,p}(\Omega; A)$ e $W^{r,p}(\Omega; A)$ [risp. $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega; A)$ e $W^{r-1/p,p}(\partial\Omega; A)$] i sottospazi rispettivamente di $W_s^{r,p}(\Omega)$ e $W^{r,p}(\Omega)$ [risp. $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$ e $W^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$] costituiti dalle funzioni che hanno supporto contenuto in A.

LEMMA (3.5). — *Siano* $r \in N_o$, $s, t \in R$, $p \in]1, +\infty[$. *Allora*

$$W_s^{r,p}(\Omega; \bar{\Omega} - \{o\}) = W_t^{r,p}(\Omega; \bar{\Omega} - \{o\}) = W^{r,p}(\Omega; \bar{\Omega} - \{o\}),$$

e, se $r \geq 1$.

$$W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega; \partial\Omega - \{o\}) = W_t^{r-1/p,p}(\partial\Omega; \partial\Omega - \{o\}) =$$
$$= W^{r-1/p,p}(\partial\Omega; \partial\Omega - \{o\}).$$

LEMMA (3.6). — *Siano* $r \in N_o$, $s \in R$, $p \in]1, +\infty[$ *e* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_o^n$. *Per ogni* $u \in W_s^{r+|\alpha|,p}(\Omega)$, *si ha* $\partial^\alpha u \in W_s^{r,p}(\Omega)$ *e*

$$\| \partial^\alpha u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \leq c \| u \|_{W_s^{r+|\alpha|,p}(\Omega)},$$

con c costante indipendente da u.

Indichiamo con n la normale a $\partial\Omega - \{o\}$ orientata verso l'interno di Ω; poniamo

$$\gamma_j u = \left. \frac{d^j u}{d n^j} \right|_{\partial\Omega - \{o\}}$$

e, per ogni $r \in N$,

$$T_r u = (\gamma_o u, \ldots, \gamma_{r-1} u).$$

LEMMA (3.7). — *Siano* $r \in N$, $s \in R$, $p \in]1, +\infty[$. *L'applicazione* $u \to T_r u$, *definita in* $\mathcal{D}(\bar{\Omega} - \{o\})$, *si prolunga per continuità in un'applicazione che ancora denotiamo con* $u \to T_r u = (\gamma_o u, \ldots, \gamma_{r-1} u)$, *lineare e continua da* $W_s^{r,p}(\Omega)$ *su* $\prod_{j=o}^{r-1} W_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)$ *e dotata di un rilevamento lineare e continuo.*

4. - PROBLEMA DI DIRICHLET IN UN APERTO LIMITATO CON UN PUNTO CONICO

Assegnamo in Ω un operatore differenziale lineare della forma

$$A(x, \partial) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) \partial^\mu + \frac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}} = \bar{A}(x, \partial) + \frac{\lambda^{2m}}{|x|^{2m}},$$

e su $\partial\Omega - \{o\}$ gli m operatori di frontiera

$$B_j(x, \partial) = \left. \frac{d^j}{d n_j} \right|_{\partial\Omega - \{o\}} = \sum_{|\mu| = j} b_{j\mu}(x) \partial^\mu, \quad j = o, \ldots, m - 1.$$

Sia $r_o \in \mathrm{N}$, con $r_o \geq 2m$ e $r_o > m - 1/p - 1$. Formuliamo le seguenti ipotesi:

$\bar{\mathrm{I}}_1$) I coefficienti $a_\mu(x)$, per $|\mu| = 2m$, sono continui in $\bar{\Omega}$.

$\bar{\mathrm{I}}_2$) Per ogni chiuso $\mathrm{K} \subset \bar{\Omega} - \{o\}$, si ha

$$\partial^\alpha a_\mu \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{K}), \quad \text{per} \quad |\mu| = 2m, \quad |\alpha| \leq r - 2m,$$

e riesce

$$\lim_{|x| \to o} \sum_{|\alpha|=2m} \sum_{o<|\alpha|\leq r-2m} \left| |x|^{|\alpha|} \partial^\alpha a_\mu(x) \right| = o.$$

$\bar{\mathrm{I}}_3$) Risulta

$$\partial^\alpha a_\mu \in \mathrm{L}^\infty_{2m-|\mu|+|\alpha|}(\Omega), \quad \text{per} \quad |\mu| \leq 2m - 1, \quad |\alpha| \leq r + 1 - 2m,$$

inoltre, esiste $\varepsilon \geq o$ tale che

$$a_\mu \in \mathrm{L}^\infty_{2m-|\mu|-\varepsilon}(\Omega), \quad \text{per} \quad |\mu| \leq 2m - 1.$$

$\bar{\mathrm{I}}_4$) $\bar{\mathrm{A}}$ è ellittico.

$\bar{\mathrm{I}}_5$) $=$ I_5) del n. 2.

$\bar{\mathrm{I}}_6$) Esiste $\varepsilon \geq o$ tale che

$$\partial^\alpha a_\mu \in \mathrm{L}^\infty_{2m-|\mu|+|\alpha|,-\varepsilon}(\Omega), \quad \text{per} \quad |\mu| \leq 2m - 1, \quad |\alpha| \leq r + 1 - 2m,$$

Per ogni $r \in \mathrm{N}$, con $r \geq r_o$, e $s \in \mathrm{R}$, poniamo

$$\mathrm{E}_{r,s}(\Omega) = \mathrm{W}_s^{r-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=o}^{m-1} \mathrm{W}_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega).$$

Sotto le ipotesi poste, l'operatore

$$\mathfrak{A} : u \to (\mathrm{A}u, \{\mathrm{B}_j u\})$$

è lineare e continuo da $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$ in $\mathrm{E}_{r,s}(\Omega)$.

TEOREMA (4.1). — *Siano* $r \in \mathrm{N}$, $s \in \mathrm{R}$, $p \in]1, +\infty[$, *con* $r \geq r_o$ *e siano verificate le ipotesi* $\bar{\mathrm{I}}_1$), $\bar{\mathrm{I}}_2$), $\bar{\mathrm{I}}_3$), $\bar{\mathrm{I}}_4$) *e* $\bar{\mathrm{I}}_5$). *Allora esiste una co-*

stante $c(\lambda)$, *dipendente da* λ, *tale che*

$$\| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c(\lambda)\left[\| \mathcal{A} u \|_{E_{r,s}(\Omega)} + \| u \|_{W^{o,p}_{s-r+\varepsilon}(\Omega)} \right], \quad \forall\, u \in W_s^{r,p}(\Omega), \tag{4.1}$$

dove ε *è il numero definito dall'ipotesi* $\tilde{I}_3$).

Dimostrazione. — Fissiamo un ricoprimento di $\bar{\Omega}$ mediante gli aperti $O, O_o', \ldots, O_q'$ ed una partizione dell'unità di $\bar{\Omega}$ mediante le funzioni $\xi, \xi_o', \ldots, \xi_q'$, soddisfacenti le condizioni specificate al n. 3.

Assegnamo una funzione $\psi \in C^\infty(\bar{G})$, tale che

$$\psi(x) = 1, \qquad \forall\, x \in \operatorname{supp} \xi; \qquad \operatorname{supp} \psi \subset \bar{G}_1 .$$

Consideriamo gli operatori

$$P = \psi A, \text{ in } G; \quad C_j = \psi/_{\partial\Omega - \{o\}} B_j, \text{ su } \partial\Omega .$$

Si prova, procedendo come nella dimostrazione del teorema (2.2), che esiste una costante $c_1(\lambda)$, dipendente da λ, tale che

$$\| \xi u \|_{W^{s}_{r,p}(G)} \leq c_1(\lambda)\left[\| P(\xi u) \|_{W_s^{r-2m,p}(G)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=o}^{m-1} \| C_j(\xi u) \|_{W_s^{r-j-1/p,p}(\Gamma)} + \| u \|_{W^{o,p}_{s-r+\varepsilon}(G)} \right]. \tag{4.2}$$

D'altra parte, poiché $P = A$ e $C_j = B_j$ in $\operatorname{supp} \xi$, si ha

$$\| P(\xi u) \|_{W_s^{r-2m,p}(G)} \leq c_2 \| A(\xi u) \|_{W_s^{r-2m,p}(\Omega)} , \tag{4.3}$$

$$\| C_j(\xi u) \|_{W_s^{r-j-1/p,p}(\Gamma)} \leq c_3 \| B_j(\xi u) \|_{W_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} . \tag{4.4}$$

Osservando che le derivate di ξ sono nulle al di fuori di un compatto contenuto in $\bar{\Omega} - \{o\}$, grazie ai lemmi (3.2), (3.5) e (3.6), comunque si assegni $t \in R$, si ha

$$\| A(\xi u) \|_{W_s^{r-2m,p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq \| \xi A u \|_{W_s^{r-2m,p}(\Omega)} + c_4 \sum_{|\mu| \leqslant 2m} \sum_{\alpha < \mu} \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \xi\, \partial^\alpha u \|_{W_t^{r-2m,p}(\Omega)} \leq \tag{4.5}$$

$$\leq c_5\left[\| A u \|_{W_s^{r-2m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq 2m-1} \| \partial^\alpha u \|_{W_t^{r-2m,p}(\Omega)} \right] \leq$$

$$\leq c_6\left[\| A u \|_{W_s^{r-2m,p}(\Omega)} + \| u \|_{W_t^{r-1,p}(\Omega)} \right].$$

Analogamente, sfruttando il teorema di tracce (3.7), si ha

$$\| B_j (\xi u) \|_{W_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq c_7\left[\| B_j u \|_{W_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} + \| u \|_{W_t^{r-1,p}(\Omega)} \right]. \tag{4.6}$$

Dalle (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6) si trova che, comunque si assegni $t \in R$,

$$\| \xi u \|_{W_s^{r,p}(G)} \leq c_8\left[\| \mathcal{A} u \|_{E_{r,s}(\Omega)} + \| u \|_{W_t^{r-1,p}(\Omega)} + \| u \|_{W_{s-r+\varepsilon}^{o,p}(\Omega)} \right]. \tag{4.7}$$

Per noti risultati, inoltre, si ha, per $i = o, \ldots, q$, che

$$\| \xi_i' u \|_{W^{r,p}(\Omega)} \leq \tag{4.8}$$

$$\leq c_9\left[\| A(\xi_i' u) \|_{W^{r-2m,p}(\Omega)} + \sum_{j=o}^{m-1} \| B_j (\xi_i' u) \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} + \| \xi_i' u \|_{L^p(\Omega)} \right].$$

Con un procedimento analogo a quello usato per stabilire la (4.7), si trova che, $\forall\, t \in R$,

$$\| \xi_i' u \|_{W^{r,p}(\Omega)} \leq \tag{4.9}$$

$$\leq c_{10}\left[\| \mathcal{A} u \|_{E_{r,p}(\Omega)} + \| u \|_{W_t^{r-1,p}(\Omega)} + \| u \|_{W_{s-r+\varepsilon}^{o,p}(\Omega)} \right], \qquad i = o, \ldots, q.$$

Per il lemma (3.3) si ha che $\forall\, \eta > o$, $\exists\, c_{11}(\eta)$:

$$\| u \|_{W_t^{r-1,p}(\Omega)} \leq \eta \| u \|_{W_{t+1}^{r,p}(\Omega)} + c_{11}(\eta) \| u \|_{W_{t+1-r}^{o,p}(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Grazie alle (4.7), (4.8), (4,9), (4.10) scritte per $t = s - 1 + \varepsilon$ e al lemma (3.2), si deduce che per η abbastanza piccolo esiste una costante c dipendente da λ per la quale vale la (4.1), cioè la tesi.

Consideriamo ora l'operatore $\mathcal{A}^*$ aggiunto di $\mathcal{A}$, lineare e continuo, per le ipotesi, da $E_{r,s}'(\Omega)$ in $(W_s^{r,p}(\Omega))'$, definito dalla relazione

$$\langle \mathcal{A}^* V, u \rangle = \langle V, \mathcal{A} u \rangle,$$

per ogni $u \in W_s^{r,p}(\Omega)$ e per ogni $V = (v, \{v_j\}) \in E'_{r,s}(\Omega)$, dove con $E'_{r,s}(\Omega)$ e $(W_s^{r,p}(\Omega))'$ si indichino rispettivamente gli spazi duali di $E_{r,s}(\Omega)$ e di $W_s^{r,p}(\Omega)$.

TEOREMA (4.2). — *Siano verificate le ipotesi del teorema* (4.1) *e l'ipotesi* $\tilde{I}_6$). *Allora esiste una costante* $c(\lambda)$, *dipendente da* λ, *tale che*

$$\| V \|_{E'_{r,s}(\Omega)} \leq \tag{4.11}$$

$$\leq c(\lambda) \left[\| \mathcal{A}^* V \|_{(W_s^{r,p}(\Omega))'} + \| V \|_{E'_{r+1,s+1-\varepsilon}(\Omega)} \right], \quad \forall\, V \in E'_{r,s}(\Omega),$$

dove ε *è il numero definito dall'ipotesi* $\tilde{I}_6$).

Dimostrazione. — Manteniamo le notazioni introdotte nella dimostrazione del teorema (4.1). Consideriamo l'operatore

$$\mathcal{S} : u \to (P u, \{C_j u\}),$$

che, per le ipotesi, è lineare e continuo da $W_s^{r,p}(G)$ in $E_{r,s}(G) = W_s^{r-2m,p}(G) \times \prod_{j=0}^{m-1} W_s^{r-j-1/p,p}(\Gamma)$. Sia $\mathcal{S}^*$ l'operatore aggiunto di $\mathcal{S}$.

Per $V = (v, \{v_j\}) \in E'_{r,s}(\Omega)$ poniamo $\xi V = (\xi v, \{\xi v_j\})$. Evidentemente $\xi V \in E'_{r,s}(G)$ e la norma di ξV in $E'_{r,s}(G)$ è equivalente alla norma di ξV in $E'_{r,s}(\Omega)$.

In base al teorema (2.3), si ottiene l'esistenza di una costante $c_1(\lambda)$, dipendente da λ, tale che

$$\| \xi V \|_{E'_{r,s}(G)} \leq c_1(\lambda) \left[\| \mathcal{S}^*(\xi V) \|_{(W_s^{r,p}(G))'} + \| \xi V \|_{E'_{r+1,s+1-\varepsilon}(G)} \right], \tag{4.12}$$

dove ε è il numero definito dall'ipotesi $\tilde{I}_6$). Inoltre, si ha

$$\| \mathcal{S}^*(\xi V) \|_{(W_s^{r,p}(G))'} \leq c_2 \| \mathcal{A}^*(\xi V) \|_{(W_s^{r,p}(\Omega))'} \leq \tag{4.13}$$

$$\leq c_3 \| \mathcal{A}^* V \|_{(W_s^{r,p}(\Omega))'} + \| \mathcal{A}^*(\xi V) - \xi \mathcal{A}^* V \|_{(W_s^{r,p}(\Omega))'},$$

dove

$$\| \mathcal{A}^*(\xi V) - \xi \mathcal{A}^* V \|_{(W_s^{r,p}(\Omega))'} = \sup_{\substack{u \in W_s^{r,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{| \langle V, \mathcal{A}(\xi u) - \xi \mathcal{A} u \rangle |}{\| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)}}. \tag{4.14}$$

Seguendo lo stesso procedimento usato per stabilire le (2.26) e (2.27), si trova che

$$\| A(\xi u) - \xi A u \|_{W^{r+1-2m,p}_{s+1-\varepsilon}(\Omega)} \leq c_4 \| u \|_{W^{r,p}_s(\Omega)} , \tag{4.15}$$

$$\| B_j(\xi u) - \xi B_j u \|_{W^{r-j-1/p+1,p}_{s+1-\varepsilon}(\partial\Omega)} \leq c_5 \| u \|_{W^{r,p}_s(\Omega)} . \tag{4.16}$$

Poiché

$$| < V, \mathcal{A}(\xi u) - \xi \mathcal{A} u > | \leq \| V \|_{E'_{r+1,s+1-\varepsilon}(\Omega)} \cdot \| \mathcal{A}(\xi u) - \xi \mathcal{A} u \|_{E_{r+1,s+1-\varepsilon}(\Omega)} ,$$

allora, dalle (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16) segue che

$$\| \xi V \|_{E'_{r,s}(\Omega)} \leq c_6(\lambda) \left[\| \mathcal{A}^* V \|_{(W^{r,p}_s(\Omega))'} + \| V \|_{E'_{r+1,s+1-\varepsilon}(\Omega)} \right] . \tag{4.17}$$

Poniamo ora

$$E_r(\Omega) = W^{r-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=o}^{m-1} W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega);$$

siano $E'_r(\Omega)$ il duale di $E_r(\Omega)$ e $(W^{r,p}(\Omega))'$ il duale di $W^{r,p}(\Omega)$.

Da ben noti risultati segue che

$$\| \xi'_i V \|_{E'_r(\Omega)} \leq c_7 \left[\| \mathcal{A}^*(\xi'_i V \|_{(W^{r,p}(\Omega))'} + \| \xi'_i V \|_{E'_{r+1}(\Omega)} \right] . \tag{4.18}$$

Dalla (4.18) e dal lemma (3.5), si ha

$$\| \xi'_i V \|_{E'_{r,s}(\Omega)} \leq c_8 \left[\| \mathcal{A}^*(\xi'_i V) \|_{(W^{r,p}_s(\Omega))'} + \| \xi'_i V \|_{E'_{r+1,s+1-\varepsilon}(\Omega)} \right] . \tag{4.19}$$

Procedendo con gli stessi ragionamenti usati per dedurre la (4.17), dalla (4.19) si deduce che

$$\| \xi'_i V \|_{E'_{r,s}(\Omega)} \leq c_9 \left[\| \mathcal{A}^* V \|_{(W^{r,p}_s(\Omega))'} + \| V \|_{E'_{r+1,s+1-\varepsilon}(\Omega)} \right] . \tag{4.20}$$

Dalle (4.17) e (4.20) si trae la tesi osservando che $V = \xi V + \sum_i \xi'_i V$.

TEOREMA (4.3). — *Se sono verificate le ipotesi del teorema* (4.2) *con* $\varepsilon > o$, *allora l'operatore* $\mathcal{A}$, *definito in* $W^{r,p}_s(\Omega)$ *a valori in* $E_{r,s}(\Omega)$, *è ad indice.*

La tesi consegue dai teoremi (4.1), (4.2) e dai risultati del n. 8 di [8], dopo aver osservato che ,in conseguenza del lemma (3.4), le iniezioni

$$W_s^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{s-r+\varepsilon}^{o,p}(\Omega),$$

$$E'_{r,s}(\Omega) \hookrightarrow E'_{r+1,s+1-\varepsilon}(\Omega)$$

sono compatte.

OSSERVAZIONE (4.1). — Si possono facilmente generalizzare i risultati ottenuti al caso in cui i punti conici di Ω siano $k > 1$; si possono anzi fare sui punti singolari di $\partial\,\Omega$ ipotesi analoghe a quelle fatte da AVANTAGGIATI e TROISI in [7], ma ce ne siano astenuti per semplicità.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALVINO A., TROMBETTI G., *Sul problema di Dirichlet in un cono di* R^n *in* L^p, in corso di stampa su Ann. di Mat. pura e applicata (1979).

[2] NEČAS, *Les methodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeur, 1967.

[3] MIRANDA C., *Istituzioni di analisi funzionale*, edizione UMI, 1978.

[4] LIONS J. L., MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Dunod Éditeur, Paris, 1968.

[5] AVANTAGGIATI A., TROISI M., *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo*, I, Ann. di Mat. pura e applicata, **95**, pp. 361-408 (1973).

[6] AVANTAGGIATI A., TROISI M., *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo*, III, Ann. di Mat. pura e applicata, **99**, pp. 1-50 (1974).

[7] AVANTAGGIATI A., TROISI M., *Problemi al contorno di tipo ellittico in un dominio piano limitato e dotato di punti angolosi*, Memorie dell'Accademia dei Lincei, **12**, pp. 271-308 (1974).

[8] PEETRE J., *Another approach to elliptic boundary problems*, Comm. Pure Appl. Math., **14**, pp. 711-731 (1961).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, G. Cimmino e C. Ciliberto.

Assetto ecologico delle comunità animali del fiume Sarno (Campania)

Nota di PIETRO BATTAGLINI *
presentata dal socio ordinario BALDASSARRE DE LERMA

(Adunanza del 2 giugno 1979)

RIASSUNTO. — L'Autore ha studiato la consistenza e la distribuzione della fauna nel fiume Sarno in Campania, correlandola con tutte le componenti ecologiche.

Il fiume Sarno è un piccolo fiume di circa 30 Km di lunghezza che scorre nella pianura omonima e sfocia nel golfo di Castellammare di Stabia. Lungo questo fiume sono state identificate 20 stazioni di campionamento; la loro localizzazione è stata effettuata in funzione degli affluenti e di tutti i canali che si versano nel Sarno. Ciò in relazione alla loro azione ecologica, sia biotica che abiotica, sulla componente faunistica del fiume stesso.

I dati chimico-fisici esaminati sulla sponda destra, sinistra e centro fiume fanno notare un accrescimento dei valori alterativi man mano che ci si avvicina alla foce. Inoltre ogni parametro chimico-fisico presenta un valore peggiorativo verso l'inquinamento in quelle stazioni poste subito a valle della confluenza dell'affluente Cavaiola, che è quello portante il maggior carico inquinante. Una convalida di ciò è data dalle prove di ittiotossicità effettuate con le sue acque su esemplari di *Carassius auratus*. Da tali analisi si è potuto notare che gli effetti sull'epitelio branchiale di questi teleostomi è tale da determinare, dopo una permanenza di 96 h in tale acqua, una completa spoliazione dell'epitelio respiratorio.

L'analisi della fauna, costituita da 2272 esemplari appartenenti a 6 phyla per complessive 68 specie, ha messo in luce una differenza di zoocenosi lungo il corso del corpo idrico in esame. In particolare l'intero Sarno presenta tre zoocenosi differenti, riferentesi a tre zone: la zona A, dalla sorgente fino a 10 Km., la zona B dal 10° Km. al 18° Km., e la zona C la restante parte fino alla foce.

La struttura e composizione delle tre comunità animali è abbastanza diversificata e solo 3 specie su 68 sono comuni a tutte tre le zone.

Dai dati faunistici integrati con quelli abiotici si è potuto perciò avanzare l'ipotesi di una reale zonazione del fiume Sarno. Tale zonazione, però, non è del tutto naturale, ma è in diretta dipendenza con l'alterazione ambientale che questo fiume presenta in rapporto agli stress alterativi che deve subire lungo il suo corso.

Tali tre zone, in funzione ad una classificazione saprobia degli ecosistemi acquatici interni, possono essere classificate come: oligosaprobia, la zona A; alfa-beta-mesosaprobia, la zona B; e beta-mesosaprobia la zona C.

* Istituto e Museo di Zoologia - Università di Napoli.

SUMMARY. — Mutual relations between ecological distinctive features and invertebrates fauna structure and distribution in Sarno river (Campania, Italy) have been studied.

Sarno river is a little river which flows for approximately 30 Km through its homonymous plain towards the gulf of Castellammare di Stabia — part of the gulf of Neaples.

Along the river 20 sample stations have been characterized. To the purpose, station locations have been established at confluence points of main tributaries and effluents of Sarno river.

The biotic and abiotic ecological action on river invertebrate fauna from tributary and effluent discharges have been considered. Chemical and physical analyses, relative to the right and left sides and to the centre of the river, indicate that the ecological deterioration increases as the river goes down and approaches to the mouth.

Besides any chemico-physical parameter shows an increasing pollution particularly at the stations situated after the confluence of Cavaiola tributary. This affluent contributes the greatest amount of water pollution.

The ichthyo-toxicity tests, effected with the polluted waters of Caviola on *Carassius auratus*, have also demostrated that samples from Cavaiola are harmful to fishes. Indeed after 96 h of immersion we have observed a complete exploliation of monostratified branchial respiratory epithelium of the *Carassius* tested.

During our studies 2272 specimens of Sarno river invertebrates have been collected; these animals belong to 6 *phyla* including 68 species. The survey of Sarno invertebrates allowed us to recognize different zoocoenosis along this river. Particularly there are in Sarno river three quite different zoocoenosis referring to three zones: the first (zone A) from the source to the 10th Km; the second (zone B) from the 10th Km to the 18th Km; the third (zone C) to the remaing portion as far as the mouth.

The structure and composition of the three animal communities are quite different and three species only are common to all the three zones.

It seems, therefore, from faunistical and abiotic ecological data that a real zonation in Sarno river is present. This zonation is not a natural one, but is a consequence of the pollution of the river.

The three ecologically identified zones of Sarno river can be classified, according to saprobic system of aquatic ecosystems, as:

1) zone A: oligosaprobic zone;
2) zone B: α-β-mesosaprobic zone;
3) zone C: β-mesosaprobic zone.

1. - INTRODUZIONE.

Il fiume Sarno è un fiume permanente che scorre principalmente nella pianura omonima. Ha origine presso la città di Sarno con tre sorgenti principali e, dopo che le acque delle tre sorgenti si sono riunite, scorre per circa 30 Km. per gettarsi nel golfo di Castellammare di Stabia. I terreni attraversati, per la maggior parte di origine vulcanica, sono utilizzati a culture intensive di ortaggi e frutteti; la zona è fittamente popolata e caratterizzata da numerose industrie che gettano i prodotti di rifiuto direttamente nel fiume.

Il Sarno, anche se ha un corso breve, attraversa aree con aspetti molto dissimili che vanno da zone a carattere essenzialmente agricolo ad altre densamente urbanizzate ed ad altre ancora con forte concentrazione industriale.

Da quanto detto si può facilmente dedurre che il fiume, man mano che passa lungo le varie zone, acquista proprietà sempre più eterogenee. Infatti lungo il corso, fino a prima della immissione della Cavaiola (affluente principale e causa della più massiva azione inquinante), non vi sono scarichi tali da alterare sensibilmente le caratteristiche fluviali, ma da questo punto in poi, attraversando zone fortemente urbanizzate ed industrializzate, le proprietà delle acque vengono notevolmente alterate.

La scelta del fiume Sarno è stata determinata da due ragioni: in primo luogo la breve lunghezza che ha permesso visioni contemporanee dell'intero bacino, che anche per la scarsa pendenza (1,5 m./Km.) poteva essere considerato un ecosistema più o meno omogeneo; in secondo luogo il notevole addensamento urbano ed industriale del suo comprensorio che ha influenzato ed influenza la distribuzione e selezione faunistica.

2. - Dislocazione delle stazioni di campionamento.

Il primo problema che abbiamo dovuto risolvere è stato quello della localizzazione delle stazioni di prelievo.

Per il fine che ci siamo proposti la scelta delle stazioni era di importanza fondamentale dato il peculiare aspetto fisiografico del fiume e le zone da esso attraversate. Da una estesa ricerca bibliografica è apparso chiaro che le idee dei vari studiosi su tale argomento sono diverse e non concordanti, per cui ci è sembrato opportuno utilizzare, nella presente ricerca, un sistema personale nel localizzare le varie stazioni di campionamento.

Nell'insieme si sono determinate 13 stazioni lungo il corso principale, dislocate nei punti più significativi e a valle e a monte dell'immissione dei più importanti affluenti, canali e scarichi di varia origine, inoltre altre 7 negli affluenti e canali principali a circa 100-200 m. dalla loro confluenza con il Sarno; quindi complessivamente sono state localizzate 20 stazioni.

Come si vede dalla Fig. 1 le varie stazioni sono state indicate con lettere iniziando dalla foce per finire alla sorgente: con il criterio che le stazioni sugli affluenti e canali hanno la stessa lettera della stazione a valle, con un indice che le identifica. Per una migliore conoscenza del luogo del prelievo è stata compilata la Tabella I

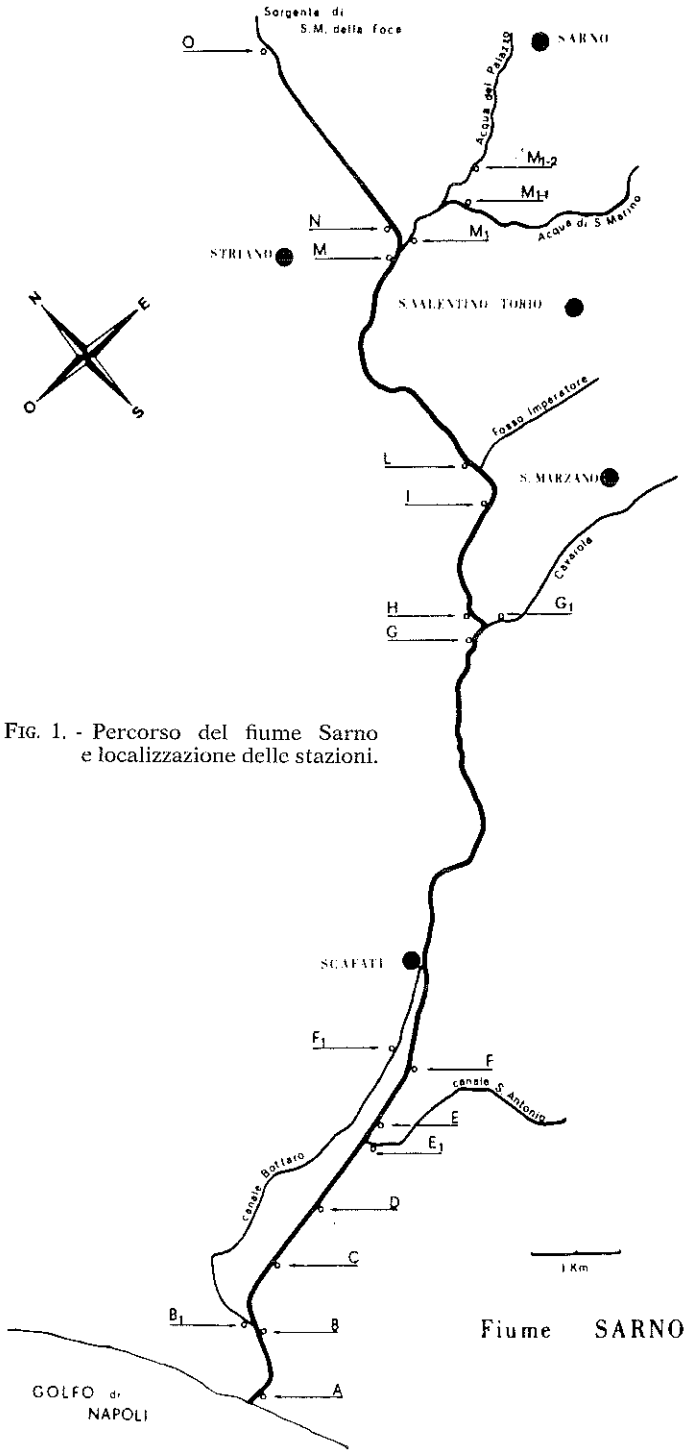


FIG. 1. - Percorso del fiume Sarno e localizzazione delle stazioni.

TABELLA I

Descrizione delle località sedi delle stazioni di campionamento.

Stazioni	Km. dalla Foce	Km. dalla stazione successiva	Luogo dei prelievi	Osservazioni
Foce	0,00	0,200	—	
A	0,200	0,725	Ponte Ferrovia statale	
B	0,925	0,925	Ponte a valle della confluenza con il canale Bottaro	
B/1	0,975	0,875 da C	Canale Bottaro 100 m. prima della confluenza con il Sarno	
C	1,850	0,850	Ponte su circonvallazione autostradale per Sorrento	
D	2,700	1,125	Il ponte a valle dell'immissione del canale di S. Antonio Abate	
E/1	3,625	0,200 da E	Canale S. Antonio Abate a 100 m. prima della confluenza con il Sarno	f.c.
E	3,825	0,800	Ponte della Marna	
F	4,625	5,400	Ponte all'altezza della Manifattura Tabacchi (Scafati)	
F/1	4,625	—	Canale Bottaro (altezza Stazione F)	f.c.
G	10,025	0,325	A valle della confluenza della Cavaiola nel Sarno	
G/1	10,350	—	Cavaiola 100 m. prima della confluenza con il Sarno	f.c.
H	10,350	1,275	A monte dalla confluenza della Cavaiola con il Sarno	
I	11,625	0,650	Ponte S. Marzano	
L	12,275	3,025	A monte della immissione del Fosso Imperatore nel Sarno (altezza Masseria Tortora)	
M	15,300	0,450	Ponte della ferrovia Vesuviana sul tratto S. Valentino Torio - Striano	
N	15,150	2,675	Madonna delle Fontanelle	
M/1	a 0,125 Km. dall'immissione nel Sarno	altezza Staz. N	Acqua di Palazzo + Acqua di S. Marino	f.c.
M/1-1	a 1,295 Km. dall'immissione nel Sarno	1,175 da M/1	Acqua di Palazzo (Masseria Torelli)	f.c.
M/1-2	a 1,175 Km. dall'immissione nel Sarno	1,050 da M/1	Acqua di S. Marino (Masseria Robustelli)	f.c.
O	18,425	0,500 dalla Sorgente	S Maria della Foce	

N.B. - f.c. = stazioni sugli affluenti e canali.

ove sono riportati, oltre che le varie stazioni, i Km. dalla foce, i Km. dalla stazione successiva — dati importanti per caratterizzare le eventuali interrelazioni ecologiche tra stazioni contigue — ed il preciso luogo del prelievo.

La distanza media tra le due stazioni è di 1577 m.; quella minima, tra le stazioni G e H, di 325 m. e quella massima, tra le stazioni F e G, di 5.400 m.

3. - Procedimenti e tecniche.

3.1. - *Procedimentie metodi faunistici.*

I risultati di cui alla presente ricerca sono relativi a prelievi del quadriennio 1972-75 e sempre effettuati in concomitanza a peculiari aspetti meteorologici, stagionali nonché ai periodi lavorativi di quelle industrie del comprensorio che potevano influenzare la portata fluviale e la natura dell'acqua.

Il prelievo dei campioni della fauna fluviale è stato effettuato per mezzo di un retino circolare con diametro di cm. 18, di ml. 1850 di capienza e con apertura di ciascuna maglia di 0,1 mm. Ogni campionamento è stato effettuato in un tempo costante, 10 minuti circa, retinando contro corrente per sei volte consecutive e facendo filtrare per ogni singola retinata quasi tutta l'acqua. In tal modo si sono filtrati circa 11 litri d'acqua concentrando sul fondo gli animali. Ogni campione veniva conservato in sigoli boccacci rettangolari di eltex-polietilene da 500 ml. riempiti fino a 250 ml. ed etichettati.

La cernita ed il riconoscimento della fauna furono eseguiti in laboratorio, dopo aver raggiunto piccole quantità (circa 1 % - 2 %) di formalina all'insieme prelevato.

Per l'identificazione ed il conteggio degli animali si fece uso di microscopi stereoscopici da dissezione con ingrandimenti variabili da 5 x a 50 x.

Per l'identificazione e lo studio degli esemplari più piccoli (Turbellari, Rotiferi, etc...) furono approntati vetrini, previa fissazione in appropriati liquidi ed eventuali colorazioni.

I prelievi faunistici sono stati eseguiti per ogni stazione nelle zone prospicienti le sponde destra e sinistra.

Per i tests di ittiotossicità ci si è attenuti alla metodica descritta su « Standard methods for the examination of water, sewage and industrial waters. 13th ed. American Public Health Association, New York, 1971 » utilizzando come specie di esperimento il *Carassius auratus* L. (Pesci rossi).

3.2. - *Procedimenti e metodi chimico-fisici.*

I campionamenti sono stati effettuati nelle 20 stazioni suddette, solo nel 1972, i dati riportati sono le medie dei prelievi effettuati.

I prelievi sono stati compiuti a 10-15 cm. di profondità nelle zone prospicienti la sponda destra, sinistra ed al centro del corso d'acqua tramite due serie di bottiglie scure di polietilene rispettivamente di 250 e 1000 ml. di capacità. L'acqua delle prime, tamponata immediatamente con $MnCl_2$ e KJ in soluzione alcalina, si analizzava in laboratorio per la determinazione dell'OD; quella delle bottiglie da 1000 ml. veniva raccolta per tutte le altre determinazioni.

I campionamenti sono stati effettuati contemporaneamente durante ogni prelevamento nelle 20 stazioni.

In particolare per ogni campione d'acqua sono state eseguite le seguenti analisi:

a) la temperatura esterna e la temperatura dell'acqua con termometro a pozzetto;

b) la Concentrazione idrogenionica con piaccometro con elettrodo a calomelano;

c) la Durezza totale con il metodo complessimetrico EDTA ed espressa in p.p.m. di $CaCO_3$;

d) l'Alcalinità totale titolandola con HCl 0,1 N, indicatore metilarancio, ed espressa in p.p.m. di $CaCO_3$;

e) l'Ossigeno disciolto (OD) secondo il metodo Winkler ed espresso in p.p.m. ed in % di O_2 saturato;

f) il BOD (richiesta biochimica di ossigeno) secondo il metodo Winkler dopo 5 gg. a 20°C ed espresso in p.p.m.;

g) le Sostanze organiche *in toto* con il metodo Kübel ed espresse in p.p.m. di O_2 consumato;

h) il Residuo secco a 110°C e 180°C con il metodo ponderale ed espresso in p.p.m.;

i) l'NH_4^+ per via colorimetrica usando il reattivo di Nessler ed alcalinizzando con sale di Segnette quando occorreva;

l) l'NO_2^- sempre per via colorimetrica usando il reattivo di Griess-Jlosvay;

Per le peculiarità della presente ricerca sono risultate necessarie le seguenti determinazioni supplementari:

A) il Saggio con permanganato a 3' per misurare la richiesta di ossigeno delle sostanze riducenti inorganiche e di quelle organiche facilmente ossidabili;

B) il Saggio con permanganato a 4 h per calcolare l'ossigeno totale richiesto da tutte le sostanze inorganiche ed organiche.

In entrambi i saggi si è utilizzata una soluzione acidificata con H_2SO_4 di $KMnO_4$ aggiungendo KJ e titolando con tiosolfato sodico secondo il metodo suggerito da KLEIN (1961).

Questi due ultimi saggi sono stati utilizzati per calcolare il rapporto permanganato 4 h/3' individuante il tipo di inquinamento [1] ed il rapporto BOD/$KMnO_4$ che stabilisce, secondo HEWITT (1940), il sistema di depurazione delle acque in esame.

Inoltre per l'acqua della stazione posta presso la foce si è effettuato un saggio qualitativo al blu di metilene ed estrazione con cloroformio per identificare un'eventuale presenza di detersivi sintetici.

4. - RISULTATI E OSSERVAZIONI.

4.1. - *Risultati e osservazioni sulle caratteristiche ambientali.*

L'insieme delle determinazioni chimico-fisiche effettuate nelle 20 stazioni studiate, con i risultati relativi alle sponde destra (D), sinistra (S) e centro (C) fiume (Tab. II), necessita una disamina per poter analizzare le variazioni che le proprietà chimico-fisiche subiscono andando dalla foce alla sorgente [2]. Tale necessità ci ha indotto a dividere i risultati, con le relative osservazioni, in analisi dei dati chimico-fisici e studio dei grafici relativi all'andamento dell'OD,BOD_5, Sostanze organiche *in toto*, NH_4^+, NO_2^-, che sono le proprietà più significative dell'acqua ai fini della indagine da noi intrapresa.

4.1.1. - *pH.*

Il pH lungo tutte le stazioni non subisce notevoli variazioni, caratterizzando l'ambiente tra neutro e lievemente alcalino, ad eccezione delle stazioni A e G_1; in A la concentrazione idrogenionica tende verso l'alcalino (7,60), un po' meno in G_1 (7,30). Questo fenomeno è facilmente spiegabile in quanto A è la parte terminale del Sarno ove si immettono oltre che scarichi fognarii anche effluenti industriali e G_1 è ubicata proprio sulla Cavaiola che, come si vedrà in seguito, è la sede di acque maleodoranti.

4.1.2. - *Durezza e alcalinità.*

Le durezze e le alcalinità seguono lo stesso andamento lungo tutto il corso del fiume e nei suoi affluenti e canali, ossia all'aumen-

[1] Osservazioni effettuate entro l'area del « Trent river Board » nel 1953 fanno notare che esiste una stretta relazione tra questo rapporto e la fauna predominante presente nell'acqua (Prevention of river pollution (1953)).

[2] In appendice sono riportati i valori limiti di tolleranza della fauna dulcacquicola nei riguardi delle varie proprietà chimico-fisiche dell'acqua.

tare delle prime si registra un aumento anche delle seconde. In complesso si può dire che l'acqua dell'intero fiume, affluenti e canali è un'acqua compresa tra leggermente dura e moderatamente dura.

L'alterazione della corrispondenza biunivoca tra durezza e alcalinità nella stazione G_1, ove si osserva che ad una bassa durezza (147,5 p.p.m.) fa riscontro una alta alcalinità (490 p.p.m.); è probabilmente da mettere in relazione alla presenza dei residui schiumosi di detergenti sintetici galleggianti sull'acqua, i quali, al contrario del sapone, non induriscono l'acqua in quanto non si solubilizzano, rendendola invece più alcalina.

Per l'OD,BOD, Sostanze organiche *in toto*, NO_2^- e NH_4^- si rimanda per la discussione dei risultati, alla analisi dei grafici che meglio evidenziano i valori analitici. In particolare i grafici dello OD e del BOD fanno notare variazioni dei loro valori anche tra le due sponde di una stessa stazione.

4.1.3. - *Residuo secco.*

Il residuo secco, a 110°C e 180°C, non presenta valori anormali, nel senso che riflette sempre la quantità complessiva dei sali disciolti. L'elevata quantità nelle stazioni F, F_1 e G_1 rispetto alla concentrazione media delle altre stazioni è appunto legata all'aumento di elettroliti in queste.

4.1.4. - NO_3^-

L'NO_3^- ha valori quasi uniformi in ogni campione ad eccezione di quelli delle stazioni G, F, ed F_1. Ciò di per se stesso non ha alcun significato in quanto, come si sa, tale ione rappresenta il prodotto finale della nitrificazione. La eventuale significatività, legata ai valori dell'NH_4^+, NO_3^- e BOD, ci riserviamo di esaminarla in seguito, analizzando appunto le interrelazioni del processo di nitrificazione e di richiesta biologica di ossigeno.

4.1.5. - Cl^-.

L'osservazione dell'andamento del cloroione dalla foce alla sorgente fa vedere una discreta uniformità di concentrazioni, comprese tra 63 e 50 p.p.m.; l'unico valore che si discosta da queste è quello della stazione G_1 (Cavaiola) ove si ha il dato più alto (70 p.p.m.). È interessante notare che i campioni delle stazioni poste a valle e a monte dell'immissione della Cavaiola nel Sarno presentano in un

certo modo, valori antitetici di concentrazioni di Cl^-, nel senso che i dati più alti sono a valle dell'immissione suddetta. Ciò fa pensare ad un eventuale effetto polluente nei riguardi del cloroione del suddetto affluente.

4.1.6. - SO_4^{--}.

Lo ione SO_4^{--} è presente in quantità pressocché uniformi in tutte le stazioni. L'unico valore discordante è quello dei campioni della stazione C ove, con 149 p.p.m., si ha il valore più alto; ciò lo possiamo spiegare dalla ubicazione della suddetta stazione posta a valle degli scarichi di cartiere, le quali utilizzano solfato di Al nei loro processi di lavorazione. Che questo repentino innalzamento sia dovuto ad uno scarico inquinante è comprovato dai valori SO_4^{--} dei campioni delle stazioni B e A simili, per effetto della diluzione, a quelli dei campioni delle stazioni poeste a monte di C.

4.1.7. - PO_4^{--}.

I fosfatoioni hanno concentrazioni quasi uniformi lungo tutto il fiume ed affluenti; l'unico valore anomalo (6,00 p.p.m.) è presente nei campioni della stazione B.

4.1.8. - Al^{+++}.

Lo ione Al^{+++} presenta concentrazioni piuttosto elevate fino ad un massimo nei campioni della stazione C dopo la quale si ha un repentino e forte abbassamento dei valori che in seguito si mantengono costanti. Ciò potrebbe spiegarsi, confrontando l'andamento simile dello SO_4^{--}, all'effetto degli scarichi di cartiere che, appunto, utilizzano solfato di Alluminio.

4.1.9. - H_2S.

Va notata la presenza di tracce di H_2S nelle stazioni A, G e G_1 evidenziata analiticamente e organoletticamente. Le maggiori tracce (++) si hanno nei campioni della Cavaiola (G_1), mentre nei campioni presi nella zona prospiciente la sponda sinistra di G le tracce sono minime (+) e sono del tutto assenti nella sponda destra. Ciò è dovuto alla diluizione e turbolenza dell'acqua e al fatto che la Cavaiola confluisce sul lato sinistro del Sarno. La uguale quantità di H_2S in A (tracce ++) e G. (tracce ++) è la prova della presenza di uguale quantità di materiale putrescibile in entrambe le stazioni.

4.1.10. - *$KHnO_4$ 4 h/3'.*

Infine, come è stato già detto, è stato effettuato il rapporto $KMnO_4$ 4 h/3' per ogni stazione nell'intento di individuare il tipo di inquinamento presente lungo il fiume e suoi affluenti. Da tale rapporto abbiamo potuto osservare che per la maggior parte delle stazioni si ha in media un rapporto uguale a 3,34, mentre per le stazioni A e B esso è rispettivamente 2,61 e 2,80 e infine per le stazioni C ed E è pari a 3.11 e 3,08 rispettivamente. Da questi valori possiamo dedurre, confrontandoli a quelli riportati in appendice, che per la maggior parte del fiume l'inquinamento è di tipo domestico e vegetale, per le stazioni A e B è tra domestico ed industriale e infine per C ed E è praticamente domestico.

4.1.11. - *Analisi dei grafici.*

Come si è già accennato le variazioni analitiche dell'OD,BOD, NH_4^+ , NO e sostanze organiche *in toto* sono state riportate in grafici in quanto meglio esse evidenziano le modifiche riscontrate lungo il fiume. In particolare per alcune di esse (OD,BOD e Sostanze organiche *in toto*) nei grafici sono stati riportati i valori riferentesi alle sponde destra, sinistra e centro fiume, poiché i tre campioni presentavano dati differenti.

Anche per l'esame dei grafici premettiamo quelle osservazioni riguardanti i valori della stazione O.

4.1.11.1. - *OD* (Fig. 2).

L'OD in p.p.m. presenta, a partire dalla foce, un andamento piuttosto costante, con valori in media bassi, fino alla stazione F ove si ha la quantità più bassa di OD. Da questa stazione in poi la concentrazione dell'ossigeno disciolto (in p.p.m.) si innalza con valori compresi in media tra 3,80 e 4,35 con un minimo (2,83) nella stazione H.

Interessante nel complesso delle tre funzioni del grafico dell'OD lungo l'intero corso sono le minime concentrazioni presenti: nella sponda destra della stazione F, nella sponda sinistra della stazione H e il complessivo depauperamento nella stazione A.

I valori dell'OD degli affluenti sono di solito sempre più bassi di quelli delle stazioni vicine dipendendo essenzialmente dalla minore portata di essi e dall'essere facilmente inquinabile dai vari scarichi.

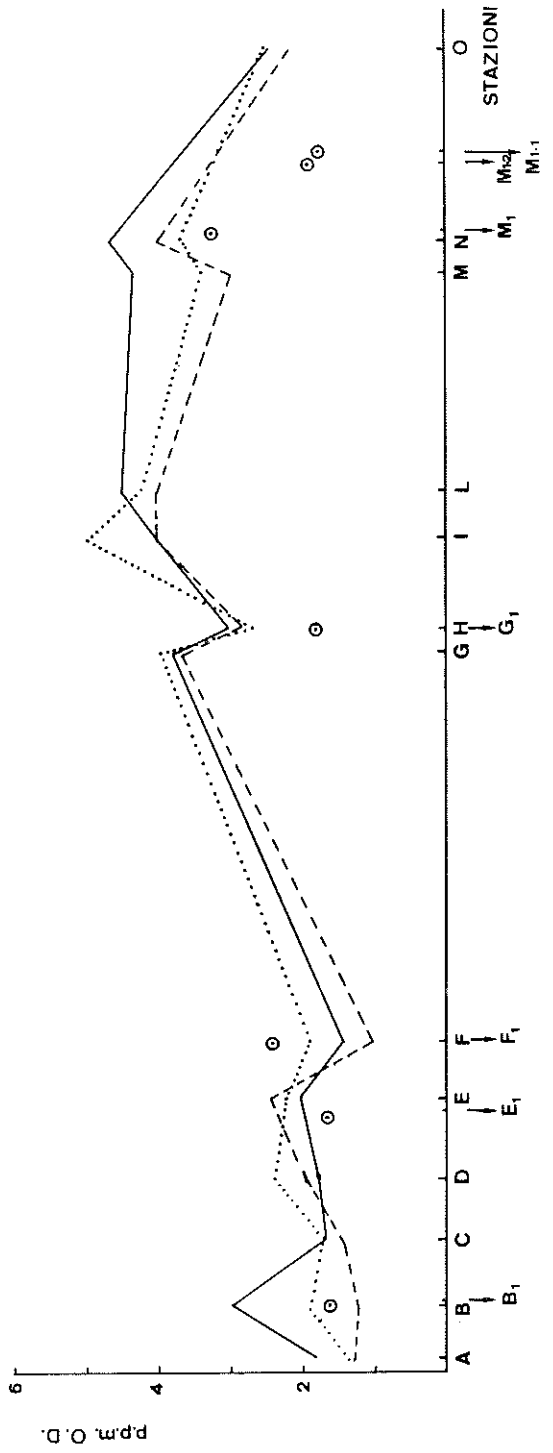


FIG. 2. - Andamento medio dell'O.D.

N.B.: — = dati centro fiume; — — — = dati sponda destra; . . . . . = dati sponda sinistra.

TABE

Risultati degli esami chimico-fisici, ogni d

B		B_1	C		
C	S	C	D	C	S
25,1	25,1	25,1	25,5	25,5	25,5
20	20	21	20	20	20
7,20	7,20	7,10	7,20	7,20	7,2
217,5	217,5	200,0	232,0	232,0	232,0
412	412	390	425	425	425
2,94	1,85	1,68	1,39	1,65	1,6
32,07	19,18	18,32	15,08	18,03	18,0
6,00	6,00	6,90	8,20	7,00	7,0
2,32	2,30	2,48	2,40	2,30	2,1
780	780	600	740	740	740
700	700	520	700	700	700
32,40	32,40	33,20	40,00	40,00	40,0
0,10	0,10	0,10	0,15	0,15	0,1
1,70	1,70	1,70	1,50	1,50	1,5
63,00	63,00	59,20	63,00	63,00	63,0
92,24	92,24	92,40	149,1	149,1	149,1
6,00	6,00	3,88	3,70	3,70	3,7
0,125	0,125	0,50	0,50	0,50	0,5
11,20	11,20	11,24	13,41	13,41	13,4
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
acr.	aer.	acr.	aer.	aer.	aer
3,00	3,00	3,40	3,00	3,00	3,0
8,40	8,40	14,40	9,40	9,40	9,4

in media dei campionamenti del 1972

D			E_1	E		
D	C	S	C	D	C	
27,0	27,0	27,0	28,3	28,3	28,3	28
20	20	20	28	20	20	20
7,18	7,12	7,12	7,12	7,15	7,15	7
227,5	227,5	227,5	235,5	222,5	222,5	222
425	425	425	400	420	420	420
1,92	1,74	2,32	1,69	2,43	2,04	2
20,07	19,12	25,58	18,64	26,80	22,50	24
7,00	6,50	5,41	6,19	6,20	6,00	6
1,90	1,90	1,92	2,40	1,86	1,84	1
700	700	700	780	790	790	790
680	680	680	720	740	740	740
37,20	37,20	37,20	41,20	40,00	40,00	40
0,08	0,08	0,08	0,00	0,08	0,08	0
1,10	1,10	1,10	1,00	1,00	1,00	1
60,30	60,30	60,30	60,43	60,20	60,20	60
90,64	90,64	90,64	90,60	90,64	90,64	90
3,80	3,80	3,80	4,50	4,50	4,50	4
0,30	0,30	0,30	3,20	0,80	0,80	0
1,58	1,53	1,58	1,60	1,60	1,60	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
aer.	aer.	aer.	aer.	aer.	aer.	a
3,40	3,40	3,40	3,00	5,00	5,00	5
14,40	14,40	14,40	10,80	15,40	15,40	15

Risultati degli esami chimico-fisici, og

	I			L		
;	D	C	S	D	C	S
',4	27,2	27,2	27,2	26,8	26,8	26,8
',8	16	16	16	19	19	19
',08	6,90	6,90	6,90	7,00	7,00	7,0
',5	202,5	202,5	202,5	196,5	196,5	196,5
'	380	380	380	350	350	350
,66	4,01	4,02	4,98	4,00	4,51	4,2
,23	43,06	43,07	54,72	43,92	48,44	46,4
,00	1,80	1,80	1,12	1,26	1,26	1,4
,48	1,43	1,40	1,46	1,48	1,48	1,4
	580	580	580	692	692	692
	540	540	540	680	680	680
,50	53,20	53,20	53,20	40,60	40,60	40,6
,05	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,0
,40	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,0
,00	48,50	48,50	48,50	50,75	50,75	50,7
,10	90,20	90,20	90,20	86,10	86,10	86,1
,50	3,51	3,51	3,51	3,52	3,52	3,5
,02	0	0	0	0	0	0
,57	1,88	1,88	1,88	1,53	1,53	1,5
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
er.	acr.	aer.	aer.	aer.	aer.	ae
,40	3,00	3,00	3,00	3 00	3,00	3,(
,80	10,80	10,80	10,80	10,50	10,50	10,5

ABELLA II

uto è la media dei campionamenti del 1972.

	M			N			
D	C	S	D	C	S		
26,8	26,8	26,8	26,8	26,8	26,8	2
17,2	17,2	17,2	18	18	18	1
7,10	7,10	7,10	7,10	7,10	7,10	
220,0	220,0	220,0	185,0	185,0	185,0	20
410	410	410	327	327	327	39
3,00	4,28	3,38	4,00	4,70	3,70	
32,93	46,96	35,50	43,92	51,72	43,26	2
1,60	1,59	1,59	3,70	3,71	3,71	
1,49	1,40	1,40	1,20	1,20	1,20	
750	750	750	480	480	480	49
700	700	700	460	460	460	46
50,40	50,40	50,40	32,10	32,10	32,10	5
0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	
2,00	2,00	2,00	1,50	1,50	1,50	
50,20	50,20	50,20	52,00	52,00	52,00	5
93,10	93,10	93,10	90.46	90,46	94,60	9
3,53	3,53	3,53	3,50	3,50	3,50	
0	0	0	0	0	0	
1,87	1,87	1,87	1,56	1,56	1,56	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
aer.	aer.	aer.	acr.	aer.	aer.	
3,00	3,00	3,00	2,20	2,20	2,20	
0,80	10,80	10,80	6,80	6,80	6,80	

Da rilevarsi tra questi valori il più basso della stazione G_1 (Cavaiola) che, come si è già accennato, è l'affluente più inquinato ed inquinante del Sarno.

4.1.11.2. - *BOD* (Fig. 3).

Iniziando, come al solito, dalla foce si può notare che subito dopo l'alto valore della stazione A, legato a tutti quei fenomeni già accennati per le altre sostanze, fino alla stazione H si hanno dati abstanza alti con un massimo alla stazione G ed una diminuzione alla stazione F. Dalla stazione I fino alla sorgente i valori sono molto bassi con l'eccezione della stazione N.

Questo peculiare andamento del BOD è facilmente spiegabile poiché l'alto valore fino alla stazione H rispecchia l'inquinamento di quella porzione del fiume posta a valle della confluenza della Cavaiola, mentre, i bassi valori a monte di detta confluenza confermano il minimo afflusso di polluenti nella porzione superiore del corso. L'alto valore della stazione N in una parte del fiume con basso BOD è da mettere in relazione alla bassa portata del fiume alla sorgente e alla conseguente presenza di zatteroni di materiale vegetale in putrefazione.

4.1.11.3. - *Sostanze organiche in toto* (Fig. 4).

Dall'esame del grafico delle sostanze organiche *in toto* si nota che, dopo l'alto valore della stazione A, le concentrazioni scendono repentinamente a valori pressocché uniformi fino alla stazione M per poi scendere ancora nelle stazioni N e O. L'unica eccezione a tale costante andamento la si osserva nell'alto valore della stazione G. I due alti picchi di A e di G sono da attribuire ai caratteri ambientali di queste stazioni (la prima posta alla foce, la seconda localizzata a valle della immissione della Cavaiola).

Poiché per lo ione ammonio e per lo ione nitroso i valori delle due sponde e del centro fiume di ogni stazione coincidono, i grafici hanno una sola curva.

4.1.11.4. - NH_4^+ (Fig. 5).

L'esame delle variazioni dell'NH_4^+ lungo il corso del Sarno mette in evidenza che, dopo i valori, contenuti nei limiti di tolle-

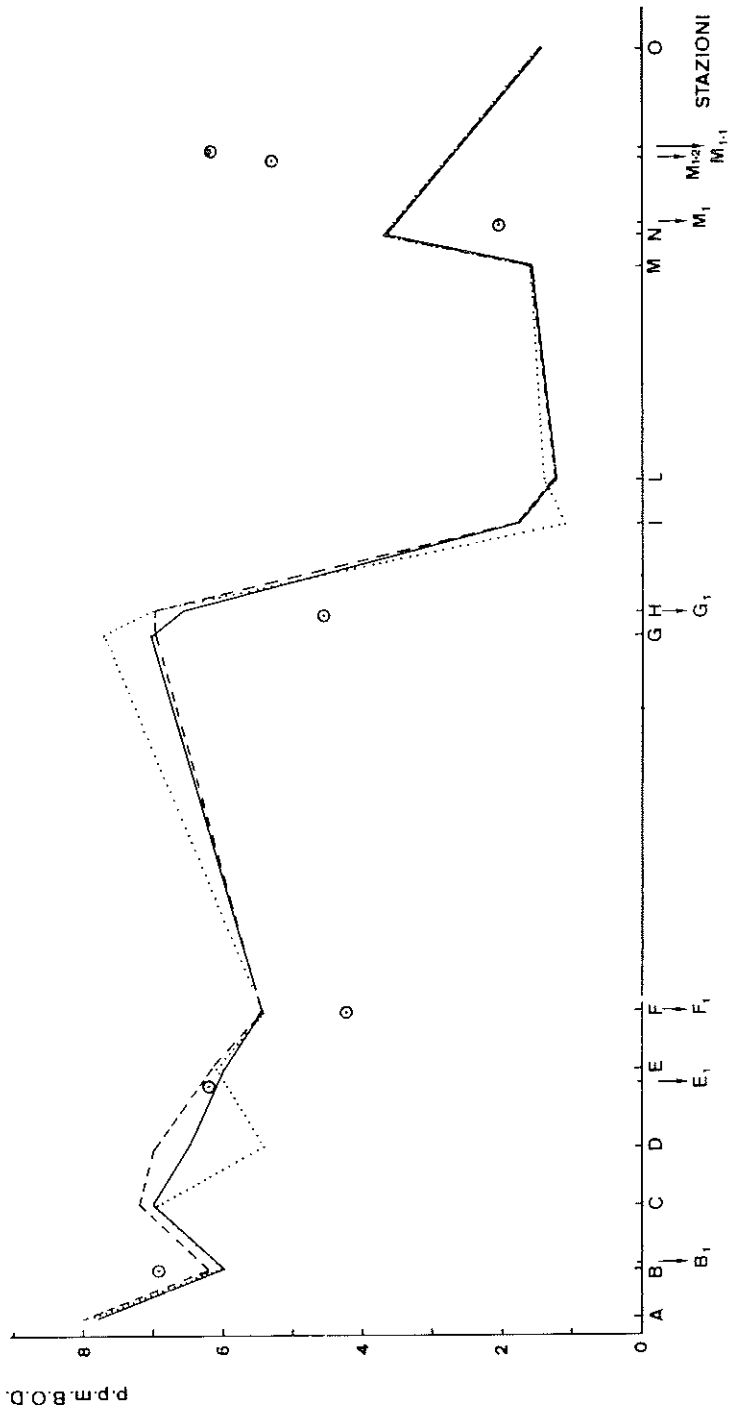


FIG. 3. - Andamento del BOD_5.

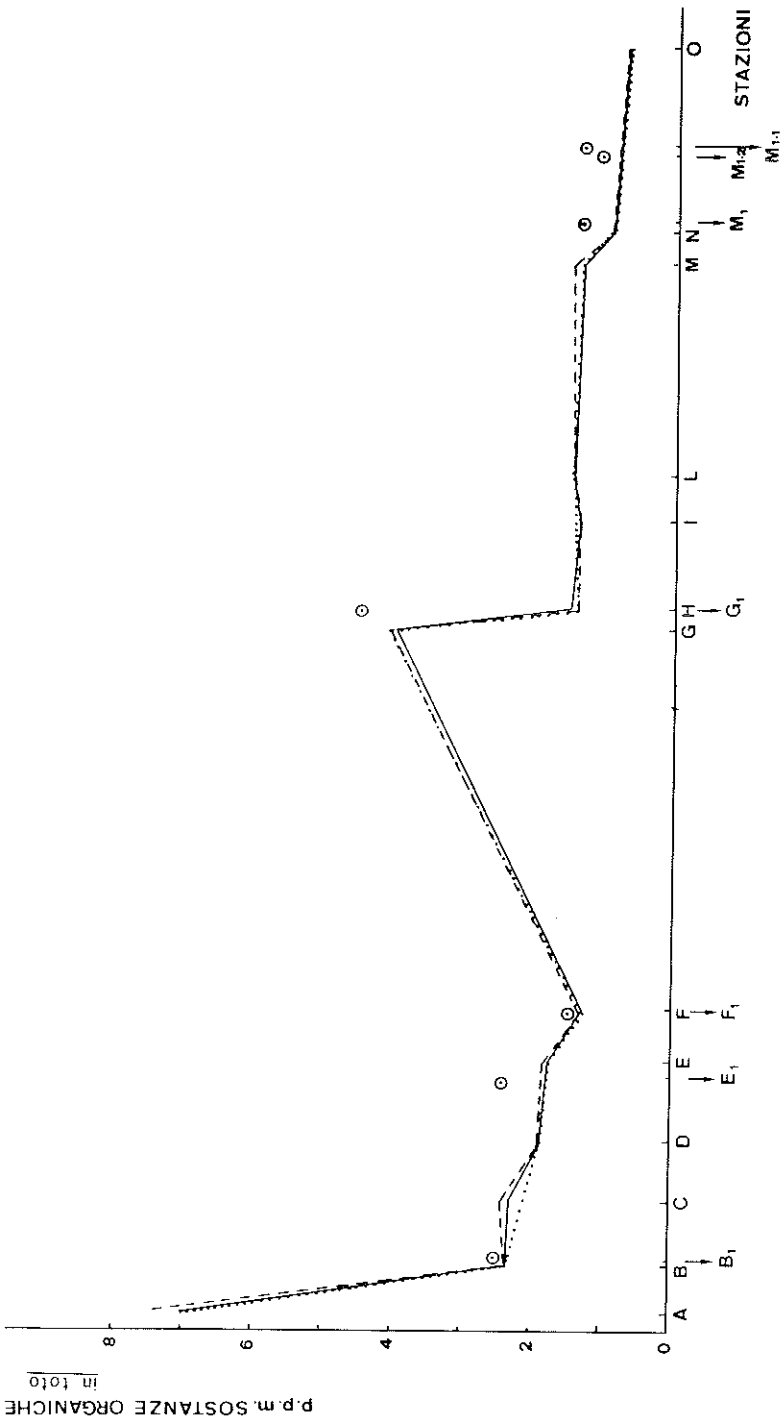


FIG. 4. - Andamento delle Sostanze organiche *in toto*.

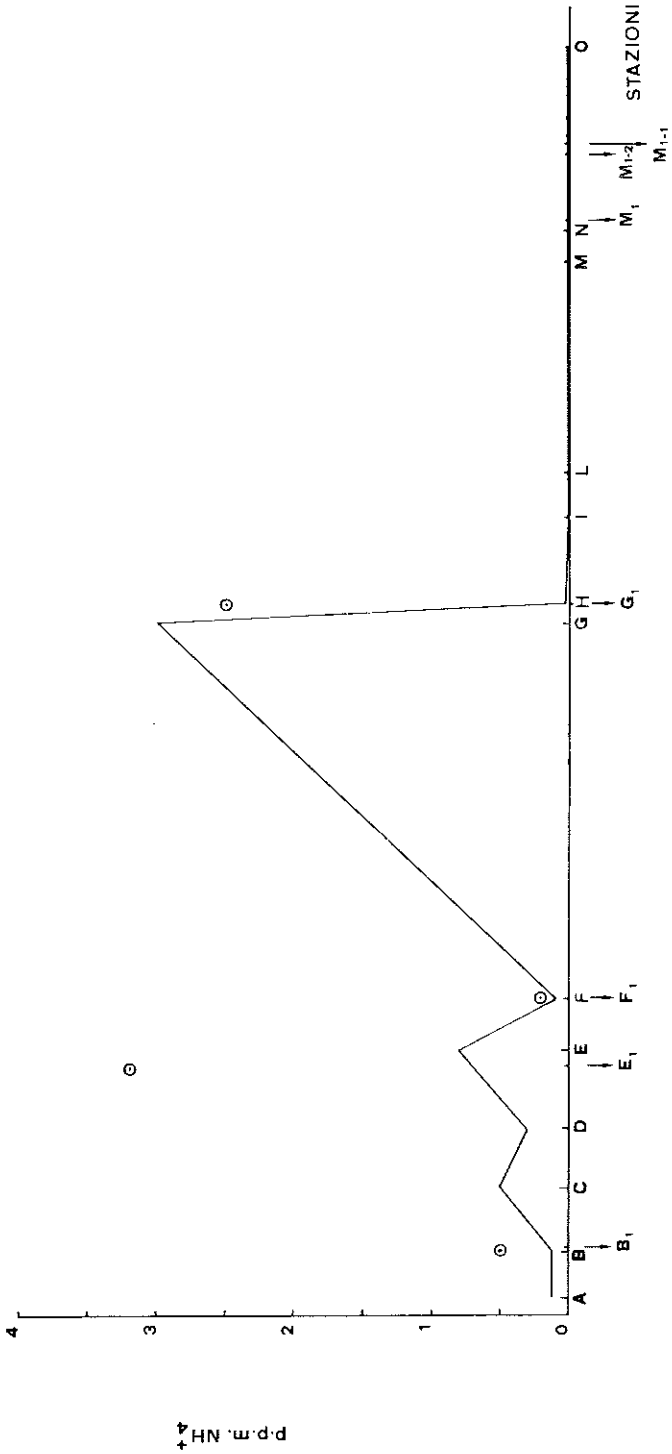


FIG. 5. - Andamento dell'NH_4^+

ranza, delle stazioni A e B, si raggiunge il limite di 0,50 p.p.m. nella stazione C, con una leggera flessione in D. Successivamente, dopo il picco relativo alla stazione E, si ha un abbassamento quasi a zero nella stazione F, indi si raggiunge la maggiore concentrazione di tutto il corso nella stazione G. Da questa in poi fino alla sorgente è del tutto assente lo ione ammonio. Da ciò si può dedurre che solo successivamente alla immissione della Cavaiola è possibile trovare l'NH_4^+ nel Sarno.

4.1.11.5. - NO_2^- (Fig. 6).

Lo studio del grafico, riportante l'andamento dell'NO_2^- lungo il Sarno, mostra che dopo i due massimi valori delle stazioni A e C, intervallate dal minor dato in B, le quantità diminuiscono gradatamente fino alla stazione G, con un lieve aumento in F. Dopo il repentino innalzamento in H le quantità di ione nitroso decrescono ulteriormente fino ad essere uguali a zero nella stazione O.

4.2. - RISULTATI E OSSERVAZIONI FAUNISTICHE.

4.2.1. - *Composizione faunistica.*

Dai prelievi effettuati risulta che le varie stazioni e anche le sponde di ogni stazione presentano valori diversi quantitativamente e qualitativamente imputabili alle caratteristiche delle stazioni ed ovviamente alla loro localizzazione.

Per dare un quadro di insieme di tali proprietà abbiamo compilato la Tabella III ove sono riportati i valori medi della abbondanza [3] per 0,15 m^2. Da questa tabella risulta subito che esiste una maggiore densità faunistica nella porzione di fiume a valle della stazione G rispetto alla porzione a monte di detta stazione. Questi dati ovviamente sono la media delle varie pescate effettuate e quindi già ci indicano la non omogeneità della distribuzione di invertebrati lungo il corso del fiume. Naturalmente per individuare gli aspetti ecologici-faunistici e le eventuali interrelazioni con le caratteristiche e possibili alterazioni del corso del Sarno è stata fatta perciò un'analisi più profonda della fauna raccolta.

In tutte le stazioni e durante tutti i prelievi sono stati raccolti 2272 invertebrati appartenenti a 6 Phyla (Platelminti, Rotiferi, Ne-

[3] Si intende qui per abbondanza il numero di individui per unità campione.

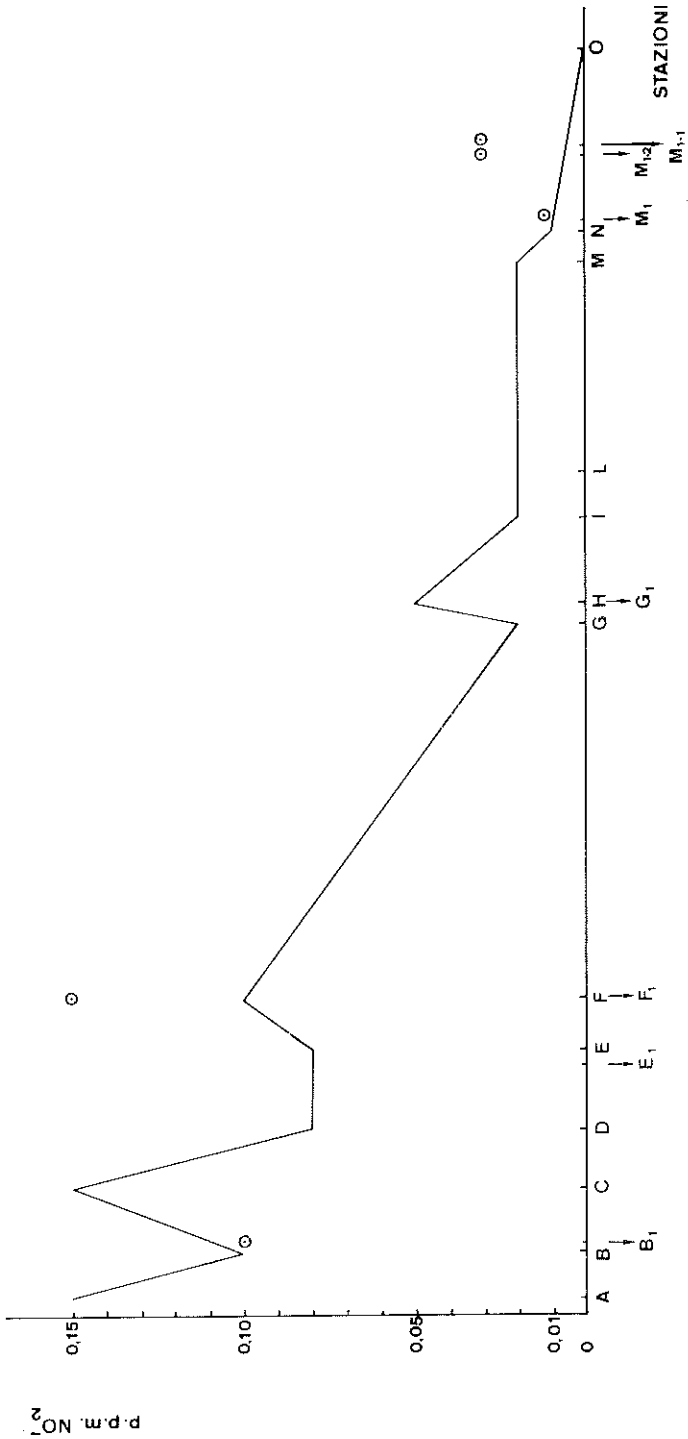


FIG. 6. - Andamento dell'NO_2^-.

matodi, Molluschi, Anellidi e Artropodi) per complessive 68 specie raggruppabili in 17 taxa importanti [4] (Tab. IV).

L'insieme delle specie e la loro distribuzione lungo tutto il corso del fiume Sarno sono riportate nella Tabella V. Come si può notare 26 specie sono rintracciabili nell'alto corso fino a 10 Km. dalla sor-

TABELLA III

Abbondanza, in tutti i prelievi effettuati, degli invertebrati, per 0,15 mq., catturati in tutte le stazioni poste lungo il fiume Sarno.

Stazioni	Sponda sinistra	Sponda destra	Totale
A	203	163	366
B	55	328	383
C	208	22	230
D	86	40	126
E	121	104	225
F	635	96	731
G	143	84	227
H	58	51	109
I	85	202	287
L	113	68	181
M	326	23	349
N	72	65	137
O	76	60	136

gente, 4 da 11,5 Km. a 18,5 Km. e infine 16 da 21,5 Km. fino alla foce. Inoltre 1 sola specie è presente fino a 18,5 Km., 15 da 11,5 fino alla foce, 3 nei primi 10 Km e dal 21° Km. fino alla foce, infine solo 3 specie sono presenti per tutto il corso del fiume.

Questi dati così tipici ci hanno fatto subito notare che dal punto di vista faunistico il fiume Sarno è raggruppabile in 3 zone aventi caratteristiche diverse come è dimostrato dalla diversa composizione faunistica.

[4] L'utilizzazione dei taxa, raggruppamenti tassonomici, indipendenti dalla divisione sistematica, è risultata di notevole interesse e comodità come del resto è stato già messo in evidenza da noi stessi (BATT., 1967) e da altri AA. (MAITLAND, 1966 e WILHM e DORRIS, 1966).

Indicheremo perciò le tre zone: come zona A quella che va dalla sorgente fino a 10 Km., B quella da 10 Km. fino a 18 e C la restante parte.

4.2.2. - *Struttura della comunità animale.*

La diversità delle tre zone è meglio messa in evidenza e si esamina la Fig. 7. In questa figura si è messo a confronto la dominanza[5] dei taxa nelle zone. Come si vede, nella zona A si hanno 14 taxa, nella zona B 11 e nella zona C 12; mentre, come avevamo già detto, il numero maggiore di individui (1440) si ha nella zona C contro i 515 della zona A e i 317 della zona B. Orbene, ad un primo esame quantitativo poteva sembrare che la zona C, anche se si trova nel tratto più inquinato del fiume, potesse essere più favorevole alla fauna rispetto alla zona A ove gli effetti inquinanti sono molto scarsi. Invece l'esame di questa figura mette in evidenza il contrario: infatti nella zona A i vari taxa sono distribuiti in modo quasi uniforme e vi è assenza di Oligocheti, gruppo notoriamente di acque inquinate, mentre nelle altre due zone c'è la preponderanza di alcuni gruppi (ad esempio la presenza di Platelminti Oligocheti nella zona C). La diminuzione notevole di individui, di specie e di taxa nella zona B è da mettere in relazione con l'essere essa dislocata subito a valle della Cavaiola che influenza negativamente la fauna.

Del resto ancora meglio si possono notare le differenze delle tre zone se si esaminano i rapporti tra specie tipiche e atipiche nelle stesse zone. Si è fatto questo grafico (Fig. 8) considerando per specie tipiche quelle presenti solo nella zona esaminata mentre per specie atipiche quelle presenti in più zone ossia che abbiano una maggiore vagilità[6] nell'ambito del corpo idrico esaminato.

4.2.3. - *Analisi qualitativa della comunità animale e sua zonazione.*

Dall'esame della Fig. 8 si può facilmente osservare che solo nella zona A i due gruppi di specie sono quasi uguali mentre nelle altre due zone le specie atipiche hanno sempre la preponderanza rispetto a quelle tipiche.

Tutto ciò è sempre a favore del concetto del maggiore inquinamento del tratto inferiore del fiume.

Poiché il numero di individui non aveva portato ad un criterio sufficiente per la distinzione tra le zone e poiché l'esame della distri-

[5] Dominanza è la percentuale rispetto alla Zoocenosi complessiva.
[6] Vagilità è la capacità di diffusione di una specie.

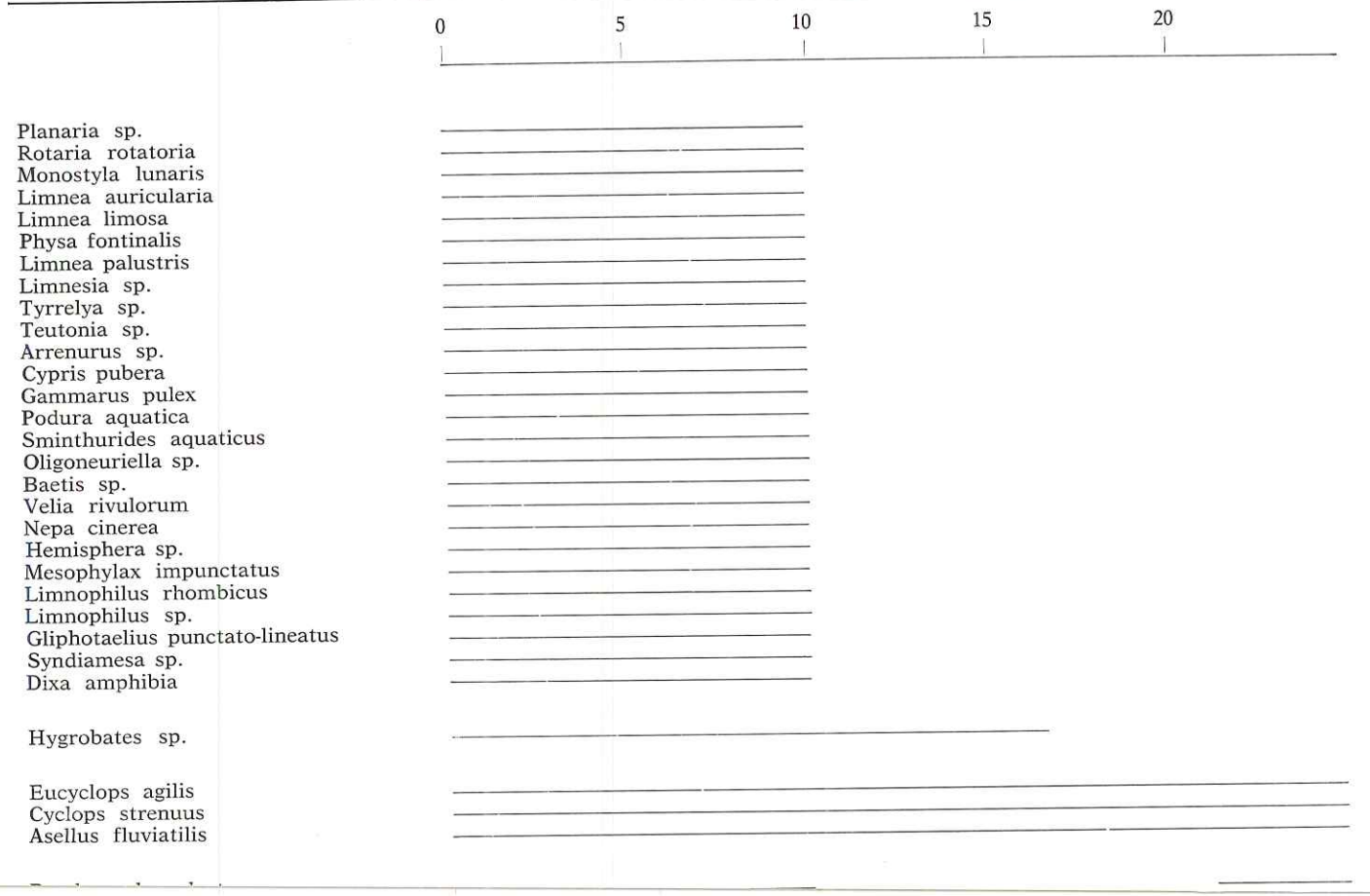
TABELLA IV

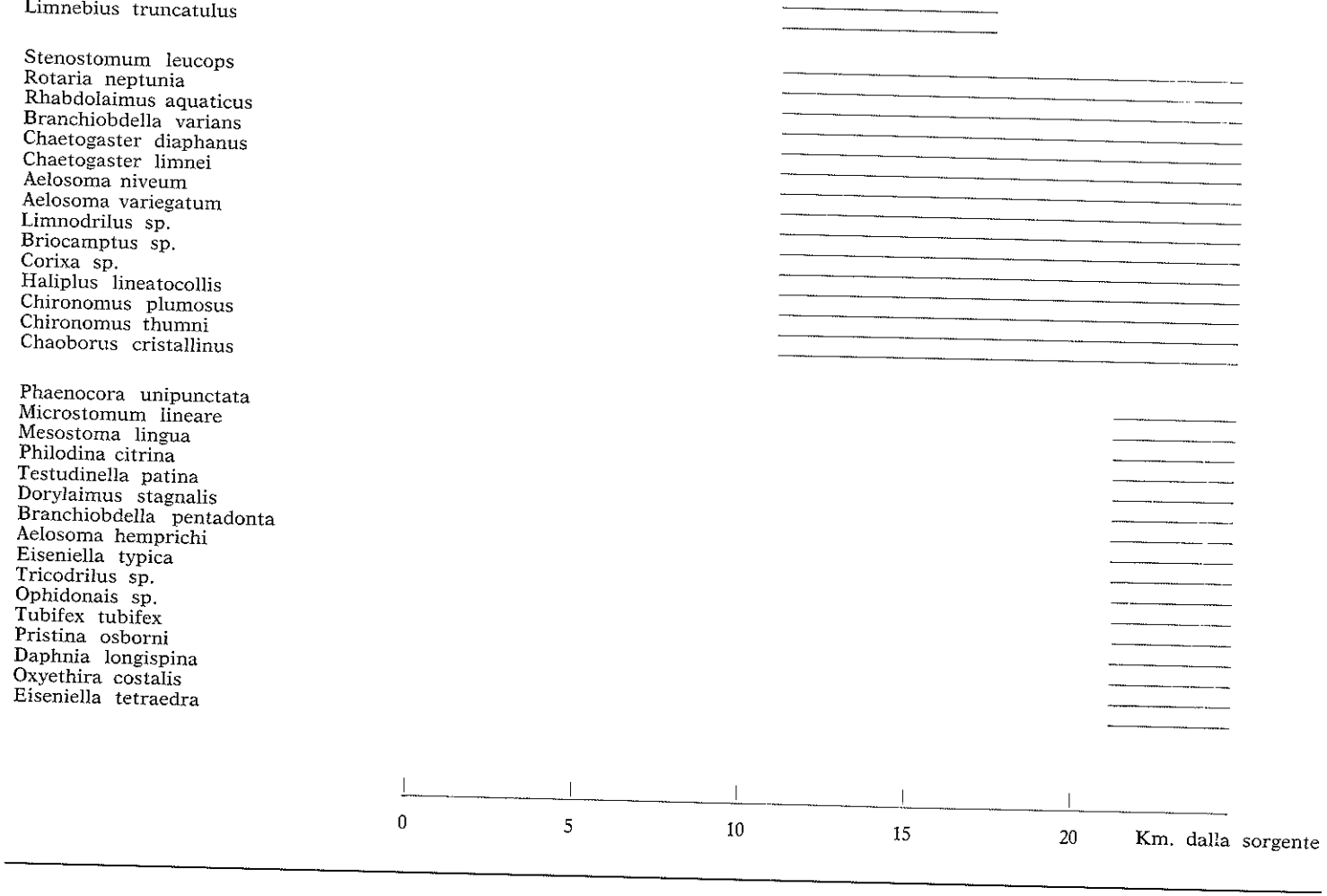
Censimento complessivo della fauna raccolta durante tutta la ricerca.

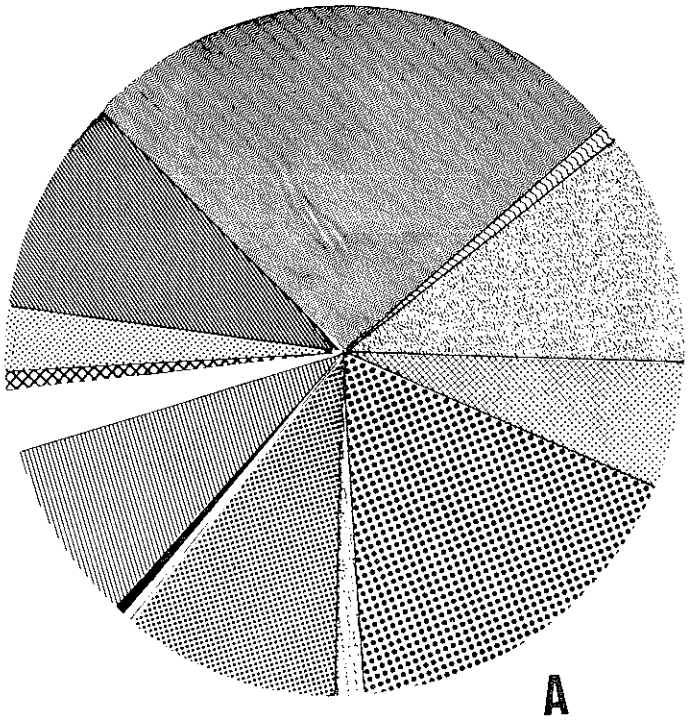
	N. ind.
PLATELMINTI	362
Dendrocoelum lacteum	5
Phaenocora unipunctata	76
Microstomum lineare	28
Stenostomum leucops	219
Mesostoma lingua	30
Planaria sp.	4
ROTIFERI	172
Rotaria rotatoria	8
Monostyla lunaris	8
Rotaria neptunia	128
Philodina citrina	27
Testudinella patina	1
NEMATODI	41
Rhabdolaimus aquaticus	15
Dorylaimus stagnalis	26
MOLLUSCHI - GASTEROPODI	65
Limnaea auricularia	2
Paludina vivipara	40
Limnaea limosa	2
Planorbis fontanus	1
Planorbis complanatus	2
Bithinia Leachii	6
Physa fontinalis	11
Limnaea palustris	1
ANELLIDI - OLIGOCHETI	334
Branchiobdella varians	66
Branchiobdella pentadonta	20
Chaestogaster diaphanus	35
Chaetogaster limnaei	43
Aelosoma hemprichi	47
Aelosoma niveum	5
Aelosoma variegatum	54
Limnodrilus sp.	32
Eiseniella tetraedra	2
Eiseniella typica	1
Trichodrilus sp.	2
Ophidonais sp.	6
Tubifex tubifex	19
Pristina osborni	2
ARTROPODI	1298
ARACNIDI - ACARI	141
Hygrobates sp.	74
Limnesia sp.	32
Tyrrelia sp.	8
Teutonia sp.	11
Arrenurus sp.	16
CROSTACEI	980
CLADOCERI	2
Daphnia longispina	2
OSTRACODI	4
Cypris pubera	4
COPEPODI	831
Eucyclops agilis	643
Cyclops strenuus	137
Briocamptus sp.	51
ISOPODI	55
Asellus aquaticus	16
Asellus fluviatilis	39
ANFIPODI	88
Gammarus pulex	88
INSETTI	177
COLLEMBOLI	8
Sminturides aquaticus	4
Podura aquatica	4
EFEMEROTTERI	54
Oligoneuriella sp.	9
Baetis sp.	45
EMITTERI	7
Velia rivulorum	2
Nepa cinerea	1
Corixa sp.	4
COLEOTTERI	6
Hemisphera sp.	2
Limnebius truncatulus	1
Haliplus lineatocollis	3
TRICOTTERI	48
Mesophylax impunctatus	1
Limnophilus rhombicus	13
Oxyethira costalis	1
Limnophilus sp.	26
Gliphotaelius punctato-lineatus	7
DITTERI	54
Chironomus plumosus	15
Chironomus thumni	26
Chaoborus cristallinus	3
Syndiamesa sp.	9
Dixa amphibia	1
TOTALE	2272

TABELLA V

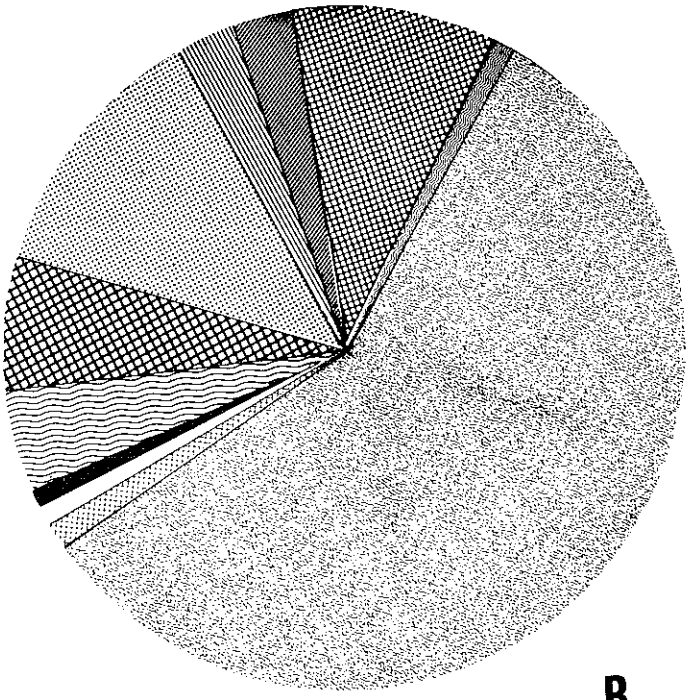
Distribuzione spaziale nel fiume Sarno delle specie di invertebrati.



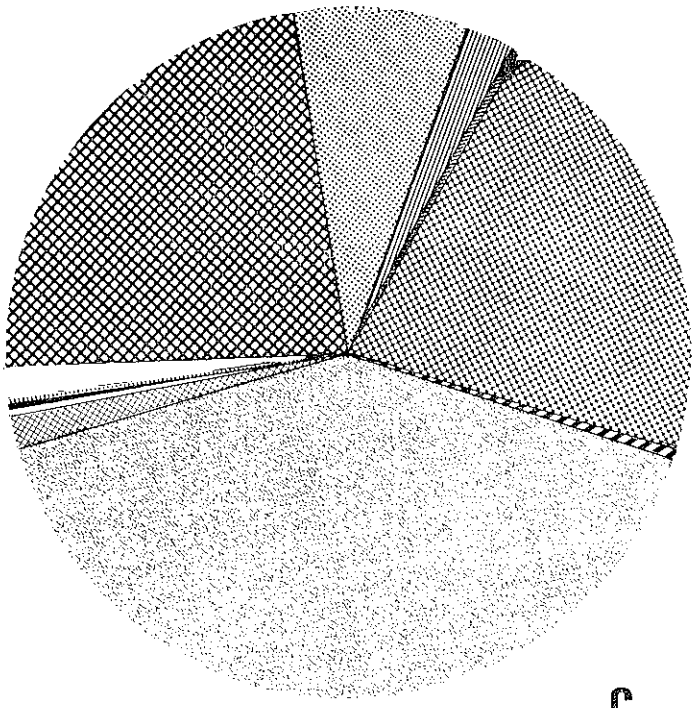

Limnebius truncatulus
Stenostomum leucops
Rotaria neptunia
Rhabdolaimus aquaticus
Branchiobdella varians
Chaetogaster diaphanus
Chaetogaster limnei
Aelosoma niveum
Aelosoma variegatum
Limnodrilus sp.
Briocamptus sp.
Corixa sp.
Haliplus lineatocollis
Chironomus plumosus
Chironomus thumni
Chaoborus cristallinus
Phaenocora unipunctata
Microstomum lineare
Mesostoma lingua
Philodina citrina
Testudinella patina
Dorylaimus stagnalis
Branchiobdella pentadonta
Aelosoma hemprichi
Eiseniella typica
Tricodrilus sp.
Ophidonais sp.
Tubifex tubifex
Pristina osborni
Daphnia longispina
Oxyethira costalis
Eiseniella tetraedra
0
5
10
15
20
Km. dalla sorgente



A



B



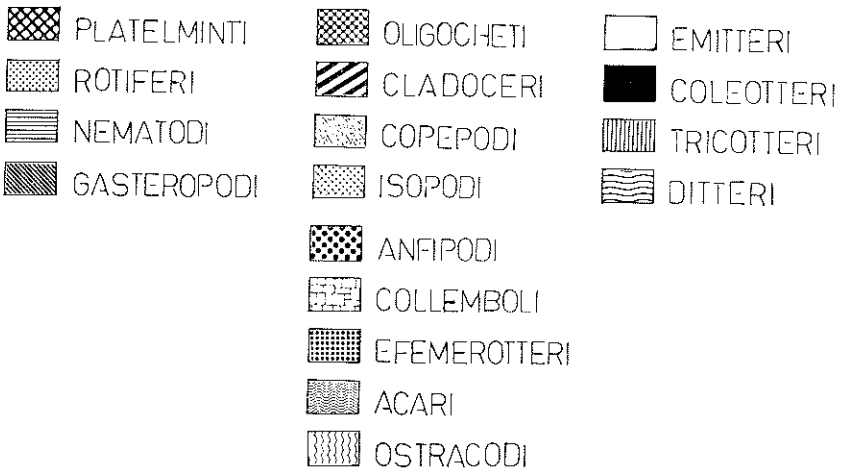


FIG. 7. - Grafico radiale della dominanza dei taxa nelle tre zone.

buzione dei taxa e delle specie tipiche e atipiche ci dava un carattere ancora generale, abbiamo esaminato attentamente le varie specie presenti nelle tre porzioni del fiume analizzando la loro prevalenza.

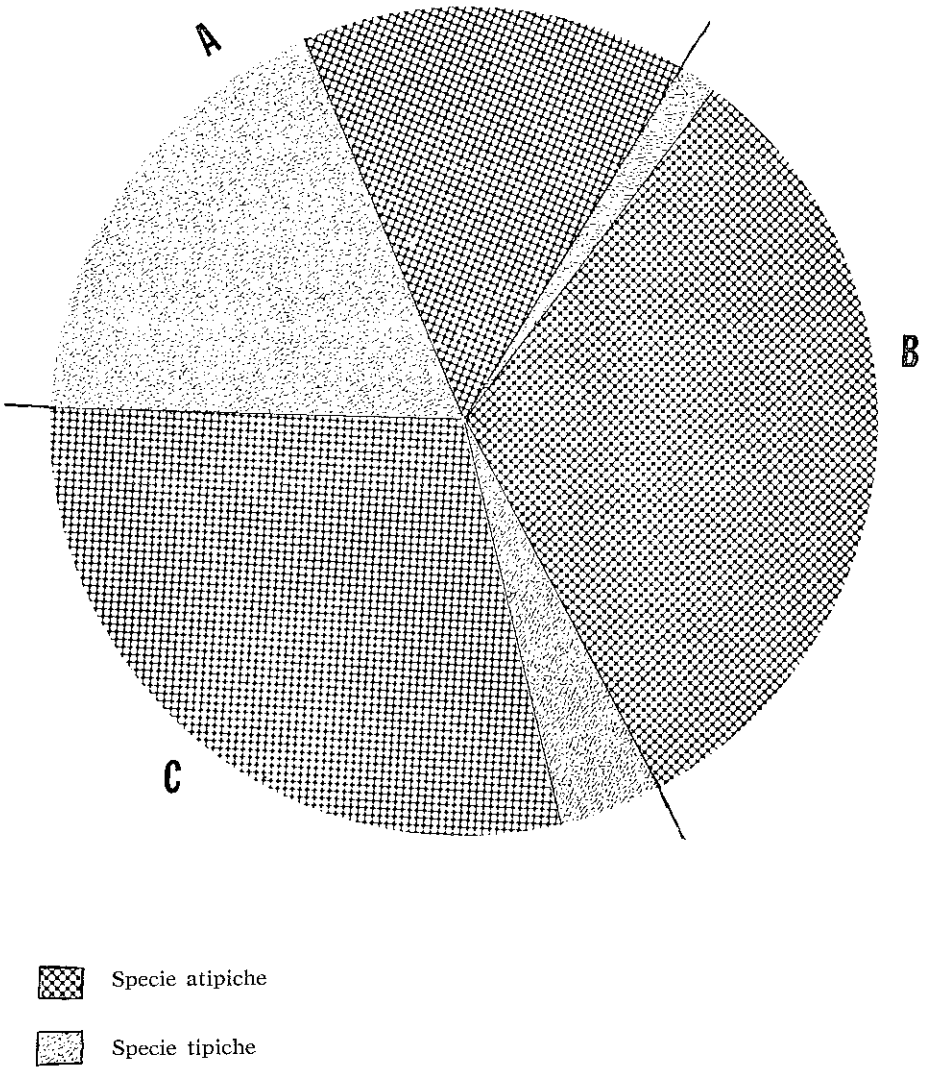


FIG. 8. - Grafico radiale illustrante i rapporti tra specie tipiche e atipiche nelle tre zone del fiume Sarno.

Da tali dati risulta che per il tratto comprendente le stazioni A, B, C e D (corso inferiore - Zona C), si nota la prevalenza soprattutto delle seguenti specie: *Phaenocora unipunctata, Mesostoma lingua, Oxyethira costalis, Chaoborus cristallinus, Chironomus thumni, Chi-*

ronomus plumosus, Tubifex tubifex, Chaetogaster diaphanus, Chaetogaster limnei, Branchiobdella varians, Aelosoma niveum, Aelosoma variegata, Eiseniella tetraedra.

Nelle stazioni E, F, G e H (tratto medio - zona B) prevalgono le specie: *Cyclops strenuus, Asellus fluviatilis, Planorbis fontanus, Planorbis complanatus, Haliplus lineatocollis, Stenostomum leucops, Rhabdolaimus aquaticus, Chironomus plumosus, Chironomus thumni, Chaoborus cristallinus, Tubifex tubifex, Branchiobdella varians, Chaetogaster diaphanus, Chaetogaster limnei, Aelosoma niveum, Aelosoma variegatum.*

Nelle stazioni I, L, M ed N (tratto superiore - zona A) prevalgono le specie: *Cyclops strenuus, Eucyclops agilis, Rotaria rotatoria, Hygrobates sp., Limnea palustris, Limnesia sp., Paludina vivipara, Cypris vubera, Gammarus pulex, Baetis sp., Asellus fluviatilis, Asellus acquaticus.*

La stazione O (sorgente) presenta le seguenti specie: *Hygrobates sp., Gammarus pulex, Cyclops strenuus, Limnophilus rhombicus, Limnophilus sp., Paludina vivipara, Oligoneurellia sp.*

La reale differenza tra le zone durante i vari campionamenti e tra le sponde di ogni zona può essere messa in evidenza solo considerando il contributo di ogni singola specie (DAVIS, 1963). Questo può essere ottenuto con una disposizione bidimensionale delle specie in rapporto alla loro frequenza e dominanza relativa come è stato suggerito da WEISS-FOGH (1948). Nella Tabella VI è stata operata una distribuzione bidimensionale per le specie.

Da tale tabella si nota che per la zona A l'influenza preponderante è data da *Hygrobates sp.* e *Gammarus pulex*; per la zona B non esistono specie costanti e dominanti ed infine per la zona C vi è solo *Eucyclops agilis.*

Da tutto ciò si può osservare che mentre per la zona A le specie che giocano un ruolo preponderante sono specie distribuite solo in quella zona, per la zona C invece *Eucyclops agilis* non identifica alcun aspetto particolare, in quanto è una delle tre specie distribuite lungo tutto il corso del fiume (vedi Tabella V).

L'esame della Tabella VI è interessante poiché, messa a confronto con la Tabella V, fa notare che delle tre specie distribuite lungo tutto il corso, quella che ha una certa importanza sia come frequenza che come abbondanza è solo *Eucyclops agilis.*

4.3. - RISULTATI E OSSERVAZIONI DI ITTIOTOSSICITÀ.

Per analizzare ancora di più gli aspetti dell'inquinamento nel Sarno abbiamo effettuato delle prove di ittiotossicità a carico dei campioni

TABELLA VI

Distribuzione bidimensionale delle specie più abbondanti e frequenti lungo le due sponde, nell'insieme di ogni zona e nell'intero fiume (= Totale). Fiume *in toto*

Zone		Sponda sinistra		Sponda destra		Totale	
		Dominante	Influente	Dominante	Influente	Dominante	Influente
A	Costante	Paludina vivipara Hygrobates sp. Gammanus pulex Baetis sp.	Limnesia sp. Limnophilus sp.	Hygrobates sp. Encyclops agilis	Limnesia sp. Gammarus pulex Limnophilus sp.	Hygrobates sp. Gammarus pulex	Paludina vivipara Limnesia sp.
	Accesorio				Arrenurus sp.	Encyclops agilis	Baetis sp.
B	Costante			Encyclops agilis Cyclops strenuus	Briocamptus sp.		
	Accesorio	Rotaria neptunia Bithinia leachii Eucyclops agilis Cyclops strenuus	Hygrobates sp. Corixa sp.	Rotaria neptunia	Stenostomum leucops Branchiobdella varians	Rotaria neptunia Eucyclops agilis Cyclops strenuus	
C	Costante	Eucyclops agilis	Cyclops strenuus	Eucyclops agilis	Cyclops strenuus	Eucyclops agilis	Phaenocora unipunctata Cyclops strenuus
	Accesorio	Stenostomum leucops	Rotaria neptunia Branchiobdella varians	Phaenocora unipunctata	Stenostomum leucops Rotaria neptunia	Stenostomum leucops	Rotaria neptunia
TOTALE	Costante	Eucyclops agilis		Eucyclops agilis Cyclops strenuus		Eucyclops agilis	
	Accesorio		Gammarus pulex				Cyclops strenuus

N.B. Dominante = > 10 % di tutti gli individui Costante = > del 50 % prelievi.

di acqua prelevati alla stazione G_1 (Cavaiola) che del resto sono molto significativi in quanto, come si sa, questo affluente è il responsabile principale della polluzione del tratto medio-inferiore del fiume Sarno.

Gli esperimenti sono stati condotti distribuendo esemplari di *Carassius auratus* in vasche contenenti soluzioni percentuali decrescenti di acqua della Cavaiola dal 100 % al 10 % diluita in acqua del Sarno presa alla sorgente.

Alla 96ª ora dall'inizio dell'esperimento non è risultata alcuna mortalità, mentre per alcuni esemplari della vasca con il 100 % di acqua della Cavaiola si poteva notare a carico dei Carassi sperimentali lo stabilirsi di una posizione anormale legata ad una sintomatologia da alterazioni dell'equilibrio.

Utilizzando tali esemplari per esami anatomo-patologici, abbiamo notato degli aspetti di iperemia con fenomeni micro-emorragici a carico delle branchie; inoltre, gli esami istologici, come è dimostrato dalle annesse microfotografie delle Fig. 9 e 10, fanno notare una spoliazione dell'epitelio di rivestimento delle branchie sotto l'azione degli inquinanti.

Gli animali che non sono stati sacrificati, subito dopo la fine del periodo di esposizione al campione di acqua inquinata al 100 %, sono stati immessi nuovamente in acque pure e sacrificati dopo una settimana circa: in questi animali si è potuta osservare una reazione secondaria di iperplasia dell'epitelio branchiale (Fig. 11).

5. - Discussione e conclusioni.

L'insieme degli studi biologici, faunistici e nel complesso ecologici hanno fatto notare che il fiume Sarno è divisibile in 3 zone aventi caratteristiche diverse come è dimostrato anche dalla diversa struttura delle corrispondenti comunità animali.

Indicheremo le tre zone come:

Zona A (tratto superiore del fiume) quella che va dalla sorgente fino a 10 Km. e che corrisponde alle stazioni O, N. M, L, I;

Zona B (tratto medio) quella dal 10° fino al 18° Km. corrispondente alle stazioni H, G, F, E;

ed infine Zona C (tratto inferiore) quella dal 18° Km. fino alla foce e comprendente le stazioni D, C, B, A.

Le osservazioni da noi fatte hanno avuto lo scopo di individuare in rapporto alle comunità animali presenti nelle tre zone, le eventuali cause che hanno determinato la riscontrata distribuzione faunistica legata all'attuale assetto ecologico del fiume Sarno.

L'esame delle comunità animali è stato, perciò, effettuato in termini di frequenza di specie, di numero di specie per unità di area, di distribuzione spaziale degli individui e delle specie, ed, infine, dell'abbondanza di specie e individui.

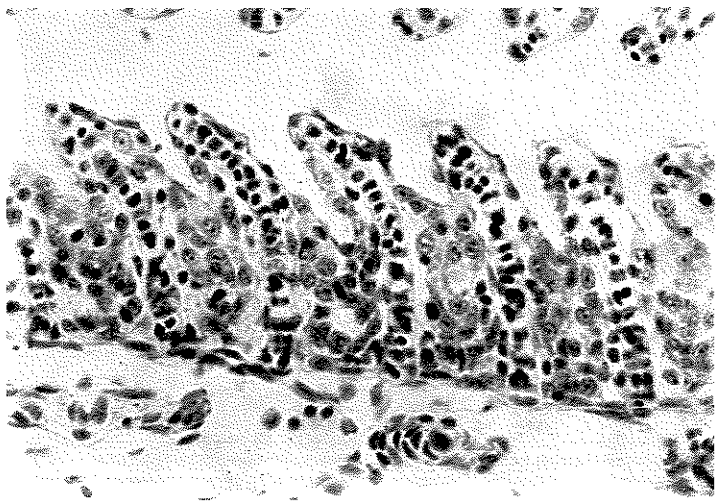


FIG. 9. - Sezione trasversale di pliche respiratorie di branchia di *Carassius auratus*. Esemplare di controllo.

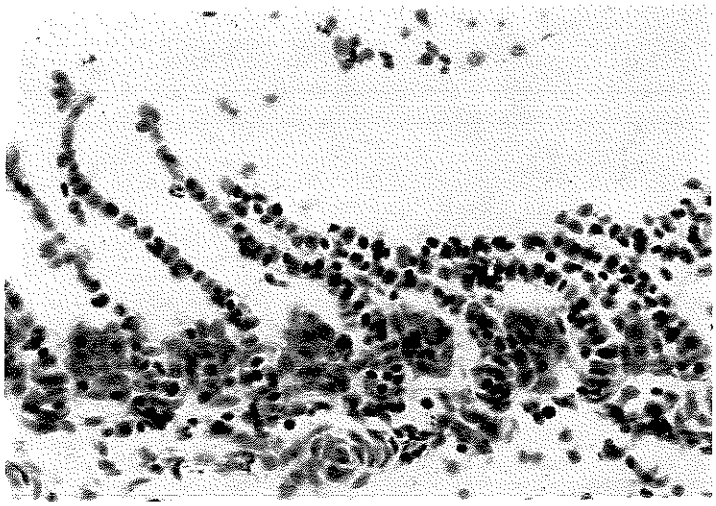


FIG. 10. - Sezione trasversale di pliche respiratorie di branchia di *Carassius auratus*, dopo 96 h di permanenza nell'acqua della Cavaiola al 100 %. Si noti la spoliazione dell'intero epitelio.

L'analisi di tutti i risultati e delle conseguenti osservazioni mette in luce che il fiume Sarno, anche se lungo solo circa 30 Km., è sede

di un'attiva zonazione della fauna dovuta essenzialemente ai deleteri effetti dell'inquinamento domestico ed industriale. Infatti la composizione faunistica indica la non omogeneità della distribuzione di invertebrati lungo il corso.

Lo studio attento delle specie ha messo in evidenza che la fauna del Sarno si può raggruppare in tre comunità con diversi aspetti associativi e legate a tre zone con peculiari caratteri ecologici.

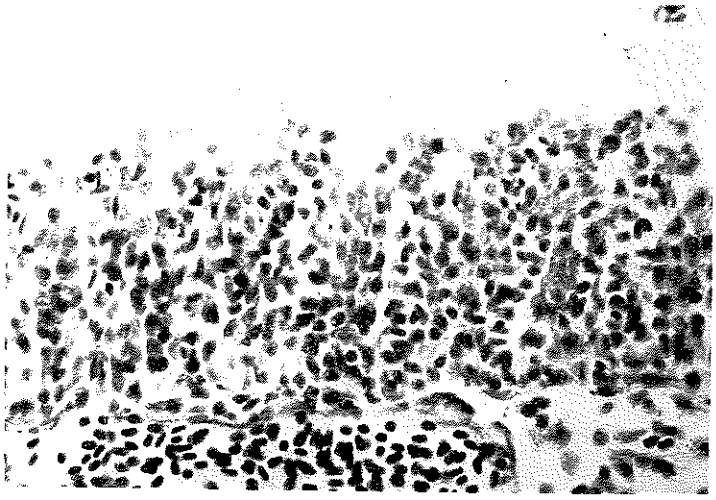


FIG. 11. - Sezione trasversale di pliche respiratorie di branchia di *Carassius auratus*. Esemplare sacrificato dopo 10 gg. dall'inizio dell'esperimento. Si noti l'evidente iperplasia epiteliale per reazione dell'organismo al danno arrecato dall'ambiente ecologicamente negativo.

Gli esami chimico-fisici, inoltre, fanno notare che la zona ove si ha maggiore concentrazione degli ioni ammonio, nitrosi e nitrici è la B. Tale zona è da considerare come quella che determina un salto qualitativo, in senso peggiorativo, del corso medio e fa sì che l'intrinseco inquinamento della zona a valle sommato a quello della zona B, raggiunga valori notevolmente alti.

Anche lo studio comparato della dominanza dei taxa nelle tre zone fa notare la diversità delle comunità animali con un equilibrio dei taxa nella zona meno inquinata (zona A) e prepondenza di alcuni nelle altre due; inoltre la diminuzione di taxa, specie ed individui della zona B è da mettere in stretta relazione alle caratteristiche chimico-fisiche piuttosto limite di tale zona. L'esame della frequenza ed abbondanza delle singole specie ha messo in evidenza che solo tre specie *Hygrobates* sp., *Gammarus pulex* e *Eucyclops agilis* hanno una preponderante influenza in tutto il fiume e che di queste

specie le prime due sono tipiche della zona A, l'ultima identifica marcatamente la zona C, mancando del tutto una specie abbondante e frequente nella zona B. Infine la Tabella IV è chiarificatrice della reale esistenza di una zonazione negli invertebrati del fiume Sarno, in quanto delle 68 specie trovate 26 sono tipiche della zona A, 4 della zona B e 16 della zona C.

Nel caso del Sarno ci troviamo di fronte ad un corpo idrico che subisce degli stress istantanei e massivi di inquinanti e costanti e abbondanti alterazioni ambientali. Come si sa una comunità animale può assorbire, adattandosi, una azione ambientale alterante che non raggiunga valori limiti e che agisca in un tempo misurabile su scala evolutiva; ma l'azione dell'inquinamento è troppo rapida per un riequilibrio dell'ecosistema interessato (BATTAGLINI, 1970).

Pertanto, nel caso del Sarno, ove non mancano affluenti con azione altamente tossica per la fauna, basti pensare all'inquinamento portato dall'affluente Cavaiola, che funzionano perciò come barriere nella distribuzione faunistica, possiamo parlare di tre zone con comunità animali proprie, ossia siamo in presenza di una zonazione faunistica fluviale a cui ha contribuito in buona parte anche l'uomo.

Inoltre l'esperimento di ittiotossicità mostra che le acque dell'affluente Cavaiola non contengono inquinanti in concentrazione letale acuta per la specie animale (*Carassius auratus* L.), ma che il loro effetto dannoso sembra imputabile piuttosto alla torbidità, alla presenza di ioni ammonici e alla carica di microorganismi in tali acque contenuta.

Concludendo, possiamo dire, dai dati faunistici integrati dai caratteri ambientali delle zone di raccolta e seguendo la classificazione di LIEBMANN (1951) per il sistema saprobio, che:

il tratto superiore del fiume Sarno (zona A) ha le caratteristiche di un sistema oligosaprobio,

il tratto medio (zona B) si configura come alfa-beta-mesosaprobio, e infine il tratto inferiore (zona C) presenta caratteri di tipo beta-mesosaprobio.

RINGRAZIAMENTI.

Desidero esprimere la mia gratitudine al Prof. Baldassarre de Lerma, ex direttore dell'Istituto di Zoologia dell'Università di Napoli, per i numerosi consigli datimi durante le ricerche e per aver criticamente letto il manoscritto.

Ringrazio, altresì, il Dott. Angiolo Pierantoni per l'aiuto nelle analisi chimico-fisiche e nelle loro interpretazioni.

APPENDICE

Valori limiti delle varie sostanze per un'acqua « ancora normale ».

Determinazioni	Concentrazioni	Autori
pH	5 - 9	Douderoff P. e Katz M.
Durezza	100 - 500 (in $CaCO_3$)	Standard Methods
Alcalinità	tossica con pH 9	Douderoff P. e Katz M.
OD p.p.m.	5,00	Mc Gauhey P. H.
OD % O_2 saturato	> 90 (buona) 75-90 (discreta) 50-75 (dubbia) < 50 (molto inquinata)	Key A. « Pollution of surface water in Europe »
BOD p.p.m.	1 (molto pulita) 2 (pulita) 3 (abbastanza pulita) 5 (dubbia) 10 (inquinata)	Royal Commission on Sewage Disposal
Amomniaca p.p.m.	0,50	Mc Gauhey P. H.
Zinco »	0,10	»
Cadmio »	0,01	»
Cromo esavalente p.p.m.	0,05	»
Nichel p.p.m.	0,05	»
Rame »	0,02	Douderoff P. e Katz M.
Alluminio »	1 - 5,00	»
Ferro »	1,00	»
Cianuro »	1 - 2,00	Douderoff P.
Sostanze organiche	5,00	Douderoff P. e Katz M.
$KMnO_4$ 4h/3' (rapporto)	4 - 10 inquin. da sost. org. veg. 3 » » scarichi dom. < 2 » » » ind.	Klein I. « River Pollution »

N.B. - Questi valori sono stati presi da vari Autori ed inoltre su alcuni non sempre vi è completa concordanza.

BIBLIOGRAFIA

BATTAGLINI P., PERCUOCO G., PIERANTONI A., *Studio ecologico e faunistico del lago di « La Correa » (Vairano-scalo, Caserta).* Boll. Soc. Natur. Napoli, **77**, 327-347 (1968).

BATTAGLINI P., *Proposte per una soluzione del conflitto Uomo-Natura.* Boll. Soc. Natur. Napoli, **79**, 273-280 (1970).

BATTAGLINI P., PIERANTONI A., *Studi ecologici sulla fauna bentonica del golfo di Pozzuoli.* Ann. Ist. Mus. Zool. Napoli, **19**, n. 8.

BATTAGLINI P., SEBASTIO L., *Prime ricerche sulla ecologia del Lago di Carinola.* Boll. Soc. Natur. Napoli, **81**, 375-392 (1972).

DAVIS B. N. K., *A study of micro-arthropod communities in mineral solis near Corby, Northants.* J. Anim. Ecol., **32**, 49-71 (1963).

HEWITT C. H., *The Barston works of Birmingham Tame and Rea district drainage Board.* J. Inst. Sew. Purif., 156-176 (1940).

KLEIN L., *River Pollution,* I and II vols., Butterworths. London (1964).

LIEBMANN H., *Handbuch der Frish-wasser und Abwasserbiologie - Biologie des Trinkwassers, Badewassers, Fischwassers, Vorfluters, und Abwassers.,* vol. I. Munich (1951).

MAITLANO P. S., *Studies on Lock Lomond. II. The fauna of the river Endrick.* Blackie & Son Ltd. Glasgow (1966).

Prevention of River Pollution. In: Annual report for year ended 31 March 1953, Pt. VI. Trent Rivcr Board. Nottingham (1953).

Standard Methods for examination of water and wastewater. 13th Ed., APHA, AWWA, WPCF. New York (1975).

WEIS-FOGH T., *Ecological investigation of mites and collemboles in soil.* Nat. Jutland, **1**, 135-270 (1948).

WILHM J. L., DORRIS T. C., *Species diversity of benthic macroinvertebrates in a stream receving domestic and oil refinery effluents.* Am. Mid. Naturalist, **76**, 427-449 (1966).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci B. De Lerma, A. Scherillo e G. Chieffi.

Geologia dei Monti di Trabia-Termini Imerese e dei Monti Sicani orientali (Fogli Bagheria e Termini Imerese, Sicilia centro settentrionale)

Nota di RAIMONDO CATALANO * e LORIS MONTANARI **
presentata dal socio corrispondente BRUNO D'ARGENIO

(Adunanza del 2 giugno 1979)

RIASSUNTO. — L'area studiata (compresa nei Fogli Bagheria e Termini Imerese) occupa una fascia a decorso meridiano compresa fra il Tirreno a nord, i Monti di Palermo ad ovest, le Madonie ad est e i Monti di Cammarata a sud.

Essa rappresenta un segmento della catena siciliana, determinante per la definizione della continuità longitudinale della catena stessa e dei rapporti tra i suoi vari settori.

L'analisi delle facies e lo studio stratigrafico dei terreni affioranti ci hanno permesso di riconoscere:

a) successioni mesozoico-paleogeniche con caratteri di bacino e di piattaforma carbonatica, appartenenti ai domini paleogeografici imerese, trapanese, sicano e a domini più interni (Sicilidi) già noti in altre aree della Sicilia occidentale;

b) successioni terrigeno-carbonatiche, evaporitiche, clastico evaporitiche e carbonatiche del ciclo Tortoniano superiore-Pliocene inferiore, depositatesi sulle successioni precedenti, già raggiunte dalla tettogenesi o non ancora deformate;

c) successioni clastico-carbonatiche costiere del ciclo Pliocene superiore-Quaternario implicate insieme con i terreni di *b*) nelle fasi neo tettoniche recenti.

L'analisi strutturale regionale ha mostrato un insieme di unità stratigrafico-strutturali di età mesozoica-paleogenica, caratterizzate da omogeneità nelle facies e nel comportamento strutturale (U. S. S.), sovrapposte geometricamente da nord (ove affiorano le più alte) verso sud.

Queste unità strutturali, in gran parte sradicate ed embricate verso sud, sono state messe in posto tra il Langhiano ed il Tortoniano.

Esse derivano dalla deformazione di preesistenti unità paleogeografiche ritenute in origine collegate tra loro ed appartenenti ad un antico margine continentale (Margine Africano).

Pur facendosi più consistente l'ipotesi di processi tettogenetici continui tra il Langhiano ed il Tortoniano, le evidenze di campagna (età dei contatti, livelli più re-

* Istituto di Geologia e Paleontologia, Corso Tukory 131, Palermo.
** Istituto di Paleontologia, Strada Nuova 65, Pavia.
Lavoro eseguito con il contributo del CNR ct. n. 77.00929, 78.01468 e del Progetto Finalizzato Geodinamica, Modello Strutturale ct. n. 77.00780.89. Pubblicazione n. 247.

centi interessati dalla deformazione etc.) indicano due momenti principali di messa in posto delle varie U. S. S.

Nel Langhiano-Serravalliano inferiore si sono messe in posto le Unità Pizzo di Cane e, in parte, Piana degli Albanesi.

Nel Serravalliano-Tortoniano inferiore, le due Unità precedenti si sono sovrapposte sui terreni dei domini più esterni trapanesi e sicani.

Alla fine di questo intervallo si sono individuate e messe in posto le Unità Monte Kumeta e Rocca Busambra derivanti dal dominio trapanese e le Unità Roccapalumba, Monte Rose, Monte Barracù-Monte Colomba e Pizzo Mondello derivanti dal dominio sicano.

Tra la fine del Langhiano ed il Tortoniano inferiore va collocato l'arrivo delle unità Sicilidi. La fase di traslazione post-messiniana, responsabile dell'ulteriore sovrascorrimento di alcune unità sicane sui terreni miopliocenici non è documentabile nell'area studiata.

Dopo il Pliocene superiore ulteriori fasi tettoniche hanno modificato e deformato l'edificio strutturale miocenico, frammentando e dislocando gli originari piani di accavallamento.

Lo studio ha inoltre confermato la presenza di linee tettoniche del Pliocene superiore con direzione Nord-Sud che sono all'origine della struttura rilevata nella fascia meridiana Palermo-Sciacca (ove i fronti di scorrimento sono di età pliocenica). L'assetto di questa fascia appare diverso da quello delle aree adiacenti ove i fronti di sovrascorrimento più recenti sono assenti o sepolti.

ABSTRACT. — The area under study trends from the South to the North, between the Tyrrenian Sea to the north, the Palermo Mountains to the west, the Madonie Mountains to the east and the Cammarata Mountains to the south. It represents a segment of the Sicilian chain and appears of great importance in the understanding of the relationships among the different sectors of the chain.

The facies analysis and the stratigraphic studies of the outcropping terrains permit us to recognize:

a) basin, carbonate platform and open shelf Mesozoic-Paleogenic successions pertaining to the Imerese, Trapanese, Sicanian and more internal (Sicilidi) paleogeographic domains, already recognized in other areas of Western Sicily;

b) terrigenous-carbonate, evaporitic, clastic-evaporitic and carbonatic successions pertaining to the Upper Tortonian-Lower Pliocene cycle deposited on the previous terrains some of which had been affected by tectogenesis;

c) coastal clastic carbonate deposits of the Upper Pliocene-Quaternary cycle, involved together with the terrains of (*b*) in phases of recent tectonism.

The result of the regional structural analysis has made evident a group of geological bodies of Mesozoic-Paleogenic age, which display homogeneity in facies and tectonic behaviours (structural-stratigraphic units) and are geometrically piled up from the North (where the higher ones outcrop) towards the South.

The bodies were derived from the deformation of preexisting paleogeographic domains believed to be contiguous and part of an ancient continental margin (African continental margin).

Such structural units, detached and imbricated with a southward vergence, were emplaced between the Langhian and the Tortonian.

During the Langhian-lower Serravallian the Pizzo di Cane unit and the Piana degli Albanesi unit were emplaced as individual units.

In the Serravallian-Lower Tortonian the Pizzo di Cane and Piana degli Albanesi units were overthrust on the more external Trapanese and Sicanian domain and, at

the end of this interval, the units of Monte Kumeta and Rocca Busambra that are derived from the Trapanese domains and the units of Roccapalumba, Monte Rose, Monte Barracù-Monte Colomba and Pizzo Mondello that are derived from the Sicanian domains, were also emplaced as individual units.

Between the end of the Langhian and the Tortonian the Sicilidi units were overthrust on the already deformed and detached Imerese terrains.

Post-Messinian thrust phases, responsible for a renewed southward traslation of the already deformed Sicanian units, can not be documented in the area under study.

After the Upper Pliocene folding and faulting tectonics have further modified and deformed the Miocenic structural edifice by tilting and breaking up the original thrust planes.

Moreover the presence of North-South dislocation lines has been confirmed. These lines of Upper Pliocene age bound the adjacent, horst-like Palermo-Sciacca belt, which shows younger shortening phases.

INTRODUZIONE

La Sicilia è costituita da tre elementi strutturali fondamentali che ne hanno caratterizzato l'evoluzione geologica dal Miocene in poi.

Questi elementi, che si susseguono da Nord verso Sud, sono costituiti da un orogene che corrisponde alla fascia settentrionale, tra i monti di Trapani e i Peloritani; un'avanfossa, compresa fra questa catena e il margine meridionale dell'isola ed, infine, da un avanpaese rappresentato dall'altipiano ibleo e dalla zona di Sciacca.

La catena è costituita dalla sovrapposizione tettonica di grandi corpi geologici derivanti dalla deformazione di domini paleogeografici mesozoico-paleogenici, appartenenti al margine meridionale della Tetide (LAUBSHER, 1971; BERNOULLI & JENKINS, 1974; D'ARGENIO, 1976; SCANDONE et al., 1977). Questi corpi geologici in gran parte sradicati ed embricati verso sud, si sono messi in posto durante il Neogene.

La catena inoltre è sormontata dalle unità calabro-peloritane formatesi nel Paleogene e messe in posto nell'Aquitaniano (HACCARD et al., 1972; AMODIO MORELLI et al., 1979).

Essa appare infine attraversata da linee trasversali, responsabili delle sue dislocazioni differenziali.

Linee di questo tipo individuano settori a decorso meridiano quali quello fra Palermo e Sciacca nella Sicilia occidentale (CATALANO & D'ARGENIO, 1978) o quello più orientale tra Mistretta e gli Iblei.

La struttura della catena è stata già illustrata lungo il profilo Palermo-Sciacca (CATALANO et al., 1978).

Nelle fasce adiacenti l'individuazione delle unità tettoniche e la ricostruzione dei loro rapporti strutturali non è sempre agevole, sia

per le variazioni longitudinali degli originari domini paleogeografici, sia per le complicazioni apportate dalla neotettonica.

L'area da noi scelta, situata al margine orientale della fascia Palermo-Sciacca, appare perciò importante nella definizione della continuità longitudinale della catena e dei rapporti fra i vari settori di essa.

L'area studiata è una fascia a decorso meridiano, compresa fra il fiume Eleuterio ed il fiume Imera ed estesa fino al parallelo di Castronuovo, immediatamente a Nord del Monte Cammarata [1].

La parte più settentrionale di tale area (compresa nei fogli I.G.M., 1:100.000 Bagheria e Termini Imerese) è costituita dalle dorsali dei Monti di Trabia e del Monte San Calogero di Termini Imerese e rappresenta il raccordo naturale tra i monti di Palermo ad occidente e le Madonie ad oriente

La parte meridionale è la continuazione (e la chiusura verso est) dei monti Sicani che vanno ad immergersi al di sotto del grande piastrone del Flysch Numidico della regione di Montemaggiore-Valledolmo.

I risultati di questa prima fase di ricerche ci hanno permesso di individuare innanzitutto le grandi unità strutturali derivanti dalle fasi di deformazione tettogenetica mioceniche, i loro rapporti geometrici e le implicazioni più evidenti della tettonica post-pliocenica.

Oltre al rilievo di dettaglio dell'intera area, e all'analisi strutturale regionale sono stati determinanti:

l'analisi delle facies dei terreni mesozoico-terziari e dei terreni del ciclo Tortoniano-Pliocene inferiore;

l'analisi stratigrafica e sedimentologica dei depositi del Flysch Numidico e

la reinterpretazione stratigrafica e sedimentologica dei terreni attraversati dai pozzi per idrocarburi effettuati negli anni '60 da Montedison ed Agip.

Rilievi geologici, dati stratigrafici e strutturali e analisi delle facies sono stati sintetizzati in una carta geologica al 100.000 e in alcuni profili geologici utilizzabili per la comprensione dei rapporti spaziali tra le varie unità stratigrafico-strutturali (Tav. I).

Studi precedenti

Numerosi sono i lavori, soprattutto di natura stratigrafica, riguardanti l'area di studio. Fra quelli essenziali per la comprensione del-

[1] Su questa stessa zona è stato impostato il profilo geologico Termini Imerese-Agrigento eseguito nel quadro del Progetto Geodinamica, Modello Strutturale (U. O. R. Catalano).

l'evoluzione delle conoscenze sulla struttura geologica dell'area, vanno segnalati i lavori di MONTANARI, 1967-1968; BROQUET, CAIRE & MASCLE, 1966; CAFLISCH & SCHIMDT DI FRIEDBERG, 1967; BROQUET, 1968-1972; MASCLE, 1970-1973; RANGIN, 1975; CATALANO & D'ARGENIO, 1978.

Va inoltre ricordato il lavoro sullo schema geologico della Sicilia orientale di OGNIBEN, 1960, che, pur non riguardando direttamente l'area in studio ha influenzato le metodologie di approccio ai problemi della geologia della Sicilia per almeno un decennio.

Delle ricerche che riguardano l'area da noi studiata e alle quali rimandiamo per i dettagli stratigrafico-paleontologici, diamo qui una breve sintesi.

MONTANARI, 1967, studiando la estesa area dei Monti di Trabia oltre ad una dettagliata analisi stratigrafica e paleontologica dei terreni triassico-oligocenici di facies Imerese, dà una ricostruzione strutturale delle dorsali di Pizzo di Cane e di Monte S. Onofrio.

Nel lavoro vengono individuati, per la prima volta, come materiali risedimentati i livelli a brecce dolomitiche inseriti nella porzione triassico-liassica della successione del bacino Imerese.

Lo stesso MONTANARI, in un lavoro successivo (MONTANARI, 1968), presenta uno schema strutturale dell'area compresa tra Vicari, Roccapalumba e Lercara. Lo studio biostratigrafico delle litofacies distinte nella Formazione Lercara (SCHMIDT DI FRIEDBERG, 1964) porta l'autore a dimostrare l'età ladinico-carnica della successione, generalmente ritenuta paleozoica, e la sua continuità stratigrafica con le soprastanti marne e calcilutiti carnico-noriche della Formazione Mufara (o « *Flysch Carnico* » Auct.).

Dal punto di vista strutturale, l'Autore individua due fasi tettoniche comprese tra il Miocene inferiore e medio superiore:

durante la prima i terreni triassici della Formazione Lercara e della Formazione Mufara sovrascorrono sulle marne medio mioceniche di facies sicana, producendo fra l'altro un impasto tettonico nelle zone di contatto tra i due tipi di terreni « plastici »;

durante la seconda fase viene messa in posto sui terreni precedenti la *falda numidica* prodottasi per scollamento dal suo substrato di facies imerese.

Della stessa area di Lercara si erano occupati CAFLISCH & SCHMIDT DI FRIEDBERG, 1967. Sulla base dello studio del pozzo Roccapalumba e di alcuni profili sismici, gli autori, dopo aver ribadito l'età permiana della Formazione Lercara, sostengono che detti terreni costituiscono (anche nel sottosuolo) una fitta successione di piccole scaglie embricate, sovrascorse verso sud sulle argille « elveziane ».

I blocchi calcarei giurassico-cretacei di Vicari, Le Rocche e Roccapalumba, sarebbero stratigraficamente collegati con la successione

permiana della Formazione Lercara. Tutti insieme questi terreni farebbero parte dei Monti Sicani.

A BROQUET (1968-72) si deve lo studio di una vasta area della Sicilia centro settentrionale nella quale ricade parte della zona da noi investigata.

Le conclusioni più salienti concordano generalmente con lo schema stratigrafico e strutturale adottato dalla scuola francese di Glangeaud e Caire in Africa del Nord e Sicilia. Dal punto di vista paleogeografico l'Autore riconosce terreni appartenenti alle zone di Cammarata, di Vicari, di Sclafani e delle Argille scagliose (per il significato di questi termini vedi Tab. 1 in CATALANO & D'ARGENIO, 1978).

I depositi della Fm. Lercara sono datati come Permiano e Carbonifero e ne viene riconosciuta l'appartenenza al dominio dei Sicani. La scuola francese continuerà ancora di recente ad assegnare al Paleozoico questi terreni (MASCLE, 1973)[2].

Nell'estesa placca di terreni del Flysch Numidico, affioranti fra Sambuchi e Valledolmo, BROQUET riconosce l'esistenza di *lames de glissement* poggianti sulla struttura anticlinalica probabilmente autoctona di Valledolmo.

Per quanto riguarda l'assetto strutturale dei Sicani orientali BROQUET individua varie unità tettoniche rappresentate dal basso verso l'alto dalla subunità *M. Cammarata* (considerata praticamente autoctona) e dalle subunità *Pizzo Catera, Serra di Leone e Castronuovo* considerate alloctone e trasportate, verso sud, sulle marne del Miocene medio e superiore del « grande bacino della Sicilia centrale ». L'interpretazione di queste strutture va ricercata nello schema tettono-sedimentario elaborato dalla scuola francese per la Sicilia occidentale (BROQUET, CAIRE, MASCLE, 1966).

MASCLE (1973) riprende per il settore compreso tra Bolognetta e Filaga le conclusioni di BROQUET (1972) e ne ribadisce lo schema strutturale. In particolare l'autore considera la placca di Flysch Numidico, affiorante fra Godrano Mezzoiuso e Campofelice di Fitalia, originatasi dallo scollamento differenziale della porzione eo-miocenica dal substrato triassico-eocenico della zona di Sclafani.

RANGIN (1975), nell'area dei Monti di Termini Imerese, riconosce un edificio tettonico costituito da diverse unità impilate:

Lame des Argille scagliose, Lame du Cozzo Pideri, Lame du Monte San Calogero.

Secondo l'autore, durante l'« Elveziano », in seguito allo scollamento del Flysch Numidico dal suo substrato mesozoico, la zona di

[2] Di parere del tutto diverso, RUGGIERI e DI VITA (1972) sostengono una età miocenica della Fm. Lercara, ritenendo gli organismi permotriassici risedimentati in un bacino di deposizione di età miocenica.

Sclafani si sarebbe « scagliata » in una serie di strutture trasportate poi verso sud.

Diverso è l'approccio ai problemi stratigrafici e strutturali di CATALANO & D'ARGENIO (1978), che inquadrano la geologia della zona in uno schema che riguarda l'intera Sicilia occidentale.

Lo studio strutturale regionale e l'analisi delle facies consentono l'individuazione di diverse unità stratigrafico-strutturali impilate e di varie fasi tettogenetiche che deformano zone sempre più esterne di un margine continentale.

Nelle fasi più tardive le componenti gravitative sembrano assumere rilevanza maggiore.

ANALISI DELLE FACIES E STRATIGRAFIA

L'analisi delle facies e lo studio stratigrafico dei terreni affioranti ci hanno permesso di riconoscere nell'area in studio successioni con caratteristiche diverse riconducibili, dal punto di vista ambientale e paleogeografico, a originari domini in gran parte già individuati per le aree adiacenti nella Sicilia occidentale (CATALANO et al., 1973; GIUNTA & LIGUORI, 1973; SCANDONE et al., 1977; CATALANO & D'ARGENIO, 1978).

1. *Dominio Imerese*

I depositi del dominio imerese affiorano nei monti di Bagheria, nella dorsale di Pizzo di Cane-Monte S. Onofrio, in quella del Monte S. Calogero di Termini Imerese, al Monte Rasolocollo di Cerda, al Monte Chiarastella nell'area di Campofelice di Fitalia, nel Lercarese, in una larga fascia compresa fra Montemaggiore, Alia e Valledolmo; essi sono stati inoltre attraversati dai pozzi per ricerche di idrocarburi, Cerda 1, Cerda 2, Roccapalumba, Lercara, Vicari, Valledolmo e Castellana (Tav. 1).

La successione tipica dei depositi in facies imerese che indicano, nel loro insieme, un dominio con caratteristiche di scarpata e di bacino sviluppatasi dal Trias sup. al Miocene inf., può essere così sintetizzata dal basso verso l'alto:

1) Marne, calcilutiti e calcareniti lastriformi di colore grigio e avana, con liste e noduli di selce, contenenti radiolari, lamellibranchi e crostacei pelagici; a luoghi intercalazioni di brecce calcaree con elementi di scogliera (Carnico-Norico). Spessori variabili fra 50 e 80 m. Il loro ambiente di sedimentazione è riferibile ad una area di bacino

con tendenza allo approfondimento, rifornito da materiali carbonatici da banchi isolati che si sviluppavano ai suoi margini. A volte queste litofacies si trovano stratigraficamente sovrapposte a quelle più terrigene della Fm. Lercara (Cerda).

2) Calcilutiti e calcareniti lastriformi con noduli di selce, talora gradate e bioturbate, contenenti radiolari e lamellibranchi pelagici (*Halobia* sp. *Daonella* sp.) (Carnico-Norico). Spessori variabili tra 50 e 300 m. L'ambiente di sedimentazione è quello di una scarpata poco acclive con prevalente accumulo di organismi pelagici, saltuariamente rifornita dai margini.

3) Dolomie brecciate e brecce dolomitizzate massicce passanti verso l'alto e lateralmente a marne e calcareniti gradate con elementi di piattaforma carbonatica (Norico-Lias inf.). Gli spessori variano fra 50 e 350 m. L'ambiente di deposizione è quello di una scarpata alimentata dai margini di una piattaforma carbonatica e continuamente interessata dalla tettonica sinsedimentaria.

4 *a*) Marne a foraminiferi, radiolariti, argilliti e marne radiolaritiche con intercalazioni di vario spessore di biocalcareniti e biocalciruditi risedimentate e di lenti di vulcaniti basiche (Lias medio-Cretaceo inf.) spessori compresi tra 50 e 150 m.

4 *b*) Marne, calcilutiti e calcareniti a foraminiferi planctonici, con intercalazioni di brecciole a macroforaminiferi risedimentati (Cretaceo sup.-Eocene sup.). Spessori attoro ai 100 m. L'ambiente di sedimentazione è riconducibile a quello di un bacino più profondo durante il Dogger-Malm; tale bacino veniva periodicamente rifornito da materiali provenienti da margini di una piattaforma carbonatica adiacente interessata dalla tettonica sinsedimentaria.

In continuità di sedimentazione, anche se con lacune stratigrafiche, seguono i depositi del Flysch Numidico, raggruppabili in tre litofacies principali legate tra loro da relazioni laterali e verticali.

5 *a*) Argilliti siltose, talora sideritiche, alternate a sottili livelli arenacei con intercalazioni di calcareniti gradate a macroforaminiferi risedimentati. Oligocene medio-Aquitaniano inf. Spessori tra 100 e 300 m.

5 *b*) Argille sabbiose e quarzareniti gradate con granulometria e spessore variabile e con caratteri di torbiditi. Oligocene sup.-Burdigaliano. Spessori fra 200 e 500 m.

5 *c*) Marne argillose e siltose grigie con *Preorbulina* sp. Aquitaniano-Langhiano inferiore e medio. Spessori fra 100 e 250 m. L'ambiente di deposizione è quello di un bacino soggetto ad apporti di torbide da aree continentali e di open shelf ed in cui la sedimentazione tende a uniformarsi (argille e argille marnose grigie) solo dopo il Burdigaliano.

2. *Terreni del dominio Trapanese*

Affiorano presso Bolognetta e ad ovest di Campofelice di Fitalia; essi costituiscono le propaggini orientali rispettivamente delle dorsali del M. Kumeta e della Rocca Busambra; si ritrovano più a sud nella area di Vicari, Roccapalumba, Borgo Regalmici, in piccoli lembi e con giacitura a volte problematica.

Dai termini più antichi a quelli più recenti si susseguono:

1) Calcari e dolomie calcaree a piccoli megalodonti, molluschi ed alghe, calcari stromatolitici e loferitici (Norico (?)-Domeriano).

Spessori compresi fra 100 e 300 m.

L'ambiente di deposizione è di piattaforma carbonatica (laguna di retroscogliera e piana tidale); seguono in paraconformità:

2) Calcilutiti e calcareniti a frammenti di crinoidi, ammoniti e belemniti, passanti verso l'alto a calcari nodulari ammonitiferi con intercalazioni di vulcaniti basiche; calcilutiti con organismi planctonici e rarissime intercalazioni di calcareniti risedimentate; calcilutiti a Calpionelle (Toarciano-Neocomiano).

Spessori fra 80 e 200 m.

3) Marne, calcilutiti e calcareniti a globotruncane e globorotalie (« scaglia »), con sottili intercalazioni di calcilutiti a peloidi e di biocalcareniti rideposte (Barremiano-Eocene medio sup.).

Livelli di megabrecce ad elementi di piattaforma carbonatica sono intercalate nella scaglia maastrichtiana.

L'ambiente di deposizione è quello di originari altofondi in cui la tettonica medio giurassica crea zone di alto strutturale dove si instaura una sedimentazione di zona fotica e aree più ribassate che da queste ricevono clasti di vario tipo.

4) Biocalcareniti e biocalciruditi glauconitiche, gradate e laminate, discordanti sulle superfici di erosione della « scaglia » sottostante. Aquitaniano-Langhiano inf. Spessori da 50 a 80 m.

5) Marne argillo-sabbiose a microfossili pelagici (*Fm. San Cipirello*), (RUGGIERI, 1966) con spessori di 200-250 m. (Serravalliano-Tortoniano inf.).

L'ambiente di sedimentazione è quello di una area occupata inizialmente da depositi deltizi, evolventi nel Serravalliano a mare aperto.

I terreni della facies trapanese appartengono ad un dominio paleogeografico con caratteri di piattaforma carbonatica nel Trias-Lias e di piattaforma carbonatica pelagica fino all'Eocene-Oligocene inf. (?).

Dopo un periodo di emersione si ricostituiscono, dal Miocene inf. in poi, condizioni di piattaforma neritica tendente a piattaforma pe-

lagica. Nel Langhiano-Serravalliano le aree trapanesi si fondono con quelle sicane adiacenti in un unico bacino rifornito prevalentemente da materiali terrigeno-carbonatici.

3. *Terreni del dominio Sicano*

Affiorano nella parte sud-occidentale del foglio Termini Imerese tra Campofelice di Fitalia, Lercara, Filaga e Castronuovo; sono stati inoltre attraversati dai sondaggi Lercara, Vicari, Roccapalumba, Creta.

Dal basso verso l'alto si sono riconosciuti:

1) Argilliti marne, rosso-verdastre, calcari arenacei lastroidi con intercalazioni di vulcaniti; marne grigie e verdastre con intercalazioni tufitiche e brecciole calcaree, livelli a megabrecce con elementi di calcari organogeni arrotondati e con fossili paleozoici (fusulinidi, spiriferidi, productidi, richtofenidi, molluschi ed alghe calcaree di età permiana e carbonifera); argilliti varicolori, passanti lateralmente e verticalmente ad arenarie grigioverdi ricche di strutture sedimentarie, contenenti ostracodi, lagenidi (Carnico, MONTANARI, 1968). Questa successione di terreni, corrispondente alla formazione Lercara (SCHMIDT DI FRIEDBERG, 1964) passa verso l'alto a

2) Marne giallastre alternate a calcilutiti marnose grigie contenenti organismi pelagici quali radiolari, lamellibranchi. Carnico. Gli spessori variano tra 50 e 250 m. Questa litofacies è abbastanza simile a quella che nel dominio Imerese viene comunemente compresa nella Fm. Mufara. Lateralmente e verso l'alto si passa a

3) Calcareniti dolomitizzate grigie con frammenti di molluschi; calcilutiti bianche a radiolari, calcilutiti avana e marne ad ammoniti, lamellibranchi (Carnico-Norico) seguite da calcareniti grigie gradate con interstrati di marne nerastre e calciruditi con elementi derivanti da una piattaforma carbonatica (Norico-Infralias).

L'ambiente di sedimentazione di queste successioni è quello di una scarpata poco acclive in un bacino di moderata profondità di volta in volta alimentato da materiali delle adiacenti piattaforme interessate ai loro margini dalla tettonica infraliassica.

In discordanza seguono 4) Calcari risedimentati con elementi derivanti dal *rosso ammonitico*, calcilutiti a radiolari e calcilutiti bianche con calpionelle (Titonico-Cretaceo inf.); calcilutiti e marne a globotruncane e globorotalie, « scaglia » (Cretaceo sup.-Oligocene inf.) che nei livelli maastrichtiani contengono intercalazioni di megabrecce ad elementi di piattaforma carbonatica triassica, potenti fino ad alcune decine di metri.

L'ambiente è ancora quello di bacino ma le facies si banalizzano e si uniformano con quelle adiacenti.

5) Marne siltose grigioverdi e biocalcareniti con lepidocicline (Oligocene-Aquitaniano).

6) Biocalcareniti, biocalciruditi glauconitiche e marne sabbiose (Burdigaliano-Langhiano).

7) Marne argillo-sabbiose ad *Orbulina* sp. (Serravalliano-Tortoniano inf.). Il nuovo ambiente di sedimentazione è ormai individuato: una zona di piattaforma aperta che evolve nel Serravalliano ad un vero e proprio bacino.

4. *Terreni dei domini Sicilidi*

Gli affioramenti dei terreni comunemente noti come complesso delle Argille Scagliose (OGNIBEN, 1960) sono diffusi soprattutto nell'area termitana e si riducono man mano che ci si sposta verso sud, dove si rinvengono in minuscole placche giacenti soprattutto sui terreni di facies imerese.

Nell'area studiata sono state riconosciute:

Argille varicolori, a volte caotiche, laminate con microfaune cretaceo-paleogeniche; calcilutiti laminate, calcareniti gradate e marne con microfaune paleogeniche note in letteratura come Formazione Polizzi (OGNIBEN, 1960); fra essi è possibile distinguere:

a) Calcilutiti e calcareniti biancastre mal cementate a microforaminiferi (Cuisiano-Luteziano), affioranti presso Vicari;

b) Marne cineree con intercalazioni di calcareniti a macroforaminiferi risedimentati (Cuisiano-Luteziano) affioranti ai margini delle dorsali dei Monti di Trabia, del Monte San Calogero, nelle aree del Termitano e di Caccamo;

c) Calcilutiti e marne olivastre con intercalazioni di blocchi di varie dimensioni di calcari organogeni a macroforaminiferi di ambiente neritico affioranti in particolare nell'area del Pizzo Mangiatorello tra Bolognetta e la dorsale di Pizzo Cane.

DEPOSITI TARDOROGENICI

Avanfossa (Tortoniano superiore-Pliocene inferiore)

Durante il Tortoniano superiore-Messiniano inferiore, gran parte della Sicilia è interessata dalla deposizione di terreni silicoclastici e carbonatici che individuano due aree di deposizione.

a) Sicilia occidentale e centro settentrionale in cui si succedono argille marnose, conglomerati, sabbie e verso l'alto marne pelagiche o, a luoghi, calcari in facies di scogliera;

b) Sicilia centro meridionale in cui si depositarono argille, sabbie e marne pelagiche.

Questi terreni sono stati compresi nella formazione Terravecchia (SCHMIDT DI FRIEDBERG, 1964) e datati sulla base di foraminiferi o di molluschi e ostracodi.

A questi depositi succedono verso l'alto evaporiti del Messiniano e i « *trubi* » del Pliocene inferiore.

Nella regione da noi studiata i depositi della Fm. Terravecchia affiorano nella valle di Vicari (bacino di Ciminna), nell'area di Vallelunga e nei dintorni di Roccapalumba e Lercara.

La successione verticale della Terravecchia è data da conglomerati passanti ad arenarie, argille sabbiose e a marne. Gli elementi dei conglomerati sono costituiti essenzialmente da clasti calcarei ed arenacei di facies imerese.

L'analisi dei caratteri deposizionali indica che queste successioni si sono formate da depositi fluviali gradualmente passanti a depositi deltizi ed infine marini. Le direzioni di corrente dei sedimenti terrigeni indicano provenienze da nord (CATALANO et al., 1978).

I calcari di scogliera localmente attribuiti alla Formazione Baucina (ARUTA & BUCCHERI, 1971) e successivamente studiati nella area di Ciminna hanno mostrato di essersi depositati in ambienti di laguna di retroscogliera e di complesso di scogliera con isolati *patch reefs* in cui sono predominanti coralli del genere *Porites* (CATALANO & ESTEBAN, 1978). I depositi evaporitici sono presenti nel bacino di Ciminna e a sud di Lercara.

In questo bacino sono stati distinti due livelli evaporitici (LO CICERO & CATALANO, 1978; CATALANO et al., 1978), separati da marne marine (DI STEFANO & CATALANO, 1978) e corrispondenti ai due cicli evaporitici messiniani riconosciuti in gran parte della Sicilia (DECIMA & WEZEL, 1971).

Trasgressivi sui depositi evaporitici, sui sedimenti della Fm. Terravecchia e persino su quelli del Flysch Numidico, sono infine calcilutiti e marne bianche con intercalazioni di biocalcareniti risedimentate del Pliocene inferiore (« *Trubi* »).

A luoghi (Monte Misciotto, Ciminna), i trubi sono seguiti verso l'alto da marne e calcareniti del Pliocene medio superiore.

DEPOSITI DEL PLIOCENE SUPERIORE-QUATERNARIO

Biocalcareniti, sabbie ed argille sono i depositi più comuni dell'intervallo Pliocene superiore-Quaternario.

Essi affiorano nella fascia costiera dei fogli Bagheria e Termini Imerese.

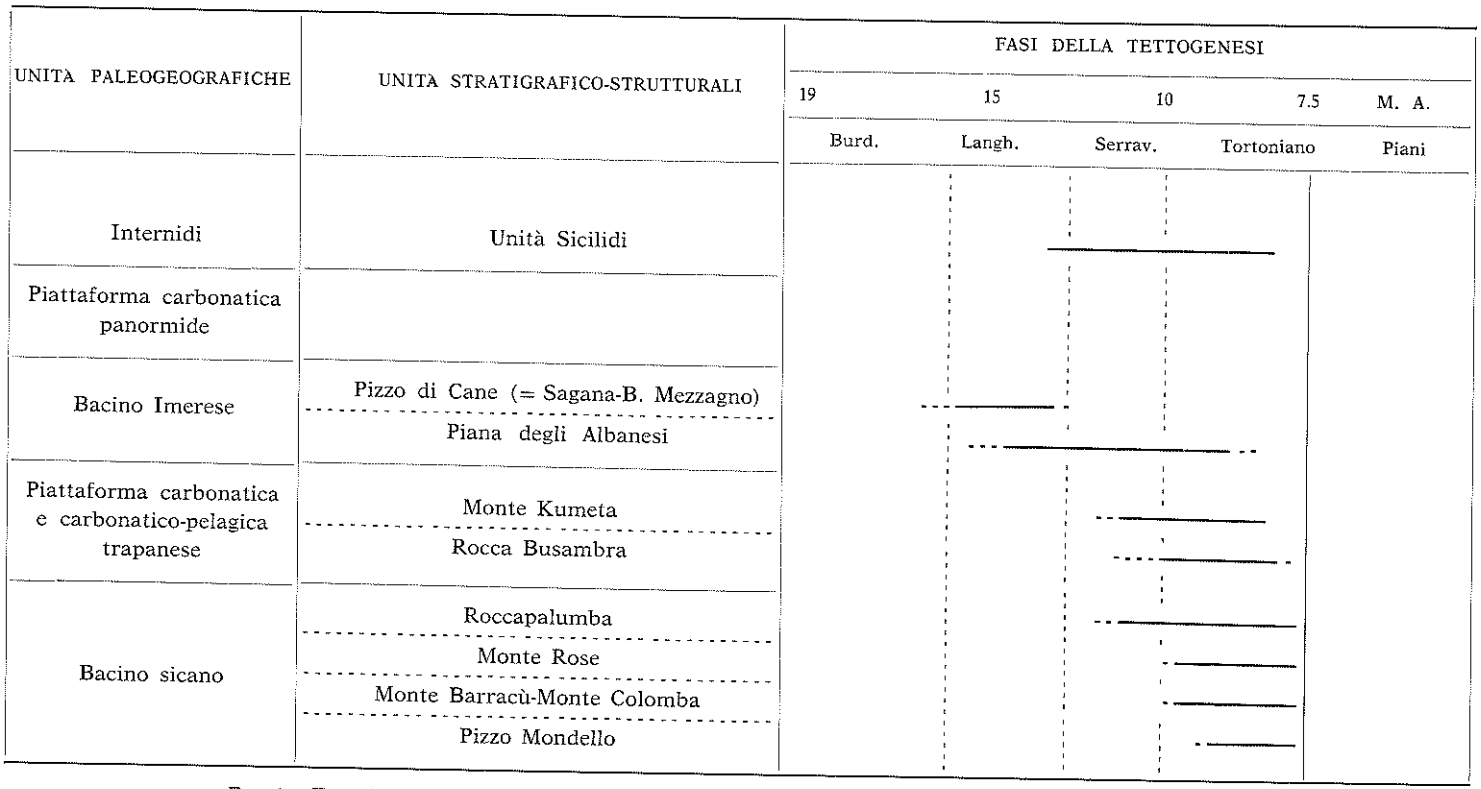


FIG. 1 - Tempi di messa in posto delle unità stratigrafico-strutturali affioranti nell'area studiata.

Di grande interesse morfotettonico sono i numerosi terrazzi quaternari della fascia costiera termitana che indicano sollevamenti notevoli anche se differenziali nel corso del Pleistocene.

Le unità stratigrafico-strutturali

I terreni prima descritti sono raggruppabili in corpi geologici omogenei nelle facies e nel comportamento strutturale che costituiscono, come già detto, delle Unità stratigrafico-strutturali (U. S. S.).

Tali corpi geologici derivano dalla deformazione di originarie unità paleogeografiche e si sono individuati in seguito alla deformazione progressiva di un margine continentale (segmento siculo appenninico del margine africano).

Nell'individuazione di queste Unità S. S. sul terreno abbiamo sempre effettuato un filtraggio delle deformazioni successive che hanno complicato i rapporti tra i vari corpi geologici.

Qui di seguito le Unità vengono descritte a cominciare da quelle geometricamente più basse nell'edificio strutturale.

Unità S. S. Pizzo Mondello

La successione dell'Unità Pizzo Mondello, qui presente nelle pendici settentrionali del Monte Cammarata, è costituita da calcilutiti e calcareniti avana, selcifere, con lamellibranchi ed ammoniti (Carnico-Norico), calcari a radiolari e marne a microforaminiferi (Lias medio), calcilutiti, calcareniti e marne a foraminiferi planctonici (Cretaceo-Paleogene), biocalcareniti glauconifere (Burdigaliano), disposti lungo una monoclinale fagliata.

Quest'unità deriva dalla deformazione della parte più esterna e al tempo stesso più orientale (riferito alla geografia attuale) del dominio Sicano (Catalano & D'Argenio, 1978).

Unità S. S. M. Barracù-M. Colomba

È rappresentata nell'area in studio dalle propaggini orientali dei monti di Prizzi. I terreni qui affioranti, biocalcareniti glauconitiche (Burdigaliano-Langhiano) e marne argillose ad *Orbulina* (Serravalliano-Tortoniano inf.) fanno parte della successione tipica di questa unità illustrata già da Catalano & D'Argenio, 1978, a cui rimandiamo per un'informazione più completa.

L'unità M. Barracù-M. Colomba deriva dalla deformazione della parte centro-occidentale dell'originario bacino Sicano.

Unità S. S. Monte Rose

Nell'area studiata, essa forma il massiccio Carcaci-Riena, l'anticlinale di Castronuovo e la dorsale di Filaga-Serra di Leone.

La struttura anticlinalica fagliata del gruppo Carcaci-Riena è caratterizzata da una successione di calcilutiti e calcareniti biancastre e avana (Norico) seguite in discordanza da marne rosse e calcilutiti laminate (« scaglia », Eocene), e a loro volta ricoperte, ancora in discordanza, da calcari bianchi e argille sabbiose (Oligocene sup.-Aquitaniano).

Nella brachianticlinale molto frammentata di Castronuovo si succedono dal basso calcilutiti e calcareniti bianche (Carnico-Norico), calcilutiti e calcareniti con intercalazioni di marne verdastre e grigie (Lias), calcari nodulari ammonitiferi e brecce calcaree con elementi di *rosso ammonitico* (Dogger-Malm), marne e calcilutiti a foraminiferi pelagici « scaglia », con intercalazioni di megabrecce (Cretaceo-Eocene); marne, calcilutiti e calcareniti con macroforaminiferi risedimentati (Eocene-?Oligocene).

Generalmente discordanti, su superfici di erosione dei terreni cretaceo-oligocenici, seguono biocalcareniti e sabbie a *Eulepidina dilatata* (Oligocene sup.-Aquitaniano).

La struttura di Filaga-Serra di Leone, una tormentata anticlinale fagliata a nord, è costituita da calcareniti e calcilutiti variamente dolomizzate (Carnico-Norico) ricoperte in discordanza da calcilutiti e calcareniti a planctonici (Cretaceo-Paleogene) con grandi lenti di megabrecce maastrichtiane intercalate.

Discordanti sui calcari tipo scaglia seguono argille con rare intercalazioni di biocalcareniti dell'Oligocene medio superiore.

L'analisi delle facies e i rapporti strutturali regionali permettono di collocare l'unità Monte Rose nell'area marginale più interna del Bacino Sicano.

L'unità si è originata in seguito alla deformazione di questa parte del dominio Sicano, avvenuta a partire dal Tortoniano inferiore; il suo trasporto verso sud, sui terreni dell'unità Monte Barracù-Monte Colomba e Pizzo Mondello, si è realizzato tra il Tortoniano e il Pliocene inferiore.

Questa unità inoltre corrisponde solo in parte all'Unità S. S. Monte Rose come definita da CATALANO & D'ARGENIO, 1978, in quanto i terreni medio triassici e triassico-giurassici affioranti nell'area di

Roccapalumba, Lercara, Vicari, M. Colobria, vengono qui assegnati all'Unità Roccapalumba.

Unità S. S. Roccapalumba

L'Unità è rappresentata nell'area in studio da 3 grosse placche di terreni per lo più incompetenti, ricoperti tettonicamente dal Flysch Numidico e, stratigraficamente dai depositi tardorogenici tortoniano-messiniani.

Al di sotto delle coperture si individua un solo esteso affioramento compreso tra il parallelo di Vicari e quello di Lercara immergentesi ad Est al di sotto del Flysch Numidico di Alia.

I terreni di questa Unità sono costituiti per la gran parte da depositi clastici terrigeno-carbonatici di età ladinico-carnica (Fm. Lercara) a luoghi seguiti stratigraficamente da calcilutiti e calcareniti a radiolari e lamellibranchi (*Halobia* sp.) del Trias superiore-Lias.

In particolare, nell'area della Montagnola di Vicari affiorano quasi esclusivamente le alternanze arenaceo-argillitiche con vulcaniti intercalate; al Monte S. Filippo ed in Contrada Manganaro le coeve arenarie grigio verdi; a Cozzo Intronata i depositi clastico-carbonatici, con intercalazioni di livelli di brecce ad elementi paleozoici, passano a marne e calcari lastriformi con *Halobia* sp.. Argille e marne varicolori sono predominanti nei valloni Riena e S. Antonio e al M. Colobria ove passano a calcilutiti e calcareniti ad *Halobia* sp..

I contatti stratigrafici sono generalmente mascherati da deformazioni tettoniche particolarmente frequenti nei terreni incompetenti di queste aree.

I terreni triassici di questa Unità raggiungono i loro massimi spessori nell'area di Vicari, ove il pozzo Roccapalumba la ha attraversata per buona parte dei suoi 2.700 metri.

Come si è già detto, questa grossa placca triassica venne interpretata da CAFLISCH & SCHMIDT DI FRIEDBERG (1967) e dagli autori francesi (1968-1973) come un insieme di scaglie tettoniche costituite da terreni permo-carboniferi e da argille mioceniche.

La reinterpretazione del pozzo Roccapalumba (CATALANO et al., in prep.) ha portato al riconoscimento di terreni della Fm. Lercara di età medio-triassica, variamente caoticizzati, sovrapposti ad una successione calcareo-argillosa mesozoica, probabilmente facente parte di unità Sicane più esterne. (Tav. 1).

Lo studio delle facies e i rapporti geometrici con le altre unità ci permettono di collocare le successioni sedimentarie dell'Unità Roccapalumba nella parte interna e più orientale del Bacino Sicano.

La deformazione iniziata nel Tortoniano inf. è continuata fino al Pliocene inf.-medio coinvolgendo anche terreni pliocenici.

È così possibile formulare l'ipotesi di una scagliatura successiva al Pliocene inferiore. Tuttavia, a differenza di quanto ritenuto dagli A.A. precedenti, bisogna ammettere che i vecchi fronti di accavallamento si sono riattivati con avanscorrimenti che hanno portato le parti più alte delle successioni dell'Unità Roccapalumba a sovrapporsi a zone più esterne.

Unità S. S. Rocca Busambra

Nell'area in studio è rappresentata dai terreni cretaceo-eocenici affioranti nelle propaggini orientali della montagna omonima.

L'unità deriva dalla deformazione della parte più esterna della piattaforma carbonatica e carbonatico-pelagica trapanese (CATALANO et al., 1978; CATALANO & D'ARGENIO, 1978).

Unità S. S. Monte Kumeta

È costituita regionalmente da una dorsale che si allunga in direzione W-E da San Cipirello fino a Marineo (Foglio Alcamo), e che devia successivamente in direzione NW-SE, da Marineo a Cefalà Diana. Questo ultimo segmento della dorsale costituisce la anticlinale fagliata di Monte Balatelle la cui successione è caratterizzata da una grossa intercalazione di tufi e basalti di età Dogger sup.-Malm finora mai segnalata nel settore più occidentale dell'unità. L'Unità Monte Kumeta deriva dalla deformazione del settore più orientale della piattaforma carbonatica e carbonatica-pelagica trapanese. La sua messa in posto nel settore dei Monti di Palermo risale all'intervallo Serravalliano sup.-Tortoniano (ABATE et al., 1979).

Unità S. S. Piana degli Albanesi

È rappresentata da depositi dell'Eocene(?)-Miocene affioranti nell'area di Godrano-Campofelice di Fitalia, nell'anticlinale di Pizzo Samperi a SE di Valledolmo, da gran parte delle placche numidiche che ammantano le formazioni triassiche nei dintorni di Lercara e da quelle che coprono le marne serravalliane di Pietre Cadute e Borgo Regalmici; essa è inoltre riconoscibile nelle successioni mesozoico-terziarie di facies imerese incontrate dai pozzi Cerda 2, Valledolmo, Castellana.

L'Unità Piana degli Albanesi deriva dalla deformazione dell'area più esterna del Bacino Imerese (ABATE et al., 1979) ed è spesso priva

del suo originario substrato mesozoico, segno di uno scollamento passante anche al limite tra i terreni calcareo-silicei triassico-eocenici e quelli terrigeni oligomiocenici (*Rabotage basal*). Pertanto, l'unità Piana degli Albanesi è costituita da più placche separate fisicamente tra di loro, tutte però caratterizzate da analoga posizione geometrica nell'edificio strutturale.

Unità S. S. Pizzo di Cane

L'Unità è rappresentata dai terreni mesozoico-terziari di facies imerese affioranti *a*) nella dorsale di Pizzo di Cane-Monte S. Onofrio costituita da una piega completa con asse NNW-SSE, fagliata ai fianchi, *b*) nella grossa brachianticlinale di Monte San Calogero dimezzata e quasi radialmente tagliata da sistemi di faglie con direzione NNW-SSE e NE-SW (Tav. 1).

Le due strutture formano nel loro insieme un arco a debole curvatura con direzione NNW-SSE ed W-E nella zona orientale. Il fronte meridionale dell'arco è segnato da un grosso disturbo tettonico interessante la copertura oligo-miocenica incompetente che affiora nell'area tra Bolognetta e Ventimiglia e si estende tra Aliminusa, Montemaggiore ed Alia.

Questo disturbo è una piega rovesciata interessata da faglie nel settore orientale e passa ad una faglia diretta nel settore occidentale.

L'Unità Pizzo di Cane deriva dalla deformazione della parte più interna del Bacino Imerese. La sua individuazione e relativa messa in posto sarebbe avvenuta tra la fine del Burdigaliano e l'inizio del Langhiano.

Secondo BROQUET (1968-72) e RANGIN (1975) nell'area compresa tra Monte S. Calogero e Valledolmo si individuerebbero due « *lames de glissement* », quella di S. Calogero e quella di Alia poggianti sulla struttura di Valledolmo ritenuta autoctona (vedi BROQUET, 1972, fig. 34 e RANGIN, 1975, fig. 4).

Noi riteniamo invece che la *lame de Alia* sia la continuazione verso sud dell'Unità Pizzo di Cane (vedi Profilo *e-e'* in Tav. 1) e che la struttura di Valledolmo (la cui successione sedimentaria è stata da noi riconosciuta nella parte basale del pozzo omonimo e del pozzo Cerda 2) appartenga alla Unità Piana degli Albanesi. Quest'ultima poggia a nostro giudizio sulle marne tortoniane di unità più esterne, probabilmente sicane (vedi profilo *e-e'*, Tav. 1)[3].

[3] In disaccordo ci trovano anche *a*) le datazioni dei terreni miocenici post-numidici delle aree a nord di Alia indicati da BROQUET come elveziano-tortoniani e a noi risultanti non più recenti del Langhiano inferiore; *b*) la supposta continuità stratigrafica

Rapporti strutturali fra le varie unità

Vengono qui di seguito riferiti i dati di terreno più significativi nella definizione dei rapporti geometrici tra le varie Unità.

Infatti l'individuazione sul terreno dei contatti tettonici tra le varie U. S. S., e tra di esse e le coperture tardoorogene non è sempre agevole, a causa, soprattutto, della tettonica post-pliocenica che maschera le superfici di sovrascorrimento.

L'unità Pizzo Mondello che, come già detto, rappresenta nell'edificio strutturale la più bassa tra le unità definite, è ricoperta tettonicamente dai terreni della Unità Monte Rose.

Questo contatto è visibile nella valle del Platani, dove la struttura di Castronuovo è sovrascorsa sulle marne serravalliano-tortoniane della successione del Monte Cammarata (Tav. 1).

L'età della sovrapposizione, pertanto, in questa area è sicuramente posteriore al Tortoniano inferiore.

La situazione geologica nelle aree adiacenti più occidentali (non compresa nella allegata carta geologica) conferma tali rapporti tra la Unità Monte Rose e l'Unità Pizzo Mondello (Mascle, 1973; Catalano & D'Argenio, 1978).

I terreni dell'Unità Roccapalumba si ritrovano sovrapposti tettonicamente sulle marne medio mioceniche dell'Unità Monte Rose nell'area di Pizzo Colobria e nel sottosuolo (Pozzo Roccapalumba); inoltre si sovrappongono sui termini langhiano-tortoniani dell'Unità M. Barracù-M. Colomba, affioranti ad ovest del Vallone S. Antonio. Non sono definibili, a causa di questo ricoprimento, i rapporti reciproci fra l'Unità Monte Barracù-Monte Colomba e l'Unità Monte Rose, ricostruibili invece nelle adiacenti aree occidentali (Mascle, 1973; Catalano & D'Argenio, 1978).

Le Unità Monte Kumeta e Rocca Busambra si sovrappongono ai terreni del dominio Sicano. Questi rapporti, documentabili nell'adiacente foglio Alcamo, sono stati già discussi (Catalano & D'Argenio, 1978; Catalano et al., 1978).

In particolare l'Unità Monte Kumeta giace tettonicamente sulla Unità Marineo nota soltanto nel sottosuolo (pozzo Marineo, Agip).

L'Unità Rocca Busambra si sovrappone a ovest su depositi serravalliano-tortoniani dell'Unità Monte Barracù-Monte Colomba (vedi

« dalla facies di Flysch (Oligocene-Burdigaliano) alla facies di molassa (Burdigaliano-Tortoniano) ».

Inoltre i limiti di accavallamento indicati da Broquet per le varie *lames* (Carte geologique des Madonies et des Sicanes orientaux, 1970) sono di difficile riscontro sul terreno.

anche MASCLE 1973), mentre sembra poggiare direttamente sui terreni triassici dell'Unità Roccapalumba alla sua estremità orientale; la localizzazione del contatto in questo caso è solo intuibile per la copertura del Flysch Numidico. Un discorso a parte va fatto per i blocchi di varie dimensioni, con facies trapanese, giacenti sui terreni delle unità sicane tra Vicari, Roccapalumba, Borgo Regalmici etc.. I blocchi di dimensioni maggiori, ritrovati nell'area di Vicari, sono a volte capovolti ma poggiano o sono inglobati (vedi pozzo Vicari) nei terreni dell'Unità Roccapalumba.

Una spiegazione preliminare della loro giacitura attuale può risiedere nel fatto che essa sia legata ai ricoprimenti tardivi, di prevalente componente gravitativa, verificatesi durante il riempimento dell'avanfossa.

L'Unità Piana degli Albanesi si sovrappone tettonicamente ai terreni delle unità esterne trapanesi e sicane. In particolare essa giace: sui terreni langhiano-tortoniani dell'Unità Monte Kumeta (M. Balatelle, Bolognetta) e della Rocca Busambra (MASCLE, 1973), sulle marne medio mioceniche dell'Unità Pizzo Mondello, nella valle del Platani e sui depositi langhiano-tortoniani dell'Unità Barracù-M. Colomba a SW di Margana (almeno relativamente all'area studiata), ed infine, direttamente sui terreni mesozoici dell'Unità Roccapalumba come è visibile a sud di Campofelice di Fitalia, lungo il torrente Centosalme e nell'area di Vicari e Lercara. I rapporti tettonici tra l'Unità Pizzo di Cane e l'Unità Piana degli Albanesi, entrambe derivanti dalla deformazione del Bacino Imerese, sono per lo più mascherati dalle coperture dei terreni tardorogenici tortoniano-pleistocenici e/o dalla tettonica successiva al Pliocene medio.

Tuttavia, evidenze di sovrapposizione dell'Unità Pizzo di Cane sull'Unità Piana degli Albanesi provengono, nella nostra area, dallo studio delle successioni incontrate nei pozzi Cerda 2, Valledolmo, dall'esistenza di finestre tettoniche (nell'area di Valledolmo, l'Unità Piana degli Albanesi affiora con i suoi terreni langhiani) e regionalmente dai rapporti con le unità adiacenti.

a) *Rapporti con le unità imeresi dell'area dei Monti di Palermo*

Nella area dei Monti di Palermo sono state riconosciute due unità stratigrafico strutturali derivanti dalla deformazione del Bacino Imerese: Sagana-Belmonte Mezzagno e Piana degli Albanesi (ABATE et al., 1978).

La prima è sovrascorsa sulla seconda come è possibile osservare nella area di Pioppo, Pizzo Mirabella, Porcazzo-Massariota e lungo il fiume Eleuterio (Fogli Alcamo e Palermo).

L'Unità Sagana-Belmonte Mezzagno è presente nell'area da noi studiata ed affiora nel settore di Bagheria, separata dai terreni dell'Unità Pizzo di Cane da una importante linea tettonica a direzione NE-SW osservabile lungo il fiume Milicia.

I rapporti con i terreni delle unità adiacenti e l'analisi delle facies indicano che l'Unità Pizzo di Cane ha nell'edificio strutturale analoga posizione dell'Unità Sagana-Belmonte Mezzagno e ne costituisce, al di là delle diversificazioni dovute alla neotettonica, la continuazione laterale verso est [4].

b) *Rapporti con le Unità Imeresi affioranti nelle aree delle Madonie*

Analisi delle facies e analisi tettonica regionale, associate ai dati di pozzi profondi indicano una continuità spaziale e strutturale fra l'Unità di Pizzo di Cane e i terreni in facies imerese affioranti nell'area di Sclafani, Caltavaturo e Monte dei Cervi (*Unità delle Madonie occidentali* in SCHMIDT DI FRIEDBERG et al., 1960 e *Complesso di base* in OGNIBEN, 1960 e GRASSO et al., 1978).

Questi terreni in facies imerese equivalenti a quelli dell'Unità Pizzo di Cane continuano ad oriente di Cefalù immergendosi nel sottosuolo in corrispondenza della regione tra Pollina e Mistretta.

Contrariamente a quanto ritenuto fino ad oggi (BROQUET et al., 1974; GRASSO et al., 1978) il riesame dei pozzi profondi per idrocarburi della regione sopramenzionata ha rivelato l'assenza completa dei terreni della piattaforma carbonatica panormide; sono presenti invece terreni mesozoico-terziari del Bacino Imerese (CATALANO et al., in prep.) a loro volta sovrapposti tettonicamente al Flysch Numidico.

I terreni delle Unità Sicilidi sono sovrascorsi sulle unità imeresi, prevalentemente sui termini langhiani del Flysch Numidico.

La messa in posto di tali terreni andrebbe collocata perciò in un intervallo di tempo compreso fra il Langhiano ed il Tortoniano inferiore.

La presenza di lembi di terreni Sicilidi addossati sia alle coperture numidiche dell'Unità Pizzo di Cane che a quelle della Unità Piana degli Albanesi è in favore del raggiungimento delle attuali giaciture

[4] L'equivalenza tra le due unità non giustificherebbe una nuova denominazione che tuttavia viene proposta perché, a differenza dell'Unità Sagana-Belmonte Mezzagno, l'Unità Pizzo di Cane non mostra nell'area studiata i rapporti con le unità derivanti dalla piattaforma Carbonatica Panormide.

da parte delle Sicilidi in tempi immediatamente posteriori alla deformazione dell'originario Bacino Imerese e all'accavallamento delle unità stratigrafico-strutturali risultanti.

TETTOGENESI

L'area da noi studiata risulta così costituita da una serie di unità stratigrafico-strutturali embricate verso sud. Tali corpi geologici si sono originati da differenti domini paleogeografici che l'analisi delle facies e l'analisi strutturale regionale indica come contigui e corrispondenti ad una parte di un originario margine continentale (Margine meridionale della Tetide).

L'evoluzione paleogeografica dei terreni affioranti nel segmento di catena da noi studiato deve essere quindi vista nel quadro dei grandi processi geodinamici che hanno interessato questa area del Mediterraneo dal Trias fino ad oggi.

Analisi e confronti tra gli schemi paleogeografici elaborati per la Sicilia occidentale negli ultimi anni sono contenuti in CATALANO & D'ARGENIO, 1978; in questa sede si intende approfondire l'evoluzione tettogenetica che ha interessato i terreni dell'area studiata, durante il Neogene.

Durante l'intervallo Aquitaniano-Burdigaliano la morfologia preorogenica delle zone esterne del margine continentale è rappresentata da nord verso sud (rispetto agli attuali orientamenti delle Unità) da:

a) una area corrispondente sia alla piattaforma Carbonatica Panormide, progressivamente coperta dalla sedimentazione quarzoarenitica del Flysch Numidico, che al Bacino Imerese, in cui ai depositi torbiditici si sostituiscono verso l'alto argilliti e marne argillose;

b) una area appena emersa corrispondente alla piattaforma carbonatica trapanese e a parte del Bacino Sicano occupata dalla sedimentazione deltizia di biocalcareniti e marne glauconitiche;

c) una area di mare sottile corrispondente al Bacino Sicano e all'avanpaese ibleo-saccense interessata progressivamente dalla deposizione carbonatico-terrigena.

Tra la fine del Burdigaliano e l'inizio del Langhiano queste aree vengono raggiunte dalla tettogenesi; le unità stratigrafico-strutturali prima descritte, si sono infatti individuate e messe in posto a partire dal Langhiano inferiore [5].

[5] Le Unità derivanti dalla piattaforma carbonatica Panormide assenti nella zona studiata, si sono messe in posto nell'adiacente area dei Monti di Palermo nel Langhiano inferiore (ABATE et al., 1978).

Anche se appare sempre più probabile che la tettogenesi abbia avuto uno sviluppo in gran parte continuo tra l'inizio del Langhiano ed il Tortoniano inferiore, i tempi della loro messa in posto individuano due intervalli significativi:

— *Langhiano-Serravalliano inferiore.* L'Unità Pizzo di Cane si individua e si sovrappone all'Unità Piana degli Albanesi nel Langhiano inferiore e medio.

Le due unità cominciano a sovrascorrere sulle più esterne aree del dominio Trapanese.

— *Serravalliano-Tortoniano inferiore.* Durante questo intervallo l'Unità Pizzo di Cane e l'Unità Piana degli Albanesi si sovrappongono sulle Unità Monte Kumeta e Rocca Busambra.

L'Unità Piana degli Albanesi, inoltre va a ricoprire, alla fine del Tortoniano inferiore, le più esterne unità sicane (Unità Roccapalumba, Unità Monte Rose e margine settentrionale dell'Unità Pizzo Mondello) presumibilmente già raggiunte dalla tettogenesi.

Le Unità Trapanesi si accavallano sui terreni del dominio sicano nel Tortoniano inferiore « scagliandosi » ulteriormente in tempi successivi.

Tra la fine del Langhiano ed il Tortoniano inferiore, i terreni sicilidi appartenenti ad aree più interne del Margine Continentale, ricoprono le Unità Imeresi già tra loro accavallate.

Il massimo raccorciamento sembra essersi realizzato proprio attorno al Serravalliano superiore-Tortoniano inferiore. Alla fine di questo intervallo si individuano e si mettono in posto le unità sicane; l'Unità Roccapalumba sovrascorre sull'Unità Monte Rose, che a sua volta si sovrappone alle Unità Monte Barracù-Monte Colomba e Pizzo Mondello; le unità sicilidi subiscono un'ulteriore traslazione verso aree più esterne.

Comincia così ad identificarsi il margine meridionale della catena con il sollevamento delle Unità Imeresi e la formazione di un'area di avanfossa.

Nel Tortoniano superiore-Messiniano inferiore, in seguito al sollevamento progressivo di aree sempre più esterne della catena, si ha la deposizione delle molasse della Formazione Terravecchia che ricoprono, sigillandole, le Unità imeresi con le soprastanti falde Sicilidi e man mano verso l'esterno i fronti di accavallamento delle Unità trapanesi e sicane.

Dal Tortoniano superiore al Messiniano si ha un abbassamento progressivo del livello del mare e la formazione di complessi di scogliera che si esauriscono con l'evento messiniano legato alla crisi di salinità e alla deposizione delle evaporiti.

Una nuova fase tettogenetica si verifica dopo il Pliocene inferiore con la traslazione delle unità sicane già dislocate sui gessi messiniani ed i « *trubi* » pliocenici.

Evidenze di questi accavallamenti si ritrovano soltanto nelle adiacenti aree occidentali. Sembra ragionevole ritenere che le superfici di accavallamento plioceniche affioranti ad occidente, possano ritrovarsi nel sottosuolo delle aree più orientali a variabile profondità.

Neotettonica

L'edificio strutturale formatosi nel Miocene-Pliocene inferiore subisce, a partire dal Pliocene medio superiore, una accentuata deformazione che dà luogo ad una fase plicativa seguita da una fase disgiuntiva, in cui vengono implicati sicuramente terreni del Pliocene medio superiore.

I sistemi di pieghe a grande raggio di curvatura hanno assi di orientazione NNW-SSE ruotanti fino a WNW-ESE.

Tali direzioni sono molto evidenti sia nelle dorsali calcaree dei Monti di Trabia e di Termini Imerese a nord e dei Monti Sicani a sud, che nelle aree occupate dai terreni tardorogeni (area del bacino di Ciminna, area di Vallelunga) e del Flysch Numidico (area di Montemaggiore).

Alla tettonica plicativa seguono le fasi distensive responsabili del sollevamento differenziale dell'area.

Schematicamente si individuano due grossi sistemi di faglie.

Il primo sistema, che è anche grosso modo parallelo alla direzione principale della struttura di piegamento, ha un andamento NNW-SSE, leggermente ruotante verso NW-SE (area meridionale della carta).

Il secondo sistema, per lo più normale al precedente, ha direzione NE-SW ruotante verso NNE-SSW.

Fra le linee a direzione NE-SW, quella dell'estremo settore nord occidentale della carta (Foglio Bagheria) appare collegata con il cambiamento regionale di direzione della struttura che interessa le Unità imeresi e trapanesi nella zona tra Marineo, Bolognetta ed Altavilla Milicia.

Fra le linee importanti con direzione NE-SW va segnalata quella che delimita verso sud l'arco costituito dalle dorsali di Pizzo di Cane e Monte San Calogero.

I due sistemi principali controllano a scala regionale l'attuale assetto tettonico in cui si distinguono tre fasce con andamento est-ovest progressivamente ribassate verso la costa.

L'età di questa tettonica viene comunemente riferita al Pliocene superiore-Quaternario; per la fascia costiera e per le aree adiacenti occidentali si hanno evidenze di una età siciliana o posteriore al Siciliano (RUGGIERI & SPROVIERI, 1977).

Aree costiere ed aree interne sono però allo stesso modo interessate dalle più importanti linee tettoniche e deve pertanto essere ipotizzato un ringiovanimento dell'età della tettonica disgiuntiva nella intera area.

Siamo grati vivamente a Piero Di Stefano, cui si deve il disegno della carta geologica; a Enrico di Stefano che ci è stato di grande aiuto nelle determinazioni micropaleontologiche, a Benedetto (Bino) Abate e Piero Renda per la collaborazione nel corso del rilevamento e a Giovanna Lo Cicero per la continua e preziosa assistenza. Per lo studio delle carote dei pozzi, infine, ringraziamo il Prof. Marco Pieri (pozzi AGIP) e il Prof. Uberto Crescenti (pozzi Montedison).

BIBLIOGRAFIA

ABATE B., CATALANO R., RENDA P., *Schema strutturale dei Monti di Palermo (Sicilia)*, 69° Congresso Soc. Geol. It., Perugia (riassunto) (1978).

ABATE B., CATALANO R., RENDA P., *Schema geologico dei Monti di Palermo*, Boll. Soc. Geol. It., **98** (1979).

AMODIO MORELLI L., BONARDI G., COLONNA V., DIETRICH D., GIUNTA G., IPPOLITO F., LIGUORI V., LORENZONI S., PAGLIONICO A., PERRONE V., PICCARETTA G., RUSSO M., SCANDONE P., ZANETTIN LORENZONI E., ZUPPETTA A., *L'arco Calabro-Peloritano nell'Orogene Appenninico-Maghrebide*, Mem. Soc. Geol. d'It., XVII, pp. 1-70 (1979).

BERNOULLI D. & JENKINS H. C., *Alpine mediterranean and Central Atlantic mesozoic facies in relation to the early evolution of the Tethys*, SEPM, Sp. Publ., **19**, 129-160 (1974).

BROQUET P., *Etude geologique de la region des Madonies* (Sicile), These, Lille (1968).

BROQUET P., *Etude geologique de la region des Madonies (Sedimentologie et tectonique)*, Geol. Romana, **11**, 1-114 (1972).

BROQUET P., CAIRE A. & MASCLE G., *Structure et évolution de la Sicile Occidentale (Madonie et Sicani)*, Bull. Soc. Geol. de France, S. **7**, 8, 994-1013 (1966).

BROQUET P., DUEE G., MANGANO F. & PRATELLI W., *La nappe du Panormide en Sicile. Precision sur son extension spatiale et son intérêt hydrogeologique*, C. R. Somm. Soc. Geol. France, **7**, 381-383 (1971).

CAFLISCH L. & SCHMIDT DI FRIEDBERG P., *Un contributo delle ricerche petrolifere alla conoscenza del Paleozoico della Sicilia*, Boll. Soc. Geol. It., **86**, 537-551 (1967).

CATALANO R. & D'ARGENIO B., *An essay of palinspastic restoration across the western Sicily*, Geologica Rom., **17**, 145-153 (1978).

CATALANO R., & ESTEBAN M., *Messinian reefs of western and central Sicily*, Intern. Meeting on geodynamic and biodynamic effects of Messinian salinity crisis in the Mediterranean, Roma 1978 (Abstracts) (1978).

CATALANO R., RENDA P., SLACZKA A., *Redeposited gypsum in evaporitic sequence of the Ciminna basin (Sicily)*, In: R. CATALANO, G. RUGGIERI, R. SPROVIERI Ed., Messinian Evaporites in the Mediterranean, Mem. Soc. Geol. It., **16**, 83-93 (1978).

CATALANO R., CRESCENTI U., MONTANARI L., *Reinterpretazione dei pozzi profondi per ricerche di idrocarburi della Sicilia* (in prep.).

CATALANO R., MANIACI G., RENDA P., URSO G., *Un esempio di evoluzione sedimentaria nelle facies di bacino dei Monti di Palermo: la successione mesozoico-terziaria di Cala Rossa (Terrasini)*, Geol. Romana, **12**, 151-175 (1973).

CATALANO R., CHANNELL J. E. T., D'ARGENIO B., NAPOLEONE G., *Mesozoic paleogeography of the southern Apennines and Sicily. Problems of paleotectonic and paleomagnetism*, Mem. Soc. Geol. It., **15**, 95-118 (1977).

CATALANO R., D'ARGENIO B., MONTANARI L., RENDA P., ABATE B., MONTELEONE S., MACALUSO T., PIPITONE G., DI STEFANO E., LO CICERO G., DI STEFANO P., AGNESI V., *Contributi alla conoscenza della struttura della Sicilia occidentale.* 1) *Il profilo Palermo-Sciacca*, 69° Congr. Soc. Geol. It., (riassunto) e Mem. Soc. Geol. It. (in stampa) (1978).

CHANNELL J. E. T., CATALANO R., D'ARGENIO B., *Palaeomagnetism and deformation of the Mesozoic continental margin in Sicily*, Tectonophisic (in stampa) (1979).

D'ARGENIO B., *Le piattaforme carbonatiche periadriatiche. Una rassegna di problemi nel quadro Geodinamico-Mesozoico dell'area Mediterranea*, Mem. Soc. Geol. It., **13**/2, (1976) 28 pp. (1974).

DECIMA A. & WEZEL F., *Osservazioni sulle evaporiti siciliane della Sicilia centro meridionale*, Riv. Min. Sic., 130-132, 172-187 (1971).

DI STEFANO E., CATALANO R., *Biostratigraphy paleoecology and tectonosedimentary evolution of the preevaporitic deposits of the Ciminna basin (Sicily)*, in: CATALANO R., RUGGIERI G., SPROVIERI Eds., Messinian Evaporites in the Mediterranean, Mem. Soc. Geol. It., XVI, pp. 95-110 (1978).

GIUNTA G. & LIGUORI V., *Evoluzione paleotettonica della Sicilia nord-occidentale*, Boll. Soc. Geol. It., **92**, 903-924 (1973).

GRASSO M., LENTINI F., VEZZANI L., *Lineamenti stratigrafico-strutturali delle Madonie (Sicilia centro settentrionale)*, Geol. Romana, **17**, 1978, 45-69 (1978).

LAUBSCHER H. P., *The large scale kinematics of the Western Alps and the Northen Apennines and its palinspastic implications*, Am. J. Sci., **271**, 193-226 (1971).

LO CICERO G. & CATALANO R., *Facies and petrography of some Messinian evaporites of the Ciminna basin (Sicily)*, in: CATALANO R., RUGGIERI G., SPROVIERI R., eds., *Messinian Evaporites in the Mediterraean*, Mem. Soc. Geol. It., XVI, pp. 63-81 (1978).

MASCLE G., *Geological sketch of western Sicily*. In: Alvarez W. & Gohrbandt K. H. A. Eds., Geology and History of Sicily, PESL. Tripoli, 231-243 (1970).

MASCLE G., *Etude geologique des Monti Sicani*, These de Doctorat, Paris (1973).

MONTANARI L., *Geologia dei Monti di Trabia (Sicilia)*, Riv. Min. Sic., **17**, 35-81 (1967).

MONTANARI L., *Materiali per la geologia dell'alto Lercarese*, Boll. Soc. Geol. It., **87**, 132-142 (1968).

OGNIBEN L., *Nota illustrativa dello schema geologico della Sicilia nord-orientale*, Riv. Min. Sic., **64-65**, 1-30 (1960).

RANGIN C., *Contribution à l'étude paleogeographique et structurale des Monts de Termini Imerese (Sicile)*, Bull. Soc. Geol. de France, **17**, 38-51 (1975)).

RUGGIERI G., *Appunti sul Miocene della Sicilia occidentale*, Riv. Min. Sic., **97-99**, 18-24 (1966).

RUGGIERI G., DI VITA G., *L'età della Formazione Lercara*, Boll. Soc. Geol. It., **91**, 4, 631-637 (1972).

RUGGIERI G. & SPROVIERI R., *A revision of Italian Pleistocene Stratigraphy*, Geologica Rom., **16**, 131-139 (1977).

SCANDONE P., GIUNTA G., LIGUORI V., *The connection between the Apulia and the Sahara continental margins in the Southern Apennines and in Sicly*, Mem. Soc. Geol. It., suppl., **13**, 2°, 317-323 (1977).

SCHMIDT DI FRIEDBERG P., *Litostratigrafia petrolifera della Sicilia*, Riv. Min. Sic., **88-90**, 188-217, **91-93**, 50-71 (1964-65).

SCHMIDT DI FRIEDBERG P., BARBIERI F., GIANNINI G., *La geologia del gruppo montuoso delle Madonie (Sicilia centrosettentrionale)*, Boll. Serv. Geol. It., **81**, 73-140 (1960).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci B. D'Argenio, G. Imbò e A. Scherillo.

Le immagini epimorfe di un M_1-piano archimedeo

Nota di PASQUALINA CONTI *
presentata dal socio corrispondente GIANFRANCO PANELLA

(Adunanza del 2 giugno 1979)

SOMMARIO. — Si caratterizzano le immagini epimorfe di un M_1-piano archimedeo.

SUMMARY. — We determine the planes which are epimorphic images of a given archimedean M_1-plane.

INTRODUZIONE

L. PROFERA [4] ha classificato gli M_1-piani ed ha fornito informazioni sul gruppo delle collineazioni di un M_1-piano π [5], descrivendo in dettaglio tale gruppo se si suppone quel piano archimedeo [6].

Noi, qui, classifichiamo i piani proiettivi che sono immagini epimorfe di un M_1-piano archimedeo π; ossia, individuiamo i piani π' che verificano la seguente condizione: esistono applicazioni suriettive f_1, risp. f_2, dai punti, risp. dalle rette, di π ai punti, risp. alle rette, di π' tali che se il punto a di π incide la sua retta A, in conseguenza il punto $f_1(a)$ incide la retta $f_2(A)$ in π'. Stabiliamo, innanzitutto, che i piani π' di tipo precisato (e non isomorfi a π) sono piani proiettivi sopra campi (corpi commutativi); anzi, che il campo delle coordinate di ciascun piano π' è campo residuo di un posto (proprio) di un campo ordinato archimedeo associato canonicamente a π, K_π. Perverremo alla classificazione fornendo condizioni caratterizzanti i posti (propri) di K_π che individuano campi residui atti a fornire coordinate ai piani proiettivi che sono immagini epimorfe di π.

* Istituto di Matematica Politecnico di Torino - Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino.

1. - I POSTI DI UNA CLASSE DI SISTEMI CARTESIANI

Un M_1 sistema $K_f = K_f(+, \circ; <)$ si desume da un corpo ordinato $K = (+, \cdot; <)$ e da una funzione $f : K^- \to K^-$ dagli elementi negativi K^- di K ai suoi elementi negativi, assumendo come insieme sostegno, addizione e ordinamento lineare di K_f quelli del corpo K e definendo $a \circ b = f(a) \cdot b$ se $a, b \in K^-$, $a \circ b = a \cdot b$ altrimenti. Anzi, $K_f = K_f(+, \circ; <)$ è M_1-sistema ([4]; definizione 3) se e solo se sussiste la seguente condizione: f è applicazione biettiva (strettamente) crescente e, se $a, b, c \in K$ con $a < o$, $o \leq b$, $o < c$, esiste uno ed uno solo $x \in K^-$ tale che $f(x) \cdot a = c + x \cdot b$; in tali condizioni, f si dice *funzione di rifrazione* del corpo ordinato K. Un M_1-sistema risulta un sistema cartesiano ordinato [1].

Desideriamo, innanzitutto, studiare i posti di un M_1-sistema, nel senso della seguente definizione derivante dalla teoria dei posti degli anelli ternari fondata da L. A. SKORNJAKOV [7] e rielaborata da J. ANDRÉ [1].

DEFINIZIONE 1. — *Siano* $C(+, \circ)$, $C'(+, \circ)$ *sistemi cartesiani* [2]. *Un posto (proprio) di* $C(+, \circ)$, *con sistema cartesiano residuo* $C'(+, \circ)$, *è un'applicazione suriettiva* $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ *che verifica le condizioni seguenti (nelle quali* $a, b, x, y \in C$*):*

(P_1) $\varphi(o) = o$, $\varphi(1) = 1$;

(P_2) se $\varphi(a), \varphi(b) \neq \infty$ è $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ e $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$;

(P_3) se $\varphi(a) \neq \infty, \varphi(b) = \infty$ è $\varphi(a + b) = \varphi(b + a) = \infty$;

(P_4) se $\varphi(a) \neq o$, $\varphi(b) = \infty$ è $\varphi(a \circ b) = \varphi(b \circ a) = \infty$;

(P_5) se $\varphi(x) = \infty$, $\varphi(-a \circ x + b \circ x) \neq \infty$ è $\varphi(a) = \varphi(b)$;

(P_6) se $\varphi(a) = \infty, \varphi(a \circ x - a \circ y) \neq \infty$ è $\varphi(x) = \varphi(y)$;

(P_7) se $b \circ x + a \circ y = a \circ x$, $\varphi(a) = \varphi(x) = \varphi(b \circ x) = \varphi(a \circ y) = \infty$ deve risultare $\varphi(b) = \infty$ oppure $\varphi(y) = \infty$.

[1] Gli M_1-sistemi ed i piani da essi individuati sono stati ampiamente studiati in [4]: i risultati lì stabiliti saranno da noi tenuti presenti, ora e nel seguito rinviando, poi, a G. PICKERT [3] per ulteriori informazioni. Qui ci limitiamo a ricordare che $C(+, \circ)$ è *sistema cartesiano* se: 1) $C(+)$ è un gruppo (con elemento neutro o); 2) $\circ$ è operazione interna ovunque definita in C; 3) $o \circ x = x \circ o = o$ se $x \in C$; 4) esiste $1 \in C$, $1 \neq o$, tale che $x \circ 1 = 1 \circ x = x$; 5) se $a, b, c \in C$ e $a \neq b$ esiste uno ed uno solo $x \in C$, risp. $y \in C$, tale che $-a \circ x + b \circ x = c$, risp. $y \circ a - y \circ b = c$. Se $<$ è ordinamento lineare di C, $C(+, \circ; <)$ è sistema cartesiano ordinato se $C(+; <)$ è gruppo ordinato e se con $a, b, c \in C$, $a < b$, $c < d$ si ha $a \circ d - a \circ c < b \circ d - b \circ c$.

[2] Nel seguito avremo a che fare, contemporaneamente, con più sistemi cartesiani; indicheremo, talvolta, con $x \circ y$ il prodotto dei loro elementi, tenuto conto che l'identità di scrittura non potrà provocare equivoci. Riserveremo la scrittura xy al caso in cui il sistema cartesiano che si considera è, per ipotesi, un corpo.

LEMMA 1. — *Siano* $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ *un posto (proprio) del sistema cartesiano ordinato* $C = C(+, \circ; <)$ *ed* $x' \in C'$ *o* $x' = \infty$. *Se il sistema cartesiano ordinato* $C = C(+, \circ; <)$ *è archimedeo, ossia se* $C(+; <)$ *è gruppo ordinato archimedeo, fissato* $a \in C$, *esistono* $p, q \in C$, *con* $p < a < q$, *tali che* $\varphi(p) = \varphi(q) = x'$.

Dimostrazione. — Sia $y \in C, y$ non nullo, per cui $\varphi(y) = o = \varphi(-y)$[3] e sia $z \in C$ per cui $\varphi(z) = x'$. Il gruppo additivo ordinato sostegno del sistema cartesiano ordinato C è archimedeo, quindi esistono n ed n' interi tali che $p = z + n\,y < a$ e $q = z + n'\,y > a$. Da qui e dalla definizione 1, per la (P_2) se $x' \in C'$ e per la (P_3) se $x' = \infty$, discende $\varphi(p) = \varphi(q) = x'$.

LEMMA 2. — *Se* $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto dell'*M_1*-sistema archimedeo* $C = K_f = K_f(+, \circ; <)$, C' *è corpo.*

Dimostrazione. — Siano $a', b', c' \in C'$, $a, b, c \in C$ tali che $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ e $\varphi(c) = c'$. Si può supporre a $> o$ per il lemma 1; risulta $a' \cdot (b' + c') = \varphi(a) \cdot (\varphi(b) + \varphi(c)) = \varphi(a) \cdot \varphi(b + c) = \varphi(a \cdot (b + c)) = \varphi(a \cdot b + a \cdot c) = a' \cdot b' + a' \cdot c'$.

Analogamente si verificano le ulteriori condizioni che caratterizzano un corpo e si conclude.

Con il seguente teorema si individuano i posti di un corpo ordinato archimedeo $K = K(+, \cdot; <)$ che definiscono i posti dell'M_1-sistema $C = K_f = K_f(+, \circ; <)$ desunto da K e dalla sua funzione di rifrazione f (quanto affermato ha senso poiché $K = C$ come insiemi).

TEOREMA 1. — *Siano* $K = K(+, \cdot; <)$ *un corpo ordinato archimedeo,* $C = K_f = K_f(+, \circ; <)$ *l'*M_1*-sistema desunto dal corpo ordinato* K *e dalla sua funzione di rifrazione* f, $\varphi : K \to C' \cup \{\infty\}$ *un posto (proprio) del corpo ordinato* K *per il quale risulti, se* $x \in K$, $x < o$, $\varphi(x) = \varphi f(x)$ *e* $\varphi(x^{-1} f(x)) = 1$ *se* $x < o$ *e* $\varphi(x) = \infty$. *Con tali dati l'applicazione* $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto di* C; *anzi, in tal modo, si definisce ogni posto (proprio) dell'*M_1*-sistema* $C = K_f$.

Dimostrazione. — Poiché $K_f = K$ come gruppi additivi ordinati, se φ è posto del corpo K tale che $\varphi(x) = \varphi f(x)$ se $x \in K^-$, per l'applicazione $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ valgono, evidentemente, le condizioni $(P_1) \ldots (P_5)$ della definizione 1. Per provare che φ è anche posto di C basterà, allora, verificare le (P_6) e (P_7) di tale definizione. Proviamo,

[3] Un tale y esiste: infatti se $x \in C$ e $\varphi(x) = \infty$ sia $y \in C$ tale che $x \circ y = 1$. È $y \neq o$ e $\varphi(x \circ y) = 1$ per cui, per la (P_4), $\varphi(y) = o$.

dunque, la (P_6) e, cioè, che se $x, y \in K_f$, $\varphi(a \circ x - a \circ y) \neq \infty$ e $\varphi(a) = \infty$ risulta $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Dobbiamo discutere i casi in cui è $a < o$ ed x, y non sono contemporaneamente positivi. Supponiamo $a, x < o$ e $o \leq y$ (la possibilità $a, y < o$ e $o \leq x$ si discute in modo analogo); se $y = o$, per la (P_1) $\varphi(y) = o$ e, quindi $\varphi(x) = o$ essendo $\infty \neq \varphi(a \circ x)$ e $\varphi(a) = \infty$. Sia, allora, $y \neq o$; posto $a^{-1} f(a) = k(a)$, risulta $\varphi(a \circ x - a \circ y) = \varphi(f(a) x - a y) = \varphi(a k(a) x - a y) \neq \infty$ e valendo la (P_6) per φ posto di K, $\varphi(k(a) x) = \varphi(y)$. Se $\varphi(x) = \infty$ da $\varphi(k(a)) = \varphi(a^{-1} f(a)) = 1 \neq o$ per ipotesi e dalla (P_4), si ricava $\varphi(k(a) x) = \infty = \varphi(y)$; se, invece, $\varphi(x) \neq \infty$, si ottiene $\varphi(k(a) x) = \varphi(k(a)) \cdot \varphi(x) = 1 \cdot \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(y)$ e, cioè, la (P_6).

Rimane, pertanto, da stabilire che φ verifica la (P_7); tale verifica si esegue con una dimostrazione analoga a quella data da C. Bartolone in [2] (lemma 2) e si conclude che φ risulta un posto di $C = K_f$.

Si supponga, ora, che $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ sia un posto dell'M_1-sistema $C = K_f(+, \circ; <)$ desunto dal corpo ordinato archimedeo $K = K(+, \cdot; <)$ e dalla sua funzione di rifrazione f; per il lemma 2 il sistema cartesiano C' risulta un corpo. Inoltre, per $x < o$ risulta $f(x) = -(x \circ (-1))$ e, se $\varphi(x) = \infty$, si ha $-\varphi(f(x)) = \varphi(x \circ (-1)) = \infty$; se, invece, $\varphi(x) \neq \infty$ si ha $-\varphi(f(x)) = \varphi(x \circ (-1)) = \varphi(x) \cdot \varphi(-1) = -\varphi(x)$. In ogni caso, dunque, $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$.

Proviamo, ora, che se $x < o$ e $\varphi(x) = \infty$ risulta $\varphi(x^{-1} \cdot f(x)) = 1$. Per il lemma 1 esiste $a < x$, $a \in K_f$, tale che $\varphi(a) \neq o, \infty$. Da $a < x$ segue $x \circ a < a \circ a$ e, posto $x \circ a - a \circ a = s < o$, se b è tale che $s = x \circ b$, risulta $x \circ a - x \circ b = a \circ a$ che conduce a $\varphi(x \circ a - x \circ b) \neq o, \infty$. Ricordando che $\varphi(x) = \infty$ e che vale la (P_5) in C si ottiene $\varphi(a) = \varphi(b)$.

D'altra parte, essendo $\varphi(x \circ a - x \circ b) = \varphi(x k(x) a - x b) = \varphi((-x) \circ (b - k(x) a)$ e $\varphi((-x)) = \infty$ si ottiene anche $\varphi(b) = \varphi(k(x) a)$. Dunque $\varphi(k(x)) = 1$ e, cioè, l'asserto.

Per concludere proviamo che $\varphi : K \to C' \cup \{\infty\}$ è un posto del corpo K e, cioè, che verifica le condizioni $(P_1) \ldots (P_4)$ della definizione 1.

Poiché $K_f(+; <) = K(+; <)$ in quanto gruppi additivi ordinati e $a b = a \circ b$ se $a, b \in K$ e non sono contemporaneamente negativi, per ottenere quanto dovuto sono sufficienti le due verifiche che seguono

Siano $a, b \in K$; con $a, b < o$ è $\varphi(a b) = \varphi(a) \varphi(b)$ se $\varphi(a) \neq \infty \neq \varphi(b)$. Infatti, osservato che da $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$ discende $\varphi(f^{-1}(x)) = \varphi(x)$, si ha $\varphi(a b) = \varphi(f^{-1}(a) \circ b) = \varphi(f^{-1}(a)) \varphi(b) = \varphi(a) \varphi(b)$. Inoltre, se $a, b \in K$, $a, b < o$ $\varphi(a) \neq o$, $\varphi(b) = \infty$ risulta $\varphi(a b) = \varphi(b a) = \infty$ poiché, diversamente, $\varphi(a b) \neq \infty$ condurrebbe a $\varphi(a b) = -\varphi(a(-b)) = -\varphi(a \circ (-b)) \neq \infty$ contro la (P_4) valida

per il posto φ dell'M_1-sistema $C = K_f(+, \circ; <)$. Il teorema è, così, compiutamente dimostrato.

L'M_1-sistema $K_f = K_f(+, \circ; <)$, oggetto del teorema precedente, fornisce coordinate ad un M_1-piano (affine) π: infatti, prendendo come insieme di punti (propri) $\mathbb{P} = \{(x, y) \mid x, y \in K_f\} = K_f \times K_f$ e come insieme delle rette (proprie) $\mathbb{R} = \{[m, b], [c]; m, b, c \in K_f\}$ dove $[m, b] = \{(x, y) \mid y = m \circ x + b\}$, $[c] = \{(x, y) \mid x = c\}$, si ottiene un piano affine coordinatizzato da $K_f(+, \circ; <)$ nel riferimento (affine) $\mathfrak{R} = (o, u, v, e)$ essendo $o = (o, o)$, $e = (1, 1)$, u la direzione della retta $[o, o]$ e v la direzione della retta $[o]$. Se, ora, si considerano i punti di π $\omega_{\mathfrak{R}} = (1, o)$[4], $\eta_{\mathfrak{R}} = (\alpha, 1)$ con $\alpha \in K_f$ e $1 < \alpha$ si ottiene un riferimento di π $\mathfrak{R}_\alpha = (\omega, u, v, \eta)$. In proposito sussiste il

LEMMA 3. — *Il sistema cartesiano ordinato* $C_\alpha = C_\alpha(\oplus, *; <)$ *che fornisce coordinate a* π *nel riferimento* $\mathfrak{R}_\alpha$ *ha un gruppo (abeliano) additivo sostegno* $C_\alpha(\oplus; <)$ *che è isomorfo, in quanto gruppo ordinato, a* $K(+; <)$. *Anzi, identificando* $C_\alpha(\oplus; <)$ *con* $K(+; <)$ *mediante un opportuno isomorfismo ordinato risulta, se* $t = \alpha - 1$ *e* $a, b \in C_\alpha = K$, $a * b = f(a\,t^{-1})\,t\,b + f(a\,t^{-1}) - a\,t^{-1}$, *se* $a < o$ *e* $b < -t^{-1}$, $a * b = a\,b$ *altrimenti.*

Dimostrazione. — Siano (o, a_1) un punto di $\omega + v$ (con $a_1 \in C_\alpha$) scritto nelle coordinate che gli competono in relazione al riferimento $\mathfrak{R}_\alpha$ ed $h(a_1) = a$ l'elemento di $C = K_f$ definito pretendendo che $(1, a)$ rappresenti il medesimo punto nelle coordinate desunte dal riferimento $\mathfrak{R}$: in tal modo è definita un'applicazione biettiva h: $C_\alpha \to K_f$. Tenuto conto che $\eta_{\mathfrak{R}} = (\alpha, 1)$ ed usufruendo delle operazioni grafiche che definiscono l'addizione e la moltiplicazione di $C_\alpha(+, *; <)$ si prova che risulta, se $a_1, b_1 \in C_\alpha$,

$$h(a_1 \oplus b_1) = a + b = h(a_1) + h(b_1)$$

$$h(a_1 * b_1) = a(\alpha - 1)^{-1} \circ (\alpha - 1)(b + (\alpha - 1)^{-1}) - a(\alpha - 1)^{-1}.$$

Pertanto, i gruppi additivi $C_\alpha(\oplus; <)$ e $K_f(+; <) = K(+; <)$ risultano isomorfi e la struttura $K'(+, *'; <)$ individuata dall'insieme

[4] Qui e nel seguito scriveremo $p_{\mathfrak{R}} = (x, y)$ se p ha coordinate (x, y) nel riferimento $\mathfrak{R}$.

[5] Si tenga presente che se $C_\alpha(\oplus, *; <)$ è il sistema delle coordinate di π nel riferimento $\mathfrak{R}_\alpha = (\omega, u, v, \alpha)$ e se $a_1, b_1 \in \omega + v$ con $a_1, b_1 \neq v$, i punti $c_1, d_1 \in \omega + v$ che, in quel riferimento, hanno come ordinata rispettivamente la somma ed il prodotto delle ordinate del punto a_1 e del punto b_1 si ottengono con le seguenti costruzioni grafiche (ove si ponga $w_1 = (\omega + \eta) \cap (u + v)$): se $t_1 = (\omega + w_1) \cap (a_1 + u)$, $s_1 = (t_1 + v) \cap (b_1 + w_1)$ risulta $c_1 = (s_1 + u) \cap (\omega + v)$; se $m_1 = (a_1 + u) \cap (\eta + v)$, $q_1 = (b_1 + u) \cap (\omega + \eta)$, $r_1 = (\omega + m) \cap (q_1 + v)$ risulta $d_1 = (r_1 + u) \cap (w + v)$.

sostegno ordinato e dall'addizione del corpo $K(+, \cdot; <)$ e dalla moltiplicazione $*'$ definita da

$$a *' b = h(a_1) *' h(b_1) = h(a_1 * b_1)$$

risulta isomorfa al sistema cartesiano C_α e, quindi, anch'essa sistema cartesiano. Lo studio del sistema cartesiano C_α si può, dunque, ricondurre allo studio della struttura $K'(+, *'; <)$, che si può ritenere, per il seguito, dotata dello stesso ordinamento del corpo $K(+, \cdot; <)$. Poiché $K(+; <) = K'(+; <)$, resta da analizzare il prodotto $*'$; per questo, dalla definizione della h, segue subito $a *' b = f(a\,t^{-1})\,t\,b + f(a\,t^{-1}) - a\,t^{-1}$ se $a < o$ e $b < -t^{-1}$ e $a *' b = a\,b$ in tutti gli altri casi.

Per il seguito, è essenziale avere opportune informazioni relative ai posti (propri) del sistema cartesiano $C_\alpha = C_\alpha(\oplus, *; <)$ che è ordinato archimedeo: infatti, per il lemma precedente, $C_\alpha(\oplus; <)$ è gruppo abeliano ordinato archimedeo come $K(+; <)$. Con le notazioni del lemma 3, riassumiamo tali informazioni nei lemmi che seguono, dopo aver deciso di porre $f'(x) = f(x\,t^{-1})\,t$ se $x \in K$ e $x < o$, e di identificare, secondo quanto precisato nella dimostrazione del lemma 3, $C_\alpha(\oplus; <)$ con $K(+; <)$.

LEMMA 4. — *Se* $\varphi : C_\alpha \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto (proprio) del sistema cartesiano* $C_\alpha = C_\alpha(\oplus, *; <)$ *risulta*:

(1) $\varphi(a) = \varphi(f'(a))$ se $a < o$ e $a \in C_\alpha$,

(2) $\varphi(k(a)) = 1$ se $k(a) = a^{-1} f'(a)$ con $a \in C_\alpha$, $a < o$ e $\varphi(f'(a)) \neq o$.

Dimostrazione. — Sia $c' \in C'$, $a \in C_\alpha$ e $a < o$; esiste $b < -t^{-1}$ tale che $c' = \varphi(a * b)$[6]. Se $\varphi(a) = o$ per ogni b tale che $\varphi(b) \neq \infty$ risulta $c' = o$. Poiché $\varphi(a * b) = \varphi((-a) * (-b)) = o$ da $c' = \varphi(a * b) = \varphi((-f'(a) + a) * (-b - t^{-1}) + (-a) * (-b))$ segue $\varphi((-f'(a) + a) * (-b - t^{-1})) = o$. Se $\varphi(t^{-1}) \neq \infty$, scelto $\varphi(b) \neq -\varphi(t^{-1})$, risulta $\varphi(b + t^{-1}) \neq o$ e, quindi, per la (P_4) della definizione 1, $\varphi(f'(a) - a) = o$ e, cioè, $\varphi(a) = \varphi(f'(a)) = o$. Se $\varphi(t^{-1}) = \infty$ risulta per la (P_3) della stessa definizione, $\varphi(b + t^{-1}) = \infty$ ed, ancora per la (P_4), $\varphi(a) = \varphi(f'(a)) = o$.

Con $\varphi(a) = \infty$ è $\varphi(b) = o$ e non può risultare $\varphi(f'(a)) \neq \infty$. In tal caso, infatti, risulterebbe $\varphi((-f'(a) * (-b)) = o$ e, per la (P_3),

[6] Infatti, se $c > o$ con $\varphi(c) = c'$ e $b < -t^{-1}$ tali che $c = a * b$ risulta $c = f'(a)\,b + f'(a)\,t^{-1} - a\,t^{-1}$ per cui $b = f'^{-1}(a)\,(c + a\,t^{-1} - f'(a)\,t^{-1})$.

$\varphi(f'(a) - a) = \infty$. Da $c' = \varphi(a * b) = \varphi(-f'(a) * (-b) + (f'(a) - a) * t^{-1})$ seguirebbe $c' = \varphi((f'(a) - a) * t^{-1})$ e, quindi, per la (P_4) $\varphi(t^{-1}) = o$. Da qui, potendosi scrivere $c' = \varphi((-f'(a)) * (-b - t^{-1}) - a * t^{-1})$ ed essendo $\varphi((-f'(a)) * (-b - t^{-1})) = o$, seguirebbe, infine, $c' = \varphi(-a * t^{-1})$ che condurrebbe all'assurdo $o = 1$ scegliendo $c' = o$ e $c' = 1$.

Dunque, qualunque sia il valore di $\varphi(t^{-1})$ se $\varphi(a) = \infty$ è $\varphi(f'(a)) = \infty$. Se $\varphi(a) \neq o, \infty$ è $\varphi(f'(a)) \neq \infty$. Infatti, per $\varphi(f'(a)) = \infty$, sarebbe, per la (P_3) $\varphi(f'(a) - a) = \infty$; da $c' = \varphi(a * b) = \varphi((f'(a) - a) * t^{-1} - (f'(a) - a) * (-b) + (-a) * (-b))$ e da $\varphi(b) \neq \infty$, e, quindi $\varphi((-a) * (-b)) \neq \infty$, seguirebbe, allora, $\varphi(f'(a) - a) * t^{-1} - (f'(a) - a) * (-b)) \neq \infty$ e, pertanto, la (P_6), $\varphi(t^{-1}) = \varphi(-b) \neq \infty$. Da qui, in ogni caso, si giungerebbe ad un assurdo, poiché per $\varphi(t^{-1}) = o$, scelto $c' \neq o$, risulterebbe $\varphi(b) \neq o$ e, quindi, $o = \varphi(t^{-1}) = \varphi(-b) \neq o$ e per $\varphi(t^{-1}) \neq o, \infty$, scelto $c' = o$, risulterebbe $\varphi(b) = o$ e quindi, $o \neq \varphi(t^{-1}) = \varphi(-b) = o$.

Dunque, $\varphi(a) \neq o, \infty$ implica $\varphi(f'(a)) \neq \infty$. Scelto, allora, $c' = o$, con $\varphi(a) \neq o, \infty$, risulta $\varphi(b) = o$ e, quindi, $o = \varphi((-f'(a) * (-b) + (f'(a) - a) * t^{-1}) = \varphi((f'(a) - a) * t^{-1})$; se $\varphi(t^{-1}) = \infty$, $\varphi(f'(a) - a) = o$ per la (P_4), per cui $\varphi(a) = \varphi(f'(a))$. Se $\varphi(t^{-1}) \neq o, \infty$, $o = \varphi((f'(a) - a) * t^{-1}) = \varphi(f'(a))\varphi(t^{-1}) - \varphi(a)\varphi(t^{-1})$ e, quindi, ancora $\varphi(f'(a)) = \varphi(a)$. Infine se $\varphi(t^{-1}) = o$ scelto $c' \neq o$, risulta $\varphi(b) \neq o$ e, pertanto, $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a * b) = \varphi((-f'(a)) * (-b) + (f'(a) - a) * t^{-1}) = \varphi((-f'(a)) * (-b)) = (-\varphi(f'(a))(-\varphi(b)) = \varphi(f'(a))\varphi(b)$ e, dunque, ancora $\varphi(a) = \varphi(f'(a))$.

(2) Se $\varphi(x) = \varphi(f'(x)) \neq o, \infty$ risulta $\varphi(k(x)) \neq \infty$ poiché $f'(x) = xk(x)$; da qui $\varphi(f'(x)) = \varphi(xk(x)) = \varphi(x)\varphi(k(x))$ e, cioè $\varphi(k(x)) = 1$.

Supponiamo, ora, $\varphi(x) = \varphi(f'(x)) = \infty$.

Per il lemma 1 e per l'archimedeicità di C esiste $a < -t^{-1}, x$ tale che $\varphi(a) \neq \infty$. Risulta, perciò, $a * a > x * a$ e $x * a - a * a = s < o$. Se b è tale che $s = x * b$ risulta $x * a - x * b = a * a$ con $\varphi(x * a - x * b) \neq \infty$; quindi, per la (P_6) $\varphi(a) = \varphi(b)$ essendo $\varphi(x) = \infty$ per ipotesi.

D'altra parte, potendosi scrivere $\infty \neq \varphi(x * a - x * b) = \varphi(f'(x)a + f'(x)t^{-1} - xt^{-1} - xb) = \varphi((-x)(b + t^{-1}) - (-x)(k(x)(t^{-1} + a)) = \varphi((-x) * (b + t^{-1} - k(x)(a + t^{-1}))$ con $\varphi(-x) = \infty$ segue anche $\varphi(k(x) * (a + t^{-1}) - (b + t^{-1})) = o$.

Se $\varphi(t^{-1}) \neq o, \infty$, scelto a tale che $\varphi(a) = o$ risulta $\varphi(a + t^{-1}) = \varphi(b + t^{-1}) = \varphi(t^{-1}) \neq o, \infty$ e, quindi, $\varphi(k(x)) = 1$.

Se $\varphi(t^{-1}) = o$ scelto a tale che $\varphi(a) \neq o$ risulta $\varphi(a + t^{-1}) = \varphi(b + t^{-1}) = \varphi(a) = \varphi(b) \neq o, \infty$ e, quindi, anche $\varphi(k(x)) = 1$.

Se $\varphi(t^{-1}) = \infty$ non può risultare $\varphi(k(x)) = \infty$. In tal caso, infatti, posto $c = k(x)\,t^{-1} + k(x)\,a - b - t^{-1}$ ed esistendo $\bar{b}$ tale che $\bar{b} * t^{-1} = c + b + t^{-1}$, risulterebbe $\bar{b} * t^{-1} + k(x) * (-a) = k(x) * t^{-1}$ con $\varphi(t^{-1}) = \varphi(k(x)) = \varphi(k(x) * (-a)) = \varphi(\bar{b} * t^{-1}) = \infty$ se si sceglie $\varphi(a) \neq o, \infty$. Da qui per la (P_7) della definizione di posto, seguirebbe $\varphi(\bar{b}) = \varphi((c + b)\,t + 1) = \infty$ e, cioè, per la (P_3), $\varphi((c + b) * * t) = \infty$ che condurrebbe all'assurdo $\varphi(t) = \infty$ essendo $\varphi(c + b) = = \varphi(b) = \varphi(a) \neq o, \infty$.

Dunque, è $\varphi(k(x) \neq \infty$ e, quindi, $\varphi(k(x)) * a - b) \neq \infty$. Da qui e da $o = \varphi(c) = \varphi((k(x) - 1) * t^{-1} + k(x) * a - b) \neq \infty$ segue allora, per la (P_3), $\varphi((k(x) - 1) * t^{-1}) \neq \infty$ che con $\varphi(t^{-1}) = \infty$ conduce a $\varphi(k(x)) = 1$ e, cioè, l'asserto.

LEMMA 5. — *Se* $\varphi : C_\alpha \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto del sistema cartesiano* $C_\alpha(\oplus, *; <)$, $\varphi : K \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto del corpo* $K(+, \cdot; <)$.

Dimostrazione. — Poiché $C_\alpha(\oplus; <) = K(+; <)$ in quanto gruppi additivi ordinati e si ha $a * b = a\,b$ se $a, b \in K = C_\alpha$ e non risulta contemporaneamente $a < o$, $b < -t^{-1}$, per ottenere quanto dovuto sono sufficienti le verifiche che seguono, tenedo conto che, in conseguenza del lemma 1, C' è un corpo.

Siano, $a, b \in K$ con $a < o$, $b < -t^{-1}$; è $\varphi(a\,b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ se $\varphi(a), \varphi(b) \neq \infty$. Infatti, è $\varphi(a\,b) = \varphi((-a) * (-b)) \neq \infty$ per le (P_2) in C_α e, quindi, $\varphi(a\,b) = -\varphi(-a\,b) = -\varphi((-a) * b) = -(\varphi(-a)\,\varphi(b)) = \varphi(a)\,\varphi(b)$.

Siano $a, b \in K$, $a < o$ e $b < -t^{-1}$: è $\varphi(a\,b) = \infty$ se $\varphi(a) \neq o$ e $\varphi(b) = \infty$.

Diversamente, infatti, si avrebbe, per quanto osservato, $\varphi(a\,b) = = -\varphi(-a \cdot b) = -\varphi((-a) * b) \neq \infty$ con $\varphi(a) \neq o \neq \varphi(-a)$ e $\varphi(b) = \infty$ contro la (P_4) valida in C_α.

Analogamente si prova che se $a, b \in K$ con $a < -t^{-1}$ *e* $b < o$ risulta $\varphi(b\,a) = \infty$ se $\varphi(a) \neq o$ e $\varphi(b) = \infty$ [7].

2. - LE IMMAGINI EPIMORFE

Per il seguito, fissiamo i seguenti dati:

(a) π *è un piano proiettivo ordinato archimedeo che risulta* M_1*-piano* rispetto alla sua terna di punti non allineati (o, u, v) e rela-

[7] Il corpo K, ordinato e archimedeo, è commutativo; pertanto questa ultima verifica è inessenziale. Ma qui e nel seguito eviteremo, quando sarà possibile, di sfruttare la commutatività di K, poiché il problema che risolviamo in questo lavoro si pone, più in generale, per gli M_1-piani non archimedei.

tivamente a ρ_{uv} segmento di estremi u e v ($u\,v \in \rho_{uv}$) fissato tra i due possibili.

Con la (a) trasportiamo a livello proiettivo le definizioni e i risultati che in [4] sono illustrati a livello affine (allora u e v sono direzioni). In particolare, penseremo sempre π individuato mediante coordinate rispetto a

(b) $\mathcal{R} = (o, u, v, e)$ (*che*) *è* M_1*-riferimento di* π; *ossia, il sistema cartesiano ordinato* che fornisce coordinate a π in quel riferimento è M_1-sistema $K_f = K_f(+, \circ; <)$ desunto dal corpo ordinato $K = K(+, \cdot; <)$ e dalla sua funzione di rifrazione f, secondo quanto precisato all'inizio del n. 1. Si noti che, poiché π è archimedeo, $K(+; <)$ è gruppo abeliano archimedeo.

In relazione alla (b) è bene ricordare che il sistema delle coordinate di π rispetto al suo riferimento (o', u', v', e') è *sistema cartesiano ordinato* $C(+, \circ; <)$ se e solo se $v' = v$, $u' \in u + v$[8]; in tal caso, $C(+, \circ; <)$ è M_1-sistema se $u' \in \rho_{uv}$, $o' \in o + v$, $w = (o + e) \cap (u + v) \in \rho_{uv}$ e risulta $u' = u$ oppure le coppie di punti v, u' e w, u si separano (sulla retta $u + v$) in relazione all'ordinamento di π.

(c) un piano proiettivo π' e un epimorfismo

$$\psi : \pi \to \pi'$$

rinviando a J. ANDRÉ [1] per definizioni e risultati in merito.

In relazione alla (c) ricordiamo che ψ è definito da una applicazione suriettiva f_1 dai punti, di π ai punti di π', da una applicazione suriettiva f_2 dalle rette di π alle rette di π' con la condizione: se il punto a di π incide la retta A di π allora il punto $f_1(a)$ incide la retta $f_2(A)$ in π'. Per compattezza di scrittura, se $\chi : \Pi \to \Pi'$ è epimorfismo porremo $\chi = f_1 = f_2$ e $\chi(a)$, risp. $\chi(A)$, indicherà *il* punto, risp. la retta, di π' trasformato dal punto a di π, risp. trasformata della retta A di π, nell'epimorfismo χ.

Se $(\omega, \sigma, \nu, \eta)$ è un riferimento di π che gli fornisce coordinate desunte dal sistema cartesiano $C(+, \circ)$ e se $(\psi(\omega), \psi(\sigma), \psi(\nu), \psi(\eta))$ è riferimento di π', in tale riferimento π' assume coordinate da un sistema cartesiano $C'(+, \circ)$ e $\psi : \pi \to \pi'$ definisce un posto $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ che risulta proprio se ψ non è un isomorfismo; anzi, i riferimenti considerati e il posto φ individuano l'epimorfismo ψ.

LEMMA 6. — *In relazione all'epimorfismo* $\psi : \pi \to \pi'$ *esistono due punti* p *e* q *della retta* $u + v$ *e appartenenti al suo segmento* ρ_{uv} *tali che* $\psi(v) \neq \psi(p) \neq \psi(q) \neq \psi(v)$.

[8] Con a, b punti di π (distinti) $a + b$ è la retta che li congiunge; se A, B sono rette distinte di π $A \cap B$ è il loro punto comune.

Dimostrazione. — È sufficiente provare l'esistenza di almeno un punto che verifica le condizioni del lemma. Si considerino, perciò, il riferimento $\mathfrak{R} = (\bar{o}, p, v, \bar{e})$ con $p \in u + v$, associato in ψ al riferimento $\mathfrak{R}' (= (\psi(\bar{o}), \psi(p), \psi(v), \psi(\bar{e}))$ di π', $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ il posto, subordinato dell'epimorfismo ψ, da $C = C(+, \circ; <)$, sistema cartesiano ordinato che fornisce le coordinate a π in $\mathfrak{R}$, a $C' = C'(+, \circ; <)$, sistema cartesiano che fornisce coordinate a π'.

Negando l'asserto sarebbe, se $u_{\mathfrak{R}} = (m) (m > o)$:

1) $\varphi(x) = \infty$ se $m \leq x$, $x \in C$

2) $\varphi(x) = o$ se $o \leq x < m^{-1}$, $x \in C$.

Scelto allora $a \in C$, con $o \leq a < m^{-1}$, e, tenuto conto dell'archimedeicità di C, esisterebbe n intero naturale tale che $m < n\,a$ e, quindi, per la 1) $\varphi(n\,a) = \infty$ mentre, contemporaneamente, per la (P_2) della definizione di posto $\varphi(n\,a) = o$.

L'esistenza, poi, di un altro punto q verificante le medesime condizioni del punto p si prova ripetendo la dimostrazione dianzi seguita a meno di uno scambio dei punti p, risp. u, con i punti q, risp. p.

LEMMA 7. — *Nell'epimorfismo* $\psi : \pi \to \pi'$ *si abbia* $\psi(o + v) \neq \psi(u + v)$. *È possibile determinare un epimorfismo* $\chi : \pi \to \pi'$ *che ha come immagine il medesimo piano proiettivo* π' *e un* M_1*-riferimento* (o, σ, v, η) *di* π *in modo che* $(\chi(o), \chi(\sigma), \chi(v), \chi(\eta))$ *sia riferimento di* π' *e, nelle coordinate di* π *desunte dal riferimento* (o, u, v, e), *si abbia* $\sigma = (m)$, $\eta = (t, 1)$ *con* $o \leq m < t^{-1} < 1$.

Dimostrazione. — Tenuto conto del lemma 6, si fissino i punti $p, q \in \rho_{uv}$, $p \neq v \neq q$, per i quali $\psi(p) \neq \psi(v) \neq \psi(q)$, mentre uno di tali punti può coincidere con u se $\psi(u) \neq \psi(v)$. Esiste $o' \in o + v$ con $\psi(o') \notin \psi(u + v)$ poiché $\psi(o + v) \neq \psi(u + v)$. La $(v, u + v)$-omologia che trasforma o in o' definisce un'applicazione biettiva tra i punti di π e un'applicazione biettiva tra le sue rette: componendo tali applicazioni biettive con l'epimorfismo ψ si ha un epimorfismo da π a π' nel quale l'immagine di o non appartiene all'immagine della retta $u + v$ e che trasforma i punti v, p, q in $\psi(v)$, $\psi(p)$, $\psi(q)$ rispettivamente. Si supponga $q = u$ oppure, se $q \neq u \neq p$, che le coppie di punti v, q e p, u si separino nell'ordinamento di π: è $q = (m)$, $p = (t^{-1})$ in coordinate desunte dal riferimento (o, u, v, e) e risulta $o \leq m < t^{-1}$. Ne deriva che, se $\bar{\eta}$ è un punto della retta $o + p$ e se $\psi(o) \neq \psi(\bar{\eta}) \neq \psi(p)$, è individuato l'$M_1$riferimento di π $(o, \sigma, v, \bar{\eta})$ assumendo $\sigma = q$ e che $(\psi(o), \psi(\sigma), \psi(v), \psi(\bar{\eta}))$ è riferimento di π'; nelle coordinate desunte da (o, u, v, e) risulta $\bar{\eta} = (\beta, t^{-1} \circ \beta)$. Non è restrittivo suppor-

re $\beta > o$ poiché, se così non fosse, tutti i punti di un segmento di π appartenenti a $o + p$ e con estremi o e p avrebbero immagine, in ψ, il punto $\psi(o)$ oppure il punto $\psi(p) \in \psi(u + v)$: tale possibilità è assurda, poiché se $C = C(+, \circ; <)$ è l'M_1-sistema delle coordinate di π nel riferimenti $(o, \sigma, v, \bar{\eta})$ e $C' = C'(+, \circ)$ il sistema cartesiano delle coordinate di π' nel riferimento $(\psi(o), \psi(\sigma), \psi(v), \psi(\bar{\eta}))$, l'epimorfismo $\varphi : \pi \to \pi'$ si descriverebbe mediante un posto (proprio) $\varphi : C \to C' \cup \{\infty\}$ nel quale risulterebbe $\varphi(x) = o$, ∞ se $x \in C$ e $x < o$; infatti, in quel sistema di coordinate la retta $o + p$ è $\{(x,x), x \in C\} \cup \{p\}$ e il suo segmento che non contiene $\bar{\eta}$ è $\{(x, x) \mid x \in C, x < o\} \cup p$. Si può supporre $t < 1$.

Notoriamente [4], $(x, y) \to (x\, t^{-1}\beta, y\, t^{-1}\beta)$, $(m) \to (m)$, $v \to v$ è un'applicazione biettiva dei punti di π ai punti di π desunta da una sua dilatazione; tale applicazione individua un'applicazione biettiva dalle rette alle rette di π. Componendo tali applicazioni con ψ si ottiene un epimorfismo $\chi : \pi \to \pi'$ e risulta: $\chi(o) = \psi(o)$, $\chi(\sigma) = \psi(\sigma)$, $\chi(v) = \psi(v)$, $\chi(t, 1) = \psi(\beta, t^{-1}\beta) = \psi(\bar{\eta})$ e con $\eta = (t, 1)$ e $t < 1$, l'M_1-riferimento (o, σ, u, η) realizza quanto dovuto.

LEMMA 8. — *Nell'epimorfismo $\psi : \pi \to \pi'$ si abbia $\psi(o + v) = \psi(u + v)$. È possibile determinare un riferimento $(\omega, \sigma, v, \eta)$ di π che è associato, in ψ, a un riferimento di π' in modo che esista un M_1-riferimento di π che fornisce coordinate a π nelle quali risulta $\omega = (1, o)$, $\sigma = (o)$, $\eta = (\alpha, 1)$ con $1 < \alpha$.*

Dimostrazione. — Si supponga $\psi(u) \neq \psi(v)$ e sia ω punto di π per il quale $\psi(u), \psi(v), \psi(\omega)$ sono punti non allineati di π'. Se e' è un punto di $v + \omega$ con $\psi(v) \neq \psi(e') \neq \psi(\omega)$ non può sempre risultare, posto $o' = (\omega + u) \cap (o + v)$, $(o' + e') \cap (u + v) \notin \rho_{uv}$. Ciò, infatti, significherebbe che se $p \in \rho_{uv}$, $u \neq p \neq v$, se $p' = (v + \omega) \cap (o' + p)$ è $\psi(p) \in \{\psi(u), \psi(v)\}$ poiché $\psi(p') \in \{\psi(\omega), \psi(v)\}$ e ciò contrasta con il lemma 6. Si fissi, quindi, un punto e' di $v + \omega$ con $(o' + e') \cap (u + v) \in \rho_{uv}$ e $\psi(e') \notin \{\psi(\omega), \psi(v)\}$. (o', u, v, e') è M_1-riferimento e nelle coordinate da esso desunte è $\omega = (1, o)$. Sia ξ il punto di ρ_{uv} con $\psi(v) \neq \psi(\xi) \neq \psi(u)$ e si supponga che le coppie v, ξ e u, $(o + e') \cap (u + v)$ si separino nell'ordinamento del piano π. Se $\eta = (\omega + \xi) \cap (u + e')$, $(\psi(\omega), \psi(u), \psi(v), \psi(\eta))$ è riferimento di π', $\eta = (\alpha, 1)$ nell'M_1-riferimento già individuato e risulta $1 < \alpha$. Ovviamente, con $\sigma = u$ è $\sigma = (o)$ in quel riferimento e $(\omega, \sigma, v, \eta)$ è un riferimento di π che realizza quanto dovuto. Se, poi, $\psi(u) = \psi(v)$ esiste $\xi \in \rho_{uv}$ con $\psi(\xi) \neq \psi(u)$. Si può fissare un M_1-riferimento di π (o', ξ, v, e') per il quale $\psi(\xi) \neq \psi(v)$ e, a partire da tale M_1-riferimento, conseguire la tesi come prima.

LEMMA 9. — *Il sistema cartesiano ordinato* $C_{m,t} = C_{m,t}(+, *; <)$ *che fornisce coordinate a* π *nel riferimento* $\mathfrak{R}_{m,t} = (o, (m), v, (t, 1))$, *ove le coordinate sono individuate nel riferimento* $\mathfrak{R} = (o, u, v, e)$ *(ossia* $m, t \in K_f$*) e* $o \leq t^{-1} < 1$, *risulta* M_1*-sistema con gruppo (abeliano) additivo sostegno* $C_{m,t}(+; <)$ *isomorfo, in quanto gruppo ordinato, a* $K(+; <)$. *Anzi, identificando* $C_{m,t}(+; <)$ *con* $K(+; <)$ *mediante un opportuno isomorfismo* $C_{m,t}(+, *; <)$ *risulta* M_1*-sistema che si desume dal corpo* $K_\perp = K_\perp(+, \perp; <)$ *e dalla sua funzione di rifrazione* f' *definiti come segue:* $K_\perp(+; <) = K(+; <)$ *(in quanto gruppi additivi ordinati),* $a \perp b = a\, t^{-1}(-m + t^{-1})^{-1} b$ *se* $a, b \in K_\perp$, $f'(a) = -m\, t + f(m + a\, t^{-1})\, t$ *se* $a \in K_\perp$ *ed* $a < -m\, t$, $f'(a) = a$ *se* $a \in K_\perp$ *e* $-m\, t \leq a$.

In più, l'applicazione $f : K(+, \circ; <) \to K_\perp(+, \perp; <)$ *definita ponendo* $f(x) = x(-m + t^{-1})\, t$ *se* $x \in K$ *risulta un isomorfismo tra corpi.*

Dimostrazione. — Sia h: $C_{m,t} \to C = K_f$ l'applicazione biettiva da $C_{m,t}$ a $C = K_f$ definita ponendo $h(a_1) = a$ se con $a_1 \in C_{m,t}$ ed $a \in C$, (o, a_1) risp. (o, a) rappresentano lo stesso punto di $o + v$ nei riferimenti $\mathfrak{R}$ risp. $\mathfrak{R}_{m,t}$.

Tenuto conto che $p_{\mathfrak{R}} = (m)$, $e'_{\mathfrak{R}} = (t, 1)$, *con* $o \leq m < t^{-1} < 1$, ed usufruendo delle operazioni grafiche che definiscono l'addizione e la moltiplicazione di $C_{m,t}(+, *; <)$ si prova che risulta, se $a_1, b_1 \in C_{m,t}$

$$h(a_1 + b_1) = a + b = h(a_1) + h(b_1)$$

$$h(a_1 * b_1) = (m + a\, t^{-1}) \circ (t^{-1} - m)^{-1} b - m \circ (t^{-1} - m)^{-1} b$$

Da qui, posto

$$a *' b = h(a_1) *' h(b_1) = h(a_1 * b_1) \qquad \text{se } a, b \in K_f$$

e cioè

$$(1) \quad a *' b = \begin{cases} [-m\, t + f(m + a\, t^{-1})\, t]\, t^{-1}(-m + t^{-1})^{-1} b & \\ \qquad\qquad \text{se } a, b < o \text{ e } a < -m\, t & \\ a\, t^{-1}(-m + t^{-1})^{-1} b \qquad \text{altrimenti} & \end{cases}$$

segue che la struttura $K'(+, *'; <)$ individuata dall'insieme sostegno ordinato del corpo $K = K(+, \cdot; <)$ e dalla moltiplicazione $*'$ definita dalle (1) risulta isomorfa al sistema cartesiano $C_{m,t}(+, *; <)$ e, quindi, anch'essa sistema cartesiano. A $K(+, *'; <)$ ci si può, dunque, ricondurre per studiare $C_{m,t}$.

Si consideri, ora, il corpo ordinato, $K_\perp(+, \perp; <)$ desunto dal corpo K pretendendo che $K_\perp(+; <) = K(+; <)$ come gruppi additivi ordinati e che risulti, se $a, b \in K_\perp = K$, $a \perp b = a t^{-1}(-m + t^{-1}) b$, talché $(-m + t^{-1}) t$ è l'identità del corpo K. Posto $f'(a) = -mt + f(m + a t^{-1}) t$ se $a, b < o$ ed $a < -mt$ ed $f'(a) = a$ se $a < o$ e $-mt \leq a$, dalle (1) si ricava

$$a *' b = \begin{cases} f'(a) \perp b & \text{se } a, b < o \\ a \perp b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e, quindi, il sistema cartesiano K' si ottiene dal corpo $K_\perp$ e da f'. Da qui segue che f' è funzione di rifrazione del corpo $K_\perp$ (Lemma 5, [9]) e, quindi, che $K'(+, *'; <)$ è M_l-sistema che si desume dal corpo $K_\perp$ e dalla sua funzione di rifrazione f' (cfr. [4], Teor. 2). Concludiamo osservando, come si prova facilmente che i corpi $K_\perp(+, \perp; <)$ e $K(+, \cdot; <)$ risultano isomorfi tramite l'applicazione $f : K \to K_\perp$ definita ponendo $f(x) = x(-m + t^{-1}) t$ se $x \in K$.

TEOREMA 2. — *Si consideri l'epimorfismo (proprio)* $\psi : \pi \to \pi'$ *dall'*(o, u, v, ρ_{uv})-M_l-*piano proiettivo* π *al piano proiettivo* π'; π *assume coordinate nel riferimento* $\mathcal{R} = (o, u, v, e)$ *desunte dall'*M_l-*sistema* $C = K_f = K_f(+, \circ; <)$ *che è definito dal corpo ordinato* $K = K(+, \cdot; <)$ *e dalla sua funzione di rifrazione* f. *In tali condizioni* π' *è piano lineare sopra un campo ed il campo delle sue coordinate è campo residuo di un posto (proprio)* $\varphi : K \to C' \cup \{\infty\}$ *del campo ordinato archimedeo K definito da* π, *ove si pretenda che esistano* m, $t \in K^+$, $o \leq m < t < 1$ *per cui*:

(1) $\varphi(-mt + f(m + x t^{-1}) t) = \varphi(x)$ *se* $x \in K^-$, $x < -mt$

(2) $\varphi(x^{-1}(-mt + f(m + x t^{-1}) t) = 1$ *se* $x \in K^-$, $\varphi(x) = \infty$, $x < -mt$.

Viceversa, ogni piano proiettivo lineare sopra un campo che si ottiene come campo residuo di un posto (proprio) $\varphi : K \to C' \cup \{\infty\}$ *per il quale esistono* m, $t \in K^+$, $o \leq m < t^{-1} < 1$, *che verificano le* (1) *e* (2), *è immagine epimorfa di* π.

Dimostrazione. — Sia $\psi : \pi \to \pi'$ un epimorfismo dall'(o, u, v, ρ_{uv})-M_l-piano archimedeo π sul piano proiettivo π'. Se $\psi(o + v) \neq \psi(u + v)$ esiste, in virtù del lemma 7, un epimorfismo $\chi : \pi \to \pi'$ tale che il riferimento $\mathcal{R}_{m,t} = (o, \sigma, v, \eta)$ del piano π risulta associato in ψ ad un riferimento del piano $\pi'(\chi(o), \chi(\sigma), \chi(v), \chi(\eta))$ e, nelle coordinate de-

sunte dal riferimento $\mathcal{R} = (o, u, v, e)$ si abbia $\sigma = (m)$, $\eta = (t, 1)$ con $o \leq m < t^{-1} < 1$.

Possiamo, così, limitarci a caratterizzare gli epomorfismi χ di tale tipo. Sia $C_{m,t}(+, \circ; <)$ l'M_1-sistema che fornisce coordinate a π nel riferimento $\mathcal{R}_{m,t}$; per il lemma 9, risulta $C_{m,t}$ desunto dal corpo $K_\perp (+, \perp; <)$ e dalla sua funzione di rifrazione f' definiti ponendo: $K_\perp (+; <) = K(+; <)$ in quanto gruppi additivi ordinati, $a \perp b = a\, t^{-1}(-m + t^{-1})\, b$ se $a, b \in K^-$, $f'(a) = -m\, t + f(m + a\, t^{-1})\, t$ se $a < -m\, t$ ed $f'(a) = a$ se $-m\, t < a$. π' è piano $(\chi(v), \chi(\sigma) \cup \chi(v))$--transitivo; se $C'(+, \circ)$ è il sistema delle sue coordinate nel riferimento $\mathcal{R}_{m,t}$, per quanto richiamato in 2, χ definisce un posto $\varphi : C_{m,t} \to C' \cup \{\infty\}$.

In più, ogni posto $\varphi : C_{m,t} \to C' \cup \{\infty\}$ individua un epimorfismo χ dal piano π al piano proiettivo che ha C' come sistema di coordinate (per il lemma 2 e l'archimedeicità di $C_{m,t}$ C' è un campo).

Pertanto i piani proiettivi che risultano immagini epimorfe del piano π in epimorfismi in cui le immagini delle rette $u + v$ ed $o + v$ siano distinte sono tutti e solo quelli ai quali fornisce coordinate un sistema cartesiano C' che provenga dal sistema cartesiano $C_{m,t}$ mediante un posto $\varphi : C_{m,t} \to C' \cup \{\infty\}$. I sistemi cartesiani di tipo dovuto sono stati classificati con il teor. 1; se in esso, tenuto conto dell'isomorfismo esistente, per il lemma 9, tra i corpi $K(+, \cdot; <)$ e $K_\perp (+, \perp; <)$, si pone $f'(x)$ al posto di $f(x)$, con $f'(x) = -m\, t + f(m + a\, t^{-1})\, t$ se $x \in K^-$ ed $x < -m\, t$ ed $f'(x) = x$ se $x \in K^-$ e $-m\, t \leq x$ si giunge all'asserto.

Supponiamo, ora, che $\psi : \pi \to \pi'$ sia un epimorfismo dall'(o, u, v, ρ_{uv})-M_1piano archimedeo sul proiettivo π' tale che $\psi(o + v) = \psi(u + v)$. È possibile determinare un riferimento $\mathcal{R}_\alpha = (\omega, \sigma, v, \eta)$ di π che sia associato, in ψ, ad un riferimento di π' in modo che esista un M_1-riferimento di π che fornisce coordinate a π nelle quali risulta $\omega = (1, o)$, $\sigma = (o)$ ed $\eta = (\alpha, 1)$ con $1 < \alpha$ (lemma 8). Se $C_\alpha (+, *; <)$ è il sistema delle coordinate di π in $\mathcal{R}_\alpha$ e $C'(+, \circ)$ il sistema delle coordinate di π' in $\mathcal{R}' = (\psi(\omega), \psi(\sigma), \psi(v), \psi(\eta))$, ψ definisce un posto $\varphi : C_\alpha \to C' \cup \{\infty\}$ e viceversa ogni posto $\varphi : C_\alpha \to C' \cup \{\infty\}$ individua un epimorfismo di tipo ψ dal piano π al piano che ha C' come sistema di coordinate.

Pertanto i piani proiettivi che risultano immagini epimorfe di un (o, u, v, ρ_{uv})-M_1-piano archimedeo in epimorfismi in cui $o + v$ ed $u + v$ abbiano la stessa immagine sono tutti e soli i piani che hanno come sistema di coordinate un sistema cartesiano C' che provenga dal sistema cartesiano C_α mediante un posto $\varphi : C_\alpha \to C' \cup \{\infty\}$. I sistemi cartesiani C_α ed i loro posti sono stati studiati nei lemmi 3, 4 e 5. Da questi si deduce che: C_α si ottiene (a meno di isomorfismi)

dal corpo $K(+, \cdot; <)$ e da f'; banalmente f' è funzione di rifrazione del corpo K. Essendo φ posto di C_α, $\varphi : K \to C' \cup \{\infty\}$ è anche posto di K e che, valendo le 1) e 2) del lemma 4 $\varphi : K_{f'} \to C' \cup \{\infty\}$ è posto dell'M_1-sistema $K_{f'}(+, \circ; <)$ desunto dal corpo K e dalla sua funzione di rifrazione f' (teor. 1). Dunque il piano proiettivo π' a cui da coordinate il campo residuo del posto φ di C_α si ottiene anche come piano su di un campo residuo di un posto di $K_{f'}$, M_1-sistema desunto dal corpo $K(+, \cdot; <)$ e dalla sua funzione di rifrazione f', che dà coordinate a π nel riferimento $R_{o,t}$ del lemma 9.

Concludendo i sistemi cartesiani di tipo dovuto sono tutti e soli quelli già classificati e, cioè, i campi residui di posti φ del corpo ordinato archimedeo K, definito da π, verificanti le condizioni (1) e (2) del teorema 2.

OSSERVAZIONE. — Dal teorema 2, con il quale si risolve, nel senso precisato nell'introduzione, il problema affrontato in questo lavoro, discende, ovviamente, che le immagini epimorfe di un piano archimedeo π che sia M_1-piano rispetto a qualche terna di suoi punti (o, u, v) sono tutte e sole le immagini epimorfe di π in epimorfismi $\psi : \pi \to \pi'$ in cui $\psi(o + v) \neq \psi(u + v)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÉ, *Über Homomorphismen projektiver Ebenen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **34** (1969), 98114.

[2] C. BARTOLONE, *Le immagini epimorfe di un M-piano*, Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, **44** (1977), 53-67.

[3] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, (1955).

[4] L. PROFERA, *I piani di rifrazione generalizzati*, Ricerche Mat. **22** (1973 , 203-226.

[5] L. PROFERA, *Sulle collineazioni dei piani di rifrazione generalizzati*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **7** (1975), 1-31.

[6] L. PROFERA, *Le collineazioni degli M_1-piani propri archimedei*, Ricerche Mat., **24** (1975), 384-400.

[7] L. A. SKORNJAKOV, *Omomorfismi di piani proiettivi e T-omomorfismi di corpi ternari*, Mat. Sbornik, **43** (1975), 285-294.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Panella, A. Franchetta e M. Curzio.

Sul prolungamento delle funzioni finitamente additive

Nota di EMILIA D'ARIENZO e MICHELANGELO FRANCIOSI (a Napoli)
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 2 giugno 1979)

RIASSUNTO. — Usufruendo di una nuova definizione di misurabilità rispetto ad una funzione, si generalizza una nota proposizione di von Neumann e si indica una nuova più semplice dimostrazione di un teorema di prolungamento di B. J. Pettis.

SUMMARY. — Using a new definition of measurability with respect to a function, we generalize a well-known proposition of von Neumann and we show a new simpler proof of an extension theorem of B. J. Pettis.

La teoria della misurabilità di un insieme rispetto ad una funzione dovuta a Carathéodory [1] si è rivelata poco utile nella ricerca di teoremi di prolungamento per funzioni finitamente additive.

In particolare, la suddetta teoria di Carathéodory non sembra utilizzabile allo scopo di ritrovare un ben noto teorema di J. von Neumann [2] concernente il prolungamento di una « measure function » definita in un « half-ring ».

In questo lavoro viene data una nuova definizione di insieme misurabile rispetto ad una funzione e, in base ad essa, viene ritrovato, in forma più generale, il citato teorema di von Neumann. La generalizzazione ottenuta assorbe anche quella data da F. Cafiero [3]. Nel lavoro viene anche data una nuova più semplice dimostrazione del ben noto teorema di B. J. Pettis [4] concernente il prolungamento di una funzione reale modulare in un reticolo.

[1] C. CARATHÉODORY, *Algebraic Theory of Measure and Integration*, Chelsea Publ. Comp., New York (1963).

[2] J. VON NEUMANN, *Functional Operators*, vol. I: *Measures and Integrals*, Princeton Univ. Press (1950), p. 94 e p. 95.

[3] F. CAFIERO, *Sul principio esteso delle probabilità totali*, Ann. Univ. Ferrara, Scz. VII, vol. V n. 8 (1956), pp. 85-102.

[4] B. J. PETTIS, *On the Extension of Measures*, Ann. of. Math., vol. 54 (1951), pp. 186-187.

1. - Misurabilità di un insieme rispetto ad una funzione numerica

Siano S un insieme, $\mathfrak{I}$ un insieme di parti di S al quale appartenga il vuoto, γ una funzione numerica definita in $\mathfrak{I}$, nulla sul vuoto. Diremo che una parte X di S è *misurabile rispetto* a γ oppure γ-*misurabile*, se, per ogni insieme Y di $\mathfrak{I}$, esistono una partizione finita (Y_i') di $Y \cap X$, ed una partizione finita di (Y_j'') di $Y - X$, entrambe elementi in $\mathfrak{I}$, tali che:

$$\gamma(Y) = \sum_i \gamma(Y_i') + \sum_j \gamma(Y_j'').$$

Evidentemente:

(1.1) - *Il vuoto è* γ-*misurabile.*

(1.2) - *Il complemento di un insieme* γ-*misurabile rispetto ad un un qualunque maggiorante di* $\mathfrak{I}$ *è* γ-*misurabile.*

Conseguentemente:

(1.3) - *Ogni maggiorante di* $\mathfrak{I}$ *è* γ-*misurabile.*

È agevole inoltre verificare che:

(1.4) - *Condizione necessaria e sufficiente affinché una parte* X *di* S *sia* γ-*misurabile è che, per ogni coppia* (A, B) *di parti di* S, *con l'unione in* $\mathfrak{I}$ *e tali che* $A \subseteq X$, $B \subseteq -X$, *esistano una partizione finita* (A_i) *di* A *ed una partizione finita* (B_j) *di* B, *entrambe con gli elementi in* $\mathfrak{I}$, *tali che*:

$$\gamma(A \cup B) = \sum_i \gamma(A_i) + \sum_j \gamma(B_j).$$

Dim. — Che la condizione sia necessaria consegue in modo ovvio dalla definizione in quanto, qualunque sia la coppia (A, B) di parti di S soddisfacente alle dichiarate ipotesi, risulta:

$$(A \cup B) \cap X = A \qquad (A \cup B) - X = B.$$

Relativamente alla sufficienza, basta osservare che, qualunque sia l'insieme Y di $\mathfrak{I}$, la coppia $(Y \cap X, Y - X)$ soddisfa alle ipotesi dichiarate nell'enunciato per la coppia (A, B).

Dalla proposizione ora acquisita consegue facilmente:

(1.5) - *L'insieme delle parti* γ-*misurabili di* S *è finitamente* $\cup$ - *completo.*

Dim. — Basta ovviamente verificare che l'unione di due insiemi X_1 ed X_2 γ-misurabili è γ-misurabile. All'uopo, a norma di (1.4), basta far vedere che, per ogni coppia (A, B) di parti di S con l'unione in $\mathfrak{I}$ e tali che:

$$A \subseteq X_1 \cup X_2 \qquad B \subseteq -(X_1 \cup X_2),$$

esistono una partizione finita (A_i) di A ed una partizione finita (B_j) di B, entrambe con gli elementi in $\mathfrak{I}$, tali che:

$$\gamma(A \cup B) = \sum_i \gamma(A_i) + \sum_j \gamma(B_j).$$

Orbene, la γ-misurabilità di X_1 implica l'esistenza di una partizione finita (C_h) di $(A \cup B) \cap X_1 = A \cap X_1$ e di una partizione finita (D_k) di $(A \cup B) - X_1 = (A - X_1) \cup B$, entrambe con gli elementi in $\mathfrak{I}$, tali che:

$$\gamma(A \cup B) = \sum_h \gamma(C_h) + \sum_k \gamma(D_k).$$

Da ciò consegue l'asserto in quanto, qualunque sia l'indice k, risultando:

$$D_k \cap (A - X_1) = D_k \cap X_2 \qquad D_k \cap B = D_k - X_2,$$

la γ-misurabilità di X_2 implica l'esistenza di una partizione finita (E_r) di $D_k \cap (A - X_1)$ e di una partizione finita (F_s) di $D_k \cap B$, entrambe con gli elementi in $\mathfrak{I}$, tali che:

$$\gamma(D_k) = \sum_r \gamma(E_r) + \sum_s \gamma(F_s).$$

Dalle proposizioni (1.2) e (1.5) consegue banalmente:

(1.6) - *L'insieme delle parti γ-misurabili di* S *è un clan unitario di elemento massimo* S.

2. - Misurabilità di un insieme rispetto ad una funzione numerica finitamente sub-additiva

Fermo restando il simbolismo introdotto nel precedente numero, in questo numero si considera il caso, particolarmente interessante, che la funzione numerica γ sia « finitamente sub-additiva in $\mathfrak{I}$ », nel senso che non assuma il valore $-\infty$ e soddisfi alla condizione:

$$\gamma(X) \leq \sum_n \gamma(X_n)$$

qualunque siano l'elemento X di $\mathcal{I}$ e la partizione finita (X_n) di X con gli elementi in $\mathcal{I}$.

Denotiamo con $\overline{\mathcal{I}}$ l'insieme delle parti di S per le quali esiste una partizione finita con gli elementi in $\mathcal{I}$ e, per ogni X di $\overline{\mathcal{I}}$, con $\mathcal{I}(X)$ l'insieme delle partizioni finite di X con gli elementi in $\mathcal{I}$. Evidentemente, $\mathcal{I}$ è incluso in $\overline{\mathcal{I}}$.

Inoltre, qualunque sia la funzione γ finitamente sub-additiva in $\mathcal{I}$ e nulla sul vuoto, denotiamo con $\mathcal{I}_\gamma$ l'insieme degli elementi X di $\overline{\mathcal{I}}$ tali che:

$$\inf_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}(X)} \sum_{I \in \mathcal{F}} \gamma(I) > -\infty .$$

Evidentemente, $\mathcal{I}$ è incluso anche in $\mathcal{I}_\gamma$.

Ciò premesso, dimostriamo che:

(2.1) - *L'applicazione definita in* $\mathcal{S}(S)$:

$$\gamma_* : X \to \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad X \notin \mathcal{I}_\gamma \\ \inf_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}(X)} \sum_{I \in \mathcal{F}} \gamma(I) & \text{se} \quad X \in \mathcal{I}_\gamma \end{cases}$$

è il più grande prolungamento di γ *su* $\mathcal{S}(S)$ *finitamente sub-additivo.*

Dim. — Evidentemente, a norma della finita sub-additività di γ, la funzione γ_* ha restrizione a $\mathcal{I}$ uguale a γ.

Allo scopo di dimostrare che γ_* è finitamente sub-additiva, verifichiamo che, qualunque sia la partizione (X_k) finita della parte X di S, risulta:

$$\gamma_*(X) \leq \sum_k \gamma_*(X_k) \tag{1}$$

Tale disuguaglianza è ovvia se almeno un elemento della suddetta partizione di X non appartiene ad $\mathcal{I}_\gamma$. Nella ipotesi che ogni elemento della partizione appartenga a $\mathcal{I}_\gamma$, fissato un numero reale positivo ε, denotiamo, per ogni indice k, con $(I_n^{(k)})$ una partizione di X_k finita, con gli elementi in $\mathcal{I}$, tale che:

$$\sum_n \gamma(I_n^{(k)}) \leq \gamma_*(X_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} .$$

Poiché la famiglia degli insiemi $I_n^{(k)}$ è una partizione finita di X con gli elementi in $\mathfrak{I}$, risulta:

$$\gamma_* (X) \leq \sum_{(n,k)} \gamma (I_n^{(k)}) \leq \sum_k \left(\gamma_* (X_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \leq \sum_k \gamma_* (X_k) + \varepsilon,$$

epperò, data l'arbitrarietà di ε, sussiste la (1).

Per completare la dimostrazione, occorre verificare che, detto β un prolungamento finitamente sub-additivo di γ su $\mathfrak{S}(S)$, risulta $\beta(X) \leq \gamma_* (X)$ per ogni parte X di S. Ciò è evidente se $\gamma_* (X) = +\infty$. Nella ipotesi che $\gamma_* (X)$ sia reale, qualunque sia la partizione finita $\mathfrak{F}$ di X con gli elementi in $\mathfrak{I}$, risulta:

$$\beta(X) \leq \sum_{I \in \mathfrak{F}} \beta (I) = \sum_{I \in \mathfrak{F}} \gamma (I),$$

epperò anche $\beta(X) \leq \gamma_* (X)$.

La funzione γ_* definita nella proposizione ora acquisita sarà chiamata *il prolungamento canonico* di γ su $\mathfrak{S}(S)$.

Relativamente alla nozione di misurabilità nel caso in esame, importante è l'osservazione:

(2.2) - *Un insieme* X *misurabile rispetto alla funzione* γ *finitamente sub-additiva in* $\mathfrak{I}$ *è misurabile anche rispetto al prolungamento canonico* γ_* *di* γ *su* $\mathfrak{S}(S)$.

Dim. — Basta verificare che:

$$\gamma_* (Y) \geq \gamma_* (Y \cap X) + \gamma_* (Y - X)$$

per ogni parte Y di S. Tale disuguaglianza è ovvia se γ_* è infinita su Y. Se γ_* è reale su Y, qualunque sia il numero reale positivo ε, esiste una partizione finita (Y_k) di Y, con gli elementi in $\mathfrak{I}$, tale che:

$$\sum_k \gamma (Y_k) < \gamma_* (Y) + \varepsilon. \tag{1}$$

D'altro canto, per la γ-misurabilità di X, esistono, per ogni k, una partizione finita $(Y'_{k,n})$ di $Y_k \cap X$ ed una partizione finita di $(Y''_{k,m})$ di $Y_k - X$, entrambe con gli elementi in $\mathfrak{I}$, tali che:

$$\gamma (Y_k) = \sum_n \gamma (Y'_{k,n}) + \sum_m \gamma (Y''_{k,m}).$$

Tale uguaglianza e la (1) implicano:

$$\sum_k \left(\sum_n \gamma(Y'_{k,n}) + \sum_m \gamma(Y''_{k,m})\right) = \sum_k \gamma(Y_k) < \gamma_*(Y) + \varepsilon.$$

Ne consegue l'asserto in quanto, essendo le famiglie $(Y'_{k,n})$ ed $(Y''_{k,m})$ partizioni rispettivamente di $Y \cap X$ e di $Y - Y$, risulta:

$$\gamma_*(Y \cap X) + \gamma_*(Y - X) \leq \sum_k \sum_n \gamma(Y'_{k,n}) + \sum_k \sum_m \gamma(Y''_{k,m}).$$

Da tale osservazione consegue agevolmente che:

(2.3) - *La restrizione della funzione finitamente sub-additiva* γ *all'insieme degli elementi di* $\mathfrak{I}$ γ*-misurabili è finitamente additiva.*

Dim. — All'uopo, poiché, a norma di (2.2), ogni insieme di $\mathfrak{I}$ γ-misurabile appartiene al clan delle parti di S misurabili rispetto al prolungamento canonico γ_* di γ su $\mathfrak{P}(S)$, basta verificare che la restrizione di γ_* al clan suddetto è finitamente additiva.

Orbene, dette A e B due parti di S γ_*-misurabili e disgiunte, a norma della γ_*-misurabilità di A esistono una partizione finita (Y'_i) di $A = (A \cup B) \cap A$ ed una partizione finita (Y''_j) di $B = (A \cup B) - A$ tali che:

$$\gamma_*(A \cup B) = \sum_i \gamma_*(Y'_i) + \sum_j \gamma_*(Y''_j).$$

Poiché, d'altro canto, a norma della finita sub-additività di γ_* risulta:

$$\sum_i \gamma_*(Y'_i) \geq \gamma_*(A), \qquad \sum_j \gamma_*(Y''_j) \geq \gamma_*(B),$$

si ha:

$$\gamma_*(A \cup B) \geq \gamma_*(A) + \gamma_*(B)$$

ciò che, ancora a norma della finita sub-additività di γ_*, dimostra l'asserto.

La proposizione ora acquisita implica evidentemente che:

(2.4) - *Condizione necessaria e sufficiente affinché ogni insieme di* $\mathfrak{I}$ *sia misurabile rispetto alla funzione* γ *finitamente su-additiva è che* $\mathfrak{I}$ *sia una base di clan*[5] *e* γ *sia finitamente additiva.*

[5] Sia $\mathfrak{B}$ un insieme non vuoto di parti di un insieme S; se l'insieme delle unioni finite di insiemi mutualmente disgiunti di $\mathfrak{B}$ è un clan, si dice che $\mathfrak{B}$ è una *base di clan* (*su* S); cfr. F. CAFIERO, G. LETTA e A. ZITAROSA, *Misura e Integrazione*, parte prima: *Misura*, in corso di stampa.

Quando si tenga conto della (1.6), quest'ultima proposizione implica banalmente la seguente:

(2.5) - *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione numerica* γ *finitamente sub-additiva in una base di clan* $\mathfrak{B}$ *nulla sul vuoto, sia finitamente additiva è che esista un generatore* $\mathfrak{I}$ *incluso in* $\mathfrak{B}$ *del clan di base* $\mathfrak{B}$, *i cui insiemi siano* γ*-misurabili.*

3. - Teoremi di prolungamento per funzioni finitamente additive

Le proposizioni fin qui acquisite ci permettono di pervenire molto semplicemente ai seguenti teoremi di prolungamento per funzioni finitamente additive.

(3.1) - *Ogni funzione numerica* φ, *non assumente il valore* $-\infty$, *finitamente additiva in una base di clan* $\mathfrak{B}$ *sull'insieme* S *è prolungabile in una funzione numerica finitamente additiva in un clan unitario, di elemento massimo* S, *contenente* $\mathfrak{B}$.

Dim. — Poiché, a norma di (2.4), ogni insieme di $\mathfrak{B}$ è φ-misurabile, il clan unitario $\mathfrak{C}$, di elemento massimo S, degli insiemi misurabili rispetto al prolungamento canonico φ_* di φ su $\mathfrak{S}(S)$ contiene, a norma di (2.2), la base di clan $\mathfrak{B}$. Ne consegue l'asserto in quanto la restrizione di φ_* a $\mathfrak{C}$ è finitamente additiva (cfr. 2.3)).

Diamo ora una nuova dimostrazione della seguente ben nota proposizione di Pettis:

(3.2) - *Qualunque sia la funzione reale* φ, *nulla sul vuoto e modulare nel reticolo* $\mathfrak{R}$ *di parti dell'insieme* S, *il prolungamento* ψ *di* φ *sull'insieme* $\mathfrak{D}$ *delle differenze proprie di elementi di* $\mathfrak{R}$, *definito associando ad ogni elemento* $X - Y$ *di* $\mathfrak{D}$ *la differenza* $\varphi(X) - \varphi(Y)$, *è finitamente additivo.*

Dim. — All'uopo, poiché l'insieme $\mathfrak{D}$ è una base elementare di clan [6], basta far vedere che il prolungamento ψ su $\mathfrak{D}$ di φ è bi-additivo.

[6] Cfr. vol. cit. in ([3]). La base di clan $\mathfrak{B}$ viene detta *elementare* se è finitamente $\cap$-completa e per ogni coppia (X, Y) di insiemi di $\mathfrak{B}$ tali che $X \subseteq Y$ esiste una partizione $\mathfrak{B}$-elementare di Y della quale X sia un elemento. Se $\mathfrak{I}$ è un insieme di parti di un insieme S, una partizione di un insieme di $\mathfrak{I}$, costituita da uno o da due insiemi di $\mathfrak{I}$, sarà detta $\mathfrak{I}$*-elementare*. Tale definizione rende legittima la seguente definizione induttiva: qualunque sia l'intero positivo $k > 2$, una partizione π di un insieme X di $\mathfrak{I}$, costituita da k insiemi di $\mathfrak{I}$, sarà detta $\mathfrak{I}$*-elementare* quando esistono due elementi di essa aventi unione appartenente ad $\mathfrak{I}$ e tali che la partizione di X che si ottiene da π sostituendo ad essi la loro unione è una partizione di X, costituita da $k - 1$ insiemi di $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}$-elementare.

Orbene, dati gli insiemi $X_1 - Y_1$ e $X_2 - Y_2$ di $\mathfrak{D}$, disgiunti ed aventi come unione l'insieme $X - Y$ di $\mathfrak{D}$, osserviamo dapprima che le ovvie uguaglianze:

$$(X - Y) \cap (X - X_2) = (X_1 - Y_1) \cap (X - X_2)$$

$$(X - Y) \cap Y_2 = (X_1 - Y_1) \cap Y_2,$$

supponendo, senza ledere la generalità, che gli insiemi X_1 e X_2 siano contenuti in X, implicano rispettivamente:

$$\psi(X - Y \cup X_2) = \psi(X_1 - Y_1 \cup (X_1 \cap X_2))$$

$$\psi(Y_2 - Y \cap Y_2) = \psi(X_1 \cap Y_2 - Y_1 \cap Y_2).$$

Essendo $Y \cap Y_2 = Y \cap X_2$ [7], sommando membro a membro tali eguaglianze si ha:

$$\varphi(X) - \varphi(Y \cup X_2) + \varphi(Y_2) - \varphi(Y \cap X_2 =$$

$$= (X_1) - \varphi(Y_1 \cup (X_1 \cap X_2)) + \varphi(X_1 \cap Y_2) - \varphi(Y_1 \cap Y_2).$$

A norma della modularità di φ il primo membro della soprascritta uguaglianza è evidentemente uguale a:

$$\varphi(X) - \varphi(Y) - (\varphi(X_2) - \varphi(Y_2)),$$

mentre il secondo membro è uguale a $\varphi(X_1) - \varphi(Y_1)$ in quanto si ha:

$$- \varphi(Y_1 \cup (X_1 \cap X_2)) + \varphi(X_1 \cap Y_2) - \varphi(Y_1 \cap Y_2) =$$

$$= - \varphi(Y_1) - \varphi(X_1 \cap X_2) + \varphi(Y_1 \cap X_2) + \varphi(X_1 \cap Y_2) - \varphi(Y_1 \cap Y_2) =$$

$$= - \varphi(Y_1) - \varphi(X_1 \cap X_2) + \varphi((Y_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap Y_2)) =$$

$$= - \varphi(Y_1) - \psi((X_1 - Y_1) \cap (X_2 - Y_2)) = - \varphi(Y_1).$$

Ne consegue, come volevasi, la bi-additività di ψ.

[7] Risultando

$$Y \cap (X_2 - Y_2) = \emptyset$$

si ha:

$$Y \cap Y_2 = (Y \cap Y_2) \cup (Y \cap (X_2 - Y_2)) = Y \cap X_2.$$

La proposizione ora acquisita implica, a norma di (3.1), la seguente:

(3.3) - *Una funzione* φ *reale, nulla sul vuoto e modulare in un reticolo* $\mathfrak{R}$ *di parti di un insieme* S, *si può prolungare in una funzione finitamente additiva in un clan unitario di elemento massimo* S *contenente* $\mathfrak{R}$.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e D. Greco.

Il carico di punta in regime viscoso per travi di sezione variabile

Nota di CAMILLA D'ONOFRIO
e del socio ordinario VINCENZO FRANCIOSI

(Adunanza del 2 giugno 1979)

SOMMARIO. — Il problema è sentito particolarmente nei piloni da ponte. Esso si semplifica trascurando il peso proprio del pilone, e quindi operando sullo schema di trave con appoggio e cerniera soggetta ad una forza assiale concentrata sull'appoggio. Si sviluppa un esempio numerico.

SUMMARY. — The problem is particulary felt in bridge piers. It is simplifyed disregarding the weight of the pier, hence acting on supported beam with fixed hinge in one side and movable hinge on the other, the beam is loaded with axial force acting on the movable hinge. A numerical example is developed.

1. - EQUAZIONE DEL PROBLEMA

Si può adottare come schema quello della trave su due appoggi, simmetrica rispetto alla mezzeria (fig. 1), di luce l pari al doppio dell'altezza h del pilone. In un primo studio si trascura il peso proprio del pilone, così da considerare la trave soggetta ad una sola forza concentrata F all'estremo appoggiato, applicata con valore costante nel tempo.

L'asse presenti, al momento dell'azione della forza F, un difetto d'asse esprimibile con la legge sinusoidale

$$v^*(z) = \Sigma_i \, V_i^* \, \text{sen} \, \frac{i \pi z}{l} \qquad (i = 1, 3, 5 \ldots n). \tag{1}$$

Siano $v_e(z)$ e $v_\mu(z)$ gli spostamenti dovuti alle deformazioni elastiche ed a quelle viscose, e $v(z)$ lo spostamento totale dalla congiungente gli estremi A e B; si può scrivere

$$v(z, t) = v^*(z) + v_e(z, t) + v_\mu(z, t). \tag{2}$$

In aderenza ai cosiddetti corollari di Mohr, la $v_e(z)$ e la $v_\mu(z)$ sono i momenti generati sulla trave ausiliaria (ancora appoggiata) dai carichi fittizi $\frac{M}{E\,I}$ e μ:

$$\begin{aligned} &\frac{M}{E\,I} \rightarrow v_e(z) \\ &-\mu \rightarrow v_\mu(z). \end{aligned} \tag{3}$$

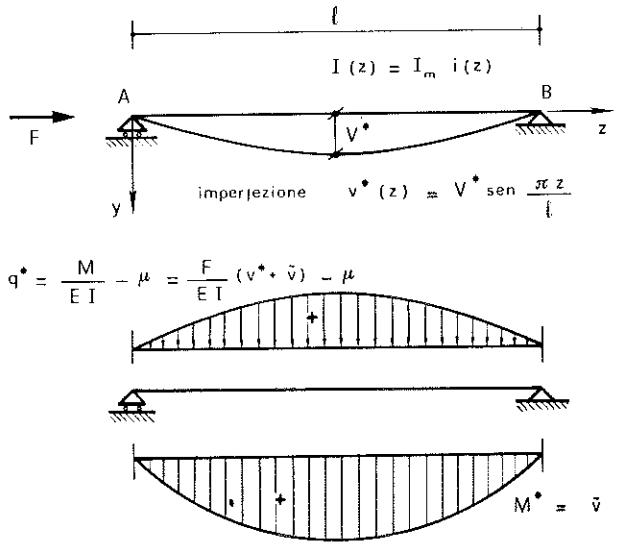


FIG. 1

Poiché è

$$\bar{R} = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{M}{E\,I} - \mu \right) d\,z \tag{4}$$

si ha, ponendo $\bar{q} = \frac{M}{E\,I} - \mu$,

$$v_e(z) + v_\mu(z) = \bar{R}\,z - \int_0^z \bar{q}\,(z')\,(z - z')\,d\,z'. \tag{5}$$

Nel caso in esame, assumendo un nucleo ereditario alla Withney

$$\Phi = \alpha\,\beta\,e^{-\beta\tau}, \tag{6}$$

con tempi contati a partire dalla data di maturazione del getto (convenzionalmente 28 giorni) la μ al tempo τ è fornita da

$$\mu(z, t) = -\frac{a\,\beta}{E\,I(z)} \int_{t_F}^{t} M(z, \tau)\, e^{-\beta\tau}\, d\tau, \tag{7}$$

dove t_F è la data di applicazione della forza F.

A sua volta, M è fornita da

$$M(z, t) = F\,v(z, t) = F\,[v^*(z) + v_e(z, t) + v_\mu(z, t)]. \tag{8}$$

Si farà riferimento alle variabili adimensionali

$$\zeta = \frac{z}{l}, \qquad s = \frac{z'}{l}, \tag{9}$$

e la funzione $I(z)$ si porrà nella forma

$$I(\zeta) = I_m\, i(\zeta), \tag{10}$$

ove I_m è il valore che $I(\zeta)$ assume in $\zeta = 0{,}5$.

Così pure si porrà

$$v_e(\zeta, t) + v_\mu(\zeta, t) = \tilde{v}(\zeta, t). \tag{11}$$

Dalle (4) e (5) si trae quindi

$$\tilde{v}(z, t) = z \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{M}{E\,I} - \mu \right) d z' - \int_0^{z} \left(\frac{M}{E\,I} - \mu \right) (z - z')\, d z' =$$

$$= z \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{E\,I}\, d z' - z \int_0^{\frac{l}{2}} \mu\, d z' - \int_0^{z} \frac{M}{E\,I}\, (z - z')\, d z' + \int_0^{z} \mu\, (z - z')\, d z';$$

la (8) si scrive

$$M(z, t) = F\,[v^*(z) + \tilde{v}(z, t)],$$

e quindi

$$(12)\quad \bar{v}(\zeta,t) = \frac{F\,l^2}{E\,I_m}\,\zeta\left[\int_0^{0,5}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,d\,s + \int_0^{0,5}\frac{\bar{v}(s,t)}{i(s)}\,d\,s\right] - l^2\,\zeta\int_0^{0,5}\mu\,d\,s -$$

$$-\frac{F\,l^2}{E\,I_m}\left[\int_0^{\zeta}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,d\,s + \int_0^{\zeta}\frac{\bar{v}(s,t)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,d\,s\right] + l^2\int_0^{\zeta}\mu\,(\zeta-s)\,d\,s.$$

Per la (7), si ha quindi in definitiva

$$(13)\quad \bar{v}(\zeta,t) = \frac{F\,l^2}{E\,I_m}\,\zeta\left[\int_0^{0,5}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,d\,s + \int_0^{0,5}\frac{\bar{v}(s,t)}{i(s)}\,d\,s +\right.$$

$$+\alpha\,\beta\int_0^{0,5}\int_{t_F}^{t}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,e^{-\beta\tau}\,d\,\tau\,d\,s + \alpha\,\beta\int_0^{0,5}\int_{t_F}^{t}\frac{\bar{v}(s,t)}{i(s)}\,e^{-\beta\tau}\,d\,\tau\,d\,s\Big] -$$

$$-\frac{F\,l^2}{E\,I_m}\left[\int_0^{\zeta}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,d\,s + \int_0^{\zeta}\frac{\bar{v}(s,t)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,d\,s +\right.$$

$$+\alpha\,\beta\int_0^{\zeta}\int_{t_F}^{t}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,e^{-\beta\tau}\,d\,\tau\,d\,s +$$

$$\left.+\alpha\,\beta\int_0^{\zeta}\int_{t_F}^{t}\frac{\bar{v}(s,t)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,e^{-\beta\tau}\,d\,\tau\,d\,s\right].$$

2. - Il problema in assenza di viscosità: i carichi critici

In assenza di viscosità (fig. 2) valgono le (12), ove si ponga $\bar{v}(s,t) = v_e(s)$, e $\mu = 0$.

È perciò, nell'incognita $v_e(s)$,

$$(14)\quad \frac{E\,I_m}{F\,l^2}\,v_e(\zeta) - \zeta\int_0^{0,5}\frac{v_e(s)}{i(s)}\,d\,s + \int_0^{\zeta}\frac{v_e(s)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,d\,s =$$

$$= \zeta\int_0^{0,5}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,d\,s - \int_0^{\zeta}\frac{v^*(s)}{i(s)}\,(\zeta-s)\,d\,s.$$

Derivando si ottiene

$$\frac{E I_m}{F l^2} \frac{d v_e}{d \zeta} - \int_0^{0,5} \frac{v_e(s)}{i(s)} d s + \int_0^{\zeta} \frac{v_e(s)}{i(s)} d s = \int_0^{0,5} \frac{v^*(s)}{i(s)} d s - \int_0^{\zeta} \frac{v^*(s)}{i(s)} d s,$$

e derivando ancora

$$\frac{E I_m}{F l^2} \frac{d^2 v_e}{d \zeta^2} + \frac{v_e(\zeta)}{i(\zeta)} = - \frac{v^*(\zeta)}{i(\zeta)}.$$

Questa può scriversi ancora

$$\frac{E I_m}{F l^2} \frac{d^2 v_e}{d z^2} l^2 + \frac{v_e(z)}{i(z)} = - \frac{v^*(z)}{i(z)}$$

e cioè

$$\frac{d^2 v_e}{d z^2} + \frac{F}{E I(z)} v_e = - \frac{F}{E I(z)} v^*(z). \tag{15}$$

È questa l'equazione differenziale della trave affetta da errori d'asse $v^*(z)$ e caricata di punta.

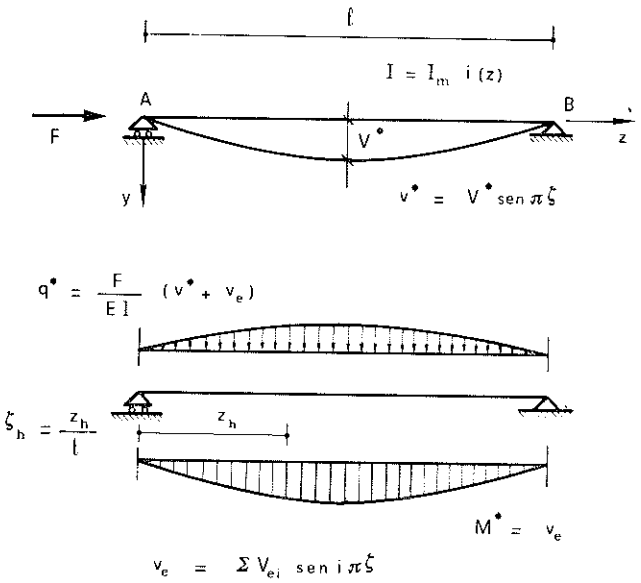


FIG. 2

Ponendo

$$v_e(\zeta) = \Sigma_i V_{ei} \operatorname{sen} i \pi \zeta \; (i = 1, 3, 5 \ldots . n) \tag{16}$$

e scrivendo la (14) per $\frac{n+1}{2}$ ascisse ζ_h si ottiene il sistema di $\frac{n+1}{2}$

equazioni algebriche lineari non omogenee nelle $\frac{n+1}{2}$ incognite V_{ei}:

$$\Sigma_i \left(\frac{E\, I_m}{F\, l^2}\, a_{hi} - b_{hi} \right) V_{ei} = c_h \quad (h,\, i = 1, 3, 5 \ldots n) \tag{17}$$

dove

$$a_{hi} = \operatorname{sen} i\,\pi\,\zeta_h \tag{18}$$

$$b_{hi} = \zeta_h \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{sen} i\,\pi\, s}{i\,(s)}\, d\, s - \int_0^{\zeta_h} \frac{\operatorname{sen} i\,\pi\, s}{i\,(s)} (\zeta - s)\, d\, s$$

$$c_h = \Sigma_i\, V_i^* \left[\zeta_h \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{sen} i\,\pi\, s}{i\,(s)}\, d\, s - \int_0^{\zeta_h} \frac{\operatorname{sen} i\,\pi\, s}{i\,(s)} (\zeta_h - s)\, d\, s \right].$$

L'equazione algebrica di grado $\frac{n+1}{2}$ in F

$$\det \left| \frac{E\, I_m}{F\, l^2}\, a_{hi} - b_{hi} \right| = 0 \tag{19}$$

fornisce il valore critico approssimato per F nella sua radice più bassa.

3. - La soluzione del problema in presenza di viscosità

La (13) è un'equazione di Volterra (degenere) rispetto a t, e di Volterra (degenere) Fredholm di II specie rispetto a ζ, nell'incognita funzione $\tilde{v}\,(\zeta, t)$.

Derivando rispetto a t si ottiene

$$\frac{d\,\tilde{v}\,(\zeta, t)}{d\,t} = \frac{F\, l^2}{E\, I_m}\, \zeta \left[\frac{d}{d\,t} \int_0^{0,5} \frac{\tilde{v}\,(s, t)}{i\,(s)}\, d\, s + \right. \tag{20}$$

$$\left. + \alpha\, \beta\, e^{-\beta t} \int_0^{0,5} \frac{v^*\,(s)}{i\,(s)}\, d\, s + \alpha\, \beta\, e^{-\beta t} \int_0^{0,5} \frac{\tilde{v}\,(s, t)}{i\,(s)}\, d\, s \right] -$$

$$- \frac{F\,l^2}{E\,I_m}\left[\frac{d}{d\,t}\int_0^{\zeta}\frac{\tilde{v}\,(s,\,t)}{i\,(s)}\,(\zeta - s)\,d\,s\,+\right.$$

$$\left.+\,\alpha\,\beta\,e^{-\beta t}\int_0^{\zeta}\frac{v^*\,(s)}{i\,(s)}\,(\zeta - s)\,d\,s\,+\,\alpha\,\beta\,e^{-\beta t}\int_0^{\zeta}\frac{\tilde{v}\,(s,\,t)}{i\,(s)}\,(\zeta - s)\,d\,s\right].$$

La (20) è accoppiata alle condizioni ai limiti in ζ

$$\zeta = 0 \rightarrow v = 0$$

$$\zeta = 1 \rightarrow v = 0,$$

che sono rispettate dalla posizione del tipo (16):

$$\tilde{v}\,(\zeta,\,t) = \Sigma_i\,\tilde{V}_i\,(t)\,\text{sen}\,i\,\pi\,\zeta \qquad (i = 1, 3, 5, \ldots n).$$

Le condizioni iniziali in t sono

$$t = t_F \rightarrow \tilde{V}_i\,(t) = V_{ei},$$

soluzioni del problema in assenza di viscosità (par. 2).

Si può risolvere la (20), e cioè ottenere le $\frac{n+1}{2}$ funzioni $\tilde{V}_i\,(t)$ della (22), per via numerica, con lo stesso procedimento usato nel par. 2 per il calcolo delle V_{ei}; e cioè si impone l'uguaglianza (20) in $\frac{n+1}{2}$ sezioni, con riferimento alle variazioni $\Delta\,\tilde{v}$ nei successivi intervalli di tempo $\Delta\,t$ a partire da t_F. Il procedimento è quindi quello di Runge e Kutta. La (20) porge così $\zeta = \zeta_h$, ed al tempo t,

$$(21) \qquad \Sigma_i\,\Delta\,\tilde{V}_i\,\text{sen}\,i\,\pi\,\zeta_h = \frac{F\,l^2}{E\,I_m}\,\zeta_h\left[\,\Sigma_i\,\Delta\,\tilde{V}_i\int_0^{0,5}\frac{\text{sen}\,i\,\pi\,s}{i\,(s)}\,d\,s\,+\right.$$

$$+\,\alpha\,\beta\,e^{-\beta t}\,\Delta\,t\,\Sigma_i\,V_i^*\int_0^{0,5}\frac{\text{sen}\,i\,\pi\,s}{i\,(s)}\,d\,s\,+\,\alpha\,\beta\,e^{-\beta t}\,\Delta\,t\,\Sigma_i\,\tilde{V}_i\int_0^{0,5}\frac{\text{sen}\,i\,\pi\,s}{i\,(s)}\,d\,s\left.\right] -$$

$$- \frac{F\,l^2}{E\,I_m}\left[\,\Sigma_i\,\Delta\,\tilde{V}_i\int_0^{\zeta_h}\frac{\text{sen}\,i\,\pi\,s}{i\,(s)}\,(\zeta_h - s)\,d\,s\,+\right.$$

$$+ \alpha\beta e^{-\beta t} \Delta t \, \Sigma_i \, V_i^* \int_0^{\zeta_h} \frac{\operatorname{sen} i\pi s}{i(s)} (\zeta_h - s) \, ds +$$

$$+ \alpha\beta e^{-\beta t} \Delta t \, \Sigma_i \, \bar{V}_i \int_0^{\zeta_h} \frac{\operatorname{sen} i\pi s}{i(s)} (\zeta_h - s) \, ds \Big].$$

Per ogni tempo **t**, a partire da t_F e con incrementi Δt anche variabili — converrà anzi che i primi intervalli siano più brevi — le (21) sono $\frac{n+1}{2}$ equazioni algebriche lineari non omogenee negli $\frac{n+1}{2}$ incrementi $\Delta \bar{V}_i$.

Le $\bar{V}_i$ sono quelle al tempo **t**, e quindi sono la somma delle $\bar{V}_i$ iniziali e degli incrementi $\Delta \bar{V}_i$ fino al tempo **t**.

4. - Un esempio numerico

Si prenda in esame la trave della fig. 3; il momento d'inerzia varia con legge parabolica:

$$i(s) = \rho + 4(1 - \rho) s (1 - s), \tag{22}$$

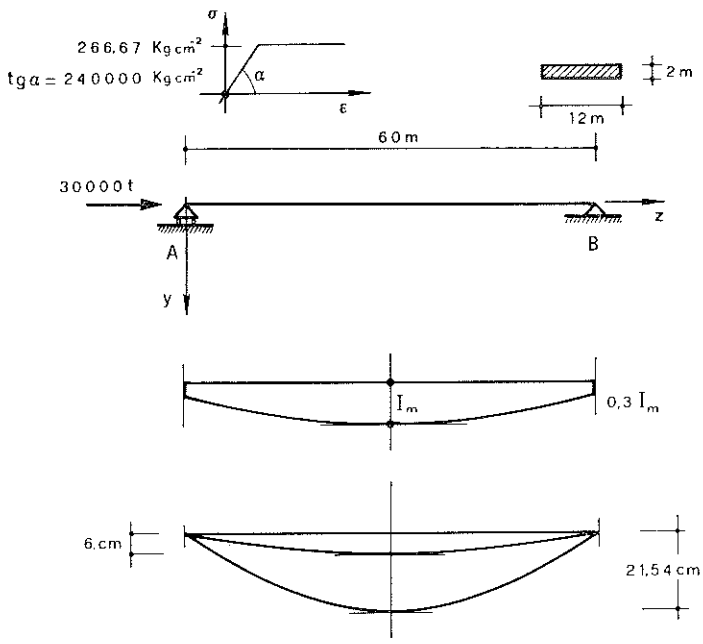


FIG. 3

dove

$$\rho = \frac{I_A}{I_m} = \frac{I_B}{I_m},$$

ed $s = \frac{z}{l}$. La legge (22) è simmetrica, e soddisfa le condizioni

$$s = 0 \quad \rightarrow i = \rho$$

$$s = 0{,}5 \rightarrow i = 1$$

$$s = 1 \quad \rightarrow i = \rho.$$

Nella scrittura delle (21) ci si è limitati a tre incognite, e cioè alle $\tilde{V}_1(t)$, $\tilde{V}_3(t)$, $\tilde{V}_5(t)$; questo perché si è voluto affrontare il problema usando un calcolatore programmabile portatile a schede magnetiche abilitato a risolvere sistemi di ordine massimo pari a tre.

Gli integrali da calcolare sono del tipo

$$J_i = \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{sen} i\pi s}{\rho + 4(1-\rho)s(1-s)}\, ds \tag{23}$$

e

$$J_{hi} = \int_0^{\zeta_h} \frac{\operatorname{sen} i\pi s}{\rho + 4(1-\rho)s(1-s)}(\zeta_h - s)\, ds. \tag{24}$$

Nella fig. 4 è trascritto il listing della scheda 1, prima faccia, su cui è registrato il programma per il calcolo di J_i ed J_{hi}. L'input è

$$n \rightarrow \mathbf{2} \qquad i \rightarrow \mathbf{A} \qquad \rho \rightarrow \mathbf{B} \qquad \zeta_h \rightarrow \mathbf{C}.$$

L'operazione **A** porta alla stampa di J_i; l'operazione **B** a quella di J_{hi}; n è il numero di intervalli in cui si suddivide l'intervallo di integrazione. Oltre a stamparli, l'operazione **A** porta J_i in **7**, J_{hi} in **8**.

Il programma, modificando la subroutine 1, è valido anche per leggi di variazione $i(s)$ diverse dalla (22).

Nella tab. 1 sono riportati i valori di J_i ed J_{hi} per $t = 0{,}3$, e per le ascisse

$$\zeta_1 = \frac{1}{6}$$

$$\zeta_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \tag{25}$$

$$\zeta_5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

001	*LBLA	029	GTOC	057	RCLA	085	STO1
002	0	030	RCL4	058	×	086	GSB2
003	STO0	031	RCL3	059	Pi	087	RCL5
004	0	032	×	060	×	088	+
005	.	033	2	061	R→D	089	ST+4
006	5	034	÷	062	SIN	090	DSZI
007	STO1	035	PRTX	063	×	091	GTOD
008	RCL2	036	STO7	064	RTN	092	RCL4
009	STOI	037	0	065	*LBLB	093	RCL3
010	RCL1	038	STO4	066	0	094	×
011	RCL0	039	RTN	067	STO0	095	2
012	−	040	*LBL1	068	RCLC	096	÷
013	RCL2	041	STO6	069	STO1	097	PRTX
014	÷	042	1	070	RCL2	098	STO8
015	STO3	043	−	071	STOI	099	0
016	*LBLC	044	CHS	072	RCL1	100	STO4
017	RCL1	045	RCL6	073	RCL0	101	RTN
018	GSB1	046	×	074	−	102	*LBL2
019	STO5	047	1	075	RCL2	103	GSB1
020	RCL1	048	RCLB	076	÷	104	RCLC
021	RCL3	049	−	077	STO3	105	RCL6
022	−	050	×	078	*LBLD	106	−
023	STO1	051	4	079	RCL1	107	×
024	GSB1	052	×	080	GSB2	108	RTN
025	RCL5	053	RCLB	081	STO5	109	R/S
026	+	054	+	082	RCL1		
027	ST+4	055	1/X	083	RCL3		
028	DSZI	056	RCL6	084	−		

FIG. 4

TABELLA 1

n	10	50	100
J_1	0,379504	0,381552	0,381617
J_3	0,216251	0,222414	0,222611
J_5	0,149756	0,160095	0,160422
J_{11}	4,790002 −03	4,844753 −03	4,846469 −03
J_{13}	1,306100 −02	1,320919 −02	1,321383 −02
J_{15}	1,799878 −02	1,820823 −02	1,821480 −02
J_{31}	2,854894 −02	2,893853 −02	2,895083 −02
J_{33}	5,951425 −02	6,043377 −02	6,046284 −02
J_{35}	5,082463 −02	5,227728 −02	5,232313 −02
J_{51}	7,753985 −02	7,875938 −02	7,879830 −02
J_{53}	1,059579 −01	1,088236 −01	1,089154 −01
J_{55}	6,595532 −02	7,130726 −02	7,147699 −02

si sono calcolati J_i ed J_{hi} per $n = 10, 50, 100$, onde trarre indicazioni sul grado di approssimazione dei risultati.

Con la simbologia (23) e (24), le (21) si scrivono

$$\Sigma_i \, p_{hi} \, \Delta \, \bar{V}_i = \alpha \, \beta \, e^{-\beta t} \, q_h \, \Delta \, t \qquad (h, \, i = 1, 3, 5 \ldots n) \tag{26}$$

dove

$$\begin{aligned} p_{hi} &= \operatorname{sen} i \, \pi \, \zeta_h + \frac{F \, l^2}{E \, I_m} (J_{hi} - J_i \, \zeta_h) \\ q_h &= \frac{F \, l^2}{E \, I_m} \Sigma_i \, V_i \, (J_i \, \zeta_h - J_{hi}). \end{aligned} \tag{27}$$

Nella fig. 5 è riportato il listing della scheda 2, relativo alla risoluzione di un sistema di tre equazioni algebriche lineari

$$a_{11} \, x + a_{12} \, y + a_{13} \, z = c_1$$

$$a_{21} \, x + a_{22} \, y + a_{23} \, z = c_2$$

$$a_{31} \, x + a_{32} \, y + a_{33} \, z = c_3$$

L'imput è

$a_{11} \rightarrow \mathbf{1}$ $\quad a_{12} \rightarrow \mathbf{4}$ $\quad a_{13} \rightarrow \mathbf{7}$

$a_{21} \rightarrow \mathbf{2}$ $\quad a_{22} \rightarrow \mathbf{5}$ $\quad a_{23} \rightarrow \mathbf{8}$

$a_{31} \rightarrow \mathbf{3}$ $\quad a_{32} \rightarrow \mathbf{6}$ $\quad a_{33} \rightarrow \mathbf{9}$

$c_1 \rightarrow \mathbf{A}$ $\quad c_2 \rightarrow \mathrm{B}$ $\quad c_3 \rightarrow \mathbf{C}$.

La manovra *f* PRINT REG fa stampare di seguito le tre colonne dei coefficienti e quella dei termini noti.

La manovra *f* **A** fa stampare la colonna delle incognite $x \, y \, z$; la manovra *f* **B** fa stampare nell'ordine le tre colonne della matrice inversa A^{-1}; la manovra *f* **C** fa stampare il determinante di A.

A tale proposito si osservi che i due programmi delle schede 1 e 2 sono anche forniti dalle case produttrici del calcolatore; si è qui preferito elaborarli ex novo per motivi di uniformità di stile.

Nella scheda 1 seconda faccia, il cui listing è riportato nella fig. 6, è programmato il calcolo di p_{hi} e q_h.

La manovra

$$E \uparrow I_m \uparrow F \uparrow l \; \mathbf{A}$$

porta $\dfrac{F \, l^2}{E \, I_m}$ nello ST 0.

001	*LBL0	052	RCL2	103	×	154	RCL1
002	×	053	RCL9	104	RCLE	155	RCL7
003	R↓	054	RCL8	105	+	156	STO1
004	×	055	RCL3	106	RCLD	157	X⇄Y
005	R↑	056	GSB0	107	÷	158	STO7
006	−	057	RCLA	108	P⇄S	159	RCL2
007	RTN	058	CHS	109	STO3	160	RCL8
008	*LBLo	059	×	110	P⇄S	161	STO2
009	GSBc	060	RCLE	111	PRTX	162	X⇄Y
010	RCL5	061	+	112	RTN	163	STO8
011	RCL9	062	STOE	113	*LBLb	164	RCL3
012	RCL8	063	RCL2	114	1	165	RCL9
013	RCL6	064	RCLC	115	STOA	166	STO3
014	GSB0	065	RCLB	116	0	167	X⇄Y
015	RCLA	066	RCL3	117	STOB	168	STO9
016	×	067	GSB0	118	0	169	P⇄S
017	STOE	068	RCL7	119	STOC	170	RTN
018	RCLB	069	×	120	GSBo	171	*LBLc
019	RCL9	070	RCLE	121	P⇄S	172	RCL5
020	RCL8	071	+	122	RCL1	173	RCL9
021	RCLC	072	RCLD	123	STO7	174	×
022	GSB0	073	÷	124	RCL2	175	RCL8
023	RCL4	074	P⇄S	125	STO8	176	RCL6
024	CHS	075	STO2	126	RCL3	177	×
025	×	076	P⇄S	127	STO9	178	−
026	RCLE	077	PRTX	128	P⇄S	179	RCL1
027	+	078	RCL5	129	SPC	180	×
028	STOE	079	RCLC	130	0	181	RCL3
029	RCLB	080	RCLB	131	STOA	182	RCL8
030	RCL6	081	RCL6	132	1	183	×
031	RCL5	082	GSB0	133	STOB	184	RCL2
032	RCLC	083	RCL1	134	0	185	RCL9
033	GSB0	084	×	135	STOC	186	×
034	RCL7	085	STOE	136	GSBo	187	−
035	×	086	RCL2	137	P⇄S	188	RCL4
036	RCLE	087	RCLC	138	RCL1	189	×
037	+	088	RCLB	139	STO4	190	+
038	RCLD	089	RCL3	140	RCL2	191	RCL2
039	÷	090	GSB0	141	STO5	192	RCL6
040	P⇄S	091	RCL4	142	RCL3	193	×
041	STO1	092	CHS	143	STO6	194	RCL5
042	P⇄S	093	×	144	P⇄S	195	RCL3
043	PRTX	094	RCLE	145	SPC	196	×
044	RCLB	095	+	146	0	197	−
045	RCL9	096	STOE	147	STOA	198	RCL7
046	RCL8	097	RCL2	148	0	199	×
047	RCLC	098	RCL6	149	STOB	200	+
048	GSB0	099	RCL5	150	1	201	STOD
049	RCL1	100	RCL3	151	STOC	202	RTN
050	×	101	GSB0	152	GSBo	203	R/S
051	STOE	102	RCLA	153	P⇄S		

FIG. 5

La successiva manovra

$$\zeta_h \rightarrow \mathbf{1} \qquad i \rightarrow \mathbf{2}$$

$$J_i \rightarrow \mathbf{3} \qquad J_{hi} \rightarrow \mathbf{4}\ \mathbf{B}$$

fa stampare p_{hi}.

001	*LBLA	015	×	029	RTN	043	RCL6
002	X^2	016	R→D	030	*LBLC	044	×
003	×	017	SIN	031	RCL1	045	+
004	$X \rightleftarrows Y$	018	RCL0	032	R/S	046	RCL1
005	÷	019	RCL1	033	×	047	R/S
006	$X \rightleftarrows Y$	020	×	034	R/S	048	×
007	÷	021	RCL3	035	−	049	R/S
008	STO0	022	×	036	RCL5	050	−
009	RTN	023	−	037	×	051	RCL7
010	*LBLB	024	RCL0	038	RCL1	052	×
011	RCL1	025	RCL4	039	R/S	053	+
012	RCL2	026	×	040	×	054	PRTX
013	×	027	+	041	R/S	055	RTN
014	Pi	028	PRTX	042	−	056	R/S

FIG. 6

Infine la manovra

$$V_1 \rightarrow \mathbf{5} \qquad V_3 \rightarrow \mathbf{6} \qquad V_5 \rightarrow \mathbf{7}\ \mathbf{C}$$

$$J_1\ R/S \quad J_{h1}\ R/S \quad J_3\ R/S \quad J_{h3}\ R/S \quad J_5\ R/S \quad J_{h5}\ R/S$$

fa stampare q_h.

Nel caso in esame si assume l'imperfezione come sinusoide del primo ordine, di ampiezza massima V^* pari ad 1/1000 della luce:

$$v^* = V^* \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l};$$

quindi

$$V_1^* = 6 \text{ cm}$$

$$V_3^* = V_5^* = 0.$$

Si suppone che la resistenza caratteristica σ_k del conglomerato sia pari a 400 Kg cm^{-2}, e quindi la resistenza di calcolo pari a

$$\sigma_c = \frac{400}{1{,}5} = 266{,}67 \text{ Kg cm}^{-2}.$$

Inoltre la E caratterristica è

$$E_k = 18.000 \sqrt{400} = 360.000 \text{ Kg cm}^{-2}$$

e quella di calcolo

$$E_c = \frac{360.000}{1,5} = 240.000 \text{ Kg cm}^{-2}.$$

Risulta poi

$$I_m = 8 \text{ m}^4$$

$$A = 24 \text{ m}^2;$$

essendo $\rho = 0,3$, e quindi

$$I_A = I_B = 2,4 \text{ m}^4,$$

la dimensione minore della sezione si riduce a 1,339 m, e l'area a 16,07 m^2.

Sia infine la F di calcolo pari a 30.000t. Risulta così

$$\sigma_A = \frac{30000}{10 \cdot 16,07} = 187 \text{ Kg cm}^{-2}$$

$$\frac{F\, l^2}{E\, I_m} = 5,625.$$

La (17) si scrive, con le notazioni (27),

$$\Sigma_i\, p_{hi}\, V_{ei} = \frac{F\, l^2}{E\, I_m} \Sigma\, V_i^* (\zeta_h\, J_i - J_{hi}) = q_h. \tag{28}$$

Le (28) si esplicano nelle seguenti matrici, con riferimento alle ζ_h già fissate (25):

$$\begin{vmatrix} 0,1695 & 0,8656 & 0,4521 \\ 0,3133 & -0,0773 & -0,8725 \\ 0,3699 & -1,0134 & 0,9509 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3,5254 \cdot 10^{-3} \\ 5,8953 \cdot 10^{-3} \\ 6,7206 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix}. \tag{29}$$

La soluzione è

$$V_{e1} = 1,8996 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$V_{e3} = 3,3477 \cdot 10^{-4} \text{ m} \tag{30}$$

$$V_{e5} = 3,4817 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

La matrice dei coefficienti del sistema (28), per F generico, è (27)

$$\begin{vmatrix} (0{,}5 - 5{,}8756 \cdot 10^{-2}\,\alpha) & (1 - 2{,}3888 \cdot 10^{-2}\,\alpha) & (0{,}5 - 8{,}5222 \cdot 10^{-3}\,\alpha) \\ (0{,}8660 - 9{,}8255 \cdot 10^{-2}\,\alpha) & (-\,1{,}3741 \cdot 10^{-2}\,\alpha) & (-\,0{,}8660 - 1{,}1509 \cdot 10^{-3}\,\alpha) \\ (1 - 1{,}1201 \cdot 10^{-1}\,\alpha) & (-\,1 - 2{,}3955 \cdot 10^{-3}\,\alpha) & (1 - 8{,}7340 \cdot 10^{-3}\,\alpha) \end{vmatrix}$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{F\,l^2}{E\,I_m}\,.$$

Uguagliando il determinante della matrice a zero si ha l'equazione cubica in α:

$$2{,}156 \cdot 10^{-5}\,\alpha^3 - 6{,}080 \cdot 10^{-3}\,\alpha^2 + 3{,}479 \cdot 10^{-1}\,\alpha - 2{,}598 = 0,$$

le cui radici sono

$$\alpha_1 = 8{,}77$$
$$\alpha_3 = 66{,}44$$
$$\alpha_5 = 206{,}79.$$

Il carico critico è perciò

(31)
$$F_c = 8{,}77\,\frac{E\,I_m}{l^2} = 46773,$$

cui corrisponde

$$\sigma_A = \frac{46773}{10 \cdot 16{,}07} = 291 \text{ Kg cm}^{-2},$$

lievemente superiore alla resistenza di calcolo.

Si noti come α_1 sia compreso tra i valori π^2 e $0{,}3\,\pi^2$, conformemente alla diseguaglianza di Dunkerley.

Dalle (30) si trae che per $t = t_F = 0$ (la forza F agisce all'atto della maturazione della trave) è

$$V_1 = V_{e1} + V_1^* = 7{,}899 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$
$$V_3 = V_{e3} = 3{,}348 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$
$$V_5 = V_{e5} = 3{,}482 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

I p_{hi} del sistema (26) sono sempre quelli della prima delle due matrici (29); essi possono essere posti nei nove registri protetti, per poterli richiamare in blocco, in ogni ciclo, quando occorre risolvere (scheda 2) il sistema (26).

I q_h invece vanno calcolati in ogni ciclo, in relazione ai V_i presenti all'inizio di tale ciclo (27).

Nella tabella 2 sono riportati i risultati dei calcoli per $\alpha = 3$, e $\beta = 1$ anno^{-1}; gli intervalli $\Delta\,t$ sono più ristretti all'inizio del processo, come consigliato dalla natura del fenomeno.

TABELLA 2

(*t in anni*, V *in m*)

t	Δt	V_1	V_3	V_5	$\alpha \beta_e^{-\beta t} q_1 \Delta t$	$\alpha \beta_e^{-\beta t} q_3 \Delta t$	$\alpha \beta_e^{-\beta t} q_5 \Delta t$	$\Delta \bar{v}_1$	$\Delta \bar{v}_3$	$\Delta \bar{v}_5$
0	0,1	7,899 −02	3,348 −04	3,482 −05	1395 −06	2330 −06	2655 −06	7,509 −03	1,339 −04	1,393 −05
0,1	0,1	8,650 −02	4,682 −04	4,892 −05	1390 −06	2320 −06	2644 −06	7,478 −03	1,340 −04	1,435 −05
0,2	0,1	9,398 −02	6,022 −04	6,327 −05	1360 −06	2270 −06	2586 −06	7,316 −03	1,314 −04	1,368 −05
0,3	0,1	1,013 −01	7,336 −04	7,695 −05	1327 −06	2214 −06	2522 −06	7,136 −03	1,286 −04	1,346 −05
0,4	0,1	1,084 −01	8,622 −04	9,041 −05	1285 −06	2144 −06	2442 −06	6,910 −03	1,246 −04	1,293 −05
0,5	0,1	1,153 −01	9,868 −04	1,033 −04	1237 −06	2064 −06	2350 −06	6,651 −03	1,203 −04	1,213 −05
0,6	0,1	1,219 −01	1,107 −03	1,154 −04	1184 −06	1974 −06	2248 −06	6,363 −03	1,156 −04	1,209 −05
0,7	0,1	1,283 −01	1,223 −03	1,275 −04	1127 −06	1880 −06	2141 −06	6,059 −03	1,096 −04	1,131 −05
0,8	0,1	1,344 −01	1,333 −03	1,388 −04	1069 −06	1782 −06	2015 −06	5,731 −03	1,094 −04	0,605 −05
0,9	0,1	1,401 −01	1,442 −03	1,448 −04	1004 −06	1673 −06	1900 −06	5,388 −03	1,001 −04	0,864 −05
1	0,25	1,455 −01	1,542 −03	1,534 −04	2369 −06	4006 −06	4464 −06	1,279 −02	2,435 −04	−2,080 −05
1,25	0,25	1,583 −01	1,786 −03	1,326 −04	1999 −06	3331 −06	3784 −06	1,073 −02	1,991 −04	1,757 −05
1,5	0,25	1,690 −01	1,985 −03	1,502 −04	1670 −06	2783 −06	3168 −06	0,866 −02	2,343 −04	−3,608 −05
1,75	0,25	1,777 −01	2,219 −03	1,141 −04	1367 −06	2268 −06	2595 −06	0,733 −02	1,335 −04	2,038 −05
2	0,50	1,850 −01	2,353 −03	1,345 −04	2219 −06	3697 −06	4208 −06	1,192 −02	2,183 −04	2,244 −05
2,5	0,50	1,969 −01	2,571 −03	1,569 −04	1432 −06	2386 −06	2716 −06	0,769 −02	1,407 −04	1,451 −05
3	0,50	2,046 −01	2,712 −03	1,714 −04	894 −06	1496 −06	1700 −06	0,482 −02	0,864 −04	0,676 −05
3,5	0,50	2,094 −01	2,798 −03	1,782 −04	558 −06	933 −06	1063 −06	0,301 −02	0,532 −04	0,532 −05
4		2,124 −01	2,851 −03	1,835 −04						

Come può osservarsi dalla fig. 7, il fenomeno a quattro anni è pressocché concluso. La v in mezzeria è

$$v\left(\frac{l}{2},\ 4\ \text{anni}\right) = 20{,}98\ \text{cm};$$

l'influenza della armonica di ordine tre è dell'1,5 %, quella della armonica di ordine cinque è dello 0,1 %.

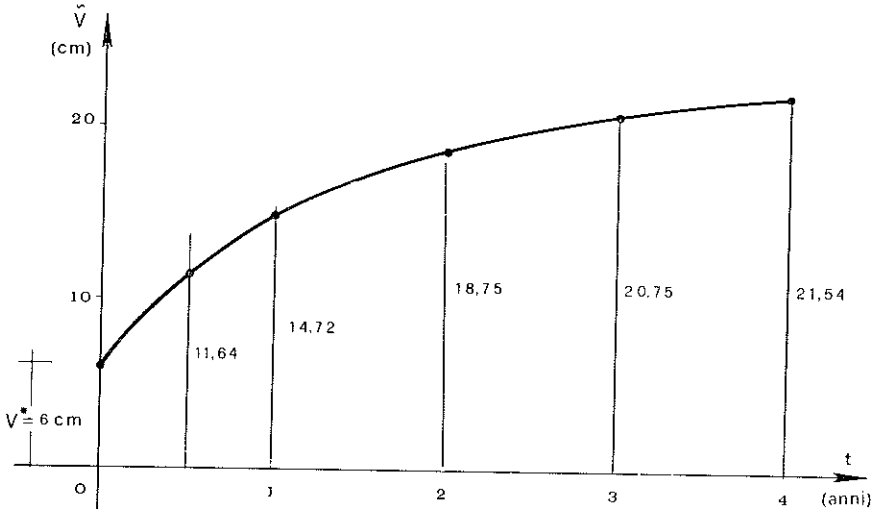


FIG. 7

Mentre l'imperfezione iniziale V* è dell'1 ‰ rispetto alla luce, la V a quattro anni è del 3,50 ‰; se si impone come limite per lo spostamento il 5 ‰, si è in condizioni di sicurezza sotto tale aspetto.

In mezzeria è poi

$$\sigma_{max} = \sigma_m \frac{\frac{h}{6} + e}{\frac{h}{6}} = -\frac{30000}{24 \cdot 10}\,\frac{33{,}33 + 20{,}98}{33{,}33} = -\ 204\ \text{Kg cm}^{-2}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m \frac{\frac{h}{6} - e}{\frac{h}{6}} = -\frac{30000}{24 \cdot 10}\,\frac{33{,}33 - 20{,}98}{33{,}33} = -\ 46\ \text{Kg cm}^{-2},$$

e quindi si è in condizioni di sicurezza anche nei riguardi delle sollecitazioni ai lembi.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. KRALL, *Statica dei mezzi viscosi e sue applicazioni,* Rendiconto Accademia Lincei, Roma, febbraio 1947.

[2] V. FRANCIOSI, *Contributo allo studio delle strutture iperstatiche in regime viscoso,* L'Ingegnere, Milano 1950.

[3] F. LEVI, *L'instabilità dell'equilibrio in regime elastico viscoso,* Giornale Genio Civile, febbraio 1950.

[4] V. FRANCIOSI, *In tema di archi sottili in regime viscoso,* Rendiconto Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli 1951.

[5] V. FRANCIOSI, *Le aste sottili pressoinflesse in regime viscoso,* Rendiconto Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli 1952.

[6] V. FRANCIOSI, *La viscosità del conglomerato in relazione al carico di punta,* Fondazione Pontello. (Conferenza tenuta per la fondazione Pontello). Firenze, giugno 1978.

[7] P. BELLI - V. FRANCIOSI, *Coefficienti* ω *modificati per le verifiche al carico di punta in regime viscoso, Industria Italiana del Cemento,* ottobre 1978.

[8] *Istruzioni per la progettazione e l'esecuzione delle opere in cemento armato col metodo semiprobabilistico agli stati limite,* Consiglio Nazionale delle Ricerche, Bollettino Ufficiale n. 58 del 31 gennaio 1978, Roma.

[9] *Systéme International de Réglementation Technique Unifieé des Structures.* Vol I: *Regles Unifieé Communes aux Differents Types d'Ouvrages e de Materiaux;* Vol. II: *Code - Modele CEB-FIP pour les Structures en Beton,* 3ª ed. (31 mars 1978) des Recommandations Internationales CEB-FIP.

[10] *Norme tecniche per l'esecuzione delle opere in c.a. e c.a.p. per le strutture metalliche,* Ministero L.L.P.P., 19 luglio 1978.

[11] *Criteri generali per la verifica della sicurezza delle costruzioni e norme tecniche per i carichi e i sovraccarichi,* D.M. 3 ottobre 1978.

ε-NAD as a substrate in ADP-ribosylation reactions

Nota di BENEDETTA FARINA, MARIA ROSARIA FARAONE MENNELLA
e ANNA MAURO
presentata dal socio ordinario VINCENZO LEONE

(Adunanza del 2 giugno 1979)

SUMMARY. — A fluorescent analog of the pyridine coenzyme NAD^+, nicotinamide (1, N^6-etheno)adenine dinucleotide (ε-NAD) has been used as a substrate in the reaction catalysed by a preparation of bull or rat testis poly(ADPR)polymerase (pApase). It has been shown that ε-NAD can adequately substitute for NAD^+ in this reaction. Column chromatography and electrophoretic analysis of 1.0 M NaCl extracts from bull and rat testis, and of histones preparations therefrom, have brought to evidence a labeled fraction, corresponding to a basic protein, the precise nature of which awaits final identification.

RIASSUNTO. — Un analogo fluorescente del coenzima piridinico NAD^+, l'(1, N^6-eteno)-adenina nicotinamide dinucleotide (ε-NAD), è stato impiegato come substrato nella reazione catalizzata da una preparazione di poli(ADPR)polimerasi (pApasi) di testicolo di toro o di ratto. Si è visto che l'ε-NAD può adeguatamente sostituire l'NAD in questa reazione. Analisi di cromatografia su colonna ed elettroforetiche di estratti in NaCl 1,0 M, nonché di preparazioni di istoni a partire da essi, hanno messo in evidenza una frazione marcata, che corrisponde a una proteina basica, la precisa natura chimica della quale attende una identificazione conclusiva.

A new pathway of NAD^+ metabolism has been recently brought to light, when it has been shown that this coenzyme can be split in such a way at the nicotinamide-ribose bond that the released ADPR residue is linked to a protein, other ADPR residues being subsequently linked each other, end-to-end, so that an essentially linear homopolymer is eventually bound to the acceptor protein. The responsible enzyme, poly(ADPR)polymerase, has been found in a number of tissues, almost always localised in the nucleus of cells. The importance of ADP-ribosylation reactions is considered to be relevant, ranging as it does from histone modifications, involving gene expression and chromatin structure, to enzyme modifications, leading to important, specific mechanisms of activity modulation. Usual procedure for detecting and

following ADP-ribosylation reactions consists in the use of radioactive NAD^+, most frequently ^{14}C-adenine coenzyme, as a substrate; after incubation, addition of cold 5 % TCA, followed by filtration, leaves on the filter all acid-insoluble radioactivity which corresponds to substrate incorporation. Although of relatively simple operation, this procedure is not ideal when dealing with identification of labeled bands of polyacrylamide gels after electrophoresis, or of eluted fractions from chromatography columns; in the first instance, recovery of radioactivity from sliced gels is far from quantitative and the whole procedure of slicing and dissolving the gel slices rather cumbersome, while in the second instance one is obliged to count for radioactivity most of the eluted fractions.

Nicotinamide (1,N^6-etheno)adenine dinucleotide (ε-NAD), a fluorescent analog of NAD^+, has been synthesised by Leonard and coworkers [1], and found to be a good substrate for a number of enzyme reactions requiring the presence of the dinucleotide as a coenzyme. In particular, it has been shown that with NAD-glycohydrolase a larger than 10 times increase in fluorescence is observed when the NAD^+ molecule is split at the nicotinamide-ribose bond, yielding free nicotinamide and adenosine diphosphate ribose (ADPR).

It appeared therefore promising to search for the use of ε-NAD as a substrate in reactions catalysed by pApase. This communication describes how a prealiminary research we have made on this subject has given favourable results.

Materials and methods

ε-NAD has been obtained from P-L Biochemicals, Inc. ^{14}C-(adenine)-nicotinamide dinucleotide, spec. act. 266 mCi/mmol, was a product of the Radiochemical Centre, Amersham, England. Calf thymus histones and dithiothreitol were obtained from Sigma.Li acetate and chloride, Na fluoride and all other reagents were of analytical grade. The pApase preparation utilised in this research was a 1.0 M NaCl extract of bull or rat testis; it was prepared by homogenising the tissue with a Potter glass homogenizer with Teflon pestle in 20 mM Tris-HCl pH 7.4 containing 5 mM NaF, 10 mM β-mercaptoethanol, 30 mM $Na_2S_2O_5$ and 0.1 M NaCl. After centrifuging, the sediment is discarded and the supernatant represents the active enzyme preparation.

Incubation mixtures contained in a final volume of 125 μl the enzyme preparation (40 to 80 μg protein), ε-NAD^+, 15 mmol (which is a value close to the K_M value), 90 mM Tris-HCl pH 8.0, 5 mM NaF, 10 mM dithiothreitol. Incubation time was from 5 to 20 min at 25°C. After

incubation, excess ε-NAD^+ is removed by dialysis against H_2O. Fluorescence is monitored by a short wavelength u.v.lamp. pApase activity is determined with the same enzyme preparation as above with all the same components of the incubation mixture described for ε-NAD, this being the only one which is substituted by ^{14}C-NAD, 39 pmol. After incubation, an equal volume of cold 20 % TCA is added, the precipitate is washed on a Millipore (HAWP 00010) filter with 20-30 volumes 5 % TCA, radioactivity is then determined by a liquid scintillation counter (Beckman LS-133).

One unit of pApase activity corresponds to the incorporation of one μmol NAD^+ in the acid-insoluble fraction in one minute at 25°C; activity is reported for convenience in milliunits. Histone fractions were prepared according to KISTLER *et al.* [2]. After homogenisation of the tissue with 0.4 N H_2SO_4 and centrifugation, the acid supernatant is fractionated with TCA, 3 % and 20 %.

Polyacrylamide gel electrophoresis at pH 2.9 has been performed according to PANYIM and CHALKLEY [3] with 15 % acrylamide containing 2.5 M urea and 0.9 N acetic acid. Runs were for 3 hr at 5 mA per tube. After staining by 0.25 % amidoblack in 7 % acetic acid, destaining was effected by 7 % acetic acid. Paper chromatography on Whatman No 1 filter paper was performed with a mixture of isobutyric acid, NH_4OH and H_2O (66:1:33) as a developing system. Following paper chromatography, high voltage electrophoresis was effected at 3,000 V utilising a system of pyridine-acetic acid-water (10 ml pyridine plus 100 ml acetic acid broupht to 3 liters with H_2O).

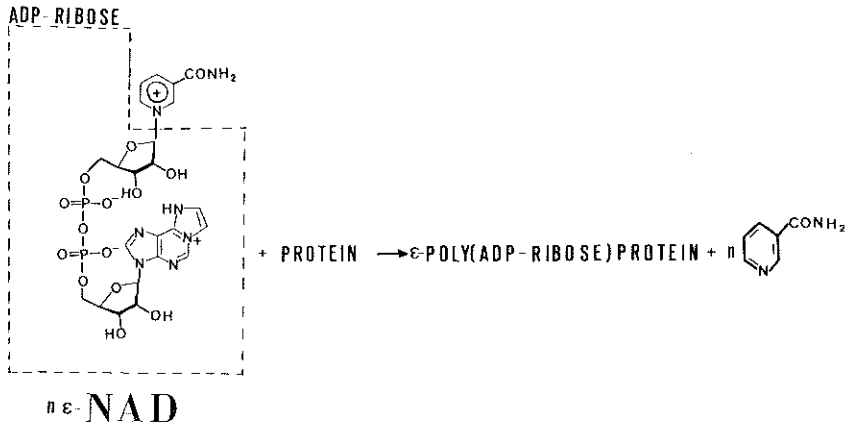
Column chromatography on CM-Cellulose 32 (Whatman) was performed according to WIGLE and DIXON [4].

RESULTS

ε-NAD can substitute for NAD in reactions catalysed by pApase. This result has been obtained in a number of experiments from which, although a quantitative fluorescence determination was not carried out, it could be seen that the level of detection of fluorescence in ADP-ribosylated preparations, either crude or purified, was at least comparable to that characteristic for the radioactive assay.

Both the crude 1.M NaCl extract from bull testis, after incubation with ε-NAD, and the histones prepared therefrom, have been analysed by polyacrylamide gel electrophoresis at pH 2.9. The 1.0 M NaCl extract and the 20 % TCA histone fraction showed a marked fluorescent band after the electrophoresis run; by comparison with a similar gel stained with amidoblack this band has been found to correspond to

a protein fraction characterised by high mobility. The fluorescent band has proved to be identical with the band which is radioactively labeled in similar experiments, in which ^{14}C-NAD was added as a substrate instead of ε-NAD. The 3 % TCA fraction of histones, on the other hand, has failed to show any fluorescent band. Essentially identical results were obtained in a number of similar experiments with rat testis enzyme preparations.



n ε-NAD

ε-NAD$^+$ as a substrate of poly(ADPR)polymerase

When a 20 % TCA histone preparation from ε-NAD-incubated rat testis homogenate was analysed by column chromatography on CM-Cellulose 32, a fluorescent fraction was obtained on gradient elution by 0.01 M Li acetate pH 5.0 containing LiCl from 0.15 to 0.75 M; the fluorescent fraction was eluted between 0.5 and 0.6 M LiCl. This fraction, on polycrylamide gel electrophoresis at pH 2.9, showed the fluorescence to be associated with a protein band, apparently markedly basic in character.

In still another experiment, a 1.0 M NaCl extract from rat testis, 2 ml, was incubated with ε-NAD in the usual conditions, in a final volume of 12.5 ml; after 20 min at 25°C the incubated mixture was dialysed and lyophylised. The preparation was then subjected to paper chromatography and electrophoresis. After the electrophoretic run at pH 3.5, a fluorescent spot was detected which on paper chromatography corresponded to a spot with a high R_F value. When the same runs were effected in the presence of a mixture of calf thymus histones as markers, it could be seen that the fluorescent spot had a migration rate which was still greater than that of the histones.

CONCLUSIONS

The experiments reported in this communication show that when ε-NAD is used as a substrate in incubation mixtures with pApase preparations from bull or rat testes, a labeled, fluorescent protein appears to be the main product of the enzymic reaction. This protein, on the basis of its electrophoretic behaviour, is markedly basic. Parallel experiments with ^{14}C-NAD, instead of ε-NAD, as a substrate, give similar results. It is well known that histones are the proteins which most frequently act as ADPR-acceptors, histone H1 in particular. In our experiments, in which calf thymus histone preparations were used as markers, ADP-ribosylation of histone H1 does not seem to be a major fenomenon. From our results it may be drawn the conclusion that ε-NAD can efficiently substitute for NAD in pApase-catalysed reactions. Furthermore it would appear that the basic protein which results to be ADP-ribosylated, found in our experiments with bull or rat testis preparations, is in many ways similar to the « testis specific protein », a low-molecular weight basic protein, shown by KISTLER *et al.* [2] to be present in testis of sexually mature mammals. On the other hand also the so-called HMG (high mobility group) proteins, an important non-histone component of chromatin proteins, has to be taken in consideration.

REFERENCES

[1] BARRIO J. R., SECRIST J. A. and LEONARD N. J., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **69**, 2039 (1972).

[2] KISTLER W. S., GEROCH M. E. and WILLIAMS-ASHMAN H. G., J. Biol. Chem., **248**, 4532 (1973).

[3] PANYIM S. and CHALKLEY R., Arch. Biochem. Biophys., **130**, 337 (1969).

[4] WIGLE D. T. and DIXON G. H., J. Biol. Chem., **246**, 5636 (1971).

Su di un'equazione lineare ellittico-parabolica a coefficienti continui

Nota di MICHELANGELO FRANCIOSI *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 2 giugno 1979)

RIASSUNTO. — Si prova un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet relativo all'operatore ellittico-parabolico $p\,D_x^4 + d\,D_t^4 + q\,D_t^3 + c$; si suppone che p, q siano continui in Ω, d appartenga a $C^1(\Omega)$, mentre c sia limitato e misurabile.

SUMMARY. — We proof an existence and unicity theorem for the Dirichlet problem concerning the elliptic-parabolic operator $p\,D_x^4 + d\,D_t^4 + q\,D_t^3 + c$; here p, q are continuous in Ω, d belongs to $C^1(\Omega)$, while c is bounded and measurable.

INTRODUZIONE

In un lavoro del 1956, D. GRECO [6] stabiliva un importante teorema di esistenza, che rispondeva in modo affermativo ad una congettura di C. Miranda: « Sia T un dominio dello spazio R^m, limitato e di classe $A^{(2,\lambda)}$ e sia $\varphi(x)$ una funzione di classe $C^{(2)}$ su ∂ T. Si supponga che i coefficienti a_{ij} dell'operatore ellittico $\mathfrak{M}\,u = \Sigma\, a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \Sigma\, b_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u$ siano di classe $C^{(\omega)}$ in T, che le funzioni b_i, c ed il termine noto f dell'equazione $\mathfrak{M}\,u = f$ siano ivi misurabili e limitati, e che inoltre riesca $c \leq 0$. Allora il problema di Dirichlet: $\mathfrak{M}\,u = f$, $u\,|_{\partial T} = \varphi$ ammette almeno una soluzione u di classe $C^{(1,\lambda)}$ in T, con qualunque $\lambda < 1$. Le derivate prime della u sono assolutamente continue rispetto ad ognuna delle variabili x_i, per quasi tutte le $(m-1)$-ple $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$. Le derivate seconde della u esistono quasi ovunque in T e sono sommabili con qualunque esponente $p > 1$. La u verifica quasi ovunque l'equazione ».

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

Tale risultato veniva stabilito sulla base di certe formole di maggiorazione ottenute dallo stesso D. GRECO in [5].

Successivamente, in un lavoro del 1971, M. CHICCO [4] studiava il problema di Dirichlet:

$$(0,1) \qquad L\,u = f,\ u \in H^{2,p}(\Omega) \cap H_o^{1,p}(\Omega),\ f \in L^p(\Omega),\ 1 < p < +\infty;$$

con condizioni al contorno omogenee, ma con il termine noto di tipo più generale. L era un operatore del secondo ordine uniformemente ellittico, in cui i coefficienti delle derivate seconde erano uniformemente continui in Ω, mentre gli altri appartenevano ad opportune classi $L^q(\Omega)$; inoltre $\partial\,\Omega$ era localmente di classe $C^{(2)}$.

Detto c il coefficiente della u nell'operatore L, in [4] si stabiliva un teorema di esistenza ed unicità per il problema (0,1) se $\inf_{\Omega} c$ è positivo. Analogamente BRISH e YASKINA [2], dimostravano un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet:

$$(0,2) \qquad L\,u = f,\ u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_o^{m,p}(\Omega)$$

con L uniformemente fortemente ellittico e nessuna ipotesi di regolarità su $\partial\,\Omega$, dove i coefficienti di ordine massimo erano continui e gli altri appartenevano ad opportune classi L^q.

Analoghi risultati erano trovati nel 1976 da I. E. MOZOLEVSKII [7] per gli operatori quasi-ellittici.

Recentemente in [8] M. TRICARICO ha studiato un problema al contorno del tipo di Dirichlet per certi operatori ellittico-parabolici di ordine $2\,m$ a coefficienti $a_\alpha(x') \in C^{|\alpha|}(G)$; il dominio G è fatto in modo che l'ellitticità dell'operatore venga meno solo in certi sottoinsiemi cilindrici di G. In opportune ipotesi viene stabilito un teorema di esistenza ed unicità.

Nel presente lavoro, in un dominio rettangolare

$$\Omega = [0, \pi] \times [0, T] \subset R^2$$

considero un operatore ellittico-parabolico del quarto ordine:

$$(0,3) \qquad \begin{gathered} P = p(x')\,D_x^4 + q(x')\,D_t^3 + c(x') + d(x')\,D_t^4\ ; \\ x' = (x, t);\ d = 0 \text{ per } t \leq T_1 \text{ e per } t \geq T_2 \end{gathered}$$

che formalmente rientra tra quelli studiati in [8], ma nel quale nello stesso ordine di idee dei lavori [2], [4], [6] e [7] risultano indebolite le ipotesi qualitative sui coefficienti. Precisamente si suppone che

p, q siano continue in Ω, d appartenga a $C^4(\Omega)$ e c sia limitata e misurabile.

Per l'operatore P ora descritto, si considera un problema al contorno del tipo di Dirichlet, e si stabilisce un teorema di esistenza e di unicità, nell'ipotesi che $\inf_{\Omega} c(x')$ sia « abbastanza grande », e che l'oscillazione di $c(x')$ su Ω sia « non troppo grande ».

In mancanza di ciò si può solo dire che il problema posto è ad indice. Il metodo adoperato differisce da quello di [2], [4], [6]) e [7], e si basa sulla bigettività di un operatore ausiliario L (del tipo di P ma a coefficienti più regolari) e su di un lemma di suriettività stabilito recentemente da A. CANFORA in [3].

La materia è così distribuita.

Nel N. 1 si descrive l'operatore P e si pone il problema al contorno ad esso relativo; si ambienta tale problema in un opportuno spazio di Sobolev con peso, e si enuncia il teorema di esistenza ed unicità. Nei N. 2, 3 e 4 si stabiliscono alcune maggiorazioni utili per il seguito. Infine nel N. 5 si dimostra il teorema di esistenza ed unicità.

1. - POSIZIONE DEL PROBLEMA ED ENUNCIATO DEI RISULTATI

Nello spazio euclideo R^2 di generico punto $x' = (x, t)$, consideriamo gli insiemi:

$$\Omega = [0, \pi] \times [0, T], \quad \Omega_0 = [0, \pi] \times]T_1, T_2[, \quad 0 < T_1 < T_2 < T$$

$$\Omega_1 = [0, \pi] \times [0, T_1], \quad \Omega_2 = [0, \pi] \times [T_2, T]$$

$$\forall \eta \in \left]0, \frac{T_2 - T_1}{2}\right[, \quad \Omega_0^{\eta} = [0, \pi] \times [T_1 + \eta, T_2 - \eta].$$

Indicati con $\delta(x', G)$ la distanza euclidea tra il punto x' ed il sottoinsieme $G \subset R^2$, e con ϑ un numero > 0, poniamo:

$$\sigma \equiv \sigma(x') = \left[\frac{1}{2}\,\delta(x', \Omega_1 \cup \Omega_2)\right]^{4+\vartheta}$$

Prima ancora di porre il problema di cui intendiamo occuparci, giova ricordare una disuguaglianza che si desume facilmente da quella generale di Eherling (vedi [1] pag. 24):

PROPOSIZIONE 1.I — *Esiste una costante* $H > 0$ *dipendente solo da* Ω *tale che, per ogni* $\varepsilon \in]0,1]$ *e per ogni* $u \in L^2(\Omega)$ *dotata di derivate*

$D_x^4\ u \in L^2(\Omega)$ *e* $D_t^4\ u \in L^2(\Omega)$, *risulti*:

$$(1,1)\qquad \left.\begin{aligned} \| D_x^j\, u \|_0^2 &\leq \varepsilon^{4-j} \| D_x^4\, u \|_0^2 + H\, \varepsilon^{-j} \| u \|_0^2 \\ \| D_t^j\, u \|_0^2 &\leq \varepsilon^{4-j} \| D_t^4\, u \|_0^2 + H\, \varepsilon^{-j} \| u \|_0^2 \end{aligned}\right\} j = 1, 2, 3$$

D'ora in poi la lettera H indicherà la costante che interviene nelle disuguaglianze (1,1).

Un'altra disuguaglianza di carattere elementare, di cui avremo modo di valerci nel seguito, è espressa dalla seguente:

PROPOSIZIONE 1.II — *Esiste una costante* K′ *dipendente solo da* Ω *tale che, per ogni* $\varepsilon \in]0,1]$, *e per ogni* $u \in L^2(\Omega)$ *dotata di derivate* $D_x^i\ D_t^l\ u \in L^2(\Omega)$ (*con* $i + l \leq 3$), *risulti*:

$$\| D_x\, D_t^2\, u \|_0^2\,,\ \| D_t\, D_x^2\, u \|_0^2 \leq K' \left(\varepsilon \| D_t^3\, u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^3} \| D_x^3\, u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^3} \| u \|_0^2 \right)$$

Dim. — Come è noto, ad ogni $u \in \{u \in L^2(\Omega) : D_x^i\ D_t^l\ u \in L^2(\Omega),\ i + l \leq 3\}$ si può associare una $U \in W^{3,2}(R^2)$ tale che:

$$\begin{cases} U|_{\partial\Omega} = u,\ U|_{\complement K} \equiv 0 \\ \| D_x^i\, D_t^l\, u \|_{0,\Omega}^2 \leq \| D_x^i\, D_t^l\, U \|_{0,R^2}^2 \leq \\ \qquad\qquad \leq \mu\, [\| D_x^i\, D_t^l\, u \|_{0,\Omega}^2 + \| u \|_{0,\Omega}^2],\ i + l \leq 3 \end{cases}$$

dove K è un dominio contenente Ω al suo interno e μ è una costante dipendente *solo* da Ω. Si ha quindi:

$$\int_\Omega (D_x\, D_t^2\, u)^2\, dx\, dt \leq \int_{R^2} (D_x\, D_t^2\, U)^2\, dx\, dt = \int_{R^2} \xi^2\, \tau^4\, |\hat{U}(\xi,\tau)|^2\, d\xi\, d\tau$$

$$\leq \int_{R^2} \left(\frac{\xi^{2p}}{p\, \varepsilon^p} + \frac{\tau^{4q}\, \varepsilon^q}{q} \right) |\hat{U}(\xi,\tau)|^2\, d\xi\, d\tau;$$

pertanto, ponendo $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$ si ottiene:

$$\int_\Omega (D_x\, D_t^2\, u)^2\, dx\, dt \leq \frac{1}{3\, \varepsilon^3} \int_{R^2} \xi^6\, |\hat{U}|^2\, d\xi\, d\tau + \frac{2}{3}\, \varepsilon^{3/2} \int_{R^2} \tau^6\, |\hat{U}|^2\, d\xi\, d\tau$$

$$\leq \frac{2}{3}\,\varepsilon \,\| D_t^3 U \|^2_{0,R^2} + \frac{1}{3\,\varepsilon^3} \| D_x^3 U \|^2_{0,R^2} \leq$$

$$\leq \frac{2\,\mu}{3}\,\varepsilon \,\| D_t^3 u \|^2_{0,\Omega} + \frac{\mu}{3\,\varepsilon^3} \| D_x^3 u \|^2_{0,\Omega} + \left(\frac{2\,\mu}{3}\,\varepsilon + \frac{\mu}{3\,\varepsilon^3} \right) \| u \|^2_{0,\Omega} .$$

In modo analogo si maggiora $\| D_t D_x^2 u \|_0^2$.

Ciò premesso, consideriamo gli operatori lineari:

$$(1,3) \qquad \begin{aligned} P &= p(x') D_x^4 + d(x') D_t^4 + q(x') D_t^3 + c(x') \\ \Lambda &= D_x^4 + a(x') D_t^4 + D_t^3 - K D_t^2 + 1 \end{aligned}$$

sui cui coefficienti formuliamo le seguenti ipotesi:

A) $\begin{cases} p, q \in C^0(\Omega),\ d \in C^4(\Omega),\ c \in L^\infty(\Omega) \\ d > 0 \text{ in } \Omega,\ d \equiv 0 \text{ in } \Omega_1 \cup \Omega_2;\ \exists\, M, \gamma \text{ costanti tali che} \\ |p|, |q| \leq M,\ p, q > \gamma > 2\sqrt{6 + 5H} \end{cases}$

B) $\begin{cases} \text{esistono } n \text{ intero} > 1 \text{ e } \rho' \text{ reale} > 0 \text{ tali che} \\ c \geq \bar{c} \equiv n \max\limits_{\Omega} |D_t^4 d| > \gamma,\ a \equiv \dfrac{d}{n \max\limits_{\Omega} |D_t^4 d|} > \rho' \sigma; \end{cases}$

introduciamo anche delle costanti K, L, N, tali che:

C) $\begin{cases} K > \max(2, 4 \max\limits_{\Omega} |D_t^2 a|) \\ N > \max(K M, K \max\limits_{\Omega} |D_t^2 d|), \\ L > \max(K M H, \max\limits_{\Omega} |D_t^4 d|, K H \max\limits_{\Omega} |D_t^2 d|). \end{cases}$

Ebbene, ci proponiamo di studiare il problema al contorno

$$(1,4) \qquad \begin{cases} P u = f, \quad f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad D_x u(0,t) = D_x u(\pi, t) = 0, \quad \forall\, t \in [0, T], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad D_t u(x, T) = 0, \ \forall\, x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ambienteremo lo studio del problema (1,4) nello spazio di Sobolev con peso, introdotto da M. TRICARICO in [8] [1]:

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} D_x^4 u,\ D_t^3 u,\ a\ D_t^4 u \in L^2(\Omega) \\ u_{|\partial\Omega} = D_x u(0,t) = D_x u(\pi,t) = D_t u(x,T) = 0 \end{array} \right\}$$

normato da:

$$\| u \|_{\mathcal{H}} = [\| u \|_{0,\Omega}^2 + \| D_t^3 u \|_{0,\Omega}^2 + \| D_x^4 u \|_{0,\Omega}^2 + \| a D_t^4 u \|_{0,\Omega}^2]^{1/2};$$

si noti che $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{H} \cap C^\infty(\Omega)$ è denso in $\mathcal{H}$ [2].

Dai risultati di M. TRICARICO [8] (cfr. p. 268), si desume in particolare che $\Lambda : \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ è un operatore bigettivo.

È naturale chiedersi se la stessa cosa valga per P; ebbene proveremo il seguente:

TEOREMA 1.I — *Sia* P *un operatore verificante le condizioni* A) B). *Esiste una costante* $c_0 > \bar{c}$ *tale che, se risulta*:

$$C') \qquad c(x') \geq c_0 (> \bar{c}),\ \sup_\Omega c(x') - \inf_\Omega c(x') < \frac{\gamma}{2\sqrt{6 + 5H}},$$

allora P *è bigettivo tra* $\mathcal{H}$ *ed* L.

Se invece il coefficiente $c(x')$ *di* P *è semplicemente una funzione misurabile e limitata, si può asserire che* P *ha indice zero.*

Il teorema 1.I verrà stabilito sulla base del seguente criterio di suriettività provato da A. CANFORA in [3]:

PROPOSIZIONE 1.III — *Siano* X *ed* Y *due spazi di Hilbert reali e separabili; sia* $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ *bigettivo tra* X *ed* Y, *e sia* $P : X \to Y$ *un operatore limitato finitamente continuo e debolmente chiuso tale che*:

$$(1,5) \qquad \exists\, \alpha', \beta', \alpha, \beta, \rho \in R \text{ con } 0 \leq \beta' \leq 1,\ \alpha > \beta',\ \rho > \beta':$$

$$\begin{cases} \alpha' \| u \|_X \leq \| L u \|_Y \leq \beta' \| u \|_X \\ \alpha \| u \|_X \leq \| P u \|_Y \leq \beta \| u \|_X \\ \rho \| u \|_X^2 \leq (L u, P u)_Y, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H} \end{cases}$$

[1] Si controlla facilmente che il problema (1,4) con Λ in luogo di P è univocamente risolubile (in particolare $f = 0 \Rightarrow u = 0$) grazie alle condizioni A) B) ed ai risultati di M. TRICARICO [8].

[2] Qui e nel seguito il prodotto scalare e la norma in L (G) saranno indicati risp. con $(\cdot, \cdot)_{0,G}$, $\| \cdot \|_{0,G}$. Se $G = \Omega$ l'indicazione di G in basso a destra potrà essere omessa.

Allora, se si ha anche $P(u) = -P(-u)\ \forall u \in \mathcal{H}$, P *risulta suriettivo tra* $\mathcal{H}$ *ed* L^2.

Naturalmente, nel nostro caso in cui P è addirittura lineare, si potrà asserire che P è anche iniettivo una volta stabilita la seconda delle (1,5).

2. - Un primo lemma di minorazione

Indicheremo con φ una funzione non negativa di classe $C^\infty(\Omega)$, Si ha allora:

Proposizione 2.I — *Esistono due costanti positive* N^φ, L^φ *che dipendono solo da* φ *e da* Ω, *tali che per ogni* $0 < \varepsilon \leq 1$ *si abbia*:

$$(2.1) \qquad \int_\Omega \varphi\, D_x^4 u\, D_t^3 u \geq -6\, N^\varphi \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{6\, L^\varphi}{\varepsilon^{15}} \| u \|_0^2$$

per ogni $u \in \mathcal{S}(\Omega)$.

Dim. — Giacché $u|_{\partial\Omega} = D_x u(0,t) = D_x u(\pi,t) = 0$, integrando più volte per parti si ha:

$$\int_\Omega \varphi\, D_x^4 u\, D_t^3 u = -\int_\Omega D_x \varphi\, D_t^3 u\, D_x^3 u = -\int_\Omega \varphi\, D_x D_t^3 u\, D_x^3 u =$$

$$= -\int_\Omega D_x \varphi\, D_t^3 u\, D_x^3 u + \int_\Omega \varphi\, D_x^2 D_t^3 u\, D_x^2 u - \int_\Omega D_x^2 \varphi\, D_x^2 u\, D_t^3 u -$$

$$- \int_\Omega D_x \varphi\, D_x^3 u\, D_t^2 u.$$

D'altra parte, giacché $u(x,T) = u(x,0) = D_t u(x,T) = 0$ si ha con facili calcoli:

$$\int_\Omega \varphi\, D_x^2 D_t^3 u\, D_x^2 u = \int_0^\pi dx \left\{ [\varphi\, D_x^2 u\, D_t^2 D_x^2 u]_0^T - \right.$$

$$\left. - \int_0^T D_t^2 D_x^2 u\, D_t (D_x^2 u \cdot \varphi)\, dt \right\} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi(x,0), (D_t D_x^2 u(x,0))^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega D_t \varphi\, (D_t D_x^2 u)^2 + \int_\Omega D_x D_t \varphi\, D_x D_t^2 u\, D_x^2 u + \int_\Omega D_t \varphi\, D_x D_t^2 u\, D_x^3 u.$$

Per la disuguaglianza di Eherling si ha ora:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega} D_x\,\varphi\, D_x^3 u\; D_t^3 u \leq M^{\varphi} \| D_x^3 u \|_0 \| D_t^3 u \|_0 \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}}{2}\left(\varepsilon \| D_t^3 u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| D_x^3 u \|_0^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}}{2}\left(\varepsilon \| D_t^3 u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon^2 \| D_x^4 u \|_0^2 + \frac{H}{\varepsilon^6} \| u \|_0^2 \right] \right) \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}\,\varepsilon}{2} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M^{\varphi} H}{2\,\varepsilon^7} \| u \|_0^2 ,
\end{aligned}
$$

dove M^{φ} è una costante positiva opportuna dipendente sola da φ e si è sfruttata la disuguaglianza numerica $\alpha\,\beta \leq \frac{1}{2}\left(\alpha^2\,\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2 \right)$. Analogamente si ha anche:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega} D_x^2\,\varphi\, D_x^2 u\; D_t^3 u \leq M^{\varphi} \| D_x^2 u \|_0 \| D_t^3 u \|_0 \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}}{2}\left(\varepsilon \| D_t^3 u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| D_x^2 u \|_0^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}}{2}\left(\varepsilon \| D_t^3 u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon^2 \| D_x^4 u \|_0^2 + \frac{H}{\varepsilon^2} \| u \|_0^2 \right] \right) \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}\,\varepsilon}{2} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M^{\varphi} H}{2\,\varepsilon^3} \| u \|_0^2 .
\end{aligned}
$$

Ricordando poi la prop. (1.II) si ha:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} D_x D_t\,\varphi\, D_x D_t^2 u\; D_x^2 u \leq M^{\varphi} \| D_x D_t^2 u \|_0 \| D_x^2 u \|_0 \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}}{2}\left(\varepsilon \| D_x D_t^2 u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| D_x^2 u \|_0^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}}{2}\left(\varepsilon\, K' \left[\| u \|_0^2 + \| D_t^3 u \|_0^2 + \| D_x^3 u \|_0^2 \right] + \right. \\
&\left. + \frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon^2 \| D_x^4 u \|_0^2 + \frac{H}{\varepsilon^2} \| u \|_0^2 \right] \right) \leq \\
&\leq \frac{M^{\varphi}}{2}(1 + K')(1 + H)\,\varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M^{\varphi} H}{2\,\varepsilon^3} \| u \|_0^2 .
\end{aligned}
$$

Analogamente si ha anche:

$$\int_\Omega D_t \varphi \, D_x \, D_t^2 u \, D_x^3 u \leq \frac{M^\varphi}{2} (1 + K')(1 + H) \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{M^\varphi H}{2 \varepsilon^7} \| u \|_0^2 .$$

Sfruttando ancora la prop. (1.II) si ha infine:

$$\int_\Omega D_t \varphi \, (D_t \, D_x^2 u)^2 \leq M^\varphi \| D_t \, D_x^2 u \|_0^2 \leq$$

$$\leq M^\varphi K' \left(\varepsilon \| D_t^3 u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^1} \| u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^3} \left[\varepsilon^4 \| D_x^4 u \|_0^2 \frac{H}{\varepsilon^{12}} \| u \|_0^2 \right] \right) \leq$$

$$\leq M^\varphi K' \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2 M^\varphi K' H}{\varepsilon^{15}} \| u \|_0^2 .$$

Ponendo perciò:

$$N^\varphi = \max \left\{ \frac{M^\varphi}{2}, M^\varphi K', \frac{M^\varphi}{2} (1 + K')(1 + H) \right\} ;$$

$$L^\varphi = \max \left\{ \frac{M^\varphi H}{2} , \frac{M^\varphi}{2} , 2 M^\varphi K' H \right\}$$

si ha:

$$\int_\Omega \varphi \, D_x^4 u \, D_t^3 u \geq - 6 N^\varphi \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{6 L^\varphi}{\varepsilon^{15}} \| u \|_0^2$$

per ogni $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ e per $0 < \varepsilon \leq 1$.

Indichiamo ora con φ una funzione di classe $C^4(\Omega)$ che si annulli in $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Si ha allora:

PROPOSIZIONE 2.II — *Per ogni $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ vale l'eguaglianza:*

$$(2,2) \qquad \int_\Omega \varphi \, u \, D_t^4 u = - 2 \int_\Omega D_t^2 \varphi \, (D_t u)^2 + \int_\Omega \varphi \, (D_t^2 u)^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega D_t^4 \varphi \, u^2 .$$

Dim. — Giacché sia φ sia le sue derivate sono nulle in $\Omega_1 \cup \Omega_2$, integrando più volte per parti si ha:

$$\int_\Omega \varphi \, u \, D_t^4 u = \int_\Omega D_t^2 (\varphi u) \, D_t^2 u = \int_\Omega \varphi \, (D_t^2 u)^2 + 2 \int_\Omega D_t \varphi \, D_t u \, D_t^2 u +$$

$$+\int_\Omega D_t^2\,\varphi\,u\,D_t^2\,u=\int_\Omega \varphi\,(D_t^2\,u)^2+\int_\Omega D_t\,\varphi\;D_t\,(D_t\,u)^2\;-\int_\Omega D_t^2\,\varphi\,(D_t\,u)^2\;-$$

$$-\int_\Omega D_t^3\,\varphi\,u\,D_t\,u=\int_\Omega \varphi\,(D_t^2\,u)^2-\int_\Omega D_t^2\,\varphi\,(D_t\,u)^2-\int_\Omega D_t^2\,\varphi\,(D_t\,u)^2\;-$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega D_t^3\,\varphi\,D_t\,(u)^2=\int_\Omega \varphi\,(D_t^2\,u)^2\;-\;2\int_\Omega D_t^2\,\varphi\,(D_t\,u)^2+\frac{1}{2}\int_\Omega D_t^4\,\varphi\,u^2.$$

3. - Altri lemmi di minorazione

Sia φ una funzione di classe $C^\infty(\Omega)$ e siano $a(x')$ e γ la funzione e la costante introdotte nel paragrafo 1. Allora se h è un numero positivo fissato, si ha:

Proposizione 3.I — *Esiste una costante positiva* $L^{h\varphi}$, *dipendente solo da* φ, h, a *e da* Ω, *tale che*:

$$(3,1)\qquad \int_\Omega \varphi\,a\,D_t^4\,u\;D_t^3\,u\geq -3\,\frac{\gamma}{4h}\,\|u\|^2_{\mathcal{H}}-L^{h\varphi}\,\|u\|^2_0\,,$$

per ogni $u\in\mathcal{G}(\Omega)$.

Dim. — Giacché a è nulla in $\Omega_1\cup\Omega_2$ si ha:

$$\int_\Omega \varphi\,a\,D_t^4\,u\;D_t^3\,u=\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi\,a\,D_t\,(D_t^3\,u)^2=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\Omega (D_t\,\varphi\cdot a+\varphi\,D_t\,a)\,(D_t^3\,u)^2=-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0^\eta} (D_t\,\varphi\cdot a+\varphi\,D_t\,a)\,(D_t^3\,u)^2\;-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0-\Omega_0^\eta} (D_t\,\varphi\cdot a+\varphi\,D_t\,a)\,(D_t^3\,u)^2.$$

Poiché a, $D_t\,a$ sono continue e si ha: $a(x,T_1)=a(x,T_2)=D_t a(x,T_1)=D_t\,a\,(x,T_2)=0$ è certo possibile, trovare $\eta>0$ tale che, posto $Q=\max_\Omega|\varphi|+\max_\Omega|D_t\,\varphi|$, risulti:

$$|a|,\;|D_t\,a|\leq\frac{1}{Q}\cdot\frac{\gamma}{4h},\quad\forall\,x'\in\Omega_0-\Omega_0^\eta.$$

Quindi si ha subito:

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega_o - \Omega_o^\eta} (D_t \varphi \cdot a + \varphi D_t a)(D_t^3 u)^2 \right| \leq \frac{\gamma}{4h} \| D_t^3 u \|_o^2 \leq \frac{\gamma}{4h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Poniamo ora $\Sigma = \max_{\Omega} |a| + \max_{\Omega} |D_t a|$; giacché in Ω_o^η si ha $D_t^4 u \in L^2(\Omega_o^\eta)$, per la disuguaglianza di Eherling si ha:

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega_o^\eta} (D_t \varphi \cdot a + \varphi D_t a)(D_t^3 u)^2 \right| \leq Q \Sigma \| D_t^3 u \|^2_{o,\Omega_o^\eta} \leq$$

$$\leq Q \Sigma \left(\varepsilon \| D_t^4 u \|^2_{o,\Omega_o^\eta} + \frac{H}{\varepsilon^3} \| u \|_o^2 \right).$$

Ponendo $\varepsilon = (\rho')^2 \dfrac{\gamma \left(\dfrac{\eta}{2} \right)^{8+2\vartheta}}{2h Q \Sigma}$ si ottiene perciò:

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega_o^\eta} (D_t \varphi \cdot a + \varphi D_t a)(D_t^3 u)^2 \right| \leq \frac{\gamma}{4h} (\rho')^2 \left(\left(\frac{\eta}{2} \right)^{4+\vartheta} \right)^2 \int_{\Omega_o^\eta} (D_t^4 u)^2 +$$

$$+ L^{h\varphi} \| u \|_o^2 \leq \frac{\gamma}{2h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + L^{h\varphi} \| u \|_o^2 ,$$

giacché in Ω_o^η si ha $\sigma(x') \geq \left(\dfrac{\eta}{2} \right)^{4+\vartheta}$, e quindi anche $a(x') \geq \rho' \sigma(x') \geq$ $\geq \rho' \left(\dfrac{\eta}{2} \right)^{4+\vartheta}$.

Quindi in definitiva si ha:

$$\int_{\Omega} \varphi a D_t^4 u \; D_t^3 u \geq -3 \frac{\gamma}{4h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - L^{h\varphi} \| u \|_o^2 .$$

Si prova anche, analogamente, la:

PROPOSIZIONE 3.II — *Se $d(x')$ è la funzione specificata nel paragrafo 1 esiste una costante positiva L^h dipendente solo da h, a ed Ω*

tale che:

$$(3,2) \qquad \int_{\Omega} d\, \mathrm{D}_t^4 u\, \mathrm{D}_t^3 u \geq -\frac{\gamma}{h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \mathrm{L}^h \| u \|_0^2$$

per ogni $u \in \mathcal{G}(\Omega)$.

Dim. — Giacché $d(x, \mathrm{T}_1) = d(x, \mathrm{T}_2) = 0$, integrando ripetutamente per parti si ha:

$$\int_{\Omega} d\, \mathrm{D}_t^4 u\, \mathrm{D}_t^3 u = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_0^\eta} \mathrm{D}_t\, d\, (\mathrm{D}_t^3 u)^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0 - \Omega_0^\eta} \mathrm{D}_t\, d\, (\mathrm{D}_t^3 u)^2.$$

Giacché $\mathrm{D}_t d$ è continua e si ha $\mathrm{D}_t d(x, \mathrm{T}_1) = \mathrm{D}_t d(x, \mathrm{T}_2) = 0$ è certo possibile determinare η in modo tale che:

$$\max_{\Omega_0 - \Omega_0^\eta} | \mathrm{D}_t d | \leq \frac{\gamma}{2h}.$$

Si ha perciò subito:

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega_0 - \Omega_0^\eta} \mathrm{D}_t\, d\, (\mathrm{D}_t^3 u)^2 \geq -\frac{\gamma}{2h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2.$$

D'altra parte, giacché in Ω_0^η la $\mathrm{D}_t^4 u$ appartiene ad $\mathrm{L}^2(\Omega_0^\eta)$, per la disuguaglianza di Eherling si ha:

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega_0^\eta} \mathrm{D}_t\, d\, (\mathrm{D}_t^3 u)^2 \geq -\mathrm{M} \| \mathrm{D}_t^3 u \|_{0,\Omega_0^\eta}^2 \geq$$

$$\geq -\mathrm{M}\, \varepsilon \| \mathrm{D}_t^4 u \|_{0,\Omega_0^\eta}^2 - \frac{\mathrm{M\,H}}{\varepsilon^3} \| u \|_0^2,$$

dove M è una costante che maggiora $\max_{\Omega} | \mathrm{D}_t d |$.

Se poniamo

$$\varepsilon = (\rho')^2 \frac{\gamma \cdot \left(\frac{\eta}{2} \right)^{8+2\delta}}{2h\,\mathrm{M}}$$

otteniamo:

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0^\eta} D_t\, d\,(D_t^3 u)^2 \geq -\frac{\gamma}{2h}\|u\|_{\mathcal{H}}^2 - L^h\|u\|_0^2,$$

da cui la (3,2).

4. - Ultimo lemma di minorazione

Proposizione 4.I — *Sia* φ *una funzione non negativa appartenente a* $C^4(\Omega)$ *nulla in* $\Omega_1 \cup \Omega_2$. *Si ha allora per ogni* $u \in \mathcal{G}(\Omega)$:

$$(4,1)\qquad \int_\Omega \varphi\, D_t^4 u\; D_x^4 u \geq -17\, N_\varphi\, \varepsilon \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{17\, L_\varphi}{\varepsilon^{31}}\|u\|_0^2,$$

per ogni $0 < \varepsilon \leq 1$, *dove* N_φ, L_φ *sono delle costanti positive che dipendono soltanto da* φ *e da* Ω.

Dim. — Giacché sia φ sia le sue derivate sono nulle in $\Omega_1 \cup \Omega_2$, integrando per parti si ha:

$$\int_\Omega \varphi\, D_t^4 u\; D_x^4 u = -\int_\Omega D_t\,(\varphi\, D_x^4 u)\; D_t^3 u = -\int_\Omega D_t\, D_x^4 u\, \varphi\, D_t^3 u -$$

$$-\int_\Omega D_t \varphi\, D_x^4 u\; D_t^3 u = -\int_\Omega D_t \varphi\; D_x^4 u\; D_t^3 u + \int_\Omega D_t^2\, D_x^4 u\, \varphi\, D_t^2 u +$$

$$+\int_\Omega D_t\, D_x^4 u\, D_t \varphi\, D_t^2 u = -\int_\Omega D_t \varphi\; D_x^4 u\; D_t^3 u + \int_\Omega D_t^2\, D_x^4 u\, \varphi\, D_t^2 u -$$

$$-\int_\Omega D_t \varphi\; D_x^4 u\; D_t^3 u - \int_\Omega D_t^2\, \varphi\, D_x^4 u\; D_t^2 u = -2\int_\Omega D_t \varphi\; D_x^4 u\; D_t^3 u +$$

$$+\int_\Omega \varphi\, D_t^2\, D_x^4 u\; D_t^2 u - \int_\Omega D_t^2\, \varphi\, D_x^4 u\; D_t^2 u = -2\, J_0 + J_1 - J_2.$$

D'altra parte si ha anche:

$$J_1 = \int_\Omega \varphi\, D_t^2\, D_x^4 u\; D_t^2 u = -\int_\Omega D_x \varphi\, D_t^2\, D_x^3 u\; D_t^2 u - \int_\Omega \varphi\, D_t^2\, D_x^3 u\, D_x\, D_t^2 u =$$

$$= \int_\Omega D_x^2\ \varphi\ D_t^2\ D_x^2 u\ D_t^2 u + \int_\Omega D_x \varphi\ D_t^2\ D_x^2 u\ D_x\ D_t^2 u + \int_\Omega \varphi\ (D_t^2\ D_x^2 u)^2 +$$

$$+ \int_\Omega D_x \varphi\ D_t^2\ D_x^2 u\ D_x\ D_t^2 u \geq \int_\Omega D_x^2\ \varphi\ D_t^2\ D_x^2 u\ D_t^2 u - \int_\Omega D_x^2 \varphi\ (D_x\ D_t^2 u)^2 \geq$$

$$\geq \int_\Omega D_x^2\ \varphi\ D_t^2\ D_x^2 u\ D_t^2 u - M_\varphi \| D_x D_t^2 u \|_o^2 ,$$

se M_φ è una costante che maggiora $\max_\Omega | D_x^2 \varphi |$, $\max_\Omega | D_x^2 D_t \varphi |$, $\max_\Omega | D_t^2 \varphi |$, $\max_\Omega | D_x D_t^2 \varphi |$.

Si ha inoltre:

$$\int_\Omega D_x^2 \varphi\ D_t^2\ D_x^2 u\ D_t^2 u = - \int_\Omega D_x^2 \varphi\ D_t\ D_x^2 u\ D_t^3 u - \int_\Omega D_t D_x^2 \varphi\ D_t\ D_x^2 u\ D_t^2 u =$$

$$= - \int_\Omega D_x^2 \varphi\ D_t\ D_x^2 u\ D_t^3 u + \int_\Omega D_t D_x^2 \varphi\ D_x^2 u\ D_t^3 u + \int_\Omega D_t^2\ D_x^2 \varphi\ D_x^2 u\ D_t^2 u.$$

Lnfine, per $- J_2$ si ha:

$$- J_2 = - \int_\Omega D_t^2 \varphi\ D_x^4 u\ D_t^2 u = \int_\Omega D_x\ D_t^2 \varphi\ D_x^3 u\ D_t^2 u +$$

$$+ \int_\Omega D_t^2 \varphi\ D_x^3 u\ D_x\ D_t^2 u = - \int_\Omega D_x\ D_t^2 \varphi\ D_x^2 u\ D_x\ D_t^2 u -$$

$$- \int_\Omega D_x^2\ D_t^2 \varphi\ D_x^2 u\ D_t^2 u + \int_\Omega D_t^2 \varphi\ D_x^3 u\ D_x\ D_t^2 u.$$

Possiamo quindi asserire che:

$$(4,2) \quad \int_\Omega \varphi\ D_x^4 u\ D_t^4 u \geq - 2 \int_\Omega D_t \varphi\ D_x^4 u\ D_t^3 u - M_\varphi \| D_x\ D_t^2 u \|_o^2 -$$

$$- M_\varphi \| D_t\ D_x^2 u \|_o\ \| D_t^3 u \|_o - M_\varphi \| D_x^2 u \|_o\ \| D_t^3 u \|_o -$$

$$- M_\varphi \| D_x^2 u \|_o\ \| D_x\ D_t^2 u \|_o - M_\varphi \| D_x^3 u \|_o\ \| D_x\ D_t^2 u \|_o .$$

Ora, per la proposizione (2.I) si ha per ogni $\varepsilon \in]0,1]$:

$$(4,3) \qquad -2\int_\Omega D_t\varphi\, D_x^4 u\, D_t^3 u \geq -12\, N^\varphi \varepsilon \| u \|^2_{\mathcal{H}} - \frac{12\, L^\varphi}{\varepsilon^{15}} \| u \|^2_0,$$

mentre, sfruttando la disuguaglianza di Eherling e la proposizione (1,II), ragionando come nella dimostrazione della proposizione (2,I), si ottiene:

$$(4,4) \qquad -M_\varphi \| D_x D_t^2 u \|^2_0 \geq -N'_\varphi \varepsilon \| u \|^2_{\mathcal{H}} - \frac{L'_\varphi}{\varepsilon^{15}} \| u \|^2_0 ;$$

$$-M_\varphi \| D_x^3 u \|_0 \| D_x D_t^2 u \|_0 \geq -N'_\varphi \varepsilon \| u \|^2_{\mathcal{H}} - \frac{L'_\varphi}{\varepsilon^{31}} \| u \|^2_0 ;$$

$$-M_\varphi \| D_x^2 u \|_0 \| D_x D_t^2 u \|_0 \geq -N'_\varphi \varepsilon \| u \|^2_{\mathcal{H}} - \frac{L'_\varphi}{\varepsilon^{31}} \| u \|^2_0 ;$$

$$-M_\varphi \| D_t D_x^2 u \|_0 \| D_t^3 u \|_0 \geq -N'_\varphi \varepsilon \| u \|^2_{\mathcal{H}} - \frac{L'_\varphi}{\varepsilon^{31}} \| u \|^2_0 ;$$

$$-M_\varphi \| D_x^2 u \|_0 \| D_t^3 u \|_0 \geq -N'_\varphi \varepsilon \| u \|^2_{\mathcal{H}} - \frac{L'_\varphi}{\varepsilon^{3}} \| u \|^2_0$$

dove N'_φ ed L'_φ sono opportune costanti che dipendono solo da Ω e da φ. Da (4,2) (4,3) e (4,4) segue senz'altro l'asserto.

5. - Dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità

Cominciamo col minorare il prodotto scalare $(P\,u, \Lambda\, u)_0$, supponendo che P verifichi A) e B) e che il coefficiente c di P sia costante. Si ha, tenendo conto di A) e B), per qualsiasi $u \in \mathcal{G}(\Omega)$

$$(P\,u, \Lambda\, u)_0 = \int_\Omega p\,(D_x^4 u)^2 + \int_\Omega q\,(D_t^3 u)^2 + \int_\Omega c\,u^2 + \int_\Omega d\,a\,(D_t^4 u)^2 +$$

$$+ \int_\Omega (p+q)\, D_x^4 u\, D_t^3 u + \int_\Omega p\,u\, D_x^4 u + \int_\Omega q\,u\, D_t^3 u + \int_\Omega c\,u\, D_t^3 u +$$

$$+ \int_\Omega c\,u\, D_x^4 u - K\int_\Omega p\, D_x^4 u\, D_t^2 u - K\int_\Omega q\, D_t^3 u\, D_t^2 u - K\int_\Omega c\,u\, D_t^2 u -$$

$$- K \int_\Omega d\, D_t^4 u\; D_t^2 u + \int_\Omega c\, a\, u\, D_t^4 u + \int_\Omega d\, u\, D_t^4 u +$$

$$+ \int_\Omega (q\, a + d)\, D_t^4 u\; D_t^3 u + \int_\Omega (p\, a + d)\, D_x^4 u\; D_t^4 u \geq \gamma \| u \|_{\mathcal{H}}^2 +$$

$$+ (\inf_\Omega c - \gamma) \| u \|_o^2 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 +$$

$$+ I_5 - I_6 - I_7 - I_8 - I_9 + I_{10} + I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

Consideriamo I_1. Giacché $0 < p + q \in C(\Omega)$ si può trovare $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tale che:

$$\max_\Omega | p + q - \varphi | < \frac{\gamma}{h}, \quad \varphi(x, t) > 0 \qquad \forall (x, t) \in \Omega,$$

con h assegnato arbitrariamente.

Si ha allora:

$$I_1 = \int_\Omega (p + q)\, D_x^4 u\; D_t^3 u = \int_\Omega (p + q - \varphi)\, D_x^4 u\; D_t^3 u + \int_\Omega \varphi\; D_x^4 u\; D_t^3 u \geq$$

$$\geq - \frac{\gamma}{h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \int_\Omega \varphi\, D_x^4 u\; D_t^3 u,$$

da cui, per la proposizione (2,I) discende, per ogni $\varepsilon \in]0,1]$:

$$(5,1) \qquad I_1 \geq - \left(\frac{\gamma}{h} + 6\, N^\varphi\, \varepsilon \right) \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{6\, L^\varphi}{\varepsilon^{15}} \| u \|_o^2 .$$

È poi ovvio che:

$$(5,2) \qquad I_2 + I_3 = \int_\Omega p\, u\, D_x^4 u + \int_\Omega q\, u\, D_t^3 u \geq - M\, \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{M}{\varepsilon} \| u \|_o^2$$

dove M è la costante positiva (cfr. condizione A)) che maggiora $\max | p |$ e $\max | q |$.

Inoltre si ha facilmente:

$$(5,3) \qquad I_4 = \int_\Omega c\, u\, D_t^3 u = - c \int_\Omega D_t u\; D_t^2 u = - \frac{c}{2} \int_\Omega D_t (D_t u)^2 \geq 0;$$

$$I_5 = c \int_\Omega u \; D_x^4 u \geq 0;$$

$$- I_6 = - K \int_\Omega p \; D_x^4 u \; D_t^2 u \geq - K M \| D_x^4 u \|_0 \; \| D_t^2 u \|_0 \geq$$

$$\geq - \frac{K M}{2} \left(\varepsilon \| D_x^4 u \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon^2 \| D_t^3 u \|_0^2 + \frac{H}{\varepsilon^4} \| u \|_0^2 \right) \right) \geq$$

$$\geq - N \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{L}{\varepsilon^5} \| u \|_0^2 ,$$

dove N ed L sono le costanti di cui alla condizione C) del paragrafo 1.

Analogamente si avrà:

$$(5,4) \quad - I_7 = - \int_\Omega K q \; D_t^3 u \; D_t^2 u \geq - N \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{L}{\varepsilon^5} \| u \|_0^2 .$$

Consideriamo ora $- I_8$, $- I_9$, $- I_{10}$, $- I_{11}$. Si ha:

$$- I_8 = - K \int_\Omega c \, u \, D_t^2 u = K c \int_\Omega (D_t u)^2 .$$

$$- I_9 = - K \int_\Omega d \; D_t^4 u \; D_t^2 u \geq - \frac{K}{2} \int_\Omega D_t^2 d \, (D_t^2 u)^2 .$$

In base alla proposizione (2.II) si ha poi:

$$I_{10} = c \int_\Omega a \, u \, D_t^4 u = - 2 c \int_\Omega D_t^2 a \, (D_t u)^2 + \frac{c}{2} \int_\Omega D_t^4 a \, u^2 + c \int_\Omega a \, (D_t^2 u)^2 =$$

$$= - 2 c \int_\Omega D_t^2 a \, (D_t u)^2 + \frac{c}{2 n \max_\Omega | D_t^4 d |} \int_\Omega D_t^4 d \, u^2 + c \int_\Omega a \, (D_t^2 u)^2 .$$

Analogamente:

$$I_{11} = \int_\Omega d \, u \, D_t^4 u = \frac{1}{2} \int_\Omega D_t^4 d \, u^2 - 2 \int_\Omega D_t^2 d \, (D_t u)^2 + \int_\Omega d \, (D_t^2 u)^2 \geq$$

$$\geq - L \| u \|_0^2 - 2 \int_\Omega D_t^2 d \, (D_t u)^2 .$$

Quindi, ricordando le ipotesi su c e K, si ha:

$$(5,5) \qquad -I_8 - I_9 + I_{10} + I_{11} \geq \int_\Omega \left(c\,a - \frac{K}{2} D_t^2 d \right) (D_t^2 u)^2 +$$

$$+ c \left(K - 2 \max_\Omega | D_t^2 a | - \frac{2 \max | D_t^2 d |}{c} \right) \int (D_t u)^2 -$$

$$- \left(L + \frac{c}{2n} \right) \| u \|_o^2 \geq - N \varepsilon \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \left(\frac{2L}{\varepsilon} + \frac{c}{2n} \right) \| u \|_o^2 .$$

Consideriamo ora $I_{12} = \int_\Omega (q\,a + d)\, D_t^3 u\; D_t^4 u$.

Dappoiché q è continua, esiste $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$ tale che:

$$\max_\Omega | q - \varphi_1 | < \frac{\gamma}{2h}$$

con h assegnato arbitrariamente, per cui si può asserire che:

$$I_{12} = \int_\Omega (q\,a + d)\, D_t^4 u\; D_t^3 u = \int_\Omega (q - \varphi_1)\, a\, D_t^4 u\; D_t^3 u + \int_\Omega \varphi_1\, a\; D_t^4 u\; D_t^3 u +$$

$$+ \int_\Omega d\; D_t^4 u\; D_t^3 u \geq - \frac{\gamma}{2h} \| a\, D_t^4 u \|_o \| D_t^3 u \|_o + \int_\Omega \varphi_1\, a\; D_t^4 u\; D_t^3 u +$$

$$+ \int_\Omega d\; D_t^4 u\; D_t^3 u \geq - \frac{\gamma}{4h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \int_\Omega \varphi_1\, a\; D_t^4 u\; D_t^3 u + \int_\Omega d\; D_t^4 u\; D_t^3 u.$$

Perciò, in base alle proposizioni (4.I) (4.II) si ha:

$$(5,6) \quad I_{12} = \int_\Omega (q\,a + d)\, D_t^4 u\; D_t^3 u \geq - \frac{2\gamma}{h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - (L^{h\varphi_1} + L^h) \| u \|_o^2 .$$

Rimane da considerare I_{13}. Sia $\varphi_2 \in C^\infty(\Omega)$ tale che:

$$\max_\Omega | p - \varphi_2 | < \frac{\gamma}{h}$$

con h prefissato arbitrariamente.

Allora:

$$I_{13} = \int_\Omega (p\,a + d)\, D_t^4 u\ D_x^4 u = \int_\Omega p\,a\, D_t^4 u\ D_x^4 u + \int_\Omega d\ D_t^4 u\ D_x^4 u \geq$$

$$\geq -\frac{\gamma}{h} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \int_\Omega \varphi_2 D_t^4 u\ D_x^4 u + \int_\Omega d\ D_t^4 u\ D_x^4 u.$$

Quindi, in base alla proposizione (4.I) si ha:

(5,7)
$$I_{13} = \int_\Omega (p\,a + d)\, D_t^4 u\ D_x^4 u \geq$$

$$\geq -\left(\frac{\gamma}{h} + 34\, N_{\varphi_2}\, \varepsilon \right) \| u \|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{34\, L_{\varphi_2}}{\varepsilon^{31}} \| u \|_0^2 .$$

Da (5,1), . . . , (5,7), si ha quindi:

$$(P\,u, \Lambda\,u)_0 \geq \left[\gamma - \left(\frac{4\,\gamma}{h} + (M + 3\,N + 6\,N^{\varphi} + 34\,N_{\varphi_2})\,\varepsilon \right) \right] \| u \|_{\mathcal{H}}^2 +$$

$$+ \left(c - \frac{c}{2\,n} - \frac{M + 4\,L + L^h + L^{h\varphi_1} + 6\,L^{\varphi} + 34\,L_{\varphi_2}}{\varepsilon^{31}} \right) \| u \|_0^2$$

Scegliamo $h = 16$ e fissiamo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ di conseguenza; con ciò L^h, $L^{h\varphi_1}$, L^{φ}, L_{φ_2}, N^{φ}, N_{φ_2} diventano costanti che dipendono solo da p, q, d e K. Se indichiamo con A un numero $\geq \max\{M, L^h, L^{h\varphi_1}, L^{\varphi}, L_{\varphi}, N^{\varphi}, N_{\varphi_2}\}$ si ottiene:

(5,8)
$$(P\,u, \Lambda\,u)_0 \geq \left[\frac{3}{4}\gamma - 44\,A\,\varepsilon \right] \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \left[\frac{c}{2} - \frac{47\,A}{\varepsilon^{31}} \right] \| u \|_0^2 .$$

Se si fissa $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{176\,A}$ si ha infine

$$(P\,u, \Lambda\,u)_0 \geq \frac{\gamma}{2} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 + \left[\frac{c}{2} - 47\,(176)^{31}\, \frac{A^{32}}{\gamma^{31}} \right] \| u \|_0^2 .$$

Possiamo quindi enunciare il seguente

LEMMA 5.I — *Esiste un numero $c_0 > 0$ tale che se il coefficiente c di P è costante e $> c_0$, vale la disuguaglianza:*

$$(P\,u, \Lambda\,u)_0 \geq \frac{\gamma}{2} \| u \|_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}$$

Dim. — Basta assumere $c_0 \geq 94\ (176)^{31} \dfrac{A^{32}}{\gamma^{31}}$, dove A è la costante di cui alla (5,8) che dipende solo da p, q e d.

Siamo ora in grado di provare il teorema (1.I), supponendo anzitutto che il coefficiente c sia costante e $\geq$ del numero c_0 di cui al lemma (5.I). Si controlla facilmente che:

$$\| \Lambda u \|_0^2 \leq (6 + 5\,H) \| u \|_{\mathcal{H}}^2$$

Dopo di che, ponendo:

$$L = (6 + 5\,H)^{-\frac{1}{2}} \Lambda,$$

si ha (grazie al lemma (5.I)):

$$\| L u \|_0 \leq \| u \|_{\mathcal{H}} \equiv \beta' \| u \|_{\mathcal{H}} \qquad (\rho > \beta' \equiv 1) \tag{5,9}$$

$$(P u, L u)_0 \geq \frac{\gamma}{2\sqrt{6 + 5\,H}} \| u \|_{\mathcal{H}}^2 \equiv \rho \| u \|_{\mathcal{H}}^2 \tag{5,10}$$

e le relazioni (5,9) e (5,10) valgono anche per ogni $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, giacché $\mathcal{G}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{H}(\Omega)$. Si nota poi subito che, $\forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$\| P u \|_0 \geq \alpha \| u \|_{\mathcal{H}}, \quad \alpha > \beta' \equiv 1$$

Infatti si ha:

$$(P u - L u)^2 = | P u |^2 + | L u |^2 - 2\,P u\, L u \geq 0,$$

e quindi:

$$| P u^2 | \geq 2\,P u\, L u - | L u |^2,$$

da cui:

$$\| P u \|_0^2 \geq 2\,(P u, L u)_0 - \| L u \|_0^2 \geq (2\rho - 1) \| u \|_{\mathcal{H}}^2.$$

Infine, è ovvio che esiste una costante $\beta > 0$:

$$\| P u \|_0 \leq \beta \| u \|_{\mathcal{H}}, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega),$$

e giacché $L u$ è bigettivo tra $\mathcal{H}$ ed $L^2(\Omega)$ esiste $\alpha' > 0$:

$$\alpha' \| u \|_{\mathcal{H}} \leq \| L u \|_0, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Per la proposizione (1.III), nell'ipotesi che c sia costante, P risulta biettivo tra $\mathcal{H}(\Omega)$ ed $L^2(\Omega)$.

Lasciamo ora cadere l'ipotesi che c sia costante e supponiamo, invece, che verifichi la condizione C'). Indichiamo con $\tilde{P}\,u$ l'operatore che si ottiene da P sostituendo $\inf_{\Omega} c\,(\geq c_0)$ al coefficiente c. Si ha ovviamente:

$$P\,u = p\,D_x^4\,u + d\,D_t^4\,u + q\,D_t^3\,u + (\inf_{\Omega} c)\,u +$$

$$+ (c - \inf_{\Omega} c)\,u \equiv \tilde{P}\,u + \chi\,u$$

con $0 \leq \chi \leq \rho$. Per il teorema di Rellich la perturbazione χ è compatta tra $\mathcal{H}$ ed L^2; quindi, essendo $\tilde{P}$ ad indice con indice zero perché bigettivo, anche P, per il teorema di Gohberg-Krein, sarà ad indice con indice zero. Volendo perciò provare che P è bigettivo basterà provare che è iniettivo. D'altra parte, l'iniettività è assicurata da:

$$(P\,u, L\,u)_0 = (\tilde{P}\,u, L\,u)_0 + (\chi\,u, L\,u)_0 \geq \rho\,\|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \sup_{\Omega}\chi\,\|u\|_0\,\|L\,u\|_0 \geq$$

$$\geq \rho\,\|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \sup_{\Omega}\chi\,\|u\|_0\,\|u\|_{\mathcal{H}} \geq (\rho - \sup_{\Omega}\chi)\,\|u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Quindi anche per c non costante ma verificante C'), P è bigettivo tra $\mathcal{H}(\Omega)$ ed $L^2(\Omega)$.

Nel caso che c sia soltanto misurabile e limitato si può comunque decomporre P nella forma:

$$P\,u = [p\,D_x^4\,u + d\,D_t^4\,u + q\,D_t^3\,u + c_0\,u] + (c - c_0)\,u \equiv \tilde{P}\,u + \chi\,u$$

e concludere che, essendo χ una perturbazione compatta, P e $\tilde{P}$ hanno lo stesso indice (zero). Il teorema è, così, provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton (1965).

[2] BRISH e YASHKINA, Diff. Urav., 6, No. 9, 11 (1970).

[3] A. CANFORA, *La teoria del grado topologico per una classe di operatori non compatti in spazi di Hilbert*, di prossima pubblicazione su « Ricerche di matematica ».

[4] M. CHICCO, *Solvability of the Dirichlet Problem in* $H^{2,p}(\Omega)$ *for a class of linear second order Elliptic Partial Differential Equations*, Bollettino U.M.I., (4) 4 (1971).

[5] D. GRECO, *Nuove formole integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale*, Ricerche di matematica, Vol. V, pp. 124-144, (1956).

[6] D. GRECO, *Un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ad un'equazione lineare ellittica in m variabili*, Ricerche di matematica, Vol. V, pp. 150-158, (1956).
[7] E. MOZOLEVSKII, Diff. Urav. 12, No. 6 (1976).
[8] M. TRICARICO, *Sui problemi al contorno per le equazioni ellittico-paraboliche di ordine* $2m$, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CXV pp. 225-270 (1977).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e D. Greco.

Sulle ipersuperfici luogo di spazi lineari

Nota di SVEVA FRENI CASALE
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza del 2 giugno 1979)

RIASSUNTO. — Si assegnano delle condizioni locali perché un'ipersuperficie di C^r sia luogo di spazi lineari di dimensione $r-2$.

SUMMARY. — In the present paper I give some conditions of local nature for a hypersurface of C^r being filled by linear subspaces of dimension $r-2$.

1 — Sia V_{r-1} un'ipersuperficie analitica (in particolare, algebrica) di C^r ($r \geq 3$). In questa nota dimostro che *affinché* V_{r-1} *sia luogo di spazi lineari* S_{r-2} *di dimensione* $r-2$ *occorre e basta che valga una delle condizioni seguenti*:

a) *per ogni punto* P *di essa passi un* S_{r-2} *che tagli* V_{r-1} *in una* V_{r-3} *avente in* P *un punto (almeno) quadruplo*;

b) *esistano una famiglia analitica semplicemente infinita* Σ *di* S_{r-3} *di* C^r *e un'applicazione analitica* σ *di* V_{r-1} *in* Σ, *tali che lo* S_{r-2} *congiungente* P *con* $\sigma(P)$ *tagli* V_{r-1} *in una* V_{r-3} *avente in* P *un punto (almeno) triplo.*

2 — Cominciamo col dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie analitica* F *di* C^3 *sia rigata è che per ogni punto* P *di essa passi una retta avente in* P *molteplicità d'intersezione (almeno) quattro con* F.

Consideriamo una parte di F, che continueremo ad indicare con F, rappresentabile, in un riferimento opportuno di C^3, con un'equazione del tipo

$$z = f(x, y)$$

Sia $P(x, y, z)$ un punto di F. Una retta r per P può essere rappresentata dalle equazioni

$$X = x + \rho l, \quad Y = y + \rho m, \quad Z = z + \rho n$$

e le sue intersezioni con F si ottengono in corrispondenza alle soluzioni dell'equazione

$$F(\rho) = f(x + \rho l, y + \rho m) - z - \rho n = 0$$

Indicando, per semplicità di scrittura, con $F', F'', \ldots$ i valori di $\frac{d F(\rho)}{d \rho}, \frac{d^2 F(\rho)}{d \rho^2}, \ldots$ per $\rho = 0$, si ha che la molteplicità d'intersezione di r con F in P è (almeno) μ se

$$F' = \ldots = F^{\mu - 1} = 0. \tag{1}$$

Se si tien conto che

$$F' = \left(\frac{\partial}{\partial x} l + \frac{\partial}{\partial y} m \right) f(x, y) - n$$

$$F^{\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial x} l + \frac{\partial}{\partial y} m \right)^{\nu} f(x, y) \qquad \text{per} \quad \nu > 1,$$

si ha che l'ipotesi fatta è che esistano delle funzioni $l(x, y)$, $m(x, y)$, tali che si abbia identicamente

$$F'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} l + \frac{\partial}{\partial y} m \right)^2 f(x, y) = 0$$

$$F''' = \left(\frac{\partial}{\partial x} l + \frac{\partial}{\partial y} m \right)^3 f(x, y) = 0 \tag{2}$$

Faremo vedere che dalle (2) segue l'identità

$$F^{\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial x} l + \frac{\partial}{\partial y} m \right)^{\nu} f(x, y) = 0$$

per ogni $\nu > 3$ e con ciò la proposizione sarà dimostrata.

A questo scopo osserviamo che, per ogni $\nu \geq 2$, si ha identicamente

$$l \frac{\partial F^{\nu}}{\partial x} + m \frac{\partial F^{\nu}}{\partial y} = F^{\nu + 1}$$

Di qui, essendo

$$\frac{d\,F^{\nu}}{d\,x} = \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,x} + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,l}\,\frac{\partial\,l}{\partial\,x} + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,m}\,\frac{\partial\,m}{\partial\,x}$$

e

$$\frac{d\,F^{\nu}}{d\,y} = \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,y} + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,l}\,\frac{\partial\,l}{\partial\,y} + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,m}\,\frac{\partial\,m}{\partial\,y}$$

segue che

$$l\frac{d\,F^{\nu}}{d\,x} + m\,\frac{d\,F^{\nu}}{d\,y} = F^{\nu+1} + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,l}\left(l\frac{\partial\,l}{\partial\,x} + m\,\frac{\partial\,l}{\partial\,y}\right) + \\ + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,m}\left(l\frac{\partial\,m}{\partial\,x} + m\,\frac{\partial\,m}{\partial\,y}\right)$$

Se ne deduce che *se* F^{ν} *è identicamente nulla* vale l'identità

$$(3)\qquad F^{\nu+1} + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,l}\left(l\frac{\partial\,l}{\partial\,x} + m\,\frac{\partial\,l}{\partial\,y}\right) + \frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,m}\left(l\frac{\partial\,m}{\partial\,x} + m\,\frac{\partial\,m}{\partial\,y}\right) = 0$$

Dalla (3) e dalle (2) segue intanto che

$$(4)\qquad \frac{\partial\,F''}{\partial\,l}\left(l\,\frac{\partial\,l}{\partial\,x} + m\,\frac{\partial\,l}{\partial\,y}\right) + \frac{\partial\,F''}{\partial\,m}\left(l\frac{\partial\,m}{\partial\,x} + m\,\frac{\partial\,m}{\partial\,y}\right) = 0$$

D'altra parte, per l'identità di Eulero, si ha

$$l\frac{\partial\,F''}{\partial\,l} + m\,\frac{\partial\,F''}{\partial\,m} = 2\,F'' = 0$$

$$l\frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,l} + m\,\frac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,m} = \nu\,F^{\nu} = 0$$

onde

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\,F''}{\partial\,l} & \dfrac{\partial\,F''}{\partial\,m} \\ \dfrac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,l} & \dfrac{\partial\,F^{\nu}}{\partial\,m} \end{vmatrix} = 0$$

Se $\frac{\partial F''}{\partial l}$, $\frac{\partial F''}{\partial m}$ fossero identicamente nulle, essendo

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F''}{\partial l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} l + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} m$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F''}{\partial m} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} m,$$

si avrebbe

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0$$

e la superficie sarebbe a punti parabolici e quindi rigata.

Supponiamo che $\frac{\partial F''}{\partial l}$, $\frac{\partial F''}{\partial m}$ non siano entrambe nulle. Per la (5) esiste allora una funzione $\sigma(x, y)$ tale che

$$\frac{\partial F^{\nu}}{\partial l} = \sigma \frac{\partial F''}{\partial l}, \quad \frac{\partial F^{\nu}}{\partial m} = \sigma \frac{\partial F''}{\partial m}$$

onde, tenendo conto della (4), si ha

$$\frac{\partial F^{\nu}}{\partial l}\left(l \frac{\partial l}{\partial x} + m \frac{\partial l}{\partial y} \right) + \frac{\partial F^{\nu}}{\partial m}\left(l \frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} \right) = 0$$

e, per la (3),

$$F^{\nu+1} = 0$$

Da $F''' = 0$ si deduce quindi $F^{IV} = 0$; di qui $F^{V} = 0$; ecc.

La proposizione è così dimostrata, in quanto la sufficienza della condizione enunciata è ovvia.

3 — Della proposizione enunciata nel n. 2 si può dare una diversa dimostrazione che passiamo ad esporre.

L'ipotesi fatta sulla superficie F comporta che essa è luogo di curve C tali che la tangente a C in ogni suo punto abbia in esso molteplicità d'intersezione almeno 4 con F.

Ora dimostreremo che *una curva* C *siffatta o è una retta o è curva di contatto di* F *con un piano* e di qui segue senz'altro l'asserto.

Per dimostrare la proprietà enunciata supponiamo, come nel n. 2, che F sia rappresentata dall'equazione

$$z = f(x, y)$$

e che la curva considerata C sia rappresentata dalle equazioni parametriche regolari

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)). \tag{1}$$

Procedendo come nel n. 2, si vede che l'ipotesi comporta che valgono le seguenti identità (in t)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x}x' + \frac{\partial}{\partial y}y'\right)^2 f(x, y) = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x}x' + \frac{\partial}{\partial y}y'\right)^3 f(x, y) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

La prima delle (2) si può scrivere nella forma

$$x'\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

D'altra parte, derivando la prima delle (2) rispetto a t e tenendo conto della seconda, si trova che vale l'identità

$$x''\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} + y''\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Si noti ora che se è identicamente

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

la matrice

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$$

che, tenuto conto delle (1) e della prima delle (2), si può scrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} x' & y' & \dfrac{\partial f}{\partial x}\,x' + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,y' \\ x'' & y'' & \dfrac{\partial f}{\partial x}\,x'' + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,y'' \end{pmatrix}$$

ha rango 1 e quindi C, avendo il piano oscultatore indeterminato in ogni suo punto, è una retta. Pertanto, se C non è una retta, dalle (3) e (4) segue che

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

cioè che $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sono costanti su C. Se ne deduce che i piani tangenti a F nei punti di C hanno giacitura fissa e quindi che C è curva di contatto di F con un piano.

OSSERVAZIONE — La proprietà dimostrata non si estende alle ipersuperfici di C^r, nel senso che, se V_{r-1} è un'ipersuperficie di C^r e C è una curva di V_{r-1}, tale che le sue tangenti abbiano, nel punto di contatto, molteplicità d'intersezione ν, non si può affermare che C sia contenuta in uno spazio di dimensione inferiore ad r, per quanto grande sia ν. Lo dimostra l'esempio seguente.

Sia γ la curva di C^4 rappresentata dalle equazioni

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ u = t^4,$$

ove x, y, z, u sono le coordinate correnti in C^4 e t è un parametro.

Com'è noto, γ non appartiene ad un iperpiano. La quadrica di equazione

$$\varphi = u + 3\,y^2 - 4\,x\,z = 0$$

come si verifica immediatamente, contiene (semplicemente) γ e tutte le sue tangenti. Se $\Psi = 0$ è l'equazione di una qualunque ipersuperficie passante per γ, l'ipersuperficie di equazione

$$\varphi + \lambda\,\Psi^{\nu} = 0$$

contiene, per λ generico, semplicemente γ ed ha con le sue tangenti molteplicità d'intersezione almeno ν, che può essere scelto grande a piacere.

4 — La proposizione di cui ci siamo occupati nei numeri 2 e 3 può essere anche enunciata dicendo che la condizione a) del n. 1 è necessaria e sufficiente affinché un'ipersuperficie V_{r-1} di C^r sia luogo di S_{r-2}, nel caso $r = 3$.

Dimostriamo la proprietà per $r > 3$.

Che la condizione sia necessaria è ovvio.

Dimostriamo che è sufficiente. Sia P il punto generico della V_2, sezione dell'ipersuperficie V_{r-1} col generico S_3 dello spazio ambiente. Per ipotesi esiste uno spazio $\bar{S}_{r-2}$ per P che taglia la V_{r-1} in una $\bar{V}_{r-3}$, avente in P un punto (almeno) quadruplo. L'intersezione $\bar{S}_1$ di S_3 con $\bar{S}_{r-2}$ ha in P contatto (almeno) quadripunto con la superficie V_2. Ne segue, per la proposizione dimostrata nel n. 2, che la V_2 è rigata e $\bar{S}_1$ appartiene ad essa e quindi a V_{r-1}. Variando lo S_3 per P, la retta $\bar{S}_1$ descrive lo spazio $\bar{S}_{r-2}$ che quindi giace sull'ipersuperficie.

5 — Per dimostrare che anche la condizione b) del numero 1 è necessaria e sufficiente affinché l'ipersuperficie V_{r-1} sia luogo di S_{r-2}, conviene premettere la proposizione seguente: *se la superficie analitica* F *di* C^3 *è dotata in ogni suo punto di una tangente asintotica incidente una curva fissa, essa è rigata ed ha le dette tangenti asintotiche come generatrici e inversamente.*

Supponiamo dunque che in ogni punto di F vi sia una tangente asintotica incidente la curva Γ.

Se per un punto di Γ passa soltanto un numero finito di tangenti asintotiche, ciascuna di esse è tangente asintotica in infiniti punti e quindi la superficie è rigata e le dette tangenti asintotiche sono generatrici della superficie.

Basta dunque far vedere che non può accadere che per ogni punto di Γ passino infinite tangenti asintotiche. In questa ipotesi, infatti, detto Q il generico punto di Γ, si ha che esso è vertice di un cono le cui generatrici sono tutte tangenti asintotiche di F. Diciamo γ la curva luogo dei punti di contatto delle generatrici del cono con la F. La tangente asintotica in un punto P generico di γ, appoggiata a Γ in Q, non è tangente in P alla γ stessa altrimenti tutte le tangenti alla curva γ passerebbero per uno stesso punto. Nella involuzione delle tangenti coniugate nel punto P, la tangente asintotica per Q è retta unita ma, nelle nostre ipotesi, essa è anche coniugata alla tangente in P a γ. L'involuzione è perciò degenere e il punto è parabolico. La superficie è quindi a punti parabolici e, risultando perciò sviluppabile, possiede soltanto una semplice infinità di tangenti asintotiche, contro l'ipotesi.

6 — La proprietà dimostrata può essere anche enunciata dicendo che la condizione b) del n. 1 è necessaria (e ovviamente sufficiente) affinché un'ipersuperficie V_{r-1} di C^r sia luogo di S_{r-2}, nel caso $r = 3$.

Dimostriamo la proprietà per $r > 3$.

Che la condizione sia necessaria è ovvio.

Dimostriamo che è sufficiente. Detta V_2 la sezione dell'ipersuperficie V_{r-1} col generico S_3 dello spazio ambiente, sia P il suo punto generico. Per l'ipotesi fatta esiste uno spazio $\bar{S}_{r-2}$, congiungente P con $\sigma(P)$, che sega la V_{r-1} in una $\bar{V}_{r-3}$, dotata in P di punto (almeno) triplo. L'intersezione $\bar{S}_1$ di S_3 con $\bar{S}_{r-2}$ è tangente asintotica in P della superficie V_2 perché la $\bar{V}_{r-3}$ ha in P un punto triplo. Inoltre $\bar{S}_1$ e $\sigma(P)$, giacendo in un S_{r-2}, hanno in comune un punto, che appartiene alla curva Γ, intersezione di S_3 con la V_{r-2}, luogo degli S_{r-3} di Σ, e quindi la V_2, per la proprietà dimostrata nel n. 5, è rigata e la retta $\bar{S}_1$ appartiene a V_2 e quindi a V_{r-1}. Variando lo S_3 per P, la retta $\bar{S}_1$ descrive lo spazio $\bar{S}_{r-2}$ che quindi giace sull'ipersuperficie.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, V. Dalla Volta e G. Panella.

Régularité pour la solution d'un système I.Q.V.

Nota di MARIA GIOVANNA GARRONI *, BERNARD HANOUZET **
e JEAN LUC JOLY
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 2 giugno 1979)

RIASSUNTO. — Si ottiene la regolarità $W^2_p(\Omega)$, $\forall\, p$, per la soluzione di un sistema di disequazioni quasi-variazionali, introducendo un sistema ausiliario di D.Q.V. che utilizza la regolarità della soluzione negli insiemi di distacco.

On s'intéresse à la régularité de la solution du système d'I.Q.V. introduit par A. BENSOUSSAN et J. L. LIONS dans [1]. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $C^{2,\alpha}$, $\alpha > 0$.

Pour $k = 1, 2, \ldots$, on introduit les formes intégrodifférentielles:

$$a^k(u, v) = \int_\Omega \sum_{\substack{i \\ 1 \leq i \leq n}} a^k_{ij}(x)\, D_i u\, D_j v\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{1 \leq i \leq n} a^k_i(x)\, D_i u\, v\, dx + \int_\Omega a^k_o(x)\, u\, v\, dx,$$

$$a^k_{ij},\ I \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}),\ a^k_i \in C^{o,\alpha}(\bar{\Omega}),\ i = 0,1, \ldots n.$$

On suppose que les formes a^k sont $H^1_o(\Omega)$-coercives. Soit $f_k \in C^{o,\alpha}(\bar{\Omega})$, $k = 1,2, \ldots, n$. On note u_k, $1 \leq k \leq n$, la solution du système d'I.Q.V.:

$$(1) \quad \begin{cases} u_k \in H^1_o(\Omega); \\ u_k \leq 1 + \bigwedge_{\ell \neq k} u_\ell; \\ \forall\, v \in H^1_o(\Omega),\ v \leq 1 + \bigwedge_{\ell \neq k} u_\ell. \\ a^k(u_k, u_k - v) \leq < f_k, u_k - v >; \\ 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

* Istituto Matematico « G. Castelnuovo », Facoltà di Scienze, Università di Roma, P.le delle Scienze - 00185 Roma.
** U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Laboratoire Associé au C.N.R.S. n. 226, Université de Bordeaux I, 351, cours de la Libération - 33405 Talence.

On sait que la solution de (1) est continue sur $\bar{\Omega}$ (voir [3]). On démontre ici le résultat suivant:

THEOREME. — *Sous les hypothèses précédentes, la solution de l'I.Q.V.* (1) *appartient a* $(\bigcap_p W^{2,p}(\Omega))^n$.

Si toutes les formes a_k coincident, le résultat est déjà dans [4]. Par ailleurs, on doit pouvoir obtenir la régularité $W^{2,\infty}(\Omega)$ en procédant comme dans [2].

Démonstration:

Nous supposons pour simplifier que $n = 3$.
Nous introduisons les ouverts:

$$C_k = \{x \in \bar{\Omega};\ u_k(x) < 1 + \bigwedge_{\ell \neq k} u_\ell(x)\},\ k = 1, 2, 3$$

et les compacts:

$$S_{12} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_1(x) = 1 + u_2(x)\}$$
$$S_{13} = \{x \in \bar{\Omega};\ u_1(x) = 1 + u_3(x)\}.$$

On a bien sûr $S_{12} \cup S_{13} = \bar{\Omega}/C_1$; nous notons $S_{123} = S_{12} \cap S_{13}$.

Vérifions que $S_{12} \subset C_2$ et $S_{13} \subset C_{13}$. En effet, si $x \in \bar{\Omega}$ est tel que $u_1(x) = 1 + u_2(x)$ alors:

$$u_2(x) = u_1(x) - 1 < u_1(x) \leq 1 + u_1(x) \wedge u_3(x).$$

En particulier C_1, C_2, C_3 est un recouvrement ouvert de $\bar{\Omega}$ et $u_k \in C^2(C_k)$ car sur C_k on a:

$$L_k u_k = f_k$$

où L_k désigne l'opérateur aux dérivées partielles associé à la forme a^k.

Soient C_2' et C_3' deux ouverts tels que:

$$S_{12} \subset C_2' \subset\subset C_2;\ S_{13} \subset C_3' \subset\subset C_3.$$

Soient φ_1, φ_2, φ_3, φ_{23} une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert de $\bar{\Omega}$:

$$C_1,\ C_2 \backslash \bar{C}_3',\ C_3 \backslash \bar{C}_2',\ C_2 \cap C_3.$$

On introduit le nouvel obstacle ψ_1:

$$\psi_1 = \varphi_1(1 + u_1) + \varphi_2(1 + u_2) + \varphi_3(1 + u_3) + \varphi_{23}(1 + u_2 \wedge u_3).$$

Montrons que u_1 est la solution de l'I.V.:

$$(2)\quad \begin{cases} u_1 \in H_o^1(\Omega),\ u_1 \leq \psi_1; \\ \forall\, v \in H_o^1(\Omega),\ v \leq \psi_1,\ a^1(u_1, u_1 - v) \leq < f_1, u_1 - v >. \end{cases}$$

Il suffit de vérifier le système complémentaire associé. Tout d'abord $u_1 \leq \psi_1$ découle des inégalités $u_1 \leq 1 + u_1$, $u_1 \leq 1 + u_2$, $u_1 \leq 1 + u_3$.

Sur $S_{12} \cup S_{13}$, $u_1 = \psi_1$. En effet:

sur $S_{12} \backslash S_{123}$, $u_2 < u_3$ et $\varphi_2 + \varphi_{23} = 1$

sur $S_{13} \backslash S_{123}$, $u_3 < u_2$ et $\varphi_3 + \varphi_{23} = 1$

sur S_{123}, $u_2 = u_3$ et $\varphi_{23} = 1$.

Nous appliquons les inégalités duales à l'I.V. (2). L'obstacle ψ_1 est dans $H^1(\Omega)$ et il existe une constante K_1 telle que $L_1 \psi_1 \geq K_1$. En effet:

$$L_1 \psi_1 = \sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i L_1 (1 + u_i) + [L_1, \varphi_i](1 + u_i)\} +$$

$$+ \varphi_{23} L_1 (1 + u_2 \wedge u_3) + [L_1, \varphi_{23}](1 + u_2 \wedge u_3)$$

et la minoration de $L_1 \psi_1$ découle alors de: $u_i \in C^2(\text{supp}\, \varphi_i)$,

$$L_1 (1 + u_2 \wedge u_3)_{|C_2 \cap C_3} \geq L_1 (1 + u_2) \wedge L_1 (1 + u_3).$$

On a donc: $u_1 \in H_o^1(\Omega)$ et

$$K_1 \wedge f_1 \leq L_1 u_1 \leq f_1$$

d'où le résultat de régularité pour la composante u_1 de la solution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bensoussan et J. L. Lions, C. R. Acad. Sci., Paris, 278, séric A, 1974, p. 747.

[2] L. A. Caffarelli et A. Friedman, *Regularity of the solution of the Q.V.I. for the impulse control problem*, I Comm. in Partial Diff. Eqs, **3**, pp. 745-753 (1978).

[3] B. Hanouzet et J. L. Joly, *Convergence uniforme des itérés définissant la solution d'une I.Q.V. abstraite*, C.R. Acad. Sc. Paris, **286**, p. 735 (1978) et article a paraître.

[4] J. L. Joly et U. Mosco, *A propos de l'existence de la régularité des solutions de certaines I.Q.V.* (à paraître au Journal of Funct. Anal.).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, C. Miranda e D. Greco.

Fatty acids, long-chain alchools, sterols from pollens of three species of *pinus*

Nota di RICCARDO CERRI *, FRANCESCO DE SIMONE **, FELICE SENATORE ** e FRANCO ZOLLO **

presentata dal socio ordinario RODOLFO NICOLAUS

(Adunanza del 3 novembre 1979)

RIASSUNTO. — Sono stati determinati gli acidi grassi, gli alcooli a lunga catena e gli steroli nei pollini di *Pinus canariensis*, *P. pinaster* e *P. pinea*. Tra gli acidi grassi predominano quelli insaturi; lo sterolo più abbondante è risultato il sitosterolo. L'alcool più abbondante è l'n-tetracosanolo-1.

SUMMARY. — Acids methyl esters, sterols and long-chain alchools of three coniferae pollens were analysed. The major fatty acids were oleic and linoleic. Unsaturated fatty acids predominated over saturated ones. The sitosterol was the major sterol. The n-tetracosanol-1 is the must abundant alchool.

The interest in the chemistry and biochemistry of pollens is based on their importance as the carrier of the male genetic material, as the source of the some serious allergies and as food for honey bees [1].

However, little information is available on the chemical costituents of pollens [2]. Fatty acid are very common in pollens, and on the whole they shown a very high degree of unsaturation. The first report on fatty acid composition of pollens is by von Planta, in 1885 [3], but it was Anderson [4, 5] who first surveyed a number of pollens for the occurrence of fatty acids. Later many researches were carried out, namely on the qualitative analysis of the lipids in the pollens [6-9]. Finally the introduction of efficient chromatographic methods and the discovery and development of more sophisticated instrumentation (TLC, GLC, MS and HPLC) has rendered the identification of individual components of fatty acid mixtures a feasible undertaking [10, 11].

* Istituto di Chimica Organica, Facoltà di Farmacia, Via Muroni, 23/B - Sassari.
** Istituto di Biorganica, Facoltà di Farmacia, Via L. Rodinò, 22 - Napoli.

But namely the unsaponifiable fraction and the sterol content of pollens has been investigated [1, 12-14]. In a previous paper [15] we have reported on the free amino acids composition of some pollens.

This report studies the components of the ethanol soluble lipids (fatty acids, sterols and long-chain alchools) obtained from hand collected pollens from three species of coniferae: *Pinus canariensis*, *Pinus pinaster* and *Pinus pinea*.

The pollens hand collected from the plants were immediately freeze-dried and then extracted with EtOH (3 × 0.5 l). The combined solutions were concentrated *in vacuo* and extracted with H_2O and

TABLE I

Fatty acid composition of pollens (%)

Fatty acid	*P. canariensis*	*P. pinea*	*P. pinaster*
14 : 0	3.9	4.1	1.1
16 : 0	16.4	21.6	23.8
18 : 0	4.5	5.3	4.2
18 : 1	24.0	34.3	35.1
18 : 2	24.7	19.7	28.4
18 : 3	+	1.5	2.5
19 : 0	1.2	+	---
20 : 0	17.5	11.3	4.6
22 : 0	1.5	0.5	0.2
24 : 0	1.1	0.5	0.2
Undermined	5.2	1.2	---

---: absent; +: minor than 0.2 %.

Et_2O. The ethereal extract was saponified at reflux under N_2 for 2 hr with 10 % KOH in 70 % EtOH.

The saponifiable material was treated with HCl 1 N and extracted with Et_2O. Fatty acids (20-50 mg) were sealed in « Ipo vial » of 3 ml with 300 µl of pure C_5H_5N and 200 µl of dimethylformammide dimethylacetale (16), for 20' at 60°. The unsaponifiable mixture was fractionated on silica gel with $CHCl_3$. The sterol fraction was acetylated ($Ac_2O-C_5H_5N$; 12 hr, at room temperature) and purified on a Si gel column eluted with petrol 40-70° and C_6H_6 (7:3); the steryl acetates were fractionated on an $AgNO_3$—Si gel (1:4) column eluted with

petrol 40-70° with increasing amounts of C_6H_6. The fractions were tested by GLC and combined accordingly. Several fractions are also subjected to HPLC for further purification.

The long-chain alchool fraction was also acetylated and purified on a Si gel column eluted with petrol 40-70°: C_6H_6 in the ratio 8:2.

The structure of sterols and long-chain alchools were determined by co-injection with authentic samples and by comparison of their NMR and MS specta with standard.

The fatty acid composition of pollens is shown in table I. The major fatty acids were oleic, linoleic, palmitic and arachidic with small to tracce amounts of myristic, stearic, behenic, lignoceric, linolenic and nonadecanoic acid.

It is remarkable the predominant proportion of oleic and linoleic acids on the others. The amount of the percentage of saturated fatty acids is minor of 50 % in the three pollens and particurally low in *P. pinaster*.

The major sterol was the sitosterol with smaller but comparable amounts of cholesterol and 24-methylene cholesterol. The sterol content of pollens in shown in table II.

TABLE II

Sterol composition of pollens (%)

Steryl acetate	RR_t	*P. canariensis*	*P. pinaster*	*P. pinea*
24-norcholest-5,22-dien-3β ol	0.70	16.0	18.0	18.0
22-dehydrocholesterol	0.88	10.0	9.0	9.5
cholesterol	1.00	16.5	15.0	15.0
24-methylencholesterol	1.32	13.5	12.0	10.5
sitosterol	1.60	44.0	46.0	47.0

n-tetracosanol-1, n-docosanol-1, n-eicosanol-1 were the must abundant long-chain alchools; n-tetracosanol is the predominant.

Smaller quantities of n-octadecanol-1, n-hexadecanol-1 and n-tetradecanol-1 were also determined. The long-chain alchool composition in table III.

GLC analyses for sterols were on a Perkin-Elmer 3920 B instrument equipped with a 3 % OV - 17, 250°, N_2 (50 ml/min). RR_t are rela-

tive to cholesteryl acetate. HPLC was performed using a Perkin-Elmer 601 liquid chromatograph. A Waters μ bondapak C_{18} column was used (30 cm × 4 mm i.d.) pressure 1100 p.s.i., flow rate 1.5 ml/min, mobile phase CH_3OH-H_2O 97:3. Long-chain alchools were determined on a Carlo Erba 2900 gas chromatograph connected to an electronic integrator using 20 m × 0.5 mm OV - 101 glass capillary column at 240°.

TABLE III

Long-chain alchools composition of pollens (%)

Long-chain alchool	*P. canariensis*	*P. pinaster*	*P. pinea*
n-tetracosanol-1	57.4	51.2	49.6
n-docosanol-1	18.2	14.7	15.2
n-eicosanol-1	20.0	24.0	24.3
n-octadecanol-1	2.9	4.3	3.5
n-hexadecanol-1	1.2	5.3	6.8
n-tetradecanol-1	T	---	0.3

T: trace amounts; ---: absent.

Methyl esters of fatty acids are determined on two condition: 3 % SE−30 Chrom. W 80/100 mesh 64 × 1/8″ O.D.SS. at 60° isot. for 2′ and then programmed 10°/min up to 250°; N_2 at 30 ml/min D.F.I. 250°; and: 20 % PEGS on Chrom. W 80/100 mesh 6′ × 1/8″ O.D.SS. at 185° isot, N_2 30 ml/min D.F.I. 250° for the identification of poliunsaturated esters.

Acknowledgements: We thank Orto Botanico of Naples for supplying pollens and Sig. G. Crusco and A. Senatore for their technical assistance.

REFERENCES

[1] OPUTE F. J., Phytochemistry, **14**, 1023 (1975).
[2] BARBIER M., Progress in Phytochemistry, **2**, 1 (1970).
[3] VON PLANTA A., Landw. Vers. Stat., **32**, 215 (1885).
[4] ANDERSON R. J. and KULP W. L., J. Biol. Chem., **50**, 433 (1922).
[5] ANDERSON R. J., J. Biol Chem., **55**, 611 (1923).
[6] KIESEL A. and BARBIER M., Z. Physiol. Chem., **182**, 241 (1929).
[7] VIVINO A. E. and PALMER L. S., Arch. Biochem., **4**, 129 (1944).
[8] SOSA A. and SOSA-BOURDOIL C., C. R. Acad. Sci., **235**, 971 (1952).

[9] Sosa-Bourdoil C. and Sosa A., Bull. Soc. Chim. Biol., **36**, 393 (1954).
[10] Scott R. W. and Strohl M. J., Phytochemistry, **1**, 189 (1962).
[11] Ching T. M. and Ching K. K., Science, **138**, 890 (1962).
[12] De Simone F., Dini A. and Senatore F., Boll. Soc. Nat. Napoli, LXXXVI, 117 (1977).
[13] Hügel M. F., Vetter W., Audier H., Barbier M. and Lederer *E., Phytochemistry*, **3**, 7 (1964).
[14] Devys M. and Barbier M., Phytochemistry, **5**, 1031 (1966).
[15] De Simone F., Senatore F., Sica D. and Zollo F., Biochem and System. Ecol, 1979, in press.
[16] Thenot J. P., Anal. Letters, **5** (4), 217 (1972).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, M. Covello e L. Mangoni.

Sterols from two edible Basidiomycetes

Nota di FRANCESCO DE SIMONE *
presentata dal socio ordinario RODOLFO NICOLAUS

(Adunanza del 3 novembre 1979)

RIASSUNTO. — Sono stati determinati gli steroli in due Basidiomiceti commestibili. L'ergosterolo è risultato lo sterolo più abbondante, ed è accompagnato da altri steroli ad esso strutturalmente correlati.

SUMMARY. — Sterols in two edible Basidiomycetes have been determined with modern techniques. Ergosterol is the major sterol, accompanied by other closely related sterols.

As a continuation of our studies on sterols from fungal species (I), by reinvestigating in detail the sterol mixtures with modern techniques for the sterols present in low concentrations and often undetected before, we have now examined two species of edible Basidiomycetes, namely *Cortinarius torvus* and *Psalliota campestris* var. *Bisporius*. Ergosterol is always the major sterol.

Isolation and identification of sterols — Fresh tissues from the fungi were extracted with acetone at room temperature and the solvent removed leaving an aqueous suspension which was extracted with ether. The ethereal extracts were fractionated by column chromatography; the sterols containing fractions were combined and then saponified: the unsaponified fractions were purified by column chromtography over Si gel. The sterol fractions after acetylation were fractionated on Si gel impregnated with $AgNO_3$ (4 : 1), and eluted with light petroleum with increasing amounts of benzene.
The fractions were analyzed by GLC and combined accordingly. Some fractions were subjected to further separation by reverse phase HPLC. The structures of the acetyl sterols isolated in a pure state were established by a combination of their MS (2-4) and NMR spectra (5-6)

* Istituto di Biorganica, Facoltà di Farmacia, via L. Rodinò, 22 - Napoli.

and co-injection with authentic samples. The results are reported in Table I.

All fungi contained ergosterol (ergosteryl acetate: RR_t 1.22; IR ν_{max} cm^{-1}: 1730, 972 (22 trans); UV λ_{max} nm: 273, 294; MS m/e: 438 (M^+) and 378 ($M^+ - AcOH$, base peak); PMR: δ 0.63 (s, $18-H_3$, 0.96 (s, $19-H_3$)) as predominant sterol accompained by ergost-7-en-3 β-ol (ergost-7-en-3β-yl acetate: RR_t 1.43; IR ν_{max} cm^{-1}: 1730; MS m/e: 442 (M^+); PMR: δ 0.54 (s, $18-H_3$), 0.82 (s, $19-H_3$)), ergosta-7, 22-dien-3β-ol (ergosta-7, 22-dien-3β-yl acetate: RR_t 1.24; IR ν_{max} cm^{-1}: 1730, 972; MS m/e: 440 (M^+); PMR: δ 0.54 (s, $18-H_3$), 0.81 (s, $19-H_3$)), ergosta-5, 7-dien-3β-ol (ergosta-5, 7-dien-3β-yl acetate: RR_t 1.43; IR ν_{max} cm^{-1}: 1730; UV λ_{max} nm: 243, 283, 294; MS m/e: 440 (M^+); PMR: δ 0.62 (s, $18-H_3$), 0.96 (s, $19-H_3$)).

Experimental — Fungi were collected at Paestum (Salerno). The IR spectra ($CHCl_3$) were measured with a Perkin-Elmer 399 IR spectrophotometer; the UV spectra (EtOH) were recorded with a Perkin-Elmer 402 spectrophotometer. The PMR spectra were recorded with a Bruker WH−270 in $CDCl_3$ and TMS as internal reference. The MS spectra were performed on an AEI 902 spectrometer. GLC analyses were carried out on a Perkin-Elmer 3920 B instrument equipped with a glass column (2 m × 3 mm i.d.) packed with 2.5 % OV−1, oven temperature 250°, N_2 at 50 ml/min; RR_t are relative to cholesteryl acetate. HPLC was performed using a Perkin-Elmer 601 Liquid Chromatograph. A Waters μ bondapak C_{18} column was used (30 cm × 4 mm i.d.; pressure 1100 psi, flow rate 1.5 ml/min, mobile phase: methanol-water 97 : 3).

TABLE I

Sterol composition of two Basidiomycetes (%)

Family and species	Sterol present			
	1	*2*	*3*	*4*
Agaricaceae				
C. torvus	3.8	6.5	1.5	88.1
P. campestris	4.3	5.7	1.3	88.6

1: Ergost-7-en-3β-ol; *2*: Ergosta-7,22-dien-3β-ol; *3*: Ergosta-5,7-dien 3β-ol; *4*: Ergosterol.

Acknowledgment — The author is grateful to prof. E. Giuliano (Istituto di Botanica, Università di Napoli) for the identification of fungi.

REFERENCES

[1] De Simone F., Senatore F., Sica D. and Zollo F., *Phytochemistry*, **18** 1572 (1979).
[2] Knights B. A., *J. Gas Chromatog.*, **5**, 273 (1967).
[3] Wyllie S. G., Djerassi C., *J. Org. Chem.*, **33**, 305 (1968).
[4] Zaretskji Z. V., *Mass spectrometry of Steroids*, Israel Univ. Press, Jerusalem (1976).
[5] Rubinstein I., Goad L. J., Clague A. D., Mulheirn L. J., *Phytochemistry*, **15**, 195 (1976).
[6] Bhacca N. S., Williams D., *Application of NMR Spectroscopy in Organic Chemistry*, Holden-Day Inc., San Francisco (1964).

Istituto di Biorganica della Facoltà di Farmacia - Università di Napoli - Via L. Rodinò 22 - 20138 Napoli.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, M. Covello e L. Mangoni.

Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli

Parte III - Modelli di forma ovale a simmetria bilaterale *

Nota del socio ordinario MARIO GÀLGANO
e di ANNA GÀLGANO

(Adunanza del 3 novembre 1979)

RIASSUNTO. — Nella terza parte di questo lavoro, concernente i tricometrogrammi da modelli di forma ovale a simmetria bilaterale di sezioni trasverse di capelli, viene data la prova più evidente della discordanza completa tra la forma dei modelli e quella dei loro tricometrogrammi.

SUMMARY. — In this third part of the study, concerning the trichometrograms from models of ovally shaped with bilateral symmetry, drawn from transvèrse sections of human hair, it is given the most evident proof of the complete disagreement between the shape of the specimens examined and that of their trichometrograms.

1. - INTRODUZIONE.

Nella nota preliminare di M. GÀLGANO (1975) e nei suoi due lavori successivi (1976, 1977) sull'argomento, non era stato fatto cenno alle sezioni trasverse dei capelli all'incirca di forma ovale a simmetria bilaterale; ma dato che le sezioni suddette sono abbastanza frequenti (con indici variabili da circa 40 a circa 85), abbiamo ritenuto interessante occuparci dello studio dei modelli di forma ovale a simmetria bilaterale e dei loro tricometrogrammi, soprattutto perché, sebbene vasto e complesso, fornisce la prova più evidente della discordanza completa tra la forma dei modelli e quella dei loro tricometrogrammi.

La materia sarà trattata nel modo più succinto, e gli esempi saranno limitati al minimo indispensabile.

Rimandiamo ai lavori precedenti sopra citati circa l'uso del tricociclòforo e il modo con il quale vengono comunemente costruiti i tricometrogrammi.

* Con animo grato, ringraziamo vivamente il Prof. ALFREDO FRANCHETTA, ordinario di Geometria nella Facoltà di Scienze M., F. e N. di Napoli, per il prezioso aiuto datoci nella impostazione del lavoro e con la revisione critica del testo.

2. - Premessa. - Considerazioni generali sulle sezioni ovali a simmetria bilaterale.

Le sezioni ovali a simmetria bilaterale hanno un solo asse di simmetria, che indicheremo con x (considerandolo coincidente con l'asse delle x), e sono pertanto prive di un centro di simmetria. Esse sono costituite (figg. 1-5) da due archi di circonferenza γ_1, γ_2, aventi i centri O_1, O_2 su x e raggi r_1, r_2 di lunghezza diversa (per fissare le idee, supporremo $r_1 < r_2$ e O_2 situato a destra rispetto ad O_1), e da due altri archi di circonferenza γ_3, γ_3', aventi uno stesso raggio $R\,(> r_2)$ e centri O_3, O_3' situati sopra una retta, che indicheremo con y (considerandola coincidente con l'asse delle y), perpendicolare a x, ed equidistanti dal punto O comune a x e y.

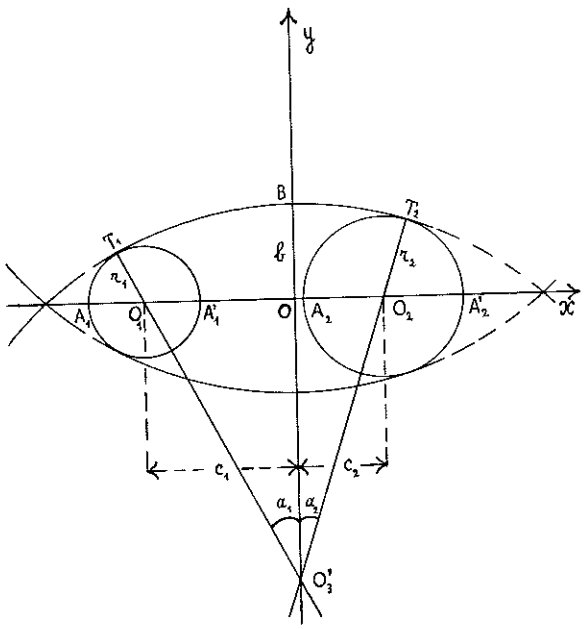


Fig. 1. - Riproduzione 1:2. - Categoria 1ª, ovale con Indice = 50, Caso 3°. La spiegazione è nel testo.

Nella discussione che segue intervengono, oltre R, r_1, r_2, altri parametri. Anzitutto, detti A_1 A_2' i punti d'intersezione di γ_1 e γ_2 con x (« vertici » dell'ovale), il segmento A_1 A_2' è, ovviamente, la massima delle corde dell'ovale e sarà perciò chiamato Asse Maggiore (A.M. = $= a$). Chiameremo invece asse minore (a.m. = $2\,b$) la massima delle corde dell'ovale parallele a y ($2\,b < a$). L'asse minore è il segmento

intercettato su y dagli archi γ_3, γ_3', se O è interno al segmento $O_1 O_2$, o coincide con O_2; è il diametro di γ_2 perpendicolare a x, se O è esterno al segmento $O_1 O_2$ (dalla parte di O_2), o se coincide con A_2'.

Si chiamerà « Indice » dell'ovale il rapporto I fra l'asse minore e l'Asse Maggiore. Nel testo questo rapporto sarà moltiplicato per 100, come si usa in Antropologia.

Indicheremo poi con a_1 e a_2 le distanze O A_1 O A_2' di A_1 e A_2' da O. Si avrà allora $a = a_1 + a_2$, oppure $a = a_1 - a_2$, secondo che O sia interno od esterno al segmento $O_1 A_2'$; e si avrà $a = a_1$, se O coincide con A_2'.

Indicheremo inoltre con c_1, c_2, c_3 le distanze di O_1, O_2, O_3 da O. Rileviamo alcune relazioni fra questi parametri e quelli introdotti precedentemente, delle quali faremo uso nel seguito.

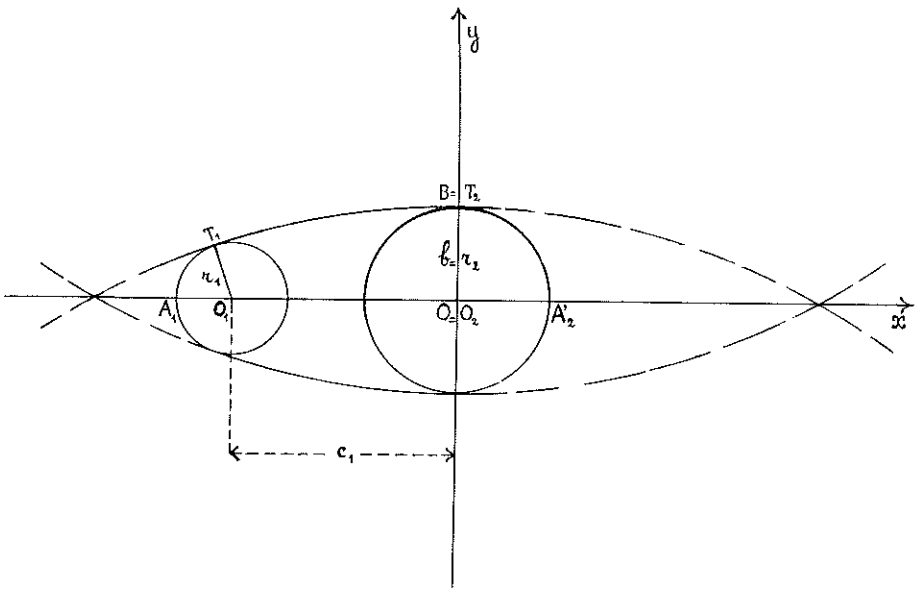


FIG. 2. - Riproduzione 1:2. - Categoria 2ª, ovale con Indice = 50. La spiegazione è nel testo.

AVVERTENZA. - Nelle figg. 2-5 i raggi $O_1 T_1$ di r_1 e $O_2 T_2$ di r_2 sono stati disegnati con l'angolatura che ciascuno di essi possiede quale parte del raggio R passante rispettivamente per i loro centri O_1 e O_2 da suo centro in O_3' su $-y$ (si confronti con la Fig. 1).

Se si applica il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli $O O_1 O_3$, $O O_2 O_3$, tenendo conto che $O_3 O_1 = R - r_1$, $O_3 O_2 = R - r_2$, si ottengono le relazioni

$$(1) \qquad (R - r_1)^2 = c_1^2 + c_3^2, \quad (R - r_2)^2 = c_2^2 + c_3^2,$$

dalle quali, sottraendo membro a membro, si ha

$$2\,R\,(r_2 - r_1) = r_2^2 - r_1^2 + c_2^1 - c_2^2 \,. \tag{2}$$

Rileviamo ancora che si ha, in ogni caso, $a_1 = c_1 + r_1$ ed $a_2 = c_2 + r_2$ se O è interno al segmento $O_1 O_2$; mentre si ha $a_2 = r_2 - c_2$ oppure $a_2 = c_2 - r_2$ secondo che O sia interno od esterno al segmento $O_2 A_2'$. Ne segue che nel primo caso si ha $a = c_1 + c_2 + r_1 + r_2$, nei rimanenti $a = c_1 - c_2 + r_1 + r_2$. Quest'ultima eguaglianza si può semplificare (si veda qui di seguito) adeguatamente nei rispettivi casi in cui O coincide con O_2 o con A_2' .

Da quanto si è detto emerge l'opportunità di suddividere gli ovali considerati nelle seguenti Categorie.

1ª Categoria. — O interno al segmento $O_1 O_2$ (fig. 1). Allora $a = O A_1 + O A_2' = c_1 + c_2 + r_1 + r_2$; $b = R - c_3 > r_2$;

$$I = \frac{2\,b}{c_1 + c_2 + r_1 + r_2} \times 100.$$

2ª Categoria. — O coincidente con O_2 (fig. 2). Allora $a = O A_1 + O A_2' = c_1 + r_1 + r_2$; $b = r_2$;

$$I = \frac{2\,r_2}{c_1 + r_1 + r_2} \times 100.$$

3ª Categoria. — O interno al segmento $O_2 A_2'$ (fig. 3). Allora $a = O A_1 + O A_2' = c_1 - c_2 + r_1 + r_2$; $b = r_2$;

$$I = \frac{2\,r_2}{c_1 - c_2 + r_1 + r_2} \times 100.$$

4ª Categoria. — O coincidente con il vertice A_2' (fig. 4). Allora $a = c_1 + r_1$; $b = r_2$;

$$I = \frac{2\,r_2}{c_1 + r_1} \times 100.$$

5ª Categoria. — O esterno al segmento $O_2 A_2'$ (fig. 5). Allora $a = O A_1 - O A_2' = c_1 - c_2 + r_1 + r_2$; $b = r_2$;

$$I = \frac{2\,r_2}{c_1 - c_2 + r_1 + r_2} \times 100.$$

*
* *

Per quanto riguarda la *Categoria 1ª*, si ha che R e r_2 sono determinati da a_1, a_2, b, r_1. In questo caso si ha, infatti, $c_3 = R - b$, $c_1 = a_1 - r_1$, $c_2 = a_2 - r_2$.

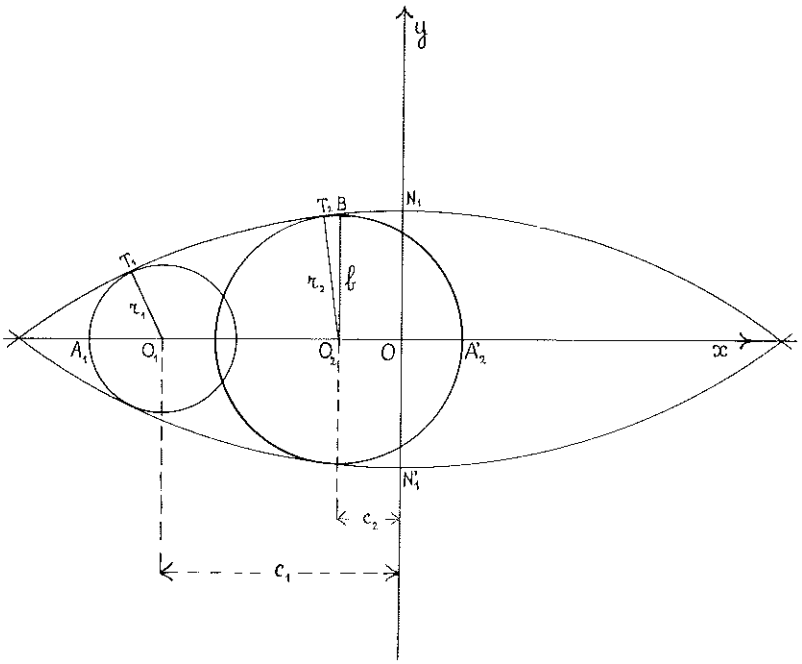


FIG. 3. - Riproduzione 1:2. - Categoria 3ª, ovale con Indice = ≑ 66,251'443'396 ccc. La spiegazione è nel testo.

AVVERTENZA. - Nelle figg. 3-5 N_1 ed N_1' indicano gli estremi sull'asse y rispettivamente dei due raggi R, l'uno con centro O_3' su $-y$ e l'altro con centro O_3 su $+y$.

Sostituendo nelle relazioni (1) si ha allora

$$2 r_1 R - 2 a_1 r_1 - 2 b R + a_1^2 + b^2 = 0$$

$$2 r_2 R - 2 a_2 r_2 - 2 b R + a_2^2 + b^2 = 0 ,$$

della prima delle quali si può ricavare

$$R = \frac{a_1^2 + b^2 - 2 a_1 r_1}{2 (b - r_1)} \tag{3}$$

e quindi, dalla seconda,

$$r_2 = \frac{2 b R - a_2^2 + b^2}{2 (R - a_2)} . \tag{4}$$

Nella *Categoria 2ª*, stabilito un certo valore di $b = r_2$ e di r_1, ed essendo già determinata la posizione di y (O coincidente con O_2), e quindi noti i valori di a_1, $a_2\,(= r_2)$, c_1 e $c_2\,(= 0)$, sarà calcolata la lun-

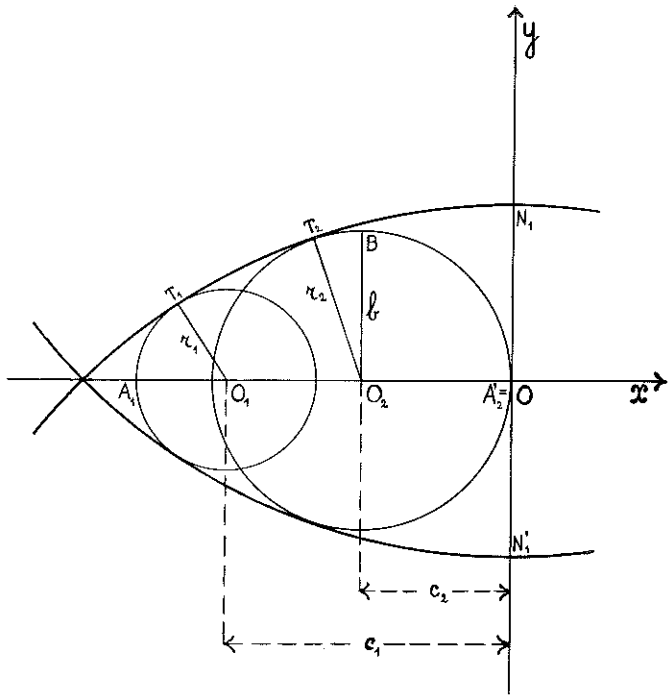


FIG. 4. - Riproduzione 1:2. - Categoria 4ª, ovale con Indice = 80. La spiegazione è nel testo.

ghezza di R con la formula indicata per la 1ª Categoria, oppure, essendo $c_2 = a_2 - r_2 = 0$, con la formula più semplice, derivante dalla (2),

$$(5) \qquad R = \frac{r_2^2 - r_1^2 + c_1^2}{2\,(r_2 - r_1)}, \text{ e poiché } b = r_2, \text{ avremo}$$

$$(5\,b) \qquad c_3 = R - r_2 = R - b\,.$$

Si noti che per la coincidenza di O con O_2 il contorno dell'ovale è formato, dalla parte di A_2', da un semicerchio di raggio r_2.

Nelle *Categorie 3ª, 4ª e 5ª*, stabilito il valore di $b = r_2$ e di r_1, nonché la posizione di y (si veda più sopra) la lunghezza di R sarà

calcolata con la formula, derivante dalla (2),

$$R = \frac{r_2^2 - r_1^2 + c_1^2 - c_2^2}{2(r_2 - r_1)} \qquad (6)$$

Poiché l'asse y è spostato verso destra rispetto ad O_2, e quindi l'a.m. dell'ovale non giace su di esso, la lunghezza di c_3, e di conseguenza la posizione su y dei due centri O_3 e O_3' di R, si ricaveranno

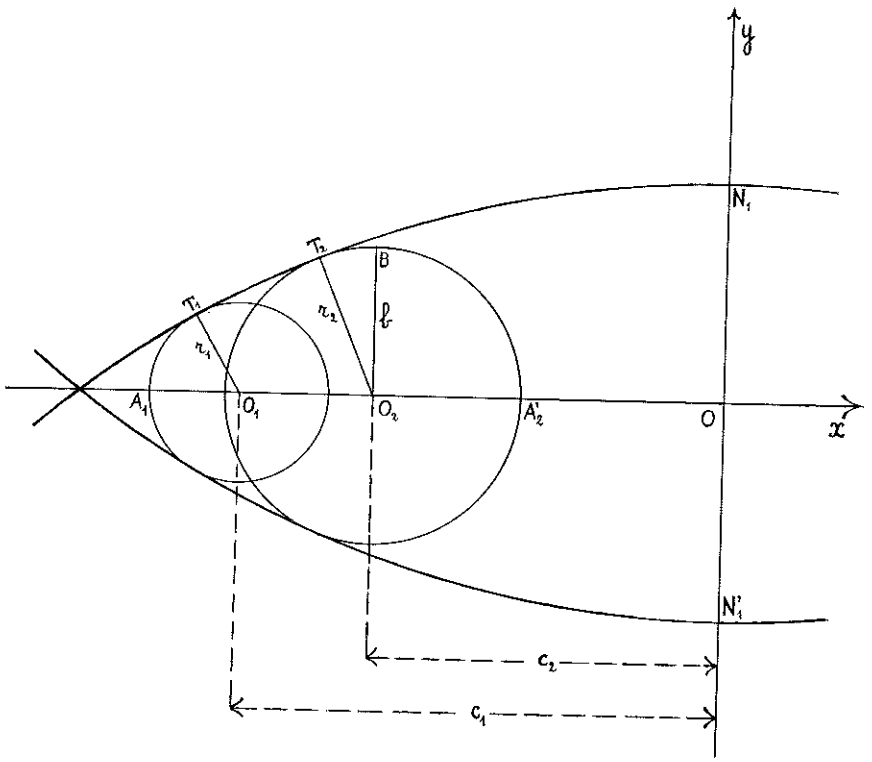


FIG. 5. - Riproduzione 1:2. - Categoria 5ª, ovale con Indice 80, Caso 6°. La spiegazione è nel testo.

dalla radice quadrata di uno qualunque dei due membri della relazione $(R - r_1)^2 - c_1^2 = (R - r_2)^2 - c_2^2$, dedotta dal teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli $O\,O_3\,O_1$, $O\,O_3\,O_2$; pertanto,

$$c_3 = O\,O_3 = O\,O_3' = \sqrt{(R - r_1)^2 - c_1^2} = \sqrt{(R - r_2)^2 - c_2^2}. \qquad (6\,b)$$

La parte rimanente sull'asse y di ciascun R, che è pure utile conoscere per poter eseguire all'occorrenza il disegno dell'ovale, è

(6 c) $$R - c_3 = O N_1 = O N_1' \text{ (cfr. le figg. 3-5).}$$

La lunghezza di tale porzione può essere calcolata anche con una delle seguenti formule:

$$O N_1 = O N_1' = R - \sqrt{R^2 - 2 R r_1 + r_1^2 - c_1^2} =$$

$$= R - \sqrt{R^2 - 2 R r_2 + r_2^2 - c_2^2} .$$

Si noti che in quest'ultime tre Categorie quanto più O sarà spostato a destra rispetto ad O_2, tanto più il contorno dell'ovale, dalla parte di A_2', sarà formato per oltre un semicerchio dal raggio r_2.

3. - Indicazioni per la costruzione dei tricometrogrammi.

Dati un ovale e una direzione, formante angolo α con l'asse x, indichiamo con t_1 e t_2 le tangenti all'ovale avente quella direzione e con $2\rho(\alpha)$ la distanza tra t_1 e t_2. Se $|\rho_1(\alpha)|$ e $|\rho_2(\alpha)|$ sono le distanze di O da t_1 e t_2 in valore assoluto, si avrà

$$\rho(\alpha) = \left| \frac{|\rho_1(\alpha)| + |\rho_2(\alpha)|}{2} \right|$$

se O è compreso nella striscia determinata da t_1 e t_2, mentre si avrà

$$\rho(\alpha) = \left| \frac{|\rho_1(\alpha)| - |\rho_2(\alpha)|}{2} \right|$$

se O è esterno alla detta striscia.

Per la costruzione dei tricometrogrammi, secondo il modo correntemente usato nei lavori antropologici, interessa calcolare i valori di ρ relativi agli angoli $\alpha = 30°$ e $= 60°$ (in quanto che i valori di ρ relativi agli angoli 150°, 210° e 330° e agli angoli 120°, 240° e 300° sono rispettivamente uguali ai precedenti, a causa della simmetria rispetto all'asse x), il vertice relativo ad α avendo le coordinate $x(\alpha) = \rho(\alpha)\cos\alpha$, $y(\alpha) = \rho(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha$.

In genere $\rho_1(\alpha)$ e $\rho_2(\alpha)$ sono differenti, e vanno calcolati separatamente.

Detto α_1 l'angolo $\widehat{O O_3' O_1}$, si ha che il punto di contatto con t_1 appartiene all'arco γ_1 o all'arco γ_3' secondo che sia $\alpha > \alpha_1$ oppure $\alpha < \alpha_1$.

Se $\alpha = \alpha_1$ il punto di contatto con t_1 corrisponde al punto di unione dell'arco γ_1 con l'arco γ_3'.

Analogamente, detto α_2 l'angolo $\widehat{O O_3 O_2}$, si ha che il punto di contatto con t_2 appartiene all'arco γ_2 o all'arco γ_3 secondo che sia $\alpha > \alpha_2$, oppure $\alpha < \alpha_2$. Se $\alpha = \alpha_2$ il punto di contatto con t_2 corrisponde al punto di unione dell'arco γ_2 con l'arco γ_3.

Quando il punto di contatto suddetto appartiene agli archi γ_3', γ_3, si userà la stessa formula

$$R - c_3 \cos \alpha, \text{ sia per } \rho_1(\alpha) \text{ che per } \rho_2(\alpha).$$

Quando il punto di contatto appartiene agli archi γ_1, γ_2, si useranno rispettivamente le formule

$$\rho_1(\alpha) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} \alpha, \quad \rho_2(\alpha) = r_2 + c_2 \operatorname{sen} \alpha,$$

quest'ultima soggetta a necessarie modificazioni nelle Categorie 2ª-5ª, come vedremo tra poco a suo luogo.

Quando il punto di contatto corrisponde al punto di unione degli archi γ_1 con γ_3', γ_2 con γ_3, potremo usare rispettivamente tanto le formule facili a calcolare

$$\rho_1(\alpha) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} \alpha, \quad \rho_2(\alpha) = r_2 + c_2 \operatorname{sen} \alpha,$$

quanto quelle meno semplici da calcolare

$$\rho_1(\alpha) = R - c_3 \cos \alpha, \quad \rho_2(\alpha) = R - c_3 \cos \alpha.$$

Dalle misure ottenute di $\rho_1(30°)$ e $\rho_2(30°)$ e di $\rho_1(60°)$ e $\rho_2(60°)$ potremo calcorare

$$x(30°) = \frac{x_1(30°) + x_2(30°)}{2}, \quad y(30°) = \frac{y_1(30°) + y_2(30°)}{2},$$

$$x(60°) = \frac{x_1(60°) + x_2(60°)}{2} \text{ e } y(60°) = \frac{y_1(60°) + y_2(60°)}{2}.$$

Ma per semplificare, come si può comprendere dalle spiegazioni date nella Parte I (1976) e nella Parte II) 1977 di questo lavoro circa l'errore fondamentale di voler considerare le sezioni trasverse dei capelli con un ipotetico centro di simmetria sovrapponibile al centro del modulo [1] sul quale si costruisce il tricometrogramma, si possono

[1] Il modulo è in sostanza una circonferenza con il diametro a 0°-180° orizzontale, sul quale si segna l'a. m., con il diametro a 90°-270° verticale ,sul quale si segna l'A. M., e altri quattro diametri formanti fra loro e con uno dei due precedenti angoli di 30°.

addizionare algebricamente i due $\rho_1(30°)$ e $\rho_2(30°)$ e i due $\rho_1(60°)$ e $\rho_2(60°)$, e dalla loro semisomma, che chiameremo $\rho(30°)$ e $\rho(60°)$, ricavare rispettivamente la lunghezza di $x(30°)$, di $y(30°)$, di $x(60°)$ e di $y(60°)$.

Tuttavia, data la notevole varietà e maggiore complessità delle sezioni ovali a simmetria bilaterale rispetto alle sezioni ellittiche e ovali bisimmetriche, le sommarie indicazioni precedenti debbono essere completate per ogni Categoria dalle seguenti indicazioni, che si riferiscono agli esempi considerati nel successivo paragrafo 4.

Per ogni Categoria sono stati presi in esame degli ovali con I = 50, che dànno tricometrogrammi a 12 lati con « *falsa rientranza* » sull'asse delle x, con I = 80, che dànno tricometrogrammi a 12 lati « *ovaloidi* »[2], e con Indici all'incirca intermedi fra questi (= ≒ 65,863 ecc. per la 1ª Cat.; = ≒ 66,293 ecc. per la 2ª Cat., e = ≒ 66,251 ecc. per le Cat. 3ª, 4ª e 5ª), che danno in pratica tricometrogrammi a soli 10 lati.

Per le Categorie 1ª e 5ª sono stati presi in considerazione i Casi più interessanti che esse presentano, la 1ª perché il punto O d'incrocio fra x, y può essere più o meno vicino a O_2, la 5ª perché il tratto $O A_2'$, essendo O esterno all'ovale, può essere di varia lunghezza. Le Categorie 2ª e 4ª presentano un solo caso per ogni Indice, perché in esse il punto O ha una posizione fissa, già determinata. Per la Categoria 3ª è stato preso in considerazione per ogni Indice solo il caso in cui O è situato nel punto medio del segmento $O_2 A_2'$, sembrandoci ciò sufficiente per il presente lavoro.

Vediamo ora quali sono, riguardo agli Esempi considerati nel successivo § 4, le formule da usare secondo le singole Categorie per i tre Indici considerati e secondo i Casi più interessanti delle Categorie 1ª e 5ª, dopo rotazione dell'ovale di 30° e di 60° in senso orario, tenendo conto di quanto è stato già detto in via generale intorno alle formule di $\rho_1(\alpha)$, $\rho_2(\alpha)$ nella parte introduttiva del presente paragrafo.

A) - *Dopo rotazione dell'ovale di 30°* (idem *di 150°, 210° e 330°*)[3] *in senso orario.*

Negli ovali a simmetria bilaterale l'angolo $\alpha_1 = \widehat{O O_3' O_1}$, determinato dalla relazione $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{c_1}{c_3}$, è di ampiezza sempre maggiore di quella dell'angolo $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2}$, determinato dalla relazione $\operatorname{tg} \alpha_2 =$

[2] Per i termini « *falsa rientranza* » e « *ovaloide* » si veda la definizione data da M. GÀLGANO nella nota del 1975 (pp. 181-182) e nel lavoro del 1976 (pp. 459-461).

[3] Perciò non metteremo i segni + e − davanti ai valori di x (30°) e di y (30°).

$= \frac{c_2}{c_3}$, essendo c_1 ($= O\,O_1$) di lunghezza sempre maggiore di quella di c_2 ($= O\,O_2$ nelle Categorie 1ª, 3ª, 4ª e 5ª); il caso limite con c_2 e α_2 di valore nullo, essendo $c_2 = \text{cm}\,0$ e $\alpha_2 = 0°$, si ha nella Categoria 2ª, a causa della coincidenza del punto O di R, ossia d'incrocio degli assi x e y, con il centro O_2 del raggio r_2 [4].

Gli angoli α_1 e α_2 possono essere di ampiezza $\gtrless 30°$, ma sono di regola variamente combinati fra loro nei diversi ovali. Di tutto ciò va tenuto conto, perché le formule di $\rho\,(30°)$ cambiano in relazione all'ampiezza di questi due angoli, tanto più che nella Categoria 2ª — come abbiamo detto dianzi — l'angolo α_2 ha valore nullo.

Categoria 1ª.

a) Se ambedue gli angoli α_1 e α_2 hanno un'ampiezza $> 30°$ (Si veda l'I = 80, Caso 1°), si userà la formula

$$\text{(7)} \qquad R - c_3 \cos 30°$$

sia per $\rho_1\,(30°)$ che per $\rho_2\,(30°)$, che in tal caso risultano eguali fra loro, per cui avremo

$$\text{(8)} \quad \rho\,(30°) = \frac{2\,(R - c_3 \cos 30°)}{2} = R - c_3 \cos 30° = \rho_1\,(30°) = \rho_2\,(30°).$$

b) Se α_1 ha un'ampiezza $> 30°$ e α_2 è $= 30°$ (Si veda l'I = 80, Caso 2°), si userà per $\rho_1\,(30°)$ la formula (7) e per $\rho_2\,(30°)$ la formula

$$\text{(9)} \qquad \rho_2\,(30°) = r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30°$$

(oppure $= R - c_3 \cos 30°$, come alla lettera *a*, la quale formula, però, è meno semplice da calcolare). Avremo quindi, come nel caso precedente, $\rho_1\,(30°) = \rho_2\,(30°)$, e pertanto

$$\text{(8 b)} \qquad \rho\,(30°) = \frac{(R - c_3 \cos 30°) + (r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30°)}{2} =$$

$$= R - c_3 \cos 30° = r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30° = \rho_1\,(30°) = \rho_2\,(30°).$$

c) Se α_1 ha un'ampiezza $> 30°$ e α_2 è $< 30°$ (Si veda l'I = 80, Caso 3°, l'I = 50 e l'I = $\div$ 65,863 ecc.) si useranno la formula (5),

[4] Negli ovali bisimmetrici, invece, $c_1 = c_2$ e $\alpha_1 = \alpha_2$.

$\rho_1(30°) = R - c_3 \cos 30°$, e la

(10)[5] $$\rho_2(30°) = r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30°,$$

per cui avremo

(11) $$\rho(30°) = \frac{(R - c_3 \cos 30°) + (r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30°)}{2},$$

in apparenza eguale alla (8-b), ma in sostanza con il dividendo composto da un $\rho_1(30°)$ di valore maggiore di quello di $\rho_2(30°)$, di modo che $\rho(30°) < \rho_1(30°)$ e $> \rho_2(30°)$.

d) Se α_1 ha un'ampiezza di 30° e, di conseguenza, α_2 è $< 30°$ (Si veda l'I = 50, Caso 2°), si userà per $\rho_1(30°)$ la formula più semplice

(12) $$\rho_1(30°) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°$$

(oppure la formula (7)) e per $\rho_2(30°)$ si userà la formula (10), per cui avremo

(13) $$\rho(30°) =$$

$$= \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + (r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30°)}{2} < \rho_1(30°) \text{ e } > \rho_2(30°).$$

Si potrebbe anche usare, invece della (13), la formula (11), che però è meno pratica.

e) Se α_1 e α_2 hanno un'ampiezza $< 30°$ (Si veda l'I = 50, Caso 3°), si useranno le formule

(14) $$\rho_1(30°) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°,$$

in apparenza eguale alla (12), ma non sostituibile come questa con la formula (7), e

(10) $$\rho_2(30°) = r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30°,$$

per cui avremo

(15) $$\rho(30°) =$$

$$= \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + (r_2 + c_2 \operatorname{sen} 30°)}{2} < \rho_1(30°) \text{ e } > \rho_2(30°),$$

[5] Chiamata (10), perché non è, a differenza della (9) alla lettera *b*, sostituibile con la formula (7).

in apparenza eguale alla (13), ma con il primo membro del dividendo non sostituibile con la formula (7).

Categoria 2ª.

Come è stato già detto, in questa Categoria c_2 e α_2 hanno valore nullo; ne consegue che per $\rho_2(30°)$ si dovrà usare la formula ridotta.

(16) $$\rho_2(30°) = r_2 .$$

Nell'ovale con I = 50 l'angolo α_1 ha un'ampiezza $< 30°$, e quindi si userà la formula (14) $\rho_1(30°) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°$, per cui avremo

(17) $$\rho(30°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + r_2}{2} < \rho_1(30°) \text{ e } > \rho_2(30°).$$

Nell'ovale con I = $\div$ 66,293 ecc. e quello con I = 80 l'angolo α_1 ha un'ampiezza $> 30°$, e quindi si userà la formula (7) $\rho_1(30°) = R - c_3 \cos 30°$, per cui avremo

(18) $$\rho(30°) = \frac{(R - c_3 \cos 30°) + r_2}{2} < \rho_1(30°) \text{ e } > \rho_2(30°).$$

Categorie 3ª e 4ª.

In queste Categorie α_1 è di ampiezza $< 30°$ con l'I = 50 e con l'I = $\div$ 66,251 ecc., e perciò con questi due Indici sarà usata per $\rho_1(30°)$ la formula (14). L'angolo α_1 è invece $> 30°$ con l'I = 80, e perciò con questo Indice sarà usata la formula (7) per $\rho_1(30°)$.

L'angolo α_2 è di ampiezza sempre $< 30°$, e poiché in $\rho_1(30°)$ è già contenuto $c_2 \operatorname{sen} 30°$, avremo

(19) $$\rho_2(30°) = r_2 - c_2 \operatorname{sen} 30°,$$

il quale in queste Categorie ha sempre valore positivo, essendo $r_2 > c_2 \operatorname{sen} 30°$, e perciò va addizionato a $\rho_1(30°)$.

Pertanto con i primi due indici sarà

(20) $$\rho(30°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + (r_2 - c_2 \operatorname{sen} 30°)}{2} <$$

$$< \rho_1(30°), > \rho_2(30°) \text{ e } > \frac{\rho_1(30°)}{2} ;$$

mentre con l'I = 80 sarà

$$(21) \qquad \rho(30^\circ) = \frac{(R - c_3 \cos 30^\circ) + (r_2 - c_2 \operatorname{sen} 30^\circ)}{2} <$$

$$< \rho_1(30^\circ), > \rho_2(30^\circ) \text{ e } > \frac{\rho_1(30^\circ)}{2} .$$

Categoria 5ª.

È più complessa delle precedenti, perché O è esterno all'ovale, e può essere situato a distanza varia dal vertice A_2' di quest'ultimo.

Le sezioni ovali, da noi prese in esame, con I = 50 e con I = $= \div$ 66,251 ecc.[6] possono essere considerate insieme, avendo gli angoli α_1 e α_2 di ampiezza sempre $< 30^\circ$ e presentando i medesimi cinque Casi diversi fra loro, determinati dal rapporto fra la lunghezza di $b = r_2$ e la varia lunghezza assegnata al segmento $O A_2'$.

Nel 1° e nel 3° Caso di ambedue gli Indici suddetti abbiamo assegnato ad $O A_2'$ rispettivamente la lunghezza di cm 0,1 $< r_2$ e di cm $2 < r_2$.

Nel 2° Caso dell'I = 50 abbiamo assegnato ad $O A_2'$ la lunghezza di $\div$ cm 0,386'751 ecc. $< r_2$, e nel 2° Caso dell'I = $\div$ 66,251 ecc. abbiamo assegnato ad $O A_2'$ la lunghezza di $\div$ cm 0,512'456 ecc. $< r_2$ (il 2° Caso dei suddetti Indici è importante — come vedremo — per la rotazione dell'ovale di 60°).

In questi primi tre Casi, essendo $O A_2' < r_2$, ossia $\frac{O A_2'}{r_2} < 1$, r_2 risulta maggiore di $c_2 \operatorname{sen} 30^\circ$, e pertanto useremo la formula (14) per $\rho_1(30^\circ)$ e la (19) per $\rho_2(30^\circ)$, quest'ultimo di valore positivo, che perciò va addizionato a $\rho_1(30^\circ)$.

Avremo quindi la formula[7]

$$(20) \qquad \rho(30^\circ) =$$

$$= \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30^\circ) + (r_2 - c_2 \operatorname{sen} 30^\circ)}{2} > \frac{\rho_1(30^\circ)}{2} ,$$

come abbiamo visto già per gli ovali con gli stessi Indici delle Categorie 3ª e 4ª.

[6] L'I = $\div$ 66,251 ecc. è quello che dà, nelle Categorie 3ª, 4ª e 5ª, un identico tricometrogramma a 10 lati soltanto.

[7] Come nelle Categorie 3ª e 4ª, $c_2 \operatorname{sen} 30^\circ$ è già contenuto in $\rho_1(30^\circ)$, e quindi va sottratto da r_2 .

Nel 4° Caso, essendo $O A_2' = r_2$ ossia $\frac{O A_2'}{r_2} = 1$, r_2 è uguale a $c_2 \operatorname{sen} 30°$, e pertanto sarà

(19 b) $$\rho_2(30°) = r_2 - c_2 \operatorname{sen} 30° = 0,$$

mentre per $\rho_1(30°)$ useremo la formula (14). Avremo quindi

(22) $$\rho(30°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + 0}{2} = \frac{\rho_1(30°)}{2}.$$

Nel 5° Caso, essendo $O A_2' > r_2$ ossia $\frac{O A_2'}{r_2} > 1$, r_2 è minore di $c_2 \operatorname{sen} 30°$, è pertanto sarà

(19 c) $$\rho_2(30°) = - c_2 \operatorname{sen} 30° + r_2$$

di valore negativo, che va tolto dalla formula (14) per $\rho_1(30°)$. Avremo quindi

(23) $$\rho(30°) =$$

$$= \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + (- c_2 \operatorname{sen} 30° + r_2)}{2} < \frac{\rho_1(30°)}{2}.$$

Le sezioni ovali con I = 80, da noi prese in esame, hanno l'angolo α_1 di ampiezza $\geqq 30°$ e il segmento $O A_2'$ di lunghezza $\leqq r_2$, mentre α_2 è sempre $< 30°$. Di queste sezioni abbiamo considerato i sette Casi seguenti, determinati dal rapporto fra la lunghezza fissa di $b = r_2$ e la varia lunghezza assegnata al segmento $O A_2'$, nonché dalla varia ampiezza dell'angolo α_1, la quale è correlata con il rapporto suddetto.

Nel 1° Caso abbiamo $\alpha_1 > 30°$ con $O A_2' = \text{cm } 0{,}1 < r_2$. Nel 2° Caso (importante — come vedremo — per la rotazione dell'ovale di 60°) abbiamo $\alpha_1 > 30°$ con $O A_2' = \div \text{ cm } 0{,}618'802$ ecc. $< r^2$. Nel 3° Caso $\alpha_1 > 30°$ con $O A_2' = \text{cm } 2 < r_2$.

In questi primi tre Casi, essendo $\alpha_1 > 30°$ e $O A_2' < r_2$, useremo la formula (7) per $\rho_1(30°)$ e la (19) per $\rho_2(30°)$, quest'ultimo di valore positivo, risultando $r_2 > c_2 \operatorname{sen} 30°$, per cui, secondo la formula identica a quella degli ovali con I = 80 delle Categorie 3ª e 4ª,

(21) $$\rho(30°) = \frac{(R - c_3 \cos 30°) + (r_2 - c_2 \operatorname{sen} 30°)}{2} > \frac{\rho_1(30°)}{2}.$$

Nel 4° Caso, con $\alpha_1 > 30°$ e $O A_2' = r_2$ (= cm 4, se l'A.M. = a è lungo cm 10), useremo la formula (7) per $\rho_1(30°)$ e la (19 b) per $\rho_2(30°)$, quest'ultimo di valore nullo, risultando $r_2 = c_2 \operatorname{sen} 30°$, per cui, secondo la formula

$$(24) \qquad \rho(30°) = \frac{(R - c_3 \cos 30°) + 0}{2} = \frac{\rho_1(30°)}{2}.$$

Il caso è analogo a quello omonimo sopra considerato, avente la formula (22).

Nel 5° Caso, con $\alpha_1 > 30°$ (= $\div$ 30° 7'...) e $O A_2' > r_2$, e precisamente $O A_2' = 0{,}5\, a = 1{,}25\, r_2$ (= cm 5, se l'A.M. = α è lungo cm 10 e quindi r_2 = cm 4), useremo la formula (7) per $\rho_1(30°)$ e la (19 c) per $\rho_2(30°)$, quest'ultimo di valore negativo, risultando $r_2 < c_2 \operatorname{sen} 30°$, per cui avremo

$$(25) \qquad \rho(30°) = \frac{(R - c_3 \cos 30°) + (- c_2 \operatorname{sen} 30° + r_2)}{2} < \frac{\rho_1(30°)}{2}.$$

Nel 6° Caso, con $\alpha_1 = 30°$ e $O A_2' > r_2$, e precisamente $O A_2' = 0{,}54\, a = 1{,}35\, r_2$ (= cm 5,4, se l'A.M. = a è lungo cm 10 e quindi r_2 = cm 4), useremo la formula (12), oppure la (7), per $\rho_1(30°)$ e la (19 c) per $\rho_2(30°)$, quest'ultimo di valore negativo, essendo $r_2 < c_2 \operatorname{sen} 30°$, per cui risulterà [8]

$$(25\text{ b}) \qquad \rho(30°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + (- c_2 \operatorname{sen} 30° + r_2)}{2} < \frac{\rho_1(30°)}{2}.$$

Nel presente Caso è possibile usare anche la formula di esecuzione meno semplice

$$\rho(30°) = \frac{(R - c_3 \cos 30°) + (- c_2 \operatorname{sen} 30 + r_2)}{2},$$

sostituendo per $\rho_1(30°)$ la formula (7) alla (12), dato che α_1 ha un'ampiezza di 30°.

Nel 7° Caso, con $a_1 < 30°$ e $O A_2' > 1{,}35\, r_2$ (ossia > cm 5,4, se l'A.M. = a = cm 10), useremo la formula (14) per $\rho_1(30°)$ e la (19 c)

[8] I Casi 5° e 6° sono analoghi al Caso 5° più sopra considerato, avente la formula (23).

per $\rho_2(30°)$, il quale è di valore negativo, qui pure risultando $r_2 < c_2 \operatorname{sen} 30°$, per cui, secondo la formula

$$(23) \qquad \rho(30°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 30°) + (-c_2 \operatorname{sen} 30° + r_2)}{2} < \frac{\rho_1(30°)}{2}.$$

Questo Caso corrisponde al Caso 5° più sopra considerato, che ha la stessa formula (23).

B) - *Dopo rotazione dell'ovale di 60° (*idem *di 120°, 240° e 300°)* [9] *in senso orario.*

Le seguenti considerazioni si riferiscono ai casi presi in esame nel successivo § 4.

Soltanto nel Caso 1° dell'I = 80, Categoria 1ª, l'angolo α_1 ha una ampiezza $> 60°$ (non abbiamo considerato il Caso con $\alpha_1 = 60°$); in tutti gli altri casi da noi esaminati sia α_1 che α_2 hanno un'ampiezza $< 60°$. Pertanto solo nel 1° Caso suddetto il punto di contatto con t_1 dell'angolo α di 60° appartiene all'arco γ_3', formato da R; mentre negli altri casi il punto di contatto con t_1 o con t_2 appartiene rispettivamente all'arco γ_1, formato da r_1 o all'arco γ_2, formato da r_2. Quest'ultimo caso — è forse bene ricordarlo — si verifica anche quando α_2 è nullo, $= 0°$, per gli ovali della Categoria 2ª.

Risulta quindi per le singole Categorie quanto segue, tenendo conto di quanto è stato già detto in via generale intorno alle formule di $\rho_1(\alpha)$, $\rho_2(\alpha)$ nella parte introduttiva del presente paragrafo e delle eventuali, necessarie modifiche della formula generale di $\rho_2(\alpha)$, simili a quelle già viste per la rotazione dell'ovale di 30°.

Categoria 1ª.

Quando agli angoli α_1 e α_2 hanno ambedue un'ampiezza $< 60°$, useremo le formule

$$(26) \qquad \rho_1(60°) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°$$

e

$$(27) \qquad \rho_2(60°) = r_2 + c_2 \operatorname{sen} 60°,$$

per cui

$$(28) \qquad \rho(60°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°) + (r_2 + c_2 \operatorname{sen} 60°)}{2}.$$

[9] Perciò non metteremo i segni + e − davanti ai valori di $x(60°)$ e di $y(60°)$.

Quanto sopra vale per gli ovali con I = 50, per l'ovale con I = = ÷ 65,863 ecc. e per i Casi 2° e 3° dell' I = 80.

Fa eccezione il 1° Caso dell'I = 80, in cui, come è stato già detto, l'angolo $\alpha_1 > 60°$ (= ÷ 61° 18'; mentre α_2 = ÷ 47° 16'). Pertanto in questo Caso si useranno le formule

(29) $$\rho_1(60°) = R - c_3 \cos 60°$$

e

(27) $$\rho_2(60°) = r_2 + c_2 \operatorname{sen} 60°,$$

per cui avremo

(30) $$\rho(60°) = \frac{(R - c_3 \cos 60°) + (r_2 + c_2 \operatorname{sen} 60°)}{2}.$$

Categoria 2ª.

Va tenuto presente che in questa Categoria esiste soltanto c_1 = = $(a_1 - r_1)$ e manca un c_2, perché $a_2 - r_2 = 0$, a causa della coincidenza del punto O con il centro O_2 del raggio r_2, per cui anche l'angolo α_2 è nullo, = 0°. Ne consegue che la formula $\rho_2(60°)$ va modificata, come è indicato qui sotto.

Con gli Indici = 50, = ÷ 66,293 ecc. e = 80 l'angolo α_1 è sempre inferiore ai 60°, e pertanto si useranno le formule

(26) $$\rho_1(60°) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°$$

e

(31) $$\rho_2(60°) = r_2.$$

Risulterà quindi

(32) $$\rho(60°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°) + r_2}{2}.$$

Categorie 3ª e 4ª.

In queste Categorie va tenuto presente che $c_2 \operatorname{sen} 60°$ è già contenuto in $\rho_1(60°)$, e quindi va sottratto da r_2 in $\rho_2(60°)$, e che gli an-

goli α_1 e α_2 (quest'ultimo contenuto in α_1) sono ambedue inferiori ai 60°.

Si useranno quindi le formule seguenti

(26) $$\rho_1(60°) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°$$

e

(33) $$\rho_2(60°) = r_2 - c_2 \operatorname{sen} 60° .$$

Quest'ultimo è sempre di valore positivo, essenro $r_2 > c_2 \operatorname{sen} 60°$, per cui

(34) $$\rho(60°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°) + (r_2 - c_2 \operatorname{sen} 60°)}{2} > \frac{\rho_1(60°)}{2} .$$

Categoria 5ª.

Nella Categoria 5ª gli angoli α_1 a α_2 (quest'ultimo contenuto in α_1) sono ambedue inferiori ai 60°; perciò sarà in ogni Caso (26) $\rho_1(60) = r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°$; invece per $\rho_2(60°)$ occorre distinguere se il suo valore è positivo come nelle Categorie 3ª e 4ª (formula 33), essendo $r_2 > c_2 \operatorname{sen} 60°$, se è $= 0$ (formula 33 b, $\rho_2(60°) = r_2 - c_2 \operatorname{sen} 60° = 0$), essendo $r_2 = c_2 \operatorname{sen} 60°$, oppure è negativo, essendo $r_2 < c_2 \operatorname{sen} 60°$ (formula 33 c, $\rho_2(60°) = - c_2 \operatorname{sen} 60° + r_2$).

$\rho_2(60°)$ ha valore positivo solo nel Caso 1° degli ovali con I = 50, con I = ≒ 66,251 ecc. e con I = 80. Con questi esempi si useranno le formule (26) e (33), per cui avremo

(34) $$\rho(60°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°) + (r_2 - c_2 \operatorname{sen} 60°)}{2} > \frac{\rho_1(60°)}{2} ,$$

appunto come nelle Categorie 3ª e 4ª.

$\rho_2(60°)$ ha valore O solo nel Caso 2° degli ovali con I = 50, con I = ≒ 66,251 ecc. e con I = 80. Con questi esempi useremo le formule (26) e (33 b), per cui avremo

(34 b) $$\rho(60°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°) + 0}{2} = \frac{\rho_1(60°)}{2} .$$

$\rho_2(60°)$ ha valore negativo nei rimanenti Casi (3°-5° con I = 50 e con I = ≒ 66,251 ecc.; 3°-7° con I = 80) e va quindi sottratto da $\rho_1(60°)$, per cui useremo le formule (26) e (33 c) ed avremo

(34 c) $$\rho(60°) = \frac{(r_1 + c_1 \operatorname{sen} 60°) + (- c_2 \operatorname{sen} 60° + r_2)}{2} < \frac{\rho_1(60°)}{2} .$$

4. - ESEMPI.

Allo scopo di agevolare i confronti, adotteremo per tutte le sezioni ovali un A.M. ($= a$) della lunghezza di cm 10 e un $r_1 = b \times 0{,}6$

$$\left(= \frac{\text{a.m.}}{2} \times 0{,}6 \right) .$$

Ricordiamo inoltre che il centro O_1 del raggio r_1 ($< r_2$) sarà posto nelle figure sempre alla sinistra del centro O_2 del raggio r_2, e che il punto d'incrocio degli assi x, y sarà chiamato O. Per le formule rimandiamo ai paragrafi 2 e 3.

OVALI DELLA 1ª CATEGORIA

Gli ovali a simmetria bilaterale della 1ª Categoria (Fig. 1) risultano composti di due metà di ovali bisimmetrici differenti, aventi fra loro a comune l'a.m. ed R, poiché l'O è situato tra O_1 e O_2 e l'a.m. giace su y; ma i raggi r_1 ed r_2 sono di lunghezza diversa fra loro, mentre negli ovali bisimmetrici sono uguali. Sarà quindi lecito applicare per ciascun emiovale le formule usate per gli ovali bisimmetrici.

I semiassi maggiori di ciascun emiovale giacciono sull'asse delle x, e s'incontrano fra loro in O.

La posizione di O può variare da $> \frac{a}{2}$ a $> r_2$.

Indice 50

Si hanno i tre casi seguenti, per ciascuno dei quali sarà svolto un solo esempio, usando un cos 30° e un sen 60° con venti cifre decimali.

Caso 1°, con l'angolo $\alpha_1 > 30°$.

Abbiamo $a_1 = \text{O A}_1 = \text{cm } 5{,}1$; $a_2 = \text{O A}_2' = \text{cm } 4{,}9$; a.m. $= 2\,b = \text{cm } 5$; $b = \text{O B} = \text{cm } 2{,}5$; $r_1 = \text{O}_1\text{A}_1 = \text{O}_1\text{T}_1 = \text{cm } 1{,}5$; $c_1 = \text{O O}_1 = \text{cm } 3{,}6$; $x(0°)$ e $x(180°) = b = \text{cm } 2{,}5$; $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = \frac{a}{2} = \text{cm } 5$.

I calcoli dànno i seguenti risultati:

$\text{R} = \text{O}_3\text{T}_1 = \text{O}_3\text{B} = \text{O}_3\text{T}_2 = \text{cm } 8{,}48$; $c_3 = \text{O O}_3 = \text{cm } 5{,}98$;
$r_2 = \text{O}_2\text{A}_2' = \text{O}_2\text{T}_2 = \text{cm } 1{,}695'530'726'256'983'240'22...$;

$c_2 = O\,O_2 =$ cm 3,204'469'273'743'016'759'77...;

$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}60'200...$ e $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 31° 2' > 30°$;

$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0{,}53'586...$ e $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 28° 11' < 30°$;

$\rho_1 (30°) = \div$ cm 3,301'168'085'369'056'892'37...;

$\rho_2 (30°) = \div$ cm 3,297'765'363'128'491'620'11...;

$\rho\ (30°) = \div$ cm 3,299'466'724'248'774'256'24...;

$x\ (30°) = \div$ cm 2,857'422'002'140'863'809'71...;

$x\ (30°) - x\,(0°) =$ cm 0,357'422'002'140'863'809'71... Pertanto il tricometrogramma presenta una « *falsa rientranza* » sull'asse delle x.

$y\ (30°) = \div$ cm 1,649'733'362'124'387'128'12... .

$\rho_1 (60°) = \div$ cm 4,617'691'458'623'979'128'33...;

$\rho_2 (60°) = \div$ cm 4,470'682'522'965'106'188'72...;

$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,544'186'990'794'542'658'52...;

$x\ (60°) = \div$ cm 2,272'093'495'397'271'329'26...;

$y\ (60°) = \div$ cm 3,935'381'373'574'837'989'73... .

Caso 2°, con l'angolo $\alpha_1 = 30°$.

Abbiamo $a_1 = O\,A_1 = 5{,}232'050'807'568'877'293'527...$; $a_2 = O\,A_2' =$ $=$ cm 4,767'949'192'431'122'706'472...; $b = \dfrac{\text{a.m.}}{2} = O\,B =$ cm 2,5; $r_1 = O_1 A_1 = O_1 T_1 =$ cm 1,5; $c_1 = O\,O_1 =$ cm 3,732'050'807'568'877'293'527...; si vedano al primo capoverso del Caso precedente i valori di $x\,(0°)$, ecc.

I calcoli dànno i seguenti risultati:

$R = O_3 T_1 = O_3 B = O_3 T_2 =$ cm 8,964'101'615'137'754'587'05...; questo stesso valore, identico fino alla 20ª cifra decimale compresa, si ottiene sia con la formula particolare $R = \dfrac{c_1}{\text{sen } 30°} + r_1$, sia con la formula (3) usuale; il che è già una prova che l'angolo α_1 ha un'ampiezza di 30°, e, di conseguenza, che le misure di c_1, a_1 e a_2 sono quelle ottimali.

$r_2 = O_2 A_2' = O_2 T_2 =$ cm 1,887'105'969'790'866'818'82...;

$c_2 = O\,O_2 =$ cm 2,880'843'222'640'255'887'64...;

$c_3 = O\,O_3 =$ cm 6,464'101'615'137'754'587'05...;

$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}57'735'026'9$ ecc. e $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = 30°$;

$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0{,}44'566...$ e $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 24° 1'... < 30°$;

$\rho_1 (30°) =$ cm 3,366'025'403'784'438'646'76...;

$\rho_2 (30°) =$ cm 3,327'527'581'110'994'762'64...;

$\rho\ (30°) =$ cm 3,346'776'492'447'716'704'70...;

$x\,(30°) = \div$ cm 2,898'393'463'248'301'138'36...;
$x\,(30°) - x\,(0°) = \div$ cm 0,398'393'463'248'30..., « *falsa rientranza* » un po' maggiore che nel Caso 1°.
$y\,(30°) = \div$ cm 1,673'388'246'223'858'352'35...;
$\rho_1\,(60°) = \div$ cm 4,732'050'807'568'877'293'50...;
$\rho_2\,(60°) = \div$ cm 4,381'989'384'917'557'907'03...;
$\rho\,(60°) = \div$ cm 4,557'020'096'243'217'600'27...;
$x\,(60°) = \div$ cm 2,278'510'048'121'608'800'13...;
$y\,(60°) = \div$ cm 3,946'495'168'902'833'985'84... .

Caso 3°, con l'angolo $\alpha_1 < 30°$ (Fig. 1 e Fig. 6).

Abbiamo $a_1 = O\,A_1 =$ cm 5,5; $a_2 = O\,A_2' =$ cm 4,5; $b = \frac{\text{a. m.}}{2} =$ $= O\,B =$ cm 2,5; $r_1 = O_1\,T_1 = O_1\,A_1 =$ cm 1,5; $c_1 = O\,O_1 =$ cm 4. Si vedano al primo capoverso del Caso 1° i valori di $x\,(0°)$, ecc.

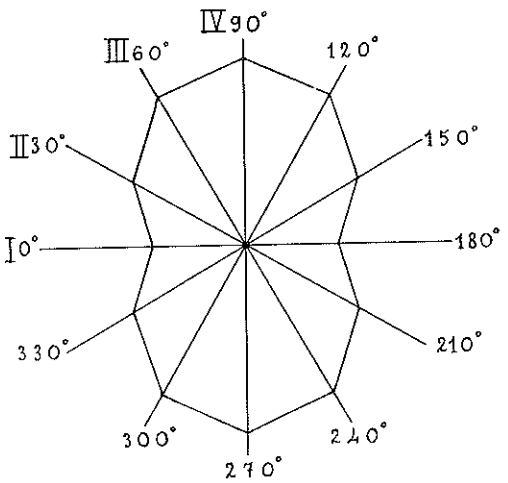


FIG. 6. - Riproduzione 1:2. - Tricometrogramma dell'ovale della Categoria 1ª con Indice = 50, Caso 3°, presentato nella Fig. 1. La spiegazione è nel testo.

I calcoli dànno i seguenti risultati:

$R = O_3\,T_1 = O_3\,B = O_3\,T_2 =$ cm 10; $c_3 = O\,O_3 =$ cm 7,5; $r_2 = O_2\,A_2' =$ $= O_2\,T_2 =$ cm 2,1 (36);

$c_2 = O\,O_2 =$ cm 2, (36); $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}5$ (33) e $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 28°\,4' < 30°$;

$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}3$ (15) e $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 17°\,29' < 30°$; $\rho_1\,(30°) =$ cm 3,5 e $\rho_2\,(30°) =$ cm 3,3 (18); $\rho\,(30°) =$ cm 3,40 (90);

$x\,(30°) = \div$ cm 2,952'359'331'083'313'568'49...;
$x\,(30°) - x\,(0°) = \div$ 0,452'359'331'083'313... Pertanto il tricometrogramma presenta una « *falsa rientranza* » notevole, di oltre mm 4,5, sull'asse delle x, la quale è maggiore che nei due Casi precedenti.
$y\,(30°) =$ cm 1,70 (45).
$\rho_1\,(60°) = \div$ cm 4,964'101'615'137'754'587'04...;
$\rho_2\,(60°) = \div$ cm 4,183'332'772'581'400'437'79... . Si noti la discreta differenza, = cm 0,390'384 ecc., tra i valori di $\frac{\rho_1\,(60°)}{2}$ e $\frac{\rho_2\,(60°)}{2}$, che è la massima ottenuta per i tre esempi considerati con I = 50 della Categoria 1ª.
$\rho\,(60°) = \div$ cm 4,573'717'193'859'577'512'41...;
$x\,(60°) = \div$ 2,286'858'596'929'788'756'20...;
$y\,(60°) = \div$ 3,960'955'279'608'070'266'70... .

*
* *

Negli ovali di 1ª Categoria con I = 50, con l'aumentare della lunghezza di a_1 da cm 5,1 a cm 5,5, mentre diminuisce l'ampiezza degli angoli α_1 e α_2 (specialmente quella di quest'ultimo) aumenta la lunghezza di R, di r_2 e di c_3 tg 60°. I valori di $\rho_1\,(30°)$ e di $\rho_1\,(60°)$, sempre maggiori di quelli di $\rho_2\,(30°)$ e di $\rho_2\,(60°)$ rispettivamente, vanno pure aumentando sempre. Si noti il comportamento particolare di $\rho_2\,(30°)$, il cui valore aumenta leggermente, finché l'ampiezza di α_1 diminuisce da $> 30°$ al valore di 30°, per diminuire lievemente in seguito, quanto più α_1 diventa $< 30°$. Il valore di $\rho_2\,(60°)$, invece, va gradualmente diminuendo; in tal modo la differenza $\frac{\rho_1\,(60°)}{2} - \frac{\rho_2\,(60°)}{2}$ va aumentando da cm 0,073'504'467... (con $\alpha_1 =$ 5,1) fino a raggiungere il discreto valore di cm 0,390'384'421... (con $\alpha_1 =$ cm 5,5); l'aumento, però, è solo di circa 5,31... volte. La differenza, lievissima, $\frac{\rho_1\,(30°)}{2} - \frac{\rho_2\,(30°)}{2}$ va aumentando da cm 0,001'701'361... (con $\alpha_1 =$ cm 5,1) fino al valore di cm 0,0 (45), con una crescita, però, che è ben di circa 26,68 volte.

I tricometrogrammi della 1ª Categoria con I = 50 sono poligoni a 12 lati e presentano tutti sull'asse delle x una « *falsa rientranza* » piuttosto accentuata, la quale non esiste negli ovali. Tale « *falsa rientranza* » diventa, sia pur di poco, tanto più evidente quanto maggiore è la lunghezza di a_1 rispetto a quella di a_2, ossia quanto più le lunghezze di α_1 e di α_2 si allontanano da quella del raggio di una circonferenza con diametro eguale all'A.M. ($= a =$ cm 10) dell'ovale (con $a_1 = 5{,}1$ abbiamo $x\,(30°) - x\,(0°) =$ cm 0,357'422 ecc., mentre con $a_1 =$ = cm 5,5 tale differenza è di cm 0,452'359 ecc.

Indice $= \div$ *65,863'428'043'574'277'054'366...*

Per gli ovali di 1ª Categoria, che dànno in pratica un tricometrogramma a 10 lati soltanto, svolgeremo il solo esempio seguente, usando un cos 30° e un sen 60° con 21 decimali.

Abbiamo $a_1 = O A_1 =$ cm 5,5; $a_2 = O A_2' =$ cm 4,5; $b = \frac{\text{a. m.}}{2} =$ $= O B = \div$ cm 3,293'171'402'178'713'852'718'3...; $r_1 = O_1 A_1 = O_1 T_1 =$ $= \div$ cm 1,975'902'841'307'228'311'630'98...; $c_1 = O O_1 = \div$ cm 3,524'097' 158'692'771'688'369'02...; $x(0°)$ e $x(180°) = b = \div$ cm 3,293'171 ecc. (si veda qui sopra b); $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati:

$R = O_3 T_1 = O_3 B = O_3 T_2 = \div$ cm 7,348'557'160'181'475'161'000'4...;
$c_3 = O O_3 = \div$ cm 4,055'385'758'002'761'308'282'1...;
$r_2 = O_2 A_2' = O_2 T_2 = \div$ cm 3,037'527'021'072'718'174'378'7...;
$c_2 = O O_2 = \div$ cm 1,462'472'978'927'281'825'621'3...;
tg $\alpha_1 =$ 0,86'899... e $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 40° 59' > 30°$;
tg $\alpha_2 =$ 0,36'062... e $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 19° 49' < 30°$;
$\rho_1(30°) = \div$ cm 3,836'490'071'605'472'007'773'0..;
$\rho_2(30°) = \div$ cm 3,768'763'510'536'359'087'189'35...;
$\rho(30°) = \div$ cm 3,802'626'791'070'915'547'481'175..;
$x(30°) = \div$ cm 3,293'171'402'178'713'852'718'548'337...;
$x(30°) - x(0°) = \div$ cm 0.000.000.000'000'000'000'000'248'337...; pertanto abbiamo in pratica un tricometrogramma poligonale a 10 lati soltanto, essendo $x(30°) = x(0°)$ fino alla 21ª cifra decimale compresa; la successiva differenza, già trascurabile per una sezione ovale con l'A.M. lungo cm. 10, lo è ancor di più per le sezioni trasverse dei capelli, lo spessore massimo dei quali si aggira di regola più o meno sui μ 100 e nei casi estremi non raggiunge mai i μ 200.
$y(30°) = \div$ cm 1,901'313'395'535'457'773'740'587'5...;
$\rho_1(60°) = \div$ cm 5,027'860'506'139'728'872'464'04...;
$\rho_2(60°) = \div$ cm 4,304'065'773'172'048'249'624'10...; si noti la discreta differenza. $=$ cm 0,361'897 ecc., tra i valori di $\frac{\rho_1(60°)}{2}$ e $\frac{\rho_2(60°)}{2}$.
$\rho(60°) = \div$ cm 4,665'963'139'655'888'561'044'07...;
$x(60°) = \div$ cm 2,332'981'569'827'944'280'522'035...;
$y(60°) = \div$ cm 4,040'842'612'063'797'983'518'984... [10].

[10] Per ottenere un tricometrogramma in pratica con 10 lati soltanto, qualora ad a_1 sia stata attribuita la lunghezza di cm 5.1 e ad a_2 quella di cm 4,9, occorre che l'Indice

Indice 80

Si hanno i tre Casi seguenti, per ciascuno dei quali sarà svolto un solo esempio. Molto interessanti, come vedremo, sono i primi due Casi.

Caso 1°, con gli angoli α_1 *e* $\alpha_2 > 30°$.

Abbiamo $a_1 = O A_1 =$ cm 5,1; $a_2 = O A_2' =$ cm 4,9; $b = \frac{a.m.}{2} =$ $= O B =$ cm 4; $r_1 = O_1 A_1 = O_1 T_1 =$ cm 2,4; $c_1 = O O_1 =$ cm 2,7; $x(0°)$ e $x(180°) = b =$ cm 4; $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 20 cifre decimali.

$R = O_3 T_1 = O_3 B = O_3 T_2 =$ cm 5,478'125; $c_3 = O O_3 =$ cm. 1,478'125;
$r_2 = O_2 A_2' = O_2 T_2 =$ cm 3,299'(459); $c_2 = O O_2 =$ cm 1,600'(540);
$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1{,}82'663...$ e $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 61° 18' > 30°$ e $> 60°$;
$\operatorname{tg} \alpha_2 = 1{,}08'281...$ e $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 47° 16' > 30°$ e $< 60°$;

poiché ambedue questi angoli hanno un'ampiezza $> 30°$, ne deriva che

$\rho_1(30°) = \rho_2(30°) = \rho(30°) = \div$ cm 4,198'031'200'031'126'625'257...;

e di conseguenza che $x_1(30°) = x_2(30°)$ e $y_1(30°) = y_2(30°)$ (Si veda in proposito il Caso 2°, analogo a questo). Avremo quindi

$x(30°) = x_1(30°) = x_2(30°) = \div$ cm 3,635'603'665'106'627'961'784...;
$x(0°) - x(30°) = \div$ cm 0,364'396'334'893'372'038'216...

Il tricometrogramma è dunque un « *ovaloide* », e lo è di più che nei due Casi seguenti, a causa della minor differenza tra a_1 e a_2.

$y(30°) = y_1(30°) = y_2(30°) = \div$ cm 2,099'015'600'015'563'312'628... .

sia più basso, $= \div 61{,}6$ ecc. Se ne deduce che l'Indice deve essere tanto più basso, quanto minore è la differenza tra a_1 e a_2, ossia quanto più le lunghezze di a_1 e a_2 si avvicinano a quella del raggio di una circonferenza del diametro = cm 10, la cui lunghezza corrisponde a quella dell'A. M. dell'ovale.

Poiché α_1 ha un'ampiezza $> 60°$, mentre α_2 ha un'ampiezza < 60; ne deriva che

$\rho_1(60°) = \div$ cm 4,739'062'5 e $\rho_2(60°) = \div$ cm 4,685'568'227'354'444'774'624...;
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,712'315'363'677'222'387'312...;
$x\ (60°) = \div$ cm 2,356'157'681'838'611'193'656...;
$y\ (60°) = \div$ cm 4,080'984'815'588'180'366'781...

Caso 2°, con l'angolo $\alpha_1 > 30°$ e l'angolo $\alpha_2 = 30°$.

(I calcoli sono stati eseguiti con un cos 30° e un sen 60° con 31 cifre decimali).

Abbiamo $b = \dfrac{\text{a. m.}}{2} = \text{O B} = \text{cm } 4$; $r_1 = \text{O}_1\,\text{T}_1 = \text{O}_1\,\text{A}_1 = \text{cm } 2{,}4$; $a_1 = \text{O A}_1 = \div$ cm 5,258'731'991'949'273'519'860'209'515'311...; $a_2 = \text{O A}_2' = \div$ cm 4,741'268'008'050'726'480'139'790'484'688...; $c_1 = \text{O O}_1 = \div$ cm 2,858'731'991'949'273'519'860'209'515'3...; per $x\,(0°)$ ecc. si veda al Caso 1°.

I calcoli danno i seguenti risultati:

$\text{R} = \text{O}_3\,\text{T}_1 = \text{O}_3\,\text{B} = \text{O}_3\,\text{T}_2 = \div$ cm 5,753'858'938'060'706'637'740'071'810'710'034 ecc.;
$r_2 = \text{O}_2\,\text{A}_2' = \text{O}_2\,\text{T}_2 = \div$ cm 3,728'677'078'040'746'322'539'509'158'611'604...;
$c_2 = \text{O O}_2 = \div$ cm 1,012'590'930'009'980'157'600'281'326'0...;

questo risultato si ottiene sia con la formula corrente $c_2 = a_2 - r_2$ che dalla formula $c_2 = \dfrac{\text{R} - r_2}{2}$, dato che l'angolo α_2 è di 30° e quindi la sua ipotenusa $R - r_2 = 2\,c_2$; pertanto la lunghezza di c_2 è corretta fino alla 28ª cifra decimale compresa.

$c_3 = \text{O O}_3 = \div$ cm 1,753'858'938'060'706'637'740'071'810'7...

$\text{tg}\,\alpha_1 = 1{,}62'996...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{\text{O O}_3\text{O}_1} = \div 58°\,28' > 30°$;

$\text{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg } 30°$, per cui $\alpha_2 = \widehat{\text{O O}_3\text{O}_2} = 30°$.

Quindi, $\rho_1(30°) = \rho_2(30°) = \rho(30°)$, e di conseguenza, $x_1(30°) = x_2(30°)$ e $y_1(30°) = y_2(30°)$, rispettivamente uguali a $x(30°)$ e a $y(30°)$, come nel Caso 1° precedente.

Va sottolineato il fatto che soltanto in questi due Casi, e in ciascuno di essi, rispettivamente, soltanto per la rotazione di 30° dell'ovale, si verificano le uguaglianze che abbiamo vedute; *in tutti gli altri Casi il valore di* $\rho_1(30°)$ *risulta diverso da quello di* $\rho_2(30°)$.

$\rho\ (30°) = \div$ cm 4,234'972'543'045'736'401'339'649'821'6...;
$x\ (30°) = \div$ cm 3,667'593'806'607'194'835'100'250'813'9...;
$x\ (0°) - x\ (30°) = \div$ cm 0,332'406'193'392'805'164'899...

Il tricometrogramma è dunque un dodecagono « *ovaloide* », ma meno che nel Caso precedente.

$y\ (30°) = \div$ cm 2,117'486'271'522'868'200'669'824'910'8...;
$\rho_1(60°) = \div$ cm 4,875'734'527'639'362'210'819'017'330'9...;
$\rho_2(60° = \div$ cm 4,605'606'547'071'099'641'409'545'013'9...;
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,740'670'537'355'230'926'114'281'172'4...;
$x\ (60°) = \div$ cm 2,370'335'268'677'615'463'057'140'586'2...;
$y\ (60°) = \div$ cm 4,105'541'116'322'055'598'021'773'279'3...;

Caso 3°, con l'angolo $\alpha_1 > 30°$ *e l'angolo* $\alpha_2 < 30°$.

Abbiamo $a_1 = O\,A_1 =$ cm 5,5; $a_2 = O\,A_2' =$ cm 4,5; $b = \frac{\text{a. m.}}{2} =$ $= O\,B =$ cm 4; $r_1 = O_1\,A_1 = O_1\,T_1 =$ cm 2,4; $c_1 = O\,O_1 =$ cm 3,1; per $x\,(0°)$ ecc. si veda al Caso 1°.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 20 cifre decimali.

$R = O_3\,T_1 = O_3\,B = O_3\,T_2 =$ cm 6,203'125; $c_3 = O\,O_3 =$ cm 2,203'125;
$r_2 = O_2\,A_2' = O_2\,T_2 =$ cm 3,926'605'504'587'155'963'302...;
$c_2 = O\,O_2 =$ cm 0,573'394'495'412'844'036'697...;
$\operatorname{tg}\alpha_1 = 1{,}40'709...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 54° 35' > 30°$;
$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}26'026...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 14° 35' < 30°$;

quindi,

$\rho_1(30°) = \div$ cm 4,295'162'782'287'408'606'356...;
$\rho_2(30°) = \div$ cm 4,213'302'752'293'577'981'651...;
$\rho\ (30°) = \div$ cm 4,254'232'767'290'493'294'004...;
$x\ (30°) = \div$ cm 3,684'273'650'085'739'267'984...;
$x\ (0°) - x\ (30°) = \div$ cm 0,315'726'349'914'260'732'015...

Il tricometrogramma è dunque « *ovaloide* », ma in minor grado che nei due Casi precedenti.

$y\,(30^\circ) = \div$ cm 2,127'116'383'645'246'647'002...;
$\rho_1\,(60^\circ) = \div$ cm 5,084'678'751'731'759'804'967...;
$\rho_2\,(60^\circ) = \div$ cm 4,423'179'704'004'838'673'593...;
$\rho\,(60^\circ) = \div$ cm 4,753'929'227'868'299'239'280...;
$x\,(60^\circ) = \div$ cm 2,376'964'613'934'149'619'640...;
$y\,(60^\circ) = \div$ cm 4,117'023'479'127'288'489'923...

*
* *

Negli ovali della 1ª Categoria con I = 80 l'ampiezza dell'angolo α_1 è sempre maggiore di 30°, mentre quella dell'angolo α_2 può essere $\gtrless 30^\circ$ secondo la lunghezza minore o maggiore di a_1. Con l'aumentare della lunghezza di a_1, l'ampiezza dell'angolo α_1 diminuisce lentamente (da $\div 61^\circ 18'$ con $a_1 =$ cm 5,1 a $\div 54^\circ 35'$ con $a_1 =$ cm 5,5), mentre quella dell'angolo α_2 (che è sempre inferiore ad α_1) decresce rapidamente (da $\div 47^\circ 16'$ con $a_1 =$ cm 5,1 a $\div 14^\circ 35'$ con $a_1 =$ cm 5,5).

Fatto unico ed interessante, $\rho_1\,(30^\circ) = \rho_2\,(30^\circ)$ *finché l'ampiezza dell'angolo* α_2 *si mantiene* $\geq 30^\circ$; in séguito il valore di $\rho_2\,(30^\circ)$ diventa leggermente inferiore a quello di $\rho_1\,(30^\circ)$.

Con l'aumentare della lunghezza di a_1, il valore di $\rho_1\,(60^\circ)$, che è sempre maggiore di quello di $\rho_2\,(60^\circ)$, va crescendo, al contrario del valore di ρ_2, che va diminuendo $\left(\frac{\rho_1\,(60^\circ)}{2} - \frac{\rho_2\,(60^\circ)}{2} = \div\right.$ cm 0,053'494 ecc. con a_1 lungo cm 5,1, mentre è $= \div$ cm 0,315'726 ecc. con a_1 lungo cm 5,5, ossia la differenza aumenta di oltre 5,90 volte$\Big)$.

Il tricometrogramma è un dodecagono « *ovaloide* ». La forma ovaloide è leggermente più accentuata quando a_1 è meno lungo ($x\,(0^\circ) - x\,(30^\circ) = \div$ cm 0,364'396 ecc. con $a_1 =$ cm 5,1, mentre è $=$ $= \div$ cm 0,315'726 ecc. con $\alpha_1 =$ cm 5,5).

Ovali della 2ª Categoria

In questi ovali, poiché il punto O d'incrocio degli assi x, y coincide con O_2, centro del raggio r_2, e poiché $r_2 = b = \frac{\text{a. m.}}{2}$, la posizione di O dipende dalla lunghezza dell'a. m., ed è pertanto diversa da Indice a Indice, ma obbligata per ciascun Indice.

A causa della coincidenza di O con O_2 (si veda al § 3) c_2 e α_2 sono nulli, ed R formerà in pratica soltanto l'angolo α_1, con conseguente modifica delle formule $\rho_2(30°)$ e $\rho_2(60°)$.

Gli ovali risultano composti di un emiovale bisimmetrico nella parte negativa dell'asse delle x ($= O A_1$) e di una semicirconferenza di raggio $r_2 = b$ nella parte positiva dell'asse delle x ($= O A_2'$). L'emiovale e la semicirconferenza hanno a comune l'a. m., e quindi anche il punto O.

Indice = 50

(Fig. 2 e Fig. 7)

Abbiamo $a_1 = O A_1 =$ cm 7,5; $a_2 = O A_2' =$ cm 2,5; pure = cm 2,5 sono $b = \frac{\text{a. m.}}{2} (= O B = O T_2)$ e $r_2 (= O_2 A_2' = O_2 T_2)$; $r_1 = O_1 A_1 = O_1 T_1 =$ cm 1,5; $c_1 = O O_1 (= O_2 O_1) =$ cm 6; $c_2 =$ cm 0; $x(0°)$ e $x(180°) = b = r_2 =$ cm 2,5; $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos(30°) e un sen(60°) con 24 cifre decimali.

$R = O_3 T_1 = O_3 B (= O_3 T_2) =$ cm 20; $c_3 = O O_3 (= O_2 O_3) =$ cm 17,5;

$\text{tg}\,\alpha_1 = 0{,}34285...$, per cui $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 18° 55' < 30°$;

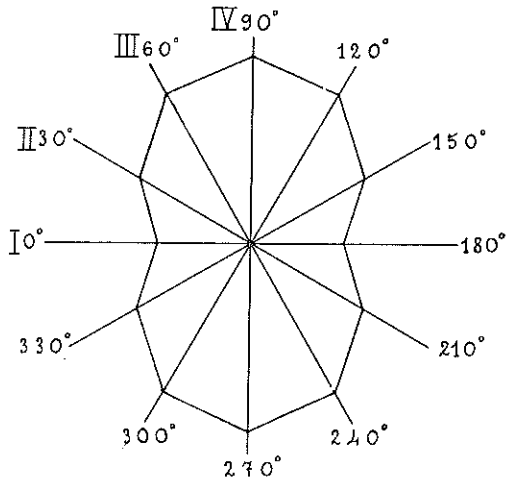


FIG. 7. - Riproduzione 1:2. Tricometrogramma dell'ovale della Categoria 2ª con Indice = 50. La spiegazione è nel testo.
Si noti la grande diversità di forma degli ovali con Indice) = 50 delle prime due Categorie (figg. 1 e 2) e la scarsa differenza tra i loro tricometrogrammi (figg. 6 e 7).

($\alpha_2 = 0°$, come è stato già detto al § 3); quindi $\rho_1(30°) =$ cm 4,5; $\rho_2(30°) =$ cm 2,5. Si noti la forte differenza, = cm 1, tra $\frac{\rho_1(30°)}{2}$ e $\frac{\rho_2(30°)}{2}$.

$\rho\ (30°) =$ cm 3,5;
$x\ (30°) = \div$ cm 3,031'088'913'245'535'263'673'030'5...;
$x\ (30°) - x\,(0°) = \div$ cm 0,531'088'913'245'535'263 ecc.

Il tricometrogramma presenta quindi una « *falsa rientranza* » notevole sull'asse delle x, maggiore anche di quella presentata dal Caso 3° con I = 50 della Categoria I, ed è un dodecagono.

$y\ (30°) =$ cm 1,75;
$\rho_1(60°) = \div$ cm 6,696'152'422'706'631'880'582'338...;
$\rho_2(60° = \div$ cm 2,5. Si noti la fortissima differenza, $= \div$ cm 2,098'076 ecc. tra $\frac{\rho_1(60°)}{2}$ e $\frac{\rho_2(60°)}{2}$.
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,598'076'211'353'315'940'291'169...;
$x\ (60°) = \div$ cm 2,299'038'105'676'657'970'145'584'5...;
$y\,(60°) = \div$ cm 3,982'050'807'568'877'293'527'445...

*
* *

Allo scopo di evitare inutili ripetizioni, diremo subito che il tricometrogramma risultante, ora calcolato, con I = 50 della 2ª Categoria, è identico a quello che si ottiene dagli ovali con I = 50 delle Categorie 3ª, 4ª e 5ª, poiché in tutte queste quattro Categorie si ottiene $\rho\,(30°) =$ cm 3,5 e $\rho\,(60°) = \div$ cm 4,598'076 ecc., e di conseguenza abbiamo gli stessi valori per $x\,(30°)$, $y\,(30°$, $x\,(60°)$ e $y\,(60°)$. Differiscono invece, da Categoria a Categoria, i singoli valori di $\rho_1(30°)$, $\rho_2(30°)$, $\rho_1(60°)$ e $\rho_2(60°)$, perché R ha posizione e lunghezza differenti, e di conseguenza negli ovali a simmetria bilaterale la parte con il polo più stretto ha forma diversa da quella della parte con il polo più largo, anche se l'Indice è lo stesso. Perciò ci limiteremo, per gli ovali con I = 50 delle seguenti Categorie, 3ª, 4ª e 5ª, a calcolare $\rho\,(30°)$ e $\rho\,(60°)$, rimandando al Caso presente per i valori di $x\,(30°)$ ecc.

Ci sia permesso di aggiungere che l'uniformità, l'eguaglianza dei tricometrogrammi in parola (tutti con « *falsa rientranza* ») depone nettamente a sfavore di una loro sia pur lontana somiglianza con le diverse forme delle sezioni ovali a simmetria bilaterale con I = 50 delle Categorie 2ª, 3ª, 4ª e 5ª.

Indice $= \div$ *66,293'872'063'430'397'082'270...*

Abbiamo $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = \text{O B} = \text{O T}_2 = r_2 = \text{O}_2\text{T}_2 = \text{O}_2\text{A}_2' = a_2 =$ $= \text{O A}_2' = \div$ cm 3,314'693'603'171'519'854'113'5...; $r_1 = \text{O}_1\text{A}_1 = \text{O}_1\text{T}_1 =$ $= \div$ cm 1,988'816'161'902'911'912'468'10...; $a_1 = \text{O A}_1 = \div$ cm 6,685'306' 396'828'480'145'886'5...; $c_1 = \text{O O}_1\,(= \text{O}_2\text{O}_1) \div =$ cm 4,696'490'234'925' 568'233'418'40...;

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 21 cifre decimali.

$\text{R} = \text{O}_3\text{T}_1 = \text{O}_3\text{B}\,(= \text{O}_3\text{T}_2) = \div$ cm 10,969'650'579'460'350'052'225'5..;
$c_3 = \text{O O}_3\,(= \text{O}_2\text{O}_3) = \div$ cm 7,654'956'976'288'830'198'112'0...;

$\text{tg}\,\alpha_1 = 0{,}61'352..$, da cui $\alpha_1 = \widehat{\text{O}\text{O}_3\text{O}_1} = \div 31° 31' > 30°$; $(\alpha_2 = 0°)$;
$\rho_1(30°) = \div$ cm 4,340'263'373'117'310'343'999'0...;
$\rho_2(30°) = \div$ cm 3,314'693'603'171'519'854'113'5...;
$\rho\,(30°) = \div$ cm 3,827'478'488'144'415'099'056'25...;
$x\,(30°) = \div$ cm 3,314'693'603'171'519'854'113'971'945'138...;
$x\,(30°) - x\,(0°) = \div$ cm 0,000'000'000'000'000'000'000'471'945'138...,

differenza trascurabile, come è stato già detto per gli ovali con I = $= \div$ 65,863 ecc. della 1ª Categoria; pertanto il tricometrogramma risulta, in pratica, un poligono regolare con 10 lati soltanto, essendo $x\,(30°) = x\,(0°)$ fino alla 21ª cifra decimale compresa.

$y\,(30°) = \div$ cm 1,913'739'244'072'207'549'528...;
$\rho_1(60°) = \div$ cm 6,056'096'013'974'000'261'238'92...;
$\rho_2(60°) = \div$ cm 3,314'693'603'171'519' 854'113'5... Si noti la differenza assai forte, $= \div$ cm 1,370'701 ecc., tra $\frac{\rho_1(60°)}{2}$ e $\frac{\rho_2(60°)}{2}$.
$\rho\,(60°) = \div$ cm 4,685'394'808'572'760'057'676'21...;
$x\,(60°) = \div$ cm 2,342'697'404'286'380'028'838...;
$y\,(60°) = \div$ cm 4,057'670'930'983'737'146'958...

Indice $= 80$

Abbiamo $a_1 = \text{O A}_1 =$ cm 6; $a_2 = \text{O A}_2' =$ cm 4; pure $=$ cm 4 sono $b = \frac{\text{a. m.}}{2}\ (= \text{O B} = \text{O T}_2)$ e $r_2\ (= \text{O}_2\text{A}_2' = \text{O}_2\text{T}_2)$; $r_1 = \text{O}_1\text{A}_1 =$ $= \text{O}_1\text{T}_1 =$ cm 2,4; $c_1 = \text{O O}_1\,(= \text{O}_2\text{O}_1) =$ cm 3,6; $c_2 =$ cm 0; $x\,(0°)$ e $x\,(180°) = b = r_2 =$ cm 4; $y\,(0°)$ e $y\,(180°) = 0$; $x\,(90°)$ e $x\,(270°) =$ $= 0$; $y\,(90°)$ e $y\,(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 20 cifre decimali.

$R = O_3T_1 = O_3B\,(= O_3T_2) = 7{,}25$; $c_3 = O\,O_3\,(= O_2O_3) =$ cm 3,25.

$\operatorname{tg}\alpha_1 = 1{,}10'769...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{OO_3O_1} = \div\ 47°\,55' > 30°$;
$(a_2 = 0°)$. Quindi,
$\rho_1\,(30°) = \div$ cm $4{,}435'417'437'700'574'398'030...$;
$\rho_2\,(30°) =$ cm 4;
$\rho\ (30°) = \div$ cm $4{,}217'708'718'850'287'199'015...$;
$x\ (30°) = \div$ cm $3{,}652'642'896'287'467'388'031...$;
$x\ (0°) - x\,(30°) = \div$ cm $0{,}347'357'103'712'533$ ecc.

Il tricometrogramma è dunque « *ovaloide* » un po' meno che nel 1° Caso e un po' più che nel 2° con I = 80 della 1ª Categoria, ed è dodecagono.

$y\ (30°) = \div$ cm $2{,}108'854'359'425°143'599'507...$;
$\rho_1\,(60°) = \div$ cm $5{,}517'691'453'623'979'128'336..$;
$\rho_2\,(60°) =$ cm. 4. Notevole $(= \div$ cm $0{,}758'854$ ecc.) è la differenza tra $\frac{\rho_1\,(60°)}{2}$ e $\frac{\rho_2\,(60°)}{2}$.
$\rho\ (60°) = \div$ cm $4{,}758'845'726'811'989'564'168...$; da cui
$x\,(60°) = \div$ cm $2{,}379'422'863'405'994'782'084...$ e
$y\ (60°) = \div$ cm $4{,}121'281'292'110'203'669'613...$

Ovali della 3ª Categoria

Come abbiamo già detto nel § 3, per ciascuno dei tre Indici considerati ci limiteremo a fare un solo esempio, con O situato nel punto medio tra O_2 e A_2', per cui sarà $O\,O_2 = O\,A_2'$; ma la lunghezza di questi due segmenti varierà da Indice a Indice.

Per le formule di R e di c_3 rimandiamo al § 2 e per le formule di $\rho_2\,(30°)$ e di $\rho^2\,(60°)$, che è stato necessario modificare, rimandiamo al § 3.

Rispetto alle due Categorie precedenti R presenta una maggior lunghezza ,e quindi gli archi descritti dai due R hanno una minor curvatura; inoltre la lunghezza di a_1 è maggiore e quella di a_2 è minore. Invece, come nella Categoria 2ª (e anche nelle seguenti), il raggio r_2 è $= b = \frac{a.\,m.}{2}$. Queste caratteristiche fanno sì che nella parte destra il contorno dell'ovale è formato per oltre una semicirconferenza dal raggio r_2 (ciò si verifica in maggior grado nella Categoria 4ª e ancor più nella Categoria 5ª); mentre nella Categoria 2ª questo rag-

gio compone esattamente con una semicirconferenza e nella Categoria 1ª soltanto con un arco di ampiezza inferiore la suddetta parte del contorno dell'ovale.

Indice = 50

Abbiamo $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2B = r_2 = O_2A_2' = O_2T_2 = O_2B =$ cm 2,5; $r_1 = O_1A_1 = O_1T_1 =$ cm 1,5; $a_1 = OA_1 =$ cm 8,75; $a_2 = OA_2' \left(= \frac{r_2}{2}\right) =$ cm 1,25; pure $c_2 \left(\text{anch'esso} = \frac{r_2}{2}\right) = OO_2 =$ cm 1,25; $c_1 = OO_1 =$ cm 7,25; $x(0°)$ e $x(180°) = b = r_2 =$ cm 2,5; $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = -\frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 24 cifre decimali.

$R = O_3T_1 = O_3T_2 = O_3N_1 =$ cm 27,5;
$c_3 = OO_3 =$ cm 24,968'730'444'297'723'644'725'4...;
$ON_1 =$ cm 2,531'269'555'702'276'355'274'6...;

$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}29'036...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{OO_3O_1} \doteq 16° 11' < 30°$;

$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}05'006...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{OO_3O_2} \doteq 2° 51' < 30°$. Quindi,
$\rho_1(30°) =$ cm 5,125 e $\rho_2(30°) =$ cm 1,875;
$\rho(30°) =$ cm 3,5;
$\rho_1(60°) \doteq$ cm 7,778'684'177'437'180'036'991'75...;
$\rho_2(60°) \doteq$ 1,417'468'245'269'451'691'545'346'25...;
$\rho(60°) \doteq$ cm 4,598'076'211'353'315'940'291'169...

Per i valori di $x(30°)$, $y(30°)$, $x(60°)$ e $y(60°)$ rimandiamo — come già abbiamo spiegato — a quelli identici trovati per l'ovale con I = = 50 della 2ª Categoria. Pertanto, sono identici anche i due tricometrogrammi, malgrado che i due ovali abbiano un contorno diverso e caratteristiche tali da dover attribuire ciascuno di essi ad una Categoria differente; ciò vale, come abbiamo già detto, anche per gli ovali con I = 50 delle Categorie 4ª e 5ª.

Indice $\doteq$ *66,251'443'396'843'104'929'672...*
(Fig. 3 e Fig. 8)

Abbiamo $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2B = r_2 = O_2A_2' = O_2T_2 = O_2B \doteq$ cm 3,312'572'169'842'155'246'483'6...; $r_1 = O_1A_1 = O_1T_1 \doteq$ cm 1,987'543'301'905'293'147'890'16...; $a_1 = OA_1 \doteq$ cm 8,343'713'915'078'922'376'

758'2...; $a_2 = O A_2'$ e $c_2 = O O_2$ $\left(\text{ambedue} = \frac{r_2}{2}\right)$ $= \div$ cm 1,656'286'084'921'077'623'241'8...; $c_1 = O O_1 = \div$ cm 6,356'170'613'173'629'228'868'04...; $x(0°)$ e $x(180°) = b = r_2$ (si veda qui sopra); $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

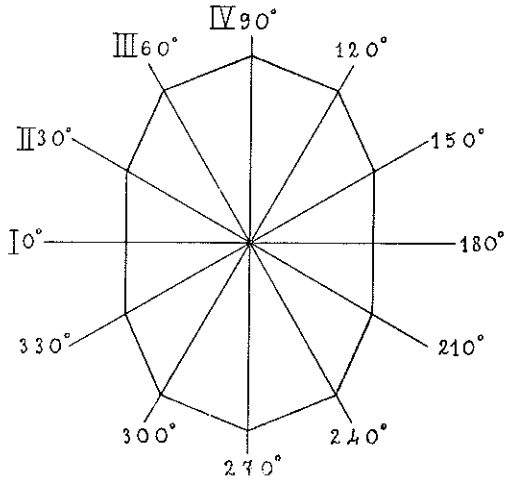


FIG. 8. - Riproduzione 1:2. - Tricometrogramma dell'ovale della Categoria 3ª con Indice = ÷ 66,251'443'396, ecc. presentato nella Fig. 3. La spiegazione è nel testo.

I calcoli dànno i seguenti risultati usando un cos 30° e un sen 60° con 21 cifre decimali.

$R = O_3 T_1 = O_3 T_2 = O_3 N_1 = \div$ cm 16,860'171'258'633'298'560'472'82...;
$c_3 = O O_3 = \div$ cm 13,445'971'793'645'531'274'486'80...;
$O N_1 = \div$ cm 3,414'199'464'987'767'285'986'02'...;

$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}47'271...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 25° 18'... < 30°$;

$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0{,}12'318...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 7° 1'... < 30°$. Quindi,
$\rho_1(30°) = \div$ cm 5,165'628'608'492'107'762'324'18...;
$\rho_2(30°) = \div$ cm 2,484'429'127'381'616'434'862'7...;
$\rho(30°) = \div$ cm 3.825'028'867'936'862'098'593'44...;
$x(30°) = \div$ cm 3,312'572'169'842'155'246'483'611'553'501...;
$x(30°) - x(0°) = \div$ cm 0,000'000'000'000'000'000'000'011'553'501...

Pertanto il tricometrogramma è in pratica un poligono a soli 10 lati, essendo $x(30°) = x(0°)$ fino alla 22ª cifra decimale compresa.

$y(30°) = \div$ cm 1,912'514'433'968'431'049'296'72...;
$\rho_1(60°) = \div$ cm 7,492'148'523'701'768'384'185'85...;

$\rho_2\,(60°) = \div$ cm 1,878'186'344'365'831'959'513'47...;
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,685'167'434'033'800'171'849'6...;
$x\ (60°) = \div$ cm 2,342'583'717'016'900'085'924'8...;
$y\ (60°) = \div$ cm 4.057'474'018'856'824'111'259'0...

*
* *

È da segnalare il fatto che dall'ovale con l'Indice suddetto della 3ª Categoria si ottiene un « tricometrogramma », in pratica *a 10 lati soltanto,* identico a quello che si ha — come vedremo — dagli ovali delle Categorie 4ª e 5ª con lo stesso Indice, malgrado le differenze di forma esistenti fra di essi, a causa della diversa posizione del punto O (nella Cat. 4ª coincidente con il vertice A_2' dell'ovale e nella Cat. 5ª esterno all'ovale, alla destra di A_2' sull'asse delle x).

Indice = 80

Abbiamo $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2B = r_2 = O_2A_2' = O_2T_2 = O_2B =$ cm 4; $r_1 = O_1A_1 = O_1T_1 =$ cm 2,4; $a_1 = OA_1 =$ cm 8; OA_2' e $c_2 = OO_2$ $\left(\text{ambedue} = \frac{r_2}{2}\right) =$ cm 2; $c_1 = OO_1 =$ cm 5,6; $x\,(0°)$ e $x\,(180°) = b = r =$ cm 4; $y\,(0°)$ e $y\,(180°) = 0$; $x\,(90°)$ e $x\,(270°) = 0$; $y\,(90°)$ e $y\,(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 20 decimali.

$R = O_3T_1 = O_3T_2 = O_3N_1 =$ cm 11,75;
$c_3 = OO_3 =$ cm 7.487'489'565'935'968'634'910...;
$ON_1 =$ cm 4,262'510'434'064'031'365'090...;
$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}74'791...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{OO_3O_1} = \div 36°\,47' > 30°$;
$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}26'711...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{OO_3O_2} = \div 14°\,57' < 30°$; quindi,
$\rho_1\,(30°) = \div$ cm 5,265'643'825'328'531'508'025...; $\rho_2\,(30°) =$ cm 3;
$\rho\ (30°) = \div$ cm 4,132'821'912'664'265'754'012...;
$x\ (30°) = \div$ cm 3,579'128'765'684'246'781'786...;
$x\ (0°) - x\,(30°) = \div$ cm 0,420'871'234'315'753'218'214...;
$y\ (30°) = \div$ cm 2,066'410'956'332'132'877'006...;
$\rho_1\,(60°) = \div$ cm 7,249'742'261'192'856'421'856...;
$\rho_2\,(60°) = \div$ cm 2,267'949'192'431'122'706'480...;
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,758'845'726'811'989'564'168...;

$x\,(60^\circ) = \div$ cm 2,379'422'863'405'994'782'084...;
$y\,(60^\circ) = \div$ cm 4,121'281'292'110'203'669'613...

*
* *

Il « tricometrogramma » possiede 12 lati, ed è un poligono un po' più « *ovaloide* » anche del 1° Caso con lo stesso I = 80 della 1ª Categoria; nelle Categorie seguenti, 4ª e 5ª, i tricometrogrammi con I = 80 diventano leggermente sepre più ovaloidi che in questa 3ª Categoria, perché il valore di $\rho\,(30^\circ)$ va lievemente diminuendo, finché, raggiunto il minimo nel Caso 6° della Categoria 5ª, in cui l'ampiezza di $\alpha_1 = 30^\circ$, tale valore si mantiene inalterato nel Caso 7° successivo, ossia quando l'ampiezza di α_1 è diventata $< 30^\circ$.

È interessante il fatto che invece il valore di $\rho\,(60^\circ)$, e quindi anche i valori di $x\,(60^\circ)$ e di $y\,(60^\circ)$, sono uguali a quelli che si ottengono dagli ovali con lo stesso Indice = 80 delle Categorie 2ª, 4ª e 5ª.

Ovali della 4ª Categoria

Negli ovali della 4ª Categoria (Fig. 4), poiché il punto O d'incrocio degli assi x, y coincide con il vertice A_2', l'A. M. = a = $= A_1 A_2'$ non è divisibile in a_1 e in a_2. Per le formule rimandiamo ai §§ 2 e 3.

Indice = 50

Abbiamo $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2 B = r_2 = O_2 A_2' = O_2 T_2 = O_2 B =$ cm 2,5; $r_1 = O_1 A_1 = O_1 T_1 =$ cm 1,5; A.M. = $a = A_1 A_2' = A_1 O =$ cm 10; $c_1 = O O_1 = A_2' O_1 =$ cm 8,5; $c_2 = O O_2 = O_2 A_2' =$ cm 2,5 (c_2 è = r_2 ed è contenuto, come nella Categoria precedente, in c_1); $x\,(0^\circ)$ e $x\,(180^\circ) = b = r_2 =$ cm 2,5; $y\,(0^\circ)$ e $y\,(180^\circ) = 0$; $x\,(90^\circ)$ e $x\,(270^\circ) = 0$; $y\,(90^\circ)$ e $y\,(270^\circ) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 24 cifre decimali.

$R = O_3 T_1 = O_3 T_2 = O_3 N_1 =$ cm 35;
$c_3 = O O_3 = A_2' O_3 =$ cm 32,403'703'492'039'301'154'829'8...;
$O N_1 =$ cm 2,596'296'507'960'698'845'170'2...;
$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}26'231...$, da cui $\alpha_1 = O O_3 O_1 = \div 14^\circ 31' < 30^\circ$;
$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0{,}07'715...$, da cui $\alpha_2 = O O_3 O_2 = \div 4^\circ 24' < 30^\circ$ (come nella Categoria precedente, α_2 è contenuto in α_1). Quindi,

$\rho_1(30°) =$ cm 5,75 e $\rho_2(30°) =$ cm 1,25;
$\rho\ (30°) =$ cm 3,5;
$\rho_1(60°) = \div$ cm 8,861'215'932'167'728'497'491'645'5...;
$\rho_2(60°) = \div$ cm 0,334'936'490'538'903'383'090'692'5...;
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,598'076'211'353'315'940'291'169...

Per i valori di $x(30°)$, $y(30°)$, $x(60°)$ e $y(60°)$ rimandiamo a quelli identici trovati per l'ovale con I = 50 della 2ª Categoria. Circa la identica forma (e l'identica « *falsa rientranza* ») dei tricometrogrammi con I = 50 delle Categorie 2ª, 3ª, 4ª e 5ª rimandiamo alle considerazioni fatte in proposito, le quali si trovano subito dopo i calcoli eseguiti per gli ovali con questo Indice appartenenti alle Categorie 2ª e 3ª.

Aggiungeremo soltanto che le differenze tra $\frac{\rho_1(30°)}{2}$ e $\frac{\rho_2(30°)}{2}$ e tra $\frac{\rho_1(60°)}{2}$ e $\frac{\rho_2(60°)}{2}$, maggiori nella Categoria 3ª che nella 2ª, qui, nella Categoria 4ª, sono ancora più forti che nella Categoria precedente $\left(\frac{\rho_1(30°)}{2} - \frac{\rho_2(30°)}{2} =\right.$ cm 2,25; $\frac{\rho_1(60°)}{2} - \frac{\rho_2(60°)}{2} = \div$ cm $\left.4{,}263'139 \text{ ecc.}\right)$, e, se si volesse costruire un tricometrogramma con i valori di $x_1(30°)$, $x_2(30°)$ etc., partendo da $\frac{\rho_1(30°)}{2} =$ cm 2,875, $\frac{\rho_2(30°)}{2} =$ cm 0,625, $\frac{\rho_1(60°)}{2} = \div$ cm 4,430 ecc. e $\frac{\rho_2(60°)}{2} = \div$ cm 0,167 ecc., si otterrebbe una figura avente le seguenti misure $x_1(30°) =$ $= \div$ cm 2,489'823'035 ecc. e $y_1(30°) =$ cm 1,4375; $x_1(60°) = \div$ cm 2,215'303'983 ecc. e $y_1(60°) = \div$ cm 3,837'019'052 ecc.; $x_2(30°) = \div$ cm 0,541'265'877 ecc. e $y_2(30°) = \div$ cm 0,3125; $x_2(60°) = \div$ cm 0,083'734'122 ecc. e $y_2(60°) = \div$ cm 0,145'031'754 ecc.

Indice $= \div$ *66,251'443'396'843'104'929'672...*

Come abbiamo riferito nella Categoria 3ª, gli ovali con questo Indice, appartenenti alle Categorie 3ª, 4ª (che ora esamineremo) e 5ª, dànno un « tricometrogramma » identico, che in pratica presenta soltanto 10 lati, essendo $x(30°) = x(0°)$ fino alla 22ª cifra decimale compresa (usando un cos 30° e un sen 60° con 21 cifre decimali). Perciò sarà sufficiente riportare i risultati dei calcoli fino ai valori di $\rho(30°)$ e di $\rho(60°)$, per constatare che sono identici nelle tre Categorie sopra ricordate, e quindi rimandare per i valori di $x(30°)$, $y(30°)$, $x(60°)$ e $y(60°)$ a quelli, pure identici, riportati per l'ovale con questo Indice della Categoria 3ª.

Dobbiamo invece riportare i dati per c_1, c_2, R, c_3 ecc., i quali sono differenti, diversa essendo la forma dell'ovale, perché nella Categoria 4ª il punto O coincide con il vertice A_2' dell'ovale.

Abbiamo $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2B = r_2 = O_2A_2' (= O_2O) = O_2T_2 =$ $= O_2B = \div$ cm 3,312'572'169'842'155'246'483'6...; $r_1 = O_1A_1 = O_1T_1 =$ $= \div$ cm 1,987'543'301'905'293'147'890'16...; A.M. $= a = A_1A_2' (= A_1O) =$ $=$ cm 10; $c_1 = O_1A_2' = O_1O = \div$ cm 8,012'456'698'094'706'852'109'84...; $c_2 = O_2A_2' = O_2O = r_2 (= b) = \div$ cm 3,312 ecc. (si veda qui sopra) (c_2 è contenuto in c_1).

$R = O_3T_1 = O_3T_2 = O_3N_1 = \div$ cm 22,735'026'918'962'576'451'340'64...;
$c_3 = OO_3 = A_2'O_3 = \div$ cm 19,137'884'263'973'738'410'644'69...;
$ON_1 = \div$ cm 3,597'142'654'988'838'040'695'95...;

$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}41'866...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{OO_3'O_1} = \div 22° 43' < 30°$;

$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}17_3308...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{OO_3O_2} = \div 9° 49' < 30°$ (α_2 è contenuto in α_1). Quindi,
$\rho_1 (30°) = \div$ cm 5,993'771'650'952'646'573'945'08...;
$\rho_2 (30°) = \div$ cm 1,656'286'084'921'077'623'241'8...;
$\rho (30°) = \div$ cm $3{,}825'028'867'936'862_2098'593'44$...;
$\rho_1 (60°) = \div$ cm 8,926'534'349'178'091'671'155'9...;
$\rho_2 (60°) = \div$ cm 0,443'800'518'889'508'672'543'3...;
$\rho (60°) = \div$ cm 4,685'167'434'033'800'171'849'6...

Indice = 80
(Fig. 4 e Fig. 9)

Abbiamo $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2B = r_2 = O_2T_2 = O_2A_2' (= O_2O) =$ $= O_2B =$ cm 4; $r_1 = O_1A_1 = O_1T_1 =$ cm 2,4; A. M. $= a = A_1A_2' =$ $= A_1O =$ cm 10; $c_1 = O_1O = O_1A_2' =$ cm 7,6; $c_2 = O_2O = O_2A_2' =$ $=$ cm 4 (c_2, che è $= r_2 = b_2$, è contenuto in c_1); $x(0°)$ e $x(180°) = b =$ $= r_2 =$ cm 4; $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

I calcoli dànno i seguenti risultati, usando un cos 30° e un sen 60° con 20 cifre decimali.

$R = O_3T_1 = O_3T_2 = O_3N_1 =$ cm 16,25;
$c_3 = OO_3 = A_2'O_3 =$ cm 11,578'536'176'909'411'030'162...;

$O N_1 = \text{cm } 4{,}671'463'823'090'588'969'838...;$

$\text{tg } \alpha_1 = 0{,}65'638...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 33^\circ\, 16' > 30^\circ$;

$\text{tg } \alpha_2 = 0{,}34'546...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 19^\circ\, 3' < 30^\circ$ (α_2 è contenuto in α_1). Quindi,

$\rho_1 (30^\circ) = \div \text{ cm } 6{,}222'693'532'159'296'768'036...$ e

$\rho_2 (30^\circ) = \text{cm } 2;$

$\rho\ (30^\circ) = \div \text{ cm } 4{,}111'346'766'079'648'384'018...;$

$x\ (30^\circ) = \div \text{ cm } 3{,}560'530'743'191'973'515'362...;$

$x\ (0^\circ) - x\,(30^\circ) = \div \text{ cm } 0{,}439'469'256'808'026'484'637...$

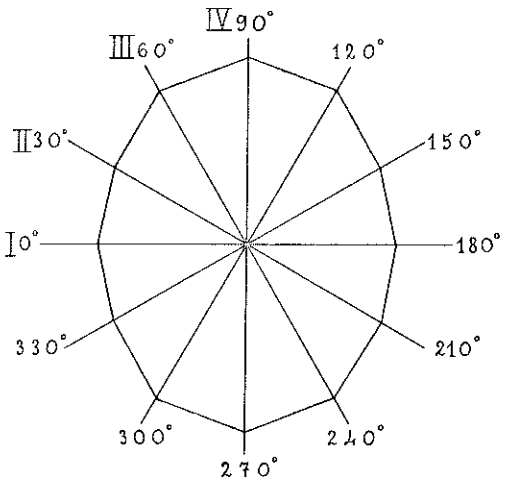


FIG. 9. - Riproduzione 1:2. - Tricometrogramma dell'ovale della Categoria 4ª con Indice = 80, presentato nella Fig. 4. La spiegazione è nel testo.
Non è stato disegnato il tricometrogramma dell'ovale della Categoria 5ª con Indice = 80, Caso 6°, presentato nella Fig. 5, perché nella riproduzione le differenze rispetto al tricometrogramma della Fig. 9 sarebbero risultate impercettibili.

Il tricometrogramma è un po' più « *ovaloide* » di quello dell'ovale della Categoria 3ª con lo stesso Indice.

$y\ (30^\circ) = \div \text{ cm } 2{,}055'673'383'039'824'192'009...;$

$\rho_1 (60^\circ) = \div \text{ cm } 8{,}981'793'068'761'733'715'376...$ e

$\rho_2 (60^\circ) = \div \text{ cm } 0{,}535'898'384'862'245'412'96...;$

$\rho\ (60^\circ) = \div \text{ cm } 4{,}758'845'726'811'989'564'168...$

Per le misure successive e per il commento rimandiamo a quanto abbiamo scritto circa l'ovale con I = 80 della Categoria 3ª.

Ovali della 5ª Categoria

Nella 5ª Categoria gli assi x, y s'incrociano fra loro in un punto O situato al di fuori del contorno dell'ovale. a destra del suo vertice A_2' (Fig. 5). Poiché la distanza tra O e A_2' può essere varia, per ogni Indice saranno, brevemente considerati i casi, che ci sembrano più significativi. Per le formule rimandiamo ai §§ 2 e 3.

Indice = 50

Gli ovali in questione presentano 5 casi tipici, determinati dal rapporto fra la misura fissa di $b = r_2 =$ cm 2,5 e la varia lunghezza del segmento $O A_2'$ considerato, per cui variano i valori di c_1, c_2, R, c_3, $O N_1$, $\rho_1(30°)$, $\rho_2(30°)$, $\rho_1(60°)$ e $\rho_2(60°)$, nonché l'ampiezza degli angoli α_1 e α_2, che è sempre inferiore ai 30° (α_1 sempre $> \alpha_2$; quest'ultimo contenuto nel primo). Oltre a $b = r_2$ hanno valore fisso $a =$ cm 10 e $r_1 =$ cm 1,5.

Invece i « tricometrogrammi », dodecagoni con « *falsa rientranza* » sull'asse delle x, sono identici a quelli degli ovali con lo stesso Indice delle Categorie 2ª, 3ª e 4ª, dato che in tutti e cinque i Casi il valore arbitrario di $\rho(30°)$ risulta = cm 3,5 e il valore arbitrario di $\rho(60°)$ risulta $= \div$ cm 4,598'076'211'353'315'940'291'169... I calcoli sono stati eseguiti usando un cos 30° e un sen 60° con 24 cifre decimali.

Nel Caso 1° abbiamo $O A_2' =$ cm 0,1 $< r_2$ e quindi $c_2 \operatorname{sen} 30° < r_2$ e $c_2 \operatorname{sen} 60° < r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ e $\rho_2(60°)$ *hanno valore positivo,* che va aggiunto rispettivamente a $\rho_1(30°)$ e a $\rho_1(60°)$.

$c_1 =$ cm 8,6; $c_2 =$ cm 2,6; R = cm 35,60; $c_3 = 32{,}997$ ecc.; $O N_1 =$ = cm 2,602'121 ecc.; $\alpha_1 = \div 14° 35'$; $\alpha_2 = \div 4° 30'$.

Nel Caso 2° abbiamo $O A_2' = \div$ cm 0,386'751'345'948'128'822'545'744'477... $< r_2$ e perciò $c_2 \operatorname{sen} 30° < r_2$, mentre $c_2 \operatorname{sen} 60° = r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ ha valore positivo, che va aggiunto a $\rho_1(30°)$, ma che $\rho_2(60°)$ *ha valore 0* (essendo $r_2 = c_2 \operatorname{sen} 60°$).

$c_1 = \div$ cm 8,886'751'345'948'128'822'545'744'477...; $c_2 = \dfrac{r_2}{\operatorname{sen} 60°} =$ $= \div$ cm 2,886'751'345'948'128'822'545'744'477...; R $= \div$ cm 37,320'508'075'688'772'935'274'466'862...; $c_3 = \div$ cm 34.700'640'474'143'610'817'972'081'255...; $O N_1 = \div$ cm 2,619'867 ecc.; $\alpha_1 = \div 14° 21'$; $\alpha_2 = \div 4° 45'$.

Nel Caso 3° abbiamo $O A_2' =$ cm 2 $< r_2$ e quindi $c_2 \operatorname{sen} 30° < r_2$, mentre $c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ ha valore positivo, il

quale va aggiunto a $\rho_1(30°)$; al contrario, $\rho_2(60°)$ *ha valore negativo* essendo $r_2 < c_2 \operatorname{sen} 60°$), che va sottratto da $\rho_1(60°)$, il quale già contiene il valore di $\rho_2(60°)$.

c_1 = cm 10,5; c_2 = cm 4,5; R = cm 47; c_3 = cm 44,271'887'242'357'310'647'984...; O N_1 = cm 2,728'112 ecc.; $\alpha_1 = \div 13° 20'$; $\alpha_2 = \div 5° 48'$.

Nel Caso 4° abbiamo $O A_2' = \text{cm } 2{,}5 = r_2$, e quindi $c_2 \operatorname{sen} 30° = r_2$ e $c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ *ha valore 0* (essendo $r_2 = c_2 \operatorname{sen} 30°$), mentre $\rho_2(60°)$ *ha valore negativo,* il quale va — come nel Caso 3° — sottratto da $\rho_1(60°)$.

c_1 = cm 11; c_2 = cm 5; R = cm 50; c_3 = cm 47,236'109'069 ecc.; O N_1 = cm 2,763'890 ecc.; $\alpha_1 = \div 13° 6'$; $\alpha_2 = \div 6° 2'$.

Nel Caso 5° abbiamo $O A_2' = \text{cm } 1'000'000 > r_2$, e quindi $c_2 \operatorname{sen} 30°$ e $c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ *ha valore negativo* (essendo $r_2 < c_2 \operatorname{sen} 30°$), *e così pure* $\rho_2(60°)$ essendo $r_2 < c_2 \operatorname{sen} 60°$); perciò i loro valori vanno rispettivamente sottratti da $\rho_1(30°)$ e da $\rho_1(60°)$.

c_1 = cm 1'000'008,5; c_2 = cm 1'000'002,5; R = cm 6'000'035; c_3 = = cm 5'916'112'321'537 ecc.; O N_1 = cm 83'922, 678'463 ecc.; α_1 = = $\div 9° 35'$ (essendo $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}16'904...$); pure $\alpha_2 = \div 9° 35'$, ma di ampiezza molto leggermente inferiore a quella di α_1, nel quale è contenuto, essendo $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0{,}16'902...$ È quindi palese che, aumentando la lunghezza di $O A_2'$, l'ampiezza dell'angolo α_1 diminuisce, mentre quella di α_2 cresce, di modo che ambedue finiscono con il convergere verso un valore di circa 9° 35'.

Per completare il breve quadro precedente, occorre aggiungere quanto segue. Nei primi 4 Casi il valore di $\rho_1(30°)$ aumenta da cm 5,8 fino a raggiungere i cm 7, mentre il valore di $\rho_2(30°)$ si abbassa in proporzione da cm 1,2 fino a cm 0; nel Caso 5° il valore di $\rho_1(30°)$ si presenta maggiore, ma $\rho_2(30°)$ assume un valore negativo tale che la differenza tra essi è uguale a cm 7, come la somma di $\rho_1(30°) + \rho_2(30°)$ nei primi quattro Casi; perciò $\rho(30°)$ è sempre $= \dfrac{\text{cm } 7}{2} = \text{cm } 3{,}5$.

Il valore di $\rho_1(60°)$ nei primi 2 Casi aumenta da $\div$ cm 8,947 ecc. fino a $\div$ cm 9,196 ecc., mentre il valore di $\rho_2(60°)$ si abbassa in proporzione da $\div$ cm 0.248 ecc. fino a cm 0. Nei Casi seguenti il valore di $\rho_1(60°)$ aumenta, mentre quello di $\rho_2(60°)$ assume un valore negativo tale che la differenza tra essi si mantiene uguale a $\div$ cm 9,196 ecc.; perciò $\rho(60°)$ è sempre $= \div \dfrac{\text{cm } 9{,}196 \text{ ecc.}}{2} = \div \text{cm } 4{,}598$ ecc.

Per le misure di $x(30°)$, $y(30°)$, $x(60°)$ e $y(60°)$ rimandiamo all'ovale con I = 50 della Categoria 2ª.

Indice = ≒ 66,251'443'396'843'104'929'672...

Come abbiamo già detto in precedenza, i tricometrogrammi degli ovali con questo Indice delle Categorie 3ª, 4ª e 5ª sono identici fra loro (dato che tutti hanno un $\rho(30°)$ = ≒ cm 3.825'028'867'936'862'098'593'44... e un $\rho(60°)$ = ≒ cm 4,685'167'434'033'800'171'849'6...), ed hanno in pratica 10 lati soltanto, essendo $x(30°) = x(0°)$ fino alla 22ª cifra decimale compresa (usando per i calcoli un cos 30° e un sen 60° con 21 cifre decimali).

I valori fissi (si veda alla Categoria 3ª) sono $b = r_2$ = ≒ cm 3,312'572'169'842'155'246'483'6...; r_1 = ≒ cm 1,987'543'301'905'293'147'890'16... e a = cm 10.

Gli ovali della Categoria 5ª con il suddetto Indice presentano i 5 Casi tipici seguenti, del tutti simili a quelli con I = 50 veduti più sopra.

Nel Caso 1° abbiamo $O A_2'$ = cm 0,1 $< r_2$, e quindi con c_2 sen 30° e c_2 sen 60° $< r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ e $\rho_2(60°)$ *hanno valore positivo*, il quale va rispettivamente aggiunto a $\rho_1(30°)$ e a $\rho_1(60°)$.

Nel Caso 2°, che poi sarà sviluppato per esteso, abbiamo $O A_2'$ = = ≒ cm 0,512 ecc. $< r_2$, e quindi c_2 sen 30° $< r_2$, ma con c_2 sen 60° $= r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ ha valore positivo, il quale va aggiunto a $\rho_1(30°)$, mentre $\rho_2(60°)$ *ha valore 0* (essendo $r_2 = c_2$ sen 30°).

Nel Caso 3° abbiamo $O A_2'$ = cm 2 $< r_2$, e quindi c_2 sen 30° $< r_2$, mentre c_2 sen 60° $> r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ ha valore positivo, il quale va aggiunto a $\rho_1(30°)$; al contrario, $\rho_2(60°)$ *ha valore negativo* (essendo $r_2 < c_2$ sen 60°), che va sottratto da $\rho_1(60°)$, il quale già contiene il valore di $\rho_2(60°)$.

Nel Caso 4° abbiamo $O A_2'$ = cm 3,312 ecc. $= r_2$, e quindi c_2 sen 30° $= r_2$ e c_2 sen 60° $> r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ *ha valore 0* (essendo $r_2 = c_2$ sen 30°), mentre $\rho_2(60°)$ *ha valore negativo*, il quale — come nel Caso precedente — va sottratto da $\rho_1(60°)$.

Nel Caso 5° abbiamo $O A_2'$ = cm 1'000'000 $> r_2$, e quindi c_2 sen 30° e c_2 sen 60° ambedue $> r_2$. Ne consegue che $\rho_2(30°)$ e $\rho(60°)$ *hanno valore negativo*, il quale va rispettivamente sottratto da $\rho_1(30°)$ e da $\rho_1(60°)$.

Occorre aggiungere che gli angoli α_1 e α_2 hanno un'ampiezza sempre inferiore ai 30°, e che α_1 è sempre $> \alpha_2$, quest'ultimo essendo contenuto nel primo; aumentando la lunghezza di $O A_2'$, l'angolo α_1 (= ≒ 22° 36' nel Caso 1°) diminuisce e l'angolo α_2 (= ≒ 9° 56' nel Caso

1°) cresce, finendo ambedue con il convergere — nel Caso 3° — verso un valore di circa 16° 22'.

Vediamo ora in modo particolareggiato il

Caso 2°

Abbiamo A. M. $= a = A_1 A_2' =$ cm 10; $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2 B = r_2 =$ $= O_2 A_2' = O_2 B = O_2 T_2 = \div$ cm 3,312'572'169'842'155'246'483'6...; $r_1 =$ $= O_1 A_1 = O_1 T_1 = \div$ cm 1,987'543'301'905'293'147'890'16...; $c_2 = \frac{r_2}{\text{sen}\,60^\circ} =$ $= O O_2 = \div$ cm 3,825'028'867'936'862'098'593'4...; $O A_2' = c_2 - r_2 =$ $= \div$ cm 0,512'456'698'094'706'852'109'8...; $O A_1 = a + O A_2' = \div$ cm 10,512'456'698'094'706'852'109'8...; $c_1 = O O_1 = \div$ cm 8,524'913'396'189' 413'704'219'64... (si tenga presente che c_2 è contenuto in c_1); $x(0°)$ e $x(180°) = b = r$; $y(0°)$ e $y(180°) = 0$; $x(90°)$ e $x(270°) = 0$; $y(90°)$ e $y(270°) = \frac{a}{2} =$ cm 5.

$R = O_3 T_1 = O_3 T_2 = O_3 N_1 = \div$ cm 24,552'713'586'051'452'658'314'60...;
$c_3 = O O_3 = \div$ cm 20,892'887'821'936'419'555'048'53...;
$O N_1 = \div$ cm 3,659'825'764'115'033'103'266'07...;

$\text{tg}\,\alpha_1 = 0{,}40'802...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div 22° 11' < 30°$;

$\text{tg}\,\alpha_2 = 0{,}18'307...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div 10° 22' < 30°$; quindi,
$\rho_1(30°) = \div$ cm 6,249'999'999'999'999'999'999'98...;
$\rho_2(30°) = \div$ cm 1,400'057'735'873'724'197'186'9...;
$\rho\ (30°) = \div$ cm 3,825'028'867'936'862'098'593'44..., dal quale
$x\ (30°) = \div$ cm 3,312'572'169'842'155'246'483'611'553'501...;
$x\ (30°) - x\,(0°) = \div$ cm 0,000'000'000'000'000'000'000'011'553'501;

pertanto, come abbiamo già detto, il tricometrogramma è in pratica un poligono a soli 10 lati, essendo $x(30°) = x(0°)$ fino alla 22ª cifra decimale compresa.

$y\ (30°) \div =$ cm 1,912'514'433'968'431'049'296'72...;
$\rho_1(60°) = \div$ cm 9,370'334'868'067'600'343'699'2... e
$\rho_2(60°) =$ cm 0; perciò
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,685'167'434'033'800'171'849'6...; dal quale
$x\ (60°) = \div$ cm 2,342'583'717'016'900'085'924'8... e
$y\ (60°) = \div$ cm 4,057'474'018'856'824'111'259'0...

Nei primi 4 Casi il valore di $\rho_1(30°)$ aumenta da $\div$ cm 6,043'771' 650 ecc. a $\div$ cm 7,650'057'735'873'724'197'186'88.., mentre quello di

$\rho_2(30°)$ diminuisce in proporzione da $\div$ cm 1,606'286'084 ecc. fino a cm 0, per cui la somma dei due ρ è sempre $= \div$ cm 7,650'057'735 ecc. (si veda qui sopra). Nel Caso 5° il valore di $\rho_1(30°)$ si presenta maggiore, giore, ma $\rho_2(30°)$ assume un valore negativo tale che la differenza tra essi è pure $= \div$ cm 7,650 ecc.; perciò $\rho(30°)$ è sempre $= \dfrac{\div \text{ cm } 7{,}650 \text{ ecc.}}{2} =$ $= \div$ cm 3,825 ecc. (si veda al Caso 2°).

Il valore di $\rho_1(60°)$ nei primi 2 Casi aumenta da $\div = 9{,}013'136$ ecc. a $\div$ cm 9,370'334 ecc. (si veda al Caso 2°), mentre quello di $\rho_2(60°)$ diminuisce in proporzione da $\div$ cm 0,357'197 ecc. fino a cm 0, per cui la somma dei due ρ risulta sempre $= \div$ cm 9,370'334 ecc. (si veda il Caso 2°). Nei Casi seguenti il valore di $\rho_1(60°)$ aumenta, mentre quello di $\rho_2(60°)$ assume un valore negativo tale che la differenza tra i due ρ si mantiene sempre $= \div$ cm 9,370'334 ecc.; perciò $\rho(60°)$ è sempre $= \dfrac{\div \text{ cm } 9{,}370 \text{ ecc.}}{2} = \div$ cm 4,685 ecc. (si veda al Caso 2°).

Indice = 80

Gli ovali della 5ª Categoria con questo Indice, in cui $b = r_2 =$ $=$ cm 4 ed r_1 è $=$ cm 2,4, presentano 7 Casi tipici, solo in parte simili ai cinque Casi degli ovali con I = 50 e I $= \div$ 66,251 ecc., or ora considerati della stessa Categoria, perché l'ampiezza dell'angolo α_1 supera i 30° nei primi 5 Casi, è $= 30°$ nel 6° Caso, e soltanto nel 7° Caso è $< 30°$, mentre con gli Indici suddetti α_1 è sempre inferiore ai 30°.

I sette Casi in questione sono i seguenti.

Caso 1°, con $O A_2' =$ cm 0,1 $< r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 30°$ e $c_2 \operatorname{sen} 60° < r_2$, $\alpha_1 =$ $= \div 33° 9'$ e $\alpha_2 = \div 19° 11'$; $\rho_2(60°)$ di valore positivo.

Caso 2°, con $O A_2' =$ cm 0,618'802'153'517'006'116'093'047'1... $< r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 30° < r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 60° = r_2$, $\alpha_1 = \div 32° 37'$ e $\alpha_2 = \div 19° 47'$; $\rho_2(60°)$ di valore $= 0$.

Caso 3°, con $O A_2' =$ cm $2 < r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 30° < r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$, $\alpha_1 = \div 31° 32'$ e $\alpha_2 = \div 20° 59'$; $\rho_2(60°)$ di valore negativo.

Caso 4°, con $O A_2' =$ cm $4 = r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 30° = r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$, $\alpha_1 = \div 30° 30'$ e $\alpha_2 = \div 22° 7'$; $\rho_2(30°)$ di valore $= 0$ e $\rho_2(60°)$ di valore negativo.

Caso 5°, con $O A_2' =$ cm $5 > r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 30°$ e $c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$, $\alpha_1 =$ $= \div 30° 7'$ e $\alpha_2 = \div 22° 31'$; $\rho_2(30°)$ e $\rho_2(60°)$ di valore negativo.

Caso 6°, con $O A_2' = \text{cm } 5{,}4 > r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 30° = c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$, $\alpha_1 = 30°$ e $\alpha_2 = \div 22° 39'$; $\rho_2(30°)$ e $\rho_2(60°)$ di valore negativo (Fig. 5).

Caso 7°, con $O A_2' = \text{cm } 1'000'000 > r_2$, $c_2 \operatorname{sen} 30° = c_2 \operatorname{sen} 60° > r_2$, $\alpha_1 = \div 26° 23'$ e $\alpha_2 = \div 26° 23'$ ma, sia pure molto leggermente, sempre inferiore ad α_1; $\rho_2(30°)$ e $\rho_2(60°)$ di valore negativo.

Nei calcoli è stato usato un cos 30° e un sen 60° con 20 cifre decimali. Da caso a caso variano, com'è comprensibile, i valori di c_1, c_2, R, c_3, $O N_1$, $\rho_1(30°)$, $\rho_2(30°)$, $\rho_1(60°)$ e $\rho_2(60°)$.

Per le formule da usare per la costruzione dei tricometrogrammi rimandiamo ai §§ 2 e 3. Qui ricorderemo soltanto in sintesi, che, per ottenere la misura di $\rho(30°)$ e di $\rho(60°)$, il valore di ρ_2, se è positivo, va aggiunto a quello di ρ_1 e la somma va divisa per 2; se invece è uguale a 0, ρ risulta uguale alla metà di ρ_1; se poi ρ_2 è addirittura di valore negativo, esso va sottratto da ρ_1 (il cui valore è maggiore che nei casi precedenti) e la differenza va divisa per 2. Ad esempio, avremo rispettivamente $\rho(30°) = \dfrac{\rho_1(30°) + \rho_2(30°)}{2}$, oppure $\rho(30°) = \dfrac{\rho_1(30°)}{2}$, oppure $\rho(30°) = \dfrac{\rho_1(30° - \rho_2(30°)}{2}$; lo stesso vale per $\rho(60°)$.

I tricometrogrammi sono tutti poligoni regolari a 12 lati e « *ovaloidi* ». Nei 7 Casi considerati il valore di $\rho(60°)$ risulta sempre di $\div$ cm 4,758'845'726'811'989'564'168..., ed è uguale a quello trovato per gli ovali con lo stesso I = 80 delle Categorie 2ª, 3ª e 4ª; quindi (si vedano gli esempi qui sotto riportati) $x(60°)$ è sempre $= \div$ cm 2,379 ecc. e $y(60°)$ è sempre $= \div$ cm 4,121 ecc.

Il valore di $\rho(30°)$, invece, diminuisce molto lievemente dal 1° ($\rho(30°) = \div$ cm 4,110'742'490'327'475'393'899...) al 6° Caso ($\rho(30°) =$ cm 4,1), ossia finché l'ampiezza di α_1 da $> 30°$ diventa $= 30°$. Nel 7° Caso il valore di $\rho(30°)$ è — come nel 6° Caso — di cm 4,1, ossia resta identico quando l'ampiezza di α_1 è $\leqq 30°$ e $O A_2'$ ha una lunghezza $\geqq$ cm 5,4. Ciò significa che i tricometrogrammi del 6° e del 7° Caso sono identici fra loro e molto lievemente più ovaloidi che nei primi cinque Casi.

Dopo quanto è stato detto, sarà sufficiente svolgere come esempi solo il 1° e il 6° Caso.

Caso 1°

Abbiamo A.M. $= a = A_1 A_2' = \text{cm } 10$; $O A_2' = \text{cm } 0{,}1$; $O A_1 = a + O A_2' = \text{cm } 10{,}1$; $b = \dfrac{\text{a. m.}}{2} = O_2 B = r_2 = O_2 T_2 = O_2 A_2' = O_2 B =$

$=$ cm 4; $r_1 = O_1A_1 = O_1T_1 =$ cm 2,4; $c_1 = O\,O_1 =$ cm 7,7; $c_2 = O\,O_2 =$ $=$ cm 4,1 (c_2 è contenuto in c_1); $x\,(0^\circ)$ e $x\,(180^\circ) = b = r_1 =$ cm 4; $y\,(0^\circ)$ e $y\,(180^\circ) = 0$; $x\,(90^\circ)$ e $x\,(270^\circ) = 0$; $y\,(0^\circ)$ e $y\,(270^\circ) = \frac{a}{2} =$ $=$ cm 5.

$R = O_3T_1 = O_3T_2 = O_3N_1 =$ cm 16,475;
$c_3 = O\,O_3 =$ cm 11,782'004'286'198'507'405'464...;
$O\,N_1 =$ cm 4,692'995'713'802 ecc.;

$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}65{,}353...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = \div\ 39^\circ\ 9' > 30^\circ$;

$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0{,}34{,}798...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = \div\ 19^\circ\ 11' < 30^\circ$; quindi,
$\rho_1\,(30^\circ) = \div$ cm 6,271'484'980'654'950'787'799...;
$\rho_2\,(30^\circ) =$ cm 1,95 (di valore positivo, essendo $r_2 > c_2 \operatorname{sen} 30^\circ$);
$\rho\,(30^\circ) = \div$ cm 4,110'742'490'327'475'393'899...;
$x\,(30^\circ) = \div$ cm 3,560'007'425'039'700'756'265...;
$x\,(0^\circ) - x\,(30^\circ) = \div$ cm 0,439'992'574'960'299'243'735...;

il tricometrogramma è dunque di pochissimo più ovaloide di quello dell'ovale con lo stesso Indice della Categoria 4ª.

$y\,(30^\circ) = \div$ cm 2,055'371'245'163'787'696'949...;
$\rho_1\,(60^\circ) = \div$ cm 9,068'395'609'140'177'580'052...;
$\rho_2\,(60^\circ) = \div$ cm 0,449'295'844'483'801'548'284... (di valore positivo, essendo $r_2 > c_2 \operatorname{sen} 60^\circ$);
$\rho\,(60^\circ) = \div$ cm 4,758'845'726'811'989'564'168...;
$x\,(60^\circ) = \div$ cm 2,379'422'863'405'994'782'084...;
$y\,(60^\circ) = \div$ cm 4,121'281'292'110'203'669'613...

Caso 6°

(Fig. 5; si veda anche la Fig. 9)

Abbiamo A.M. $= a = A_1A_2' =$ cm 10; $O\,A_2' =$ cm 5,4; $O\,A_1 = a +$ $+ O\,A_2' =$ cm 15,4; $b = \frac{\text{a. m.}}{2} = O_2B = r_2 = O_2A_2' = O_2T_2 = O_2B =$ $=$ cm 4; $r_1 = O_1A_1 = O_1T_1 =$ cm 2,4; $c_1 = O\,O_1 =$ cm 13; $c_2 =$ $= O\,O_2 =$ cm 9,4 (c_2 è contenuto in c_1); $x\,(0^\circ)$ e $x\,(180^\circ) = b = r_2 =$ $=$ cm 4; $y\,(0^\circ)$ e $y\,(180^\circ) = 0$; $x\,(90^\circ)$ e $x\,(270^\circ) = 0$; $y\,(90^\circ)$ e $y\,(270^\circ) =$ $= \frac{a}{2} =$ cm 5.

$R = O_3T_1 = O_3T_2 = O_3N_1 =$ cm 28,4; questo risultato si ottiene sia con la formula $R = \frac{c_1}{\operatorname{sen} 30^\circ} + r_1$ (essendo $\alpha_1 = 30^\circ$), sia con la formula (6) (si veda l'analogo Caso 2 ° con I = 50 della Categoria 1ª);

$c_3 = O O_3 =$ cm 22,516'660'498'395'404'815'856'80...;
$O N_1 =$ cm 5,883'339'501'604 ecc.;

$\text{tg}\,\alpha_1 = 0{,}57'7350...$, da cui $\alpha_1 = \widehat{O O_3 O_1} = 30°$;

$\text{tg}\,\alpha_2 = 0{,}41'746...$, da cui $\alpha_2 = \widehat{O O_3 O_2} = 22° 39'$ (α_2 è contenuto in α_1).
Quindi, $\rho_1 (30°) =$ cm 8,9 e $\rho_2 (30°) =$ − cm 0,7 (di valore negativo, essendo $r_2 < c_2 \text{ sen } 30°$); perciò
$\rho\ (30°) =$ cm 4,1;
$x\ (30°) = \div$ cm 3,550'704'155'516'198'451'716...;
$x\ (0°) - x\ (30°) = \div$ cm 0,449'295'844'483'801'548'284...;

il tricometrogramma è pertanto di pochissimo più ovaloide di quello ottenuto dall'ovale del Caso 1°, qui sopra esposto.

$y\ (30°) =$ cm 2,05;
$\rho_1 (60°) = \div$ cm 13,658'330'249'197'702'407'880...;
$\rho_2 (60°) = \div -$ cm 4,140'638'795'573'723'279'544... (di valore negativo, essendo $r_2 < c_2 \text{ sen } 60°$);
$\rho\ (60°) = \div$ cm 4,758'845'726'811'989'564'168...;
$x\ (60°) = \div$ cm 2,379'422'863'405'994'782'084...;
$y\ (60°) = \div$ cm 4,121'281'292'110'203'669'613...

5. - Considerazioni e Conclusioni.

I modelli di sezione trasversa di capelli di forma ovale a simmetria bilaterale dànno tricometrogrammi, nessuno dei quali somiglia alla forma originaria. Inoltre da questi ovali, che pur appartengono a cinque diverse Categorie, si ottengono fondamentalmente solo tre forme di tricometrogrammi, che ricordano molto da vicino quelle già illustrate, specialmente per i modelli di sezioni ellittiche ed ovali bisimmetriche, da uno di noi (M. Gàlgano, 1975, 1976); ossia, se gli Indici sono sufficientemente bassi (p. es. Indice = 50), dei poligoni regolari a 12 lati con « falsa rientranza » [11] sul diametro a 0°-180° del modulo (figg. 6 e 7); se gli indici sono sufficientemente elevati (p. es. Indice = 80), dei poligoni regolari a 12 lati « ovaloidi » (fig. 9), e se l'indice è all'incirca intermedio fra i due gruppi d'indici suddetti, un poligono regolare in pratica a 10 lati soltanto (fig. 8).

Si hanno perfino, con notevole frequenza, tricometrogrammi identici da ovali con lo stesso Indice, ma aventi forme differenti, tanto

[11] I termini « falsa rientranza » e « ovaloide » sono stati spiegati da uno di noi (M. Gàlgano) alle pagg. 181-182 della nota preliminare del 1975 e alle pagg. 459-461 del suo lavoro del 1976.

da appartenere a Categorie diverse; ciò si verifica per gli ovali con I = 50 delle Categorie 2ª, 3ª, 4ª e 5ª e per gli ovali con I = ≒ 66,251'443 ecc. delle Categorie 3ª, 4ª e 5ª; anche gli ovali con I = 80 dei Casi 6° e 7° della 5ª Categoria presentano lo stesso tricometrogramma.

Con l'uso del tricociclòforo le misure esatte ottenibili sono solamente quelle totali dell'A. M. e dell'a. m. Ma il fatto stesso che per costruire il tricometrogramma si considera che questi due assi s'incrocino fra loro nel punto medio di ciascuno di essi è un arbitrio ingiustificato, perché negli ovali a simmetria bilaterale l'a. m. divide sempre in due parti di lunghezza diversa l'A. M., e soltanto l'a. m. è diviso in due metà perfettamente eguali fra loro dall'A. M. Se i due assi M. e m. s'incrociassero fra loro nel punto medio di ciascuno di essi, avremmo invece, ad esempio, o una circonferenza, o una forma a fuso, o ellittica od ovale bisimmetrica, quest'ultima con $r_1 = r_2$).

Tutte le altre misure non corrispondono al vero, non solo per le ragioni già esposte nelle pubblicazioni citate all'inizio di questo lavoro (si vedano specialmente quelle che riguardano le ellissi e gli ovali bisimmetrici), ma anche perché nel caso degli ovali a simmetria bilaterale, dopo una loro rotazione in senso destrogiro di gradi ϑ (precisamente, per i tricometrogrammi, di 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210°, 240°, 270°, 300° e 330°) — tranne l'eccezione rappresentata dai Casi 1° e 2° con I = 80 della Categoria 1ª, nei quali, però, solo $\rho_1(30°) = \rho_2(30°)$ — non abbiamo dai calcoli un solo $\rho(\vartheta)$, ma due di valore sempre diverso fra loro, ossia un $\rho_1(\vartheta)$, corrispondente alla parte dell'ovale con l'estremità più stretta, e un $\rho_2(\vartheta)$, corrispondente alla parte dell'ovale con l'estremità più larga o addirittura, nella Categoria 5ª, a una parte esterna ad esso quasi per intero, rappresentata dal tratto $O A_2'$, più o meno lungo e coincidente con $+ x$, il quale possiede a comune con l'ovale solo quel suo punto estremo, che corrisponde al vertice A_2` di quest'ultimo. Pertanto è del tutto arbitrario dedurre da $\rho_1(\vartheta)$ e $\rho_2(\vartheta)$ un solo $\rho(\vartheta$ e quindi da questo un solo $x(\vartheta)$ e un solo $y(\vartheta)$, nonché, per costruire un tricometrogramma, riportare l'errata misura di $\rho(\vartheta)$, avente per coordinate di conseguenza pure inesatte $x(\vartheta)$ e $y(\vartheta)$, sopra i due raggi opposti del modulo, formanti un angolo ϑ con il suo diametro orizzontale a 0° 180°, a partire dal suo centro; ciò vale, com'è facile comprendere da quanto è stato detto poco prima, per i ρ di 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210°, 270°, 300° e 330°.

Sono esenti da errore solo le misure di $x(0°)$ e $x(180°)$, perché ciascuna di esse è l'esatta metà dell'a. m.; ma il loro punto di origine non dovrebbe essere il centro del modulo, che in pratica è una circonferenza, e non dovrebbero disporsi sul diametro di questo a 0°-180°, poiché l'a. m. divide in due parti disuguali l'A. M., la cui lunghezza complessiva viene invece arbitrariamente divisa per 2 e riportata quindi

in parti uguali sui raggi a 0°-90° e a 0°-270° del modulo. Per quanto riguarda l'A. M. ne risulta che, mentre la sua lunghezza totale sul diametro a 90°-270° del modulo è riportata per intero, $y\,(90°)$ e $y\,(270°)$, essendo stati artificiosamente resi uguali, presentano un'errata misura, dato che in realtà $y\,(90°)$ è sempre più lungo di $y\,(270°)$.

In tal modo il tricometrogramma assume per forza la forma di un poligono regolare con un centro di simmetria, che non esiste negli ovali in questione, e con un grado di simmetria diverso, superiore in in senso geometrico, ma non probabilmente in senso biologico, a quello della simmetria bilaterale.

Dalle considerazioni sopra esposte si può concludere che i modelli di sezioni di forma ovale a simmetria bilaterale forniscono la prova più evidente e convincente della inutilità di ricavare da essi, secondo le modalità usate correntemente nei lavori antropologici, dei tricometrogrammi. Quest'ultimi, per altro, risulterebbero di forma assai dissimile da quella dei modelli, anche se, per costruirli, tenessimo separate le misure dei ρ_1 da quello dei ρ_2, soprattutto quando uno dei ρ_2 è uguale a zero e quando uno o ambedue i ρ_2 di 30° e di 60° sono di valore negativo.

Quanto è stato detto per i calcoli eseguiti sui modelli, vale a maggior ragione per le misure prese su capelli montati orizzontalmente sul tricociclòforo e ruotati in tale posizione sotto un microscopio, sia perché con questo metodo non possiamo riconoscere se i capelli in esame hanno una sezione trasversa simile ad un ovale a simmetria bilaterale, priva di un centro di simmetria, né tanto meno possiamo misurare separatamente $\rho_1\,(30°)$ da $\rho_2\,(30°)$ e $\rho_1\,(60°)$ e da $\rho_2\,(60°)$, sia perché sarà praticamente impossibile, a causa della loro somiglianza, distinguere i tricometrogrammi ottenuti da capelli a sezione trasversa di forma simile alla ovale a simmetria bilaterale dai tricometrogrammi ottenuti, ad esempio, da capelli a sezione trasversa di forma simile alla ellittica oppure alla ovale bisimmetrica.

Dall'Istituto di Antropologia con annesso Museo dell'Università degli Studi di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

Per la bibliografia rimandiamo soprattutto a quella pubblicata nella I e nella II Parte di questo lavoro.

GÀLGANO M., *Il tricociclòforo, apparecchio dalle limitate prestazioni.* Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Ser. IV, Vol. XLII, pp. 177-182, Napoli, 1975.

GÀLGANO M., *Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli.* Parte I - *Modelli di forma circolare, a segmento di retta, ellittica, fusiforme o* « cis », « trans », *ovale bisimmetrica e reniforme.* Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Ser. IV, Vol. XLIII, pp. 451-484. Napoli, 1976.

GÀLGANO M., *Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli.* Parte II - *Modelli di forma quadrata, rettangolare e triangolare.* Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Ser. IV, Vol. XLIV, pp. 301-358, Napoli, 1977.

STEGGERDA M. e SEIBERT H. C., *Size and shape of head hair from six racial groups.* Journ. Hered., Vol. 32, pp. 315-318, 1941.

VERNALL D. G., *A study of the size and shape of cross sections of hair from four Races of Men.* Amer. Journ. Phys. Anthrop., Vol. 19, pp. 335-350, Philadelphia, P.A., 1961.

Principio di massimo per sottosoluzioni di sistemi debolmente accoppiati quasilineari

Nota di LUCIA MADDALENA (a Bari)
presentata dal socio ordinario C. CILIBERTO

(Adunanza del 3 novembre 1979)

SUMMARY. — The aim of this paper is to prove a maximum principle for weak subsolutions of second order quasilinear weakly coupled parabolic system.

Negli ultimi tempi sono state studiate varie estensioni del principio di massimo per le sottosoluzioni deboli di sistemi ellittici o parabolici debolmente accoppiati (cfr. [3], [2]).

Scopo della presente nota è quello di stabilire un tale principio per le sottosoluzioni di sistemi debolmente accoppiati quasilineari di tipo parabolico.

Nel presente lavoro estenderemo, ai sistemi del tipo suddetto, un principio di massimo stabilito per una equazione quasi lineare parabolica da D. G. ARONSON e J. SERRIN [1].

1. - DEFINIZIONI E IPOTESI

Sia Ω un aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$, T un numero reale positivo e m un intero positivo.

Denoteremo con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un generico punto di $\mathbb{R}^n$ e con $Q(\tau_1, \tau_2)$, $0 < \tau_1, \tau_2 \leq T$, il cilindro $\Omega \times (\tau_1, \tau_2)$; $Q(\tau) = Q(0, \tau)$ e $Q = Q(T)$.

Con Γ la « frontiera parabolica » di Q, cioè

$$\Gamma = \{\Omega \times (t = 0)\} \cup \{\partial\Omega \times [0, T)\}.$$

Sia $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots u_m(x, t))$ una funzione vettoriale tale che per $h = 1, \dots, m$, risulti u_h dotato di derivate, nel senso delle distribuzioni, u_{h_x} e u_{h_t} e u_h, u_{h_x}, $u_{h_t} \in L^{2,\,loc}(Q)$.

Con u_{h_x} abbiamo denotato per brevità la generica componente del gradiente spaziale di u_h.

Diremo che $u(x, t)$ è una sottosoluzione del sistema.

$$u_{h_t} = \operatorname{div} A_h(x, t, u_h, u_{h_x}) + B_h(x, t, u, u_{h_x}) \qquad h = 1 \dots m \tag{1}$$

in Q, se per ogni $\Phi(x, t) = (\Phi_1(x, t), \dots, \Phi_m(x, t)) \in (C_0^\infty(Q))^m$, $\Phi \geq 0$, risulta

$$\int\int_Q \{\Phi_h u_{h_t} + \Phi_{h_x} \cdot A_h(x, t, u_h, u_{h_x})\}\, dx\, dt \leq \tag{2}$$

$$\leq \int\int_Q \Phi_h B_h(x, t, u, u_{h_x})\, dx\, dt \qquad h = 1 \dots m$$

con $A_h = (A_{h,1}, \dots, A_{h,m})$ funzione vettoriale di (x, t, u_h, u_{h_x}) e B_h funzione scalare di $(x, t, u_1, \dots, u_m, u_{h_x})$.

Rileviamo che la divergenza del vettore $A_h(x, t, u_h, u_{h_x})$ nella (1) è intesa rispetto alla variabile $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Inoltre, la richiesta che una sottosoluzione sia dotata anche di derivate rispetto a t non è essenziale. A tale proposito basta ragionare come in [1] pp. 119.

Supporremo che le funzioni $A_h(x, t, u_h, p_h)$ e $B_h(x, t, u, p_h)$ $(h = 1 \dots m)$ siano funzioni misurabili per $(x, t) \in Q$ e per tutti i valori rispettivamente di u_h, p_h e $u_1, \dots u_m$, p_h. Siano inoltre verificate le seguenti ipotesi:

$$\begin{cases} p_h \cdot A_h(x, t, u_h, p_h) \geq a_h |p_h|^2 - b_h^2 |u_h|^2 - f_h^2 \\ B_h(x, t, u, p_h) \leq c_h |p_h| + d_h \sum_k u_k + g_h \\ |A_h(x, t, u_h, p_h)| \leq \bar{a}_h |p_h| + e_h |u_h| + h_h \end{cases} \tag{3}$$

con a_h, $\bar{a}_h$ costanti positive e b_h, $c_h \dots h_h$ funzioni non negative di (x, t) appartenenti a $L^{p,q}(Q)$ con p, q numeri reali non negativi (eventual-

mente diversi da coefficiente a coefficiente) tali che

$$(4)\qquad \begin{aligned} &p > 2 \quad \text{e} \quad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad b_h,\ c_h,\ e_h,\ f_h,\ h_h \\ &p > 1 \quad \text{e} \quad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} < 1 \quad \text{per} \quad d_h,\ g_h. \end{aligned}$$

Si prova facilmente che esiste θ numero positivo tale che per ogni coppia (p, q) verificante la $(4)_1$ o la $(4)_2$ si ha rispettivamente

$$p \geq \frac{2}{1-\theta} \quad \text{e} \quad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1-\theta}{2}$$

$$p \geq \frac{1}{1-\theta} \quad \text{e} \quad \frac{n}{2p} + \frac{1}{q} \leq 1 - \theta.$$

Nel seguito denoteremo le norme delle funzioni $b_h, c_h, \ldots h_h$ nei loro spazi semplicemente con $\| b_h \|, \| c_h \|, \ldots \| h_h \|$.

2. - Preliminari

Enunciamo per comodità i seguenti lemmi che ci saranno utili in seguito.

Lemma 1. — *Sia w una funzione di (x, t) appartenente allo spazio $L^{2,\infty}(Q)$ dotata di derivate w_x, nel senso delle distribuzioni, appartenenti a $L^{2,2}(Q)$.*

Sia $|\Omega| = 1$ e w a supporto compatto in Ω come funzione di x.

Si ha allora che $w \in L^{2p',2q'}(Q)$ per tutte le coppie di esponenti (p', q') i cui esponenti coniugati (p, q) soddisfano

$$\frac{n}{2p} + \frac{1}{q} \leq 1 \ (< 1 \text{ se } n = 2)$$

e inoltre

$$\| w \|^2_{2p',2q'} \leq k\, T^{\theta} \left(\| w \|^2_{2,\infty} + \| w_x \|^2_{2,2} \right)$$

con $\theta = 1 + \frac{1}{q} - \frac{n}{2p}$ *e k costante dipendente solo da n.*

(Se $n = 2$ T^{θ} si sostituirà con $T^{\theta/2}$ e k dipenderà solo da θ).

Per la dimostrazione del precedente lemma cfr. [1] pp. 86.

Diamo ora la seguente definizione.

Se una funzione $w \in L^{2p',2q'}(Q)$ *per tutte le coppie* (p', q') *soddisfacenti le condizioni del lemma precedente allora diremo che* $w \in \mathcal{W}(Q)$.

Ragionando come in [1] si stabilisce facilmente il seguente lemma:

LEMMA 2. — *Se* w *è una funzione a supporto compatto in* Ω, w *dotata di derivate* w_x, w_t *e* w, w_x *e* $w_t \in L^{2,2}(Q)$ *allora* w *è in* $\mathcal{W}(Q)$.

3. - DISUGUAGLIANZE FONDAMENTALI

Sia $u = (u_1, \ldots u_m)$ una sottosoluzione del sistema (1).

Poiché, per ogni $h = 1 \ldots m$, u_h è dotata di derivate u_{h_t}, u_{h_x} in $L^{2,\mathrm{loc}}(Q)$, per il lemma 2 si ha che u_h è localmente nello spazio $\mathcal{W}(Q)$. Da ciò e dalle ipotesi sui coefficienti $b_h, \ldots h_h$ si ha che:

$A_h(x, t, u_h, u_{h_x})$ è localmente in $L^{2,2}(Q)$ e $B_h(x, t, u, u_{h_x})$ è localmente nel duale di $\mathcal{W}(Q)$.

Quindi se $u = u(x, t)$ è una sottosoluzione del sistema (1) la (2) è vera per ogni $\Phi = (\Phi_1 \ldots \Phi_m) \in (\mathcal{W}(Q))^m$ con Φ_h dotato di derivate Φ_{h_x}, Φ_h a supporto compatto in Q e $\Phi_h \geq 0$.

Costruiremo ora una opportuna $\Phi = (\Phi_1 \ldots \Phi_m)$ da sostituire nel sistema (2).

Per $h = 1 \ldots m$ poniamo

$$\bar{u}_h = \max(0, u_h) + k_h$$

con k_h costante positiva (o nulla se $f_h = g_h = h_h = 0$) e

$$\mathcal{G}_h(u_h) = \begin{cases} \bar{u}_h^{\beta} - k_h^{\beta} & -\infty < u_h < l - k_h \\ l^{\beta-1}\bar{u}_h - k_h^{\beta} & l - k_h \leq u_h < +\infty \end{cases}$$

con β fissato esponente ≥ 1 e $l > k_h$.

Sia $\eta = \eta(x, t)$ una funzione regolare, che si annulla in un intorno della frontiera parabolica Γ, non negativa, e $\chi(\cdot, \tau)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $(0, \tau)$ con τ fissato minore di T.

Considerata la funzione Φ_h così definita

$$\Phi_h = \eta^2 \mathcal{G}_h(u_h) \cdot \chi(t, \tau),$$

si ha che $\Phi_h \in \mathcal{W}(Q)$, Φ_h è dotata di derivate $\Phi_{h_x} \in L^{2,2}(Q)$, Φ_h è a supporto compatto e $\Phi_h \geq 0$.

Sostituendo quindi $\Phi = (\Phi_1, \dots \Phi_m)$ nella (2) e, maggiorando come in [1], si ha:

$$\text{I)} \qquad \frac{1}{\beta+1}\int_{\Omega} \eta^2 \{\bar{u}_h^{\beta+1} - (\beta+1)\, k_h^{\beta}\, \bar{u}_h + \beta\, k_h^{\beta+1}\}_{t=\tau}\, dx +$$

$$+ \frac{a_h\,\beta}{2}\int_{Q(\tau)}\int \eta^2\, \bar{u}_h^{\beta+1}\, |\bar{u}_{h_x}|^2\, dx\, dt \le \int_{Q(\tau)}\int \left\{ \mathfrak{F}_h\, \bar{u}_h^{\beta+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\beta+1}\,\eta\,|\eta_t|\,\bar{u}_h^{\beta+1} + d_h \sum_k u_k\, \eta^2 \cdot \bar{u}_h^{\beta} \right\} dx\, dt \qquad \text{per} \quad h = 1 \dots m$$

con $\mathfrak{F}_h = F_h\,\eta^2 + 2\,G_h\,\eta\,|\eta_x| + H_h\,|\eta_x|^2$

$$F_h = \beta\left(b_h^2 + \frac{f_h^2}{k_h^2}\right) + \frac{g_h}{k_h} + \frac{c_h^2}{a_h}$$

$$G_h = e_h + \frac{h_h}{k_h}, \quad H_h = 4\,\frac{\bar{a}_h^2}{a_h}.$$

Analogamente, se si pone $\Phi(x, t) = (\Phi_1, \dots \Phi_m)$,

$$\Phi_h = \eta^2\, \mathcal{G}_h(u_h) \cdot \chi(t, \tau_1, \tau_2)$$

ove $\chi(t, \tau_1, \tau_2)$ denota la funzione caratteristica dell'intervallo (τ_1, τ_2) $(0 < \tau_1, \tau_2 < T)$ si ha:

$$\text{II)} \qquad \frac{1}{\beta+1}\int_{\Omega} \eta^2 \{\bar{u}_h^{\beta+1} - (\beta+1)\, k_h^{\beta}\, \bar{u}_h + \beta\, k_h^{\beta+1}\}_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} +$$

$$+ \frac{a_h\,\beta}{2}\int_{Q(\tau_1,\tau_2)}\int \eta^2\, \bar{u}_h^{\beta-1}\, |\bar{u}_{h_x}|^2\, dx\, dt \le \int_{Q(\tau_1,\tau_2)}\int \left\{ \mathfrak{F}_h\, \bar{u}_h^{\beta+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\beta+1}\,\eta\,|\eta_t|\,\bar{u}_h^{\beta+1} + d_h \sum_k u_k\, \eta^2 \cdot \bar{u}_h^{\beta} \right\} dx\, dt \qquad \text{per} \quad h = 1 \dots m.$$

4. - Principio di massimo

Assegnata una $u = (u_1, \dots, u_m)$ sottosoluzione del sistema (1) diremo che è $u \le M$, con $M = (M_1, \dots M_m)$ nella frontiera parabolica Γ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno di Γ in cui risulta per ogni $h = 1 \dots m$

$$u_h \le M_h + \varepsilon$$

TEOREMA 1. — *Sia* $u = (u_1, \dots m_m)$ *una sottosoluzione del sistema* (1) *tale che*

$$u \leq \mathrm{M} \quad \text{in} \quad \Gamma$$

con $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_1, \dots \mathrm{M}_m)$.

Allora

$$\sum_h \operatorname*{supp\,ess}_Q u_h \leq \sum_h \mathrm{M}_h + \mathrm{C}' \left(\sum_h k_h'^2\right)^{1/2}$$

con C′ *costante positiva dipendente da* T, Ω, m *e dalla struttura del sistema e* $k_h' = \| f_h \| + \| g_h \| + \| b_h \| \cdot |\mathrm{M}_h| + \| d_h \| |\mathrm{M}|$.

Dim. — Come in [1] ci si può ricondurre al caso:

$$|\Omega| = \mathrm{T} = 1 \text{ e } \mathrm{M}_h < 0 \qquad h = 1 \dots m.$$

Proveremo che

$$\sum_h \operatorname*{sup\,ess}_Q \bar{u}_h^2 \leq \mathrm{C}_1 \sum_h \left(\| \tilde{u}_h \|_{2,\infty}^2 + \| \tilde{u}_{h_x} \|_{2,2}^2 + k_h^2 \right) \tag{5}$$

con $\tilde{u}_h = \max(0, u_h)$ e $k_h = \| f_h \| + \| g_h \|$.

La costante C_1 e quelle che in seguito compariranno dipendono solamente da $\| b_h \|, \dots \| d_h \|, a_h, n, \theta$ e m.

Posto $\bar{u}_h(x, t) = \max(0, u_h) + k_h$, dalla disuguaglianza fondamentale I) (in cui ora, si può sopprimere η, essendo $\mathcal{G}_h(u_h)$ nulla in un intorno di Γ) si ha:

$$\frac{1}{\beta + 1} \int_\Omega \{ \bar{u}_h^{\beta+1} - (\beta + 1)\, k_h^\beta\, \bar{u}_h + \beta\, k_h^{\beta+1} \}_{t=\tau} \, dx + \tag{6}$$

$$+ \frac{a_h \beta}{2} \int_{Q(\tau)} \int \bar{u}_h^{\beta-1} |\bar{u}_{h_x}|^2 \, dx \, dt \leq \int_{Q(\tau)} \int \{ \mathrm{F}_h \bar{u}_h^{\beta+1} + d_h \sum_h u_k \cdot \bar{u}_h^\beta \} \, dx \, dt$$

Trascurando il primo integrale nella (6) e sommando rispetto ad h, si ha (per $\tau \to 1$).

$$\sum_h \int_Q \int \bar{u}_h^{\beta-1} |\bar{u}_{h_x}|^2 \, dx \, dt \leq \tag{7}$$

$$\leq \frac{2}{\beta} \sum_h a_h^{-1} \int_Q \int \{ \mathrm{F}_h \bar{u}_h^{\beta+1} + d_h \sum_k u_k \cdot \bar{u}_h^\beta \} \, dx \, dt \, .$$

Posto $r = \dfrac{\beta + 1}{2}$ e $v_h = \bar{u}_h^r$ si ha: $| v_{h_x} |^2 = r^2 \bar{u}_h^{\beta - 1} | \bar{u}_{h_x} |^2$.

Introduciamo ora la norma

$$||| v_h ||| = \sup || v_h ||_{2p', 2q'}$$

ove il sup è calcolato rispetto alle coppie (p', q'), cui esponenti coniugati p, q soddisfano la relazione

$$\frac{n}{2p} + \frac{1}{q} \leq 1 - \theta \quad \text{e} \quad p \geq \frac{1}{1 - \theta} \tag{8}$$

ove θ è la costante introdotta nelle ipotesi.

Dalla disuguaglianza di Holder e dalle ipotesi (3) si ha:

$$\frac{1}{\beta} \sum_h a_h^{-1} \int_Q \int \{ F_h \bar{u}_h^{\beta+1} + d_h \sum_k u_k \cdot \bar{u}_h^{\beta} \} \, dx \, dt \leq \tag{9}$$

$$\leq \sum_h a_h^{-1} (|| b_h ||^2 + a_h^{-1} || c_h ||^2 + 1 + (n + 1) a_h \varepsilon) ||| v_h |||^2$$

con $\varepsilon = \sup_h \left[\dfrac{1}{a_h} (\sup_h || d_h ||) \right]$.

Dalla (7) e dalla (9) si ha

$$\sum_h || v_{h_x} ||_{2,2}^2 \leq 2 r^2 \sum_h a_h^{-1} C_{h,2} ||| v_h |||^2 \tag{10}$$

Stabilita questa disuguaglianza, ancora dalla (6), trascurando il secondo integrale e tenendo presente che per la disuguaglianza di Young si ha:

$$\bar{u}_h^{\beta+1} - (\beta + 1) k_h^{\beta} \bar{u}_h + \beta k_h^{\beta+1} \geq \frac{1}{2} \bar{u}_h^{\beta+1} - \beta k_h^{\beta+1}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2(\beta + 1)} \int_\Omega v_h^2 |_{t=\tau} \, dx \leq$$

$$\leq \int_Q \int \{ F_h \bar{u}_h^{\beta+1} + d_h \sum_k \tilde{u}_k \cdot \bar{u}_h^{\beta} \} \, dx \, dt + \frac{\beta}{\beta + 1} ||| v_h |||^2.$$

Poiché la relazione ora stabilita è vera per ogni $\tau \in (0, 1)$ passando al sup in $(0, 1)$ e sommando le m relazioni si ha

$$\sum_h \| v_h \|^2_{2,\infty} \leq \tag{11}$$

$$\leq 2(\beta + 1) \sum_h \int_Q \int \{ F_h \bar{u}_h^{\beta+1} + d_h \sum_k \tilde{u}_k \cdot \bar{u}_h^{\beta} \} \, dx \, dt + 2 \beta \sum_h |||v_h|||^2.$$

Dalla precedente grazie alla (9) si ha:

$$\sum_h \| v_h \|^2_{2,\infty} \leq r^2 \sum_h C_{h,3} |||v_h|||^2$$

ove $C_{h,3} = 8 C_{h,2} + 2$.

D'altra parte, posto

$$\sigma = 1 + \frac{2\theta}{n} \left(\text{se } n = 2, \quad \sigma = 1 + \frac{\theta}{2} \right),$$

per tutte le coppie (p', q') i cui esponenti coniugati soddisfano la (8) si ha che gli esponenti coniugati di $\sigma p'$, $\sigma q'$ soddisfano le condizioni del lemma 1.

Inoltre $v_h - k_h^r$ è a supporto compatto in Ω come funzione di x; applicando quindi il lemma 1 e tenendo presente che $k_h^r \leq v_h$ si ottiene

$$\| v_h^\sigma \|^{2/\sigma}_{2p', 2q'} \leq 2(k + 1) \{ \| v_h \|^2_{2,\infty} + \| v_{h_x} \|^2_{2,2} \}.$$

Sommando rispetto ad h, risulta:

$$\sum_h \| v_h^\sigma \|^{2/\sigma^{m+1}}_{2p', 2q'} \leq (2(k + 1) \sum_h \{ \| v_h \|^2_{2,\infty} + \| v_{h_x} \|^2_{2,2} \})^{\frac{1}{\sigma^m}}.$$

Dalle (10) e (11) e dalla precedente si ha:

$$\sum_h |||v_h^\sigma|||^{2/\sigma^{m+1}} \leq (r^2 \sum_h C_{h,4} |||v_h|||^2)^{\frac{1}{\sigma^m}} \tag{12}$$

ove $C_{h,4} = 2(k + 1)(2 a_h^{-1} C_{h,2} + C_{h,3})$.

Sia m tale che $r = \sigma^m$ e $\Phi_m = \sum_h |||v_h|||^{2/r}$.

Dalla (12) segue quindi

$$\Phi_{m+1} \leq \sigma^{2m\sigma - m} C_5^{\sigma - m} \Phi_m$$

e iterando la relazione ottenuta da m a zero, si ha che

$$\Phi_{m+1} \leq \sigma^{2\sum_{0}^{m} i\sigma - j} C_5^{\sum_{0}^{m} \sigma - j} \Phi_0 .$$

Facendo tendere m all'∞ si ha:

$$\sum_h \sup_Q \operatorname{ess} \bar{u}_h^2 \leq C_6 \Phi_0 = C_6 \sum_h \sup \| \bar{u}_h \|^2_{2p',2q'}$$

e grazie al lemma 1

$$\sum_h \sup_Q \operatorname{ess} \bar{u}_h^2 \leq C_6\, 2\,(k+1) \sum_h \{ \| \tilde{u}_h \|^2_{2,\infty} + \| \tilde{u}_{h_x} \|^2_{2,2} + k_h^2 \}.$$

Dalla precedente segue banalmente la (5) con $C_1 = (2k+1)\, C_6$.

Vogliamo ora maggiorare le norme al secondo membro della (5) con costanti che dipendono semplicemente dalla struttura del sistema. Denoteremo in quel che segue con $\| \cdot \|_{p,q,Q(\tau_1,\tau_2)}$ la norma in $L^{p,q}$ relativa alla sezione di Q, $Q(\tau_1, \tau_2)$.

Poniamo

$$\mu = \min_h \left\{ \frac{\min(a_h, 1)}{16\,(k+1)\, C_{h,2}} \right\}^{1/\theta} \left(\text{per } n = 2,\ \mu = \min_h \left\{ \frac{\min(a_h, 1)}{16\,(k+1)\, C_{h,2}} \right\}^{2/\theta} \right).$$

Sopprimendo $\eta(\mathcal{G}_h(u_h))$ è nulla in un intorno di Γ) nella disuguaglianza fondamentale II) e posto

$$\beta = 1,\ \tau_2 = \tau_1 + \mu, \qquad \text{per ogni } h = 1 \ldots m,$$

si ha

$$(13) \qquad \frac{1}{2} \int_\Omega \tilde{u}_h^2 \Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_1+\mu} dx + \frac{a_h}{2} \iint_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} |\tilde{u}_{h_x}|^2\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \iint_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} \{ F_h \bar{u}_h^2 + \sum_k \bar{u}_k\, d_h\, \bar{u}_h \}\, dx\, dt.$$

Denotato con $X_h(t)$, $\int_\Omega \tilde{u}_h^2\, dx$, trascurando il 1° addendo nella (13) si ha:

$$(14) \qquad \frac{a_h}{2} \iint_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} |\tilde{u}_{h_x}|^2\, dx\, dt \leq \iint_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} \{ F_h \bar{u}_h^2 + \sum_k \bar{u}_k\, d_h\, \bar{u}_h \}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} X_h(\tau_1) \qquad \text{per ogni } h = 1 \ldots m.$$

Sempre dalla disuguaglianza II) per $\beta = 1$, e $\tau_2 = \tau$ con $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1 + \mu$ si ha:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \tilde{u}_h^2 \Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau} dx + \frac{a_h}{2}\int\int_{Q(\tau_1,\tau)} |\tilde{u}_{h_x}|^2 \, dx \, dt \leq$$

$$\leq \int\int_{Q(\tau_1,\tau)} \{F_h \tilde{u}_h^2 + \sum_k \tilde{u}_k \, d_h \, \tilde{u}_h\} \, dx \, dt.$$

Dalla (14) e dalla precedente si ha:

$$(15) \qquad \frac{1}{2}\sum_h \sup_{(\tau_1,\tau_1+\mu)} X_h(t) + \sum_h \frac{a_h}{2}\int\int_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} |\tilde{u}_{h_x}|^2 \, dx \, dt \leq$$

$$\leq 2\sum_h \int\int_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} \{F_h \tilde{u}_h^2 + \sum_k \tilde{u}_k \, d_h \, \tilde{u}_h\} \, dx \, dt + \sum_h X_h(\tau_1).$$

Come per la (9) si ha:

$$\sum_h \int\int_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} \{F_h \tilde{u}_h^2 + d_h \, \tilde{u}_h \sum_k \tilde{u}_k\} \, dx \, dt \leq \sum_h C_{h,2} \, |||\, v_h \,|||^2_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)}$$

e applicando il lemma 1 segue:

$$(16) \qquad \sum_h \int\int_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} \{F_h \tilde{u}_h^2 + d_h \, \tilde{u}_h \sum_k \tilde{u}_k\} \, dx \, dt \leq$$

$$\leq 2\,(k+1)\,\mu^{\theta} \sum_h C_{h,2} \{\| \tilde{u}_h \|_{2,\infty,Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} + \| \tilde{u}_{h_x} \|^2_{2,2,Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} + k_h^2\}.$$

Dalle (15) e (16) si ha:

$$\frac{1}{2}\sum_h \sup_{(\tau_1,\tau_1+\mu)} X_h(t) + \sum_h \frac{a_h}{4}\int\int_{Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} |\tilde{u}_{h_x}|^2 \, dx \, dt \leq$$

$$\sum_h \frac{\min(a_{h,1})}{4} (\| \tilde{u}_h \|^2_{2,\infty,Q(\tau_1,\tau_1+\mu)} + k_h^2) + \sum_h X_h(\tau_1).$$

Trascurando il secondo addendo nella precedente si ha:

$$(17) \qquad \sum_h \sup_{(\tau_1,\tau_1+\mu)} X_h(t) \leq \sum_h k_h^2 + 4\sum_h X_h(\tau_1).$$

Iterando la relazione ora ottenuta si ha che: per ogni $t \in (0, 1)$

$$X_h(t) \leq (1 + 4 \ldots + 4^{1/\mu}) \sum_h k_h^2 \leq \frac{4^{1/\mu+1}}{3} \sum_h k_h^2$$

e quindi

$$\sum_h \| \tilde{u}_h \|_{2,\infty}^2 \leq n \frac{4^{1/\mu+1}}{3} \sum_h k_h^2 . \tag{18}$$

Dalle (14) e (16) si ha

$$\frac{3}{4} \int\int_{Q(\tau_1, \tau_1+\mu)} \sum_h |\tilde{u}_{h_x}|^2 \, dx \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \sum_h (\| \tilde{u}_h \|_{2,\infty,Q(\tau_1,\tau_1+\mu)}^2 + k_h^2) + \sum_h a_h^{-1} X_h(\tau_1).$$

Dalla precedente e dalla (17) si ha

$$\sum_h \| \tilde{u}_{h_x} \|_{2,2,Q(\tau_1,\tau_1+\mu)}^2 \leq \frac{2}{3} \sum_h k_h^2 + \frac{4}{3} \sum_h (1 + a_h^{-1}) X_h(\tau_1)$$

Iterando la relazione ora ottenuta si ha:

$$\sum_h \| \tilde{u}_{h_x} \|_{2,2}^2 \leq \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right) \left\{ \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \frac{4^{1/\mu+1}}{3} \sum_h (1 + a_h^{-1}) \right\} \sum_h k_h^2 \tag{19}$$

Dalle (5), (18) e (19) si ha la tesi:

$$\sum_h \sup \operatorname{ess} u_h(x, t) \leq C \left(\sum_h k_h^2 \right)^{1/2}. \tag{20}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] D. G. Aronson e J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear parabolic, equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 25 (1967), pp. 81-123.

[2] F. Mandras, *Principio di massimo debole per sottosoluzioni di sistemi lineari ellittici debolmente accoppiati*, Bollettino UMI (5) 13 A (1967), pp. 592-600.

[3] G. Porru, *Un principio di massimo per le sottosoluzioni deboli di sistemi parabolici del secondo ordine*, Rend. Sem. della Fac. di Scienze Cagliari XLVII, 3-4 (1977), pp. 317.324.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, C. Miranda e G. Cimmino.

Sui moti M.H.D. stazionari di una miscela binaria in uno strato obliquo poroso in presenza di effetto Hall e sulla loro stabilità *

Nota di MICHELE MAIELLARO ** e LIDIA PALESE **
presentata dal socio corrispondente SALVATORE RIONERO

(Adunanza del 3 novembre 1979)

SUNTO. — Si determinano i moti M.H.D. laminari stazionari di una miscela fluida binaria in uno strato obliquo poroso a pareti perfette conduttrici — in presenza di correnti di Hall — e se ne studia la stabilità non lineare in media rispetto a perturbazioni laminari.

ABSTRACT. — We determine the M.H.D. laminary steady flows of a binary mixture into a porous slant layer with a perfectly conducting walls — taking into account the Hall effect — and we study the non linear stability in the mean for a laminary perturbations.

INTRODUZIONE.

Tra i moti fluidi più facilmente osservabili fisicamente vi sono i moti stazionari laminari, possibili in uno strato piano S. Tali moti — ben noti e studiati sia nel caso idrodinamico che magnetoidrodinamico {v. bibl. [1]} — sono stati considerati da uno di noi [2] nel caso di una miscela fluida binaria non elettroconduttrice. Ivi è stato anche provato che essi sono asintoticamente stabili in media rispetto a perturbazioni laminari.

Nel presente lavoro riprendiamo il problema nel caso più generale di una miscela fluida elettroconduttrice — tenendo conto anche delle correnti di HALL [3] — e per strati obliqui porosi. In relazione alla natura fisica dei piani che delimitano lo strato, consideriamo la classe dei moti laminari regolari unidimensionali, nell'ipotesi che i suddetti piani siano entrambi perfetti conduttori, nei riguardi della temperatura, della concentrazione, e del campo magnetico.

* Lavoro eseguito nell'ambito della sezione n. 2 del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le Applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria del C.N.R.

** Istituto di Meccanica Razionale dell'Università, via Nicolai, 2, Bari 70121.

Precisamente, dopo aver formulato analiticamente il problema (n. 1), deduciamo (n. 2) il sistema differenziale e le condizioni al contorno per il caso stazionario e quindi determiniamo i moti stazionari della classe considerata.

Studiamo poi (n. 3) la stabilità non lineare in media di questi moti, rispetto a perturbazioni laminari, della stessa classe del moto imperturbato, che sono, fisicamente, le più facili ad insorgere, e determiniamo una condizione sufficiente per la stabilità asintotica esponenziale. Tale condizione è automaticamente soddisfatta sia nel caso di un fluido omogeneo in evoluzione isoterma in uno strato obliquo poroso, sia nel caso di una miscela elettroconduttrice in uno strato orizzontale poroso; risultato questo provato in [4], sotto condizioni al contorno diverse, per un fluido omogeneo elettroconduttore in uno strato orizzontale e in [2] per una miscela non elettroconduttrice in uno strato obliquo non poroso. Da tale condizione inoltre si deduce che, sia i campi magnetici stazionari della classe considerata — che sono anche non irrotazionali —, sia le correnti di Hall, non hanno alcun effetto sulla stabilità [5] [6].

1. - Formulazione matematica del problema.

Le equazioni che reggono i moti di una miscela fluida binaria termoelettroconduttrice, in presenza di effetto Hall, attraverso un mezzo poroso (quando si trascurano gli effetti Soret e Dufour [7]), come è noto, sono [7] [8]:

$$
(1)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} - \dfrac{\nu}{B}\mathbf{v} + \dfrac{K_D}{n\,B}\left\{-\operatorname{grad}\dfrac{p}{\rho_o} + \right. \\
\qquad\qquad \left. + \mathbf{g}\left[1 - \eta\,(T - T_o^*) + \alpha\,(C - C_o^*)\right]\right\} + \\
\qquad\qquad + \nu\,\Delta_2\,\mathbf{v} + \dfrac{\mu_e}{\rho_o}\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} \\
\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + \eta_e\,\Delta_2\,\mathbf{H} + \beta_H\operatorname{rot}(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}) \\
\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\sigma\,\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}T + K_T\,\Delta_2\,T \\
\dfrac{\partial C}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}C + K_C\,\Delta_2\,C \\
\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \\
\operatorname{div}\mathbf{H} = 0
\end{cases}
$$

dove **v**, **H**, T, C sono i campi cinetico, magnetico, termico e di concentrazione. Le costanti T_o^* e C_o^* sono temperatura e concentrazione di riferimento e le costanti positive ν, B, K_D, n, ρ_o, α, η, η_e, μ_e, β_H, indicano rispettivamente il coefficiente di viscosità, la conduttanza [7], la permeabilità direzionale, la porosità ($n \in]0, 1[$), la densità, il coefficiente di espansione della concentrazione, il coefficiente di dilatazione termica, la viscosità e la permeabilità magnetica, il coefficiente di Hall.

I parametri σ, K_T, K_C, sono definiti da

$$\sigma = \frac{n \rho_f c_f}{n \rho_f c_f + (1 - n) \rho_s c_s} \qquad K_T = \sigma E + D_h, \qquad K_c = D + D_d T^*$$

con ρ_f, c_f, ρ_s, c_s densità e calore specifico a pressione costante della miscela e della matrice porosa rispettivamente, e con E, D_h, D, D_d T^* coefficiente di dispersione, diffusività molecolare, coefficiente di dispersione meccanica e di diffusione molecolare [7].

Introdotto un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio fisico $\{0, \mathbf{e}_i\} = 0\, x_1\, x_2\, x_3$, indicheremo con $\alpha \left\{ \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$ l'angolo che $\mathbf{e}_3$ forma col versore della verticale positivamente ascendente. Supponiamo che la miscela sia immersa in un campo magnetico costante $\mathbf{H}_o = \sum_{i=1}^{3} H_{oi}\, \mathbf{e}_i$ ed occupi lo strato obliquo poroso S la cui frontiera Σ sia costituita dai piani rigidi π_o e π_d di equazioni $x_3 = o$ ed $x_3 = d$ ($d = \text{cost.} > 0$) e l'asse x_1 abbia direzione e verso delle rette di massima pendenza dei piani positivamente orientate verso il basso.

Indicato con $\tilde{h}$ il campo magnetico di induzione, consideriamo la classe seguente costituita dalle soluzioni regolari

$$(2) \quad \{\mathbf{v}(x_3, t),\ \mathbf{H}(x_3, t) = \mathbf{H}_o + \tilde{\mathbf{h}}(x_3, t),\ T(x_3, t),\ C(x_3, t),\ p(x_3, t)\}$$

delle (1) che verificano le seguenti condizioni al contorno [1] [9]:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathbf{v}(x_3, t) = \mathbf{0} \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{h}} \times \mathbf{n} = 0;\ \tilde{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ T = T_\Sigma(x_3, t) \\ C = C_\Sigma(x_3, t) \end{cases} \qquad (x_3, t) \in \Sigma \times [0, +\infty[$$

Nelle (3) T_Σ, C_Σ, sono preassegnate funzioni continue e limitate ed **n** è il versore della normale esterna ai piani che limitano lo strato. Dal punto di vista fisico la (3_1) è la classica condizione di aderenza del fluido alle pareti rigide — che si assumono fisse — dovuta alla

viscosità; mentre le (3_2) (3_3) (3_4) sono le classiche condizioni al contorno per superfici perfette conduttrici, per i campi magnetico, termico e di concentrazione, rispettivamente.

Cominciamo con l'osservare che per ogni moto appartenente alla classe considerata, dalle (1_5) (1_6) segue:

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0 \rightleftarrows v_3 = v_3(t),\ h_3 = h_3(t). \tag{4}$$

Per le condizioni al contorno (3_1) si ha quindi:

$$v_3 = 0; \tag{5}$$

inoltre la (1_2), proiettata sull'asse $0x_3$, implica $\dfrac{\partial H_3}{\partial t} = 0$, quindi, tenendo conto delle (4_2) e $(3_2)_2$, si ha:

$$H_3 = H_{03}\,. \tag{6}$$

Pertanto ogni elemento $(\mathbf{v}, \mathbf{H}, T, C, p)$ della classe considerata soddisfa le equazioni indefinite

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\nu}{B} v_1 + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\mu_e H_3}{\rho_0} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{K_D g}{n B} \operatorname{sen} \alpha \cdot \\
&\qquad \cdot [1 - \eta (T - T_0^*) + \alpha (C - C_0^*)] \\
&\frac{\partial v_2}{\partial t} = -\frac{\nu}{B} v_2 + \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\mu_e H_3}{\rho_0} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \\
&0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{K_D}{n B} \frac{\partial p}{\partial x_3} - \frac{K_D}{n B} g \cos \alpha \cdot [1 - \eta (T - T_0^*) + \\
&\qquad + \alpha (C - C_0^*)] - \frac{1}{2} \frac{\mu_e}{\rho_0} \frac{\partial (H^2)}{\partial x_3} \\
&\frac{\partial H_1}{\partial t} = H_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \eta_e \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_3^2} + \beta_H H_3 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3^2} \\
&\frac{\partial H_2}{\partial t} = H_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \eta_e \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3^2} - \beta_H H_3 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_3^2} \\
&\frac{\partial T}{\partial t} = K_T \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \\
&\frac{\partial C}{\partial t} = K_C \frac{\partial^2 C}{\partial x_3^2}
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

e le condizioni al contorno (3).

2. - Moti M.H.D. stazionari della miscela nello strato obliquo poroso a pareti perfette conduttrici.

Dalle (5) (6) (7) segue agevolmente che i moti stazionari della classe (2) devono verificare le equazioni:

$$
(8)\quad \begin{cases}
v_1'' - L_1^2 v_1 + L_2^2 v_2 = -(\varepsilon_1 x_3 + \varepsilon_0) D \operatorname{sen}\alpha - \dfrac{\mu_e H_3}{\rho_0 \nu} A_1 \\
v_2'' - L_2^2 v_1 - L_1^2 v_2 = -\dfrac{\mu_e H_3}{\rho_0 \nu} A_2 \\
H_1' = -L_3^2 v_1 + L_4^2 v_2 + A_1 \\
H_2' = -L_4^2 v_1 - L_3^2 v_2 + A_2 \\
\left(p + \dfrac{n B}{2 K_D} \mu_e H^2\right)' = -\rho_0 g (\varepsilon_1 x_3 + \varepsilon_0) \cos\alpha \\
T = a x_3 + b \\
C = c x_3 + d
\end{cases}
$$

ove gli apici indicano derivazione rispetto ad x_3.

Nelle (8), A_1, A_2, a, b, c, d, sono costanti arbitrarie, mentre le costanti D, ε_0, ε_1, L_1^2, L_2^2, L_3^2, L_4^2, sono date rispettivamente da:

$$
(9)\quad \begin{cases}
D = \dfrac{K_D g}{n B \nu}; \quad \varepsilon_0 = 1 - \eta (b - T_0^*) + \alpha (d - C_0^*); \quad \varepsilon_1 = \alpha c - \eta a \\
L_1^2 = \dfrac{1}{B} + \dfrac{\mu_e \eta_e H_3^2}{\rho_0 \nu (\eta_e^2 + \beta_H^2 H_3^2)}; \qquad L_2^2 = \dfrac{\mu_e \beta_H H_3^3}{\rho_0 \nu (\eta_e^2 + \beta_H^2 H_3^2)} \\
L_3^2 = \dfrac{\eta_e H_3}{\eta_e^2 + \beta_H^2 H_3^2}; \qquad L_4^2 = -\dfrac{\beta_H H_3^2}{\eta_e^2 + \beta_H^2 H_3^2}
\end{cases}
$$

Le condizioni al contorno poi, per le (3) (5) (6), diventano:

$$
(10)\quad \begin{cases}
v_1(0) = v_1(d) = v_2(0) = v_2(d) = 0 \\
[H_1']_{x_3 = 0,d} = [H_2']_{x_3 = 0,d} = 0 \\
T(0) = T_0 \qquad T(d) = T_d \\
C(0) = C_0 \qquad C(d) = C_d
\end{cases}
$$

ove

$$T_o = T_\Sigma(0); \qquad T_d = T_\Sigma(d); \qquad C_o = C_\Sigma(0); \qquad C_d = C_\Sigma(d).$$

Per le (10_1) e le (10_2), dalle (8_3) (8_4) segue immediatamente $A_1 = A_2 = 0$, e dalle (8) (9) (10) si ottengono poi agevolmente i seguenti moti stazionari:

$$(11)\quad \begin{cases} v_1 = [(c_1 \cos \omega x_3 + c_2 \operatorname{sen} \omega x_3) \operatorname{sen} h w x_3 + \\ \quad + (c_3 \cos \omega x_3 + c_4 \operatorname{sen} \omega x_3) \cos h w x_3 + \\ \quad + (\varepsilon_1 x_3 + \varepsilon_o) \cos \vartheta] \dfrac{D}{\rho} \operatorname{sen} \alpha \\ v_2 = [(- c_4 \cos \omega x_3 + c_3 \operatorname{sen} \omega x_3) \operatorname{sen} h w x_3 + \\ \quad + (- c_2 \cos \omega x_3 + c_1 \operatorname{sen} \omega x_3) \cos h w x_3 - \\ \quad - (\varepsilon_1 x_3 + \varepsilon_o) \operatorname{sen} \vartheta] \dfrac{D}{\rho} \operatorname{sen} \alpha \\ H_1 = \Big\{[(\Theta c_1 - \Gamma c_4) \operatorname{sen} \omega x_3 - (\Theta c_2 + \Gamma c_3) \cos \omega x_3] \operatorname{sen} h w x_3 + \\ \quad + [(\Theta c_3 - \Gamma c_2) \operatorname{sen} \omega x_3 - (\Theta c_4 + \Gamma c_1) \cos \omega x_3] \cos h w x_3 + \\ \quad - \left(\varepsilon_1 \dfrac{x_3^2}{2} + \varepsilon_o x_3\right) \rho (L_3^2 \cos \vartheta + L_4^2 \operatorname{sen} \vartheta)\Big\} \dfrac{D}{\rho^2} \operatorname{sen} \alpha + A_3 \\ H_2 = \Big\{[-(\Gamma c_1 + \Theta c_4) \operatorname{sen} \omega x_3 + (\Gamma c_2 - \Theta c_3) \cos \omega x_3] \operatorname{sen} h w x_3 + \\ \quad + [-(\Gamma c_3 + \Theta c_2) \operatorname{sen} \omega x_3 + (\Gamma c_4 - \Theta c_1) \cos \omega x_3] \cos h w x_3 + \\ \quad + \left(\varepsilon_1 \dfrac{x_3^2}{2} + \varepsilon_o x_3\right) \rho (L_3^2 \operatorname{sen} \vartheta - L_4^2 \cos \vartheta)\Big\} \dfrac{D}{\rho^2} \operatorname{sen} \alpha + A_4 \\ T = \dfrac{T_d - T_o}{d} x_3 + T_o \qquad C = \dfrac{C_d - C_o}{d} x_3 + C_o \end{cases}$$

ove

A_3 ed A_4 sono costanti arbitrarie;

$$\rho = \sqrt{L_1^4 + L_2^4}; \qquad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{L_2^2}{L_1^2} \; (\in \;]0, \pi/2[);$$

$$w = \sqrt{\rho} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2}\,; \qquad \omega = \sqrt{\rho} \cdot \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\,;$$

$$\Theta = w\,L_4^2 - \omega\,L_3^2\,; \quad \Gamma = \omega\,L_4^2 + w\,L_3^2$$

$$c_1 = \frac{1}{2(\cos^2\omega\,d\,\operatorname{sen}h^2 w\,d + \operatorname{sen}^2\omega\,d\,\cos h^2 w\,d}[\varepsilon_0(\cos\vartheta\,\operatorname{sen}h\,2\,w\,d +$$

$$- \operatorname{sen}\vartheta\,\operatorname{sen}2\,\omega\,d) - 2(\varepsilon_1 d + \varepsilon_0)(\cos\vartheta\,\cos\omega\,d\,\operatorname{sen}h\,w\,a +$$

$$- \operatorname{sen}\vartheta\,\operatorname{sen}\omega\,d\,\cos h\,w\,d)]$$

$$c_2 = -\varepsilon_0 \operatorname{sen}\vartheta$$

$$c_3 = -\varepsilon_0 \cos\vartheta$$

$$c_4 = \frac{1}{2(\cos^2\omega\,d\,\operatorname{sen}h^2 w\,d + \operatorname{sen}^2\omega\,d\,\cos h^2 w\,d}\,[\varepsilon_0(\cos\vartheta\,\operatorname{sen}2\,\omega\,d +$$

$$+ \operatorname{sen}\vartheta\,\operatorname{sen}h\,2\,w\,d) - 2(\varepsilon_1 d + \varepsilon_0)(\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\omega\,d\,\cos h\,w\,d +$$

$$+ \operatorname{sen}\vartheta\,\cos\omega\,d\,\operatorname{sen}h\,w\,d)]$$

La pressione si ottiene poi immediatamente dalla (8_5).

3. - Stabilità dei moti stazionari rispetto a perturbazioni laminari.

Poiché, com'è noto, la effettiva possibilità di realizzazione fisica dei moti stazionari determinati è legata alla loro stabilità, ci proponiamo di studiare la stabilità di tali moti, almeno nella classe delle perturbazioni laminari non lineari appartenenti alla stessa classe di questi moti.

Supponiamo che ad un dato istante iniziale ,insorga una perturbazione (regolare)

$$(12) \qquad \{\mathbf{u}(x_3, t); \quad \mathbf{h}(x_3, t); \quad \theta(x_3, t); \quad \gamma(x_3, t); \quad \Delta p(x_3, t)\}$$

sulle condizioni iniziali, ad uno dei moti stazionari (11). Poiché entrambi, il moto imperturbato ($\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, T, C, p) e il moto perturbato ($\mathbf{v} + \mathbf{u}$, $\mathbf{H} + \mathbf{h}$, $T + \vartheta$, $C + \gamma$, $p + \Delta p$) soddisfano il sistema (7) e le condizioni al contorno (10), segue agevolmente che la perturbazione

deve soddisfare il seguente sistema adimensionale [1]:

$$
(13)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mathrm{B}}\,u_1 + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \dfrac{\mathrm{D}_a}{n\,\mathrm{B}}\,\operatorname{sen}\alpha\,[-\vartheta\,\mathrm{R}_a + \gamma\,\mathrm{R}_c] + \\
\qquad + \tilde{\sigma}\,\mathrm{M}^2\,\dfrac{\partial h_1}{\partial x_3} \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mathrm{B}}\,u_2 + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \tilde{\sigma}\,\mathrm{M}^2\,\dfrac{\partial h_2}{\partial x_3} \\
0 = -\dfrac{\mathrm{D}_a}{n\,\mathrm{B}}\,\dfrac{\partial \Delta p}{\partial x_3} - \dfrac{\mathrm{D}_a}{n\,\mathrm{B}}\cos\alpha\,[-\vartheta\,\mathrm{R}_a + \gamma\,\mathrm{R}_c] + \\
\qquad - \dfrac{\tilde{\sigma}\,\mathrm{M}^2}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial x_3}(h^2 + 2\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{h}) \\
\dfrac{\partial h_1}{\partial t} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \tilde{\sigma}\,\dfrac{\partial^2 h_1}{\partial x_3^2} + \beta'\,\dfrac{\partial^2 h_2}{\partial x_3^2} \\
\dfrac{\partial h_2}{\partial t} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \tilde{\sigma}\,\dfrac{\partial^2 h_2}{\partial x_3^2} - \beta'\,\dfrac{\partial^2 h_1}{\partial x_3^2} \\
\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} = \dfrac{1}{\mathrm{P}_r}\,\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_3^2} \\
\dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = \dfrac{1}{\mathrm{S}_c}\,\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x_3^2} \\
u_3 = h_3 = 0
\end{cases}
$$

[1] L'adimensionalizzazione adottata è la seguente:

$$
x_3 = x_3^*\,d \qquad t = t^*\,\frac{d^2}{\nu} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}^*\,\frac{\nu}{d} \qquad \vartheta = \vartheta^*\,\frac{\nu\,\alpha_m\,d}{\mathrm{K_T}}
$$

$$
\gamma = \gamma^*\,\frac{\nu\,\beta_m\,d}{\mathrm{K_C}} \qquad p = p^*\,\frac{\rho_0\,\nu^2}{d^2} \qquad \mathbf{h} = \mathbf{h}^*\,\mathrm{H}_3
$$

con

$$
\alpha_m = \sup\,|\,\operatorname{grad}\mathrm{T}\,| = |\,a\,| \qquad \beta_m = \sup\,|\,\operatorname{grad}\mathrm{C}\,| = |\,c\,|
$$

Nelle (13) è stato omesso l'asterisco per semplicità ed inoltre nelle (13_1) - (13_2) - (13_3) si è indicata ancora con B la conduttanza adimensionale.

e le condizioni al contorno:

$$(14)\quad \begin{cases} u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial h_1}{\partial x_3}\right)_{x_3=0,1} = \left(\dfrac{\partial h_2}{\partial x_3}\right)_{x_3=0,1} = 0 \\ \vartheta(0,t) = \vartheta(1,t) = 0 \\ \gamma(0,t) = \gamma(1,t) = 0 \end{cases} \qquad \forall\, t \in [0, +\infty[$$

Nelle (13):

$$\mathrm{D}_a = \frac{\mathrm{K_D}}{d^2}; \quad \mathrm{R}_a = \frac{\eta\, g\, \alpha_m\, d^4}{\nu\, \mathrm{K_T}}; \quad \mathrm{R}_c = \frac{\alpha\, g\, \beta_m\, d^4}{\nu\, \mathrm{K}_c};$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{H}_3\, d \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho_0\, \nu\, \eta_e}}\ \mathrm{P}_r = \frac{\nu}{\mathrm{K_T}}; \quad \mathrm{S}_c = \frac{\nu}{\mathrm{K}_c}; \quad \beta' = \frac{\beta_{\mathrm{H}}\, \mathrm{H}_3}{\nu}$$

sono rispettivamente i numeri adimensionali di Darcy, di Raileigh, di Raileigh associato alla concentrazione di Hartmann, di Prandtl, di Schmidt e di Hall. Inoltre nelle $(13_1)\ldots(13_5)$ $\tilde{\sigma} = \eta_e/\nu$.

Considerata l'energia della perturbazione

$$(15)\qquad \mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\mathbf{u}^2 + \tilde{\sigma}\, \mathrm{M}^2\, \mathbf{h}^2 + \mathrm{P}_r\, \theta^2 + \mathrm{S}_c\, \gamma^2)\, dx_3$$

e moltiplicando le (13_j) $(j = 1, 2, 4, 5, 6, 7)$ per u_1, u_2, $\tilde{\sigma}\, \mathrm{M}^2\, h_1$, $\tilde{\sigma}\, \mathrm{M}^2\, h_2$, $\mathrm{P}_r\, \theta$, $\mathrm{S}_c\, \gamma$, rispettivamente, integrando e sommando, si ottiene

$$(16)\quad \frac{d\,\mathrm{E}}{d\,t} = \int_0^1 \Big[-\frac{1}{\mathrm{B}}\, u^2 + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial\, x_3^2} + \tilde{\sigma}^2\, \mathrm{M}^2\, \mathbf{h} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial\, x_3^2} +$$

$$+ \tilde{\sigma}\, \mathrm{M}^2\, \frac{\partial}{\partial\, x_3}\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{h} + \beta'\, \mathbf{h} \times \frac{\partial\, \mathbf{h}}{\partial\, x_3} \cdot \mathbf{e}_3\right) + \vartheta\, \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial\, x_3^2} + \gamma\, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial\, x_3^2} +$$

$$- \frac{\mathrm{D}_a}{n\, \mathrm{B}}\, (\mathrm{R}_a\, \vartheta - \mathrm{R}_c\, \gamma)\, u_1\, \mathrm{sen}\, \alpha \Big]\, d\, x_3\,.$$

Dalla (16), integrando per parti e tenendo conto delle (14), si ha:

$$(17)\qquad \frac{d\,\mathrm{E}}{d\,t} \leq -\int_0^1 \left[\frac{1}{\mathrm{B}}\,u^2 + \left(\frac{\partial\,\mathbf{u}}{\partial\,x_3}\right)^2 + \tilde{\sigma}^2\,\mathrm{M}^2\left(\frac{\partial\,\mathbf{h}}{\partial\,x_3}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\gamma}{\partial\,x_3}\right)^2 + \frac{\mathrm{D}_a}{n\,\mathrm{B}}\,(\mathrm{R}_a\,\vartheta - \mathrm{R}_c\,\gamma)\,u_1\,\mathrm{sen}\,\alpha\right] d\,x_3.$$

Introdotti i seguenti funzionali [9] [2]:

$$\mathrm{X}_1 = \left(\int_0^1 u^2\,d\,x_3\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \mathrm{X}_2 = \left(\int_0^1 h^2\,d\,x_3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{X}_3 = \left(\int_0^1 \vartheta^2\,d\,x_3\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \mathrm{X}_4 = \left(\int_0^1 \gamma^2\,d\,x_3\right)^{\frac{1}{2}}$$

per le disuguaglianze di Poincaré e Schwarz, dalla (17) si ottiene [2]:

$$(18)\qquad \frac{d\,\mathrm{E}}{d\,t} \leq -\left[\left(\frac{1}{\mathrm{B}} + \pi^2\right)\mathrm{X}_1^2 + \tilde{\sigma}^2\,\mathrm{M}^2\,\pi^2\,\mathrm{X}_2^2 + \pi^2\,\mathrm{X}_3^2 + \pi^2\,\mathrm{X}_4^2\right] +$$

$$+ \frac{\mathrm{D}_a}{n\,\mathrm{B}}\,(\mathrm{R}_a\,\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_3 + \mathrm{R}_c\,\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_4)\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Dalla (18) segue immediatamente la stabilità asintotica esponenziale in media sia nel caso di un fluido elettroconduttore omogeneo ed in evoluzione isoterma, anche in uno strato obliquo poroso comunque inclinato [2] [3], sia nel caso di una miscela elettroconduttrice, anche in uno strato orizzontale poroso [2] [3].

Inoltre, per il teorema dato in [10], posto

$$(19)\qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{D}_a}{2\,n}\sqrt{\frac{\mathrm{R}_a^2 + \mathrm{R}_c^2}{\mathrm{B}\,(1 + \mathrm{B}\,\pi^2)}},$$

la condizione

$$(20)\qquad \mathrm{K}\,\mathrm{sen}\,\alpha < \pi$$

— che rende definita negativa la forma quadratica a secondo membro della (18) — assicura la stabilità asintotica esponenziale in media dei moti stazionari (11) rispetto alle perturbazioni laminari considerate.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford, Clarendon Press, 1968.

[2] M. MAIELLARO, *Sulla stabilità non lineare in media dei moti alla Couette-Benard di una miscela fluida binaria*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **22**, 1973.

[3] G. MATTEI, *Sulla influenza dell'effetto Hall nella propagazione di onde magneto-fluidodinamiche in un fluido incomprimibile*, Ann. Mat., **84**, 1970.

[4] M. MAIELLARO, *Su due casi particolari di stabilità ansintotica esponenziale in media in magnetoidrodinamica*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **20** (1), 1971.

[5] S. RIONERO, *Sulla stabilità magnetofluidodinamica non lineare asintotica in media in presenza di effetto Hall*, Ricerche di Mat., **20** (2), 1971.

[6] M. MAIELLARO, *On the non linear asymptotic stability in the mean of the M.H.D. flows with Hall and ion-slip effects through porous medium*, IV Congr. A.I.M.E.T.A., Firenze, 1978.

[7] J. BEAR, *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier, New York, 1967.

[8] G. SUTTON - A. SHERMAN, *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill, 1965.

[9] S. RIONERO, *Sulla stabilità in media in magnetoidrodinamica*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, **133**, 1973.

[10] S. RIONERO, *The stability of continuous systems*, Meccanica, **10** (4), 1975.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci S. Rionero, C. Tolotti e F. Stoppelli.

Sui moti magnetoidrodinamici stazionari tra cilindri coassiali in presenza di correnti anisotrope e sulla loro stabilità *

Nota di MICHELE MAIELLARO ** e ALDO REDAELLI **
presentata dal socio corrispondente SALVATORE RIONERO

(Adunanza del 3 novembre 1979)

RIASSUNTO. — Si determinano due moti M.H.D. stazionari possibili tra due cilindri coassiali a pareti generiche conduttrici, in presenza di correnti di Hall e di ion-slip, e se ne studia la stabilità nella classe delle perturbazioni laminari non lineari.

ABSTRACT. — We determine two M.H.D. steady motions between two coaxial cylinders with generical conducting walls, taking into account the Hall and ion-slip currents, and we study the stability in the class of the non linear laminary perturbations.

1. - INTRODUZIONE

Nella dinamica dei fluidi elettroconduttori immersi in un campo magnetico, non è lecito trascurare il carattere anisotropo della elettroconducibilità, quando

$$\omega_e \tau \gg 1, \; f \simeq 1,$$

ove ω_e è la frequenza ciclotronica delle particelle cariche, τ è il tempo medio tra gli urti ed f la frazione di massa delle particelle neutre [1]; come accade ad es. per un gas debolmente ionizzato in un campo magnetico abbastanza intenso. Di tale anisotropia si tiene conto nella legge di Ohm generalizzata, che si assume nella forma [1], [2]:

$$\mathbf{j} + \mu_e \sigma_e \beta_H \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \mu_e \sigma_e \beta_I \mathbf{H} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = \sigma_e (\mathbf{E} + \mu_e \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \tag{1}$$

* Lavoro eseguito nell'ambito della sez. n. 2 del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le Applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria del C.N.R.
** Istituto di Meccanica Razionale dell'Università, via Nicolai, 2, Bari 70121.

tramite le correnti di Hall e ion-slip presenti nel secondo e terzo termine a primo membro della (1), in cui $\mathbf{j}$ è il vettore densità di corrente, $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ il campo elettromagnetico, $\mathbf{v}$ il campo cinetico, le costanti positive σ_e, μ_e, β_{II}, β_I sono rispettivamente la conducibilità elettrica, la permeabilità magnetica, ed i coefficienti di Hall e di ion-slip.

Mentre delle correnti di Hall si tiene conto in numerosi lavori (cfr. [2] ... [6] ed ampia bibliografia ivi contenuta), non altrettanto, per quanto è a nostra conoscenza, accade per l'effetto di ion-slip, del quale, ad es., si tiene conto in [7] ... [10].

Nel presente lavoro consideriamo un fluido conduttore elettroanisotropo immerso in un campo magnetico costante $\mathbf{H}_0$ e, dopo aver richiamato le equazioni indefinite del moto ed averle scritte in coordinate cilindriche (n. 2), determiniamo un moto stazionario del fluido tra due cilindri coassiali rotanti (n. 3) ed un moto stazionario del fluido tra due cilindri coassiali traslanti (n. 4), considerando il caso — fisicamente più significativo — in cui le pareti rigide che delimitano lo strato cilindrico siano generiche conduttrici.

Di tali moti — possibili solo in presenza di correnti di ion-slip — se ne studia poi la stabilità rispetto alle perturbazioni laminari che, fisicamente, sono le più facili ad insorgere.

2. - Formulazione analitica del problema

Nello schema dei continui non relativistici e nelle usuali ipotesi della M.F.D., le equazioni di evoluzione di un fluido elettroconduttore, nel caso incompressibile, si ottengono associando alla (1) le equazioni di Maxwell e di Navier-Stokes:

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_e \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu \Delta_2 \mathbf{v} + \dfrac{\mu_e}{\rho}\mathbf{j} \times \mathbf{H} \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \end{cases}$$

dove si è usato il sistema Giorgi, e dove p è la pressione, $\mathbf{g}$ l'accelerazione di gravità, e le costanti positive ρ, ν sono rispettivamente la densità e la viscosità cinematica.

Da (1) e (2), posto

$$\pi_1 = p/\rho - \mathcal{U}, \text{ con } \operatorname{grad}\mathcal{U} = \mathbf{g}$$

si ottiene il seguente sistema differenziale:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\,\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} - \operatorname{grad}\pi_1 + \nu\,\Delta_2\mathbf{v} + \dfrac{\mu_e}{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} \\ \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + \eta_e\,\Delta_2 H + \beta_H \operatorname{rot}(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}) + \\ \qquad\qquad + \beta_1 \operatorname{rot}[\mathbf{H}\times(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H})] \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

Proiettando le (3) secondo i versori $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$, della base ortonormale di un sistema di coordinate cilindriche associato ad uno dei riferimenti cartesiani ortogonali $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dello spazio fisico, con $\mathbf{e}_z \equiv \mathbf{k}$, e posto

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}) = F_r\,\mathbf{e}_r + F_\theta\,\mathbf{e}_\theta + F_z\,\mathbf{e}_z \\ \operatorname{rot}[\mathbf{H}\times(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H})] = G_r\,\mathbf{e}_r + G_\theta\,\mathbf{e}_\theta + G_z\,\mathbf{e}_z, \end{cases}$$

seguono le equazioni dei moti del fluido elettroanisotropo in coordinate cilindriche:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_r}{\partial t} = \dfrac{V_\theta^2}{r} - V_r\dfrac{\partial V_r}{\partial r} - \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_z\dfrac{\partial V_r}{\partial z} - \dfrac{\partial \pi}{\partial r} + \\ \qquad + \nu\left(\Delta_2 V_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{V_r}{r^2}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\mu_e}{\rho}\left(H_r\dfrac{\partial H_r}{\partial r} + \dfrac{H_\theta}{r}\dfrac{\partial H_r}{\partial \theta} + H_z\dfrac{\partial H_r}{\partial z} - \dfrac{H_\theta^2}{r}\right) \\ \dfrac{\partial V_\theta}{\partial t} = -V_r\dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} - \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_z\dfrac{\partial V_\theta}{\partial z} - \dfrac{V_r V_\theta}{r} - \\ \qquad - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \pi}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta_2 V_\theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} - \dfrac{V_\theta}{r^2}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\mu_e}{\rho}\left(H_r\dfrac{\partial H_\theta}{\partial r} + \dfrac{H_\theta}{r}\dfrac{\partial H_\theta}{\partial \theta} + H_z\dfrac{\partial H_\theta}{\partial z} + \dfrac{H_r H_\theta}{r}\right) \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial t} = -V_r\dfrac{\partial V_z}{\partial r} - \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_z}{\partial \theta} - V_z\dfrac{\partial V_z}{\partial z} - \dfrac{\partial \pi}{\partial z} + \\ \qquad + \nu\,\Delta_2 V_z + \dfrac{\mu_e}{\rho}\left(H_r\dfrac{\partial H_z}{\partial r} + \dfrac{H_\theta}{r}\dfrac{\partial H_z}{\partial \theta} + H_z\dfrac{\partial H_z}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$
(4)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial H_r}{\partial t} = H_r \dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{H_\theta}{r} \dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} + H_z \dfrac{\partial V_r}{\partial z} - V_r \dfrac{\partial H_r}{\partial r} - \\
\qquad - \dfrac{V_\theta}{r} \dfrac{\partial H_r}{\partial \theta} - V_z \dfrac{\partial H_r}{\partial z} + \\
\qquad + \eta_e \left(\Delta_2 H_r - \dfrac{2}{r^2} \dfrac{\partial H_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{H_r}{r^2} \right) + \beta_H F_r + \beta_I G_r \\
\dfrac{\partial H_\theta}{\partial t} = H_r \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} + \dfrac{H_\theta}{r} \dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + H_z \dfrac{\partial V_\theta}{\partial z} - V_r \dfrac{\partial H_\theta}{\partial r} - \\
\qquad - \dfrac{V_\theta}{r} \dfrac{\partial H_\theta}{\partial \theta} - V_z \dfrac{\partial H_\theta}{\partial z} - \dfrac{1}{r} (V_\theta H_r - V_r H_\theta) + \\
\qquad + \eta_e \left(\Delta_2 H_\theta + \dfrac{2}{r^2} \dfrac{\partial H_r}{\partial \theta} - \dfrac{H_\theta}{r^2} \right) + \beta_H F_\theta + \beta_I G_\theta \\
\dfrac{\partial H_z}{\partial t} = H_r \dfrac{\partial V_z}{\partial r} + \dfrac{H_\theta}{r} \dfrac{\partial V_z}{\partial \theta} + H_z \dfrac{\partial V_z}{\partial z} - V_r \dfrac{\partial H_z}{\partial r} - \\
\qquad - \dfrac{V_\theta}{r} \dfrac{\partial H_z}{\partial \theta} - V_z \dfrac{\partial H_z}{\partial z} + \eta_e \Delta_2 H_z + \beta_H F_z + \beta_I G_z \\
\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0
\end{cases}
$$

dove:

$$
\begin{cases}
\pi = \pi_1 + \dfrac{\mu_e}{2\rho} H^2 \\
\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \\
\operatorname{div} \mathbf{v} = \dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} + \dfrac{V_r}{r}
\end{cases}
$$

$$
F_r = \frac{1}{r} \Big[- \partial_\theta H_r \cdot \partial_r H_z - H_r \partial^2_{\theta r} H_z - \frac{1}{r} \partial_\theta H_\theta \cdot \partial_\theta H_z + \partial_\theta H_\theta \cdot \partial_z H_\theta -
$$

$$
- \frac{H_\theta}{r} \partial^2_{\theta\theta} H_z + H_\theta \partial^2_{\theta z} H_\theta - \partial_z H_z \cdot \partial_\theta H_z + r \partial_z H_z \cdot \partial_z H_\theta - H_z \partial^2_{z\theta} H_z +
$$

$$
+ r H_z \partial^2_{zz} H_\theta + \partial_z H_r \cdot \partial_r (r H_\theta) + H_r \partial^2_{zr} (r H_\theta) \Big]
$$

$$F_\theta = \frac{2\,H_\theta}{r}\,\partial_z H_\theta - \frac{1}{r}\,\partial_z H_\theta \cdot \partial_\theta H_r - \frac{H_\theta}{r}\,\partial^2_{z\theta} H_r - \partial_z H_z \cdot \partial_z H_r +$$
$$+ \partial_z H_z \cdot \partial_r H_z - H_z\,\partial^2_{zz} H_r + H_z\,\partial^2_{zr} H_z - \partial_r H_r \cdot \partial_z H_r +$$
$$+ \partial_r H_r \cdot \partial_r H_z - H_r\,\partial^2_{rz} H_r + H_r\,\partial^2_{rr} H_z + \frac{1}{r}\,\partial_r H_\theta \cdot \partial_\theta H_z +$$
$$+ \frac{H_r}{r}\,\partial^2_{r\theta} H_z - \frac{H_\theta}{r^2}\,\partial_\theta H_z$$

$$F_z = \frac{1}{r}\Big[- H_z\,\partial_z H_\theta - r\,\partial_r H_z \cdot \partial_z H_\theta - r\,H_z\,\partial^2_{rz} H_\theta - r\,\partial_r H_r \cdot \partial_r H_\theta -$$
$$- H_\theta\,\partial_r H_r - 2\,H_r\,\partial_r H_\theta - r\,H_r\,\partial^2_{rr} H_\theta + \partial_r H_r \cdot \partial_\theta H_r + H_r\,\partial^2_{r\theta} H_r -$$
$$- \partial_\theta H_\theta \cdot \partial_r H_\theta - \frac{2\,H_\theta}{r}\,\partial_\theta H_\theta - H_\theta\,\partial^2_{\theta r} H_\theta + \frac{1}{r}\,\partial_\theta H_\theta\,\partial_\theta H_r +$$
$$+ \frac{H_\theta}{r}\,\partial^2_{\theta\theta} H_r + \partial_\theta H_z \cdot \partial_z H_r + H_z\,\partial^2_{\theta z} H_r \Big]$$

$$G_r = \frac{H_r\,H_z}{r^2}\,\partial^2_{\theta\theta} H_z - \frac{H_r\,H_z}{r}\,\partial^2_{\theta z} H_\theta + \frac{H_r}{r^2}\,(\partial_\theta H_z)^2 - \frac{2\,H_r}{r}\,\partial_z H_\theta \cdot \partial_\theta H_z +$$
$$+ \frac{H_z}{r^2}\,\partial_\theta H_r \cdot \partial_\theta H_z + \frac{2\,H_\theta\,H_z}{r}\,\partial^2_{\theta z} H_r - \frac{H_\theta\,H_z}{r}\,\partial^2_{r\theta} H_z -$$
$$- H_\theta\,H_z\,\partial^2_{rz} H_\theta - \frac{2\,H_\theta\,H_z}{r}\,\partial_z H_\theta - \frac{H_\theta}{r}\,\partial_r H_z \cdot \partial_\theta H_z -$$
$$- \frac{2\,H_r}{r}\,\partial_\theta H_r \cdot \partial_r H_\theta - \frac{2\,H_\theta}{r}\,\partial_r H_\theta \cdot \partial_\theta H_\theta + \frac{2\,H_r}{r^2}\,(\partial_\theta H_r)^2 +$$
$$+ \frac{2\,H_\theta}{r^2}\,\partial_\theta H_r \cdot \partial_\theta H_\theta - \frac{2\,H_r\,H_\theta}{r^2}\,\partial_\theta H_r - \frac{3\,H_\theta^2}{r^2}\,\partial_\theta H_\theta -$$
$$- \frac{H_r^2}{r}\,\partial^2_{r\theta} H_\theta + \frac{H_r^2}{r^2}\,\partial^2_{\theta\theta} H_r - \frac{H_r^2}{r^2}\,\partial_\theta H_\theta - \frac{H_\theta^2}{r}\,\partial^2_{r\theta} H_\theta +$$
$$+ \frac{H_\theta^2}{r^2}\,\partial^2_{\theta\theta} H_r - \frac{H_r\,H_\theta}{r}\,\partial^2_{\theta z} H_z + H_r\,H_\theta\,\partial^2_{zz} H_\theta + H_r\,(\partial_z H_\theta)^2 +$$
$$+ H_\theta\,\partial_z H_r \cdot \partial_z H_\theta - H_\theta\,\partial_r H_\theta \cdot \partial_z H_z + \frac{H_\theta}{r}\,\partial_\theta H_r \cdot \partial_z H_z -$$
$$- \frac{H_\theta^2}{r}\,\partial_z H_z - H_z\,\partial_r H_\theta \cdot \partial_z H_\theta + 2\,H_r\,(\partial_z H_r)^2 + 2\,H_z\,\partial_z H_r \cdot \partial_z H_z -$$
$$- 2\,H_r\,\partial_z H_r \cdot \partial_r H_z - 2\,H_z\,\partial_r H_z \cdot \partial_z H_z + H_r^2\,\partial^2_{zz} H_r + H_z^2\,\partial^2_{zz} H_r -$$
$$- H_r^2\,\partial^2_{rz} H_z - H_z^2\,\partial^2_{rz} H_z + \frac{H_z}{r}\,\partial_z H_r \cdot \partial_\theta H_\theta - \frac{H_z}{r}\,\partial_\theta H_\theta \cdot \partial_r H_z$$

$$G_\theta = H_r\, H_\theta\, \partial^2_{zz} H_r - H_r H_\theta\, \partial^2_{rz} H_z + H_r\, \partial_z H_r \cdot \partial_z H_\theta + H_\theta (\partial_z H_r)^2 -$$

$$- 2 H_\theta\, \partial_z H_r \cdot \partial_r H_z - \frac{H_r H_z}{r} \partial^2_{\theta z} H_r + \frac{H_r H_z}{r} \partial_z H_\theta +$$

$$+ H_r\, \partial_r H_\theta \cdot \partial_z H_z - \frac{H_r}{r} \partial_\theta H_r \cdot \partial_z H_z + \frac{H_r H_\theta}{r} \partial_z H_z -$$

$$- \frac{H_z}{r} \partial_\theta H_r \cdot \partial_z H_r + \frac{H_\theta H_z}{r} \partial_z H_r - \frac{H^2_\theta}{r} \partial^2_{\theta z} H_z - \frac{H^2_z}{r} \partial^2_{\theta z} H_z +$$

$$+ H^2_\theta\, \partial^2_{zz} H_\theta + H^2_z\, \partial^2_{zz} H_\theta - \frac{2 H_\theta}{r} \partial_z H_\theta \cdot \partial_\theta H_z -$$

$$- \frac{2 H_z}{r} \partial_\theta H_z \cdot \partial_z H_z + 2 H_\theta (\partial_z H_\theta)^2 + 2 H_z\, \partial_z H_\theta \cdot \partial_z H_z -$$

$$- \frac{H_r H_z}{r} \partial^2_{r\theta} H_z + \frac{H_r H_z}{r^2} \partial_\theta H_z - \frac{H_r}{r} \partial_r H_z \cdot \partial_\theta H_z -$$

$$- \frac{H_z}{r} \partial_r H_r \cdot \partial_\theta H_z + H_z\, \partial_r H_r \cdot \partial_z H_\theta - H_\theta H_z\, \partial^2_{rz} H_r +$$

$$+ H_\theta\, H_z\, \partial^2_{rr} H_z + H_\theta (\partial_r H_z)^2 + H_z\, \partial_r H_\theta \cdot \partial_r H_z + H^2_r\, \partial^2_{rr} H_\theta -$$

$$- \frac{H^2_r}{r} \partial^2_{r\theta} H_r + \frac{H^2_r}{r^2} \partial_\theta H_r + \frac{H^2_r}{r} \partial_r H_\theta - \frac{H^2_r H_\theta}{r^2} + H^2_\theta\, \partial^2_{rr} H_\theta -$$

$$- \frac{H^2_\theta}{r} \partial_{r\theta} H_r + \frac{H^2_\theta}{r^2} \partial_\theta H_r + \frac{3 H^2_\theta}{r} \partial_r H_\theta - \frac{H^3_\theta}{r^2} + 2 H_r \partial_r H_r \cdot \partial_r H_\theta +$$

$$+ 2 H_\theta (\partial_r H_\theta)^2 - \frac{2 H_r}{r} \partial_r H_r \cdot \partial_\theta H_r - \frac{2 H_\theta}{r} \partial_\theta H_r \cdot \partial_r H_\theta +$$

$$+ \frac{2 H_r H_\theta}{r} \partial_r H_r$$

$$G_z = \frac{2 H_r H_\theta}{r} \partial^2_{r\theta} H_z + \frac{H_\theta}{r} \partial_r H_r \cdot \partial_\theta H_z - \frac{H_r H_\theta}{r^2} \partial_\theta H_z - H_r H_\theta \partial^2_{rz} H_\theta -$$

$$- H_r \partial_r H_\theta \cdot \partial_z H_\theta - H_\theta \partial_r H_r \cdot \partial_z H_\theta + H_\theta H_z\, \partial^2_{rr} H_\theta + H_\theta\, \partial_r H_z \cdot \partial_r H_\theta +$$

$$+ H_z (\partial_r H_\theta)^2 - \frac{H_\theta H_z}{r} \partial^2_{r\theta} H_r - \frac{2 H_z}{r} \partial_r H_\theta \cdot \partial_\theta H_r + \frac{H^2_\theta}{r} \partial_r H_z +$$

$$+ \frac{3 H_\theta H_z}{r} \partial_r H_\theta - H^2_r\, \partial^2_{rz} H_r - 2 H_r\, \partial_r H_r \cdot \partial_z H_r + H^2_r\, \partial^2_{rr} H_z +$$

$$+ 2 H_r \partial_r H_r \cdot \partial_r H_z - H_z^2 \partial^2_{rz} H_r - 2 H_z \partial_r H_z \cdot \partial_z H_r + H_z^2 \partial_{rr} H_z +$$

$$+ 2 H_z (\partial_r H_z)^2 - \frac{H_r H_\theta}{r} \partial^2_{\theta z} H_r - \frac{H_r}{r} \partial_\theta H_\theta \cdot \partial_z H_r -$$

$$- \frac{H_\theta}{r} \partial_\theta H_r \cdot \partial_z H_r + \frac{H_r}{r} \partial_\theta H_\theta \cdot \partial_r H_z - \frac{H_r H_z}{r} \partial^2_{\theta r} H_\theta +$$

$$+ \frac{H_r H_z}{r^2} \partial^2_{\theta\theta} H_r + \frac{H_r}{r^2} \partial_\theta H_z \cdot \partial_\theta H_r + \frac{H_z}{r^2} (\partial_\theta H_r)^2 -$$

$$- \frac{H_r H_z}{r^2} \partial_\theta H_\theta + \frac{H_\theta^2}{r^2} \partial^2_{\theta\theta} H_z + \frac{2 H_\theta}{r^2} \partial_\theta H_\theta \cdot \partial_\theta H_z - \frac{H_\theta^2}{r} \partial^2_{\theta z} H_\theta -$$

$$- \frac{2 H_\theta}{r} \partial_\theta H_\theta \cdot \partial_z H_\theta + \frac{H_z^2}{r^2} \partial^2_{\theta\theta} H_z + \frac{2 H_z}{r^2} (\partial_\theta H_z)^2 - \frac{H_z^2}{r} \partial^2_{\theta z} H_\theta -$$

$$- \frac{2 H_z}{r} \partial_\theta H_z \cdot \partial_z H_\theta - \frac{H_r H_\theta}{r} \partial_z H_\theta - \frac{H_\theta H_z}{r^2} \partial_\theta H_r - \frac{H_r^2}{r} \partial_z H_r +$$

$$+ \frac{H_r^2}{r} \partial_r H_z - \frac{H_z^2}{r} \partial_z H_r + \frac{H_z^2}{r} \partial_r H_z.$$

Alle (4) vanno aggiunte, naturalmente, le condizioni iniziali ed al contorno. Noi, nel seguito, andando alla ricerca di moti stazionari, dovremo tenere conto delle sole condizioni al contorno.

Indicato con Ω il campo di moto e con $\Sigma = \partial \Omega$ il suo contorno, nella ipotesi che Σ sia rigido, la viscosità impone la classica condizione di aderenza per la velocità:

$$\mathbf{v}(P, t) = \mathbf{v}_\Sigma(P, t) \qquad P \in \Sigma \tag{5}$$

con $\mathbf{v}_\Sigma$ assegnata velocità del contorno.

Per quanto riguarda poi le condizioni al contorno per il campo magnetico, la ipotesi di un contorno generico conduttore — che è il caso generale e fisicamente più significativo — impone la classica condizione di continuità per la componente tangenziale del campo magnetico

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^{(\Sigma)} \qquad P \in \Sigma \tag{6}$$

con $\mathbf{H}^{(\Sigma)}$ preassegnata.

In tutto il lavoro supporremo che il fluido occupi lo strato Ω compreso tra due superfici cilindriche coassiali Σ_1 e Σ_2, di raggi R_1 e R_2 ($> R_1 > 0$), con asse a parallelo ad $\mathbf{e}_z$, e sia immerso in un campo magnetico uniforme $\mathbf{H}_o = H_o \mathbf{e}_z$. Scelto $0 \in a$, posto $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ed $\mathbf{H} = \mathbf{H}_o + \mathbf{h}$ — con $\mathbf{h}$ campo magnetico di induzione (a componente non costante su $\mathbf{e}_z$) — ricercheremo moti stazionari, considerando le seguenti situazioni fisiche:

I) Σ_1 e Σ_2 ruotano uniformemente intorno ad a con velocità angolari $\Omega_1 \mathbf{e}_z$ ed $\Omega_2 \mathbf{e}_z$ rispettivamente;

II) Σ_1 fissa e Σ_2 trasla uniformemente lungo l'asse a con velocità V.

Associeremo pertanto alle (4) — come segue da (5) — le condizioni al contorno per il campo cinetico:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \mathbf{v}(P) = \Omega_1 R_1 \mathbf{e}_\theta, & P \in \Sigma_1 \\ \mathbf{v}(P) = \Omega_2 R_2 \mathbf{e}_\theta, & P \in \Sigma_2 \end{cases} \qquad \text{(cilindri rotanti)}$$

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \mathbf{v}(P) = \mathbf{0}, & P \in \Sigma_1 \\ \mathbf{v}(P) = V \mathbf{e}_z, & P \in \Sigma_2 \end{cases} \qquad \text{(cilindri traslanti)}$$

e la condizione al contorno (6) per il campo magnetico.

3. - Moti M.H.D. stazionari tra cilindri rotanti in presenza di correnti di Hall e di ion-slip

Nel presente numero considereremo il caso di cilindri rotanti ricercando soluzioni stazionarie del tipo

$$\text{(9)} \qquad \mathbf{v} = V_\theta(r, \theta)\, \mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{H} = h_r(r)\, \mathbf{e}_r + [H_o + h_z(r)]\, \mathbf{e}_z, \qquad \pi_1 = \pi_1(r).$$

Da $(4_{7,1})$, $(4_{7,2})$, (9_1), (9_2), segue:

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0, \qquad h_r = \frac{A}{r},$$

con A costante arbitraria.

Pertanto da (4) (9) e (10) si ottiene:

$$(11)\qquad \begin{cases} \pi_1' = \dfrac{V_\theta^2}{r} - \dfrac{\mu_e}{\rho}(H_0 + h_z)\, h_z' \\ \nu\left(V_\theta'' + \dfrac{V_\theta'}{r} - \dfrac{V_\theta}{r^2}\right) = 0 \\ \dfrac{\mu_e A}{\rho r} h_z' = 0 \\ A\left[\dfrac{V_\theta'}{r} - \dfrac{V_\theta}{r^2} + \beta_H \left(\dfrac{h_z'}{r}\right)'\right] = 0 \\ \eta_e (r h_z')' + \beta_1 \left[\dfrac{A^2}{r} h_z' + (H_0 + h_z)^2 r h_z'\right]' = 0, \end{cases}$$

ove l'apice indica derivazione rispetto ad r.

Si verifica agevolmente che, solo se $A = 0$, sono possibili moti stazionari dovuti alla presenza delle correnti di Hall e di ion-slip. Infatti le correnti suddette influiscono sul moto solo se $h_z' \neq 0$ e ciò, stante la (11_3), è possibile solo per $A = 0$ [1].

Alle (11) vanno poi aggiunte le condizioni al contorno sul campo cinetico che, per le (7) risultano:

$$(12)\qquad V_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1, \qquad V_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2,$$

e le condizioni al contorno per il campo magnetico che, per la condizione (6), risultano:

$$(13)\qquad h_z(R_1) = h_1; \qquad h_z(R_2) = h_2$$

con [2]

$$(14)\qquad h_1 = -H_\theta^{(\Sigma)}(R_1) - H_0; \qquad h_2 = H_\theta^{(\Sigma)}(R_2) - H_0$$

[1] Si noti che, nel caso $A \neq 0$, stante $(11_2), \ldots, (11_5)$, si hanno i moti stazionari (rigidi)

$$\mathbf{v} = \Omega_1 r\, \mathbf{e}_\theta; \quad \mathbf{H} = \frac{A}{r}\, \mathbf{e}_r + (H_0 + h_1)\, \mathbf{e}_z$$

a patto che $\Omega_1 = \Omega_2$ ed $h_1 = h_2$ (cfr. le condizioni al contorno (12) e (13)).

[2] Infatti, posto $\mathbf{H}^{(\Sigma)} = H_r^{(\Sigma)} \mathbf{e}_r + H_\theta^{(\Sigma)} \mathbf{e}_\theta + H_z^{(\Sigma)} \mathbf{e}_z$, da (6) — su Σ_2, ove $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, — si ha: $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = [H_0 + h_z(R_2)]\, \mathbf{e}_\theta$, da cui segue la (14_2).

In maniera analoga si procede su Σ_1 ove $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$.

Per A = 0 il sistema (11) diventa:

$$(15)\qquad \begin{cases} \pi_1' = \dfrac{V_\theta^2}{r} - \dfrac{\mu_e}{\rho}(H_o + h_z)\, h_z' \\ \nu\left(V_\theta'' + \dfrac{V_\theta'}{r} - \dfrac{V_\theta}{r^2}\right) = 0 \\ \eta_e (r\, h_z')' + \beta_1 [(H_o + h_z)^2\, r\, h_z']' = 0 \end{cases}$$

Da (15_2) si ha

$$(16)\qquad V_\theta = a_3\, r + \frac{a_4}{r}$$

ed indicata con H la componente del campo magnetico totale **H** secondo $\mathbf{e}_z$, la (15_3) implica:

$$(17)\qquad \beta_1 H^3 + 3\,\eta_e H - a_5 \lg r + a_6 = 0,$$

con $a_3 \ldots, a_6$ costanti arbitrarie che devono verificare poi le relazioni provenienti dalle condizioni al contorno.

Da (12) (13) (14) (16) (17), posto

$$(18)\qquad f(r) = a_5 \lg r - a_6,$$

si ottiene il seguente moto stazionario:

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathbf{v} = \left(\dfrac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\, r + \dfrac{\Omega_1 - \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \dfrac{R_1^2 R_2^2}{r}\right) \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{H} = \left\{ \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\beta_1}\left[f(r) + \sqrt{f^2(r) + \dfrac{4\,\eta_e^3}{\beta_1}}\right]} + \right. \\ \qquad \left. + \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\beta_1}\left[f(r) - \sqrt{f^2(r) + \dfrac{4\,\eta_e^3}{\beta_1}}\right]} \right\} \mathbf{e}_z \end{cases}$$

ove, posto:

$$(20)\qquad A_i = \beta_1 (H_o + h_i)^3 + 3\,\eta_e (H_o + h_i), \quad (i = 1, 2)$$

le condizioni al contorno (13) determinano univocamente a_5 ed a_6, e precisamente, dalla (17) sul contorno, si ha:

$$(21) \qquad a_5 = -\frac{A_2 - A_1}{\lg R_2 - \lg R_1}, \qquad a_6 = \frac{A_2 \lg R_1 - A_1 \lg R_2}{\lg R_2 - \lg R_1} .$$

La pressione π_1 si ottiene poi immediatamente dalla (15_1).

4. - Moti M.H.D. stazionari tra cilindri traslanti in presenza di correnti di Hall e di ion-slip

Per il caso dei cilindri traslanti, ricerchiamo soluzioni del tipo:

$$(22) \qquad \mathbf{v} = V_z(r)\,\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{H} = \frac{A}{r}\,\mathbf{e}_r + [\mathbf{H}_0 + h_z(r)]\,\mathbf{e}_z, \qquad \pi_1 = \pi_1(r),$$

tenuto conto di $(4_{7,1})$, $(4_{7,2})$, e con A costante arbitraria.

I moti stazionari del tipo (22), tenuto conto delle (4), devono verificare le seguenti equazioni:

$$(23) \qquad \begin{cases} \pi_1' = -\dfrac{\mu_e}{\rho}(H_0 + h_z)\,h_z' \\ \dfrac{\mu_e A}{\rho r}\,h_z' + \dfrac{\nu}{r}(r\,V_z')' = 0 \\ A\,\beta_H \left(\dfrac{h_z'}{r}\right) = 0 \\ A\,V_z' + \eta_e\,(r\,h_z')' + \beta_1 \left[\dfrac{A^2 h_z'}{r} + (H_0 + h_z)^2\, r\, h_z'\right]' = 0 \end{cases}$$

sotto le condizioni al contorno:

$$(24) \qquad V_z(R_1) = 0, \qquad V_z(R_2) = V$$

per il campo cinetico, e sotto le condizioni al contorno (13) per il campo magnetico.

Anche ora si verifica agevolmente che solo se $A = 0$ sono possibili moti stazionari dovuti alla presenza di correnti di Hall e di ion-slip.

Infatti le correnti suddette influiscono sul moto solo se $h_z' \neq 0$, e ciò, stante la (23_3) è possibile solo per $A = 0$ [3].

Nel caso $A = 0$ il sistema (23) diventa:

$$(25) \qquad \begin{cases} \pi_1' = -\dfrac{\mu_e}{\rho}(H_0 + h_z)\, h_z' \\ \dfrac{\nu}{r}(r\, V_z')' = 0 \\ \eta_e\,(r\, h_z')' + \beta_1\,[(H_0 + h_z)^2\, r\, h_z']' = 0. \end{cases}$$

Poiché da (25_2) si ha $V_z = c_5 \lg r + c_6$, per le (24), segue:

$$(26) \qquad V_z = \frac{\lg r - \lg R_1}{\lg R_2 - \lg R_1}\, V.$$

Inoltre la (25_3) coincide esattamente con la (15_3) del caso rotante, pertanto, in questo caso traslante, si ha il moto stazionario (26) (19_2) (18) (20) (21).

La pressione π_1 segue poi dalla (25_1).

5. - Stabilità del moto stazionario tra cilindri rotanti rispetto a perturbazioni laminari

Poiché i moti si realizzano effettivamente e persistono solo se sono stabili, nel presente numero ci proponiamo di studiare la stabilità del moto stazionario (19), del tipo:

$$(27) \qquad \mathbf{v} = V_\theta(r)\, \mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{H} = H_z(r)\, \mathbf{e}_z.$$

[3] Si noti che, per $A \neq 0$, la (23_3) implica

$$(*) \qquad h_z = c_1 r^2 + c_2,$$

onde da (23_2) segue:

$$(**) \qquad V_z = -\frac{\mu_e A c_1}{2\rho\nu}\, r^2 - \left(\frac{\mu_e A c_2}{\rho\nu} - \frac{c_3}{\nu}\right) \lg r + c_4,$$

con le c_i costanti arbitrarie che devono verificare poi la condizione proveniente dalla (23_4) e quelle provenienti dalle condizioni al contorno (13), (24). Sostituendo (*) e (**) in (23_4), per il principio d'identità dei polinomi, si ha $h_z = c_2$, $V_z = c_4$, quindi, stanti le condizioni al contorno (24) sul campo cinctico, esiste un moto stazionario solo se $V = 0$ ed esso pertanto è la quiete.

Data però la mole del sistema (4), nel presente lavoro ci limiteremo ad esaminare se il moto (19) è stabile in media, almeno rispetto alle perturbazioni laminari non lineari:

$$(28) \qquad \mathbf{u} = u_\theta(r,t)\,\mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{k} = k_z(r,t)\,\mathbf{e}_z, \qquad \Delta\pi_1(r,t)$$

che, fisicamente, sono tra le più facili ad insorgere, per le imperfezioni, sempre esistenti, dei meccanismi che realizzano il moto dei cilindri.

Segue agevolmente che la generica perturbazione (28), sulle condizioni iniziali, ad un moto stazionario del tipo (27) deve verificare le equazioni adimensionali [4]:

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta\pi_1)}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\,u_\theta(u_\theta + 2\,V_\theta) - \dfrac{1}{2}\,\sigma\,M^2\,\dfrac{\partial}{\partial r}\,[k_z(k_z + 2\,h_z + 2)] \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}(r\,u_\theta)\right] \\ \dfrac{\partial k_z}{\partial t} = \sigma\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial k_z}{\partial r}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\sigma\,R_m^{(1)}}{3\,r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{r\,\dfrac{\partial}{\partial r}\,[(k_z + h_z + 1)^3 - (h_z + 1)^3]\right\} \end{cases}$$

e le condizioni al contorno

$$(30) \qquad [u_\theta(r,t);\ k_z(r,t)]_{\substack{r=1\\ r=R}} = 0, \qquad \forall\, t \in [0, \infty[$$

ove $r \in [1, R]$, con $R = R_2/R_1$.

[4] L'adimensionalizzazione adoperata è la seguente:

$$r = R_1 r^*, \quad t = \frac{R_1^2}{\nu}\,t^*, \quad \mathbf{v} = \frac{\nu}{R_1}\,\mathbf{v}^*, \quad \mathbf{H} = H_0\,\mathbf{H}^*, \quad \pi_1 = \frac{\nu^2}{R_1^2}\,\pi_1^*,$$

è stato omesso l'asterisco nelle (29), ove

$$M = H_0 R_1 \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho\,\nu\,\eta_e}}, \qquad R_m^{(1)} = \frac{\beta_1 H_0^2}{\eta_e}$$

sono rispettivamente i numeri adimensionali di Hartmann e di Reynolds magnetico per le correnti di ion-slip; inoltre $\sigma = \eta_e/\nu$.

Prenderemo come misura della perturbazione « l'energia » su una generica sezione normale S dello strato cilindrico:

$$(31) \qquad E(t) = \frac{1}{4\pi}\int_S (u_\theta^2 + k_z^2)\, dS = \frac{1}{2}\int_1^R r\,(u_\theta^2 + k_z^2)\, dr$$

Posto

$$E_1 = \frac{1}{4\pi}\int_S u_\theta^2\, dS; \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi}\int_S k_z^2\, dS,$$

risulta

$$E = E_1 + E_2.$$

Ora — poiché le quazioni che reggono u_θ e k_z sono disgiunte — conviene trattare separatamente l'andamento di E_1 e di E_2. Per quanto riguarda E_1, si vede subito che essa tende asintoticamente ed esponenzialmente a zero.

Infatti dalla (29_2) — moltiplicando ambo i membri per $r\,u_\theta$ ed integrando, tenendo conto delle (30_1), si ha:

$$\frac{dE_1}{dt} = -\int_1^R \left[\left(\frac{u_\theta^2}{r}\right) + r\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2\right] dr,$$

da cui

$$\frac{dE_1}{dt} \leq -\frac{2}{R^2}E_1 \Rightarrow E_1 \leq E_1(0)\, e^{-\frac{2}{R^2}t}.$$

La stabilità in media pertanto è retta dal solo andamento di E_2.

Da (29_3), moltiplicando per $r\,k_z$ ed integrando, segue:

$$(32) \quad \frac{dE_2}{dt} = \int_1^R \left\{r\,u_\theta \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_\theta)\right] + \sigma\, k_z \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial k_z}{\partial r}\right)\right\} dr +$$

$$+ \frac{1}{3}\sigma R_m^{(1)} \int_1^R \left(k_z \frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[(h_z + k_z + 1)^3 - (h_z + 1)^3\right]\right\}\right) dr.$$

Dalla (32), integrando per parti e tenendo conto delle (30_2) si ha:

$$(33)\quad \frac{d\,E_2}{d\,t} = -\sigma \int_1^R r\,[1 + R_m^{(I)}\,(h_z + k_z + 1)^2] \left(\frac{\partial\,k_z}{\partial\,r}\right)^2 d\,r + $$

$$- \sigma\,R_m^{(I)} \int_1^R r\,h_z'\,(k_z + 2\,h_z + 2)\,k_z \frac{\partial\,k_z}{\partial\,r}\,d\,r$$

Posto

$$(34)\quad m_1 = \inf_{r\in[1,R]} |\,h_z + 1\,|;\ m_2 = \sup_{r\in[1,R]} |\,h_z + 1\,|;\ m_3 = \sup_{r\in[1,R]} |\,h_z'\,|$$

ed introdotti i seguenti funzionali:

$$(35)\quad X_1^2 = \int_1^R r\,k_z^2\,d\,r;\qquad X_2^2 = \int_1^R r \left(\frac{\partial\,k_z}{\partial\,r}\right)^2 d\,r;$$

$$X_3^2 = \int_1^R r \left(k_z \frac{\partial\,k_z}{\partial\,r}\right)^2 d\,r;$$

dalle (33), (34), (35), usando classiche diseguaglianze integrali, segue:

$$(36)\quad \frac{d\,E_2}{d\,t} \leq -\frac{\sigma\,R_m^{(I)}\,\pi^2\,m_1^2}{4\,R^2}\,X_1^2 - \sigma\,X_2^2 - \sigma\,R_m^{(I)}\,X_3^2 +$$

$$+ 2\,\sigma\,R_m^{(I)}\,m_2\,m_3\,X_1\,X_2 + \sigma\,R_m^{(I)}\,m_3\,X_1\,X_3 + 2\,\sigma\,R_m^{(I)}\,m_2\,X_2\,X_3.$$

Pertanto, stante il teorema dato in [12], la condizione

$$(37)\quad \left(\frac{m_3}{m_1}\right)^2 R^2\,(1 + 8\,m_2^2\,R_m^{(I)}) + \pi^2\,m_2^2\,R_m^{(I)} < \pi^2$$

assicura la stabilità asintotica esponenziale in media del moto stazionario (19) rispetto alle perturbazioni laminari del tipo (28), in tutti i casi in cui — per il campo magnetico (19_2) — risulta $m_1 > 0$ [5].

[5] Si verifica agevolmente che per il campo magnetico (19_2) del moto stazionario (19), stanti le condizioni al contorno (13) (14), si ha:

$$H_0^{(\Sigma)}\,(1)\ H_0^{(\Sigma)}\,(R) < 0 \Rightarrow m_1 > 0;\qquad H_0^{(\Sigma)}\,(1)\ H_0^{(\Sigma)}\,(R) \geqslant 0 \Rightarrow m_1 = 0.$$

Se inoltre si applica il teorema suddetto alla forma quadratica ottenibile dal secondo membro della (36), maggiorando il termine $-\sigma X_2^2 / 2$, si ottiene la condizione

$$(38) \qquad m_3^2 \, R^2 R_m^{(I)} \frac{1 + 16 m_2^2 \, R_m^{(I)}}{1 + 2 m_1^2 \, R_m^{(I)}} + \pi^2 m_2^2 \, R_m^{(I)} < \frac{\pi^2}{2}$$

che assicura la stabilità asintotica esponenziale del moto stazionario (19), qualunque sia $m_1 \geq 0$.

6. - Stabilità del moto stazionario tra cilindri traslanti rispetto a perturbazioni laminari

Nel presente numero, in analogia per quanto fatto nel caso dei cilindri rotanti, studieremo la stabilità del moto stazionario (26) (19_2), del tipo:

$$(39) \qquad \mathbf{v} = V_z(r)\,\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{H} = H_z(r)\,\mathbf{e}_z,$$

rispetto a perturbazioni laminari non lineari:

$$(40) \qquad \mathbf{u} = u_z(r, t)\,\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{K} = k_z(r, t)\,\mathbf{e}_{z_1}, \qquad \Delta\pi_1(r, t),$$

sulle condizioni iniziali, assumendo come misura della perturbazione « l'energia » su una generica sezione S dello strato cilindrico:

$$(41) \qquad \varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi} \int_S (u_z^2 + k_z^2)\, dS = \frac{1}{2} \int_1^R r\,(u_z^2 + k_z^2)\, dr.$$

Si verifica agevolmente che la generica perturbazione (40) ad un moto stazionario del tipo (39) verifica le equazioni adimensionali:

$$(42) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta\pi_1)}{\partial r} = -\dfrac{1}{2}\sigma M^2 \dfrac{\partial}{\partial r}[k_z(k_z + h_z + 2)] \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\ \dfrac{\partial k_z}{\partial t} = \sigma \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial k_z}{\partial r}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\sigma R_m^{(I)}}{3r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{ r \dfrac{\partial}{\partial r}[(k_z + h_z + 1)^3) - (h_z + 1)^3] \right\} \end{cases}$$

e le condizioni al contorno

$$[u_z(r, t); k_z(r, t)]_{\substack{r=1 \\ r=R}} = 0. \tag{43}$$

Posto

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

con

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\int_1^R r\, u_z^2\, dr; \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\int_1^R r\, k_z^2\, dz$$

anche ora, come facilmente si deduce dalla (42_2), si ottiene che ε_1 tende asintoticamente ed esponenzialmente a zero; pertanto, anche in questo caso, la stabilità dipende dal solo andamento di ε_2. E poiché $\varepsilon_2 = E_2$ e (43_2) (42_3) coincidono con (30_2) (29_3), rispettivamente, si conclude che la condizione (37) per il caso $m_1 > 0$, o la condizione (38) qualunque sia $m_1 \geq 0$, assicurano anche la stabilità asintotica esponenziale in media del moto (26) (19_2) rispetto alle perturbazioni laminari (40).

BIBLIOGRAFIA

[1] SUTTON G., SHERMAN A., *Engineering magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill, 1965.

[2] LIUBIMOV C. A., *On the form of Ohm's law in magnetohydrodynamics*, P. M. M., **25**, 1961.

[3] MATTEI G., *Su un problema di instabilità gravitazionale di un plasma in presenza di effetto Hall*, Boll. U.M.I., IV, III (2), 1970.

[4] MILLUCCI V., *Exact solution of the Magneto-Fluid Dynamics; a contribution*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, IV, (1-2), **1**, 1974.

[5] MILLUCCI V., *Alcune soluzioni esatte delle equazioni della magnetofluido-dinamica per il moto stazionario di un fluido viscoso, incomprimibile e a conducibilità elettrica finita*, Annali Mat. Pura e Appl., IV, CVIII, 1976.

[6] RIONERO S., *Sulla stabilità magnetofluidodinamica non lineare asintotica in media in presenza di effetto Hall*, Ricerche di Matematica, (2), **20**, 1971.

[7] SWITCK D. M., KENNEDY L. A., *A solution for unsteady magnetohydrodynamic flow including ion-slip effects*, ZAMP, **19**, 1968.

[8] MAIELLARO M., *Uniqueness of M.H.D. Thermodiffusive Mixture flows with Hall and Ion-Slip effects*, III° Congr. Naz. A.I.M.E.T.A., Cagliari, 1976.

[9] MAIELLARO M., *Uniqueness of M.H.D. Thermodiffusive Mixture flows with Hall and Ion-Slip effects*, Meccanica, (1), **12**, 1977.

[10] MAIELLARO M., *On the non linear asynmptotic stability in the mean of the M.H.D. flows with Hall and ion-slip effects trough porous medium*, IV Congr. A.I.M.E.T.A. Firenze, 1978.

[11] CHANDRASEKHAR S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Clarendon Press, 1961.

[12] RIONERO S., *The stability of continuous systems*, Meccanica, (4), **10**, 1975.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci S. Rionero, C. Tolotti e F. Stoppelli.

Modifiche microclimatiche indotte dall'urbanizzazione a Napoli *

Nota di ANTONINO PALUMBO **
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 3 novembre 1979)

RIASSUNTO. — L'analisi delle serie storiche delle differenze tra i valori degli elementi microclimatici, registrati contemporaneamente nell'interno ed all'esterno dell'area urbana di Napoli, ha consentito di valutare le sensibili variazioni nei dati microclimatici verificatesi nell'ambito della città in conseguenza del recente disordinato sviluppo dell'urbanizzazione e della industrializzazione.

È stato dimostrato che l'isola di calore cittadina, qui investigata in dettaglio, è anche sede di un'area depressionaria a sua volta responsabile dell'accertato aumento nelle precipitazioni più intense, nella nebulosità e nella intensità del vento al contorno della città.

In seno all'isola di calore le stratificazioni di equilibrio termodinamico si presentano più instabili con un incremento nel flusso verticale di calore valutato, nelle ore di massima insolazione, intorno al 50 % in più rispetto all'area rurale. Ciò è responsabile dell'accentuazione dei moti convettivi che convogliano in quota le masse d'aria umida ed impoveriscono così l'umidità al suolo, già resa più esigua per la scomparsa del verde e la presenza di manufatti.

Il lavoro si sofferma sulle implicazioni dannose, derivanti dalle accertate modifiche microclimatiche, per la diffusione degli abbondanti inquinanti presenti nell'aria della città e per altri aspetti di interesse sociale.

SUMMARY. — The analysis of the historical series of the microclimatic data recorded inside and outside the town of Naples provided informations leading to the identification in the recent increase of urbanization and industrialization as the cause of the variation of the urban microclimate.

The urban heat island was found to be associated with a low pressure area which in turn is responsible of the observed increase of the havviest rainfall, of the sky covering and of the wind velocity around the town.

The air mass inside the town become more unstable; the vertical heat flux during havvy convective conditions is 50 % higher than in rural area. The paper deals also with the social implications of the ascertained modifications on urban problems.

* Ricerca eseguita col contributo del CNR programma finalizzato « Promozione della qualità dell'ambiente-aria ».

** Istituto di Geologia e Geofisica Università di Napoli.

1. - Introduzione

I dati del bollettino di statistica del Comune di Napoli mostrano che nel 1971 la popolazione residente in città è aumentata del 43 % rispetto al 1921. Il processo di urbanizzazione si è sviluppato negli ultimi decenni con una velocità tale che oggi il 90 % dell'area del centro urbano (STR, 1973) è coperta da manufatti; nel contempo sono illogicamente nate e si sono estese aree industriali nell'ambito dello stesso centro abitato.

La nascita e lo sviluppo di un'area urbana determina sensibili alterazioni nei dati microclimatici locali (WMO, 1974), spesso difficili da valutare in termini quantitativi per la complessità del fenomeno, legato alle molteplici concause, sulle quali ci si sofferma qui brevemente, e che sono responsabili dei diversi regimi termoigrometrico, anemometrico, pluviometrico, etc., tra area urbana e rurale.

2. - Modifiche negli elementi del bilancio termico dell'aria a Napoli

2.1. - *Inerzia termica del suolo*

Le numerose pareti verticali sono responsabili di sensibili modificazioni nel bilancio energetico sia per l'elevata capacità termica dei materiali di rivestimento, che per il minor valore dell'albedo rispetto alla campagna. In area urbana infatti, le radiazioni vengono continuamente riflesse tra il suolo e le pareti verticali. Ne consegue che la quantità di calore ritenuta dai manufatti urbani è di gran lunga superiore a quella assorbita da un piano orizzontale come l'area rurale. Per una sua valutazione bisognerebbe considerare numerosi insospettati aspetti; basti pensare che le pareti esposte a Sud ricevono più radiazione diretta in inverno che in estate. In questa ultima stagione la temperatura ' T ' delle superfici in ombra è prossima a quella dell'aria, mentre quella delle strade assolate ne è superiore dai 10 ai 20° C (Pedelaborde, 1954). A Napoli, secondo i dati da noi raccolti in diversi siti della città, si constatano differenze dell'ordine del grado centigrado tra le temperature ivi osservate.

2.2. - *Presenza di inquinanti*

Palumbo et al. (1978) hanno osservato nel centro urbano di Napoli, in punti lontani dalle zone industriali, nelle polveri in sospensione, SO_2 ed NO_x valori spesso eccedenti i limiti di legge. Il Comune di Napoli (Ortolani et al., 1974) ha registrato valori nelle polveri sedimentabili anche superiori a 100 tonn/km^2 mese.

La presenza quasi permanente di aerosoli e gas nell'aria ne modifica la trasparenza con dirette conseguenze nel bilancio termico notturno e diurno (WMO, 1974).

2.3. - *Apporto di calore*

Secondo una recente stima, nel 1972, sono stati consumati nel Comune di Napoli oltre 2 milioni di tonnellate di gasolio, olio combustibile, benzina e fuel di gas (A.T.I., 1973) corrispondente ad una energia valutata in circa 21×10^{12} Kcal. A questo valore va aggiunto l'apporto dovuto al gas per uso domestico ed al carbone consumato dall'industria.

Nell'ammissione di un rendimento del 35 % (pari a quello delle centrali termiche) e cioè del rilascio all'atmosfera del 65 % del calore prodotto dalla combustione, si ottiene per questo ultimo, il valore di 14×10^{12} Kcal, pari a circa 1.5 mW/cm^2 (la superficie del Comune di Napoli è di circa 120 Kmq).

Per tradurre in termini più espressivi il significato del contributo energetico all'atmosfera dalle sorgenti artificiali il predetto valore viene comparato coll'intensità della radiazione solare.

Per Napoli il valore medio giornaliero della radiazione globale R (GUERRINI et al., 1977) è di 13.3 mW/cm^2 nelle 24^h. Il rapporto tra le intensità del contributo delle sorgenti artificiali rispetto a quella naturale è pertanto dell'11 %.

2.4. - *Ventilazione e rugosità del suolo*

La città di Napoli siede su di un insieme di edifici craterici solcati da canaloni che di per sè ostacolano la circolazione dell'aria nei quartieri più bassi. La selva di edifici contribuisce poi a ridurre ulteriormente la velocità del vento nell'ambito della città. Il confronto tra il valore medio della intensità del vento osservato in una nostra stazione situata in testata ad un pontile a mare e quello relativo all'Osservatorio cittadino fornisce per la città una riduzione nell'intensità pari al 40 % ed una accentuazione delle calme pari al 30 %. La presenza dei manufatti esalta poi la turbolenza del vento (cfr. § 10) con implicazioni nei processi diffusionali.

2.5. - *Evaporazione*

In area urbana l'acqua piovana viene convogliata nelle fogne e ne resta perciò a disposizione dell'evaporazione solo un'esile pellicola;

questa per altro evapora molto più lentamente rispetto alla campagna, a causa della minore intensità del vento.

In area rurale invece, la maggior quantità di acqua disponibile per l'evaporazione è costituita da quella che, penetrata parzialmente nel suolo, è poi spinta verso la superficie per capillarità e dall'acqua intercettata dalla vegetazione.

La maggiore quantità di calore sensibile in area urbana rispetto a quella rurale (ove, come detto, vi è maggiore evaporazione) potrà venire valutata nel prossimo futuro se la C.E.E., alla quale qui ci si rivolge, vorrà inserire nel programma (TELLUS project 1975) anche un'indagine estesa alle aree urbane. Il predetto programma utilizzerà i dati del satellite AEM-A, lanciato lo scorso anno, dotato di un radiometro a due canali: uno tra 0.55-1.1 μ, per la misura della temperatura superficiale del suolo con risoluzione di 500 m (AEM-A User's Guide, 1976). Esso ha per obiettivo principale la determinazione della umidità del suolo e perciò della sua inerzia termica che, come è noto, aumenta col contenuto in acqua e del bilancio termico in alcune zone europee. Nell'attesa che ciò abbia luogo si può azzardare una stima seguendo il metodo introdotto da TURC (1958) per il calcolo dell'evaporazione partendo dai dati termopluviometrici ed attinometrici osservati durante l'ultimo decennio presso l'OG. Da esso è risultato che la minore evaporazione media annuale nell'area urbana ammonta a 0.5 mm/giorno, che dà luogo ad un minore trasferimento all'atmosfera di calore latente e perciò ad una maggiore disponibilità di calore sensibile pari a 1.5 mW/cm^2, ossia molto prossimo alla quantità di calore fornito dalle sorgenti artificiali.

2.6. - *Inquinamento marino*

È noto che oltre il 50 % dell'intensità della radiazione solare incidente sulla superficie del mare viene spesa per l'evaporazione (SVERDUP et al., 1964). È noto altresì che l'inquinamento superficiale del mare comporta una sensibile riduzione nell'evaporazione (CONCAWE, 1979) e che il carico inquinante nel Golfo è cinque volte maggiore di quello medio nazionale. Ne consegue che sulla superficie del Golfo vi è oggi, nelle ore diurne, una maggiore quantità di calore sensibile rispetto al passato. Questo viene poi trasportato verso la città dai venti di brezza dal mare che spirano nelle ore più calde del giorno. La valutazione di questo dato potrà venire fornito dalle prossime osservazioni del satellite Seasat.

PALUMBO et al. (1979) hanno osservato variazioni termiche nell'aria dovute alla presenza di corpi d'acqua calda in mare di origine industriale.

3. - TEMPERATURA DELL'ARIA

3.1. - *Fonti*

La temperatura dell'aria costituisce il parametro più importante nella caratterizzazione microclimatica locale anche in ordine alla formulazione di modelli diffusionali. Tale elemento ha inoltre mostrato una maggiore sensibilità alla mutata inerzia termica del suolo urbano ed al contributo di sorgenti artificiali.

Allo scopo di analizzare le variazioni di temperatura dovute all'inurbamento sono state esaminate le serie storiche contemporanee dei dati di temperatura rilevati in due stazioni: una nel centro dell'agglomerato urbano, Osservatorio dell'Istituto di Geologia e Geofisica (OG) ed un'altra ad una distanza di circa 15 km, Osservatorio Vesuviano (OV) in zona lontana dal centro abitato.

Per un'analisi più sottile mirante ad accertare le variazioni nei dati termici tra il centro urbano e la sua immediata periferia, è stata esaminata la serie storica delle differenze tra i dati rilevati all'Istituto di Geologia e Geofisica ed all'Osservatorio Astronomico di Capodimonte (OA) sito nella immediata periferia della città. I dati dell'OG e dell'OV sono stati dedotti dai registri dei due Osservatori; quelli dell'OA da NICOLINI (1956) fino al 1950 e dai registri per gli anni successivi.

3.2. - *Considerazioni sull'analisi delle serie storiche*

Anche se può sembrare scontato giova ricordare che l'esame della serie storica della temperatura va eseguita con cura per le frequenti inomogeneità presenti nei valori esaminati dovute al:

a) modo di valutare i valori medi; b) la modifica dell'intorno della stazione; c) tipo di capannina impiegata, sua manutenzione e/o eventuale sostituzione nel corso degli anni, spostamento della stazione; d) tipo di termometri utilizzati, loro sostituzione ed usura nel tempo.

I dati delle serie storiche qui esaminate non sono affetti da errori accidentali legati a molte delle cause prima elencate. Le cabine utilizzate sono state sempre del tipo di quelle introdotte dal Prof. Chistoni. I termometri, spesso sostituiti, sono stati sempre tarati prima del loro impiego. L'unico spostamento subito dalla stazione dell'OG si è verificato l'1-3-1929 quando essa venne trasportata dal giardino sul terrazzo. Osservazioni contemporanee eseguite con gli stessi stru-

menti prima tarati e poi confrontati, estese ad un anno, nelle due diverse posizioni, hanno consentito di valutare e di apportare le sia pure esigue correzioni ai valori medi qui esaminati.

I valori medi sono stati ottenuti partendo sempre da dati osservati (o corretti servendosi delle registrazioni termografiche) alle stesse ore.

Per gli osservatori OA, OG, OV, i valori della temperatura media giornaliera sono stati dedotti dalle osservazioni eseguite nelle stesse ore: 08^h; 14^h; 19^h ed in quelle estremanti termiche del giorno (TML).

Sia perché scopo della presente indagine è di mettere in luce le variazioni termiche verificatesi negli ultimi decenni, e cioè in corrispondenza del maggior sviluppo urbanistico ed industriale, che poterci avvalere della testimonianza sull'omogeneità dei dati resa dal Prof. Imbò che ha curato le stazioni OG e OV (prima dell'autore) dal 1923, le serie qui esaminate hanno inizio a partire da quell'anno.

Nell'esame di una serie storica occorre stabilire in precedenza le finalità delle indagini, in quanto i dati risentono oltre che degli errori accidentali, di cui si è fatto cenno, anche delle variazioni climatiche su vasta scala e di quelle locali. Dato che le serie storiche più lunghe sono state osservate generalmente nelle città, la determinazione del contributo dell'espansione della urbanizzazione alla modifica locale dei dati climatici può e deve costituire un elemento fondamentale di riferimento nella valutazione delle variazioni climatiche su vasta scala a lungo periodo che si basano appunto su dette serie storiche e che formano attualmente oggetto di ricerca (LANDSBERG, 1970), (VAN LOON et al., 1976).

La serie storica delle differenze tra i valori contemporaneamente osservati in due stazioni distanti poche diecine di chilometri contiene in sè quelle informazioni, filtrate dell'effetto delle variazioni a vasta scala presenti nella serie di una sola stazione, generalmente ampie e perciò difficili da eliminare statisticamente. Se poi le due stazioni, come quelle qui esaminate: OG ed OV, sono poste una nel centro urbano (OG) e l'altra (OV) in località il cui intorno non abbia subito modificazioni nel tempo ed a distanza tale da non risentire della presenza della città, la serie delle differenze esprime proprio l'effetto della espansione urbana. Lanalisi delle variazioni nelle differenze, a periodo annuo e/o diurno, può fornire informazioni sulla genesi delle modificazioni climatiche locali, come verrà mostrato più avanti.

3.3. - *Esposizione ed analisi dei dati termici*

In Tab. 1 sono riportate le sigle e le coordinate geografiche delle stazioni qui esaminate. Nella Tab. 2 sono stati riportati i valori medi

quinquennali delle differenze di temperatura media, media massima e media minima per OG e OV; le due ultime temperature verranno designate qui appresso rispettivamente T_{max} e T_{min}. I dati delle differenze

TABELLA 1

Sigle e coordinate geografiche delle stazioni

Stazione	Sigla	lat. N.	long. E. M. Mario	quote m
Napoli Università	OG	40°51′	1°46′	54
Napoli Serv. Idr.	SI	40°51′	1°46′	30
Napoli Capodimonte Oss. Astr.	OA	40°52′	1°48′	149
Osservatorio Vesuviano	OV	40°49′	1°57′	612
Napoli Capodichino	AM	40°51′	1°46′	72
Camaldoli	Cam	40°51′	1°44′	467
Portici	Po	40°49′	1°54′	82
Torre del Greco	TG	40°47′	1°53′	19
Sorrento	Sr	40°37′	1°57′	28
Ischia	Is	40°45′	1°26′	23
Procida	Pr	40°48′	1°35′	50

delle T_{max} e T_{min} sono stati riportati anche per le stagioni secondo Lloyds: invernali (nov., dic., gen., feb) equinozi (mar., apr., sett., ott.) ed estive (mag., giu., lug., ago.).

Nelle due ultime righe della Tab 2 sono stati riportati i valori calcolati al 1972 delle temperature e dei gradienti verticali. Nella

TABELLA 2

*Valori medi quinquennali delle differenze tra i valori delle Temperature medie, massime e minime dell'*O.G. *ed* O.V. *(in* °C)

N.ro quinquennio	T_{media}	T_{max}	T_{min}	T_{max} estiva	T_{max} invern.	T_{max} equin.	T_{min} estiva	T_{min} invern.	T_{min} equin.
1	3,47	3,20	3,40	2,86	3,43	3,31	3,47	3,11	3,61
2	3,95	4,12	3,35	4,52	3,43	4,39	3,64	2,86	3,55
3	3,81	4,25	2,83	4,81	3,50	4,42	2,91	2,62	3,96
4	3,80	3,79	3,38	4,23	3,90	3,85	3,73	3,10	3,22
5	4,09	4,38	3,39	4,81	3,91	4,42	4,04	2,93	3,16
6	4,27	5,86	3,46	5,81	4,48	5,34	3,45	3,48	3,45
7	4,09	5,07	3,23	5,78	4,33	5,10	3,45	3,08	3,18
8	4,00	4,64	3,75	5,36	3,90	4,66	3,75	3,78	3,70
9	4,11	5,28	4,11	5,91	4,53	5,39	3,71	4,03	4,00
10	4,05	4,81	3,64	5,36	4,27	4,79	3,80	3,53	3,58
Valore calcolato al 1972	4,17	5,27	3,68	6 07	4,48	5,20	3,78	3,73	3,64
Gradiente verticale al 1972 in °C/100 m	0,74	0,94	0,66	1,08	0,80	0,93	0,67	0,66	0,66

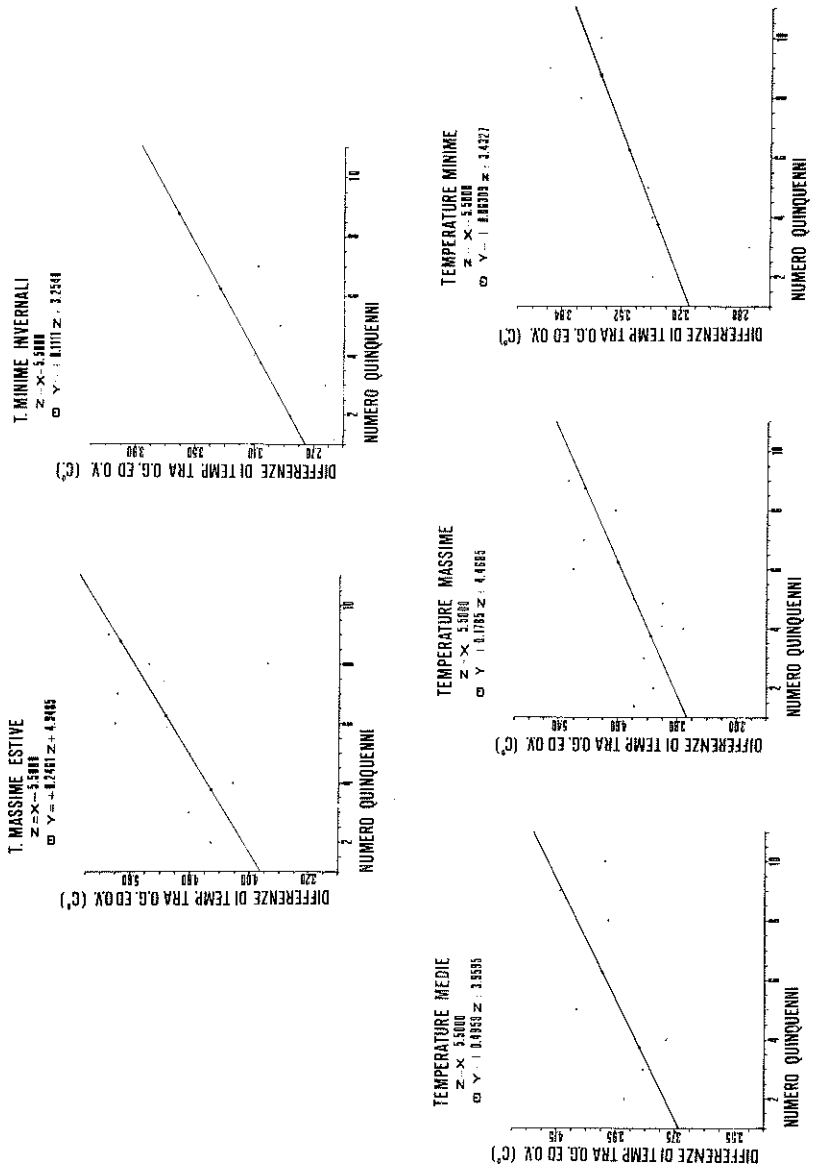


FIG. 1. - Differenze medie quinquennali delle T_{medie}, T_{max} e T_{min} tra OG e OV.

TABELLA 3

Regressione lineare delle differenze di Temperatura ΔT *tra* O.G. *ed* O.V. *al tempo t;* $(\Delta T = a + b\,t)$

	T_{media}	T_{max}	T_{max} invern.	T_{max} estiva	T_{max} equin.	T_{min}	T_{min} invern.	T_{min} estiva	T_{min} equin.
Incremento termico calcolato in °C	0,41	1,63	1,20	2,25	1,47	0,51	0,97	0,37	0,39
Coefficiente di correlazione (r)	0,63	0,80	0,79	0,81	0,75	0,63	0,75	0,42	0,44
Coefficiente di determinazione (r^2)	0,40	0,64	0,62	0,65	0,56	0,33	0,56	0,17	0,20
Costante (a)	3,72	3,46	3,14	3,50	3,66	3,12	2,65	3,37	3,20
Livello di significatività su a	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
Errore standard su a	0,12	0,29	0,22	0,39	0,31	0,17	0,20	0,19	0,19
Coefficiente di regressione (b)	0,04	0,18	0,13	0,24	0,16	0,05	0,10	0,04	0,04
Livello di significatività su b	0,047	0,005	0,006	0,004	0,012	0,079	0,012	0,222	0,194
Errore standard su b	0,01	0,04	0,03	0,06	0,05	0,02	0,03	0,03	0,03

Fig. 1 sono graficati i valori delle differenze riportate in Tab. 2, unitamente alle rette di migliore approssimazione (Tab. 3) dell'andamento temporale, limitatamente a quelle medie quinquennali della temperatura massima, media, minima, massima estiva e minima invernale. In Fig. 2 sono stati riportati i valori delle differenze tra i dati della T_{media} quinquennale dell'OG e dell'OA.

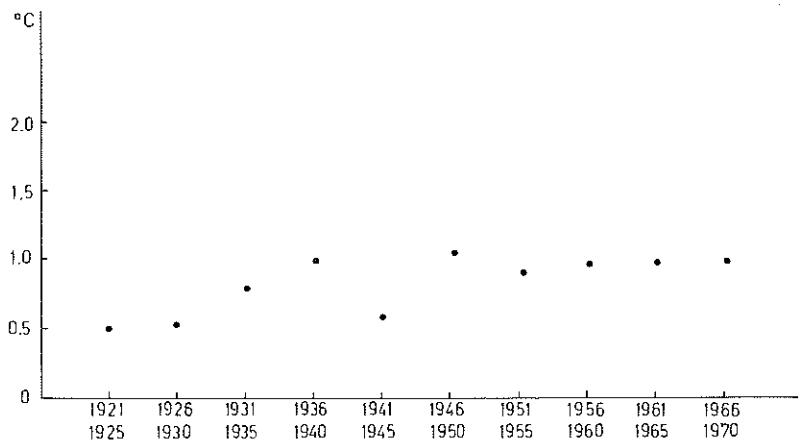


FIG. 2. - Differenze medie quinquennali tra le T_{medie} OG ed OA.

Sono state esaminate medie quinquennali in quanto l'analisi dei dati medi ottenuti per raggruppamenti di più anni ha mostrato che la media su 5 anni rappresenta quella in corrispondenza della quale si ottiene il valore ottimale della stabilità statistica al livello di confidenza dello 0.05.

In Tab. 4 sono stati riportati i dati della popolazione residente nel Comune di Napoli dedotti dai censimenti dal 1921 al 1971.

TABELLA 4

Popolazione residente nel Comune di Napoli

Censimento del	Popolazione
1921	859.629
1931	831.781
1936	865.913
1951	1.010.550
1961	1.182.815
1971	1.226.594

In corrispondenza dei valori riportati in Figg. 1 e 2 sono state omesse le indicazioni dell'errore stante la sua esiguità, dovuta alla attendibilità dei dati forniti dagli strumenti, alla buona approssimazione della singola lettura ($\pm$ 0.2° C) ed al notevole numero di osservazioni dalle quali sono state dedotte le medie quinquennali stesse. Tutti i valori esposti in Tab. 3 presentano un elevato livello di signifi-

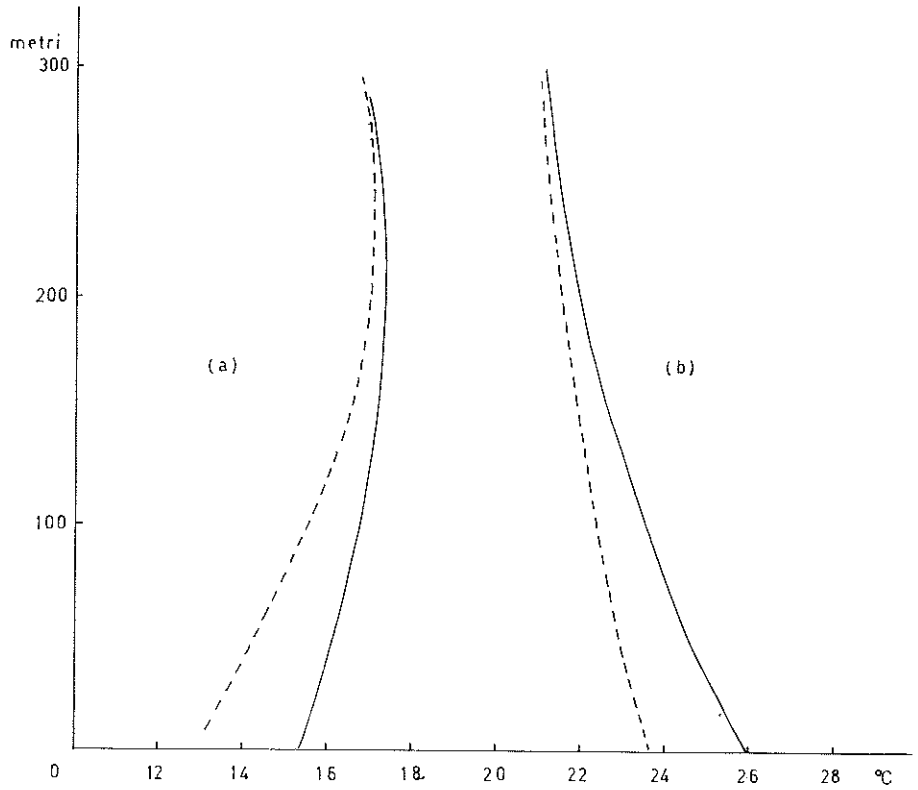


FIG. 3. - Profili tipici della temperatura dell'aria a Napoli alle ore 06 (a) ed alle ore 14 (b) in area rurale (linea tratteggiata) e urbana (linea continua).

catività con indici di confidenza molto più alti per i valori relativi alle temperature massime rispetto a quelle minime. I coefficienti di correlazione indicati in Tab. 3 sono infatti significativi al livello di 0.05 per le temperature medie e temperature minime e di 0.01 per le temperature massime (BENDAT e PIERSOL, 1971).

Tutti e tre i parametri T_{media}, T_{max} e T_{min} presentano un sensibile e significativo aumento nel tempo. Maggiori incrementi si sono riscontrati nelle temperature massime e più accentuatamente in estate, mentre quello della temperatura minima si è riscontrato in inverno.

TABELLA 5

Differenze nei valori delle T *medie tra* OG *e* OV *in* °C

	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24h
Dicembre	2,77	2,70	2,57	2,54	2,62	2,80	4,72	4,10	3,95	3,65	3,27	3,02	2,77
Gennaio	2,98	2,83	2,84	2,78	2,78	2,99	3,75	4,26	4,17	3,84	3,46	3,15	2,98
Febbraio	3,12	2,98	2,95	2,85	2,96	3,31	4,11	4,49	4,34	4,15	3,77	3,51	3,12
Marzo	3,12	2,94	2,84	2,76	3,34	3,82	4,41	4,72	4,65	4,31	3,94	4,09	3,12
Aprile	3,35	3,01	2,88	2,91	3,94	4,75	5,12	5,28	4,94	4,61	4,16	3,71	3,35
Maggio	3,15	2,89	2,71	3,08	4,42	5,18	5,44	5,45	5,05	4,60	4,12	3,66	3,15
Giugno	3,49	3,19	2,94	3,62	4,99	5,90	5,93	5,91	5,64	5,02	4,39	3,89	3,49
Luglio	3,36	2,96	2,73	3,24	4,99	5,76	5,97	5,85	5,57	4,96	4,41	3,89	3,36
Agosto	3,19	2,80	2,55	2,75	4,38	5,29	5,45	5,52	5,23	4,78	4,20	3,73	3,49
Settembre	3,22	2,93	2,75	2,75	4,00	4,50	5,04	5,06	4,84	4,43	4,12	3,68	3,22
Ottobre	2,86	2,62	2,74	2,46	3,04	3,68	4,58	4,79	4,58	4,18	3,65	3,18	2,86
Novembre	2,85	2,70	2,59	2,55	2,58	3,02	3,96	4,34	4,17	3,73	3,35	3,08	2,85

In Tab. 5 sono state riportate le differenze biorarie nei dati della T_{media} tra OG e OV negli anni recenti.

3.4. - *Isola di calore*

Per la definizione dell'isola di calore rappresentata dalla città sono stati esaminati i dati medi della T_{min} e T_{max} dal 1920 al 1976 osservati presso le stazioni site nell'interno della città e fuori del centro urbano. I dati di SI, Cam, Is, sono stati dedotti dall'Annuario del Serv. Idrografico (MINISTERO LL. PP., 1958) fino al 1950 e dai registri esistenti presso il predetto ufficio per gli anni successivi. I dati di Sr, Po e TG da MENNELLA (1972), quelli di AM dagli atti del Serv. Met. dell'Aeronautica militare. In base ai dati termopluviometrici sono state innanzitutto determinate le distanze climatiche (ROSINI et al., 1974) tra tutte le stazioni a due a due. Si sono così individuate tre « zone climatiche » nell'ambito delle quali le distanze climatiche presentano valori prossimi tra loro:

A) Stazioni nel centro urbano di Napoli - OG, SI, e OA;
B) » periferia della città - AM, OV, Po e TG;
C) » distanti - Is, Pr, Sr.

Le località sono state scelte tra quelle aventi la stessa esposizione di Napoli e tutte affacciate sul golfo di Napoli.

In primo luogo è stato investigato nell'intento di ottenere informazioni sull'andamento temporale dei dati delle temperature medie estreme. Allo scopo sono stati computati i valori quinquennali delle differenze medie di tutte le stazioni, tra le zone climatiche B e C.

Accertata la inesistenza di trends significativi nei dati delle zone B, C sono state computate le differenze medie quinquennali tra i dati medi di ciascuna di queste zone e quelli della zona cittadina.

I dati medi delle differenze tra le ' T ' estreme alle stazioni urbane e periferiche sono stati riportati nella Fig. 4 la quale mostra un incremento nel cinquantennio di $1.2 \pm 0.1°$ C nella T_{max} in soddisfacente accordo con il risultato ottenuto dall'esame dei dati dell'OG e dell'OV (1.6° C). Per la T_{min} le variazioni ottenute non sono statisticamente significative. Escludendo però dall'analisi i valori anteriori al 1941, si ottiene, per gli anni successivi un incremento significativo di $0.4 \pm 0.1°$ C in accordo con quello dedotto dall'esame dei dati dell'OG e dell'OV (0.5° C).

Per la valutazione della variazione della temperatura dal centro della città verso l'esterno i valori sono stati ridotti alla stessa quota

dell'OG apportando delle correzioni computate dal confronto tra osservazioni contemporanee eseguite nella stazione esaminata ed in altra, appositamente sistemata ai piedi della stessa, alla quota dell'OG. Così

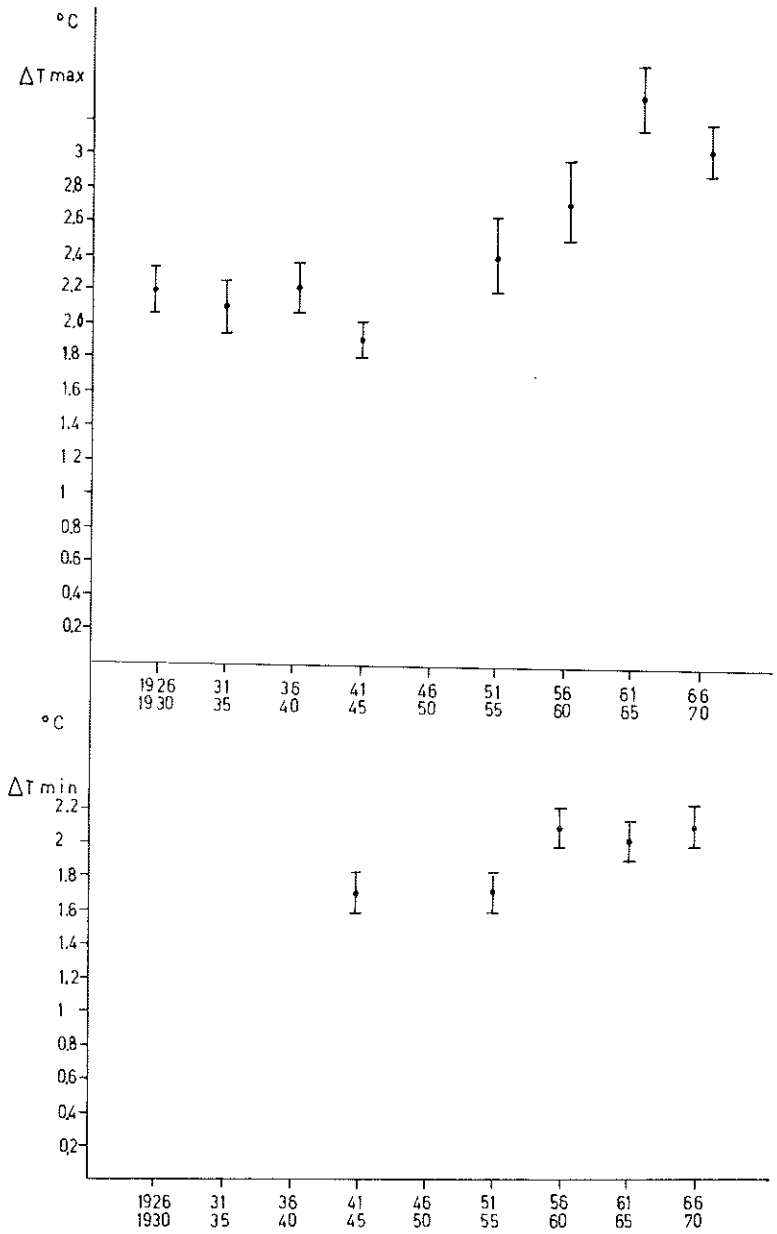


FIG. 4. - Differenze medie quinquennali delle temperature estreme tra Osservatori cittadini ed extraurbani.

per esempio la stazione dei Camaldoli è stata corretta per confronto di altra posto ai piedi della collina in località Pianura, quello dell'OV per confronto con valori osservati a Scafati.

In definitiva si è ottenuto:

		T_{max}	T_{min}
stazioni del centro urbano - zona A		21.6	13.3
» periferia	- zona B	20.1	12.3
» distanti	- zona C	19.7	11.9

I dati su esposti mostrano il graduale aumento dei valori termici estremi con l'avvicinarsi al centro urbano, con differenze tra centro urbano e periferia assai prossime a quelle ottenute dall'esame delle serie temporali dei dati dell'OG rispetto all'OV ed all'OA. Le differenze di temperatura osservate tra l'interno e l'esterno della città risultano inferiori a quelle previste dal modello di BORNSTEIN et al. (1979). Ciò è dovuto non soltanto al fatto che il detto modello riguarda differenze tra zone urbane e rurali ma soprattutto alla stretta dipendenza delle variazioni termiche dalle condizioni locali ambientali.

Ad evitare comunque l'errore dovuto alla non esatta correzione di quota sono stati anche esaminati i soli dati delle stazioni costiere aventi la stessa ubicazione e presso a poco la stessa quota. I valori riportati in Tab. 6 confermano i risultati precedenti.

Le differenze risultano più esigue in quanto le stazioni qui esaminate sono ubicate in centri urbani, anche se di dimensioni inferiori a Napoli.

L'andamento annuale delle differenze (Tab. 6) tra i dati medi delle stazioni non napoletane e quelle dell'OG si presenta molto regolare con massimo nei mesi estivi, evidenziando così la stretta relazione tra l'intensità dell'isola di calore e l'insolazione.

La presenza dell'isola di calore è stata ulteriormente confermata da 1000 sondaggi in quota eseguiti contemporaneamente nel centro della città, in periferia ed in area rurale.

La Fig. 4 mostra i profili verticali tipici di temperatura rilevati in corrispondenza delle due ore estremanti termiche in condizioni di vento debole. I grafici mostrano la marcata stabilità dell'area rurale nelle ore del mattino, meno accentuata in area urbana e la forte instabilità in area urbana nelle ore del pomeriggio. Si nota cioè la prevalenza del carattere di instabilità del centro urbano dovuto appunto alla presenza dell'isola di calore.

I risultati ottenuti sono in soddisfacente accordo con quelli conseguiti presso altre aree urbane (LANDSBERG, 1970) con la sola ecce-

TABELLA 6

Temperature medie mensili ed annue dell'aria in °C *nella stazione urbana* a) *ed in quelle extraurbane* b)

	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D	Anno
a) Stazione urbana Napoli Univ.	9,4	9,6	12,2	15,1	19,0	23,3	25,8	25,8	23,2	18,9	15,1	11,0	17,3
b) Stazioni extraurbane Gaeta	9,2	9,2	11,7	14,5	18,2	22,2	25,0	25,2	23,0	18,8	14,9	11,1	16,9
Portici	9,1	9,6	11,9	14,9	18,6	22,8	25,2	25,2	22,5	19,0	15,5	11,3	17,2
Torre del Greco	9,3	9,3	11,9	14,5	17,7	21,6	23,9	24,1	21,6	17,6	14,8	10,7	16,4
Sorrento	8,7	9,4	11,5	13,6	17,8	22,3	24,6	24,9	22,2	17,8	13,0	11,0	16,4
Media Stazioni extraurbane	9,1	9,4	11,8	14,4	18,1	22,3	24,7	24,9	22,3	18,3	14,6	11,0	16,7
Differenze (a – b)	0,3	0,2	0,4	0,7	0,9	1,0	1,1	0,9	0,9	0,6	0,5	0,0	0,6

zione che il maggiore incremento viene qui rilevato nelle T_{max}, da porre in relazione all'inquinamento termico delle brezze di mare, mentre per qualche altra località si riscontra nelle T_{min} (MONGELL, et al. 1973). I valori qui ottenuti sono però in soddisfacente accordo con quelli calcolati secondo l'espressione di Summers (WMO, 1972) che fornisce l'eccesso di temperatura ΔT nei centri urbani rispetto alla zona rurale. Da essa, introdotti gli INPUTS di Napoli, si deducono, per le ore estremanti termiche del mattino e del pomeriggio, rispettivamente 1.6 e 2.9° C. L'isola di calore a Napoli è stata anche definita con la determinazione dello spessore S dello strato limite calcolato secondo Summers (1965) avvalendosi dei dati osservati del flusso verticale di calore H (cfr. § 3.4), del gradiente verticale della temperatura e della velocità media del vento, osservati durante le campagne di sondaggi in quota, che hanno avuto lo scopo di caratterizzare le stratificazioni di equilibrio nei tipi di tempo caratteristici in Napoli. Si è accertato il soddisfacente accordo tra dati osservati e quelli calcolati.

In media si è trovato che S = 1500 e 150 m rispettivamente nelle ore di massima e minima insolazione.

L'accordo tra i valori osservati e quelli calcolati sia per ΔT che per S, sostiene la validità del valore di H calcolato secondo il criterio seguito al § 3.4.

3.5. - *Flusso verticale di energia*

Stante il ruolo fondamentale svolto dal flusso verticale di energia, ed in particolare quello del calore sensibile (PASQUILL, 1974) si tenta qui di ottenere una stima per l'area urbana di Napoli. È noto che la radiazione efficace (per le variazioni termiche) W è data da:

(1) $$W = R_S + D + R_n - a + A - E$$

dove R_S rappresenta la radiazione diretta solare; D quella diffusa; R_n la radiazione notturna; E la quantità di calore sottratta per l'evaporazione; *a* l'albedo, ovvero la radiazione perduta per riflessione o riflessione diffusa. In area urbana va anche considerato un altro termine « A » che rappresenta il contributo fornito dalle sorgenti antropogenetiche.

Sotto l'azione di una radiazione costante la temperatura di un corpo varia fino a raggiungere quella stazionaria di equilibrio. Il problema è comunemente trattato in calorimetria ove la temperatura di equilibrio T_W viene espressa da:

(2) $$T_W = T_o + KW$$

dove T_o rappresenta la T di equilibrio per $W = 0$. Nella lecita assunzione che le onde diurne (o annue) di T e di W rappresentino i rispettivi andamenti giornalieri (o annui) (PALUMBO, 1963), (PALUMBO, et. al., 1966) il valore della costante K può ottenersi (IMBÒ, 1962) dal rapporto tra le ampiezze e dallo sfasamento delle onde diurne (o annue) della temperatura media e della radiazione efficace W. I valori di T_o e di K sono stati così determinati per Napoli, con un indice di confidenza molto basso, per l'incertezza e la frequente indisponibilità di dati diretti dei parametri da cui si ottiene W. Seguendo tali criteri, Angström ha calcolato T_o e K per diverse località alla stessa latitudine di Napoli e con pari carattere di continentalità (FUNCHAL, PONTE DEL GADA, VALENCIA) anche in differenti condizioni, ottenendo valori poco discosti tra loro e pari, in media(a $T_o = 8.4 \pm 0.9°$ C, e $K = (4 \pm 0.3)\ 10^{-3}$ per W espresso in langley. Nei calcoli che seguono, si è preferito riferirsi ai valori dedotti da Angström in quanto consentono determinazioni a più elevato livello di significatività.

Nelle due ore estremanti termiche del giorno i valori delle T_{min} e T_{max} risultano uguali a quelle di equilibrio T_w. Applicando la (2), con l'introduzione di T_o e K ottenuti da Angström e dei valori delle T_{min} e T_{max} osservati in ciascuno dei quinquenni all'esame, si sono ottenuti i corrispondenti valori di W. L'esame di essi ha mostrato un incremento significativo in ΔW, in tutto l'intervallo di tempo esaminati, rispettivamente del 13 % e del 22 % nelle ore estremanti termiche del mattino e del pomeriggio.

Nell'intento di valutare il corrispondente incremento del flusso verticale di energia, che interessa i problemi diffusionali, si cerca ora di stimare le variazioni nel tempo subiti dai singoli termini a secondo membro della (1). Il valore medio giornaliero della radiazione solare osservato in periferia della città presso l'aeroporto di Capodichino è di 13.3 mW/cm² (cfr. § 2.3). È stata osservata in area urbana ed in tutte le stagioni (LANDSBERG, 1968) un'attenuazione della radiazione globale tra il 15 ed il 20 %.

Assumendo per Napoli il valore più alto (cfr. § 2.2), tale attenuazione risulta pari a 2.7 mW/cm². Il valore « A », nell'ipotesi che tutte le sorgenti fossero al livello del suolo, il che è ragionevole tenuto conto della topografia della città, è stato valutato in 1.5 mW/cm² (cfr. § 2.3). La minore energia connessa alla minore evaporazione dovuta allo sviluppo della città, stimata secondo TURC (1958), è stata valutata in 1.5 mW/cm² (cfr. § 2.5). Si ottiene pertanto un compenso tra i termini fin qui esaminati. L'incremento calcolato per W va pertanto ascritto al flusso verticale di energia diretto verso l'alto dovuto alle variazioni dell'albedo del suolo e dell'irraggiamento terrestre. Eseguendo le valutazioni di ΔW per l'ora estremamente termica del pomeriggio

si ottiene un maggior flusso di energia diretta verso l'alto pari a 12 mW/cm², cioè dello stesso ordine di grandezza di quello indotto dalla radiazione solare che è approssimativamente fornito (SMITH, 1979) dalla $H = 0.4\,(R - 10)$ mW/cm², dove R rappresenta la radiazione globale, pure espressa nelle stesse unità. Tenuto conto che, in media, a Napoli, alle 14ʰ, R = 79 mW/cm² (IMBÒ, 1939), dalla relazione precedente H risulta pari a 28 mW/cm².

Dal momento che tale flusso regola direttamente la diffusione si conclude che, da questo punto di vista, è come se a Napoli, nelle ore di massima insolazione, splendessero due « Soli ». L'incremento nel flusso di calore sensibile dipendente dall'espandersi dei manufatti è largamente prevalente rispetto al calore proveniente dalla combustione (cfr. § 2.3). Esso è strettamente legato all'insolazione, come mostrano i dati della Tab. 6 che esprimono il maggior incremento nei dati termici nel centro urbano in estate e nelle ore più calde del giorno.

4. - UMIDITÀ DELL'ARIA

Per la determinazione delle variazioni della umidità dell'aria, connesse allo sviluppo della città, sono state esaminate le serie storiche dei valori contemporanei dell'umidità relativa osservati all'OG ed all'OA dal 1916 al 1950.

Ci si è assicurati, in primo luogo, che nel predetto intervallo di tempo, i dati delle stazioni avessero soddisfatto le condizioni della presente indagine: di omogeneità nella strumentazione (psicrometro), di contemporaneità dei rilevamenti, della permanenza in situ delle capannine.

L'indagine non è stata estesa agli anni successivi al 1950, in quanto, come mostrano i dati della temperatura, durante tale intervallo di tempo, l'espandersi del cemento cominciò ad influenzare i valori microclimatici dell'OA. I valori quinquennali delle differenze tra l'OA e l'OG, al livello di confidenza dello 0.05, sono qui appresso riportati

quinquenni 't'	(%) Δu	
1916-20	5.1	$\pm$ 2.0
1921-25	3.9	$\pm$ 1.6
1926-30	5.1	$\pm$ 2.0
1931-35	7.1	$\pm$ 0.8
1936-40	7.1	$\pm$ 2.0
1941-45	10.4	$\pm$ 2.4
1946-50	13.6	$\pm$ 2.6

Da cui si ottiene la retta di migliore approssimazione $\Delta u = (3.1 \pm 1.0) + (1.5 \pm 0.3)\, t$. I dati mostrano un aumento delle differenze nel tempo con coefficiente di correlazione pari a 0.91 significativo allo 0.01.

Durante quell'intervallo di tempo, 1916-1950, l'ubicazione dell'OA poteva essere considerata distaccata rispetto al centro urbano, cioè sita ad una distanza tale da non risentire della presenza della città, nè si sono avute modifiche urbanistiche nel suo contorno, come provano anche i valori medi quinquennali dell'umidità relativa all'OA dal 1866 al 1950 (NICOLINI, 1956).

Si può dedurre pertanto che l'andamento delle differenze esprima l'effetto dello sviluppo della città sui valori dell'umidità relativa. I dati su esposti mostrano quindi che, nell'intervallo di tempo esaminato, il valore dell'umidità relativa nel centro della città è diminuito del 9 %. In termini di tensione del vapore tale differenza risulta pari a 1.0 mmHg, cioè circa il 10 % del valore medio, che a Napoli è di 9.8 mmHg. In termini di umidità specifica tale differenza risulta uguale a 0.82 gr/kg e cioè pari a circa il 10 % di quello medio per la città (8.1 gr/kg).

La diminuizione osservata è da porre in relazione alla scomparsa del verde, alla aridità del cemento e dell'asfalto, ma soprattutto all'aumento della temperatura nella città, che ovviamente influenza il valore dell'umidità relativa.

Un'altra concausa del predetto decremento risiede nel progressivo aumento del carattere di instabilità nelle stratificazioni termodinamiche della città connesso all'aumento termico al suolo, che è responsabile del maggior flusso verso l'alto delle masse d'aria umida superficiali. Tale flusso è posto in evidenza dall'andamento giornaliero dei valori delle differenze dell'umidità specifica tra l'OG e l'OV (Fig. 5) che presenta valori più bassi nelle ore calde del giorno in fase con l'andamento del carattere di stabilità. Appunto per non tener conto di tale flusso verticale, nell'esame della evoluzione dell'umidità nella città, non ci si è riferiti ai valori dell'OV, posto più in quota rispetto all'OG. Un'altra concausa è da ricercare nella minore evaporazione dell'acqua del mare connesso all'inquinamento delle acque del golfo di Napoli (cfr. § 2.6).

La stazione dell'OA può oggi considerarsi ubicata nell'ambito della città e ciò non ha consentito il suo riferimento per gli anni successivi. Ove fosse stato possibile estendere l'indagine ai nostri giorni il decremento sarebbe risultato maggiore di quello osservato.

Non tenendo conto dell'accentuazione della crescita della città negli anni successivi al 1950, partendo dalla serie dei dati su riportati si può valutare « per difetto », mediante l'analisi della tendenza, il

valore del decremento nell'umidità relativa al 1975 che risulta così uguale al 26 %. Si tratta di un dato molto alto che può determinare, in certi casi, condizioni di disagio climatico. Il valore qui ottenuto è comunque paragonabile a quello ottenuto a Parigi (15 %) (DETTWILLER 1970) ed a Tokyo (20 %) (FUKUI, 1977).

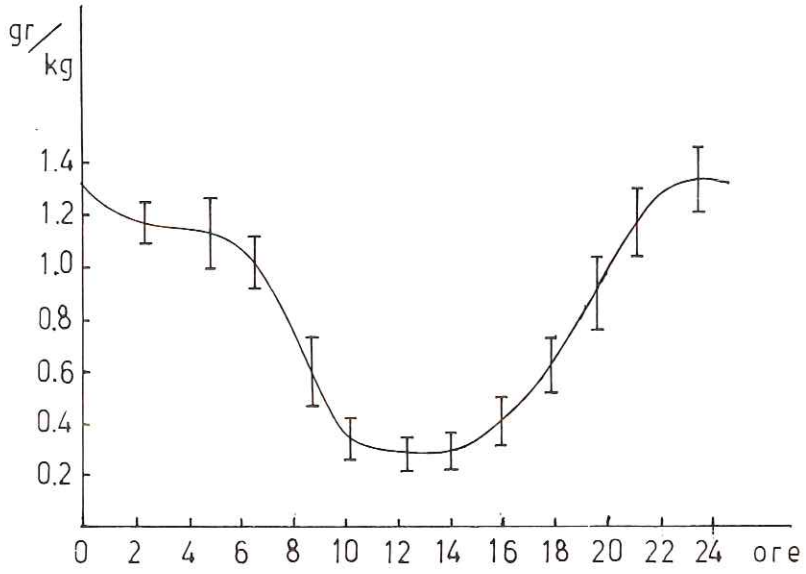


FIG. 5. - Differenze medie biorarie dell'umidità specifica tra l'OG e l'OV.

5. - PRESSIONE ATMOSFERICA

La letteratura non riporta dati sulla eventuale presenza di una area depressionaria urbana associata all'isola di calore cittadina (WMO, 1970).

Per l'individuazione di tale area a Napoli non si è ricorso ai valori medi della pressione osservati nelle stazioni nel centro urbano e tutt'intorno, a causa delle correzioni che si sarebbero dovute apportare ai dati barometrici (specie quelle dovute alla differenza di quota, anche se piccola) le cui imprecisioni, tenuto conto della esiguità delle variazioni che si vogliono porre in evidenza, avrebbero potuto mascherarle. Ci si è perciò riferiti agli andamenti medi giornalieri ed annuali delle differenze di pressione tra stazioni all'interno ed all'esterno del centro urbano.

Le accertate variazioni significative nel tempo nelle differenze di pressione tra centro urbano e periferia sono risultate sempre molto maggiori di quelle ottenute dopo aver apportato ai dati medi biorari e mensili correzioni valutate in base alla classica formula di Laplace.

Tali variazioni risultano in fase con quelle dell'intensità dell'isola di calore cittadina e rappresentano pertanto l'andamento nel tempo dell'intensità dell'isola depressionaria.

Si sono esaminati gli andamenti annuali delle differenze medie di pressione osservati al centro della città OG, e tutt'intorno ad essa: OV; AM; OA, corrette secondo la formula di Laplace.

In Tab. 7 sono stati riportati i valori delle ampiezze, delle fasi e dell'errore probabile, quest'ultimo computato secondo BARTELS (1932), dell'onda annuale della differenza di pressione tra le singole stazioni di periferia e quella urbana, rappresentata dalla $p_1 \operatorname{sen}(30t + \sigma_1)$ con t espresso in mesi da 1 a 12 e contato dal 15 dicembre.

TABELLA 7

Ampiezze (in mb), fasi (in gradi) ed errore probabile dell'onda annuale delle differenze di pressione tra le stazioni urbane e di periferia

Stazioni	Ampiezza p_1	Fase σ_1
OG - OV	2,0 ± 0,3	341°
OG - AM	1,2 ± 0,2	331°
OG - OA	0,28 ± 0,04	345°
OG - Bagnoli	0,27 ± 0,08	337°

Si può notare che le predette onde sono state ottenute al livello di significatività del 99 %. I valori delle ampiezze crescono con la distanza dal centro urbano. L'esiguità dei valori relativi all'OA ed a Bagnoli dipende dal fatto che ormai anche queste stazioni periferiche sono state inglobate dalla città.

La concordanza tra i valori delle fasi conferma il significato fisico delle determinazioni ottenute e mostra che, in media, il minimo nelle differenze si verifica alla fine dell'estate.

I dati su riportati lasciano desumere che l'accentuazione, media estiva del gradiente barico, connesso con l'isola depressionaria urbana, è di circa 1 mb su 20 km.

Un'ulteriore conferma di questo risultato è stata ottenuta comparando gli andamenti annuali recenti della pressione con quelli più antichi. Anche qui non ci si è riferiti ai valori annuali perché inquinati dagli spostamenti subiti dal barometro.

Si è prima accertato che gli andamenti annuali dei dati della pressione, ottenuti dalle medie mensili trentennali fossero altamente significativi. È risultato infatti che i dati medi mensili osservati presentano una deviazione standard di 0.05 rispetto a quelli computati in base all'onda annuale, calcolata da PALUMBO et al. (1966) in $0.56 \sin(30\,t + 30°)$ mmHg.

Si sono quindi analizzati gli andamenti medi annuali delle differenze di pressione tra il primo trentennio e quello più recente del secolo sia all'OG che all'OA.

I valori delle costanti armoniche dell'onda annuale di tale andamento per i due osservatori risultano come appresso:

	ampiczza mmHg	fase gradi
OG	0.57 ± 0.15	352
OA	0.49 ± 0.14	347

in stretta concordanza, specie nelle fasi, con i dati della Tab. 7. I dati su esposti mostrano, per entrambi gli osservatori, il significativo aumento nelle differenze e perciò la significativa diminuzione della pressione (di circa 1 mmHg) dall'inverno all'estate verificatasi negli ultimi anni, rispetto all'inizio del secolo, a conferma quindi dell'accentuazione della depressione urbana negli ultimi anni nei mesi estivi.

TABELLA 8

Andamenti giornalieri degli scarti dalla media in mmHg *delle differenze di pressione fra OG e OV*

ore	0	2	4	6	8	10	12
Inverno	+ 0,04	+ 0,07	+ 0,11	+ 0,20	+ 0,10	+ 0,02	− 0,10
Primavera	+ 0,05	+ 0,13	+ 0,32	+ 0,20	+ 0,12	+ 0,02	− 0,08
Estate	+ 0,08	+ 0,18	+ 0,25	+ 0,28	+ 0,21	+ 0,09	− 0,08
Autunno	+ 0,12	+ 0,13	+ 0,08	+ 0,09	+ 0,16	+ 0,18	+ 0,01

ore	14	16	18	20	22	24
Inverno	− 0,15	− 0,12	− 0,07	− 0,04	0,00	+ 0,04
Primavera	− 0,18	− 0,22	− 0,19	− 0,12	− 0,04	+ 0,05
Estate	− 0,23	− 0,29	− 0,26	− 0,16	− 0,05	+ 0,08
Autunno	− 0,22	− 0,28	− 0,19	− 0,04	+ 0,07	+ 0,12

Anche l'andamento giornaliero degli scostamenti dalla media delle differenze di pressione tra l'OV e l'OG si presenta regolare, con valori crescenti dalle ore più fredde a quelle più calde del giorno e con escursioni significative crescenti dall'inverno all'estate (Tab. 8).

Per le stesse considerazioni esposte a proposito degli altri elementi climatici le variazioni in argomento rappresentano la diminuzione della pressione nel centro urbano in estate e nelle ore più calde

del giorno, in fase cioè con l'intensificazione dell'isola di calore cittadina e perciò del carattere d'instabilità.

Dalla combinazione dei due precedenti risultati si osserva che, in media, nelle ore pomeridiane d'estate, la differenza della pressione tra la periferia e la città è dell'ordine del mb. Tenuto poi conto che i valori su esposti si riferiscono a dati medi si può ragionevolmente desumere che nelle condizioni di marcata instabilità, alla quale si associano poi temporali e rovesci, l'aria depressionaria dia luogo ad un gradiente barico in grado di deviare la rotta delle linee temporalesche. La presenza del gradiente barico è responsabile dell'accertata coerente intensificazione nella velocità del vento osservato in una stazione sita fuori del porto rispetto al centro della città presso l'OG (+ 40 %), e nell'accentuazione dei venti di brezza dal mare (PALUMBO, 1966 a) che spirano nelle ore di maggiore insolazione.

Il rapporto tra le intensità medie annuali delle brezze da terra rispetto a quelle da mare è risultato infatti pari a 0.50, con valori più bassi in estate (0.30) e più alti in inverno (0.70), in accordo cioè con l'andamento giornaliero ed annuale dell'intensità dei detti gradienti barici. Il confronto tra i dati anemometrici tra l'OG e l'OA (PALUMBO, 1966 a) ha rilevato una rotazione nella direzione del vento procedendo dall'OG all'OA in senso orario ed un'accentuazione nella velocità media cioè in coerenza con l'ammessa presenza di un'isola depressionaria in seno alla città.

6. - PRECIPITAZIONI

È stato dimostrato (Project Metromex, 1974) che l'aumento nel carattere d'instabilità insieme all'incremento nel numero dei nuclei di condensazione e della rugosità del suolo nelle città danno luogo ad una intensificazione nelle precipitazioni a scala locale.

È d'altra parte verosimile che l'area depressionaria urbana possa dar luogo a gradienti barici in grado di orientare verso il centro urbano le linee temporalesche.

La determinazione dell'aumento di pioggia è difficile da valutare per la variabilità spaziale e temporale dei fenomeni piovosi. La letteratura (CHANDLER, 1974) segnala numerosi lavori che sostengono l'influenza dell'urbanizzazione sull'aumento delle precipitazioni. ROSCOE (1974) ha rilevato, mediante eco radar, in aree sottovento in corrispondenza della città di St. Louis, formazioni di precipitazioni tre volte più frequenti rispetto all'area rurale circostante. Nell'intento di accertare il verificarsi di un tale incremento per Napoli, sono state esaminate le serie storiche delle differenze tra i valori ventennali registrati presso gli Osservatori cittadini (OG, OA, SI, AM) (medie per le 4

stazioni) e quelle rilevate come medie tra le località di Capri, Is, Ca, Po TG avendo prima ottenuti coefficienti statistici altamente significativi tra i dati delle stazioni a due a due nelle rispettive zone.

L'analisi dei dati medi ventennali ha mostrato che la media su 20 anni rappresenta quella in corrispondenza della quale si ottiene il valore ottimale della stabilità statistica al livello di confidenza dello 0.05.

Le differenze tra le medie annuali, per ventennio, del numero di mm di pioggia caduti fuori e nella città sono riportate qui appresso:

anni	diff. (mm)	
1886-1905	89.5	± 50
1906-1915 / 1926-1935	90.0	± 41
1936-1955	72.2	± 56
1956-1975	− 76.5	± 53

Da essa si denota che dal 1886 al 1955 il valore di tale differenza è rimasto pressoché costante, per poi cambiare segno nell'ultimo ventennio.

Tenuto conto che il valore medio annuale della pioggia a Napoli è di 872 mm, si nota una variazione significativa (+ 148.7 mm) proprio negli anni in cui si è verificata la massima espansione e l'industrializzazione della città.

La variabilità nei dati pluviometrici non ha consentito di dedurre risultati significativi dalle analisi svolte, intese ad individuare le ore ed i mesi in cui maggiormente si sono verificati incrementi nella piovosità.

Sono stati invece ottenuti risultati significativi dall'esame di dettaglio della intensità oraria delle precipitazioni.

Si riportano qui appresso: il numero dei casi in cui si sono verificate precipitazioni orarie di intensità non inferiore a 10 mm/h unitamente al corrispondente ammontare medio orario della pioggia caduta ed al prodotto tra i predetti valori.

ventenni	N. casi per anno (a)	mm (b)	totali medi annui (a × b) mm
1910-30	5.2 ± 0.7	17.3	90.0
1931-50	6.8 ± 0.8	17.7	120.4
1951-70	9.4 ± 0.6	19.2	180.5

Da cui si evince l'incremento significativo (81 %) nel numero di eventi piovosi con intensità non inferiore a 10 mm/h.

I valori esposti nell'ultima colonna mostrano che l'incremento nella precipitazione media annuale (60.1 mm), verificatosi nell'ultimo ventennio nelle ore con precipitazione non inferiore a 10 mm, rappresenta il 40 % dell'incremento (+ 148.7 mm) medio complessivo di pioggia tra il 1956 ed il 1975 già riferito. Tenuto poi conto che il numero delle ore con precipitazioni non inferiori a 10 mm rappresenta appena lo 0.1 % delle ore caratterizzate da precipitazioni, il prevalente incremento verificatosi negli ultimi anni, proprio in questi casi così poco frequenti, conferma l'azione marcata delle cause riportate all'inizio del paragrafo sulle precipitazioni più intense.

La comparazione tra i valori orari delle precipitazioni più intense, osservate in città e fuori, non è significativa perché le piogge più intense sono associate al passaggio di perturbazioni che, nel loro spostamento interessano le aree sottostanti in ore diverse. La comparazione ha invece senso allorquando le precipitazioni sono di tipo continuo; si verificano in un intervallo di tempo di almeno un giorno; sono connesse ad un corpo nuvoloso compatto, omogeneo ed esteso; sono associate ed ubicate al centro di una vasta e profonda area depressionaria quasi stazionaria ove regnino calma o presenza di venti deboli. Queste condizioni si sono potute osservare tra le 08^h del 28-10-79 e le 08^h del 29-10-79. Le stazioni urbane hanno registrato il loro massimo valore storico osservato (dal 1872 all'OG (PALUMBO et al., 1966) dal 1921 al SI). I valori registrati (in mm) nel predetto intervallo di tempo sono:

stazioni cittadine	Stab. Mobil.	152.4	
	SI	125.6	
	OG	137.6	
stazioni periferiche	OA	119.0	a N della città
	AM	111.6	a NE »
stazioni extraurbane	Licola	99.4	a NW »
	Pozzuoli	93.0	a W »
	Casoria	87.0	a N »
	Acerra	89.6	a NE »

Da cui si rileva il graduale aumento dei valori con l'approssimarsi al centro urbano con un incremento in città rispetto all'area extraurbana del 30 %.

Questi risultati s'accordano con quelli delle analisi delle serie storiche dei dati pluviometrici della città industriale di St Louis (HUFF & CAGNON, 1972) e con i risultati di una campagna di rilevamenti (HUFF & SCHICKEDANZ, 1974) che mostrano l'incremento dal 20 al

30 % nella quantità delle precipitazioni e nella frequenza di quelle più intense attribuite alla presenza del centro urbano.

Le stesse procedure di calcolo sono state eseguite sulle serie dei numeri di giorni piovosi. Queste non hanno mostrato alcuna variazione significativa nel tempo nell'ambito della città. Si può dunque desumere che la presenza dell'isola di calore, l'intorbidamento dell'atmosfera urbana e l'area depressionaria cittadina non contribuiscano tanto ad innescare il fenomeno piovoso, quanto ad intensificare la caduta di pioggia, in special modo di quella associata ai rovesci caratterizzati da una più elevata velocità di caduta.

In un lavoro in corso di stampa (PALUMBO et al., 1979 a) viene mostrato che la crescita della città è causa della maggiore markovianità nel fenomeno piovoso. Dalla predetta accertata particolarità statistica è stato dedotto un modello previsionale che consente di valutare « on line », con buona approssimazione, la velocità media di caduta, dal 10 % dalle informazioni relative all'inizio del fenomeno.

7. - STATO DEL CIELO

I valori ottimali della stabilità statistica dei dati di nebulosità si sono ottenuti in corrispondenza delle medie venticinquennali, che, all'OG, risultano così distribuiti:

	N. di giorni con cielo	
	nuvoloso o coperto	sereno
1876-1900	205 ± 14	160 ± 12
1901-1925	201 ± 10	164 ± 12
1926-1950	224 ± 8	141 ± 10
1951-1975	240 ± 8	125 ± 6

Da essi si rileva il significativo decremento (intorno al 20 %) nel numero di giorni sereni ed il corrispondente aumento in quello dei giorni a copertura parziale (misti) o totale (coperti) per anno.

8. - URBANIZZAZIONE E DIFFUSIONE DEGLI INQUINANTI

Gli inquinanti provenienti da sorgenti basse come quelle autoveicolari raggiungono direttamente l'uomo ed i monumenti cittadini.

Quelli provenienti da sorgenti elevate possono venire convogliati in superficie dai moti turbolenti destati dall'attrito del vento col suolo e/o dal flusso verticale di calore. Queste due fonti sono molto più

intense in città rispetto alla campagna per la presenza degli edifici e dell'isola di calore.

Giova ricordare che dell'energia solare presente nell'atmosfera sotto forma di calore latente e di calore sensibile, solo l'ultima contribuisce efficacemente alla diffusione nei bassi strati.

Il flusso verticale di calore (cfr. § 3.4) è più intenso nelle ore più calde del giorno, ma anche di notte si osserva che i pennacchi dei camini, siti in periferia orientale della città, incontrando l'isola di calore cittadina, modificano la loro conformazione, originariamente allungata, tipica delle condizioni di inversione e vento debole, che lascerebbe gli inquinanti in quota, in quella turbolenta, responsabile di maggiore accumulo di inquinanti al suolo della città (PALUMBO et al., 1978).

Le osservazioni da noi eseguite sullo shear del vento mostrano che a Napoli la rugosità del suolo $z_o = 100$ cm e perciò maggiore, per un ordine di grandezza, rispetto a quello ordinariamente valutato per l'area rurale.

La rugosità del suolo z_o regola poi la velocità di attrito u_*, a sua volta legata alla componente verticale della diffusione dalla $\sigma_W = 1.3\, u_*$ (valida in condizioni di neutralità) ed all'altezza media di un pennacchio $\bar{Z}(t) = 0.4\, u_*\, t$, dove t è il tempo.

Nelle condizioni tipiche della città di Napoli, ove la velocità del vento è esigua e la convezione di giorno è intensa, la quota dei pennacchi $\bar{Z}$ è legata principalmente al flusso di calore H dalla

$$\bar{Z} = 1/3 \left(\frac{g\, H}{\rho\, c_p\, T} \right)^{1/3} t^{3/2} \tag{3}$$

dove c_p = calore specifico a pressione costante $= 1.1 \times 10^3$

T = temperatura assoluta

g = accelerazione di gravità 9.81 ms^{-2}

H = flusso di calore in W/m^2

t = tempo in secondi, il cui inizio dipende dalla velocità con cui il pennacchio emerge da complesso degli edifici.

Quest'ultima espressione modificata da Turner, Gifford, Smith, trovasi ora generalizzata in PASQUILL (1974). Seguendo tali criteri e comparando i risultati secondo Pasquill già valutati da CAGNETTI et al. (1968) in area rurale alla periferia di Napoli, con quelli da noi ottenuti mediante osservazioni dirette di shear del vento e parametro di stabilità statica, si è ottenuto che le categorie di stabilità P secondo

Smith (PASQUILL, 1974) vanno decrementate di un valore variabile da 1.5 a 2.0 partendo dall'ora estremamente termica del mattino a quella del pomeriggio.

La topografia della città gioca poi un ruolo fondamentale perché il rilievo a ridosso del centro abitato favorisce l'attestarsi di inversioni termiche nelle ore notturne ad una quota media da noi osservata intorno ai 150 metri. In tali condizioni le strade canalizzano il flusso di inquinanti provenienti anche da sorgenti elevate, intrappolate dalle stratificazioni di stabilità.

Secondo HANNA & GIFFORD (1973), in area urbana, la concentrazione di inquinanti al suolo « C » sottovento proveniente dai pennacchi che hanno raggiunto la quota di inversione « h », può venire espressa da $C = Q/u\,h$ (4) dove u è la velocità del vento; Q è la quantità di inquinamento attraverso la sezione unitaria normale alla direzione del vento.

Ponendo i valori osservati più frequenti di $u = 1$ m/sec, $h = 150$ m si ottiene dalla (4) $C = Q/150$ che rappresenta un valore molto elevato.

La concentrazione al suolo lungo la proiezione 'x' orizzontale dell'asse del pennacchio, e cioè per $z = y = 0$, nell'ammissione di una distribuzione binormale nella concentrazione, è data da

$$C = \frac{Q}{\pi\, u\, \sigma_y\, \sigma_z} \exp\left[-\frac{h^2}{2\,\sigma_z^2}\right] \tag{5}$$

dove h è l'altezza virtuale del camino, σ_y e σ_z *i* coefficienti diffusivi laterali e verticali del moto.

Condizioni di vento debole

Per i camini della zona orientale della città, sita in prossimità del mare, le condizioni prevalenti sono quelle di vento debole (nelle ore notturne) e moderato (nelle ore diurne) (PALUMBO, 1966 a). Nelle ore diurne la dispersione verticale può attribuirsi molto più alla convezione termica (cfr. § 3.4) che alla turbolenza del vento che, peraltro, in quelle ore proviene prevalentemente dalla superficie liscia del mare (PALUMBO, 1966 a). Il moto verticale è generalmente ampio e perciò gli spostamenti verticali dipenderanno dal tempo t e solo indirettamente dalla distanza x, perciò

$$\sigma_z = A\,t = \frac{A\,x}{u} \tag{6}$$

Per la σ_y le nostre osservazioni su anemogrammi disposti in città mostrano una larga dipendenza della distanza (entroterra) dal mare a parità di velocità del vento; perciò σ_y può porsi indipendente da u:

$$\sigma_y = \mathrm{B}\, x \tag{7}$$

Dalle (5), (6) e (7) si ottiene che il massimo della concentrazione al suolo è ottenuto alla distanza

$$x = \frac{u\, h}{\sqrt{2}\,\mathrm{A}}$$

con un valore di

$$\mathrm{C}_{\max} = \frac{2\,\mathrm{Q\,A}}{\pi\, \mathrm{e\, B}\, h^2\, u^2} \tag{8}$$

Secondo lo schema di Smith (PASQUILL, 1974) tenuto conto dei valori tipici dei camini nell'area orientale di Napoli: per $u = 2\ ms^{-1}$, $\sigma_z = 280$ m, quando $x = 2.5$ Km e $\sigma_y = 450$ m, allora A = 0.22, B = 0.18 e $\mathrm{C}_{\max} = 0.3\, \dfrac{\mathrm{Q}}{h^2\, u^2}$.

Condizioni di vento moderato

Il moto verticale in queste condizioni è regolato dalla turbolenza meccanica del vento. In prima approssimazione la dispersione verticale sarà fornita dalla teoria della diffusione e percioò $\sigma_z = \mathrm{A}\sqrt{u\, x}$, mentre l'esperienza fornisce ancora $\sigma_y = \mathrm{B}\, x$. La massima concentrazione al suolo si otterrà a distanza

$$x = h^2/3\,\mathrm{A}^2\, u$$

con un valore di

$$\mathrm{C}_{\max} = \frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{Q}}{\pi\, e^{3/2}\,\mathrm{B}\, h^3} \tag{9}$$

Dalle (8) e (9) si ottiene, nelle prevalenti condizioni di venti deboli e moderati:

$$\mathrm{C}_{\max} = 2.3\, \frac{\mathrm{Q}}{h^3} \left[1 + \frac{h}{8\, u^2}\right] g\, m^{-3}, \tag{10}$$

dove Q = gr/sec; h è espresso in m; u in m/sec., h è l'altezza effettiva del camino pari a quella geometrica $+ \Delta h$ (BRIGGS, 1969).

La (10) è valida per tempi di campionamento dell'ordine di 10 minuti. (Per tempi di campionamento di un'ora si otterrebbe un valore inferiore stimato dal 30 al 50 %). Esaminati i dati esistenti presso il Comune di Napoli e posto quindi, per un camino tipico, un rilascio di calore pari a 100 Mw, un flusso di inquinanti pari a Q = 400 gr/sec in SO_2 e l'altezza effettiva $h = 100 + \Delta h$, con $\Delta h = 1700\ u^{-1}$ calcolata secondo BRIGGS (1969), si ottiene nel range dei valori più frequenti delle velocità del vento u a Napoli:

u (m/sec)	h (m)	C_{max} ($\mu g/m^3$)	x_{max} (Km)
2	950	33	6
5	440	35	7

I dati riportati sono stati previsti seguendo modelli classici disponibili in letteratura (PASQUILL, 1974). È in corso una campagna di rilievi e l'adattamento di altri modelli più sofisticati per verificare quanto sopra e fornire quindi indicazioni sperimentali.

9. - RISULTATI

Temperatura dell'aria.

I valori medi del gradiente verticale di temperatura (Tab. 2) che, come mostrato altrove (PALUMBO et al., 1974) possono essere paragonabili in media e con valutate correzioni a quelle ottenuti in aria libera, si presentano sempre maggiori di quelli forniti dall'I.C.A.O. (International Civil Aeronautical Organization) per l'atmosfera standard (0.65° C/100 m per la toposfera) e del valore medio riscontrato da diversi autori (DETTWILLER, 1970) in stazioni fisse in quota (0.4° C/100 m). Tale differenza è risultata sempre maggiore dei limiti di incertezza ottenuti dalla comparazione tra osservazioni medie in aria libera e in stazioni fisse in quota. I dati della Tab. 2 evidenziano quindi localmente in città una maggiore instabilità nelle stratificazioni di equilibrio termodinamico. I gradienti risultano poi crescenti dal valore della temperatura minima invernale a quella massima estiva.

I grafici della Fig. 1 mostrano un significativo aumento nel tempo delle differenze di temperatura tra OG e OV. Poiché nell'intorno dell'OV non vi sono state sensibili modifiche urbanistiche le variazioni dei valori delle temperature ivi osservate sono legate alle vicende macroclimatiche che sono ugualmente sentite anche a Napoli. Ne consegue che l'incremento « Δ T » dei dati delle differenze (Tab. 3) è dovuto all'espansione urbana della città di Napoli.

Per la temperatura minima l'incremento si è verificato quasi essenzialmente negli anni successivi alla seconda guerra mondiale. Ciò va attribuito all'effetto del riscaldamento domestico, introdotto in città negli ultimi decenni (in esercizio nelle prime ore del mattino e di sera), come provato dal sensibile maggior aumento della temperatura minima proprio in inverno.

In questi stessi anni i valori della temperatura massima in tutte le stagioni presentano un incremento più marcato rispetto agli anni precedenti; ciò va posto in relazione all'accentuato sviluppo dell'urbanizzazione e dell'industrializzazione. In considerazione del fatto che le rette di regressione rappresentano la tendenza generale relativa all'intero intervallo di tempo, si ha motivo di ritenere che una più sottile analisi, su intervalli parziali, avrebbe senz'altro mostrato livelli di significatività più elevati di quelli ottenuti.

L'incremento calcolato nel valore della temperatura media (0.4° C) risulta molto diverso da quello deducibile dalla media tra gli incrementi della temperatura minima e massima. Ciò dipende dal basso valore del livello di confidenza, ma soprattutto dal fatto che per le forme d'onda degli andamenti periodici le medie non hanno alcun senso fisico (PALUMBO, 1966 b). Per la maggiore disponibilità in letteratura di dati relativi ad incrementi nei valori medi ci si riferisce ad essi per la comparazione. L'incremento nella temperatura media calcolata a Napoli (0.4 C) nei recenti 50 anni, tenuto conto di quanto predetto e delle diverse condizioni ambientali locali, risulta in soddisfacente accordo con quelli ottenuti a Parigi: 1° C/78 anni (DETTWILLER, 1970), a Tokyo e Kyoto: 1° C/100 anni e a Osaka: 1.5° C/100 anni (ARAKAWA, 1968). Va altresì notato che l'incremento nella T_{mdia} di 0.4° C, qui notato, è poco discosto dai valori su scala planetaria dedotti nel trentennio 1920-50 pari a 0.39° C (CALLENDAR, 1961) e a 0.36° C (MITCHELL, 1963).

La disposizione della città, ridossata da rilievi collinari e circondata da adiacenti ed estesi insediamenti urbani, pure sede di isole di calore, fa sì che il maggior richiamo di aria destato dall'isola di calore urbana si verifichi prevalentemente dal mare. L'apporto di vapore marino nelle ore calde del giorno accentua il carattere di instabilità e giustifica il suo elevato valore riscontrato in numerosi sondaggi in quota eseguiti in città.

Il confronto tra i dati dell'OG con quelli dell'OA è stato eseguito per la individuazione delle variazioni termiche verificatesi in città rispetto alla periferia ove appunto ha sede l'OA. La Fig. 2 mostra significativamente, per le T medie, valori prossimi tra loro nelle differenze fino al 1930, seguito da un incremento fino al 1960 e successivamente da valori più o meno costanti. Poiché la città si è andata estendendo

proprio negli anni dal 1930 al 1960 verso l'OA in modo che dopo il 1960 l'intorno dell'OA non ha potuto subire ulteriori modifiche, se ne deduce che l'andamento della Fig. 2 evidenzia le variazioni termiche in città rispetto alla periferia.

L'incremento così calcolato (0.5° C) è prossimo a quello ottenuto dal confronto tra i dati dell'OG e dell'OV (Tab. 3).

Dai valori esposti in Tab. 5 si rileva che le differenze nelle temperature medie tra OG ed OV presentano un andamento annuale con massimo in estate e minimo in inverno ed uno giornaliero conforme a quello della curva diurna della temperatura e con escursione crescente dall'inverno all'estate. Ciò significa che il maggior riscaldamento dell'aria in città è direttamente legato all'insolazione, ossia all'aumentato flusso verticale di calore sensibile, connesso con la mutata struttura del suolo urbano.

La presenza dell'isola di calore cittadina e la distribuzione dei dati termici che la caratterizzano, ottenuta per comparazione tra i dati osservati nell'ambito della città ed in zone extraurbane (queste ultime aventi valori della distanza climatica assai prossimi tra loro), hanno confermato i risultati ottenuti dall'analisi delle serie storiche.

Umidità dell'aria

L'esame delle serie storiche dei dati igrometrici ha mostrato una diminuzione significativa dell'umidità relativa, specifica e della tensione di vapore intorno al 10 % in accordo col valore ottenuto in altre località (WMO, 1974).

Pressione atmosferica

La comparazione degli andamenti annuali e giornalieri della pressione atmosferica nel centro ed all'esterno della città ha consentito di accertare una diminuzione barica dell'ordine del *mb* nel centro urbano in estate e nelle ore più calde del giorno in fase cioè con l'intensificazione dell'isola di calore cittadina e la conseguente attestazione, nei detti periodi, di sensibili gradienti barici intorno ad 1 mb su 10 Km. L'individuazione dell'isola depressionaria urbana costituisce un risultato inedito.

Nuvolosità

Il numero dei giorni sereni è diminuito significativamente nell'arco di un secolo del 20 %, mentre è corrispondentemente aumentato il numero di giorni a copertura parziale e totale.

L'incremento della nuvolosità è da porre in relazione all'incremento dei nuclei di condensazione, del flusso verticale di calore e dei moti convettivi indotti dall'isola di calore urbana.

Neppure da progetti della importanza del Metromex è emersa la spiegazione completa sul ruolo svolto da ciascuno dei detti fattori, sul meccanismo di modificazione nella struttura locale delle nubi e dell'aumento della precipitazione. Sembra però accertato (AUER et al., 1974) che l'attivazione delle nubi convettive sia funzione del gradiente verticale della temperatura e dello spessore dello strato di mescolamento.

Venti

La presenza dei gradienti barici nell'intorno della città è responsabile dell'accertata coerente intensificazione della velocità del vento (in media + 40 %) osservata all'esterno della città rispetto al centro, in accordo coi dati di LANDSBERG (1968).

Il maggior incremento della temperatura massima rispetto a quella minima, ancor più sentita in estate, nonstante la persistenza delle brezze, accentua la intensità osservata nei venti di brezza (PALUMBO, 1966 a) che spirano dal mare nelle ore di maggiore insolazione.

Il rapporto tra le intensità medie annuali delle brezze di terra rispetto a quelle di mare è risultato infatti pari a 0.50 con valori più esigui in estate (0.30) e più elevati in inverno (0.70) in accordo con l'andamento annuale della prevalenza dell'incremento della temperatura massima rispetto a quella minima.

Precipitazioni

L'esame delle serie storiche dei dati pluviometrici degli Osservatori cittadini con quelle rilevate in stazioni extraurbane ha mostrato un aumento significativo (+ 20 %) nella quantità di pioggia caduta nella città; aumento verificatosi prevalentemente in occasione di intensi rovesci. I risultati ottenuti concordano con quelli rilevati in altre città (WMO, 1974).

Inputs richiesti da modelli diffusionali per Napoli

Il parametro di rugosità del suolo « z_o » è stato trovato pari a 1 m e cioè maggiore, per un ordine di grandezza, del corrispondente valore in area rurale.

Il numero di Smith, che quantizza le categorie di stabilità di Pasquill, risulta minore di un valore variabile tra 1.5 e 2.0 partendo dall'ora estremante termica del mattino a quella pomeridiana.

Il flusso verticale di calore in città, nelle ore di massima insolazione è risultato maggiore del 43 % rispetto a quello ottenibile in area rurale.

L'altezza dello strato limite, in condizioni di marcata instabilità, proprie delle ore di massima insolazione, è risultato pari a 1500 m.

La quota delle inversioni notturne, nelle ore precedenti il sorgere del sole è stata valutata in 150 m. I predetti valori, indispensabili per valutare la distribuzione degli inquinanti al suolo, sono in soddisfacente accordo con quelli ottenuti in altre aree urbane (PASQUILL, 1974) (SUMMERS, 1965) (CHANDLER, 1974) (CARSON, 1973).

10. - CONCLUSIONI

Accertato che il maggior incremento termico è stato osservato a Napoli nei valori delle T max (ed ancor più marcatamente in estate); dal momento che la sorgente termica dovuta alla combustione non varia sensibilmente nel corso dell'anno e del giorno, perché oltre il 50 % è fornito dall'industria che opera a ciclo continuo; considerato che di notte il contributo del riscaldamento domestico è esiguo (ATI 1973) e solo invernale, la prevalenza dell'incremento delle temperature massime rispetto alle minime, anomalo rispetto a qualche altra località, dipende maggiormente dalle mutate caratteristiche termiche del suolo connesse all'espansione dei manufatti che si sono sostituiti alla vegetazione e al terreno umido, all'inquinamento termico della brezza del mare ed al traffico autoveicolare, questi ultimi più efficaci nelle ore del giorno.

Si può dunque affermare che il fenomeno dell'inurbamento ha dato luogo a cospicuo e significativo aumento di temperatura dell'aria in città, specie nelle ore di massima insolazione. L'incremento nella T_{min} può in parte attribuirsi alle stratificazioni stabili delle ore notturne, favorite dalla configurazione orografica della città. Il maggior incremento subito da questa nei mesi invernali è legato all'effetto del riscaldamento domestico ed alla maggior frequenza e prolungata durata notturna di dette stratificazioni, favorite anche dall'alta frequenza di calme di venti (PALUMBO, 1966 a).

La comparabilità tra i valori dedotti dagli incrementi nel tempo nella T_{media}, legata all'espansione della città (0.4° C/50 anni) con quelli ottenuti su scala planetaria (CALLENDAR, 1961) (MITCHELL, 1963) (LANDSBERG, 1970) mostra l'importanza della determinazione delle variazioni

termiche in area urbana in ordine alla esatta deduzione di quelle planetarie, generalmente dedotte da dati osservati in centri urbani.

Gli effetti dell'isola di calore sugli altri dati climatici sono tanto marcati da influire occasionalmente sulle condizioni di agio climatico e su altri aspetti di notevole interesse sociale quali:

a) *diffusione degli inquinanti*: Da calcoli eseguiti secondo modelli diffusionali classici (PASQUILL, 1974) riferiti a camini tipici nell'area industriale ad Est di Napoli si è ottenuto che nelle ore del mattino la zona orientale del centro urbano è sede della massima concentrazione al suolo di inquinanti di provenienza dalla detta area industriale. Sempre in media, nelle ore pomeridiane le zone più colpite sono quelle a SE della detta zona a distanza di 6-7 Km. Durante la notte la prevalenza delle calme e dei venti deboli, la presenza dell'ampio pianoro ove ha sede l'area stessa ridossata dal Somma-Vesuvio favoriscono l'attestarsi di stratificazioni di stabilità. Nelle due ore immediatamente successive a quella teorica del sorgere del sole la pianura, dove ha sede l'area industriale, si trova in ombra per la presenza del predetto ridosso. L'aria in quota, riscaldata dalla radiazione solare, assume valori da noi osservati fino a 5° C superiori a quelli in superficie. Lo strato di inversione è allora tanto intenso da riuscire ad intrappolare i pennacchi. Allorquando è presente il vento (dominante) SE (PALUMBO, 1966 a) gli inquinanti vengono diretti verso la zona orientale della città (Rione Luzzatti). Tutta l'aria sovrastante la zona industriale è sede di fenomeni fotochimici, chiaramente visibili quasi tutte le mattine di calma di vento, dal Vesuvio e dalle altre alture. In generale l'accertato aumento del flusso verticale di calore sensibile nei bassi strati (valutato nelle ore di massima insolazione dello stesso ordine di grandezza di quello indotto dalla radiazione solare) è causa del marcato carattere di instabilità.

Da ciò consegue, nelle ore diurne, una maggiore concentrazione di inquinanti al suolo, sottovento, da sorgenti basse, una intensificazione della diffusione nei bassissimi strati degli scarichi autoveicolari proprio nelle ore in cui il traffico è più intenso e un ritardo nella sedimentazione delle polveri.

b) *intensità del vento*: L'accertata accentuazione nella velocità del vento al contorno della città e perciò in corrispondenza del golfo di Napoli, connessa con la presenza di marcati gradienti barici, è causa di intensificazione dei fronti d'onda che si abbattono sul litorale. Di qui i danni sempre più frequenti negli ultimi anni subiti dalle opere foranee progettate in base alla intensità del vento osservato presso stazioni lontane dalla città e che non risentono pertanto della predetta cospicua accentuazione di carattere locale. Tanto si segnala all'Ente Porto di Napoli anche per gli effetti sulla navigazione.

c) *precipitazioni*: Alla luce dei risultati conseguiti può ritenersi che l'incremento nel numero di crolli e di smottamenti in concomitanza delle grosse precipitazioni sia oggi anche da attribuire all'accentuazione della quantità di pioggia caduta durante le precipitazioni più intense.

Infatti le grosse portate di acqua esercitano un'intensa erosione sui prodotti piroclastici sciolti, di cui è costituito in prevalenza il sottosuolo napoletano.

Il fatto che i principali collettori fognari « scoppino » in corrispondenza delle più intense precipitazioni è poi causa del conseguente inquinamento della falda e perciò anche delle acque che scorrono lungo la vetusta rete idrica sottorranea dell'acquedotto (che i Romani facevano viaggiare a giorno). In proposito si cita il lavoro di GABRIELI (1978) che pone in stretta relazione l'aumento dei casi di colera con il verificarsi di eventi piovosi ed individua nell'acqua potabile un probabile vettore della diffusione di virus patogeni.

BIBLIOGRAFIA

AEM-A, *Atmospheric Explorer Mission. A heat capacity Mapping Mission*, Users Guide NASA Goddard Space Flight Center, (1976).

ATI, *Rapporto del gruppo antinquinamento*, Ass. Termotecnica It. Scz. Campania, (1973).

ARAKAWA H., *Thermal climate of the cities*, C.U.B., (1968).

AUER A. H. and DIRKS R. A., *Contribution to an urban Meteorological study*, Bull. Am. Met. Soc., Vol. 55, 106-110 (1974).

BARNETT T. P., *Estimating Variability of Surface Air Temperature in the Northern Hemisphere*, Mont. Weath. Rev., **106**, 1353-366.

BARTELS J., *Statistical methods for research on diurnal variations*, Quart. Journ. Terr. Magn., Vol. 37, n. 3 (1932).

BENDAT J. S. and PIERSOL A. G., *Random data analysis and measurement procedures*, Wiley-Interscience, pp. 407 (1971).

BORNSTEIN R. D. and OKE T., *Influence of pollution and urbanization on urban climates*. Advances in Environmental Science and Engineering, Vol. 2 - Gordon & Breach Inc., N. Y., London-Paris, (1979).

BRIGGS G. A., *Plume rise*, U. S. Atomic Energy Commission, pp. 82 (1969).

CAGNETTI P., GIUDICI G. e ROSINI R., *Condizioni medie di stabilità nei bassi strati dell'atmosfera per le stazioni meteorologiche italiane*, Atti del XVII Convegno, Ass. Geof. It., 523-543 (1968).

CALLENDAR G. S., *Temperatures fluctuations and trends over the earth*, Quart. J. Roy. Met. Soc., **87**, 1-10 (1961).

CARSON D. J., *The development of a dry inversion capped convectively unstable boundary layer*, Quart. J. Roy. Met. Soc., **99**, 450-467 (1973).

CHANDLER T. J., *Summary and conclusion of the Symposium on urban climates and building climatology*, WMO, Bruxelles, (1974).

CONCAWE, *The environmental impact of refinery effluents*, Concawe Report n. 5/79 (1979).

DETTWILLER J., *Evolution Seculaire du climat de Paris*, Secrètariat général à l'aviation civile, Paris (1970).

FUKUI E., *The climate of Japan*, Elsevier Sc. Publ. Co. Amsterdam (1977).

GABRIELI G., *Il colera ovvero la virgola e il punto interrogativo*, Fermo Meloni, Roma (1978).

GUERRINI A., LAVAGNINI A. e VIVONA F., *L'insolazione sull'Italia*, S.P. n. 11, Ist. Fis. Atmos. C.N.R., Roma (1977).

HANNA S. R. and GIFFORD F., *Modelling urban pollution*, Atmos. Env., **7**, 131-136 (1973).

HUFF F. A. and CAGNON S. A. Jr., *Climatological assessment of urban effects on precipitation at St. Louis*, J. Appl. Met., **11**, 823-842 (1972).

HUFF F. A. and SCHIKEDANZ P. T., *Rainfall analysis*, Metromex, Bull. Am. Met. Soc. Vol., **55**, 90-92 (1974).

IMBÒ G., *Lezioni di Radiazione solare*, CENFAM, CNR Roma (1962).

IMBÒ G., *Azione del vapore d'acqua nell'assorbimento della radiazione solare*, Mem. R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, vol. 1, serie 3ª, n. 9 (1939).

LANDSBERG H. E., *Climates and urban planning*, WMO TP, WMO, Ginevra, 141-366 (1968).

LANDSBERG H. E., *Man-made climatic changes, Scienze*, **170**, 1265-1274 (1970).

LETTAU H. H., *Theoretical wind spirale in the boundary layer of a barotropic atmosphere*, Beitr. Phys. Atmos., **35**, 195-212 (1962).

MENNELLA C., *Il clima d'Italia*, Vol. III, Fratelli Conte Edizioni (1972).

MINISTERO LL. PP., *Precipitazioni medie mensili ed annue nel trentennio 1921-50*, Annuario del Servizio Idrografico (1958).

MITCHELL J. M., *On the world wide pattern of secular temperature change*, Symposium OMM UNESCO, Roma (1963).

MONGELLI F., ZITO G., LODDO M., *Effetto « Heat Island » su Bari*, Atti III Simp. Cons. Natura. 399, 417 Cacucci Ed., Bari (1973).

NICOLINI T., *Il clima di Napoli - Capodimonte*, Mem. Oss. Astron. Capodimonte (1956).

ORTOLANI G., LONGO O., BOCCIA A., DEL PRETE U. e GREGORIO D., *L'inquinamento atmosferico nella città di Napoli*, Archivio Monaldi Napoli (1974).

PALUMBO A., *L'andamento giornaliero della pressione atmosferica a Napoli IFT ed al Vesuvio OV*, Atti del XIII Convegno Ass. Geof. Ital. (1963).

PALUMBO A., *Caratteristiche del vento a Napoli IFT con nota sulla variazione giornaliera del vento medio*, Boll. Soc. Nat. Napoli, Vol. LXXV (1966a).

PALUMBO A., *Distribuzioni di frequenza dei valori medi di alcuni elementi meteorologici*, Annuali Oss. Ves., Vol. VIII, serie 6 (1966 b).

PALUMBO A. e PISANO L., *Analisi dei dati medi e degli andamenti annuali di alcuni elementi meteorologici a Napoli IFT del 1872 al 1966*, Annali Oss. Ves., Vol. VIII, serie 6 (1966).

PALUMBO A. e MAZZARELLA A., *Sondaggi in quota mediante pallone frenato a Napoli*, Comunicazione Assoc. Geof. It. (1974).

PALUMBO A. and MAZZARELLA A., *The effect of the filtering on the determination of lunar tides*, Jour. Atmos. Terrest. Phys., Vol. 324, 42-51 (1979).

PALUMBO A. and MAZZARELLA A., *Statistical rainfall properties*, Montly Weather Review (in corso di stampa) (1979 a).

PALUMBO A. e SCIPPACERCOLA S., *Inquinamento termico a Napoli*, Boll. Soc., Nat. Napoli, Vol. LXXXVII (1978).

PASQUILL F., *Atmospheric diffusion*, Ellis Horwood Chichester, pp. 439 (1974).

PEDELABORDE P., *Introduction à l'etude scientifique du climat.*, Paris, C.D.U. (1954).

PROJECT METROMEX, *Bulletin American Meteorological Society*, Vol. 55, n. 2, 86-121 (1974).

ROSINI E., MENENTI M. e TREVISAN V., *Concetti e metodi sulla mesoclimatologia per un contributo alla conoscenza ambientale*, Informatore Botanico Ital., Vol. 6, n. 2, 163-170 (1974).

ROSCOE R., BRAHAM Jr., *Cloud physics of urban weather modification*, Bull. Am. Met. Soc., Vol. 55, n. 2, 100-106 (1974).

SMITH F. B., *The relation between Pasquill stability P and kazanski-Monin stability*, Atm. Envir, Vol. 13, pp. 879, 881 (1979).

STR, *Aerofotogrammetria del Comune di Napoli*, Società Topografica Rilievi Napoli (1973).

SUMMERS P. W., *Conference in Micrometeorology*, Proceed. Ist. Canadian (1965).

SVERDRUP H. U., JOHNSON M. W. and FLEMING R. H., *The Oceans*, Prentice, Hall Inc. (1964).

TELLUS PROJECT, *Soil moisture and heat budget evaluation in selected European zones of agricoltural and environmental interest*, Joint Research Center of the European Communities, Ispra (1975).

TURC L., *Le bilan d'eau des sols; relations entre les precipitations, l'evaporation et l'ecoulement. Soc. hydrotech. de France*, Compte Rendu des troisieme Journeè de l'hydraulique, Algiers, Paris, 34-44 (1958).

VAN LOON and WILLIAMS J., *The connection between trends of mean temperature and circulation at the surface: part I. winter*, Mont. Weath. Rev., **104**, 365-380 (1976).

WMO, *Urban climates*, WMO Tech., Note, n. 109, Geneve (1974).

WMO, *Dispersion and forecasting of air pollutim.* WMO 319 Tech. Note n. 121, Geneve (1972).

WMO, *Sclected Bibliography on urban Climate*, WMO n. 276 T. P. 155, Geneve (1970).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, G. Imbò e M. Rigutti.

Proteine del corion di *Ciona intestinalis* e loro esposizione

Nota di MARIA ROSARIA PINTO e ROSARIA DE SANTIS *
presentata dal socio ordinario VINCENZO LEONE

(Adunanza del 3 novembre 1979)

SUMMARY. — Electrophoretic analyses of the chorion proteins of *Ciona intestinalis* egg have been carried out. Identification of the protein exposed at the outer surface of the chorion has been performed by « vectorial » labelling with ^{125}I of glycerol treated eggs. Only four labelled polypeptide bands have been found upon electrophoresis on SDS-polyacrylamide gel.

RIASSUNTO. — È stata eseguita l'analisi elettroforetica delle proteine del corion di *Ciona intestinalis*. Grazie alla marcatura « vettoriale » con ^{125}I di uova trattate con glicerolo, si sono potute identificare sulla superficie esterna del corion quattro proteine esposte.

INTRODUZIONE

Nell'uovo di *Ciona intestinalis* il corion (membrana vitellina) rappresenta la struttura a livello della quale avviene il riconoscimento specifico con gli spermatozoi [1]. Infatti il corion è portatore dei recettori spermatici ed è il sito su cui avviene la reazione acrosomiale [1]. L'attacco degli spermatozoi al corion è mediato da strutture fibrillari, che emergono dalla superficie esterna dell'involucro e sulle quali sono stati evidenziati siti di attacco per alcune lectine: Concanavalina A, Fucose Binding Protein, Wheat Germ Agglutinin [2, 3]. Anche la superficie interna del corion presenta fibrille e reagisce con la Concanavalina A, tuttavia l'attacco degli spermatozoi avviene solo sulla superficie esterna, come si è potuto dimostrare utilizzando preparazioni di corion isolati [3]. Queste indicazioni sulla presenza di carboidrati esposti sulla superficie esterna dei corion e sull'asimmetria della struttura dell'involucro vanno inquadrate negli studi che ormai da anni vanno definendo il ruolo delle glicoproteine di membrana nel

* Stazione Zoologica, Napoli.

riconoscimento cellulare [4]. Ci è parso perciò utile analizzare la composizione proteica del corion e identificare, tra le proteine costituenti, quelle più esposte sulla superficie esterna dell'involucro.

Per l'analisi si è impiegata la elettroforesi su gel di poliacrilammide in sodio dodecilsolfato. L'individuazione delle proteine esposte è stata poi eseguita con il metodo della iodazione vettoriale, che assicura la marcatura delle sole proteine esposte sulla superficie esterna di una membrana [5].

Materiali e Metodi

Iodazione delle uova. — Le uova di *Ciona intestinalis* del Golfo di Napoli sono state raccolte dai gonodotti con pipette Pasteur. L'acqua di mare è stata sempre utilizzata dopo filtrazione su membrana Millipore da 0.3 μ. La preparazione dei corion e la iodazione sono state eseguite su « uova glicerinate » e cioè su uova private delle cellule follicolari mediante trattamento con glicerolo [1]. Il procedimento di iodazione è stato messo a punto modificando quello originariamente descritto da Morrison [5]. A 2 ml di acqua di mare contenenti 600 μl di lattoperossidasi (Sigma), 10 μl di Na ^{125}I pari a 66 μCi (Amersham) e 1 μl di Na_2SO_3 20 mM, sono stati aggiunti 2 ml di uova glicerinate. La reazione iniziava con l'aggiunta di 10 μl di H_2O_2 1,2 %. Dopo tre ulteriori aggiunte di H_2O_2 da 10 μl ciascuna, eseguite a intervalli di 2 min., le uova sono state ripetutamente lavate con porzioni da 8 ml di acqua di mare.

Prima di utilizzare le uova iodate per l'isolamento dei corion, si è verificato che il meccanismo di riconoscimento specie-specifico tra uovo e spermatozoo non era stato alterato in alcun modo dal processo di iodazione. Le uova iodate infatti conservavano intatta la loro capacità di legare gli spermatozoi.

Gel elettroforesi e autoradiografia. — Sui corion isolati con il procedimento di De Santis et al. [3] è stata determinata la radioattività, contando aliquote, raccolte in duplicato, su filtri Whatman GF/C. I saggi hanno indicato che il contenuto di radioattività era pari a 2×10^6 cpm/10^6 corion. Dopo essere stati risospesi in SDS 1 % alla concentrazione di 6×10^5 corion per ml, i corion sono stati sonicati con un sonicatore Branson (Sonifier B-12) per un totale di 5 min. a circa 50 watts. Dopo un'incubazione di 10 min. a 100 °C, il materiale insolubile era rimosso mediante centrifugazione a 15.000 r.p.m per 10 min. Il sopranatante è stato poi sottoposto ad elettroforesi, subito o anche dopo conservazione a — 20 °C fino ad un mese. Prima della

corsa elettroforetica i campioni sono stati tenuti per 2 min. a 100 °C; l'incubazione avveniva in presenza o assenza di 2-mercaptoetanolo 2 % (vol/vol). Per l'elettroforesi su gel di poliacrilammide si è seguito il metodo di O' FARELL [6]. Sono state preparate lastre dello spessore di 1 mm con uno « stacking gel » al 3 % e un « running gel » costruito con un gradiente di concentrazioen 9-15 %. Tutti i prodotti impiegati per l'elettroforesi sono stati ottenuti dalla Bio-Rad. Dopo la corsa elettroforetica le piastre sono state colorate con Coomassie Brilliant Blue sciolto allo 0.03 % in un solvente costituito da isopropanolo 20 % e acido acetico 10 %. La decolorazione è stata eseguita con un solvente costituito da isopropanolo 10 % e acido acetico 10 %. Le piastre che dovevano essere sottoposte alla autoradiografia, sono state disidratate sotto vuoto. Per l'esposizione sono state utilizzate lastre radiografiche Kodax X-Omat S XS-5. L'esposizione è stata eseguita a — 80 °C per circa 96 ore.

RISULTATI E DISCUSSIONE

La Fig. 1 mostra una preparazione di corion isolati con il procedimento di DE SANTIS et al. [3] utilizzato per preparare i corion impiegati in questo lavoro. Si può notare che si tratta di preparazioni con sufficiente grado di purezza nelle quali è conservata l'integrità delle strutture.

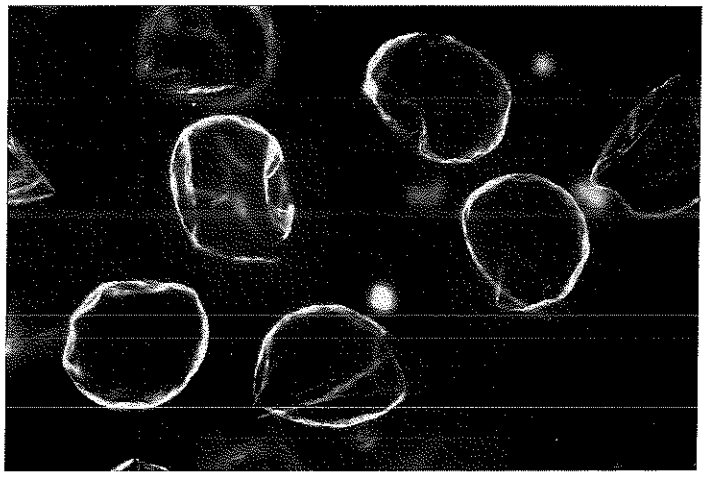


FIG. 1. - Immagine di corion isolati. Illuminazione in campo oscuro. Ingrandimento × 110.

In Fig. 2 a è illustrato il diagramma elettroforetico delle proteine estratte dai corion mediante sonicazione in SDS secondo il procedimento descritto nella sezione Materiali e Metodi. Nel diagramma si evidenziano numerose bande proteiche i cui pesi molecolari apparenti risultano compresi tra $1,5 \times 10^5$ e $1,0 \times 10^4$. Solo per qualche banda si può notare una variazione di mobilità quando il campione è incubato prima della corsa in presenza di 2-mercaptoetanolo. In Fig. 2 b è illustrato il diagramma elettroforetico di corion isolati da uova iodate. Anche in questo caso non si notano differenze significative rispetto al quadro elettroforetico ottenuto con corion isolati da uova non iodate. Dopo la corsa elettroforetica e la colorazione, la piastra è stata sottoposta ad autoradiografia. Dall'autoradiografia si rileva che vi sono solo 4 catene polipeptidiche (da I a IV, in Fig. 2 c) marcate con ^{125}I. I loro pesi molecolari calcolati sulla base di una curva di calibrazione ottenuta con proteine di riferimento, sono rispettivamente pari a 12.000, 34.000, 81.000 e 151.000.

I dati presentati indicano che la struttura proteica del corion è piuttosto complessa. Esso risulta infatti costituito da numerose proteine. Di queste proteine, solo alcune potrebbero essere costituite da subunità collegate da ponti disolfurici. Non si può escludere che le modeste variazioni di mobilità elettroforetiche riscontrate per alcune bande proteiche siano dovute soltanto a modificazioni della struttura terziaria e/o quaternaria di proteine la cui conformazione dipende dalla integrità di ponti disolfurici intracatena.

Solo poche delle proteine del corion risultano esposte sulla superficie esterna dell'involucro. Ciò non meraviglia, in quanto si può presumere che alcune strutture, come quelle responsabili della interazione con gli spermatozoi, siano ripetute numerose volte sulla superficie del corion. È difficile inoltre pensare a proteine esposte non marcate perché prive di residui istidinici e tirosinici. Che le catene polipeptidiche evidenziate dalla autoradiografia siano effettivamente

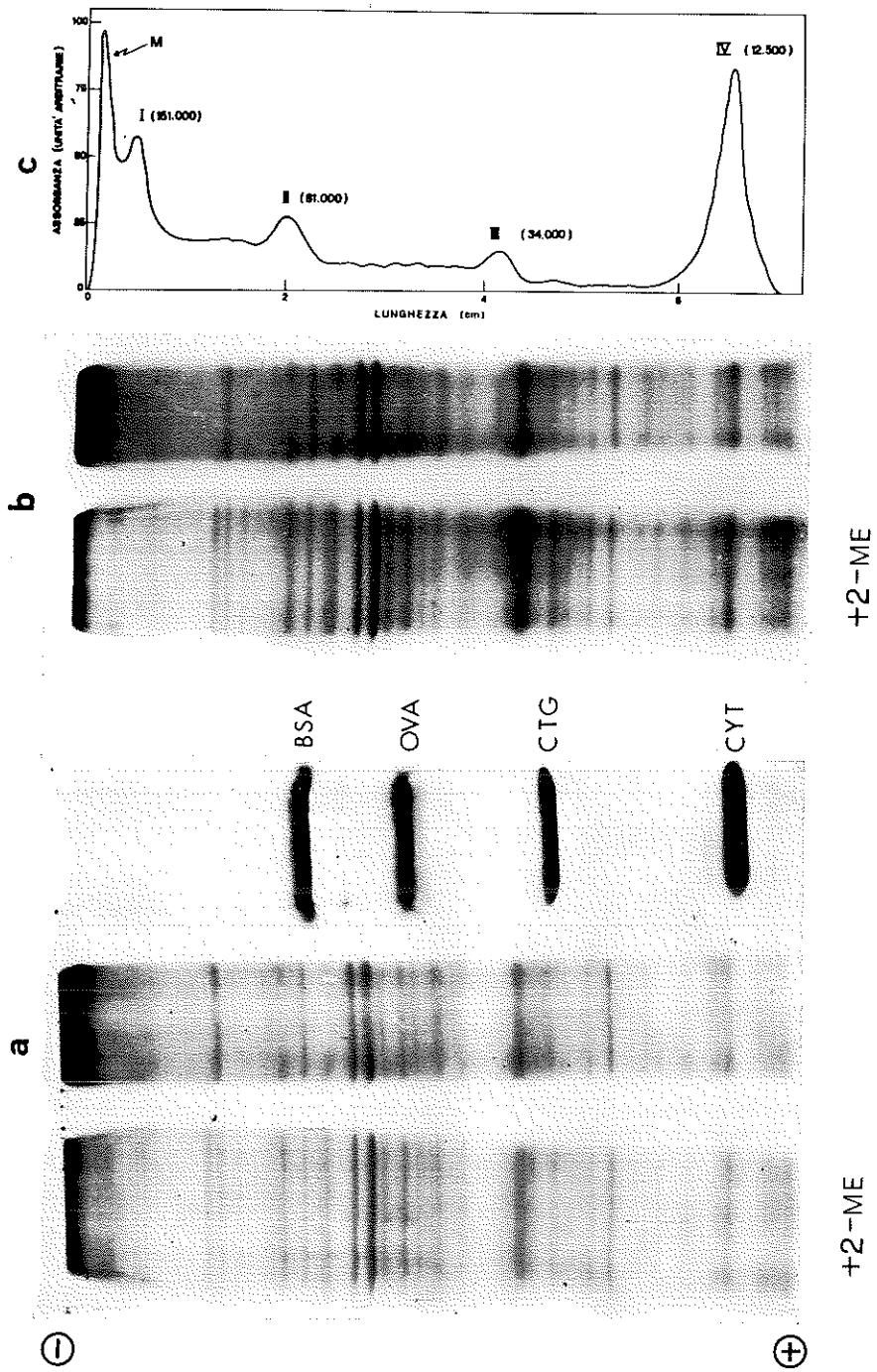
▶

FIG. 2. - Elettroforesi su gel di poliacrilammide in SDS di proteine estratte da corion isolati.

2 a: elettroforesi di proteine denaturate in SDS in assenza e in presenza (+ 2-ME) di 2-Mercaptoetanolo. A destra si nota il diagramma elettroforetico ottenuto con proteine standard: BSA, albumina da siero bovino (P. M. 68.000); OVA, ovalbumina (P. M. 43.000); CTG, chimotripsinogeno (25.700); CYT, citocromo *c* da cuore di cavallo (P. M. 12.400).

2 b: elettroforesi di proteine denaturate in SDS (vedi 2 a) estratte da corion di uova iodate con ^{125}I.

2 c: scansione al densitometro di una lastra autoradiografica ottenuta dal gel illustrato in 2 b. In parentesi sono riportati i pesi molecolari delle proteine; M è materiale che non ha permeato il gel.


c
M
I (151.000)
II (81.000)
III (34.000)
IV (12.500)
ASSORBANZA (UNITA' ARBITRARIE)
LUNGHEZZA (cm)
b
+2-ME
BSA
OVA
CTG
CYT
a
+2-ME
⊖
⊕

esposte alla superficie esterna del corion, è assicurato poi dal principio della iodazione vettoriale, su cui si basa il procedimento impiegato [5]. La lattoperossidasi ha infatti un alto peso molecolare e non si dissocia in subunità, per cui difficilmente si può immaginare che passi attraverso membrane intatte [5], quali i corion di uova glicerinate usate nei nostri esperimenti.

Dato che le strutture coinvolte nel processo di riconoscimento tra uovo e spermatozoo devono essere particolarmente esposte, è possibile che una o più delle proteine esposte alla superficie del corion, messe in evidenza da questo sistema di marcatura, siano coinvolte nel processo di riconoscimento ed attacco degli spermatozoi. Il sistema sperimentale messo a punto e descritto in questo lavoro viene così a costituire un utile strumento per l'identificazione e lo studio delle proteine del corion presumibilmente impegnate nel processo di corion fecondazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Rosati F. and De Santis R., Exp. Cell. Res., **112**, 111-119 (1978).
[2] Rosati F., De Santis R., Monroy A., Exp. Cell. Res., **116**, 419-427 (1978).
[3] De Santis R., Jamunno G., Rosati F., Develop. Biol., **74** (1980).
[4] Cook, G.M.W. and Stoddart R. W., *Surface Carbohydrates on the Eucaryotic Cell*, Academie Press, London & New York, pp. 257 (1974).
[5] Morrison M., Meth. Enzymol., **32B**, 103-109 (1974).
[6] O' Farrell P. H., J. Biol. Chem., **250**, 4007-4021 (1975).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Chieffi, M. De Vincentiis e V. Leone.

Teoremi di selezione continua per applicazioni plurivoche i cui valori sono unione di uno stesso numero n di insiemi chiusi e convessi

Nota di MARIA TUCCI (Bari) *
presentata dal socio ordinario C. CILIBERTO

(Adunanza del 3 novembre 1979)

SUMMARY. — In this paper continuous selections theorems are showed for n valued functions, defined in a compact and convex subset of a Banach spaces. The values are n ($n \geqslant 1$) non empty, closed, convex subsets of L, where L is a linear normad space or Banach space.

Lo studio delle selezioni continue di applicazioni plurivoche è stato affrontato da E. MICHAEL nei fondamentali lavori [1] e [2], quando l'applicazione è a valori chiusi e convessi ed è semicontinua inferiormente.

Recentemente, L. CARBONE, in vista di applicazioni a questioni di esistenza per sistemi di equazioni funzionali [3], ha studiato (cfr. [4], [5]) il problema dell'esistenza di selezioni continue per applicazioni del tipo $\theta : S \to C(L)$ (ove $C(L)$ denota l'insieme delle parti chiuse e non vuote dello spazio metrico L) tali che, per ogni $x \in S$, $\theta(x)$ sia costituita da n punti di L, con $n > 1$.

Mi è sembrato non privo di interesse esaminare se, applicando successivamente i teoremi di L. Carbone e di E. Michael, si possono ancora stabilire teoremi di selezione continua se l'applicazione $\theta : S \to C(L)$ è tale che, per ogni $x \in S$, sia $\theta(x)$ unione di uno stesso numero n di insiemi chiusi e convessi s_i.

L'idea è quella di selezionare, col teorema di L. Carbone, da una tale applicazione un'altra applicazione continua che abbia come valore un unico insieme chiuso convesso cui si possa applicare il teorema di E. Michael.

* Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi Nazionali per la Matematica del C.N.R. (G.N.A.F.A.).

Questa idea, di non semplice attuazione in generale, ha successo qualora, come prova il lemma 1.6., si riesca a provare la continuità dell'applicazione associata a θ, $\tilde{\theta}(x) = \{s_1, \ldots, s_n\}$, il che ho ottenuto in due diversi casi.

A tal proposito ho stabilito un teorema di esistenza di n selezioni continue, nel caso particolare in cui $\theta(x)$ sia unione di n segmenti chiusi allineati di uno spazio lineare L normato, nella sola ipotesi che θ sia continua rispetto alla distanza d_H di Hausdorff in C(L) (cfr. teor. 1.1.).

Successivamente, passando al caso generale, ho definito un'opportuna distanza $\bar{d}$ sull'insieme $\mathcal{C}_n(L)$ dei chiusi di L, ciascuno dei quali è unione di n convessi chiusi, non vuoti e disgiunti, che gode della proprietà che se $\theta : S \to \mathcal{C}_n(L)$ è continua con la metrica definita da $\bar{d}$, essa è continua anche con la metrica definita da d_H.

Riesco, così, ancora a stabilire un teorema di esistenza di n selezioni continue per $\theta : S \to C(L)$, nell'ipotesi in cui θ sia continua rispetto alla suddetta distanza $\bar{d}$ (cfr. teor. 2.1.), ed L è uno spazio di Banach.

Se $n = 1$ si ritrovano, in ogni caso, i risultati di E. Michael, per θ continua.

Se gli n convessi si riducono ad n punti dello spazio L, si ritrovano i teoremi di L. Carbone, quando L è uno spazio lineare normato.

Entrambi i teoremi 1.1., 2.1., seguono dal lemma 1.5.

1. — Sia S un compatto convesso in uno spazio di Banach D. Indicheremo con L uno spazio lineare normato la cui norma sarà denotata con $\| \cdot \|_L$ e con C(L) invece l'insieme delle parti chiuse e non vuote di L.

Con $I(x_o, \delta)$, $x_o \in S$ (risp. $x_o \in L$), indicheremo l'intorno circolare in S (risp. in L) di centro x_o e raggio δ.

Denoteremo con d sia la distanza in D, sia quella in L indotta dalla norma $\| \cdot \|_L$, con d_H invece indicheremo la distanza di Hausdorff in C(L) così definita:

$$d_H : X \times Y \in C(L) \times C(L) \to \max \{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \}$$

mentre se A e B sono due qualunque parti non vuote di L, porremo

$$d(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y)$$

Data un'applicazione plurivoca $\theta : S \to C(L)$, una selezione estratta da θ è un'applicazione φ da S in L tale che:

$$\varphi : x \in S \to \varphi(x) \in \theta(x) \subset L$$

LEMMA 1.1. — *Sia* $\theta : S \to C(L)$ *tale che* $\theta(x)$ *sia costituito, per ogni* $x \in S$, *da* n $(n > 1)$ *segmenti chiusi disgiunti di* L, *a due a due allineati* [1].

Se θ *è continua, per ogni* $x \in S$ *ed* $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+^*$, *con* $\varepsilon_0 < \frac{1}{6} \min_{\substack{s_i, s_j \in \theta(x) \\ i \neq j}} d(s_i, s_j)$, *esiste* $\delta_0 \in \mathbf{R}_+^*$ *godente della seguente proprietà: qualunque siano* x_1 *e* x_2 *punti estremi di due segmenti distinti di* $\theta(x)$ *tali che non esistano punti di* $\theta(x)$ *fra essi compresi, e comunque si prendano* $y \in I(x, \delta_0)$ *e* $y', y'' \in \theta(y)$ *soddisfacenti alla condizione:*

$$d(y', x_1) < \varepsilon_0 \qquad d(y'', x_2) < \varepsilon_0 \tag{1}$$

risulta che y' *e* y'' *appartengono anch'essi a due segmenti distinti di* $\theta(y)$.

Dim. — Sia $x \in S$ ed $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tale che

$$\varepsilon_0 < \frac{1}{6} \min_{\substack{s_i, s_j \in \theta(x) \\ i \neq j}} d(s_i, s_j) \tag{2}$$

Per la continuità di θ esiste $\delta_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tale che sussista l'implicazione:

$$d(x, y) < \delta_0 \Rightarrow d_H(\theta(x), \theta(y)) < \varepsilon_0. \tag{3}$$

Posto $\theta(x) = \bigcup_{i=1}^{n} s_i$, consideriamo $x_1 \in s_1, x_2 \in s_2$ punti estremi, rispettivamente, di s_1 ed s_2 tali che fra x_1 ed x_2 non ci siano punti appartenenti a $\theta(x)$.

Siano inoltre $y \in I(x, \delta_0)$ e y', y'' elementi di $\theta(y)$ tali che:

$$d(x_1, y') < \varepsilon_0, \qquad d(x_2, y'') < \varepsilon_0 \tag{4}$$

Per assurdo supponiamo che y', y'' appartengano ad uno stesso segmento t_j di $\theta(y)$.

Consideriamo il punto medio $y_m = y' + y''/2 \in \theta(y)$. Tenendo presente che dalla (2) consegue, qualunque siano $x_i, x_j \in \theta(x)$, $x_i \neq x_j$,

[1] Due segmenti disgiunti di uno spazio lineare metrico si dicono allineati tra loro, se esiste un segmento di tale spazio che li contiene.

$$d(\mathrm{I}(x_i, \varepsilon_o), \mathrm{I}(x_j, \varepsilon_o)) \geq \frac{2}{3} d(x_i, x_j)$$

risulta, per (4):

$$d(y_m, y') > 2\,\varepsilon_o.$$

Analogamente $d(y_m, y'') > 2\,\varepsilon_o$. Si ha allora:

(5) $$y_m \notin \mathrm{I}(x_1, \varepsilon_o) \quad \text{e} \quad y_m \notin \mathrm{I}(x_2, \varepsilon_o)$$

Ma $y_m \in \theta(y)$, quindi per (3) risulta $d(y_m, \theta(x)) < \varepsilon_o$, per cui esiste $x' \in \theta(x)$ tale che

(6) $$d(y_m, x') < \varepsilon_o$$

D'altra parte anche il punto medio $x_m = x_1 + x_2/2$ è tale che

(7) $$d(y_m, x_m) < \varepsilon_o$$

allora se si considera il segmento $\overline{x' x_m}$, risulta, tenendo presente (6) e (7),

(8) $$\forall\, \bar{x} \in \overline{x' x_m} : d(\bar{x}, y_m) < \varepsilon_o.$$

Ora, poiché tra x_1 e x_2 non ci sono punti di $\theta(x)$, risulta $x_m \notin \theta(x)$ mentre è $x' \in \theta(x)$, allora nel segmento $\overline{x' x_m}$ si troverà o il punto x_1 oppure il punto x_2, dunque si ha per (8)

$$d(x_1, y_m) < \varepsilon_o \text{ oppure } d(x_2, y_m) < \varepsilon_o$$

ma ciò è assurdo per la (5).

OSSERVAZIONE 1.1. — Siano $x, y \in \mathrm{S}$ e x_1, x_2 due punti di un segmento s_1 di $\theta(x)$. Se y_1, y_2 sono due punti di un segmento t_1 di $\theta(y)$ tali che

$$d(x_1, y_1) < \varepsilon_o, \; d(x_2, y_2) < \varepsilon_o$$

risulta

$$d_{\mathrm{H}}(\overline{x_1 x_2}, \; \overline{y_1 y_2}) < \varepsilon_o$$

LEMMA 1.2. — *Nelle stesse ipotesi del Lemma* 1.1., *per ogni* $x \in \mathrm{S}$ *ed* $\varepsilon_o \in \mathbf{R}_+^*$ *esiste* $\delta_o \in \mathbf{R}_+^*$ *tale che per ogni* $y \in \mathrm{I}(x, \delta_o)$, *comunque si*

prenda un segmento t_i di $\theta(y)$ esiste uno ed un solo segmento s_i di $\theta(x)$ tale che per una sua opportuna parte s_i' si abbia:

$$d_H(s_i', t_i) < \varepsilon_0 \tag{9}$$

Dim. — Sia $x \in S$ ed $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+^*$ con $\varepsilon_0 < \frac{1}{6} \min_{\substack{s_i, s_j \in \theta(x) \\ i \neq j}} d(s_i, s_j)$.

Sia inoltre $\delta_0 \in \mathbf{R}_+^*$ soddisfacente alla condizione precisata nel lemma 1.1.

Consideriamo $y \in I(x, \delta_0)$ e un segmento t_i di $\theta(y)$. Siano y_i, y_{i+1} i suoi punti estremi. Per (3), essendo $d(x, y) < \delta_0$, si ha $d(y_i, \theta(x)) < \varepsilon_0$ e $d(y_{i+1}, \theta(x)) < \varepsilon_0$, per cui esistono x_i' e x_{i+1}' punti di $\theta(x)$ tali che

$$d(y_i, x_i') < \varepsilon_0 \text{ e } d(y_{i+1}, x_{i+1}') < \varepsilon_0 \tag{10}$$

I punti x_i' e x_{i+1}' di $\theta(x)$ non possono appartenere a due segmenti distinti di $\theta(x)$. Infatti sia per assurdo $x_i' \in s_i$, $x_{i+1}' \in s_j$ con $i \neq j$.

Consideriamo i punti estremi x_i di s_i e x_j di s_j tali che $d(x_i, x_j) = d(s_j, s_j)$.

Essendo s_i ed s_j allineati, risulta

$$x_i = \lambda x_i' + \mu x_{i+1}' \qquad \text{con } \lambda + \mu = 1$$

$$x_{i+1} = \lambda' x_i' + \mu' x_{i+1}' \qquad \text{con } \lambda' + \mu' = 1$$

Posto $y_i' = \lambda y_i + \mu y_{i+1}$ e $y_{i+1}' = \lambda' y_i + \mu' y_{i+1}$, risulta $y_i' \in t_i, y_{i+1}' \in t_i$ e per (10)

$$d(y_i', x_i) < \varepsilon_0, \; d(y_{i+1}', x_{i+1}) < \varepsilon_0$$

Se fra x_i e x_{i+1} non si trovano altri punti di $\theta(x)$, per il lemma 1.1. avremmo che y_i' e y_{i+1}' apparterrebbero a due segmenti distinti di $\theta(y)$, mentre per quanto ora visto $y_i' \in t_i$, $y_{i+1}' \in t_i$.

Se invece fra x_i e x_{i+1} ci sono punti di $\theta(x)$, vuol dire che esiste qualche segmento di $\theta(x)$ compreso fra x_i e x_{i+1}. Fra questi consideriamo quel segmento s_k tale fra x_i ed s_k non ci siano altri punti di $\theta(x)$.

Con lo stesso ragionamento visto precedentemente, in corrispondenza di x_i e del punto estremo x_k di s_k tale che $d(x_i, x_k) = d(s_i, s_k)$

esisterebbero due punti di $\theta(y)$ appartenenti ad uno stesso segmento di $\theta(y)$ a distanza l'uno da x_i e l'altro da x_k minore di ε_o. Ma ciò, per il lemma 1.1., è assurdo.

Si può allora concludere che i punti x_i' , x_{i+1}' di $\theta(x)$ verificanti la condizione (10) appartengono ad uno stesso segmento s_i di $\theta(x)$.

Dall'osservazione 1.1. segue che:

$$d_H(\overline{y_i\, y_{i+1}},\ \overline{x_i'\, x_{i+1}'}) < \varepsilon_o$$

da cui tenendo presente che $t_i = \overline{y_i\, y_{i+1}}$, posto $s_i' = \overline{x_i'\, x_{i+1}'}$, risulta $s_i' \subset s_i$ e quindi $d_H(t_i, s_i') < \varepsilon_o$.

L'unicità del segmento s_i consegue dalla particolare scelta di ε_o.

LEMMA 1.3. — *Sia* $\theta : S \to C(L)$ *tale che* $\theta(x)$ *sia costituito, per ogni* $x \in S$, *da* n $(n > 1)$ *segmenti chiusi disgiunti di* L *allineati tra loro* [2].

Se θ *è continua, allora l'applicazione*:

$$d_o : x \in S \to \min_{\substack{s_i, s_j \in \theta(x) \\ i \neq j}} d(s_i, s_j) \in \mathbf{R}$$

è continua.

Dim. — Fissati $x \in S$ ed $\varepsilon_o \in \mathbf{R}_+^*$ tale che

$$\varepsilon_o < 1/6\ d_o(x)$$

sia $\delta_o \in \mathbf{R}_+^*$ soddisfacente le condizioni precisate nei lemma 1.1. e 1.2., e sia $y \in I(x, \delta_o)$.

Siano inoltre s_1, s_2 (risp. t_1, t_2) due segmenti di $\theta(x)$ (risp. di $\theta(y)$) per i quali risulta

$$(11) \qquad d(s_1, s_2) = d_o(x) \qquad (\text{risp. } d(t_1, t_2) = d_o(y))$$

Essendo $d(s_1, s_2) = \inf_{x' \in s_1,\, x'' \in s_2} d(x', x'')$ e s_1, s_2 insiemi chiusi, esistono $x_1 \in s_2$ e $x_2 \in s_2$ tali che

$$(12) \qquad d(x_1, x_2) = d(s_1, s_2)$$

[2] Cfr. nota 1 pag. 3.

Analogamente siano $y_1 \in t_1, y_2 \in t_2$ tali che

$$d(y_1, y_2) = d(t_1, t_2) \tag{13}$$

Si osserva intanto che essendo i segmenti di $\theta(x)$ allineati tra loro, fra x_1 e x_2 non ci sono altri punti di $\theta(x)$ distinti da x_1 e x_2. Ciò comporta che x_1 è punto estremo di s_1 e x_2 è punto estremo di s_2. Analogamente per y_1 e y_2.

Per (3), essendo x_1 e x_2 elementi di $\theta(x)$ e $y \in S$ tale che $d(x,y) < \delta_0$, si ha

$$d(x_1, \theta(y)) < \varepsilon_0, \qquad d(x_2, \theta(y)) < \varepsilon_0 \tag{14}$$

per cui esistono y', y'' elementi di $\theta(y)$ tali che

$$d(x_1, y') < \varepsilon_0, \qquad d(x_2, y'') < \varepsilon_0 \tag{15}$$

Il lemma 1.1. assicura che y' e y'' appartengono a due segmenti distinti di $\theta(y)$. Risulta allora

$$d_0(y) < d(y', y'') \tag{16}$$

inoltre per (15)

$$d(y', y'') - d(x_1, x_2) \leq d(y', x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, y'') - d(x_1, x_2) < 2\varepsilon_0$$

da cui, tenendo presente (11) e (16)

$$d_0(y) - d_0(x) < 2\varepsilon_0$$

Invertendo l'ufficio di (x_1, x_2) e (y_1, y_2) si può ripetere lo stesso ragionamento precedente, una volta però che si provi che esistono due punti x', x'' che appartengono a due segmenti distinti di $\theta(x)$ e tali che $d(x', y_1) < \varepsilon_0$, $d(x'', y_2) < \varepsilon_0$.

Infatti, essendo $d_0(y) = d(t_1, t_2)$, per il lemma 1.2., in corrispondenza di t_1 e t_2 esistono s_i' ed s_j' segmenti contenuti rispettivamente in s_i ed s_j, segmenti di $\theta(x)$ univocamente determinati, tali che

$$d_H(s_i', t_1) < \varepsilon_0, \qquad d_H(s_j', t_2) < \varepsilon_0$$

Risulta $s_i \neq s_j$. Infatti se $s_i = s_j$, essendo i segmenti di $\theta(x)$ in numero di n, quanti sono i segmenti di $\theta(y)$, e poiché a ciascuno di questi ultimi corrisponde un unico segmento di $\theta(x)$, esisterebbe un segmento s_k di $\theta(x)$ che non contiene alcun segmento che abbia distanza da almeno un $t_k \subset \theta(y)$, minore di ε_0.

Ma ciò porta ad un assurdo. Infatti se $\bar{x} \in s_k$, essendo $d(\bar{x}, \theta(y)) < \varepsilon_0$, esisterebbe $\bar{y} \in \theta(y)$ tale che $d(\bar{x}, \bar{y}) < \varepsilon_0$.

Se $\bar{y} \in t_j$, considerato il segmento s_j di $\theta(x)$ per il quale una sua parte s_j' verifica la condizione $d_H(t_j, s_j') < \varepsilon_0$ (cfr. lemma 1.2.), esisterebbe un punto $\bar{x}' \in s_j' \subset s_j$ tale che $d(\bar{x}', \bar{y}) < \varepsilon_0$. Da ciò conseguirebbe, essendo $d(\bar{y}, \bar{x}) < \varepsilon_0$,

$$d(\bar{x}', \bar{x}) < 2\,\varepsilon_0$$

il che è assurdo in quanto $d(\bar{x}', \bar{x}) \geq d(s_j, s_k) > 6\,\varepsilon_0$.

LEMMA 1.4. — *Sia* $\theta : S \to C(L)$ *continua tale che* $\theta(x)$ *sia unione, per ogni* $x \in S$, *di n segmenti chiusi disgiunti di* L, *allineati tra loro* [3].

Allora per ogni $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+^*$ *esiste* $\delta_0 \in \mathbf{R}_+^*$ *tale che per ogni* $x \in S$, *se* s_1 *è un segmento di* $\theta(x)$ *e* $y \in I(x, \delta_0)$, *esiste un segmento* t_1' contenuto *in un segmento* t_1 *di* $\theta(y)$ *per il quale si ha*:

$$d_H(s_1, t_1') < \varepsilon_0$$

Dim. — *Sia* $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tale che (cfr. lemma 1.3.)

$$\varepsilon_0 < 1/6 \min_{x \in S} d_0(x)$$

e $\delta_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tale da verificare l'implicazione:

$$d(x, y) < \delta_0 \Rightarrow d_H(\theta(x), \theta(y)) < \varepsilon_0 \tag{16}$$

Proviamo che δ_0 soddisfa le condizioni dichiarate nell'enunciato.

Consideriamo $x \in S$ ed s_1 segmento di $\theta(x)$ di estremi x_1 e x_2.

Sia $y \in I(x, \delta_0)$. Per (16) si ha che $d(x_1, \theta(y)) < \varepsilon_0$ e $d(x_2, \theta(y)) < \varepsilon_0$. Siano allora y', y'' elementi di $\theta(y)$ tali che

$$d(x_1, y') < \varepsilon_0, \qquad d(x_2, y'') < \varepsilon_0 \tag{17}$$

Se proviamo che y' e y'' appartengono ad uno stesso segmento t_1 di $\theta(y)$, per (17) e l'osservazione 1.1., si avrà:

$$d_H(s_1, \overline{y'\,y''}) < \varepsilon_0$$

e quindi, essendo $\overline{y'\,y''} \subset t_1$, l'asserto sarà provato.

[3] Cfr. nota 1 pag. 3.

Per assurdo sia $y' \in t_i$ e $y'' \in t_j$ con $i \neq j$.

Supponiamo in primo luogo che tra t_i e t_j non si trovi alcun segmento di $\theta(y)$.

Siano $y_1 \in t_i$, $y_2 \in t_j$ i punti estremi rispettivamente di t_i e t_j tali che $d(y_1, y_2) = d(t_i, t_j)$.

Essendo t_i e t_j allineati tra loro, risulta

$$y_1 = \lambda_1 y' + \mu_1 y'' \quad \text{con} \quad \lambda_1 + \mu_1 = 1$$

$$y_2 = \lambda_2 y' + \mu_2 y'' \quad \text{con} \quad \lambda_2 + \mu_2 = 1$$

Posto $x' = \lambda_1 x_1 + \mu_1 x_2$ e $x'' = \lambda_2 x_1 + \mu_2 x_2$, risulta $x', x'' \in s_1$ e

$$d(x', y_1) < \varepsilon_0, \qquad d(x'', y_2) < \varepsilon_0 \tag{18}$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\theta^{\varepsilon_0}_{y_1}(x) = \{\bar{x} \in \overline{x'\,x''} \mid d(\bar{x}, y_1) < \varepsilon_0\}$$

$$\theta^{\varepsilon_0}_{y_2}(x) = \{\bar{x} \in \overline{x'\,x''} \mid d(\bar{x}, y_2) < \varepsilon_0\}$$

Essi sono non vuoti in quanto per (18) $x' \in \theta^{\varepsilon_0}_{y_1}(x)$ e $x'' \in \theta^{\varepsilon_0}_{y_2}(x)$ e ovviamente aperti. Risulta inoltre

$$\overline{x'\,x''} = \theta^{\varepsilon_0}_{y_1}(x) \cup \theta^{\varepsilon_0}_{y_2}(x)$$

consegue allora, essendo $\overline{x'\,x''}$ un insieme connesso, che l'intersezione $\theta^{\varepsilon_0}_{y_1}(x) \cap \theta^{\varepsilon_0}_{y_2}(x)$ è non vuota. Sia $\bar{x}$ un punto appartenente a tale intersezione. Risulta allora

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, \bar{x}) + d(\bar{x}, y_2) < 2\,\varepsilon_0$$

mentre è, per come si è scelto ε_0, $d(y_1, y_2) > 6\,\varepsilon_0$.

Rimane ora da esaminare il caso in cui fra t_i e t_j si trovi un segmento t_k di $\theta(y)$. In questo caso si considerano i punti estremi y_i, y_k rispettivamente di t_i e t_k tali che $d(y_i, y_k) = d(t_i, t_k)$. Tali punti, essendo t_i e t_k allineati con t_j, si possono esprimere come combinazione lineare dei punti y' e y''.

Basta allora ripetere lo stesso ragionamento visto per i punti y_1 e y_2.

LEMMA 1.5. — *Sia* $\theta : S \to C(L)$ *tale che* $\theta(x)$ *sia un segmento dello spazio lineare normato* L, *per ogni* $x \in S$.

Se θ *è continua, allora* θ *ammette almeno due selezioni continue distinte.*

Dim. — Sia $\theta' : \theta(S) \to C(L)$ l'applicazione che ad ogni segmento di $\theta(S)$, associa i suoi punti estremi.

Risulta θ' continua rispetto alla distanza di Hausdorff su $\theta(S)$.

A tal proposito sia $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ e $\delta = \varepsilon/6$. Se s_1, t_1 sono due segmenti di $\theta(S)$ tali che

$$d_H(s_1, t_1) < \delta$$

e x_1, x_2 e y_1, y_2 sono i punti estremi rispettivamente di s_1 e t_1, con un ragionamento abbastanza elementare, si vede facilmente che

$$d(x_1, \theta'(y)) < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad d(x_2, \theta'(y)) < \varepsilon/2$$

da cui

$$\sup_{x_i \in \theta'(x)} d(x_i, \theta'(y)) < \varepsilon$$

Analogamente si prova che

$$\sup_{y_i \in \theta'(y)} d(y_i, \theta'(x)) < \varepsilon$$

donde la continuità di θ'.

L'applicazione composta $\theta' \circ \theta : S \to C(L)$ risulta allora un'applicazione continua di S in C(L) tale che per ogni $x \in S$ $\theta' \circ \theta(x)$ è costituito da due elementi di L. Per il Teorema 1.1. di [4] esistono due selezioni continue distinte θ_1, θ_2 di S a valori in L, tali che

$$\forall x \in S : \theta_i(x) \in \theta' \circ \theta(x), \quad i = 1,2$$

Da ciò, essendo $\theta' \circ \theta(x)$ una parte di $\theta(x)$, per ogni $x \in S$, θ_1 e θ_2 risultano due selezioni continue di θ distinte, donde la tesi.

LEMMA 1.6. — *Sia* L *uno spazio di Banach e* $\theta : S \to C(L)$ *tale che* $\theta(x)$ *sia unione, per ogni* $x \in S$, *di* n $(n > 1)$ *insiemi* s_i *chiusi, convessi e non vuoti di* L, *a due a due disgiunti.*

Posto $C(L) = L'$, *se* $C(L')$ *denota l'insieme delle parti chiuse e non vuote di* L', *munito della distanza di Hausdorff, e se l'applicazione*

$$\bar{\theta} : S \to C(L')$$

così definita:

$$(19) \qquad x \in S \to \tilde{\theta}(x) = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \quad \text{con} \quad \bigcup_{i=1}^{n} s_i = \theta(x)$$

è continua da S *in* C(L'), *allora l'applicazione* θ *ammette almeno* n *selezioni continue distinte* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$.

Dim. — Essendo $\tilde{\theta}$ continnua e $\tilde{\theta}(x)$ costituito da n elementi di C(L'), per il Teorema 1.1. di [4], $\tilde{\theta}$ ammette n selezioni continue distinte

$$\tilde{\theta}_i : S \to L' = C(L), \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

tali che

$$(20) \qquad \forall x \in S : \tilde{\theta}_i(x) \in \tilde{\theta}(x), \qquad \tilde{\theta}_i(x) \cap \tilde{\theta}_j(x) = \emptyset, \qquad i \neq j$$

Per ogni $i = 1,2, \ldots, n$ risulta $\tilde{\theta}_i$ un'applicazione continua di S a valori in C(L) tale che per ogni $x \in S$, $\tilde{\theta}_i(x) = s_i$ è un insieme chiuso e convesso di L.

Per il Teorema 3.2" di [1], esiste una selezione continua

$$\theta_i : S \to L$$

tale che

$$\forall x \in S : \theta_i(x) \in \tilde{\theta}_i(x) = s_i \subset \theta(x)$$

Da ciò consegue che θ_i è una selezione continua di θ in quanto risulta $\theta_i(x) \in \theta(x)$, per ogni $x \in S$.

Inoltre per (20), se $i \neq j$, si ha che $\theta_i(x) \neq \theta_j(x)$, per ogni $x \in S$.

θ ammette allora n selezioni continue distinte.

OSSERVAZIONE 1.2. — Se L è soltanto uno spazio lineare normato e $\theta(x)$ è unione di n segmenti chiusi e disgiunti di L, il lemma precedente sussiste ancora, con l'avvertenza che l'esistenza delle selezioni continue θ_i di $\tilde{\theta}_i$ discende in tal caso dal Lemma 1.5.

TEOREMA 1.1. — *Siano*: S *un convesso compatto in uno spazio di Banach* D; L *uno spazio lineare normato*, θ *un'applicazione continua da* S *in* C(L), *tale che* $\theta(x)$ *sia unione, per ogni* $x \in S$, *di* n $(n > 1)$ *segmenti chiusi disgiunti di* L, *allineati tra loro*[4]. *Allora* θ *ammette almeno* n *selezioni continue distinte.*

[4] Cfr. nota 1 pag. 3.

Dim. — Per il lemma 1.6., tenendo presente l'Osservazione 1.2., è sufficiente provare che l'applicazione $\tilde{\theta} : S \to C(L')$ definita come in (19) è continua.

Sia $\varepsilon_o \in \mathbf{R}_+^*$ tale che (cfr. Lemma 1.3.)

$$\varepsilon_o/2 < 1/6 \min_{x \in S} d_o(x) \tag{21}$$

e $\delta_o \in \mathbf{R}_+^*$ verificante le condizioni del Lemma 1.4. e l'implicazione:

$$d(x, y) < \delta_o \Rightarrow d_H(\theta(x), \theta(y)) < \varepsilon_o/2 \tag{22}$$

Siano x, y in S tali che $d(x, y) < \delta_o$ e poniamo $\theta(x) = \bigcup_{i=1}^{n} s_i$ e $\theta(y) = \bigcup_{i=1} t_i$.

Consideriamo un segmento s_1 di $\theta(x)$ di estremi x_1 e x_2. Per il Lemma 1.4., esiste un segmento t_1', contenuto in un segmento t_1, tale che

$$d_H(s_1, t_1') < \varepsilon_o/2 \tag{23}$$

Siano y_1' e y_2' gli estremi di t_1' e y_1, y_2 gli estremi di t_1. Risulta intanto (cfr. dim. lemma 1.4.)

$$d(x_1, y_1') < \varepsilon_o/2, \qquad d(x_2, y_2') < \varepsilon_o/2 \tag{24}$$

Supponiamo che y_1' sia più vicino a y_1. Sul segmento $\overline{y_1 y_1'}$ consideriamo un numero finito di punti $z_o = y_1', z_1, \ldots, z_m = y_1$ tali che

$$d(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon_o/2 \qquad \forall i \in \{0,1, \ldots, m-1\} \tag{25}$$

Essendo ogni $z_i \in \theta(y)$, per (22) si ha che $d(z_1, \theta(x)) < \varepsilon_o/2$, per cui esiste $x' \in \theta(x)$ tale che

$$d(z_1, x') < \varepsilon_o/2 \tag{26}$$

Risulta $x' \in s_1$, perché se per assurdo $x' \in s_j$, con $s_i \neq s_1$, si avrebbe per (26) (25) e (24), tenendo presente che $y_1' = z_o$,

$$d(x', x_1) \leq d(x', z_1) + d(z_1, y_1') + d(y_1', x_1) < 3\,\varepsilon_o/2$$

mentre è per (21) $d(x', x_1) > 3\,\varepsilon_o$.

Consegue allora per (24), (26) e l'osservazione 1.1.

$$d_H(\overline{x' x_1}, \overline{y_1' z_1}) < \varepsilon_0/2$$

da cui, essendo $\overline{x' x_1} \subset s_1$,

$$\forall \bar{y} \in \overline{y_1' z_1} : d(\bar{y}, s_1) < \varepsilon_0/2$$

Analogamente, considerato il segmento $\overline{z_2 z_3}$, si ha

$$\forall \bar{y} \in \overline{z_2 z_3} : d(\bar{y}, s_1) < \varepsilon_0/2$$

Per ricorrenza finita si ha

$$\forall \bar{y} \in \overline{z_{m-1} z_m} : d(\bar{y}, s_1) < \varepsilon_0/2 \tag{27}$$

Allora, tenendo presente che $\overline{y_1' y_1} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \overline{z_i z_{i+1}}$, si ha

$$\forall \bar{y} \in \overline{y_1' y_1} : d(\bar{y}, s_1) < \varepsilon_0/2 \tag{27}$$

Analogamente per il segmento $\overline{y_2' y_2}$ si ha:

$$\forall \bar{y} \in \overline{y_2' y_2} : d(\bar{y}, s_1) < \varepsilon_0/2 \tag{28}$$

Da (23), (27) e (28) consegue, essendo t_1 unione dei segmenti $\overline{y_1 y_1'}$, $\overline{y_1' y_2'}$, $\overline{y_2' y_2}$,

$$\sup_{\bar{y} \in t_1} d(\bar{y}, s_1) < \varepsilon_0 \tag{29}$$

D'altra parte, poiché $t_1' = \overline{y_1' y_2'} \subset t_1$, per (23) si ha

$$\sup_{\bar{x} \in s_1} d(\bar{x}, t_1) \leq \sup_{\bar{x} \in s_1} d(\bar{x}, t_1') < \varepsilon_0 \tag{30}$$

Le (29) e (30) assicurano che

$$d_H(s_1, t_1) < \varepsilon_0.$$

Risulta allora, essendo $\tilde{\theta}(y) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$,

$$d(s_1, \tilde{\theta}(y)) < \varepsilon_0$$

comunque si consideri s_1 segmento di $\tilde{\theta}(x)$.

Analogamente si prova che per ogni $t_i \in \tilde{\theta}(y)$ si ha

$$d(t_i, \tilde{\theta}(x)) < \varepsilon_0$$

donde la tesi.

OSSERVAZIONE 1.3. — Una dimostrazione più semplice è possibile se si richiede l'esistenza di almeno una selezione continua per θ. Basta infatti ricorrere all'applicazione continua che ha come valore in x il più piccolo segmento chiuso contenente tutti i segmenti di $\theta(x)$, da cui poi è facile ottenere una selezione continua per θ.

2. — Sia L uno spazio di Banach. Per ogni $n \in N$, $n > 1$, consideriamo l'insieme $\mathcal{C}_n(L)$ delle parti di L ciascuna delle quali è unione di n convessi, chiusi, non vuoti e disgiunti di L.

L'applicazione

$$\bar{d} : \mathcal{C}_n(L) \times \mathcal{C}_n(L) \to \mathbf{R}$$

così definita:

$$\forall X, Y \in \mathcal{C}_n(L),\ X = \bigcup_{i=1}^{n} s_i,\ Y = \bigcup_{j=1}^{n} t_j : \bar{d}(X, Y) =$$

$$= \max \left\{ \sup_{i=1,\ldots,n} d\left(s_i, \bigcup_{j=1}^{n} t_j \right), \sup_{j=1,\ldots,n} d\left(t_j, \bigcup_{i=1}^{n} s_i \right) \right\}$$

ove

$$d\left(s_i, \bigcup_{j=1}^{n} t_j \right) = \inf_{j \in \{1,\ldots,n\}} d_H(s_i, t_j) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$d\left(t_j, \bigcup_{i=1}^{n} s_i \right) = \inf_{i \in \{1,\ldots,n\}} d_H(t_j, s_i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

si prova essere una distanza su $\mathcal{C}_n(L)$.

Sia $\theta : S \to \mathcal{C}_n(L)$ tale che, per ogni $x \in S$, $\theta(x)$ sia appunto unione di n convessi chiusi, disgiunti e non vuoti di L.

Se θ è continua rispetto alla metrica $\bar{d}$, si prova facilmente che essa è continua rispetto alla metrica d_H indotta da $C(L)$ su $\mathcal{C}_n(L)$.

Sussiste allora il seguente

TEOREMA 2.1. — *Se $\theta : S \to \mathcal{C}_n(L)$ è continua rispetto alla metrica definita da $\bar{d}$, allora θ ammette almeno n selezioni continue distinte.*

Dim. — Per il Lemma 1.6., è sufficiente provare che risulti continua l'applicazione

$$\tilde{\theta} : x \in S \to \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset C(L) \quad \text{ove} \quad \bigcup_{i=1}^{n} s_i = \theta(x)$$

A tal proposito siano $\varepsilon/2 \in \mathbf{R}_+^*$ e $\delta \in \mathbf{R}_+^*$ tali da verificare l'implicazione

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \bar{d}(\theta(x), \theta(y)) < \varepsilon/2 \tag{2}$$

Fissiamo $x, y \in S$ tali che $d(x,y) < \delta$ e sia $\theta(x) = \bigcup_{i=1}^{n} s_i$, $\theta(y) = \bigcup_{j=1}^{n} t_j$. Da (2) segue che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ risulta

$$d\left(s_i, \bigcup_{j=1}^{n} t_j\right) < \varepsilon/2$$

Essendo $d\left(s_i, \bigcup_{j=1}^{n} t_j\right) = \inf_{j \in \{1,\ldots,n\}} d_H(s_i, t_j)$ si ha che esiste $j \in \{1,\ldots,n\}$ tale che

$$d_H(s_i, t_j) < \varepsilon/2$$

da cui

$$\sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} d(s_i, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}) < \varepsilon$$

Analogamente si prova che

$$\sup_{j \in \{1,\ldots,n\}} d(t_j, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}) < \varepsilon$$

donde la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. MICHAEL, *Continuous selections I*, Ann. of Math., **63** (1956), pagg. 361-382.
[2] E. MICHAEL, *Continuous selections II*, Ann. of Math., **64** (1956), pagg. 562-580.
[3] L. CARBONE, *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni funzionali*, Ricerche di Mat. XXV (1976) pagg. 31-50.
[4] L. CARBONE, *Su un criterio di selezione continua*, B.U.M.I., **12** (1975), pagg. 127-138.
[5] L. CARBONE, *Selezioni continue in spazi non lineari e punti fissi*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Tomo XXV (1976) pagg. 101-115.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, C. Miranda e G. Scorza Dragoni.

Sulla differenziabilità regolare delle funzioni di n variabili

Nota di ROSALBA CARRESE (a Napoli) *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza dell'1 dicembre 1979)

RIASSUNTO. — Si dà una caratterizzazione delle funzioni di n variabili differenziabili in modo regolare o semiregolare.

SUMMARY. — A characterization of functions of n variables regulary or semiregulary differentiable is obtained.

Recentemente, utilizzando i concetti di differenziale regolare e semiregolare [1], ho ottenuto una caratterizzazione delle funzioni di due variabili dotate q.o. di derivate parziali o di derivata parziale rispetto ad una e di derivata parziale asintotica rispetto all'altra variabile.

Allo scopo di estendere i risultati ottenuti al caso di funzioni di n variabili (con $n > 2$) ho dato una generalizzazione per funzioni di n variabili del concetto di differenziale semiregolare (cfr. 1) ed ho stabilito delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione di n variabili sia q.o. asintoticamente differenziabile in modo regolare [2] o semiregolare, ritrovando così, come caso particolare, i risultati ottenuti in [3] e un teorema di FADELL (cfr. [4]).

1. — Sia f una funzione numerica definita in un intervallo $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ di R^n. Con le lettere x, x°, ecc. indicheremo i punti di R^n di coordinate $x_1, \ldots, x_n$, $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$, ecc., con h ed ω i punti di R^{n-1} aventi coordinate $h_1, \ldots, h_{i-1}, h_{i+1}, \ldots, h_n$ e coordinate tutte nulle

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni del C.N.R.

[1] Le nozioni di differenziale asintotico regolare e semiregolare per funzioni di due variabili sono state introdotte rispettivamente da R. CACCIOPPOLI e G. SCORZA DRAGONI (cfr. [1]) e G. SCORZA DRAGONI e M. VOLPATO (cfr. [7]) (in tal senso cfr. anche F. CAFIERO [2]).

[2] L'estensione del concetto di differenziale asintotico regolare al caso di funzioni di n variabili è dovuto a A. FADELL (cfr. [4]).

rispettivamente, con μ (risp. μ_k) e μ^* (risp. μ_k^*) rispettivamente la misura e la misura esterna di LEBESGUE in R^n (risp. in R^k, $k < n$).

Diremo che *f è asintoticamente differenziabile in modo regolare*, oppure che *f è dotata di differenziale asintotico regolare, rispetto alle variabili* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ *in* x^o interno a Δ, se esistono n numeri reali $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e un sottoinsieme H di R simmetrico rispetto a 0 e di densità 1 in esso tale che, denotato $\forall\, j \neq i$ con I_j^k l'intervallo

$$\left] x_j^o - |\, k\,|, x_j^o + |\, k\,| \right[$$

e con $K_i(x^o)$ l'insieme

$$\bigcup_{k \in H} I_1^k \times \cdots \times I_{i-1}^k \times \{x_i^o + k\} \times I_{i+1}^k \times \cdots \times I_n^k$$

risulta

$$\lim_{\substack{x \to x^o \\ x \in K_i(x^o)}} \frac{f(x) - f(x^o) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j - x_j^o)}{d(x, x^o)} = 0 \quad [3].$$

In altri termini, la condizione richiesta è che in x^o sia differenziabile in senso ordinario la funzione f ristretta al sottoinsieme $K_i(x^o)$ di R^n costituito dalle facce, individuate al variare di $k \in H$ dagli iperpiani $x_i = x_i^o + k$, degli elementi di una famiglia di cubi contenuti in Δ aventi facce parallele ai piani coordinati e tale che x^o sia di densità per $K_i(x^o)$ nella direzione x_i.

Diremo ancora che *f è differenziabile in x^o in direzione dell'iperpiano* $x_i = 0$ se esistono $n - 1$ numeri reali $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n$ tali che, per h che tende a ω abbia limite 0 la funzione

$$\frac{f(x_1^o + h_1, \ldots, x_{i-1}^o + h_{i-1}, x_i^o, x_{i+1}^o + h_{i+1}, \ldots, x_n^o + h_n) - f(x^o) - \sum_{j \neq i} \beta_j h_j}{d((x_1^o + h_1, \ldots, x_{i-1}^o + h_{i-1}, x_i^o, x_{i+1}^o + h_{i+1}, \ldots, x_n^o + h_n), x^o)}.$$

Diamo ora una condizione sufficiente per l'esistenza q.o. in Δ del differenziale asintotico regolare rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$; essa è ottenuta con ragionamenti analoghi a quelli utilizzati da FADELL in [4].

[3] Nel caso $n = 2$ si ritrova la definizione di differenziabilità asintotica semiregolare (cfr. [2], [3] e [7]).

(1.1) *Sia* f *una funzione numerica definita nell'intervallo* $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \subset R^n$, *continua rispetto a* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ *per quasi tutti gli* $x_i \in \Delta_i$, *misurabile rispetto a* x_i *per quasi tutti gli* $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times \cdots \times \Delta_n$. *Allora, se* f *è differenziabile q.o. in* Δ *in direzione dell'iperpiano* $x_i = 0$ *e asintoticamente derivabile q.o. in* Δ *rispetto a* x_i, f *è dotata di differenziale asintotico regolare rispetto alle variabili* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ *q.o. in* Δ.

Dim. — Sia X_0 il sottoinsieme di Δ di misura nulla tale che f sia dotata di differenziale rispetto all'iperpiano $x_i = 0$ e di derivate parziali $f_{x_1}, \ldots, f_{x_{i-1}}, f_{asx_i}, f_{x_{i+1}}, \ldots, f_{x_n}$ in ogni punto di $\Delta - X_0$. Inoltre, sia C_1 un sottoinsieme chiuso di $\Delta - X_0$ tale che le restrizioni di f, $f_{x_1}, \ldots, f_{x_{i-1}}, f_{asx_i}, f_{x_{i+1}}, \ldots, f_{x_n}$ a C_1 siano continue e tale che

$$\mu(\Delta - X_0 - C_1) < \frac{\varepsilon}{4},$$

l'esistenza di un tale insieme essendo assicurata dalle ipotesi di continuità e misurabilità fatte su f (a tale proposito cfr. [8] prop. 1.I) [4].

Sia $x \in C_1$, si ha dunque che è 0 il limite per h che tende ad ω della funzione

$$\frac{f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n) - f(x) - \sum_{j \neq i} f x_j(x) h_j}{d((x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n + h_n), x)}$$

Denotata allora con F la funzione che ad ogni $(x, h) \in C_1 \times I$, dove I è un intervallo di R^{n-1} contenente ω e tale che per ogni $h \in I$ $(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n) \in \Delta$, associa

$$\frac{f(x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n) - f(x) - \sum_{j \neq i} f x_j(x) h_j}{d((x_1 + h_1, \ldots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n), x)},$$

per ogni fissato $h \in I$, F è continua rispetto a x e, inoltre, esiste finito il limite

$$\lim_{h \to \omega} F(x, h) = 0$$

[4] Il citato teorema di STAMPACCHIA consente di affermare invero che assegnato $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un insieme $P \subset \Delta_i$ tale che $\mu_i(\Delta_i - P) < \varepsilon$ ed f sia continua in $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{i-1} \times P \times \Delta_{i+1} \times \cdots \times \Delta_n$. Osserviamo, inoltre, che la citata proposizione fornisce, in virtù di un teorema di LUSIN, la misurabilità di f in Δ e di conseguenza (cfr. [5] th. (11.2)), quella delle sue derivate parziali in Δ.

Si può allora determinare, in virtù di una generalizzazione del teorema di SEVERINI-EGOROFF (cfr. [1])[5] un sottoinsieme di C_1 di misura prossima quanto si vuole a quella di C_1, sul quale la convergenza di $F(x, h)$ a 0 sia uniforme. In conclusione si può affermare che esistono un sottoinsieme C_2 di C_1 chiuso tale che

$$\mu(C_1 - C_2) < \frac{\varepsilon}{4},$$

una costante $M > 0$

$$M = \max_{x \in C_1} \left(\sum_{j \neq i} |f_{x_j}(x)| + |f_{asx_i}(x)| \right)$$

e $\delta_1 > 0$ tali che, per ogni $(x', x'') \in C_2 \times \Delta$ tale che $x_i' = x_i''$, $d(x', x'') < \delta_1$ risulti

$$|f(x') - f(x'')| \leq (M + 1)\, d(x', x'').$$

D'altra parte, poiché f è asintoticamente differenziabile q.o. in Δ, per un noto teorema di STEPANOFF (cfr. [9]) esiste un sottoinsieme C_3 di C_2 che possiamo supporre chiuso, tale che f_{C_3} sia differenziabile in ogni punto di C_3 e sia

$$\mu(C_2 - C_3) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sia ora X_4 l'insieme dei punti di C_3 che sono di densità per C_3 in direzione degli assi coordinati e dell'iperpiano $x_i = 0$, risulta (cfr. [5] th. (11.1))

$$\mu(C_3 - X_4) = 0.$$

Infine, con X_5 denotiamo un sottoinsieme di X_4 tale che per un opportuno $\delta_2 > 0$ verifichi:

a) $\mu(X_4 - X_5) < \frac{\varepsilon}{4}$

[5] La generalizzazione cui ci riferiamo è la seguente: sia $F(x, y, k)$ continua rispetto a (x, y) in un insieme S di misura finita, per ogni $k \neq 0$ di un intorno dello zero; se esiste finito il limite

$$\lim_{k \to 0} F(x, y, k) = g(x, y),$$

si può determinare un sottoinsieme di misura prossima quanto si vuole a quella di S in cui la convergenza di F verso g è uniforme.

b) per ogni $x \in X_5$ e $y \in \Delta$ tali che $d(x, y) < \delta_2$ e $x_i = y_i$ esiste $y^* \in C_3$ tale che $y_i^* = y_i$ e $d(y, y^*) < \dfrac{\gamma}{3(M+1)}\, d(x, y)$,

γ essendo un numero positivo arbitrariamente prefissato.

L'esistenza di un insieme siffatto è garantita da un lemma di FADELL (cfr. [4]).

Consideriamo ora un punto $x^o \in X_5$. Sia $\delta_3 > 0$ tale che, se $x \in C_3$ e $d(x, x^o) < \delta_3$, si ha

$$|f(x) - f(x^o) - \sum_{j \neq i} f_{x_j}(x)(x_j - x_j^o) -$$

$$- f_{asx_i}(x)(x_i - x_i^o)| \leq \frac{\gamma}{6} d(x, x^o)$$

Considerata ora una famiglia di cubi con centro in x^o, lati paralleli ai piani coordinati, tale che x^o sia di densità in ogni direzione coordinata per l'insieme delle loro frontiere e le rette per x^o parallele agli assi coordinati intersechino la frontiera di ciascuno di essi in punti di X_4, sia $K_i(x^o)$ l'insieme delle facce dei cubi di tale famiglia parallele all'iperpiano $x_i = 0$.

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ sia x un punto di $K_i(x^o)$ appartenente ad un cubo di diagonale minore di δ; allora x ha coordinate

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^o + t, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

per un opportuno $t \in R$, sia inoltre

$$\bar{x} = (x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, x_i^o + t, x_{i+1}^o, \ldots, x_n^o),$$

allora $\bar{x} \in X_4$, inoltre

$$d(x, \bar{x}) < \delta_2,$$

quindi esiste per a) e b) $x^* \in C_3$ di coordinate

$$x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^o + t, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*$$

tale che

$$d(x, x^*) < \frac{\gamma}{3(M+1)}\, d(\bar{x}, x).$$

Risulta quindi

$$|f(x) - (x^o) - \sum_{j\neq i} f_{x_j}(x^o)(x_j - x_j^o) - f_{asx_i}(x^o)(x_i - x_i^o)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x^*)| + |f(x^*) - f(x^o) - \sum_{j\neq i} f_{x_j}(x^o)(x_j - x_j^o) -$$

$$- f_{asx_i}(x^o)(x_i - x_i^o)| \leq (M+1)\, d(x, x^*) + |f(x^*) - f(x^o) -$$

$$- \sum_{j\neq i} f_{x_j}(x^o)(x_j^* - x_j^o) - f_{asx_i}(x^o)(x_i^* - x_i^o) +$$

$$+ \sum_{j\neq i} f_{x_j}(x^o)((x_j^* - x_j^o) - (x_j - x_j^o)) + f_{asx_i}(x^o)((x_i^* - x_i^o) -$$

$$- (x_i - x_i^o))| \leq (M+1)\, d(x, x^*) + |f(x^*) - f(x^o) -$$

$$- \sum_{j\neq i} f_{x_j}(x^o)(x_j^* - x_j^o) - f_{asx_i}(x^o)(x_i^* - x_i^o)| +$$

$$+ \left(\sup_{x\in X_5} \left(\sum_{j\neq i} |f_{x_j}(x)| + |f_{asx_i}(x)| \right) \right) d(x^*, x)) \leq$$

$$\leq (M+1)\, d(x, x^*) + \frac{\gamma}{6} d(x^*, x^o) + (M+1) \frac{\gamma}{3(M+1)} d(x^o, x) <$$

$$< \frac{\gamma}{3(M+1)} (M+1)\, d(x, x^o) + \frac{\gamma}{3} d(x, x^o) + \frac{\gamma}{3} d(x, x^o) = \gamma\, d(x, x^o).$$

Allora, per l'arbitrarietà di γ, f ha un differenziale relativamente a $K_i(x^o)$ per ogni $x^o \in X_5$ tale che $\mu(\Delta - X_5) < \varepsilon$; se ne deduce per l'arbitrarietà di ε che f ha un differenziale asintotico regolare rispetto a $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ q.o. in Δ.

(1.2) *Sia f una funzione numerica definita nell'intervallo $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \subset R^n$, continua rispetto a $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ per quasi tutti gli $x_i \in \Delta_i$, misurabile rispetto a x_i per quasi tutti gli $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times \cdots \times \Delta_n$ e dotata q.o. in Δ di differenziale asintotico regolare rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Esiste allora una successione $\{X_k\}_{k\in N}$ crescente di sottoinsiemi di Δ che godono della proprietà:*

« *per ogni x' e x'' $\in X_k$ tali che*

$$|x_j'' - x_j'| < |x_i'' - x_i'| < \frac{1}{k} \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$$

risulta

$$|f(x'') - f(x')| \leq 3\,k\,d(x'', x') \text{ »}$$

e tali che

$$\mu(\Delta - \bigcup_{k \in N} X_k) = 0.$$

Dim. — Sia Δ_0 il sottoinsieme di Δ di misura nulla in cui f non è asintoticamente differenziabile in modo regolare rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, sia $\varepsilon > 0$ arbitrariamente fissato e $x^0 \in \Delta - \Delta_0$.

Esistono allora $\delta > 0$ e n numeri reali $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tali che, qualunque sia $x \in K_i(x^0)$ tale che $d(x, x^0) < \delta$, si abbia

$$\frac{|f(x) - f(x^0)|}{d(x, x^0)} \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|.$$

Denotiamo con $A^{x^0}_{\gamma,k}$ l'insieme dei $t \in R$ tali che

$$\left(\begin{array}{c} |t - x_i^0| \leq \gamma \\ \text{e} \\ x \in \Delta : |x_j - x_j^0| < |t - x_i^0| \ \forall\, j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\} \end{array} \right)$$

implica

$$\left(\frac{|f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x^0)|}{d((x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n), x^0))} \leq k \right),$$

è facile verificare che, per k abbastanza grande, x_i^0 è di densità per $A^{x^0}_{\gamma,k}$, qualunque sia $\gamma < \frac{1}{k}$.

Invero, se k è un intero tale che

$$k > \max \left\{ \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \frac{1}{\delta} \right\}$$

risulta $\gamma < \delta$ e quindi $A^{x^0}_{\gamma,k}$ contiene l'insieme

$$\{t \in R : |t - x_i^0| \leq \gamma \text{ e } (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \in K_i(x^0)\}$$

che ha densità 1 in x_i^0.

Posto poi per ogni $k \in N$ e $\gamma > 0$

$$T^{x^0}_{\gamma,k} = [x_i^0 - \gamma, x_i^0 + \gamma] - A^{x^0}_{\gamma,k}$$

si dimostra [6] che, per k abbastanza grande, x_i^o è di dispersione per $T_{\gamma,k}^{x^o}$ qualunque sia $\gamma < \frac{1}{k}$.

Poniamo ora

$$H_i(x^o) = \{t : (x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, t, x_{i+1}^o, \ldots, x_n^o) \in K_i(x^o)\} \subseteq R$$

si sa che x_i^o è di densità per $H_i(x^o)$ e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{\mu_1(H_i(x^o) \cap I)}{\mu_1(I)} > 1 - \frac{1}{8}$$

se I è un intervallo di R tale che $\mu_1(I) < \delta$; per $k > \bar{k}$ risulta $H_i(x^o) \subseteq A_{\gamma,k}^{x^o}$, con un opportuno $\bar{k}$, e quindi

$$\frac{\mu_1(A_{\gamma,k}^{x^o} \cap I)}{\mu_1(I)} > 1 - \frac{1}{8}$$

se $\mu_1(I) < \delta$ e $k > \bar{k}$ nonché

$$\mu_1(I - A_{\gamma,k}^{x^o}) < \frac{1}{8}\mu_1(I)$$

se $\mu_1(I) < \delta$, $k > \bar{k}$, $\gamma < \frac{1}{k}$.

Scelto allora $k > \bar{k}$, $k > \frac{2}{\delta}$, risulta $2\gamma < \frac{k}{2} < \delta$ e quindi

$$\mu_1(T_{\gamma,k}^{x^o}) < \frac{1}{8} 2\gamma = \frac{1}{4}\gamma$$

per $k > \max\left\{\bar{k}, \frac{2}{\delta}\right\}$ e $\gamma < \frac{1}{k}$.

Denotato allora con X_k l'insieme degli $x^o \in \Delta$ tali che

$$\ll \left(\gamma < \frac{1}{k}\right) \Rightarrow \left(\mu_1(T_{\gamma,k}^{x^o}) < \frac{1}{4}\gamma\right) \gg$$

si ha per i ragionamenti fatti

$$\Delta - \Delta_o \subseteq \bigcup_{k \in N} X_k$$

[6] Affinché x_i^o sia di dispersione per $T_{\gamma,k}^{x^o}$ è sufficiente dimostrare che $A_{x^o}^{\gamma,k}$ è misurabile. A tale scopo si confronti la nota (3) di [3].

e quindi

$$\mu\,(\Delta - \bigcup_{k\in N} X_k) = 0.$$

La successione $\{X_k\}_{k\in N}$ così definita è evidentemente crescente, dimostriamo che è costituita da insiemi misurabili.

A tal fine indichiamo, per ogni $s \in N$, con $\Delta'_{i,s}$ un intervallo contenuto in Δ_i tale che $\mu_1(\Delta_i - \Delta'_{i,s}) < \frac{1}{s}$ e f sia continua in

$$H_s = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{i-1} \times \Delta'_{i,s} \times \Delta_{i+1}, \times \cdots \times \Delta_n,$$

esistente a norma di un teorema di STAMPACCHIA (cfr. [8] e nota (4)); allora X_k si può esprimere al modo seguente

$$X_k = \bigcup_{s\in N} ((X_k \cap H_s) \cup (X_k - H_s)).$$

Per mostrare che X_k è misurabile basta far vedere che per ogni $s \in N$ $X_k \cap H_s$ è chiuso; a ciò si perviene con ragionamenti del tutto analoghi a quelli svolti nel corso della dimostrazione del lemma 1 di [3].

Siano ora x' e $x'' \in X_k$, tali che per ogni $j \in \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}$ sia

$$|x''_j - x'_j| < |x''_i - x'_i| < \frac{1}{k},$$

esiste $x \in \Delta$ tale che sia

1) $x'_j < x_j < x''_j \qquad \forall\, j \in \{1,\ldots,n\}$ [7]

2) $x''_j - x_j < x_i - x''_i, \quad x_j - x'_j < x_i - x'_i \qquad \forall\, j \in \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}$

e

$$\frac{|f(x'') - f(x)|}{d(x'',x)} \le k, \quad \frac{|f(x') - f(x)|}{d(x',x)} \le k.$$

Invero, se ciò non accadesse, per ogni $x \in \Delta$ verificante le 1) e 2) sarebbe vera una delle seguenti relazioni

$$\frac{|f(x'') - f(x)|}{d(x'',x)} > k \quad \frac{|f(x') - f(x)|}{d(x',x)} > k$$

[7] Abbiamo supposto $x'_j < x''_j \quad \forall\, j \in \{1,\ldots,n\}$, analogamente si procede negli altri casi.

e da ciò seguirebbe che per $\gamma = |x_i'' - x_i'|$ almeno uno dei due insiemi A′ e A″ rispettivamente costituiti dai $t \in R$ tali che

« $(|t - x_i'| < \gamma)$

implica

$$\left(\exists x \in \Delta : |x_j - x_j'| < |t - x_i'|, \forall j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\} \text{ e } \frac{|f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x')|}{d((x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n), x')} > k \right) »$$

oppure

« $(|t - x''| < \gamma)$

implica

$$\left(\exists x \in \Delta : |x_j - x_j''| < |t - x_i''|, \forall j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\} \text{ e } \frac{|f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x'')|}{d((x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n), x'')} > k \right) »$$

avrebbe misura maggiore di $\frac{1}{4}\gamma$ e ciò contro l'ipotesi che x' e $x'' \in X_k$.

Di conseguenza si ha

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x)| + |f(x) - f(x'')| \leq$$
$$\leq k\,(d(x', x) + d(x'', x)).$$

Dalle 1) segue

$$d(x', x) \leq d(x', x''), \qquad d(x'', x) \leq d(x', x'')$$

e pertanto

$$|f(x') - f(x'')| \leq 2\,k\,d(x', x'')$$

e ciò completa la dimostrazione.

(1.3) *Sia f una funzione definita nell'intervallo $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ di R^n, continua rispetto a $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ per quasi tutti gli $x_i \in \Delta_i$, misurabile rispetto a x_i per quasi tutti gli $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times \cdots \times \Delta_n$, dotata q.o. in Δ di un differenziale asintotico regolare rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, al-*

lora esiste una successione $\{Y_k\}_{k\in N}$ *crescente di sottoinsiemi misurabili di* Δ *tali che*

$$\mu\,(\Delta - \bigcup_{k\in N} Y_k) = 0,$$

ciascuno dei quali gode della proprietà seguente:

« *per ogni* $x^o \in Y_k$ *tale che* $f(\cdots, x_i^o, \cdots)$ *sia continua in ogni punto di* $\Delta_1 \times\cdots\times\Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n$ *e* $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *sia asintoticamente continua in* x_i^o *per quasi tutti gli* $(x_1,\ldots,x_{i-1}, x_{i+1},\ldots,x_n)\in$ $\in \Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots \times \Delta_n$, *esistono* $\nu \geq k+1$ *e* $\delta > 0$ *tali che, se* x *è un punto di* Δ *verificante le relazioni*

$$|x_j - x_j^o| < \delta \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\},$$

esiste $t \in \Delta_i$ *tale che* $(x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, t, x_{i+1}^o, \ldots, x_n^o) \in X_k$ (cfr. (1.2)) *e risulta*

$$\max_{j\neq i} |x_j - x_j^o| < |t - x_i^o| < 2 \min_{j\neq i} |x_j - x_j^o|$$

e

$$|f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^o, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, t, x_{i+1}^o, \ldots, x_n^o)| \leq$$

$$\leq \nu\, d\,((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^o, x_{i+1}, \ldots, x_n), (x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, t, x_{i+1}^o, \ldots, x_n^o))\ ».$$

Dim. — Sia $\{X_k\}_{k\in N}$ la successione costruita nel corso della dimostrazione della (1.2), indichiamo per ogni $k \in N$ con X_k^o l'insieme di misura nulla costituito dai punti di X_k che non hanno densità lineare 1 nella direzione x_i per X_k. Sia $x^o \in X_k - X_k^o$ tale che, per quasi tutti gli $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n$, la funzione $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ sia asintoticamente continua in x_i^o e $f(\cdots, x_i^o, \cdots)$ sia continua in $\Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n$.

Supponiamo che x^o non goda della proprietà enunciata, allora qualunque sia $\nu \geq k+1$ e qualunque sia $\delta > 0$ esistono $n-1$ punti di R $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n$ tali che

$$0 < |\bar{x}_j - x_j^o| < \delta,\ \bar{x}_j \in \Delta_j \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$$

e inoltre per ogni x_i tale che $(x_1^o, \ldots, x_{i-1}^o, x_i, x_{i+1}^o, \ldots, x_n^o) \in X_k$ e sia

$$\max_{j\neq i} |\bar{x}_j - x_j^o| < |x_i - x_i^o| < 2 \min_{j\neq i} |\bar{x}_j - x_j^o|$$

risulti

$$\frac{|\, f(\bar{x}_i,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\, \bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n) - f(x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ})\,|}{d\,((\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\, \bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n),\,(x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ}))} > \nu.$$

Poiché risulta

$$|\, f(x_1,\ldots,x_{i-1},\, x_i^{\circ},\, x_{i+1},\ldots,x_n) - f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\, \bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n)\,| < \varepsilon$$

per ogni $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ tale che per $\eta_\varepsilon > 0$ opportuno

$$\sqrt{\sum_{j\neq i}(x_j - \bar{x}_j)^2} < \eta_\varepsilon,$$

se x_i è un arbitrario punto di Δ_i tale che

$$\max_{j\neq i} |\, \bar{x}_j - x_j^{\circ}\,| < |\, x_i - x_i^{\circ}\,| < 2 \min_{j\neq i} |\, \bar{x}_j - x_j^{\circ}\,|,$$

scelto allora

$$\varepsilon < d\,((x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ}),\,(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\,\bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n)),$$

si ha

$$|\, f(x_1,\ldots,x_{i-1},\, x_i^{\circ},\, x_{i+1},\ldots,x_n) - f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\,\bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n)\,| <$$

$$d\,((x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ}),\,(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\,\bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n))$$

e quindi

$$|\, f(x_1,\ldots,x_{i-1},\, x_i^{\circ},\, x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ})\,| \geq$$

$$\geq |\, f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\, \bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n) - f(x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ})\,| -$$

$$- |\, f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\, \bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},\, x_i^{\circ},\, x_{i+1},\ldots,x_n)\,| \geq$$

$$\geq \nu\, d\,((\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\, \bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n),\,(x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ})) -$$

$$- d\,((x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ}),\,(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\,\bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n)) \geq$$

$$\geq (\nu - 1)\, d\,((\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{i-1},\, x_i^{\circ},\, \bar{x}_{i+1},\ldots,\bar{x}_n),\,(x_1^{\circ},\ldots,x_{i-1}^{\circ},\, x_i,\, x_{i+1}^{\circ},\ldots,x_n^{\circ})).$$

Sia ora $(x_1',\ldots,x_{i-1}',\, x_{i+1}',\ldots,x_n') \in \Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n$ tale che f sia asintoticamente continua rispetto a x_i in

$$(x_1',\ldots,x_{i-1}',\, x_i^{\circ},\, x_{i+1}',\ldots,x_n'),$$

esistente per l'ipotesi fatta su x^0, e con D il sottoinsieme di R^n di densità lineare 1 nella direzione x_i in x^0 tale che $f(x_1', \ldots, x_{i-1}', \cdot, x_{i+1}', \ldots, x_n')$ sia continua in x_i^0. Se $(x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n') \in D$, $\bar{x}_i$ è un qualsiasi punto di Δ_i ed ε' è compreso tra 0 e $\nu - (k+1)$ risulta

$$| f(x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n') - f(x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n') | <$$

$$\varepsilon' d((x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n'))$$

purché $| t - x_i^0 | < \sigma_{\varepsilon'}$, con $\sigma_{\varepsilon'} > 0$ determinato da ε'.

Allora se $(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \in X_k$ ed è tale che

$$\bar{x}_i - x_i^0 > 0 \,^{8}, \max_{j \neq i} | \bar{x}_j - x_j^0 | < | \bar{x}_i - x_i^0 | < 2 \min_{j \neq i} | \bar{x}_j - x_j^0 |,$$

$$| x_j' - x_j^0 | < | \bar{x}_j - x_j^0 | \,^{9}$$

e se

$$(x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n') \in D, \quad 0 < (t - x_i^0) < \sigma_{\varepsilon'}$$

si ha

$$| f(x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n') - f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) | \geq$$

$$\geq | f(x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n') - f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) | -$$

$$- | f(x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n') - f(x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n') | \geq$$

$$\geq (\nu - 1) d((x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, x_i^0, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n)) -$$

$$- \varepsilon' d((x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n')) >$$

$$> (\nu - 1) d((x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n')) -$$

$$- \varepsilon' d((x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n')) >$$

$$> k d((x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0), (x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n')).$$

[8] Analogamente si ragiona se $\bar{x}_i - x_i^0 < 0$.

[9] Questa ipotesi serve a garantire che

$$d((x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i^0, x_{i+1}', \ldots, x_n'), (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \bar{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)) > \eta,$$

infatti se

$$| x_j' - x_j^0 | < | \bar{x}_j - x_j^0 | \qquad \forall j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$$

si ha

$$\sqrt{\sum_{j \neq i} (x_j^0 - \bar{x}_j)^2 + (x_i^0 - \bar{x}_i)^2} > \sqrt{\sum_{j \neq i} (x_j^0 - x_j')^2 + (\bar{x}_i - x_i^0)^2}.$$

Se inoltre t verifica la relazione

$$0 < \tilde{x}_i - t < \tilde{x}_i - x_i^0$$

e a tal fine è sufficiente che

$$| t - x_i^0 | < \tilde{x}_i - x_i^0 ,$$

si ha

$$| f(x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n') - f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \tilde{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) | \geq$$

$$\geq k\, d((x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n'), (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \tilde{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)).$$

Di conseguenza, qualunque sia $x_i \in \Delta_i$ tale che

$$(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \in X_k$$

e qualunque sia $\gamma > 0$ arbitrario, l'insieme S dei punti $t \in R$ godenti della proprietà:

« $(| t - \tilde{x}_i | < \gamma)$

implica

$$\left(\begin{array}{c} \exists\, x : | x_j - x_j^0 | < | t - \tilde{x}_i | \ \forall\, j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\} \text{ e} \\ \dfrac{| f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \tilde{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) |}{d(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n), (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, \tilde{x}_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0))} > k \end{array} \right) »$$

contiene i punti t tali che

$$| t - x_i^0 | < \min \{ \sigma_{\varepsilon'}, \gamma, \min_{j \neq i} (| \tilde{x}_i - x_i^0 | - | x_j' - x_j^0 |) \} \text{ [10]}$$

e

$$(x_1', \ldots, x_{i-1}', t, x_{i+1}', \ldots, x_n') \in D.$$

Invero, se

$$| t - x_i^0 | < \min_{j \neq i} \{ | \tilde{x}_i - x_i^0 | - | x_i' - x_j^0 | \}$$

risulta

$$| x_j' - x_j^0 | < | \tilde{x}_i - x_i^0 | - | t - x_i^0 | < | \tilde{x}_i - t | + | t - x_i^0 | - | t - x_i^0 |$$

[10] $\forall\, j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ $| \tilde{x}_i - x_i^0 | - | x_j' - x_j^0 | > 0$ per l'ipotesi fatta su $\tilde{x}_i$.

e

$$\frac{|f(x_1',\ldots,x_{i-1}',\ t,\ x_{i+1}',\ldots,x_n') - f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,\ \tilde{x}_i,\ x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)|}{d((x_1',\ldots,x_{i-1}',\ t,\ x_{i+1}',\ldots,x_n'),(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,\ \tilde{x}_i,\ x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0))} > k$$

inoltre, se γ è piccolo, denotato con D_i l'insieme dei $t \in R$ tali che $(x_1',\ldots,x_{i-1}',\ t,\ x_{i+1}',\ldots,x_n') \in D$, risulta anche

$$\mu_1(D_i \cap]\, x_i^0,\ x_i^0 + \gamma\, [) > \frac{3}{4}\gamma$$

e quindi

$$\mu_1(S) > \frac{3}{4}\gamma,$$

ciò contro l'ipotesi che $(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,\ \tilde{x}_i,\ x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0) \in X_k$.

(1.4) *Sia* f *una funzione numerica definita nell'intervallo* $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \subset R^n$, *continua rispetto a* $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ *per quasi tutti gli* $x_i \in \Delta_i$ *e misurabile rispetto a* x_i *per quasi tutti i punti*

$$(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times \cdots \times \Delta_n;$$

allora, condizione necessaria affinché sia dotata q.o. in Δ *di un differenziale asintotico regolare rispetto alle variabili* $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ *è che* f *sia differenziabile q.o. in* Δ *in direzione dell'iperpiano* $x_i = 0$ *e asintoticamente derivabile rispetto a* x_i *q.o. in* Δ.

Dim. — Osserviamo innanzitutto che se f è asintoticamente differenziabile in modo regolare rispetto a $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ q.o. in Δ, f è q.o. in Δ dotata di derivata parziale asintotica (finita) rispetto a x_i.

Invero, denotato con Δ_0 l'insieme di misura nulla in cui f non è asintoticamente differenziabile rispetto alle variabili $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$, per ogni $x \in \Delta - \Delta_0$ esistono $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ numeri reali e un insieme $H \subset R$ simmetrico rispetto a 0, di densità 1 in esso tale che, definito $K_i(x)$ come nel paragrafo 1, risulta

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in K_i(x)}} \frac{f(y) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (y_j - x_j)}{d(y,x)} = 0$$

e di conseguenza

$$\lim_{\substack{k \to 0 \\ k \in H}} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i + k,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x) - \alpha_i k}{k} = 0$$

da cui $f_{asx_i}(x) = \alpha_i$.

Sia $\{Y_k\}_{k\in N}$ (risp. $\{X_k\}_{k\in N}$) la successione determinata dalla (1.3) (risp. 1.2), con Δ_i' denotiamo l'insieme degli $x_i \in \Delta_i$ tali che abbia misura esterna positiva l'insieme degli

$$(x_1,\dots,x_{i-1},\ x_{i+1},\dots,x_n) \in \Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n$$

tali che

$$(x_1,\dots,x_n) \in (\Delta - \bigcup_{k\in N} Y_k) \cup \Delta_0$$

e con Δ_i'' l'insieme degli $x_i \in \Delta_i$ per i quali non si ha che

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},\ \cdot,\ x_{i+1},\dots,x_{i+1})$$

sia asintoticamente continua in x_i per quasi tutti gli

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n;$$

risulta

$$\mu_1(\Delta_i' \cup \Delta_i'') = 0.$$

Sia $x^0 \in \Delta$ tale che $x_i^0 \in \Delta_i - (\Delta_i' \cup \Delta_i'')$, facciamo vedere che f è differenziabile in direzione dell'iperpiano $x_i = 0$ in $(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n)$ per quasi tutti gli $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n$; siano $k \in N$ tale che $x^0 \in Y_k$, $\delta > 0$ e $\nu \in N$ come dalla (1.3). Considerato $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \Delta_1 \times\cdots\times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times\cdots\times \Delta_n$ tale che

$$d((x_1,\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n),x^0) < \min\left\{\delta,\frac{1}{2\nu}\right\}$$

da cui

$$|x_j - x_j^0| < \min\left\{\delta,\frac{1}{2\nu}\right\} \qquad \forall\, j \in \{1,\dots,i-1,\ i+1,\dots,n\},$$

esiste $t \in \Delta_i$ tale che

$$(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,\ t,\ x_{i+1}^0,\dots,x_n^0) \in X_k,$$

$$\max_{j\neq i} |x_j - x_j^0| < |t - x_i^0| < 2\min_{j\neq i} |x_j - x_j^0|$$

e

$$|f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n) - f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,\ t,\ x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)| \leq$$

$$\nu\, d((x_1,\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n),(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,\ t,\ x_{i+1}^0,\dots,x_n^0));$$

allora si ha

$$|f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^\circ,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x^\circ)| \le |f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^\circ,x_{i+1},\dots,x_n)| -$$

$$-f(x_1^\circ,\dots,x_{i-1}^\circ,t,x_{i+1}^\circ,\dots,x_n^\circ)| + |f(x_1^\circ,\dots,x_{i-1}^\circ,t,x_{i+1}^\circ,\dots,x_n^\circ)-f(x^\circ)| \le$$

$$\le \nu\, d((x_1,\dots,x_{i-1},x_i^\circ,x_{i+1},\dots,x_n),(x_1^\circ,\dots,x_{i-1}^\circ,t,x_{i+1}^\circ,\dots,x_n^\circ)| +$$

$$+ 2\nu|t-x_i^\circ| = \nu(\sqrt{5}+2k)\, d((x_1,\dots,x_{i-1},x_i^\circ,x_{i+1},\dots,x_n),x^\circ)).$$

f è quindi localmente lipschitziana rispetto a $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ in x°, da cui segue, per un noto teorema di STEPANOFF (cfr. [5] e [9]) che $f(\dots,x_i^\circ,\dots)$ è differenziabile q.o. in $\Delta_1\times\cdots\times\Delta_{i-1}\times\Delta_{i+1}\times\cdots\times\Delta_n$.

Denotato allora con A l'insieme dei punti $x_0\in\Delta$ in cui non è vero che f è differenziabile in direzione dell'iperpiano $x_i=0$ nel punto $(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^\circ,x_{i+1},\dots,x_n)$ per quasi tutti gli $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ appartenenti a $\Delta_1\times\cdots\times\Delta_{i-1}\times\Delta_{i+1}\times\cdots\times\Delta_n$, risulta

$$A_i=\{t\in\Delta_i:(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)\in A\}\subseteq\Delta_i'\cup\Delta_i''$$

e quindi A_i è di misura nulla.

Ne segue allora, essendo A misurabile (cfr. nota (4)), $\mu(A)=0$ e quindi la tesi.

Dalla (1.1) e dalla (1.4) discende la proposizione:

(1.5) *Sia f una funzione numerica definita nell'intervallo $\Delta=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n\subset R^n$, continua rispetto a $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ per quasi tutti gli $x_i\in\Delta_i$ e misurabile rispetto a x_i per quasi tutti i punti $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\in\Delta_1\times\cdots\times\Delta_{i-1}\times\Delta_{i+1}\times\cdots\times\Delta_n$; allora condizione necessaria e sufficiente affinché f sia dotata q.o. in Δ di un differenziale asintotico regolare rispetto alle variabili $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ è che f sia differenziabile q.o. in Δ in direzione dell'iperpiano $x_i=0$ e asintoticamente derivabile rispetto a x_i q.o. in Δ.*

2. — Sia f una funzione numerica definita nell'intervallo $\Delta=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n$ di R^n.

Diremo che f è asintoticamente differenziabile in modo regolare in x° interno a Δ ovvero che *f è dotata di differenziale asintotico regolare in x°* se f è asintoticamente differenziabile in x° in modo regolare rispetto ad ogni gruppo di $n-1$ variabili.

In altri termini, affinché f sia dotata di differenziale asintotico regolare in x° occorre che esista una famiglia di cubi con lati paral-

leli ai piani coordinati tale che l'insieme delle loro frontiere $K(x^0)$ abbia in x^0 densità superficiale e lineare in ogni direzione coordinata 1 e la restrizione di f a $K(x^0)$ sia differenziabile in x^0 in senso ordinario.

(2.1) *Sia f una funzione numerica definita nell'intervallo $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ di R^n, continua rispetto a $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ per quasi tutti gli $x_i \in \Delta_i$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$; allora condizione necessaria e sufficiente affinché f sia dotata di un differenziale asintotico regolare q.o. in Δ è che f sia differenziabile rispetto a ogni iperpiano $(n-1)$ dimensionale q.o. in Δ.*

Dim. — È banale, tenuto conto della (1.5).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Caccioppoli e G. Scorza Dragoni, *Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie*, Reale Accademia d'Italia, **9** (1938), 251-268.

[2] F. Cafiero, *Un'estensione della formula di Green e sue conseguenze*, Ric. di Mat., **2** (1953), 91-93.

[3] R. Carrese, *Sulle funzioni differenziabili in modo regolare e semiregolare*, Rend. del Circolo Matematico di Palermo, II, XXVI (1977), 55-68.

[4] A. Fadell, *On the existence of regular approximate differentials*, Proc. of the American Mathematical Society, 37, **2** (1973), 541-544.

[5] S. Saks, *Theory of the integral*, Dover publications, New York (1964).

[6] G. Scorza Dragoni, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. di Padova, **17** (1948), 102-106.

[7] G. Scorza Dragoni e M. Volpato, *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine*, Rend. Sem. Mat. di Padova, **20** (1951), 446-461.

[8] G. Stampacchia, *Sopra una classe di funzioni di n variabili*, Ric. di Mat., **1** (1952), 27-54.

[9] W. Stepanoff, *Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale*, Mat. Sb., **32** (1925), 511-526.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, G. Scorza-Dragoni e G. Cimmino.

Su un modello teorico per l'espansione di atomi di un metallo posto su di un atomizzatore *

Nota di MARIO M. COCLITE **
presentata dal socio corrispondente ANTONIO AVANTAGGIATI

(Adunanza dell'1 dicembre 1979)

SUMMARY. — In this paper we prove an existence and uniqueness theorem in Sobolev spaces, for a parabolic problem in a corner with non linear boundary conditions. This problem arises in release and spreading of atoms in the space above an infinite plane surface, an which the atoms are initially uniformly deposited.

INTRODUZIONE

In [9] è stato elaborato un modello teorico per l'espansione di atomi di un metallo posto su di un atomizzatore (una barretta di graffite riscaldata). Si è supposto che il fenomeno si verifichi (fin dall'inizio) in condizioni di equilibrio nell'interfase stato solido, stato gassoso.

Dette $c(z,\tau)$ la concentrazione volumetrica (atomi/cm^3) degli atomi, del metallo atomizzato, alla quota z e al tempo τ, $\Phi(\tau)$ la concentrazione superficiale (atomi/cm^2), sulla barretta, al tempo τ, varie ipotesi e considerazioni hanno condotto alle seguenti relazioni.

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial \tau}(z,\tau) = D\dfrac{\partial^2 c}{\partial z^2}(z,\tau) - \nu\dfrac{\partial c}{\partial z}(z,\tau) & z>0,\ \tau>0, \\ c(z,0) = 0 & z>0, \\ c(+\infty,\tau) = 0 & \tau>0, \\ \Phi'(\tau) = \left(D\dfrac{\partial c}{\partial z}(z,\tau) - \nu c(z,\tau)\right)\Big|_{z=0} & \tau>0, \end{cases}$$

* Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.
** Istituto di Analisi Matematica, Palazzo Ateneo, Via Nicolai 2 - 70121 Bari.

$$(*)\quad \begin{cases} (1 - f(\Phi(\tau)))\,\dfrac{k_c(\tau)}{\omega}\,\Phi'(\tau) = -\,k_r(\tau)\,\Phi(\tau) + \\ \qquad + k_c(\tau)\,f(\Phi(\tau))\,c(0,\tau) & \tau > 0, \\ \qquad \Phi(0) = \Phi_0 \qquad (0 < \Phi_0 < q), \end{cases}$$

dove $D\,(\in \bar{\mathbb{R}}_+^{\,1})$ è il coefficiente di diffusione, $v\,(\in \bar{\mathbb{R}}_+)$ la velocità del gas inerte in cui si espande il metallo, $\omega\,(\in \mathbb{R}_+)$ è un parametro. $f(\Phi) = 1 - \Phi/q$ è la frazione di posto non occupata, $q\,(\in \mathbb{R}_+)$ è la concentrazione superficiale a « copertura » completa, $k_r\,(:\bar{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+)$ parametro di rilassamento e $k_c\,(:\bar{\mathbb{R}}_+ \to [0, \omega/2])$ parametro di rideposizione (cfr. [9]).

In [9] è studiato il caso $D = 0$, $v > 0$ (effetti di diffusione trascurabili), qui ci occupiamo invece del caso $D > 0$, $v \geq 0$.

Diviso il problema in due parti (cfr. N. 2).

$$(*,*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial \tau}(z,\tau) = D\,\dfrac{\partial^2 c}{\partial z^2}(z,\tau) - v\,\dfrac{\partial c}{\partial z}(z,\tau) & z > 0,\ \tau > 0, \\ c(z,0) = 0 & z > 0, \\ c(+\infty,\tau) = 0 & \tau > 0, \\ \Phi'(\tau) = \left(D\,\dfrac{\partial c}{\partial z}(z,\tau) - v\,c(z,\tau)\Big|_{z=0}\right) & \tau > 0, \end{cases}$$

$$(*,*,*)\quad \begin{cases} (1 - f(\Phi))\,k_c\,\omega^{-1}\,\Phi' = -\,k_r\,\Phi + k_c\,f(\Phi)\,c\Big|_{z=0} & \tau > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0 \qquad (0 < \Phi_0 < q), \end{cases}$$

procedendo euristicamente, mediante un potenziale di doppio strato, abbiamo ottenuto una formula di rappresentazione di $c(z,\tau)$ in funzione di $\Phi'(\tau)$ (cfr. N. 2)[2]. Indi dedotto, dalla citata formula, $c(0,\tau)$ in funzione di $\Phi'(\tau)$ e sostituita l'espressione ottenuta in $(*,*,*)$, si è trasformato quest'ultimo problema in una equazione integro-differenziale non lineare. Associato a quest'ultima un opportuno opera-

[1] $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$, $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty[$.

[2] Questo è lecito quando si suppone $\Phi' \in W_p^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$ e si intende cercare la soluzione di $(*,*)$ in $W_p^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, ossia lo spazio delle $u \in L_p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ tali che $u_x, u_t, u_{xx} \in L_p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$. In questo caso $(*,*)$ ha un'unica soluzione. Si veda ad esempio [1], [6], [10].

tore, la risoluzione di $(*, *, *)$ è stata dunque ricondotta alla ricerca dei punti uniti di detto operatore.

Abbiamo provato, mediante il teorema di Tychonov, che se $k_r(\tau)/k_r(0)$ e $(k_c(\tau)/k_c(0)) \cdot (k_r(\tau)/k_r(0))^{-1}$ sono abbastanza piccoli (cfr. (2.2)) esiste un'unica funzione Φ continua, non negativa, non crescente, soluzione di $(*, *, *)$ e tale che $\Phi' \sigma \in L_{p'}(\mathbb{R}_+)$, con σ opportuna funzione ponderale crescente e $p' > 2$.

Poi mediante teoremi di immersione e regolarizzazione abbiamo riconosciuto che $\Phi' \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$ con $p < p'$ e $p \in]1,4[$ (cfr. N. 3).

Il lavoro si compone di tre paragrafi.

Nel primo si sono definiti gli spazi funzionali in cui abbiamo risolto $(*, *)$ e $(*, *, *)$.

Nel secondo si è essenzialmente affrontato il problema $(*, *)$ e nel terzo $(*, *, *)$.

1. - Su certi spazi funzionali

Diamo brevi ragguagli su certi spazi funzionali.

Essi sono trattati ampiamente, ad esempio, in [1], [4], [6], [10].

Detto (x, t) il generico elemento di $\mathbb{R}^2$, per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ [3] poniamo per brevità $\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2}}$.

Posto $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \Lambda$ (cfr. (1)) e assegnato $p \in]1, +\infty[$, $W_p^{2,1}(\Lambda)$ denota lo spazio delle $u \in L_p(\Lambda)$ tali che $\partial_x u, \partial_t u, \partial_x^2 u \in L_p(\Lambda)$ Questi munito della norma:

$$u \in W_p^{2,1}(\Lambda) \to \| u \|_{o,p} + \| \partial_x u \|_{o,p} + \| \partial_t u \|_{o,p} + \| \partial_x^2 u \|_{o,p},$$

dove $\| \ \|_{o,p}$ è la norma di $L_p(\Lambda)$, è completo.

Indicato con $\mathfrak{D}_{\bar{\Lambda}}$ lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili in $\bar{\Lambda}$ e ivi a supporto compatto, questi è denso in $W_p^{2,1}(\Lambda)$.

Assegnato $\ell \in \bar{\mathbb{R}}_+$, $W_p^{\ell}(\mathbb{R}_+)$ indica lo spazio delle $\Phi \in L_p(\mathbb{R}_+)$ le cui derivate fino all'ordine $[\ell]$ [4] appartengono ad $L_p(\mathbb{R}_+)$ e se $\ell - [\ell] = \lambda > 0 (\lambda < 1!)$ risulti anche:

$$\mathfrak{T}'_{\ell,p}(\Phi) = \left(\int_{\Lambda} \frac{| \Phi^{([\ell])}(t) - \Phi^{([\ell])}(y) |^p}{| t - y |^{1+p\lambda}} \, dt \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

[3] $\mathbb{N} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \}$.

[4] $[\ell] = \max \{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq \ell \}$.

Quando $\ell \in \mathbb{N}$ le applicazioni

$$\| \quad \|_{\ell,p} : \Phi \in W_p^\ell(\mathbb{R}_+) \to \sum_{k=0}^{\ell} \| \Phi^{(k)} \|_{0,p};$$

$$\| \quad \|_{\ell,p}^{*} : \Phi \in W_p^\ell(\mathbb{R}_+) \to \| \Phi \|_{0,p} + \| \Phi^{(\ell)} \|_{0,p},$$

($\| \quad \|_{0,p}$ denota la norma di $L_p(\mathbb{R}_+)$!), definiscono norme equivalenti in $W_p^\ell(\mathbb{R}_+)$. $W_p^\ell(\mathbb{R}_+)$ normato con una qualsiasi di queste norme è completo.

Invece se $\ell \notin \mathbb{N}$, posto $\ell - [\ell] = \lambda$ e

$$\mathfrak{C}''_{\ell,p}(\Phi) = \left(\int_\Lambda \frac{| \Phi^{([\ell])}(y+h) - \Phi^{([\ell])}(y) |^p}{h^{1+p\lambda}} \, dy \, dh \right)^{\frac{1}{p}};$$

$$\mathfrak{C}'''_{\ell,p}(\Phi) = \left(\int_0^{+\infty} dy \int_0^1 \frac{| \Phi^{([\ell])}(y+h) - \Phi^{([\ell])}(y) |^p}{h^{1+p\lambda}} \, dh \right)^{\frac{1}{p}}$$

le applicazioni $\| \quad \|_{j,p} + \mathfrak{C}'_{\ell,p}$, $\| \quad \|_{j,p} + \mathfrak{C}''_{\ell,p}$, $\| \quad \|_{j,p} + \mathfrak{C}'''_{\ell,p}$, $j = 0, [\ell]$, sono norme equivalenti in $W_p^\ell(\mathbb{R}_+)$ (cfr. [7] vol. II; [10]). Anche in questo caso $W_p^\ell(\mathbb{R}_+)$ munito di una qualsiasi di esse è completo.

Detto $\mathfrak{D}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili in $\overline{\mathbb{R}}_+$ e a supporto compatto, questi è denso in $W_p^\ell(\mathbb{R}_+)$.

Segnaliamo, a conclusione, il seguente risultato (cfr. [1], [3], [6]).

TEOREMA 1.1. — *L'applicazione* $u \in \mathfrak{D}_\Lambda \to \partial_x u \,|_{x=0} \in \mathfrak{D}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ *è prolungabile in una suriezione lineare e continua da* $W_p^{2,1}(\Lambda)$ *in* $W^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$.

Definiamo un altro spazio funzionale.

Siano $p \in]1, +\infty[$ e $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione *submoltiplicativa*[5], diciamo $L_p^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$ lo spazio delle funzioni misurabili $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$ tali che, detta Φ' la derivata di Φ, nel senso delle distribuzioni, risulti $\Phi' \sigma \in L_p(\mathbb{R}_+)$.

---

[5] Una funzione $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$ si dice *submoltiplicativa* se è continua e qualunque siano $t, t' \in \overline{\mathbb{R}}_+$ risulti $\sigma(t + t') \leqslant \sigma(t)\,\sigma(t')$.

L'applicazione

$$\Phi \in L^1_p(\bar{\mathbb{R}}_+, \sigma) \to \Phi(0) + \| \Phi' \sigma \|_{o,p}$$ [6]

è una norma. $L^1_p(\bar{\mathbb{R}}_+, \sigma)$ munito di tale norma è completo.

Detto $C^o_B(\bar{\mathbb{R}}_+)$ lo spazio delle funzioni continue e limitate in $\mathbb{R}_+$, risulta:

TEOREMA 1.2. — *Indicato con q l'esponente complementare di p si ha*:

a. $\dfrac{1}{\sigma} \in L_q(\mathbb{R}_+) \Rightarrow L^1_p(\bar{\mathbb{R}}_+, \sigma) \hookrightarrow C^o_B(\bar{\mathbb{R}}_+)$ [7]

b. $\dfrac{1}{\sigma} \in L_q(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+) \Rightarrow \forall\, p' \in [1,p] : L^1_p(\bar{\mathbb{R}}_+, \sigma) \hookrightarrow L^1_{p'}(\bar{\mathbb{R}}_+, 1).$

Dim. — Il lemma di Du Bois-Reymond (cfr. ([6])) la funzione $t \in \bar{\mathbb{R}}_+ \to \int_0^t \Phi'(s)\, ds$ è continua e si ha

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(s)\, ds, \qquad t \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

Grazie alla diseguaglianza di Hölder si deduce subito *a.* Poi se $p' \in [1, p[$, per la stessa diseguaglianza risulta:

$$(\| \Phi' \|_{o,p'})^{p'} = \int_0^{+\infty} | \Phi'(s)\, \sigma(s) |^{p'} \sigma(s)^{-p'}\, ds \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} | (\Phi' \sigma)(s) |^p\, ds \right)^{\frac{p'}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \sigma(s)^{-\frac{p'p}{p-p'}}\, ds \right)^{\frac{p-p'}{p}}$$

$$\leq (\| \Phi' \sigma \|_{o,p})^{p'} \left(\left\| \frac{1}{\sigma} \right\|_{\gamma,q} \right)^{\frac{p-p'}{p-1}} \operatorname*{ess\,sup}_{t \geq 0} \sigma(t)^{-p\left(\frac{p'}{p-p'} - \frac{1}{p-1}\right)},$$

da cui discende la *b.* per $p' < p$. Infine se $p' = p$ l'asserto è conseguenza della limitatezza di $1/\sigma$.

---

[6] Per il lemma di Du Bois-Reymond ([11] tome 1, pg. 201) Φ è continua, perciò ha senso considerare $\Phi(0)$.

[7] $\hookrightarrow$ sta per « immersione continua ».

2. - Il problema

Per studiare (*) occorre, preliminarmente, che le grandezze coinvolte nel problema siano adimensionali. A questo si riconduce mediante opportune sostituzioni (cfr. [9]):

$$k_r(0) = k_r^o, \qquad k_c(0) = k_c^o,$$

$$\varepsilon = k_r^o D (k_c^o)^{-2}, \qquad t = \tau k_r^o \varepsilon,$$

$$x = z k_r^o (k_c^o)^{-1}, \qquad \lambda_r = k_r (k_r^o)^{-1},$$

$$\lambda_c = k_c (k_c^o)^{-1}, \qquad u(x,t) = k_c^o c(z,\tau)(\Phi_o k_r^o)^{-1},$$

$$\Psi = \Phi \Phi_o^{-1}, \qquad \theta_o = \Phi_o q^{-1},$$

$$\alpha = v(\varepsilon k_c^o)^{-1}.$$

Indi si ottengono equazioni, dello stesso tipo delle precedenti, che scriveremo fra poco.

Per acquisire la consistenza del modello occorre essenzialmente stabilire « teoremi di esistenza e unicità ». Pertanto è d'uopo formulare con precisione un problema che sia, appunto, traduzione di (*) in termini matematici. Perciò studieremo il seguente problema:

$\mathcal{S}$ « *Assegnati* $p \in]1, +\infty[$ *e* $\theta_o \in]0,1[$, *cercare* $(u,\Psi) \in W_p^{2,1}(\Lambda) \times$ $\times C^o(\bar{\mathbb{R}}_+)$ *tale che* $u \geq 0$ *q.o.*, $\Psi' \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$ *e*

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = (\partial_x^2 - \alpha \partial_x) u(x,t) & (x,t) \in \Lambda \ q.o. \\ u(x,t)\big|_{t=0} = 0 & x \in \mathbb{R}_+ \quad q.o. \\ (\partial_x - \alpha I) u(x,t)\big|_{x=0} = \Psi'(t) & t \in \mathbb{R}_+ \quad q.o. \\ \varepsilon \Psi'(t) = \dfrac{-\lambda_r(t)\Psi(t) + \lambda_c(t)(1-\theta_o\Psi(t))u(x,t)\big|_{x=0}}{1-\lambda_c(t)(1-\theta_o\Psi(t))k_c^o \omega^{-1}} & t \in \mathbb{R}_+ \quad q.o. \\ 0 \leq \theta_o \Psi(t) \leq 1 & t \in \mathbb{R}_+ \quad q.o. \\ \Psi(0) = 1 \end{cases}$$

dove I *è l'ingezione canonica,* $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $k_c^\circ > 0$, $\omega > 0$, $\lambda_c : \overline{\mathbb{R}}_+ \to$ $\to [0, \omega (2 k_c^\circ)^{-1}]$, $\lambda_r : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *funzioni misurabili* ».

Onde pervenire ad una formulazione « equivalente » di $\mathcal{S}$, ma più semplice da studiare, cominciamo con l'occuparci del seguente problema parabolico nell'angolo.

$\mathcal{S}_1$ « *Assegnati* $p \in]1, +\infty[$ *e* $\Phi \in W_p^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} (\mathbb{R}_+)$, *determinare* $v \in W_p^{2,1} (\Lambda)$ *per cui*

$$\begin{cases} \partial_t v (x, t) = (\partial_x^2 - \alpha \partial_x) v (x, t) & (x, t) \in \Lambda \text{ q.o.} \\ v (x, t)\big|_{t=0} = 0 & x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{q.o.} \\ (\partial_x - \alpha \mathrm{I}) v (x, t)\big|_{t=0} = \Phi (t) & t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{q.o.} \end{cases}$$

dove α, I *hanno il significato dianzi precisato* ».

Per $\mathcal{S}_1$ sussiste un teorema di esistenza, unicità e rappresentazione della soluzione (cfr. ad esempio [1] pg. 118; [10] pg. 106-108) quando Φ verifichi opportune condizioni (condizioni di compatibilità nel vertice di Λ). Precisamente si ha:

TEOREMA 2.1. — *Se* $p \in]1,3[$, *ovvero* $p \geq 3$ *e* $\Phi (0) = 0$, $\mathcal{S}_1$ *ha un'unica soluzione. Inoltre posto*

$$G (x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x}{t^{3/2}} e^{-\frac{(x - \alpha t)^2}{4t}};$$

$$g (t) = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4} t}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\alpha}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{t} \right)^{8}, \qquad x > 0, \qquad t > 0$$

---

[8] erfc è la « funzione di errore »: $t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-s^2} ds$. Evidentemente erfc (0) = = 1; $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{erfc} (t) = 0$ (cfr. [2], [5]). Grazie ai metodi dell'analisi elementare è facile provare che g è una funzione positiva.

$v(x,t) = -(G(x,\cdot) * g * \Phi(t)$[9] *è la soluzione di* $\mathcal{S}_1$ *e* $v(x,t)\big|_{x=0} = -(g * \Phi)(t)$, *dove la convoluzione è intesa rispetto a* t.

Dim. — Diamo soltanto un cenno di dimostrazione, in quanto $\mathcal{S}_1$ rientra in una categoria ben più vasta di problemi ampiamente trattati ad esempio in [1], [6], [10].

Essendo $\partial_t G = (\partial_x^2 - \alpha \cdot \partial_x)G$, in Λ, si ha facilmente che $G(x,\cdot) * g * \Phi$ è una soluzione di $\partial_t v = (\partial_x^2 - \alpha\,\partial_x)v$ in Λ. Poi mercé l'ausilio della trasformazione di Laplace si ha: $(\partial_x - \alpha\, I)(G(x,\cdot) * g) = -G(x,\cdot)$. Pertanto:

$$(\partial_x - \alpha\, I)\, v(x,t)\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0+} (\partial_x - \alpha)\, v(x,t) =$$

$$= \lim_{x\to 0+} (G(x,\cdot) * \Phi)(t) = \Phi(t), \qquad t > 0$$

$$v(x,t)\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0+} (G(x,\cdot) * g * \Phi)(t) = -(g * \Phi)(t), \qquad t > 0$$

In fine per quanto concerne l'appartenenza di v a $W_p^{2,1}(\Lambda)$ e l'unicità della soluzione di $\mathcal{S}_1$ rinviamo ai lavori prima citati e alle loro bibliografie.

Grazie a questi risultati la risoluzione di $\mathcal{S}$ è dunque rinviata a quello del seguente problema non lineare.

$\mathcal{S}_2$ « *Assegnati* $p \in]1,3[$ *e* $\theta_0 \in]0,1[$ *cercare* $\Psi \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *tale che* $\Psi' \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$ *e*

$$\begin{cases} \varepsilon \Psi'(t) = \dfrac{-\lambda_r(t)\Psi(t) - \lambda_c(t)(1-\theta_0\Psi(t))(g * \Psi')(t)}{1 - \lambda_c(t)(1-\theta_0\Psi(t))\, k_c^0\, \omega^{-1}}, & t > 0, \\ 0 \le \theta_0 \Psi(t) \le 1 & t > 0, \\ \Psi(0) = 1, \end{cases}$$

dove ε, λ_r, λ_c, g, k_c^0, ω *hanno il significato già precisato* ».

Dalle proprietà dei termini che compaiono nell'equazione precedente si deduce che ogni eventuale soluzione Ψ di $\mathcal{S}_2$ è tale che

[9] Qui e in seguito, $(h * k)(t)$, $t > 0$, significa, qualora abbia senso, $\int_0^t h(s)\, k(t-s)\, ds$, $t > 0$.

$\Psi'(0) \neq 0$. Allora per il ruolo di Ψ' in $\mathfrak{F}$ e il precedente teorema, p deve essere scelto in $]\,1,3\,[$. Considerando però $\mathfrak{F}_2$ indipendentemente da $\mathfrak{F}$, come faremo nel prossimo paragrafo, p potrà essere scelto in $]\,1,4\,[$. Infatti sussiste il seguente teorema (che proveremo nel prossimo paragrafo):

TEOREMA 2.2. — *Siano* $p \in]\,1,4\,[$, $p' > \max\{2, p\}$ *e* σ *una funzione submoltiplicativa crescente tale che* $\sigma(0) = 1$ *e*

$$\frac{1}{\sigma} \in L_{q'}(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1; \tag{2.1}$$

$$\sigma \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}(\cdot)}}{\sqrt{\cdot}} \in L_1(\mathbb{R}_+)\ [10].$$

Se λ_r, λ_c *verificano le seguenti condizioni*

$$2 \,\|\, \lambda_r^\sigma \,\|_{\sigma,p'} \left\{ \left\| \frac{1}{\sigma} \right\|_{\sigma,q'} + \sup_{t \geq 0} \frac{\lambda_c(t)}{\lambda_r(t)} \left(\int_0^t \left| \frac{g(t-s)}{\sigma(s)} \right|^{q'} ds \right)^{1/q'} \right\} \leq \varepsilon\ [11], \tag{2.2}$$

$$\lambda_r \in W_p^1(\mathbb{R}_+); \qquad \lambda_c' \in L_p(\mathbb{R}_+)\ [12]. \tag{2.3}$$

$\mathfrak{F}_2$ *ha un'unica soluzione.*

Da questo teorema e dal precedente si deduce in fine:

TEOREMA 2.3. — *Assegnati* $p \in]\,1,3\,[$, $p' > \max\{2, p\}$ *e* σ *una funzione submoltiplicativa crescente tale che* $\sigma(0) = 1$ *e verifica la* (2.1). *Se* λ_r, λ_c *verificano le* (2.2), (2.3), $\mathfrak{F}$ *ha una ed una sola soluzione.*

---

[10] Queste ipotesi sono per esempio verificate dalla funzione esponenziale $e^{\beta t}$ con $0 < \beta < \alpha^2/4$.

[11] Questa diseguaglianza comporta, in particolare, che $\lambda_r \sigma \in L_{p'}(\mathbb{R}_+)$, λ_c/λ_r limitata. Inoltre poiché $p' > 2$ implica $q' \in]\,1,2\,[$, per la submoltiplicatività di σ si deduce

$$\int_0^t \left| \frac{g(t-s)}{\sigma(s)} \right|^{q'} ds \leq \frac{1}{\sigma(t)^{q'}} \int_0^t |\, g(s)\, \sigma(s) \,|^{q'} ds < +\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

[12] $\lambda_c' \in L_p(\mathbb{R}_+)$ comporta che λ_c è uniformemente continua.

3. - Su un equazione integro-differenziale non lineare

Poiché le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni per il lemma di Du Bois-Reymond la risolubilità di $\mathcal{S}_2$ è conseguenza di quella del seguente problema integro-differenziale non lineare.

$\mathcal{S}_2'$ « *Assegnati* $p \in]1, +\infty[$ *e* $\theta_0 \in]0,1[$, *si cerca* $\Psi \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *tale che* $\Psi' \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$ *e*

$$(3.1)\quad \Psi(t) = 1 - \varepsilon^{-1}\int_0^t \frac{\lambda_r(s)\Psi(s)+\lambda_c(s)(1-\theta_0\Psi(s))(g*\Psi')(s)}{1-\lambda_c(s)(1-\theta_0\Psi(s))\,k_c^0\,\omega^{-1}}\,ds,\ t \geq 0$$

$$(3.2)\qquad 0 \leq \theta_0\Psi(t) < 1,$$

con $\varepsilon > 0$, $k_c^0 > 0$, $\omega > 0$, $\lambda_c : \overline{\mathbb{R}}_+ \to [0, \omega(2k_c^0)^{-1}]$, $\lambda_r : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$ *funzioni misurabili* ».

Sussistono i seguenti risultati:

Teorema 3.1. — (*Teorema di esistenza e unicità*). *Siano* $p' \in]2, +\infty[$ *e* $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$ *una funzione submoltiplicativa crescente tale che* $\sigma(0) = 1$ *e verifica la* (2.1).

Se λ_r, λ_c *verificano la* (2.2) *e* λ_c *uniformemente continua* (cfr. ([12])), *esiste una sola* $\Psi \in L_p^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$ *soluzione di* (3.1), (3.2).

Teorema 3.2. — (*Teorema di regolarizzazione*). *Assegnati* $p \in]1,4[$, $p' > p$ *e* $\sigma : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$ *una funzione sumboltiplicativa tale che* $\frac{1}{\sigma} \in L_{q'}(\mathbb{R}_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+)$ (*ossia la prima della* (2.1)), *ogni eventuale funzione* $\Psi \in L_{p'}^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$ *soluzione di* (3.1), (3.2) *è tale che* $\Psi' \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$.

Dim. — Teorema 3.1.

Premettiamo alcuni lemmi.

Fissato $r > 0$ diciamo $\mathcal{K}_{p',r}$ ($p' > 2$!) *l'insieme delle* $\Psi \in L_{p'}^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$ non negative, che assumono in 0 il valore 1, con $\Psi' \leq 0$ q.o. e tali che $\| \Psi'\sigma \|_{0,p'} \leq r$.

Lemma 3.3. — *Qualunque sia* $r > 0$, $\mathcal{K}_{p',r}$ *è un insieme convesso, limitato e chiuso in* $L_{p'}^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$.

Dim. — La convessità e limitatezza di $\mathcal{K}_{p',r}$ sono ovvie, proviamo dunque che è un insieme chiuso.

Sia $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{K}_{p',r}$ convergente a $\Psi \in L^1_{p'}(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$. Poiché $L^1_{p'}(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma) \hookrightarrow C^o_B(\mathbb{R}_+)$, $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a Ψ, perciò $\Psi(0) = 1$ e Ψ è non negativa. Poi essendo $(\Psi'_n \sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente in media di ordine p' a $\Psi'\sigma$, esiste una successione estratta $(\Psi'_{n_k} \sigma)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente q.o., a $\Psi'\sigma$, pertanto $\Psi'\sigma \leq 0$, q.o. e poiché σ è una funzione positiva si ha $\Psi' \leq 0$ q.o.

In fine osservato che

$$\| \Psi' \sigma \|_{o,p'} \leq \| (\Psi - \Psi_n)' \sigma \|_{o,p'} + r, \qquad n \in \mathbb{N}$$

passando al limite per $n \to \infty$ si ha $\| \Psi' \sigma \|_{o,p'} \leq r$.

È così provato che $\Psi \in \mathcal{K}\, p', r$ e dunque che $\mathcal{K}\, p', r$ è un insieme chiuso.

Per brevità posto $A_\Psi = \lambda_c (1 - \theta_o \Psi) k_c^o \omega^{-1}$, o semplicemente A se non vi sono equivoci, consideriamo l'operatore:

$$T : \Phi \to (t \in \mathbb{R}_+ \to 1 - \varepsilon^{-1} \cdot \int_0^t \frac{1}{1 - A(s)} [\lambda_r(s) \Psi(s) + \omega (k_c^o)^{-1} A(s) (g * \Psi')(s)] \, ds$$

LEMMA 3.4. — *Posto* $r' = 2\varepsilon^{-1} \| \lambda_r \sigma \|_{o,p'}$ *risulta* $\mathcal{K}_{p',r'} \subset \mathcal{D}om\, T$ *e* $T(\mathcal{K}_{p',r'}) \subset \mathcal{K}_{p',r'}$.

Dim. — Sia $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$. Essendo Ψ continua (teorema 1.2 a), non negativa, $\Psi(0) = 1$ e $\Psi' \leq 0$ q.o. si ha $0 \leq \Psi(t) \leq 1 \leq \theta_o^{-1}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Perciò $A(\mathbb{R}_+) \subset]0, 2^{-1}[$ e dunque $\Psi \in \mathcal{D}om\, T$.

Per provare che $T(\Psi) \in \mathcal{K}\, p', r'$ cominciamo osservando che dalla definizione stessa di $T(\Psi)$ risulta $T(\Psi)(0) = 1$ e qualunque sia $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$:

$$T(\Psi)(t) \geq 1 - 2\varepsilon^{-1} \| \lambda_r \|_{0,1} \geq 1 - 2\varepsilon^{-1} \| \lambda_r \sigma \|_{o,p'} \left\| \frac{1}{\sigma} \right\|_{o,q'}$$

allora dalla (2.2) si deduce la non negatività di $T(\Psi)$.

Inoltre essendo per ogni $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$:

$$-\varepsilon \frac{1 - A(t)}{\lambda_r(t)} T(\Psi)'(t) = \Psi(t) + \frac{\omega}{k_c^o} \frac{A(t)}{\lambda_r(t)} (g * \Psi')(t) \geq$$

$$\geq 1 - \int_0^t |\Psi'(s)|\, d\, s - \frac{\lambda_c(t)}{\lambda_r(t)} (g * |\Psi'|)(t) \geq$$

$$\geq 1 - \|\Psi' \sigma\|_{0,p'} \left\{ \left\| \frac{1}{\sigma} \right\|_{0,q'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_c(t)}{\lambda_r(t)} \left(\int_0^t \left| \frac{g(t-s)}{\sigma(s)} \right|^{q'} d\, s \right)^{1/q'} \right\},$$

mercé il valore di r' e la (2.2) si ha $T(\Psi)' \leq 0$

Infine da

$$\|T(\Psi)' \sigma\|_{0,p'} = \varepsilon^{-1} \left\| \frac{1}{1 - A} \left(\lambda_r \Psi + \frac{\omega}{k_c^0} A (g * \Psi') \right) \sigma \right\|_{0,p'} \leq$$

$$\leq 2\, \varepsilon^{-1} \|\lambda_r \sigma\|_{0,p'} = r',$$

si deduce che $T(\Psi) \in \mathcal{K}_{p',r'}$.

Per provare l'esistenza di una funzione $\Psi \in L^1_{p'}(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$ che verifica (3.1), (3.2) basta dimostrare che esiste $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$ per cui $T\Psi = \Psi$. A questo fine applicheremo il teorema del punto fisso di Tychonov.

Essendo $\mathcal{K}_{p',r'}$ un insieme chiuso e limitato resta da far vedere che $T(\mathcal{K}_{p',r'})$ è relativamente compatto (ossia la sua chiusura è un insieme compatto) in $L^1_{p'}(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$.

LEMMA 3.5. — *H* $= \{\lambda_r \Psi \mid \Psi \in \mathcal{K}\, p', r'\}$ *è relativamente compatto in* $L_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma)$ [13].

Dim. — Poiché H relativamente compatto in $L_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma)$ è equivalente a σ H relativamente compatto in $L_{p'}(\mathbb{R}_+)$, proviamo quest'ultima asserzione. A questo scopo applichiamo il teorema di Fréchet-Kolmo-

[13] $L_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma)$ è l'insieme delle funzioni Ψ misurabili in $\mathbb{R}_+$ tali che $\Psi \sigma \in L_{p'}(\mathbb{R}_+)$. Evidentemente $L_{p'}(\mathbb{R}_+, 1) = L_{p'}(\mathbb{R}_+)$.

gorov (cfr. [7] vol. I pg. 295; [12] pg. 275) nella versione adeguata ai sottoinsiemi di $L_{p'}(\mathbb{R}_+)$ [14].

a. Poiché ogni elemento di $\mathcal{K}_{p',r'}$ assume massimo valore 1, si ha subito dalla limitatezza di $\mathcal{K}_{p',r'}$ quella di σH in $L_{p'}(\mathbb{R}_+)$.

b. Assegnati $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$ ed $h > 0$ osserviamo che

$$I_h = \left(\int_0^{+\infty} | \Delta_h (\sigma \lambda_r \Psi)(t) |^{p'} \, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_0^{+\infty} | \Delta_h (\sigma \lambda_r)(t) |^{p'} \, | \Psi(t+h) |^{p'} \, dt \right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left(\int_0^{+\infty} | (\sigma \lambda_r)(t) |^{p'} \, dt \left| \int_t^{t+h} \Psi'(s) \, ds \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} | \Delta_h (\sigma \lambda_r)(t) |^{p'} \, dt \right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \| \Psi' \sigma \|_{0,p'} \left(\int_0^{+\infty} | (\sigma \lambda_r)(t) |^{p'} \, dt \left(\int_t^{t+h} \sigma(s)^{-q'} \, ds \right)^{\frac{p'}{q'}} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Ora essendo $\sigma \lambda_r \in L_{p'}(\mathbb{R}_+)$ si ha $\lim_{h \to 0+} \int_0^{+\infty} | \Delta_h (\sigma \lambda_r)(t) |^{p'} \, dt = 0$ ([8] pg. 10). Poi la limitatezza di $\mathcal{K}_{p',r'}$ e l'assoluta continuità di $1/\sigma^q$ comportano che $\lim_{h \to 0+} I_h = 0$ uniformemente rispetto a $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$.

---

[14] Condizione necessaria e sufficiente affinché $B \subset L_{p'}(\mathbb{R}_+)$ sia relativamente compatto in $L_{p'}(\mathbb{R}_+)$ e che si verifichino le seguenti condizioni

a. $\sup_{\Psi \in B} \| \Psi \|_{0,p'} < +\infty$,

b. $\lim_{h \to 0+} \| \Delta_h \Psi \|_{0,p'} = 0$ unif risp. a $\Psi \in B$,

c. $\lim_{h \to 0+} \int_0^h | \Psi(t) |^{p'} \, dt = 0$ unif risp. a. $\Psi \in B$,

d. $\lim_{h \to 0+} \int_h^{+\infty} | \Psi(t) |^{p'} \, dt = 0$ unif risp. a. $\Psi \in B$,

con $\Delta_h \Psi = \Psi(\cdot - h) - \Psi(\cdot)$.

c. d. Poiché per ogni $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$ e $h > 0$ risulta:

$$\int_{J_h} |(\sigma \lambda_r \Psi)(t)|^{p'} dt \leq \int_{J_h} |(\sigma \lambda_r)(t)|^{p'} dt, \qquad J_h =]0, h[\,,]h, +\infty[;$$

l'appartenenza di $\sigma \lambda_r$ ad $L_{p'}(\mathbb{R}_+)$ e l'assoluta continuità dell'integrale di $|\sigma \lambda_r|^{p'}$ comportano: $\lim_{h \to 0+} \int_0^h |(\sigma \lambda_r \Psi)(t)|^{p'} dt = \lim_{h \to 0+} \int_h^{+\infty} |(\sigma \lambda_r \Psi)(t)|^{p'} dt = 0$ uniformemente rispetto a $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$.

LEMMA 3.6. — *Sia* S *un operatore compatto di* $L_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma)$ *in se*[15] *il cui dominio di definizione contenga* $\mathcal{K}_{p',r'}$. *Il codominio delle applicazioni*

$$\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'} \to \frac{1}{1 - A} S(\Psi) \in L_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma);$$

$$\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'} \to \frac{A}{1 - A} S(\Psi) \in L_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma)$$

è relativamente compatto in $L_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma)$.

Dim. — Ci limiteremo a studiare il codominio della prima applicazione, analogamente si studia il secondo.

L'asserto è conseguenza del teorema di Fréchet-Kolmogorov (cfr. ([14])). *a.*, *c.*, *d.* si provano senza nessuna difficoltà, perciò occupiamoci della *b.*

Assegnati $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$, $h > 0$ osserviamo che

$$\left\| \Delta_h \left(\frac{S(\Psi)}{1 - A} \sigma \right) \right\|_{\sigma, p'} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{(S(\Psi)\sigma)(t + h)}{(1 - A(t))(1 - A(t + h))} \right|^{p'} \left| \frac{k_c^0}{\omega} \Delta_h (\lambda_c (1 - \vartheta_0 \Psi))(t) \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{1 - A(t)} \right|^{p'} |\Delta_h (S(\Psi)\sigma)(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

[15] Ossia trasforma insiemi limitati in insiemi relativamente compatti.

$$\leq 4\frac{k_c^o}{\omega}\left\{\left(\int_0^{+\infty}|(S(\Psi)\sigma)(t+h)|^{p'}\,|\,\Delta_h\lambda_c(t)|^{p'}\,|\,1-\theta_o\Psi(t+h)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}+\right.$$

$$\left.+\,\theta_o\left(\int_0^{+\infty}|(S(\Psi)\sigma)(t+h)|^{p'}\,|\,\lambda_c(t)|^{p'}\,|\,\Delta_h\Psi|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}+$$

$$+\,2\,\|\Delta_h(S(\Psi)\sigma\|_{o,p'}\leq$$

$$\leq\frac{4\,k_c^o}{\omega}\left\{\left(\int_0^{+\infty}|(S(\Psi)\sigma)(t+h)|^{p'}\,|\,\Delta_h\lambda_c(t)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}+\right.$$

$$\left.+\,\frac{\omega}{2\,k_c^o}\left(\int_0^{+\infty}|(S(\Psi)\sigma)(t+h)|^{p'}\,|\,\Delta_h\Psi(t)|^{p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}+$$

$$+\,2\,\|\Delta_h(S(\Psi)\sigma)\|_{o,p'}.$$

Poiché

$$|\Delta_h\Psi(t)|\leq\|\Psi'\sigma\|_{o,p'}\left(\int_t^{t+h}\sigma(s)^{-q'}\,ds\right)^{\frac{1}{q'}},$$

per la compattezza di $S(\mathcal{K}_{p',r'})$ e la uniforme continuità di λ_c, si ha che l'ultimo termine della sequenza di diseguaglianze è infinitesimo per $h\to 0^+$ uniformemente rispetto a $\Psi\in\mathcal{K}_{p',r'}$.

LEMMA 3.7. — *Assegnato* $B\subset L_{p'}(\mathbb{R}_+,\sigma)$ *insieme limitato risulta*

$$\lim_{h\to 0+}\|\Delta_h(\sigma(g*\Psi))\|_{o,p'}=0$$

uniformemente rispetto a $\Psi\in B$.

Dim. — Assegnati $\Psi\in B$ ed $h>0$, si osserva che

$$I(h)=\left(\int_0^{+\infty}\left|\sigma(t+h)\int_0^{t+h}\Psi(s)\,g(t+h-s)\,ds-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\sigma(t)\int_0^t\Psi(s)\,g(t-s)\,ds\right|^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}}\leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_t^{t+h} \Psi(s)\, \sigma(t+h)\, g(t+h-s)\, ds \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_0^{t} \Psi(t-s)\, g(s+h)\, \Delta_h \sigma(t)\, ds \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_0^{t} \Psi(t-s)\, \sigma(t)\, \Delta_h g(s)\, ds \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{I}_j(h).$$

Dimostriamo che $\lim_{h \to 0+} \mathrm{I}_j(h) = 0$, $j = 1, 2, 3$, uniformemente rispetto a $\Psi \in \mathrm{B}$.

Per la submoltiplicatività di σ si ha:

$$\mathrm{I}_1(h) \leq \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_t^{t+h} (\sigma\Psi)(s)\, (\sigma g)(t+h-s)\, ds \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \left[\int_t^{t+h} |(\sigma\Psi)(s)|^{p'}\, (\sigma g)(t+h-s)\, ds \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\int_t^{t+h} (\sigma g)(t+h-s)\, ds \right]^{p'/q'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \| \sigma g \|_{0,1}^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^{+\infty} |(\sigma\Psi)(s)|^{p'} ds \int_{\max\{0, s-h\}}^{s} (\sigma g)(t+h-s)\, dt \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \| \sigma g \|_{0,1}^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^{+\infty} |(\sigma\Psi)(s)|^{p'} ds \int_{\max\{h-s, 0\}}^{h} (\sigma g)(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \| \sigma g \|_{0,1}^{\frac{1}{q'}} \| \sigma\Psi \|_{0,p'} \left(\int_0^{h} (\sigma g)(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Essendo $\sigma g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}_+)$ (cfr. la seconda della (2.1)) per l'assoluta continuità dell'integrale di σg si ha $\lim_{h \to 0+} \mathrm{I}_1(h) = 0$ uniformemente rispetto a $\Psi \in \mathrm{B}$.

Per quanto concerne $I_2(h)$ si osserva che mercé la submoltiplicatività e crescenza di σ risulta $\Delta_h \sigma(t) \leq \sigma(t-s)\sigma(s)(\sigma(h)-1)$, perciò

$$I_2(h) \leq |\sigma(h)-1| \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_0^t (\sigma \Psi)(t-s)\sigma(s) g(s+h)\, ds \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Ora essendo g decrescente per la diseguaglianza di Young si deduce

$$I_2(h) \leq |\sigma(h)-1| \, \| \sigma \Psi \|_{0,p'} \cdot \| \sigma g \|_{0,1},$$

da cui per la continuità di σ e la condizione $\sigma(0)=1$ si ha $\lim_{h \to 0^+} I_2(h) = 0$ uniformemente rispetto a $\Psi \in B$.

In fine utilizzando ancora la submoltiplicatività di σ e la diseguaglianza di Young si ha

$$I_3(h) \leq \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_0^t (\Psi \sigma)(t-s)\sigma(s)\Delta_h g(s)\, ds \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq \| \Psi \sigma \|_{0,p'} \int_0^{+\infty} \sigma(s) |\Delta_h g(s)| \, ds.$$

Allora per acquisire l'asserto basterà dimostrare che

$$\lim_{h \to 0^+} \int_0^{+\infty} \sigma(s) |\Delta_h g(s)| \, ds = 0.$$

Poiché qualunque siano $s, h \in \mathbb{R}_+$:

$$(3.3)\quad |\Delta_h g(s)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| e^{-\frac{\alpha^2}{4}s} \left(\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}h} - 1}{\sqrt{s+h}} + \frac{h}{\sqrt{s}\sqrt{s+h}(\sqrt{s}+\sqrt{s+h})} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\pi}} \left(\int_s^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}t}}{\sqrt{t}}\, dt - \int_{s+h}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}t}}{\sqrt{t}}\, dt \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}s}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha^2}{4}\frac{h}{\sqrt{s+h}}+\frac{h}{\sqrt{s}\sqrt{s+h}(\sqrt{s+h}+\sqrt{s})}\right)+$$

$$+\frac{\alpha^2}{4\sqrt{\pi}}\int_s^{s+h}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}t}}{\sqrt{t}}\,dt\leq$$

$$\leq \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}s}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha^2}{4}\frac{h}{\sqrt{s+h}}+\frac{h}{\sqrt{s}\sqrt{s+h}(\sqrt{s+h}+\sqrt{s})}\right)+$$

$$+\frac{\alpha^2}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}s}}{\sqrt{s}}h\leq\frac{\alpha^2}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}s}}{\sqrt{s}}h+\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}s}}{\sqrt{\pi}}\frac{h}{\sqrt{s}\sqrt{s+h}},$$

si ottiene

$$\int_0^{+\infty}\sigma(s)\,|\,\Delta_h g(s)\,|\,ds\leq\frac{\alpha^2}{2\sqrt{\pi}}h\int_0^{+\infty}\sigma(s)\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}s}}{\sqrt{s}}\,ds+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sigma(s)\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}s}}{\sqrt{s}}\frac{h}{s+h}\,ds.$$

Per la seconda della (2.1) e il teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata si conclude che

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^{+\infty}\sigma(s)\,|\,\Delta_h g(s)\,|\,ds=0.$$

L'asserto è dunque provato.

Siamo ora in grado di provare la relativa compattezza di $T(\mathcal{H}_{p',r'})$ in $L^1_{p'}(\overline{\mathbb{R}}_+,\sigma)$.

Intanto osserviamo che $T(\mathcal{H}_{p',r'})$ è relativamente compatto se e soltanto se l'insieme

$$B=\{T(\Psi)'\sigma\,|\,\Psi\in\mathcal{H}_{p',r'}\}=$$

$$=\left\{-\frac{\varepsilon^{-1}\sigma}{1-A}\left(\lambda_r\Psi+\frac{\omega}{k_c^o}A(g*\Psi')\right)\,|\,\Psi\in\mathcal{H}_{p',r'}\right\}$$

è relativamente compatto in $L_{p'}(\mathbb{R}_+)$. Allora per provare la tesi basta applicare il teorema di Fréchet-Kolmogorov.

a. La limitatezza di B è garantita dai lemma 3.3, 3.4.

b. Sia $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$, si ha:

$$\| \Delta_h (T(\Psi)' \sigma) \|_{o,p'} \leq \varepsilon^{-1} \left\| \Delta_h \frac{\lambda_r \Psi \sigma}{1 - A} \right\|_{o,p'} + \\ + \varepsilon^{-1} \frac{\omega}{k_c^o} \left\| \Delta_h \frac{A}{1 - A} (g * \Psi') \right\|_{o,p'},$$

perciò grazie ai lemma 3.5, 3.6, 3.7, si ottiene $\lim_{h \to 0+} \| \Delta_h (T(\Psi)' \sigma) \|_{o,p'} = 0$.

c. d. Poiché gli elementi $\mathcal{K}_{p',r'}$ sono funzioni con derivata q.o. negativa e g è una funzione positiva risulta:

$$0 \leq - T(\Psi)'(t) = \frac{\varepsilon^{-1}}{1 - A(t)} \left(\lambda_r(t) \Psi(t) + \frac{\omega}{k_c^o} (g * \Psi')(t) \right) \leq \\ \leq \frac{\varepsilon^{-1}}{1 - A(t)} - \lambda_r(t) \Psi(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

Pertanto qualunque sia $h > 0$ si ha

$$\int_{J_h} | (T(\Psi)' \sigma)(t) |^{p'} dt \leq (2 \varepsilon^{-1})^{p'} \int_{J_h} | (\lambda_r \Psi \sigma)(t) |^{p'} dt,$$

$$J_h =]0, h[\, , \,]h, + \infty [,$$

da cui grazie al lemma 3.5 si ottiene subito $\lim_{h \to 0+} \int_0^h | (T(\Psi)' \sigma)(t) |^{p'} dt =$

$= \lim_{h \to + \infty} \int_h^{+ \infty} | (T(\Psi)' \sigma)(t) |^{p'} dt = 0.$

Acquisita la relativa compattezza di $T(\mathcal{K}_{p',r'})$ per il teorema dei punti fissi di Tychonov esiste $\Psi \in \mathcal{K}_{p',r'}$ tale che $\Psi = T\Psi$.

Per completare la dimostrazione (del teorema 3.1) proviamo:

LEMMA 3.8. — *Se esistono due funzioni* Ψ, $\Phi \in \mathcal{K}_{p',r'}$ *tali che* $T\Psi = \Psi$, $T\Phi = \Phi$, *allora* $\Psi = \Phi$.

Dim. — Essendo $\Psi(0) = \Phi(0) = 1$, per provare l'asserto basta far vedere che $(\Psi - \Phi)' = 0$. A questo fine osserviamo che

$$\Psi' - \Phi' = \varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{1 - A_\Psi} - \frac{1}{1 - A_\Phi}\right)\left(\lambda_r \Psi + \frac{\omega}{k_c^o} A_\Psi (g * \Psi')\right) -$$

$$- \frac{\varepsilon^{-1}}{1 - A_\Phi}\left\{\lambda_r(\Psi - \Phi) + \frac{\omega}{k_c^o}(A_\Psi(g * \Psi') - A_\Phi(g * \Phi'))\right. =$$

$$= \varepsilon^{-1}\frac{A_\Phi - A_\Psi}{(1 - A_\Psi)(1 - A_\Phi)}\left(\lambda_r \Psi + \frac{\omega}{k_c^o} A_\Psi (g * \Psi')\right) -$$

$$- \frac{\varepsilon^{-1}}{1 - A_\Phi}\left\{\lambda_r(\Psi - \Phi) + \frac{\omega}{k_c^o}[(A_\Psi - A_\Phi)(g * \Psi') + A_\Phi(g * (\Psi - \Phi)')]\right\}.$$

Per brevità posto $\Psi - \Phi = \delta$ e osservato che da $\Psi' = T(\Psi)'$, $\Phi' = T(\Phi)'$ si deduce $\Psi', \Phi' \in C^o(\mathbb{R}_+)$, qualunque sia $t \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$|\delta'(t)| \leq 4\varepsilon^{-1}\omega^{-1}k_c^o\,\theta_o\lambda_c(t)|\delta(t)|\left|\lambda_r(t)\Psi(t) + \frac{\omega}{k_c^o}A_\Psi(t)(g*\Psi')(t)\right| +$$

$$+ 2\varepsilon^{-1}\left\{\lambda_r(t)|\delta(t)| + \theta_o\lambda_c(t)|\delta(t)||(g*\Psi')(t)| + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega}{2k_c^o}(g * |\delta'|)(t)\right\}.$$

Poiché

$$\theta_o \in]0,1[;\ 0 \leq \lambda_r(t)\Psi(t) + \frac{\omega}{k_c^o}A_\Psi(t)(g*\Psi')(t) \leq \lambda_r(t);$$

$$\frac{k_c^o}{\omega}\lambda_c(t) \leq 2^{-1}, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

si ha:

$$|\delta'(t)| \leq 2\varepsilon^{-1}\lambda_r(t)|\delta(t)|\left(2 + \frac{\lambda_c(t)}{\lambda_r(t)}|(g*\Psi')(t)|\right) +$$

$$+ \varepsilon^{-1}\frac{\omega}{k_c^o}(g * |\delta'|)(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Essendo

$$\sup_{t\geq 0}\left(\frac{\lambda_c(t)}{\lambda_r(t)}|(g*\Psi')(t)|\right) \leq$$

$$\leq \|\Psi'\sigma\|_{o,p'}\sup_{t\geq 0}\frac{\lambda_c(t)}{\lambda_r(t)}\left(\int_0^t\left|\frac{g(t-s)}{\sigma(s)}\right|^{q'} ds\right)^{\frac{1}{q'}},$$

mercé il valore di r' e la (2.2) risulta $\sup_{t \geq 0} \left(\frac{\lambda_c(t)}{\lambda_r(t)} - |(g * \Psi')(t)| \right) \leq 1$, perciò

$$(3.4) \quad |\delta'(t)| \leq 6\,\varepsilon^{-1}\lambda_r(t)\,|\delta(t)| + \varepsilon^{-1}\frac{\omega}{k_c^o}(g * |\delta'|)(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+ .$$

Assegnato $x > 0$ grazie a questa diseguaglianza si ha:

$$(3.5) \quad \sup_{[0,x]} |\delta'| \leq \varepsilon^{-1} \left\{ 6\,x \sup_{[0,x]} \lambda_r + \frac{\omega}{k_c^o} \int_0^x g(s)\,ds \right\} \sup_{[0,x]} |\delta'| .$$

Poiché per $x \to 0^+$ la funzione in parentesi graffe è infinitesima esiste $x_o > 0$ tale che per ogni $x \in [\,0, x_o[$ risulta

$$\varepsilon^{-1} \left\{ 6\,x \sup_{[0,x]} \lambda_r + \frac{\omega}{k_c^o} \int_0^x g(s)\,ds \right\} < 1.$$

Allora dalla (3.5) si deduce che per ogni $x \in [0, x_o]$, $\delta'(x) = 0$.

Diciamo E l'insieme degli $x \in \mathbb{R}_+$ tali che per ogni $t \in [0, x]$ risulti $\delta'(t) = 0$.

Per quanto abbiamo testé provato $x_o \in E$, quindi $E \neq \emptyset$.

Per provare definitivamente l'asserto dimostriamo che $E = \mathbb{R}_+$ ovvero $\sup E = +\infty$ [16].

Se, per assurdo, si suppone $\sup E = \xi \in \mathbb{R}_+$ si ha evidentemente che qualunque sia $t \in [0, \xi]$ risulta $\delta'(t) = 0$. Allora assegnato $x > \xi$, dalla (3.4) si deduce

$$\sup_{[\xi,x]} |\delta'| \leq \varepsilon^{-1} \left\{ 6\,(x - \xi) \sup_{[\xi,x]} \lambda_r + \frac{\omega}{k_c^o} \int_\xi^x g(x - s)\,ds \right\} \sup_{[\xi,x]} |\delta'| =$$

$$(3.6) \quad = \varepsilon^{-1} \left\{ 6\,(x - \xi) \sup_{[\xi,x]} \lambda_r + \frac{\omega}{k_c^o} \int_0^{x-\xi} g(s)\,ds \right\} \sup_{[\xi,x]} |\delta'| .$$

Quando $x \to \xi^+$ la funzione in parentesi è infinitesima, perciò esiste $x_1 > \xi$ tale che per ogni $x \in [\xi, x_1[$

$$\varepsilon^{-1} \left\{ 6\,(x - \xi) \sup_{[\xi,x]} \lambda_r + \frac{\omega}{k_c^o} \int_0^{x-\xi} g(s)\,ds \right\} < 1.$$

[16] E è un intervallo!

Allora dalla (3.6) si ha $\delta'(t) = 0$ per ogni $t \in [\xi, x_1[$, ossia $x_1 \in E$. Questo è però assurdo in quanto $\xi < x_1$ e $x_1 \in E$ implica $x_1 \leq \xi$.

Dim. teorema 3.2. — Premettiamo alcune diseguaglianze:

LEMMA 3.9. — *Assegnati* $p > 1$, $a \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $f \in L^1_p(\bar{\mathbb{R}}_+, 1)$ risulta:

$$\left(\int_0^{+\infty} |a(t)|^p \, dt \int_0^1 |\Delta_h f(t)|^p \, h^{-\frac{1+p}{2}} \, dh\right)^{\frac{1}{p}} \leq \tag{3.7}$$

$$\leq \left(\frac{2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|a\|_{0,p} \|f'\|_{0,p}.$$

$$\left(\int_0^{+\infty} dt \int_0^1 |\Delta_h f(t)|^p \, h^{-\frac{1+p}{2}} \, dh\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f'\|_{0,p}. \tag{3.8}$$

Dim. — Proviamo la (3.7)

$$\int_0^{+\infty} |a(t)|^p \, dt \int_0^1 |\Delta_h f(t)|^p \, h^{-\frac{1+p}{2}} \, dh =$$

$$= \int_0^{+\infty} |a(t)|^p \, dt \int_0^1 h^{-\frac{1+p}{2}} \, dh \left|\int_t^{t+h} f'(s) \, ds\right|^p \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |a(t)|^p \, dt \int_0^1 h^{p-1-\frac{1+p}{2}} \, dh \int_t^{t+h} |f'(s)|^p \, ds.$$

Essendo $\frac{1+p}{2} - p + 1 < 1$, con ovvie considerazioni si ottiene la (3.7).

Ora proviamo la (3.8)

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^1 |\Delta_h f(t)|^p \, h^{-\frac{1+p}{2}} \, dh \leq \int_0^{+\infty} dt \int_0^1 h^{p-1-\frac{1+p}{2}} \, dh \int_t^{t+h} |f'(s)|^p \, ds =$$

$$= \int_0^1 h^{p-1-\frac{1+p}{2}} \, dh \int_0^{+\infty} |f'(s)|^p \, ds \int_{\max\{0,s-h\}}^s dt \leq (\|f'\|_{0,p})^p \int_0^1 h^{\frac{p-1}{2}} \, dh,$$

da cui si ha subito la (3.8).

Sia $\Psi \in L^1_{p'}(\mathbb{R}_+, \sigma)$ una soluzione di (3.1), (3.2), ossia un punto unito di T. Provare che $\Psi' \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$ equivale a mostrare che $T(\Psi)' \in W_p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(\mathbb{R}_+)$. A questo fine dimostriamo che $\| T(\Psi)' \|_{o,p} < +\infty$, $\mathfrak{T}'''_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}(T(\Psi)') < +\infty$.

Essendo $0 \leq -T(\Psi)'(t) \leq 2\varepsilon^{-1}\lambda_r(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, per la prima della (2.3) si ha:

$$\| T(\Psi)' \|_{o,p} \leq 2\varepsilon^{-1} \| \lambda_r \|_{o,p} < +\infty.$$

Passiamo a valutare $\mathfrak{T}'''_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}(T(\Psi)')$.

Sia $h > 0$, osservato che

$$T(\Psi)'(t+h) - T(\Psi)'(t) = -\varepsilon^{-1}\Delta_h A(t) \left\{ \frac{(\lambda_r \Psi)(t)}{(1-A(t))(1-A(t+h))} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega}{k_c^o}(g * \Psi')(t) \left(\frac{A(t)}{(1-A(t))(1-A(t+h))} + \frac{1}{1-A(t+h)} \right) \right\} -$$

$$- \varepsilon^{-1}\Delta_h(\lambda_r \Psi)(t) \frac{1}{1-A(t+h)} - \varepsilon^{-1}\frac{\omega}{k_c^o}\Delta_h(g * \Psi')(t) \frac{A(t+h)}{1-A(t+h)},$$

e $A(t) \in [0, 2^{-1}]$, $t \in \mathbb{R}_+$, si deduce

$$\mathfrak{T}'''_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}(T(\Psi)') \leq 4\varepsilon^{-1} \left(\int_0^{+\infty} \left| \lambda_r(t)\Psi(t) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\omega}{k_c^o}(g * |\Psi'|)(t) \right|^p dt \int_0^1 |\Delta_h A(t)|^p h^{-\frac{1+p}{2}} dh \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ 2\varepsilon^{-1}\mathfrak{T}'''_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}(\lambda_r \Psi) + \varepsilon^{-1}\frac{\omega}{k_c^o}\mathfrak{T}'''_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}(g * \Psi') =$$

$$= 4\varepsilon^{-1}N_1 + 2\varepsilon^{-1}N_2 + \varepsilon^{-1}\frac{\omega}{k_c^o}N_3.$$

Per provare l'asserto basterà dunque dimostrare che $N_j < +\infty$, $j = 1, 2, 3$.

$j = 1$.

Grazie alla (3.7) si ha subito:

$$N_1 \leq \left(\frac{2}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \lambda_r \Psi + \frac{\omega}{k_c^o} g * |\Psi'| \right\|_{o,p} \| A' \|_{o,p},$$

da cui per la limitatezza di Ψ e la diseguaglianza di Young si ottiene

$$N_1 \leq \left(\frac{2}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\| \lambda_r \|_{o,p} + \frac{\omega}{k_c^o} \| g \|_{0,1} \| \Psi' \|_{o,p} \right) \| A' \|_{o,p}{}^{17}.$$

In fine osservato che

$$|A'| \leq \frac{k_c^o}{\omega} |\lambda_c'| + 2^{-1} |\Psi'|,$$

per la seconda della (2.3) si ha dunque $N_1 < +\infty$.

$j = 2$.

Per la (3.8) si ottiene subito:

$$N_2 \leq \left(\frac{2}{1+p} \right)^{\frac{1}{p}} (\| \lambda_r' \|_{o,p} + \| \lambda_r \Psi' \|_{o,p}).$$

Poiché $\lambda_r \in W_p^1(\mathbb{R}_+)$, $W_p^1(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow C_B^o(\overline{\mathbb{R}}_+)$ e

$$\| \lambda_r \Psi' \|_{o,p} \leq \| \Psi' \sigma \|_{o,p} \| \lambda_r \|_{o,\infty} \left\| \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{1 - \frac{q'(p-p')}{p'p}} \right\|_{o,\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sigma(s)^{-q'} \, ds \right)^{\frac{p'-p}{p'p}}$$

per la prima della (2.1) si ha dunque $N_2 < +\infty$.

$j = 3$.

Cominciamo osservando che

$$N_3 \leq \left(\int_0^{+\infty} dt \int_0^1 h^{-\frac{1+p}{2}} dh \left| \int_t^{t+h} g(t+h-s) \Psi'(s) \, ds \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

[17] Essendo $p < p'$ per il teorema 1.2.b. è $\| \Psi' \|_{o,p} < +\infty$.

$$+\left(\int_0^{+\infty} d\,t \int_0^1 h^{-\frac{1+p}{2}}\, d\,h \left| \int_0^t \Psi'(s)\, \Delta_h\, g(t-s)\, d\,s \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= N_3' + N_3'' .$$

Siano $\bar{p}, \bar{q} \in]1, +\infty[$ esponenti complementari con $\frac{p}{2} < \bar{p} < p$, per la diseguaglianza di Hölder si ottiene

$$(N_3')^p \leq \int_0^{+\infty} d\,t \int_0^1 h^{-\frac{1+p}{2}}\, d\,h \left(\int_0^h |\Psi'(t+h-s)|^p\, g(s)^{\frac{p}{\bar{p}}}\, d\,s \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^h g(s)^{\frac{q}{\bar{q}}}\, d\,s \right)^{\frac{p}{q}} [18].$$

Poiché $g(t) \leq t^{-\frac{1}{2}}$ e $\bar{p} < p$ comporta $\bar{q} > q$ si ha

$$(N_3')^p \leq \left(\frac{2\,\bar{q}}{2\,\bar{q} - q} \right)^{\frac{p}{q}} \int_0^{+\infty} d\,t \int_0^1 h^{\frac{p}{q}\left(1-\frac{q}{2\bar{q}}\right)-\frac{1+p}{2}}\, d\,h$$

$$\int_0^h |\Psi'(t+h-s)|^p\, g(s)^{\frac{p}{\bar{p}}}\, d\,s.$$

L'integrale converge essendo l'esponente cui è elevato h maggiore di -1. Poi

$$(N_3')^p \leq \left(\frac{2\,\bar{q}}{2\,\bar{q} - q} \right)^{\frac{p}{q}} (\| \Psi' \|_{0,p})^p \int_0^1 h^{\frac{p}{q}\left(1-\frac{q}{2\bar{q}}\right)-\frac{1+p}{2}}\, d\,h \int_0^h g(s)^{\frac{p}{\bar{p}}}\, d\,s,$$

ed essendo $p/2 < \bar{p}$, con considerazioni analoghe alle precedenti si ottiene:

$$(N_3')^p \leq \left(\frac{2\,\bar{q}}{2\,\bar{q} - q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{2\,\bar{p}}{2\,\bar{p} - p} (\| \Psi' \|_{0,p})^p \int_0^1 h^{\frac{p}{q}\left(1-\frac{q}{2\bar{q}}\right)+1-\frac{p}{2\bar{p}}-\frac{1+p}{2}}\, d\,h =$$

$$= \left(\frac{2\,\bar{q}}{2\,\bar{q} - q} \right)^{\frac{p}{q}} \frac{2\,\bar{p}}{2\,\bar{p} - p}\, 2\, (\| \Psi' \|_{0,p})^p.$$

[18] g è una funzione positiva!

Poiché N_3' non dipende da $\bar{p}$ e dunque da $\bar{q}$, passando al limite per $\bar{p} \to p$ si ottiene $N_3' \leq 4 \| \Psi' \|_{o,p}$ e grazie al teorema 1.2 b risulta $N_3' < + \infty$.

Valutiamo dunque N_3'' .

Tenendo presente la (3.3) (ossia la valutazione di $\Delta_h g$) si deduce:

$$N_3'' \leq \alpha^2 \left(\int_0^{+\infty} d t \int_0^1 h^{-\frac{p-1}{2}} d h \left(\int_0^t | \Psi'(t-s) | \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4} s}}{\sqrt{s}} d s \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_0^{+\infty} d t \int_0^1 h^{-\frac{p-1}{2}} d h \left(\int_0^t | \Psi'(t-s) | \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4} s}}{\sqrt{s}(s+h)} d s \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \alpha^2 \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 .$$

Per la diseguaglianza di Young si ha subito:

$$\mathfrak{L}_1 \leq \left\| \Psi' * \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}(\cdot)}}{\sqrt{\cdot}} \right\|_{o,p} \leq \| \Psi' \|_{o,p} \left\| \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4}(\cdot)}}{\sqrt{\cdot}} \right\|_{0,1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \| \Psi' \|_{o,p} < + \infty$$

Occupiamoci di $\mathfrak{L}_2$.

Siano $\gamma, \beta \in]1, + \infty[$ due esponenti complementari tali che $\frac{3p}{3+p} < \gamma < \frac{2p}{p+1}$ se $p < 3$ e $\frac{p}{2} < \gamma < \frac{3p}{p+2}$ se $p \in [3,4[$. Per la diseguaglianza di Hölder

$$\mathfrak{L}_2^p \leq \int_0^{+\infty} d t \int_0^1 h^{-\frac{p-1}{2}} d h \left(\int_0^t | \Psi'(t-s) |^p \left(\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4} s}}{\sqrt{s}(s+h)} \right)^{\frac{p}{\gamma}} d s \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^t \left(\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4} s}}{\sqrt{s}(s+h)} \right)^{\frac{q}{\beta}} d s \right)^{\frac{p}{q}} .$$

Essendo $\gamma < \frac{3p}{p+2}$ [19] equivalente a $\frac{3}{2} \cdot \frac{q}{\beta} < 1$ risulta

$$\mathfrak{L}_2^p \leq \text{cost} \int_0^1 h^{\frac{p-1}{2}} d\,h \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4} \cdot s}}{\sqrt{s\,(s+h)}} \right)^{\frac{p}{\gamma}} d\,s \int_0^{+\infty} |\,\Psi'(s)\,|^p\, d\,s =$$

$$= \text{cost}\,(\|\,\Psi'\,\|_{o,p})^p \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}\,\frac{p}{\gamma}\,s}\, s^{-\frac{p}{2\gamma}}\, d\,s \int_0^1 h^{\frac{p-1}{2}}\, (s+h)^{-\frac{p}{\gamma}}\, d\,h =$$

$$= \text{cost}\,(\|\,\Psi'\,\|_{o,p})^p \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2 p}{4\gamma} s}\, s^{\frac{p+1}{2} - \frac{3}{2}\,\frac{p}{\gamma}}\, d\,s \int_0^{1/s} y^{\frac{p-1}{2}}\, (1+y)^{-\frac{p}{\gamma}}\, d\,y\,.$$

Se $p \in\,]\,1{,}3\,[$ risulta $p/\gamma - (p-1)/2 > 1$ (ossia $\gamma < 2\,p/(p+1)$), perciò

$$\int_0^{1/s} y^{\frac{p-1}{2}}\, (1+y)^{-\frac{p}{\gamma}}\, d\,y \leq \int_0^{+\infty} (1+y)^{\frac{p-1}{2} - \frac{p}{\gamma}}\, d\,y < +\infty\,.$$

D'altra parte essendo $3/2\,(p/\gamma) - (p+1)/2 < 1$ (ovvero $3p/(p+3) < \gamma$) si ha $\int_0^{+} e^{-\frac{\alpha^2 p}{4\gamma} - s}\, s^{\frac{p+1}{2} - \frac{3}{2}\,\frac{p}{\gamma}}\, d\,s < +\infty$; quindi esiste una costante indipendente da Ψ' per cui

$$\mathfrak{L}_2 \leq \text{cost}\,\|\,\Psi'\,\|_{o,p} < +\infty \tag{3.9}$$

Invece se $p \in [3{,}4[$, grazie alla scelta di γ risulta $\frac{p}{\gamma} - \frac{p+1}{2} \leq 1$, perciò $\lim_{s \to 0+} \int_0^{1/s} y^{\frac{p-1}{2}}\, (1+y)^{-\frac{p}{\gamma}}\, d\,y = +\infty$. Inoltre risulta anche:

$$\int_0^{1/s} y^{\frac{p-1}{2}}\, (1+y)^{-\frac{p}{\gamma}}\, d\,y \leq \int_0^{1/s} y^{\frac{p-1}{2} - \frac{p}{\gamma}}\, d\,y \leq$$

$$\leq \frac{1}{\frac{p+1}{2} - \frac{p}{\gamma}}\, s^{\frac{p}{\gamma} - \frac{p+1}{2}}\,, \quad s \in \mathbb{R}_+$$

[19] Quando $p < 3$, risulta $\gamma < \frac{2p}{p+1} < \frac{3p}{p+2}$!

e

$$\int_0^{1/s} y^{\frac{p-1}{2}} (1+y)^{-\frac{p}{\gamma}} \, dy \geq \int_0^{1/s} y^{\frac{p-1}{2}} (1+s^{-1})^{-\frac{p}{\gamma}} \, dy =$$

$$= \frac{2}{p+1} \, s^{\frac{p}{\gamma} - \frac{p+1}{2}} (1+s)^{-\frac{p}{\gamma}}, \qquad s \in \mathbb{R}_+.$$

Pertanto

$$\mathfrak{L}_2^p \leq \text{cost} \, (\| \Psi' \|_{0,p})^p \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2 p}{4\gamma}} \, s^{-\frac{p}{2\gamma}} \, d\, s \right).$$

Essendo $p/2\,\gamma < 1$, l'ultimo integrale converge. Si deduce, dunque, anche in questo caso ($p \in [3,4[$!) una maggiorazione del tipo (3.9).

In conclusione abbiamo provato che esiste una costante indipendente da Ψ' per cui $N_3'' \leq \text{cost} \, \| \Psi' \|_{0,p}$, e da questa a norma del teorema 1.2 b. si ha $N_3'' < +\infty$.

Questo è appunto quanto si voleva provare.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. S. Agranovich, M. I. Vishik, *Problèmes elliptiques avec paramètre et problèmes paraboliques de type général*, Russian Math. Surv., **19** (1964) n. 3, 53-157.

[2] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, Berlin, Springer, 1974.

[3] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Berlin, Springer, 1969.

[4] A. Kufner, O. John, S. Fučik, *Function Spaces*, Prague, Academia, 1977.

[5] M. Lavrentiev, B. Chabat, *Méthodes de la théorie des functions d'une variable complexe*, Moscou, MIR, 1972.

[6] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, vol. II, Paris, Dunod, 1968.

[7] C. Miranda, *Istituzioni di Analisi Funzionale lineare*, vol. I, II, U.M.I., 1978.

[8] U. Neri, *Singular integrals, Lectur Notes in Mathematics*, Berlin, Springer, 1971.

[9] S. L. Paveri-Fontana, G. Tessari, G. Torsi, *Equilibrium release of metal atoms at the electrothermal rod atomizer: A theoretical models* (in corso di stampa).

[10] V. A. Solonikov, *A priori estimates for second order parabolic equations*, Am. Math. S. Transl. Serie 2, vol. 65, 1967, pg. 51-137.

[11] Vo Kac-Koan, *Distributions, Analyse de Fourier, Opèrateurs aux dérivées partielles*, Paris, Vuibert, 1972.

[12] K. Yosida, *Functional Analysis*, Berlin, Springer, 1971.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Avantaggiati, C. Ciliberto e G. Cimmino.

Quasicorpi di dimensione infinita sul proprio nucleo

Nota di GIANGIACOMO GERLA * e ADA LETTIERI **
presentata dal socio corrispondente GIANFRANCO PANELLA

(Adunanza dell'1 dicembre 1979)

SUMMARY. — We prove, by ultraproduct construction, the existence of a large class of generalised ANDRÉ's sistems having infinite dimension over their kernels.

1. - INTRODUZIONE

Questa Nota nasce dal desiderio di rispondere alla seguente domanda: dati un campo (corpo commutativo) K ed un numero cardinale α, esistono quasicorpi con nucleo (isomorfo a) K ed aventi dimensione α in quanto spazi vettoriali sul loro nucleo?

Svolgiamo la nostra indagine nella classe dei quasicorpi di ANDRÉ generalizzati; i risultati ottenuti sono precisati al termine del n. 2 della presente Nota e preceduti da rapidi richiami e notizie bibliografiche, mentre i nn. 3 e 4 sono dedicati alla loro dimostrazione.

2. - NOTAZIONI, RICHIAMI E RISULTATI.

Dati $\bigtimes_{i\in I} A_i$, prodotto diretto della famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di strutture algebriche, e D ultrafiltro su I, θ indicherà la congruenza determinata da D in $\bigtimes_{i\in I} A_i$, ossia, con $a, b \in \bigtimes_{i\in I} A_i$ (a, b applicazioni da I a $\bigcup_{i\in I} A_i$ con $a(i)$, $b(i) \in A_i$ se $i \in I$) è $a \,\theta\, b$ (e scriveremo anche $a \equiv b$ (mod. θ)) se e solo se $\{i \in I \,/\, a(i) = b(i)\} \in D$.

* Ist. Mat. « R. Caccioppoli », via Mezzocannone 8, 80134 Napoli. Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
** Ist. Mat. Fac. Architettura, via Monteoliveto 3, 80134 Napoli. Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

La struttura algebrica $(\underset{i\in I}{\times} A_i)/\theta$, ultraprodotto della famiglia $\{A\}_{i\in I}$ su D, sarà indicata con $\Pi_D A_i$, mentre $[f]_\theta$ starà a significare il suo elemento che ha $f \in \underset{i\in I}{\times} A_i$ come rappresentante: $[f]_\theta = \{g \in \underset{i\in I}{\times} A_i / f\,\theta\, g\}$.

Se risulta $A_i = A$ per ogni $i \in I$, scriveremo $\Pi_D A$ quando tale scrittura non potrà provocare equivoci, e questo ultraprodotto lo chiameremo ultrapotenza.

Se $Q = Q(+, \circ)$ è un quasicorpo [1], il suo nucleo $N(Q) = \{a \in Q / (x + y) \circ a = x \circ a + y \circ a, (x \circ y) \circ a = x \circ (y \circ a)$ se $x, y \in Q\}$ è un sottoquasicorpo che risulta un corpo; $Q(+)$ acquista una struttura di $N(Q)$-spazio vettoriale destro con l'applicazione $(x, a) \to x \circ a$ se $x \in Q$, $a \in N(Q)$: la dimensione di tale spazio vettoriale sarà indicata con $\dim_{N(Q)} Q$ o, più semplicemente, con dim Q.

N indicherà l'insieme dei numeri naturali, se X è un insieme $|X|$ sarà la sua potenza e poniamo $\omega = |N|$.

Con K campo, definiamo $K^* = K - \{0\}$ e, se $x \in K$ ed a è un automorfismo di K, indichiamo con x^a il trasformato di x mediante l'automorfismo a.

Se G è un gruppo finito di automorfismi di K per ogni $x \in K$ chiamiamo norma di x rispetto a G (e la indichiamo con $n_G(x)$) l'elemento di K $\underset{a\in G}{\Pi} x^a$.

Con tali notazioni, possiamo definire la classe dei *quasicorpi di* ANDRÉ *generalizzati,* nel senso di R. RINK ([9] p. 55), al seguente modo:

DEFINIZIONE. Il quasicorpo $Q = Q(+, \circ)$ è un *quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato* se esistono un campo $K = K(+, \cdot)$, un gruppo G di automorfismi di tale campo, un'applicazione $f : K^* \to G$ in modo che $Q(+) = K(+)$ (a livello di gruppi additivi) e, con $x, y \in K$ e $x \neq 0$, si abbia $x \circ y = x\, y^{f(x)}$. In tali condizioni scriviamo $Q(+, \circ) = Q = A(K, G, f)$.

Sono *quasicorpi di* ANDRÉ *generalizzati* i quasicorpi finiti dovuti a D. A. FOULSER ([8], p. 55), i quasicorpi di J. ANDRÉ ([1], p. 185) e i quasicorpi introdotti da A. CAGGEGI ([6], p. 214). In tali casi il gruppo G è sempre finito e, in conseguenza, si è in presenza di quasicorpi di dimensione finita sul loro nucleo; F. BARTOLOZZI [3] e A. CAGGEGI [5] hanno provato l'esistenza di *quasicorpi di* ANDRÉ *generalizzati* aventi come nucleo un opportuno campo finito e la cui dimensione in quanto

[1] $Q(+, \circ)$ è quasicorpo se: 1) $Q(+)$ è gruppo abeliano con elemento neutro 0 e risulta $0 \circ x = x \circ 0 = 0$ se $x \in Q$; 2) esiste $1 \in Q$, $1 \neq 0$, tale che $1 \circ x = x \circ 1 = x$ se $x \in Q$; 3) se $a, b, c \in Q$ è $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$; 4) se $a, b \in Q$ e $a \neq 0$ esiste uno ed un solo $x \in Q$ con $x \circ a = b$; 5) se $a, b, c \in Q$ e $a \neq b$ esiste uno ed un solo $x \in Q$ con $-a \circ x + b \circ x = c$.

spazi vettoriali sopra il nucleo è numerabile. Noi, qui, stabiliamo i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. *Siano* F *un campo finito con almeno tre elementi e* α *un numero cardinale. Esiste un quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato che ha come nucleo un campo isomorfo a* F *e la cui dimensione, in quanto spazio vettoriale sopra il nucleo, è* α.

TEOREMA 2. *Siano* F *un campo e* α *un numero cardinale. Esiste un quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato* $Q = Q(+, \circ)$ *il cui nucleo* $N(Q)$ *contiene un sottocampo isomorfo ad* F *e per il quale risulta* $\alpha \leq \leq \dim Q \leq \alpha + |F|$; *anzi, se* F *ha più di due elementi ed è ultraprodotto di campi finiti si può pretendere che* $N(Q)$ *sia isomorfo ad* F.

Osserviamo subito che il teorema 2 garantisce che se il campo F ha almeno tre elementi ed è ultraprodotto di campi finiti e se α è un numero cardinale con $\alpha \geq |F|$ esiste un *quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato* che ha nucleo (isomorfo a) F e la cui dimensione, in quanto spazio vettoriale sopra il nucleo, è α.

3. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.

Dimostriamo dapprima il teorema 1, il cui enunciato è dato al n. 2, supponendo α finito: in tale caso esso è conseguenza immediata delle note costruzioni di J. ANDRÉ [1]. Per provarlo indichiamo con K il campo di GALOIS di grado n su F (con n intero maggiore di uno): se $|F| = p^s$ allora $|K| = p^{ns}$. Il gruppo G degli F-automorfismi del campo K è ciclico di ordine n e l'applicazione $\varphi : K \to K$ per cui, con $x \in K$, è $\varphi(x) = x^{p^s}$, è un generatore di G. Ne segue che, per ogni $x \in K$, $n_G(x) = x^{p^s} \cdot x^{p^{2s}} \cdot \ldots \cdot x^{p^{ns}} = x^t$ con $t = \dfrac{p^{ns} - 1}{p^s - 1}$ e $t < p^{ns} - 1$ poiché $p^s > 2$; in conseguenza esiste $x \in K^*$ tale che $n_G(x) \neq 1$.

Sia ora $h : K^* \to G$ l'applicazione per cui, con $x \in K^*$, è $h(x) = 1_G$ [2] se $n_G(x) = 1$ ed $h(x) = \varphi$ se $n_G(x) \neq 1$: il quasicorpo di ANDRÉ, definito a partire dal campo K, dal gruppo G e dall'applicazione h ha nucleo F e dimensione n.

Per dimostrare il teorema 1 quando α non è finito, stabiliamo innanzitutto le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 1. — *Se* $(Q_i)_{i \in I}$ *è una famiglia di quasicorpi,* $Q = \Pi_D Q_i$ *è un quasicorpo ed i campi* $N(\Pi_D Q_i)$ *e* $\Pi_D N(Q_i)$ *sono iso-*

[2] 1_G sta ad indicare l'elemento neutro di G.

morfi. Inoltre, se B_i *è una base di* Q_i *su* $N(Q_i)$, $\Pi_D B_i = \{[f]_\theta / f(i) \in B_i$ *se* $i \in I\}$ *è una parte libera di* Q *su* N(Q).

Dimostrazione. — $\Pi_D Q_i$ è un quasicorpo poiché la teoria dei quasicorpi è una teoria del primo ordine e sussiste il teorema fondamentale della teoria degli ultraprodotti. Se poi θ e θ' sono le congruenze determinate, rispettivamente in $\times_{i\in I} Q_i$ e $\times_{i\in I} N(Q_i)$, dall'ultrafiltro D, definiamo $h : \Pi_D N(Q_i) \to N(Q)$ con la posizione $h([g]_{\theta'}) = [g]_\theta$. Tale applicazione è ben definita: se $g \in \times_{i\in I} N(Q_i)$ e se $f \equiv g \pmod{\theta'}$, è $f \equiv g \pmod{\theta}$ ed inoltre $[g]_\theta \in N(Q)$. L'applicazione h è, inoltre, surrietiva perché se $[g]_\theta \in N(Q)$, essendo l'appartenenza al nucleo esprimibile mediante una formula del primo ordine, per il teorema fondamentale sugli ultraprodotti, $\{i \in I / g(i) \in N(Q_i)\} \in D$ e, ponendo, con $i \in I$, $\bar{g}(i) = g(i)$ se $g(i) \in N(Q_i)$ e $\bar{g}(i) = 1$ altrimenti, risulta $[\bar{g}]_{\theta'} \in \Pi_D N(Q_i)$ e $h([\bar{g}]_{\theta'}) = [\bar{g}]_\theta = [g]_\theta$.

Ovviamente h è iniettiva e conserva le operazioni, pertanto è l'isomorfismo dovuto. Per concludere $[v_1]_\theta, \ldots, [v_n]_\theta$ siano elementi distinti di $\{[f]_\theta / f(i) \in B_i$ se $i \in I\}$, $[\alpha_1]_\theta, \ldots, [\alpha_n]_\theta$ elementi di N(Q) e si abbia $\sum_{j=1}^{n} [v_j]_\theta\ [\alpha_j]_\theta = [0]_\theta$, quindi $\{i \in I / \sum_{j=1}^{n} v_j(i)\ \alpha_j(i) = 0\} = Y \in D$. Poiché per ipotesi $[v_h]_\theta \neq [v_k]_\theta$ (per $h \neq k$), risulta $X_{hk} = \{i \in I / v_h(i) \neq v_k(i)\} \in D$; inoltre, per quanto già provato, non è restrittivo supporre $\alpha_j(i) \in N(Q_i)$ se $i \in I$. Posto $X = Y \cap (\bigcap_{h\neq k} X_{hk})$ risulta, se $i \in X$, $\sum_{j=1}^{n} v_j(i)\ \alpha_j(i) = 0$, $X \in D$ e $v_1(i), \ldots, v_n(i)$ vettori indipendenti di Q_i su $N(Q_i)$. Ciò comporta che se $i \in X$ è $\alpha_1(i) = \alpha_2(i) = \ldots = \alpha_n(i) = 0$ e quindi che $[v_1]_\theta, \ldots, [v_n]_\theta$ sono vettori indipendenti; la proposizione è, così, completamente dimostrata.

PROPOSIZIONE 2. — *Se* $Q_i = A(F_i, G_i, h_i)$, $i \in I$, *è quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato sono individuati il quasicorpo* $Q(+, \circ) = Q = \Pi_D Q_i$ *ed il campo* $F(+, \cdot) = F = \Pi_D F_i$, *risultando* $Q(+) = F(+)$ *(a livello additivo). È possibile definire un monomorfismo di gruppi* η' *da* $\Pi_D G_i$ *al gruppo a(F) degli automorfismi del campo* F *e una applicazione* $h : F^* \to \eta'(\Pi_D G_i) = G$ *in modo che si abbia* $Q = A(F, G, h)$; *pertanto* $Q = Q(+, \circ)$ *è un quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato.*

Dimostrazione. — Indichiamo con $g = (g_i)_{i\in I}$, $f = (f_i)_{i\in I}$ elementi di $\times_{i\in I} G_i$, con $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$ elementi di $\times_{i\in I} F_i$, mentre $\Pi(F)$ indicherà il gruppo delle applicazioni biettive dell'insieme sostegno del campo F. Poiché, banalmente, se $[x]_\theta = [y]_\theta$ si ha $[(g_i(x_i))_{i\in I}]_\theta =$

$= [(g_i(y_i))_{i\in I}]_\theta$, è definita una applicazione $\eta : \underset{i\in I}{\times} G_i \to \Pi(F)$ ponendo $(\eta(g))([x]_\theta) = [(g_i(x_i))_{i\in I}]_\theta$ che, come subito si verifica, ha immagini in $a(F)$ ed è omomorfismo di gruppi che risulta epimorfismo per restrizione del suo codominio al sottogruppo $G = \eta(\underset{i\in I}{\times} G_i)$ di $a(F)$. Proveremo che $\ker\eta = \{g \,/\, [g]_\theta = [(1_{G_i})_{i\in I}]_\theta\}$ o, se si vuole, che $\eta(g) = \eta(f)$ se e solo se $[g]_\theta = [f]_\theta$. Infatti, se $[g]_\theta \neq [(1_{G_i})_{i\in I}]_\theta$, $X = \{i \in I / g_i \neq 1_{G_i}\} \in D$ e, con $i \in X$, esiste $x_i' \in F_i$ per cui $g_i(x_i') \neq x_i'$; si può pertanto considerare $y = (y_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{\times} F_i$ con $y_i = x_i'$ se $i \in X$, e $y_i = 1_{F_i}$ se $i \in I - X$. Allora $(\eta(g))([y]_\theta) = [(g_i(y_i))_{i\in I}]_\theta \neq [y]_\theta$ garantisce che $g \notin \ker\eta$. Se, viceversa, $g \notin \ker\eta$ esiste $[x]_\theta \in F$ tale che $(\eta(g))([x]_\theta) \neq [x]_\theta$; pertanto $Y = \{i \in I / g_i(x_i) \neq x_i\} \notin D$ e quindi $[g]_\theta \neq [(1_{G_i})_{i\in I}]_\theta$. In conseguenza è definito un isomorfismo gruppale $\eta' : \Pi_D G_i \to G$ nel quale risulta $\eta'([g]_\theta) = \eta(g)$. Nella ipotesi $[x]_\theta = [y]_\theta$, ossia che $Z = \{i \in I / x(i) = y(i)\} \in D$, risulta $[(h_i'(x_i))_{i\in I}]_\theta = [(h_i'(y_i))_{i\in I}]_\theta$ essendo h_i' il prolungamento di h_i da F_i^* a F_i ottenuto ponendo $h_i'(0_{F_i}) = 1_{G_i}$. Ne deriva che è definita un'applicazione $h' : F \to G$ ponendo $h'([x]_\theta) = \eta'[g]_\theta = \eta(g)$ con $g = (h_i'(x_i))_{i\in I}$, inoltre in $Q(\circ)$ si ha che $[x]_\theta \circ [y]_\theta = [(x(i)\,y(i))_{i\in I}]_\theta = [(x(i) \cdot y(i)^{h_i(x(i))})_{i\in I}]_\theta = [x]_\theta [y]_\theta^{h'([x]_\theta)}$ e se h è la restrizione di h' ad F^* si può concludere che $Q = A(F, G, h)$.

Per analizzare la struttura degli ultraprodotti di una famiglia di quasicorpi di ANDRÉ generalizzati è utile la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 3. — *Se* $A(F_i, G_i, h_i)$ *è, per ogni* $i \in I$, *un quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato, allora tutti e soli gli ultraprodotti di tale famiglia si possono ottenere a partire da un ideale massimale* H *dell'anello commutativo* $\underset{i\in I}{\times} F_i$ *e definendo nel campo quoziente* $(\underset{i\in I}{\times} F_i) / H$ *le operazioni*: $(f + H) + (g + H) = (f + g) + H$; $(f + H) \circ (g + H) = (f(i) \cdot g(i)^{h_i(f(i))})_{i\in I} + H$ *con* f *e* g *elementi di* $\underset{i\in I}{\times} F_i$.

Dimostrazione. — È noto che, data una famiglia $(F_i)_{i\in I}$ di campi, i quozienti $(\underset{i\in I}{\times} F_i) / H$ con H ideale massimale dell'anello $\underset{i\in I}{\times} F_i$, danno tutti e soli gli ultraprodotti di tale famiglia. Da ciò e dalla definizione di ultraprodotto segue l'asserto.

A partire dai quasicorpi di ANDRÉ già noti ed utilizzando gli ultraprodotti, è possibile costruire una vasta classe di quasicorpi di ANDRÉ generalizzati.

PROPOSIZIONE 4. — *Siano* K *un campo finito contenente almeno tre elementi ed* α *un cardinale infinito. Esiste un quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato il cui nucleo è isomorfo a* K *ed avente dimensione su tale nucleo* 2^{α}.

Dimostrazione. — Sia $(Q_n)_{n\in N}$ una successione di quasicorpi finiti di ANDRÉ di nucleo K e di ordini strettamente crescenti (ottenibili utilizzando la costruzione indicata all'inizio di questo paragrafo). Indicato con D un ultrafiltro non principale su N, qualunque sia $n \in N$ risulta $\{i \in N / |Q_i| = n\} \notin D$. Ciò comporta che $Q = \Pi_D Q_n$ ha cardinalità 2^{ω} ([4] Cap. 6 teorema 3.12). Sia ancora I un insieme di cardinalità α e D' un ultrafiltro regolare [3] su I: l'ultrapotenza $\Pi_{D'} Q$ ha ordine $(2^{\omega})^{\alpha} = 2^{\omega\alpha} = 2^{\alpha}$. Si ha inoltre che $N(Q) \equiv \Pi_D N(Q_i) \equiv \Pi_D K \equiv K^4$ e che $N(\Pi_{D'} Q) \equiv \Pi_{D'} N(Q) \equiv \Pi_{D'} K \equiv K$. Ne consegue che $\Pi_{D'} Q$ è il quasicorpo cercato.

PROPOSIZIONE 5. — *Siano* $Q = A(F, G, h)$ *un quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato e* Q' *un sottoquasicorpo di* Q. *Se* $Q'(+, \cdot)$ *è sottocampo di* $F(+, \cdot)$ *allora* Q' *è quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato.*

Dimostrazione. — Le ipotesi garantiscono che se $x, y \in Q'$ ed $x \neq 0$ risulta $x \circ y = x\, y^{h(x)}$, $y^{h(x)} = x^{-1}(x\, y^{h(x)}) \in Q'$; pertanto $h(x)$ è un monomorfismo del campo $Q'(+, \cdot)$ in sé. Inoltre $h(x)$ è un automorfismo di tale campo: infatti se $b \in Q'$ anche $x\, b \in Q'$, ed essendo $Q'(+, \circ)$ quasicorpo esiste $y \in Q'$ tale che $x \circ y = x\, b$, cioè $y^{h(x)} = b$. In definitiva $Q'(+, \circ)$ coincide con il quasicorpo di ANDRÉ generalizzato determinato dal campo $Q'(+, \cdot)$, dal gruppo di suoi automorfismi generato dall'insieme $\{h(x) / x \in Q' - \{0\}\}$ e dalla restrizione di h a $Q' - \{0\}$.

Il nucleo di un sottoquasicorpo Q' di Q in generale non coincide con il nucleo di Q. Vale in proposito la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 6. — *Sia* Q' *un sottoquasicorpo del quasicorpo* Q, *allora* $N(Q') \supseteq N(Q) \cap Q'$. *Pertanto da* $Q' \supseteq N(Q)$ *segue che* $N(Q') \supseteq N(Q)$.

Dimostrazione. — Ovvia.

PROPOSIZIONE 7. — *Siano* $Q = A(F, G, h)$ *un quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato ed* X *una parte non vuota di* Q. *Esiste un sottoquasi-*

[3] Per la definizione e l'esistenza degli ultrafiltri regolari si rimanda a [4] pag. 114, per la cardinalità dei relativi ultraprodotti si veda pag 132 teorema 3.21.

[4] Ricordiamo che ogni ultrapotenza di una struttura finita è isomorfa alla struttura stessa.

corpo di Q, $\ll X \gg$, *che è quasicorpo di* ANDRÉ *generalizzato, che contiene* X *ed è tale che* $N(\ll X \gg) = N(Q) \cap \ll X \gg$. *Inoltre se* X *è finito allora* $\ll X \gg$ *è finito o numerabile; altrimenti* $\ll X \gg$ *è equipotente ad* X. *Ovviamente se* $X \supseteq N(Q)$ *allora* $N(\ll X \gg) = N(Q)$.

Dimostrazione. — Per ogni $a \notin N(Q)$ consideriamo l'insieme, non vuoto, $X_a = \{(x, y) / (x \circ y) \circ a \neq x \circ (y \circ a)$ oppure $(x+y) \circ a \neq x \circ a + y \circ a\}$. Per l'assioma della scelta esiste allora una funzione $f : Q - N(Q) \to P(Q)$[5] tale che $f(a) = \{x, y\}$ con $(x, y) \in X_a$. Definiamo allora la successione $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ ponendo $Y_0 = X$ e $Y_{n+1} = (Y_n \circ Y_n) \cup (Y_n - Y_n) \cup \{x \in Q / \exists\, a \neq 0\ \exists\, b$ per cui $x \circ a = b$, $a \in Y_n$ e $b \in Y_n\} \cup \{x \in Q / \exists\, a, \exists\, b, \exists\, c$ per cui $-a \circ x + b \circ x = c$ con a, b e c elementi di Y_n ed $a \neq b\} \cup (Y_n \cdot Y_n^{-1}) \cup \left(\bigcup_{a \in Y_n - N(Q)} f(a)\right) \cup Y_n$.

È immediato verificare che $\bigcup_{n \in N_0} Y_n$ è sostegno di un sottoquasicorpo di $Q(+, \circ)$ e di un sottocampo di $F(+, \cdot)$; pertanto, a causa della proposizione 5, esso è sostegno di un quasicorpo di ANDRÉ generalizzato, contenente X, che denoteremo con $\ll X \gg$. Se X è finito lo è anche ciascun Y_n e quindi $\bigcup_{n \in N_0} Y_n$ è finito o numerabile. Se X è infinito allora ciascun Y_n è equipotente ad X e quindi $\bigcup_{n \in N_0} Y_n$ è ancora equipotente ad X.

Per quanto riguarda il nucleo di $\ll X \gg$, osserviamo che se $a \in \in \ll X \gg - N(Q)$ allora $\exists\, n \in N_0$ tale che $a \in Y_n - N(Q)$. Ciò implica che $f(a) = \{x, y\} \subseteq Y_{n+1}$ e quindi che $a \notin N(\ll X \gg)$. In definitiva $N(\ll X \gg) \subseteq N(Q)$ e, per la proposizione 6, $N(\ll X \gg) = N(Q) \cap \cap \ll X \gg$.

Osservazione. — La costruzione del quasicorpo $\ll X \gg$ dipende essenzialmente dalla funzione di scelta f e quindi non è possibile assicurare l'unicità della struttura $\ll X \gg$. Comunque la notazione $\ll X \gg$, pur essendo alquanto impropria, non darà luogo ad equivoci in quanto nel seguito utilizzeremo solo l'esistenza del quasicorpo $\ll X \gg$.

Le proposizioni ora dimostrate consentono di provare il teorema 1 quando il cardinale α non è finito. Infatti per la proposizione 4 esiste un quasicorpo Q_0 tale che $N(Q_0) = F$ e $\dim_{N(Q_0)} Q_0 = 2^\alpha$. Se X è un insieme di cardinalità α contenente F, allora $\ll X \gg$, determinato come indicato nella proposizione 7, è un quasicorpo di ANDRÉ generalizzato di nucleo F ed ordine (coincidente con $\dim_F \ll X \gg$ essendo F un campo finito) α; cioè: $\dim_F \ll X \gg = |\ll X \gg| = |X| = \alpha$.

[5] P (Q) denota l'insieme delle parti di Q.

4. — Dimostrazione dl teorema 2.

Se F è un campo finito il teorema 2 segue dal teorema 1; per dimostrare il teorema 2 nel caso in cui F è infinito, premettiamo il seguente lemma:

LEMMA 1. — *Siano* F *un campo ed* m *un intero positivo. Esiste un quasicorpo di* ANDRÉ Q *tale che* $N(Q)$ *è una estensione di* F *e* $\dim Q = m$. *Inoltre, se* F *è infinito si può pretendere che* $|Q| = |F|$.

Dimostrazione. — Sia $F(a_1, \ldots, a_m)$ l'ampliamento trascendente puro di grado m del campo F e sia G un gruppo di permutazioni dell'insieme $\{a_1, \ldots, a_m\}$ con $|G| = m$. Ogni elemento di G si può estendere univocamente ad un F-automorfismo di $F(a_1, \ldots, a_m)$ e G può essere riguardato come gruppo di automorfismi di $F(a_1, \ldots, a_m)$. Detto F_0 il campo degli invarianti di G, è $(F(a_1, \ldots, a_m) : F_0) = m$ e, essendo $F(a_1, \ldots, a_m)$ infinito, F_0 è infinito.

Indichiamo con $n_G(x)$, se $x \in F(a_1, \ldots, a_m)^*$, la norma di x relativa a G, cioè $n_G(x) = \prod_{f \in G} x^f$; allora per ogni $x \in F_0^*$ $n_G(x) = x^m$, e se $x, y \in F_0^*$ si ha che $n_G(x) = n_G(y)$ se e solo se $x^m = y^m$ cioè se e solo se $(x y^{-1})^m = 1$. Detto θ il nucleo dell'applicazione n_G (posto cioè $x \theta y$ se e solo se $n_G(x) = n_G(y)$), essendo le radici m-esime dell'unità di un campo in numero finito ed essendo F_0^* infinito, segue che anche l'insieme quoziente F_0^* / θ è infinito ed equipotente a $n_G(F_0^*)$; da ciò si ha che anche l'insieme $n_G(F(a_1, \ldots, a_m)^*)$, che include $n_G(F_0^*)$, è infinito. Le considerazioni precedenti assicurano che esiste un'applicazione suriettiva f di $n_G(F(a_1, \ldots, a_m)^*)$ in G tale che $f(1) = 1_G$. Posto $h = f \circ n_G$, il quasicorpo di ANDRÉ $Q = A(F(a_1, \ldots, a_m), G, h)$ ha nucleo F_0 e dimensione uguale a $(F(a_1, \ldots, a_m) : F_0) = m$. Se F è infinito risulta ovviamente $|F| = |F(a_1, \ldots, a_m)| = |Q|$.

Osservazione. — Il risultato del lemma non può essere migliorato pretendendo la coincidenza di F con $N(Q)$. Infatti se, ad esempio, F è un campo algebricamente chiuso e se esistesse un quasicorpo di ANDRÉ generalizzato $A(K, G, f)$ di nucleo F e dimensione finita $m \neq 1$, si avrebbe che $(K : F) = m$ e K sarebbe un ampliamento algebrico di F, in contrasto con l'ipotesi di chiusura algebrica per F.

Il lemma ora dimostrato assicura che il teorema 2 è vero per α finito. Resta allora da esaminare il caso in cui sia α che F sono infiniti.

Per ogni $n \in N$ indichiamo con Q_n un quasicorpo, la cui esistenza è assicurata dal lemma 1, tale che $N(Q_n) \supseteq F$ e $\dim Q_n = n$; essendo

F infinito, si ha $|Q_n| = |F|$. Detto D' un ultrafiltro regolare su N e posto $Q_o = \Pi_{D'} Q_n$, segue che $|Q_o| = |\Pi_{D'} Q_n| = |\Pi_{D'} F| = |F|^{|N|}$. Se B_n è una base di Q_n, essendo D' non principale, l'ordine di $B = \Pi_{D'} B_n$ risulta infinito e precisamente $|B| = 2^{|N|}$ ([4] pag. 128 teorema 3.12). Ne consegue che: $|B| \leq \dim Q_o \leq |F|^{|N|}$ cioè che:

$$2^{|N|} \leq \dim Q_o \leq |F|^{|N|}.$$

Sia ora α un cardinale infinito, I un insieme di cardinalità α e D'' un ultrafiltro regolare su I. Il quasicorpo di ANDRÉ generalizzato $\bar{Q} = \Pi_{D''} Q_o$ è tale che:

$$2^{\alpha} = (2^{|N|})^{\alpha} \leq |\Pi_{D''} B| \leq \dim \bar{Q} \leq |\bar{Q}| = (|F|^{|N|})^{\alpha} = |F|^{\alpha}.$$

Poiché F è sottocampo del nucleo di Q_n, è anche sottocampo di $N(Q_o)$ e di $N(\bar{Q})$. Se X è un sistema di vettori indipendenti, di cardinalità α, dello spazio vettoriale $\bar{Q}$ sul campo $N(\bar{Q})$, X sarà anche un sistema indipendente dello spazio vettoriale $\bar{Q}$ su ogni sottocampo di $N(\bar{Q})$. Ciò comporta che, essendo per la proposizione 7 $N(\ll X \cup F \gg) = N(\bar{Q}) \cap \ll X \cup F \gg$ è anche: $\alpha = |X| \leq \dim \ll X \cup F \gg \leq |\ll X \cup F \gg| = \alpha + |F|$.

Inoltre F, quale sottocampo di $N(\bar{Q})$ e di $\ll X \cup F \gg$, è anche sottocampo di $N(\ll X \cup F \gg)$: l'asserto è pertanto dimostrato per $Q = \ll X \cup F \gg$.

Per concludere dimostriamo che se F ha più di due elementi e se $F = \Pi_D F_i$, con $(F_i)_{i \in I}$ famiglia di campi finiti e D ultrafiltro su I, allora esiste un quasicorpo Q tale che $N(Q)$ è isomorfo ad F e $\alpha \leq \dim Q \leq \alpha + |F|$. Essendo $|F| \neq 2$, il sottoinsieme $S = \{i \in I / |F_i| \neq 2\}$ è un elemento di D. Posto $D' = \{X / \text{ esiste } Y \in D \text{ per cui } X = Y \cap S\}$ è noto ([7] pag. 176 esercizio 4.13) che D' è un ultrafiltro su S tale che $\Pi_{D'} F_i$ è isomorfo a $\Pi_D F_i$. A causa della proposizione 4, per ogni $i \in S$, esiste un quasicorpo di ANDRÉ generalizzato Q_i tale che $N(Q_i) = F_i$ e $|Q_i| = 2^{\alpha}$. Allora $\Pi_{D'} Q_i$ ha come nucleo $\Pi_{D'} N(Q_i) = \Pi_{D'} F_i \cong F$ e $2^{\alpha} \leq |\Pi_{D'} Q_i|$. Se B_i è una base di Q_i allora $|B_i| = |Q_i| = 2^{\alpha}$ e quindi il sistema indipendente $\Pi_{D'} B_i$ ha ordine maggiore od uguale a 2^{α}. Se X è un sistema indipendente di α vettori di $\Pi_{D'} Q_i$ risulterà $N(\ll X \cup F \gg) = N(\Pi_{D'} Q_i) = F$. Ciò comporta che X è indipendente anche come sistema di vettori di $\ll X \cup F \gg$.

Pertanto:

$$\alpha = |X| \leq \dim \ll X \cup F \gg \leq |\ll X \cup F \gg| = \alpha + |F|.$$

Osserviamo che la classe dei campi ottenibili come ultraprodotti di campi finiti è notevolmente ampia. Tali campi sono stati, ad esempio studiati in [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRÉ J., *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, Math. Z., **60** (1954), 156-186.

[2] AX J., *The elementary theory of finite fields*, Ann. Math. **83** (1968), 437-456.

[3] BARTOLOZZI F., *Quasicorpi di dimensione infinita sul loro nucleo*, Atti Accad. Sci. Lett. Arti Palermo, Parte I (IV), **28** (1967-68), 507-513.

[4] BELL J. L. and SLOMSON A. B., *Models and Ultraproducts*, North-Holland, Amsterdam (1971).

[5] CAGGEGI A., *Una classe di quasicorpi di dimensione infinita sul loro nucleo*, Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat. Napoli, Serie 4, Vol. XLI (1974), 5-10.

[6] CAGGEGI A., *Piani di André generalizzati*, Rend. Circ. Mat., Palermo, Serie II, **25** (1976), 213-233.

[7] CHANG C. C. - KEISLER H. J., *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam (1973).

[8] FOULSER D. A., *A generalization of André's systems*, Math. Z., **100** (1967), 380-395.

[9] RINK *R.*, *Eine klasse unendlicher verallgemeinerter André-ebenen*, Geomctriae Dedicata **6** (1977), 55-80.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Panella, M. Curzio e A. Franchetta.

Studio del potere decolorante della sepiolite con un semplice apparato di percolazione

Nota di FRANCISCO HUERTAS *, ANTONIO POZZUOLI ** e JOSÉ LINARES *

presentata dal socio emerito ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza dell'1 dicembre 1979)

RIASSUNTO. — Viene presentato un semplice apparato di percolazione utile allo studio del potere decolorante della sepiolite attraverso il controllo delle variabili caratteristiche relative al processo di percolazione.

Le condizioni ottimali del processo sono state ottenute con l'impiego di materiale sepiolitico proveniente dalla località di Vallecas (Spagna) e caratterizzato da particelle di dimensioni comprese fra 0,16 e 0,20 mm, ad una temperatura di percolazione di 56,5 °C, ad una temperatura di attivazione di 110 °C ed ad una velocità di percolazione di 0,5 ml/min.

Il potere decolorante della sepiolite viene esaltato in seguito a trattamento termico nell'intervallo 200-700 °C.

Vengono inoltre riportati i risultati di uno studio comparativo del potere decolorante effettuato mediante l'impiego di distinti materiali silicatici.

SUMMARY. — A percolation system was constructed in order to study the decolorizing power of sepiolite from Vallecas (Spain). This equipment permits the control of the characteristic variables of a percolation process.

The following experimental parameters were selected: grain size of 0,16-0,20 mm, percolation temperature of 56,5 °C and percolation rate of 0,5 ml/min making use of activated sepiolite at 110 °C.

The decolorizing power of sepiolite is exalted by thermal treatment in the range of 200-700 °C.

A comparision of the decolorizing power of some adsorbent materials was made.

PREMESSA

Nella letteratura specifica non viene riportato nessun metodo standardizzato relativo alla determinazione assoluta del potere decolorante delle argille. A tutt'oggi, il potere decolorante di un'argilla

* Estación Experimental del Zaidin - C.S.I.C. - Granada (España).
** Istituto di Mineralogia. Università di Napoli (Italia).

viene determinato solo attraverso prove di laboratorio comparato ad altre argille assunte come standards di riferimento (MANTELL, 1951; GRIM, 1962). In particolare, nel caso degli oli, si osserva che il potere decolorante di una argilla spesso non presenta lo stesso soddisfacente valore col variare del tipo di olio esaminato.

Per la determinazione del potere decolorante si ricordano, fra l'altro:

— il metodo di percolazione (FRITZ-SIMONS, AMERO e CAPELL, 1941), basato sul confronto del potere decolorante di un'argilla problema con quello di un'argilla standard di riferimento. L'indice di decolorazione viene definito dal volume di olio decolorato ad un determinato colore;

— il metodo di contatto (LOPEZ GONZALES, 1952), dove l'indice di decolorazione si misura in base all'uguaglianza stabilitasi fra la densità ottica dell'olio decolorato dell'argilla problema e quella di detto olio dopo opportuna diluizione con benzene.

Nel presente lavoro viene illustrato un apparato di percolazione idoneo allo studio del comportamento e delle capacità applicative dei materiali silicatici nel settore specifico dei decoloranti naturali. Le indagini hanno riguardato principalmente la sepiolite che, come è noto, viene utilizzata spesso nei sistemi di percolazione. Con questo minerale fibroso delle argille i risultati si sono dimostrati pienamente soddisfacenti ed hanno permesso di definire nettamente i comportamenti ed i limiti di applicabilità degli altri materiali utilizzati.

DESCRIZIONE ED USO DELL'APPARATO

L'apparato di percolazione, realizzato sulla base delle idee di FRITZ-SIMONS, AMERO e CAPELL, si presenta con un disegno semplice ed originale. Esso risulta costituito fondamentalmente da due colonne a doppia parete collegate ad un pallone a tre uscite ed ad una colonna di refrigerazione (Fig. 1). I vapori provenienti dal liquido in ebollizione circolano fra le doppie pareti delle colonne e passano successivamente alla colonna di refrigerazione dove si condensano e ritornano al pallone. In tal modo la temperatura delle colonne resta costante durante l'intero processo di percolazione.

La parte superiore delle colonne è costituita da contenitori, nei quali si immette l'olio da decolorare, delimitati in basso da valvole regolatrici della velocità di percolazione. L'intero apparato è costituito da elementi di vetro di facile sostituzione, montaggio e manutenzione. Ciascuna colonna ha una sezione di 1 cm^2 ed è alta 30 cm. Nell'apparato il controllo delle variabili relative al processo di per-

colazione (velocità di flusso, temperatura, etc.) risulta rapido ed estremamente semplice.

Per ottenere frazioni decolorate a bassa densità ottica si riempiono inizialmente i contenitori con 50 o 100 ml di una soluzione

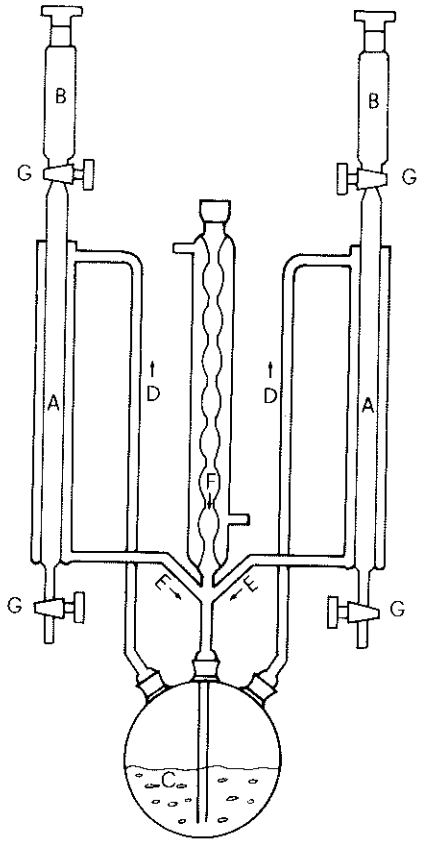


FIG. 1. - Schema dell'apparato di percolazione: A, materiale decolorante; B, liquido da decolorare; C, acetone in ebollizione; D, vapori di acetone; E, condensazione parziale dei vapori di acetone; F, condensazione totale dei vapori di acetone; G, valvole regolatrici.

fortemente diluita di benzene con olio minerale, nel rapporto di quaranta parti di benzene ad una dell'olio impiegato, e si lasciano accumulare in ciascuna colonna 12,5 grammi di argilla. La densità ottica (D. O.) del benzene è 1,20. Le colonne vengono poi sottoposte dall'esterno a leggere e ripetute vibrazioni tali da impedire che nell'argilla si possano formare canali o spazi di alcun genere. Si porta quindi ad ebollizione il liquido, nel nostro caso acetone, contenuto

nel pallone, e si attende che nelle colonne e nell'argilla si sia stabilita la sua temperatura di ebollizione (56,5 °C). Si lascia gocciolare la soluzione sull'argilla, si regola la velocità di percolazione richiesta, si raccolgono infine diverse quantità di 6 ml di olio minerale decolorato. A percolazione ultimata si procede alla determinazione della densità ottica sia delle singole quantità di 6 ml sia di loro quantità multiple (12, 18, 24, 30, 36 ml).

Materiali e strumentazione

È stato utilizzato un olio minerale di produzione venezuelana, distribuito in Spagna dalla Società « E. N. Calvo Sotelo », caratterizzato da una densità di 0,852 a 15 °C, da una viscosità di 1,60° Engler a 20 °C e da un contenuto di impurità di zolfo pari all'1,15 %. Per tutte le prove di decolorazione l'olio è stato diluito con benzene nel citato rapporto di 1 : 40.

Come materiali adsorbenti sono stati selezionati una sepiolite commerciale, granuli di una bentonite spagnola di « Minas de Gádor S. A. » (Almería), una bentonite marocchina di Maaza (Girela, 1961), un'illite dell'Oklahoma (Mankin e Dodd, 1963), un campione di kieselguhr della Merck ed un campione di quarzo della Ward's (U.S.A.). Il materiale sepiolitico proviene dai giacimenti spagnoli di Vallecas (Madrid) (Huertas, 1969) ed è distribuito dalla Casa commerciale spagnola « Turberas del Buyo y del Gistral ». All'analisi roentgenografica si è rivelato mineralogicamente puro in quanto costituito, praticamente, da sola sepiolite.

Lo studio del potere decolorante è stato condotto tenendo presente l'influenza della granulometria e delle distinte temperature di attivazione. Nel caso della sepiolite sono state selezionate quattro frazioni granulometriche con diametro delle particelle di 0,35-0,40 mm, 0,25-0,35 mm, 0,20-0,25 mm e di 0,16-0,20 mm, corrispondenti alla serie classica francese dei setacci A.F.N.O.R. rispettivamente numerati 26, 25, 24 e 23. Esse sono state sottoposte successivamente a diversi trattamenti termici di un'ora ciascuno e preservate in disseccatore da eventuali reidratazioni.

Le misure utili delle densità ottiche sono state effettuate secondo le normali procedure analitiche con un fotocolorimetro Spekker Hilger mod. 760 corredato di un filtro verde azzurro (490-500 nm) e di provette di 1 cm di spessore interno ciascuna con capacità di circa 6 ml. Come standard è stato utilizzato benzene puro per analisi.

Risultati e discussione

Tutte le esperienze preliminari realizzate allo scopo di descrivere gli andamenti delle curve spettrali mostrano che il valore della densità ottica è funzione del tipo di filtro utilizzato nel fotocolorimetro. Una prima osservazione di carattere generale riguarda il basso valore della densità ottica osservata con vari filtri per piccole quantità di

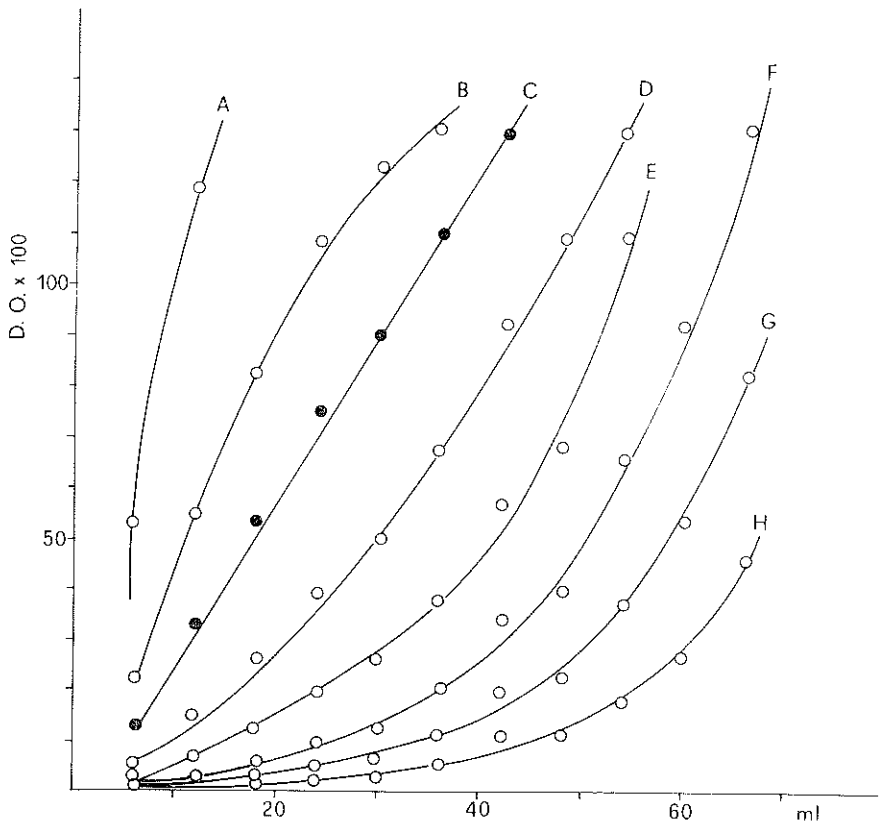


Fig. 2. - Densità ottiche delle frazioni percolate misurate con i filtri relativi alla lunghezza d'onda del violetto (A), dell'azzurro (B), del verde-azzurro (C), del verde (D), del giallo-verde (E), del giallo (F), dell'arancione (G) e del rosso (H).

liquidi. Da ciò deriva la necessità di utilizzare un determinato filtro che abbia un sufficiente potere risolutivo nell'ambito delle piccole variazioni della densità ottica. A tale fine è stata misurata la densità ottica delle frazioni di una percolazione standard mediante diversi filtri colorati. Nella Fig. 2 si osserva che le misure eseguite col filtro rosso rivelano una scarsa sensibilità nella regione dei bassi valori

della densità ottica, mentre il filtro violetto presenta una eccessiva sensibilità alle piccole variazioni di colore. Fra i vari filtri impiegati il più idoneo a soddisfare le esigenze di un buon potere risolutivo è quello verde-azzurro, in base al quale si osserva che il rapporto D.O./ml presenta un andamento lineare. Per tal motivo detto filtro è stato preferito ed utilizzato sistematicamente per tutte le determinazioni successive.

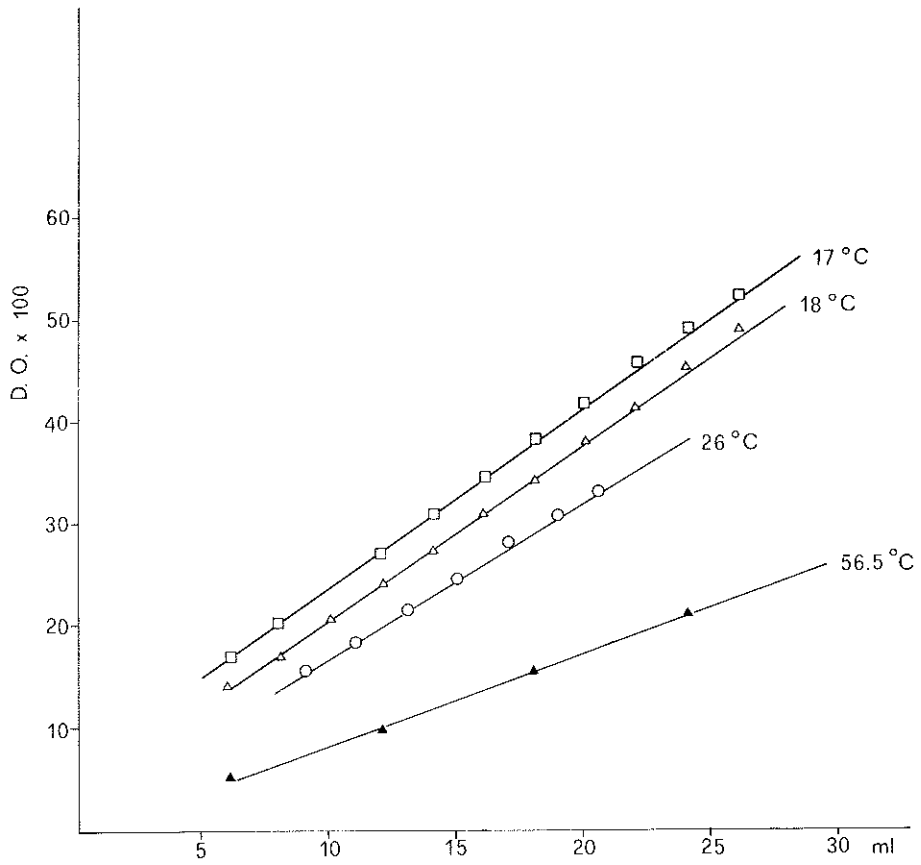


FIG. 3. - Densità ottiche delle frazioni percolate a distinte temperature di percolazione.

Un processo di percolazione, come è noto, dipende da diversi fattori quali, principalmente, la temperatura di percolazione, la granulometria del materiale decolorante, la velocità di percolazione e la temperatura di attivazione.

Nella Fig. 3 i risultati ottenuti a quattro distinte temperature di percolazione comprese fra 17 °C e 56,5 °C, indicano che a più alta

temperatura il processo di decolorazione è più importante. Le rette, in particolare, sembrano tendere ad assumere un certo parallelismo fra loro.

Il ruolo della temperatura durante il processo di percolazione viene dettagliato nella Fig. 4, ottenuta dalla precedente in base alla

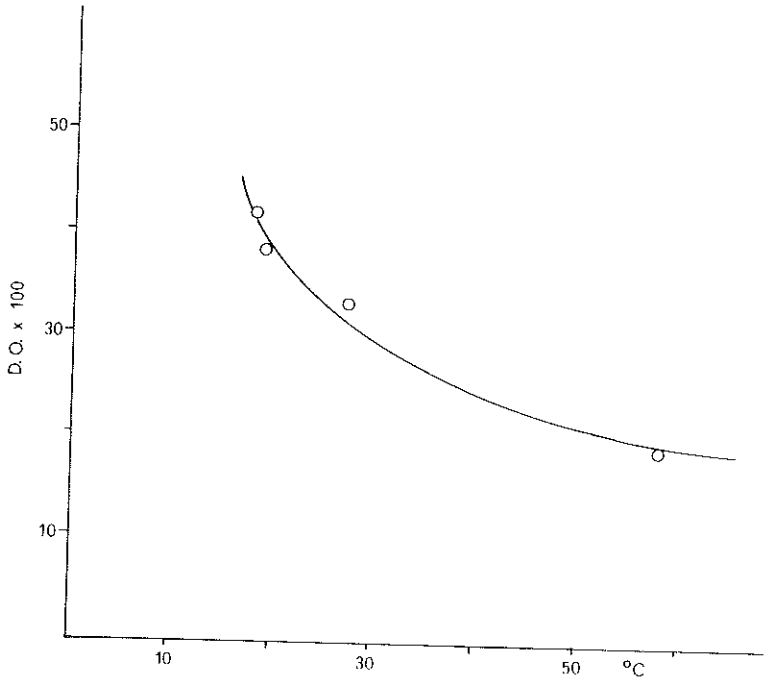


FIG. 4. - Densità ottiche della frazione di 24 ml a distinte temperature.

frazione di 24 ml. Si osserva che, a bassa temperatura, il processo di decolorazione è meno intenso. In particolare, nell'ambito dell'intervallo 0-20 °C, una piccola variazione di temperatura può determinare notevoli oscillazioni dei valori della densità ottica dei liquidi percolati, mentre a temperature superiori le variazioni delle densità ottiche si presentano via via sempre meno accentuate. Come temperatura di percolazione valida si è scelta, pertanto, quella di 56,5 °C, corrispondente al punto di ebollizione dell'acetone contenuto nel pallone dell'apparato.

Per quanto riguarda la granulometria delle particelle del materiale sepiolitico decolorante, sono state considerate le quattro frazioni innanzi descritte. Nella Fig. 5 si osserva che le particelle più fini determinano un maggiore valore del potere decolorante. Ad esempio, per una densità ottica di 0,20, si ottengono 20 ml di liquido per-

colato se è stato impiegato materiale con particelle di diametro relativo all'intervallo 0,35-0,40 mm e 30 ml con la frazione più fine relativa alle particelle di diametro compreso fra 0,16 e 0,20 mm.

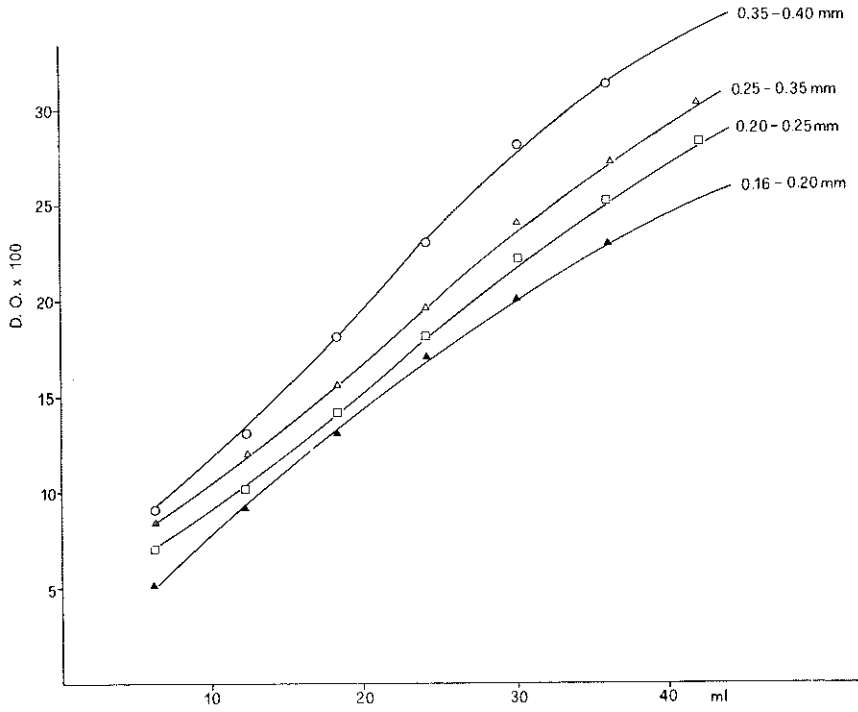


FIG. 5. - Densità ottiche delle frazioni percolate a distinte granulometrie.

Nel caso della velocità di percolazione risulta conveniente operare ad una velocità di flusso tale che ogni sua piccola variazione non influenzi il colore dei liquidi ottenuti. Nella Fig. 6 i risultati ottenuti a partire da vari liquidi alle velocità di flusso di 0,1, 0,15, 0,40 e 0,50 ml/min indicano che, con la diminuzione della velocità di flusso, le quantità percolate risultano più decolorate. Nel nostro caso, però, è stata assunta come velocità quella di 0,50 ml/min per due ragioni, l'una relativa alla facilità del suo controllo durante il processo di percolazione, l'altra perché le sue piccole variazioni non determinano sensibili oscillazioni dei valori delle densità ottiche (Fig. 7).

Per quanto riguarda la temperatura di attivazione bisogna tener presente che i trattamenti possono determinare anche notevoli modificazioni nella struttura della sepiolite. Secondo PREISINGER (1963) la sepiolite diventa anidra a 380 °C e resta tale fino a 650 °C, trasfor-

mandosi successivamente in clinoestatite. Dallo schema seguente si osserva, in base ai risultati di quest'Autore, che l'aumento della tem-

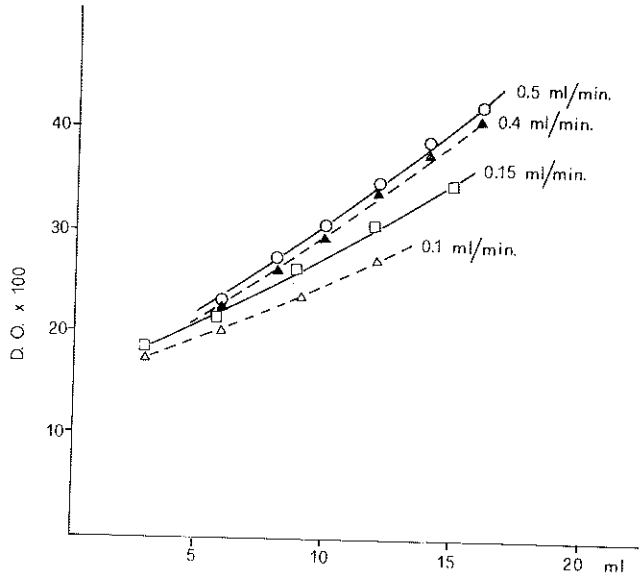


FIG. 6. - Densità ottiche delle frazioni percolate a distinte velocità di percolazione.

peratura comporta una diminuzione dei parametri reticolari « a » e « b » delle fasi osservate:

	Parametri reticolari		
	a	b	c
Sepiolite naturale $(H_2O)_n\{Mg_8(H_2O)_4(OH)_4(Si_{12}O_{30})\}$	13,4 Å	26,8 Å	5,28 Å
Sepiolite anidra $\{Mg_8(OH)_4(Si_{12}O_{30})\}$	10,9 Å	23,3 Å	5,26 Å
Clinoestatite $MgSiO_3$	9,9 Å	9,2 Å	5,26 Å

Nell'ambito della struttura fibrosa della sepiolite le diverse molecole d'acqua risultano fra loro distinte dal punto di vista energetico (MARTIN VIVALDI e CANO, 1956; MARTIN VIVALDI e FENOLL, 1969; SERRATOSA, 1979). Ciò permette di pensare che il trattamento termico, con perdita parziale o totale di acqua, possa provocare modificazioni superficiali e strutturali tali da essere utilizzate positivamente nel processo di decolorazione. Pertanto, sono state eseguite diverse prove di percolazione con quantità di sepiolite previamente riscaldate a distinte temperature. Nella Fig. 8 vengono presentati i risultati relativi al potere decolorante della sepiolite naturale senza trattamento

termico e riscaldata a varie temperature. Le temperature di attivazione risultano efficaci nell'ottenimento di un potere decolorante maggiore di quello relativo all'impiego della sepiolite naturale a 25 °C. Il maggiore effetto decolorante si individua nella sepiolite ri-

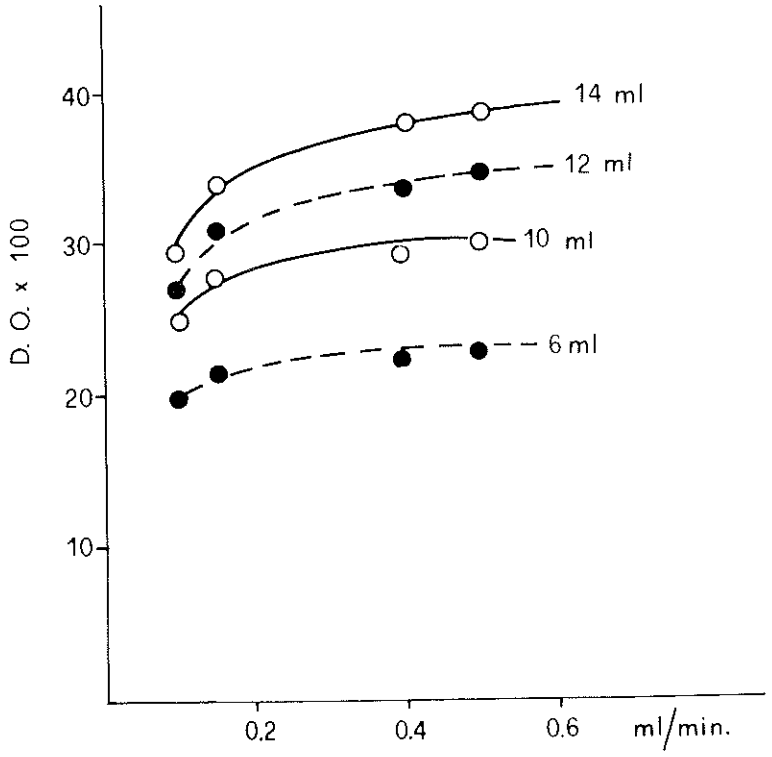


FIG. 7. - Densità ottiche delle distinte velocità di percolazione per alcune frazioni percolate.

scaldata fra 200 e 700 °C. La rappresentazione dettagliata dell'influenza termica sul potere decolorante della sepiolite è data nella Fig. 9 dove, in ordinata, sono riportate le densità ottiche relative a 36 ml di liquido percolato. Si osserva un incremento importante del potere decolorante fino ai 200 °C circa cui segue, dopo una leggera inflessione intorno ai 300 °C, un altro, fino ad una temperatura di circa 600 °C. Ciò può essere relazionato alle modificazioni chimiche e strutturali che si producono durante il riscaldamento. A 250 °C la sepiolite perde le molecole d'acqua « libere » e quelle dei canali. Ciò comporta un aumento del potere decolorante in quanto le molecole organiche non risultano ostacolate da acqua più o meno legata alla struttura e pos-

sono quindi fissarsi per adsorbimento alle superfici interne del minerale. Con l'aumentare della temperatura si produce una perdita dell'acqua di coordinazione e si generano nuove superfici occupabili

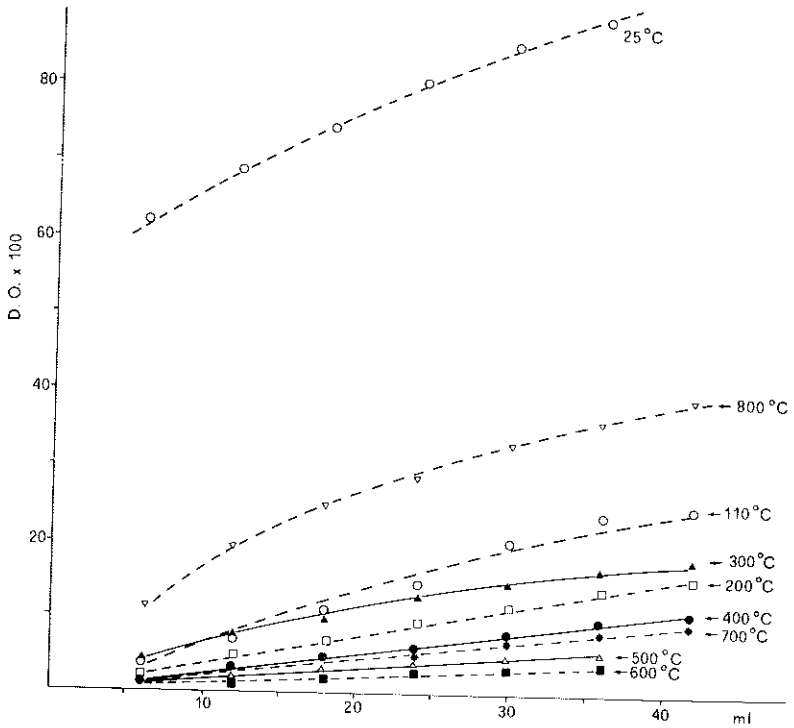


FIG. 8. - Densità ottiche delle frazioni percolate relative alla sepiolite con e senza distinti preriscaldamenti.

che favoriscono un ulteriore accesso alle molecole organiche. A 380 °C la sepiolite diventa anidra con una netta modificazione interna secondo la quale diminuiscono le dimensioni dei canali e, possibilmente, alcune sue fibre si rompono. La sepiolite, in queste condizioni, possiede un potere decolorante maggiore sia per la presenza di « loci » strutturali caratterizzati da cariche « residue » relative ad atomi di magnesio terminali, sia perché può comportarsi come un setaccio molecolare con pori ridotti. Quest'ultima osservazione trova pieno riscontro nel migliore comportamento di tale minerale a granulometria più fine. A partire dai 650 °C si forma clinoestatite, in pirosseno il cui potere decolorante è molto basso. Il materiale, infatti, via via perde rapidamente il suo potere decolorante.

Si potrebbe pensare che la modificazione strutturale relativa alla fase anidra della sepiolite sia da sola insufficiente a determinare una così forte capacità decolorante e che, pertanto, l'aggiunta di acqua o di liquidi organici abbia potuto rigenerare la struttura o provocare alcune modificazioni strutturali favorevoli. Per verificare ciò sono

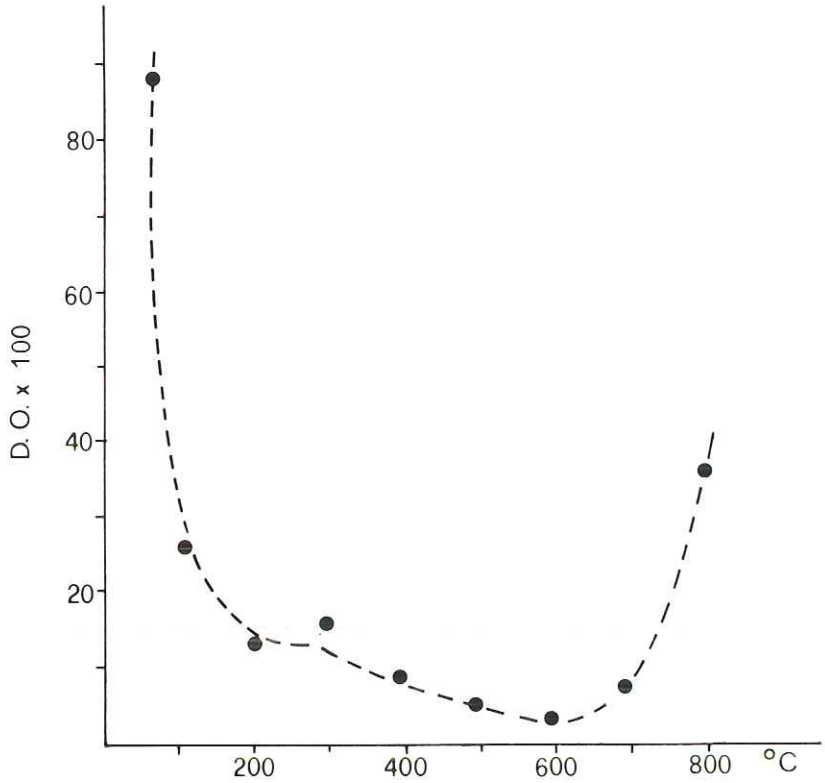


FIG. 9. - Relazione fra densità ottica della frazione di 36 ml e temperatura di attivazione.

stati esaminati roentgenograficamente i comportamenti di campioni di sepiolite riscaldati a 550 °C con e senza trattamento di percolazione. I risultati ottenuti hanno rivelato che la struttura della sepiolite anidra non viene modificata dalla presenza di glicole etilenico o dalle molecole organiche dell'olio minerale diluito con benzene. Pertanto, l'aumento del potere decolorante deve essere attribuito alla presenza di « loci » strutturali con cariche non compensate ed alla diminuzione delle dimensioni dei canali e delle fibre.

Il potere decolorante è stato confrontato con quello di altri materiali adsorbenti e di due praticamente inerti, tutti già precedentemente descritti. Le condizioni sperimentali quali spessore, dimen-

sioni delle particelle (0,16-0,20 mm), velocità di flusso (0,5 ml/min), temperatura di attivazione (110 °C) e temperatura di percolazione (56,5 °C) sono risultate uguali per tutti. In Fig. 10 vengono riportati i risultati ottenuti, dai quali possono essere stabilite le seguenti conclusioni:

— il quarzo ed il kieselguhr si comportano come materiali praticamente inerti, ciò in base alla loro struttura;

— l'illite dell'Oklahoma e la bentonite di Gádor presentano un comportamento similare. Per le prime quantità percolate il potere decolorante è buono; ma, a partire dai 40 ml diminuisce rapidamente;

— la bentonite marocchina di Maaza, composta principalmente da montmorillonite ed halloysite, ha un maggior potere decolorante che decresce a partire dai 110 ml di percolazione;

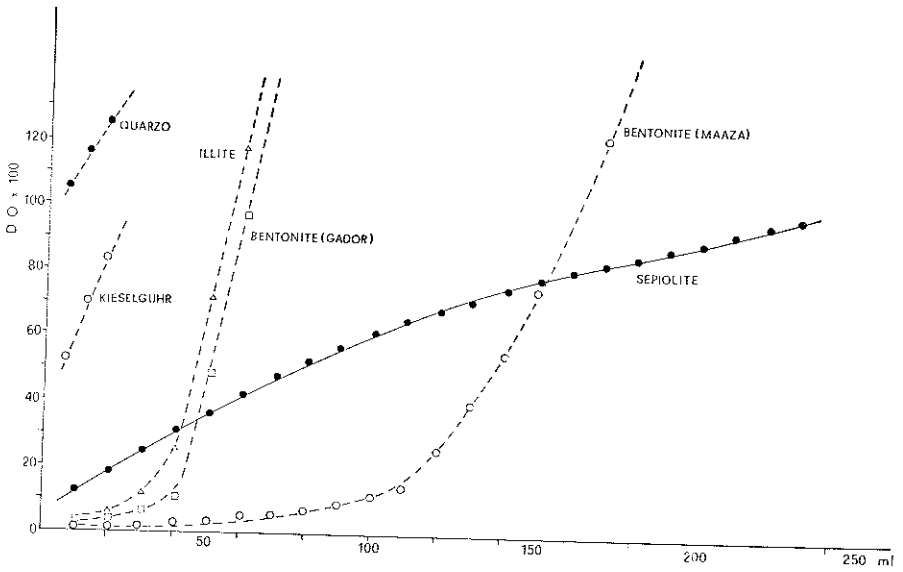


FIG. 10. - Curve di percolazione dei materiali.

— la sepiolite ha un comportamento singolare: inizialmente il suo potere decolorante è inferiore a quello dell'illite e delle due bentoniti ma, già a partire dai 50 ml decolora meglio dell'illite e della bentonite di Gádor. Fino a 150 ml il suo potere decolorante è nettamente inferiore a quello della bentonite di Maaza. A partire dai 150 ml, però, continua ad avere un discreto potere decolorante laddove gli altri materiali dimostrano di aver esaurito ogni loro capacità applicativa;

— è possibile stabilire spesso, per diversi materiali utilizzati, un cosiddetto « indice di decolorazione ». Nel caso del presente lavoro,

ad esempio, gli indici per l'illite e le due bentoniti si ottengono estrapolando a densità ottica zero gli andamenti delle loro rette riportate in Fig. 10. In tale modo gli indici rappresentano i ml di olio minerale decolorato. Nelle presenti condizioni di lavoro l'illite possiede un indice di 35 ml, la bentonite di Gádor di 42 ml e la bentonite di Maaza di 120 ml;

— non è stato assegnato un indice di decolorazione alla sepiolite di Vallecas in quanto non è stato possibile determinare l'inizio dell'esaurimento della sua capacità decolorante;

— è possibile utilizzare i diversi materiali anche in funzione del colore delle quantità percolate. Frazioni da trasparenti a verdi si ottengono utilizzando l'illite e le due bentoniti. Frazioni gialle si ottengono con la sola bentonite di Maaza. La sepiolite si presenta ideale per ottenere liquidi percolati con colori compresi fra il giallo ed il rosso.

LAVORI CITATI

FRITZ-SIMONS O., AMERO R. C., CAPELL R. G., *Evaluation of granular adsorbents for petroleum refining*, Natl. Petrol. News, **33**, n. 44, R 339 (1941).

GRIM R. E., *Applied clay mineralogy*, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1962.

HUERTAS F., *Minerales fibrosos de la Arcilla. Su genética en cuencas sedimentarias españolas y sus aplicaciones tecnológicas*, Tesis doctoral, Universidad de Madrid, 1969.

LOPEZ GONZALES J. D., *Acción de los acidos fuertes sobre los silicatos de la serie isomorfa montmorillonita-beidellita*, Tesis doctoral, Universidad de Madrid, 1952.

MANKIN C. J., DODD C. G., *Proposed reference illite from the Ouachita Mountains of southerneastern Oklahoma*, Clays Clay Min., **10**, 372-379 (1963).

MANTELL C. L., *Adsorption*, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1951.

MARTIN VIVALDI J. L., CANO J., *Contribution to the study of sepiolite: II. Some considerations regarding the mineralogical formula*, Clays Clay Min., **4**, 181 (1956).

MARTIN VIVALDI J. L., FENOLL P., *Differential Thermal Analysis*, Edit. Mackenzie R. C., Chapter 20, Mineralogical Society, London, 1969.

PREISINGER A., *Sepiolite and related compounds its stability and applications*, Clays Clay Min., **10**, 365 (1963).

SERRATOSA J. M., *Surface properties of fibrous clay minerals (palygorskite and sepiolite)*, Proc. Int. Clay Conf. 1978, Oxford, 99-109 (1979).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, P. Corradini e R. Sersale.

Alcune disuguaglianze per derivate intermedie negli spazi di Orlicz-Sobolev e applicazioni *

Nota di GIULIANA PALMIERI (a Bari)
presentata dal socio corrispondente ANTONIO AVANTAGGIATI

(Adunanza dell'1 dicembre 1979)

ABSTRACT. — We give upper bounds for the L_M-norm of intermediate derivatives of a function belonging to a Orlicz-Sobolev space in terms of the L_M-norm of the function and of its derivatives of top order.

The obtained results are applied to homogeneous variational problems for non-linear elliptic operators with non-polynomial coefficients.

INTRODUZIONE.

Lo scopo principale di questa nota è quello di estendere alcune disuguaglianze di interpolazione per le derivate intermedie, già note negli spazi di Sobolev, a spazi di Orlicz-Sobolev. Si provano maggiorazione della $L_M(\Omega)$-norma delle derivate di ordine β, $|\beta| < m$, di una funzione $u \in W^m L_M(\Omega)$ tramite la $L_M(\Omega)$-norma di u e delle sue derivate di ordine massimo. Nel caso Ω limitato si dimostrano inoltre analoghe maggiorazioni in cui, in luogo della $L_M(\Omega)$-norma di u compare la L_M-norma di u su un opportuno sottoinsieme $\Omega' \subset\subset \Omega$ oppure la norma della traccia di u, in ipotesi restrittive su Ω ed M. Oltre a queste maggiorazioni si dimostrano le analoghe disuguaglianze per gli integrali, estesi ad Ω, di $M(\lambda D^\beta u)$, $\forall\ \lambda > 0$. Queste ultime maggiorazioni, utili nelle applicazioni, non si possono in genere ottenere dalle precedenti, mentre è vero il viceversa.

Rileviamo che la maggiore difficoltà che si incontra nel dimostrare queste disuguaglianze consiste nel fatto che gli spazi di Orlicz-Sobolev, in genere, non sono separabili, quindi C^∞ non è denso in essi.

A quanto mi risulta, l'unica disuguaglianza del tipo di quelle dimostrate nel presente lavoro, già nota per spazi di Orlicz-Sobolev,

* Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

è la seguente disuglianza di Poincarè:

$$(.) \qquad \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} M(D^{\alpha} u)\, dx < c_m \sum_{|\beta| = m} \int_{\Omega} M(c_{m,\Omega} D^{\beta} u)\, dx,$$

dimostrata da G. P. Gossez in [8] nell'ipotesi Ω limitato ed $u \in$ $\in W_0^m L_M(\Omega)$. Chiaramente in tali spazi le dimostrazioni di maggiorazioni per derivate intermedie sono più semplici.

Si vede infine, una possibile applicazione delle disuguaglianze provate in questa nota: si indeboliscono le ipotesi (sostitutive della coercività) fatte in precedenza da altri autori (cfr. [5]) per assicurare maggiorazioni a priori di una soluzione di problemi al bordo omogenei, in forma variazionale, per operatori del tipo:

$$A u = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, \ldots, \nabla^m u), \qquad x \in \Omega$$

Le ipotesi che faremo sono analoghe a quelle utilizzate da G. P. Gossez in [9] per il problema di Dirichlet omogeneo nel caso Ω limitato: in tal caso ci si serve della disuguaglianza di Poincarè, valida per aperti limitati. Rileviamo che nella nota [5] vengono anche fatte ipotesi più restrittive sulla N-funzione M, e quindi sul comportamento di coefficienti A_{α} (tali da imporre in effetti la coercività), di quelle che utilizzeremo in seguito.

I risultati ottenuti in questa nota sono stati inoltre adoperati in un lavoro precedente (cfr [13]) allo stesso scopo, ma per problemi non omogenei.

§ 1.

Dimostriamo inizialmente maggiorazioni della norma delle derivate intermedie di una generica funzione $u \in L_M(\Omega)$ tramite la norma u e delle sue derivate di ordine massimo. Si ottengono disuguaglianze che estendono a spazi di Orlicz-Sobolev alcune maggiorazioni classiche per spazi di Sobolev, provate, ad esempio, da G. Ehrling [3], E. Gagliardo [4], [5], L. Niremberg [7], [8].

Premettiamo un lemma valido nel caso unidimensionale e in ipotesi restrittive, che ci sarà utile per provare le successive proposizioni.

Lemma 1.1 — *Se* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *ed* M *è una* N-*funzione, allora per ogni funzione* $f \in C^2(a, b)$, *per ogni* h *soddisfacente* $0 <$

$< h < (b - a)/2$ *e per ogni* $\lambda > 0$

$$\int_a^b M(\lambda f'(t))\, dt \leq \int_a^b M(2\lambda h f''(t))\, dt + \frac{3}{4}\int_a^b M(4\lambda f(t)/h)\, dt$$

Dim. Fissati ad arbitrio x ed h soddisfacenti $a < x < x + h < b$, esiste $\xi \in]x, x + h[$ tale che

$$[f(x + h) - f(x)]/h = f'(\xi)$$

allora per $a < x < \xi < x + h < b$

$$|f'(x)| \leq \int_x^{\xi} |f''(t)|\, dt + |f(x + h) - f(x)|\,/\,h,$$

per la convessità di M e per la disuguaglianza di Jensen, $\forall\, \lambda > 0$:

$$M(\lambda f'(x)) \leq \frac{1}{2h}\int_x^{x+h} M(2\lambda h f''(t))\, dt +$$

$$+ \frac{1}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} f(x + h)\right) + \frac{1}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} f(x)\right).$$

Integrando rispetto ad x su $]a, b - h[$ ed osservando che

$$\int_a^{b-h} dx \int_x^{x-h} M(2\lambda h f''(t))\, dt = \int_0^h d\tau \int_a^{b-h} M(2\lambda h f''(x + \tau))\, dx \leq$$

$$\leq h \int_a^b M(2\lambda h f''(t))\, dt,$$

si ottiene:

$$\int_a^{b-h} M(\lambda f'(x))\, dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b M(2\lambda h f''(t))\, dt +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{a+h}^b M\left(\frac{4\lambda}{h} f(t)\right) dt + \frac{1}{4}\int_a^{b-h} M\left(\frac{4\lambda}{h} f(t)\right) dt.$$

Maggiorando analogamente l'integrale esteso all'intervallo $]b - h, b[$, per $h < (b - a)/2$, si ottiene la tesi.

Riportiamo le definizioni di proprietà di cono ed uniforme proprietà di cono (cfr. [1]), che utilizzeremo in quanto segue:

DEF. 1 — Un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ ha la *proprietà di cono* se esiste un cono finito C tale che ogni punto $x \in \Omega$ sia vertice di un cono finito, C_x, contenuto in Ω e congruente a C.

Un *cono finito* C è, per definizione, $C = B_k \cap \{t\, y : y \in B,\ t > 0\}$, dove B_k è una sfera con centro nell'origine e raggio k, B è una sfera non contenente l'origine.

DEF. 2 — Un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ ha *l'uniforme proprietà di cono* se esistono un cono finito C, un ricoprimento localmente finito, $\{U_j\}$, della sua frontiera ed una corrispondente successione di coni, $\{C_j\}$, ognuno congruente al cono C, tali che:

i) per qualche N, ogni U_j abbia diametro minore di N;

ii) per qualche $\delta > 0$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \supset \Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < \delta\}$;

iii) per ogni j, $\bigcup_{x \in U_j \cap \Omega} (x + C_j) \equiv Q_j \subset \Omega$;

iv) per qualche R, ogni collezione di R + 1 insieme Q_j abbia intersezione vuota.

TEOREMA 1.2 — *Se Ω, aperto di $\mathbb{R}^n$, ha l'uniforme proprietà di cono, oppure è limitato ed ha la proprietà di cono ed* M *è una* N*-funzione, allora esistono costanti positive* K_1, K_2, ε_0 *dipendenti da Ω tali che per ogni ε soddisfacente $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, per ogni $u \in W^2 L_M(\Omega)$ e per ogni $\lambda > 0$ sia, per $i = 1, \ldots, n$*

$$(1.1)\qquad \int_\Omega M(\lambda D_{x_i} u(x))\, dx \le \int_\Omega M\Big(\lambda K_1 \varepsilon \sum_{|\beta|=2} |D^\beta u(x)|\Big) + \\ + M(\lambda K_2 u(x)/\varepsilon)\, dx$$

e quindi

$$(1.2)\qquad \| D_{x_i} u \|_{M,\Omega} \le 2 K_1 \varepsilon \sum_{|\beta|=2} \| D^\beta u \| + 2 K_2 \| u \| / \varepsilon$$

Dim. Come è noto, se Ω è un aperto limitato dotato della proprietà di cono esiste una collezione finita, $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}$, di sottoinsiemi aperti di Ω con frontiera localmente lipschitziana, e quindi aventi

l'uniforme proprietà di cono, tale che $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j$. È perciò sufficiente dimostrare il teorema nel caso Ω dotato dell'uniforme proprietà di cono.

Siano: δ la costante che compare nella condizione ii) della definizione 2, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ una n-upla di interi; consideriamo i cubi

$$H_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_k \delta/(2\sqrt{n}) \leq x_k \leq (\alpha_k + 1)\delta/(2\sqrt{n})\}$$

chiaramente $\mathbb{R}^n = \bigcup_\alpha H_\alpha$ e $\operatorname{diam} H_\alpha < \delta/2$. Poniamo $\Omega_0 = \bigcup_{H_\alpha \subset \Omega \setminus \Omega_{\delta/2}} H_\alpha$, allora $\Omega_0 \supset \Omega \setminus \Omega_\delta$ ed $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\delta = (\bigcup U_j \cap \Omega) \cup \Omega_0 = \bigcup_j Q_j \cup \Omega_0$, dove U_j e Q_j sono gli insiemi che compaiono nella definizione di uniforme proprietà di cono.

Siano $\Phi_s \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_s \geq 0$, $\operatorname{supp} \Phi_s \subset B_{1/s}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_s(x)\, dx = 1$, $1/s < \delta/2$, $s \in \mathbb{N}$; consideriamo la seguente successione di funzioni definite in Ω_0:

$$u_s = u * \Phi_s = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)\, \Phi_s(y)\, dy.$$

Per ogni $\lambda > 0$

$$\int_{\Omega_0} M(\lambda D_{x_i} u_s(x))\, dx = \sum_{\{\alpha : H_\alpha \subset \Omega \setminus \Omega_{\delta/2}\}} \int_{H_\alpha} M(\lambda D_{x_i} u_s(x))\, dx \leq$$

se $h < \delta/(4\sqrt{n})$, per il lemma precedente,

$$\leq \Sigma \int_{H_\alpha} \left\{ M(2\lambda h D^2_{x_i} u_s(x)) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u_s(x) \right) \right\} dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} \left\{ M(2\lambda h D^2_{x_i} u_s) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u_s \right) \right\} dx \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} \left\{ M(2\lambda h D^2_{x_i} u) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u \right) \right\} dx$$

Infatti $\forall v \in L_M(\Omega)$ e $\forall \lambda > 0$, per la disuguaglianza di Jensen,

$$\int_{\Omega_0} M(\lambda v * \Phi_s) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_s(y)\, dy \int_{\Omega_0} M(\lambda v(x - y))\, dx \leq \int_{\Omega} M(\lambda v(x))\, dx$$

dato che $1/s < \delta/2$ e $\Omega_0 \subset \Omega \setminus \Omega_{\delta/2}$.

Per costruzione $\lim_{s\to+\infty} D_{x_i} u_s(x) = D_{x_i} u(x)$ q.o. (infatti $L_{M,\mathrm{loc}} \subset L^1_{\mathrm{loc}}$) ed anche $\lim_{s\to+\infty} M(\lambda D_{x_i} u_s(x)) = M(\lambda D_{x_i} u_s(x))$ q.o., $\forall \lambda$. Per il lemma di Fatou:

$$(1.3)\qquad \int_{\Omega_0} M(\lambda D_{x_i} u(x))\, dx \le \liminf_{s\to+\infty} \int_{\Omega_0} M(\lambda D_{x_i} u_s(x))\, dx \le$$

$$\le \int_{\Omega} \left\{ M(2\lambda h D^2_{x_i} u(x)) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u(x)\right)\right\} dx$$

purché $h < \delta/(4\sqrt{n})$.

Consideriamo ora gli integrali estesi ad $U_j \cap \Omega$ e per semplificare la scrittura ometteremo l'indice j (vedremo che si possono determinare costanti indipendenti da j).

Sia ξ un vettore unitario in una direzione in C ed $\Omega_{\xi,a} = \{y + t\xi : y \in \Omega \cap U,\ 0 \le t \le a \le k\}$, dove k è la lunghezza del cono C, allora $\Omega \cap U \subset \Omega_{\xi,a} \subset \Omega_{\xi,k} \subset Q$. Sia inoltre $\bar{\xi}$ il vettore unitario in direzione dell'asse del cono; poniamo, per $x \in U \cap \Omega$, $u_r(x) = u(x + r\bar{\xi})$, $r < k/2$. Rileviamo che si può determinare δ_1, dipendente da r e dall'ampiezza del cono, ma indipendente da j, tale che $\inf_{x\in\Omega_{\xi,k/2}} d(x + r\bar{\xi}, \partial Q) > \delta_1$.

Siano Φ_s le funzioni appartenenti a $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ precedentemente considerate e $1/s < \delta_1$; poniamo $u_{r,s} = u_r * \Phi_s$. Sia L una retta parallela al vettore ξ; tale retta o ha intersezione vuota con $\Omega_{\xi,a}$ o interseca lungo un segmento di lunghezza ρ, con $a \le \rho \le a + \dim U \le a + N$. Per il lemma precedente, $\forall \lambda > 0$ e $0 < h < k/4$:

$$\int_{L\cap\Omega_{\xi,k/2}} M(\lambda D_\xi u_{r,s})\, dt \le \int_{L\cap\Omega_{\xi,k/2}} \left\{ M(2\lambda h D^2_\xi u_{r,s}) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u_{r,s}\right)\right\} dt$$

ed integrando sulla proiezione di $\Omega_{\xi,k/2}$ su un iperpiano perpendicolare a ξ,

$$\int_{\Omega\cap U} M(\lambda D_\xi u_{r,s}(x))\, dx \le \int_{\Omega_{\xi,k/2}} M(\lambda D_\xi u_{r,s}(x))\, dx \le$$

$$\le \int_{\Omega_{\xi,k/2}} \left\{ M(2\lambda h D^2_\xi u_{r,s}(x)) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u_{r,s}(x)\right)\right\} dx \le$$

per la scelta di s e per le considerazioni precedenti sul prodotto di convoluzione

$$\leq \int_Q \left\{ M(2\lambda h D_\xi^2 u(x)) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u(x) \right) \right\} dx .$$

Per il lemma di Fatou, applicato prima per $s \to +\infty$, poi per $r \to 0$ si ottiene:

$$\int_{U \cap \Omega} M(\lambda D_\xi u(x))\, dx \leq \tag{1.4}$$

$$\leq \int_Q \left\{ M(2\lambda h D_\xi^2 u(x)) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda}{h} u(x) \right) \right\} dx .$$

Sia $\xi_1, \ldots, \xi_n$ una base di vettori unitari in $\mathbb{R}^n$, giacenti tutti in direzione del cono, allora $D_{x_i} u$ si può esprimere come combinazione lineare delle $D_\xi u$, con i coefficienti della combinazione maggiorati da $1/V$, V volume del parallelepipedo individuato da $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (quindi si può fare in modo che non dipenda da i). Si ottiene, per $h < k/4$:

$$\int_{U \cap \Omega} M(\lambda D_{x_i} u(x))\, dx \leq$$

$$\leq \sum_{e=1}^{n} \frac{1}{n} \int_Q \left\{ M\left(\frac{2\lambda h n}{V} D_{\xi_e}^2 u \right) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda n}{h} u \right) \right\} dx$$

ed esprimendo D_{ξ_e} in funzione della D_{x_j} .

$$\leq \int_Q \left\{ M\left(\frac{2\lambda h n}{V} \sum_{|\beta|=2} |D^\beta u| \right) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda n}{h} u \right) \right\} dx$$

Ma R + 1 insieme Q_i hanno intersezione vuota, quindi

$$\int_{Q_\delta} M(\lambda D_{x_i} u(x))\, dx \leq$$

$$\leq R \int_\Omega \left\{ M\left(\frac{2\lambda h n}{V} \sum_{|\beta|=2} D^\beta u \right) + \frac{3}{4} M\left(\frac{4\lambda n}{h} u \right) \right\} dx ,$$

e per la (1.3) ne segue la tesi per $\varepsilon_0 < \min\{\delta/(4\sqrt{n}),\ k/4\}$.

TEOREMA 1.3 — *Se* M *è una* N*-funzione, per ogni aperto* Ω *di* $\mathbb{R}^n$, *per ogni* $\varepsilon > 0$, *per ogni* $u \in W_o^2 L_M(\Omega)$ *e per ogni* $\lambda > 0$:

$$\int_\Omega M(\lambda D_{x_i} u(x))\, dx \leq \tag{1.5}$$

$$\leq \int_\Omega \left\{ M(2\lambda \varepsilon D_{x_i}^2 u(x)) + M\left(\frac{4\lambda}{\varepsilon} u(x)\right)\right\} dx$$

e quindi

$$\| D_{x_i} \|_{M,\Omega} \leq 4\varepsilon \| D_{x_i}^2 u \|_{M,\Omega} + 8/\varepsilon \| u \|_{M,\Omega}. \tag{1.6}$$

Dim. Se $u \in W_o^2 L_M(\Omega)$, la sua estensione nulla $\tilde{u}$: $\tilde{u}(x) = u(x)$ per $x \in \Omega$, $\tilde{u}(x) = 0$ per $x \in \Omega^c$, appartiene a $W^2 L_M(\mathbb{R}^n)$. Procedendo come nella prima parte della dimostrazione del teorema precedente, per il lemma 1, si ottiene la tesi.

COROLLARIO 1.4 — *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ha l'uniforme proprietà di cono, oppure è limitato ed ha la proprietà di cono,* M *è una* N*-funzione ed* ε_o *è un numero positivo, allora esiste una costante* $K = K(\varepsilon_o, m, \Omega)$, *tale che per ogni* ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, *per ogni intero* j, $0 \leq j < m$, *per ogni* $\lambda > 0$ *e per ogni* $u \in W^m L_M(\Omega)$

$$\sum_{|\alpha|=j} \int_\Omega M(\lambda D^\alpha u(x))\, dx \leq \tag{1.7}$$

$$\leq \int_\Omega \{ \sum_{|\beta|=m} M(\lambda K \varepsilon D^\beta u(x)) + M(\lambda K \varepsilon^{-j/(m-j)} u(x))\}\, dx$$

e

$$\sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u \|_{M,\Omega} \leq K \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \| D^\beta u \| + K \varepsilon^{-j/(m-j)} \| u \|_{M,\Omega}. \tag{1.8}$$

Inoltre per ogni aperto Ω *di* $\mathbb{R}^n$ *la* (7) *e* (8) *valgono per ogni* $u \in W_o^m L_M(\Omega)$ *con* $K = K(m, n)$ *indipendente da* ε_o *e da* Ω.

Dim. Dal teorema 2 segue che, fissato ad arbitrio $\bar{\delta} > 0$ si può determinare una costante $K_1 = K_1(\bar{\delta}, \Omega)$, tale che per ogni δ, $0 < \delta <$

$< \bar{\delta}$, $\forall u \in W^m L_M(\Omega)$, $\forall \lambda > 0$, se $0 \leq k < m$, sia

$$\int_\Omega \sum_{|\gamma|=k} M(\lambda D^\gamma u(x))\, dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|=k+1} M(\lambda K_1 \delta D^\alpha u(x)) + \sum_{|\beta|=k-1} M\left(\frac{\lambda K_1}{\delta} D^\beta u(x) \right) \right\} dx$$

(per la (1.5), se $u \in W_o^m L_M(\Omega)$, K_1 può essere scelto indipendente da $\bar{\delta}$ e da Ω, ma dipendente da n). Scegliamo $\bar{\delta}$ in modo che $\varepsilon_o < \min\{\bar{\delta}, \bar{\delta}^2, \ldots, \bar{\delta}^{m-1}\}$. Dalla relazione precedente si ottiene, per induzione rispetto a k, che se $0 < k < m$, per ogni δ, $0 < \delta < \bar{\delta}$, per ogni $\lambda > 0$ ed $u \in W^m L_M(\Omega)$,

$$\int_\Omega \sum_{|\gamma|=k} M(\lambda D^\gamma u)\, dx \leq \int_\Omega \sum_{|\alpha|=k+1} M(\lambda K_2 \delta D^\alpha u) + M(\lambda \delta^{-k} K_2 u)\}\, dx .$$

Per induzione rispetto a j, ricordando che $M(a+b) \leq M(a) + M(b)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni N-funzione M, si ottiene allora che se $0 < \delta < \bar{\delta}$ e $0 < j < m$

$$\int_\Omega \sum_{|\gamma|=j} M(\lambda D^\gamma u)\, dx \leq \int_\Omega \{M(\lambda K_3 \delta^{m-j} D^\alpha u) + M(\lambda K_3 \delta^{-j} u)\}\, dx .$$

con $K_3 = K_3(m, n)$ se $u \in W_o^m L_M(\Omega)$.

Posto $\varepsilon = \delta^{m+j}$, per la scelta di $\bar{\delta}$, ne segue la (1.7). La (1.8) si può dimostrare sia per induzione, partendo dalla (1.2), sia come conseguenza della (1.7).

La disuguaglianza (1.7) è stata dimostrata perché utile nelle applicazioni, come vedremo con un esempio in seguito.

COROLLARIO 1.5 — *Il funzionale*:

$$|u|_{m,M,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{M,\Omega} + \|u\|_{M,\Omega}$$

è una norma, equivalente all'usuale norma $\|\cdot\|_{m,M,\Omega}$ *in ognuno dei seguenti spazi*:

i) $W_o^m L_M(\Omega)$ *per ogni aperto* Ω;

ii) $W^m L_M(\Omega)$ *per ogni aperto* Ω *avente l'uniforme proprietà di cono;*

iii) $W^m L_M(\Omega)$ *per ogni aperto limitato* Ω *avente la proprietà di cono.*

TEOREMA 1.6 — *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ha l'uniforme proprietà di cono, oppure è limitato ed ha la proprietà di cono, e se* M *è una* N*-funzione, allora esiste una costante* $K = K(m, \Omega)$ *tale che per ogni intero* j, $0 \leq j \leq m$, *e per ogni* $u \in W^m L_M(\Omega)$

$$\| u \|_{j,M,\Omega} \leq K \| u \|_{m,M,\Omega}^{j/m} \| u \|_{M,\Omega}^{(m-j)/m} \tag{1.9}$$

Inoltre la (1.9) *vale per ogni* $u \in W_o^m L_M(\Omega)$, *per ogni aperto* Ω *con* $K = K(m, n)$ *indipendente da* Ω.

Dim. La disuguaglianza (1.9) è chiaramente vera per $j = 0$ e $j = m$. Per $0 < j < m$, dalla (1.8) segue che per ogni ε, $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\| u \|_{j,M,\Omega} \leq K_1 \varepsilon \| u \|_{m,M,\Omega} + K_1 \varepsilon^{-j/(m-j)} \| u \|_{M,\Omega} \tag{1.10}$$

per ogni $u \in W^m L_M(\Omega)$, con K_1 dipendente da m e da Ω. Inoltre la (1.10) vale per ogni $u \in W_o^m L_M(\Omega)$ con K_1 dipendente solo da m, n e per ogni aperto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. La (1.9) si ottiene dalla (1.10) ponendo, per $u \neq 0$, $\varepsilon = (\| u \|_{M,\Omega} / \| u \|_{m,M,\Omega})^{(m-j)/m}$.

TEOREMA 1.7 — *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato di classe* $C^{m,1}$, M *una* N*-funzione la cui coniugata soddisfa la* Δ_2*-condizione, allora posto* $\gamma_i = \left(\frac{\partial^i}{\partial n^i} \right) \Big|_{\partial\Omega}$, *il funzionale*

$$|||\, u \,|||_{m,M,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u \|_{M,\Omega} + \sum_{i=0}^{m-1} \| \gamma_i u \|_{W^{m-1-i,0} L_M(\partial\Omega)}$$

è una norma, equivalente all'usuale, in $W^m L_M(\Omega)$.

Dim. Per le ipotesi fatte su Ω ed M, dal Teorema III di [12] segue che se $u \in W^m L_M(\Omega)$ allora $\gamma_i u \in W^{m-1-i,0} L_M(\partial\Omega)$, $i = 0, \ldots, m-1$, ed esiste una costante K_1 tale che

$$\| \gamma_i u \|_{W^{m-1-i,0} L_M(\partial\Omega)} \leq K_1 \| u \|_{m,M,\Omega} ;$$

inoltre esiste $w \in W^m L_M(\Omega)$ tale che $\gamma_i w = \gamma_i u$, $i = 0, \ldots, m-1$ e

$$\| w \|_{m,M,\Omega} \leq K_2 \sum_{i=0}^{m-1} \| \gamma_i u \|_{W^{m-1-i,0} L_M(\partial\Omega)} .$$

È immediato verificare che esiste una costante K_3 tale che

$$|||\, u \,|||_{m,M,\Omega} \leq K_3 \| u \|_{m,M,\Omega} .$$

Se w è la funzione sopra considerata $u - w \in W_0^m L_M(\Omega)$; per ogni $\lambda > 0$

$$\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega M(\lambda D^\alpha u)\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \{M(2\lambda D^\alpha (u - w)) + M(2\lambda D^\alpha w)\}\, dx \leq$$

per il lemma 5.7 di [7]

$$\leq \int_\Omega \left\{ \sum_{|\beta|=m} M(\lambda K_4 D^\beta (u - w)) + \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=k} (M(2\lambda D^\alpha w) \right\} dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left\{ \sum_{|\beta|=m} M(\lambda K_5 D^\beta u) + \sum_{|\alpha|\leq m} M(\lambda K_5 D^\alpha w) \right\} dx .$$

Ne segue, per la scelta di w, che

$$\| u \|_{m,M,\Omega} \leq K_6 \, ||| u |||_{m,M,\Omega}$$

e quindi la tesi.

Maggioriamo ora la $L_M(\Omega)$-norma delle derivate intermedie, $D^\beta u$, $|\beta| \leq m - 1$, di una funzione $u \in W^m L_M(\Omega)$ tramite la $L_M(\Omega)$-norma delle derivate di ordine m e la L_M-norma di u in un opportuno sottoinsieme di Ω, la cui chiusura è un compatto contenuto nell'aperto limitato Ω. Ciò è possibile se Ω è un aperto limitato dotato della proprietà di cono o della proprietà del segmento.

DEF. 3 — Un aperto di $\mathbb{R}^n$, Ω, ha la *proprietà del segmento* se esistono un ricoprimento localmente finito, $\{U_j\}$, della sua frontiera ad una corrispondente successione di vettori non-nulli, $\{y_j\}$, tali che se $x \in \bar{\Omega} \cap U_j$ per qualche j, allora $x + t\, y_j \in \Omega$ per $0 < t < 1$.

Premettiamo il seguente lemma.

LEMMA 1.8 — *Siano* M *una* N-*funzione,* $]a, b[$ *un intervallo aperto, limitato, unidimensionale; fissato ad arbitrio* $\varepsilon > 0$ *esiste* δ, $0 < \delta < (b - a)/2$, *tale che per ogni* $u \in W^1 L_M(a, b)$ *e per ogni* $\lambda > 0$

$$\int_a^b M(\lambda u(x))dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b M(2\lambda(b-a)\varepsilon u'(x))dx + \frac{3}{4}\int_{a+\delta}^{b-\delta} M(2\lambda u(x))\, dx .$$

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ determiniamo $n \in \mathbb{N}$ in modo che $1/n < \varepsilon$ e poniamo $a_j = a + (b - a)\, j/n$ $j = 0, \ldots, n$. Se $u \in W^1 L_M(a, b)$ allora $u \in W^{1,1}(a, b)$, dato che $]a, b[$ è limitato per ipotesi, quindi u è assolutamente continua e per quasi ogni $x, \eta \in]a_{j-1}, a_j[$, $j = 1, \ldots, n$

$$u(x) = u(\eta) + \int_{\eta}^{x} u'(t)\, dt\,.$$

Per la convessità di M, $\forall\, \lambda > 0$

$$M(\lambda\, u(x)) \leq \frac{1}{2}\, M(2\lambda\, u(\eta)) + \frac{1}{2}\, M\left(2\lambda \int_{\eta}^{x} u'(t)\, dt\right)$$

e per la disuguaglianza di Jensen

$$M(\lambda\, u(x)) \leq \frac{1}{2}\, M(2\lambda\, u(\eta)) + \tag{1.11}$$

$$+ \frac{n}{2(b-a)} \int_{a_{j-1}}^{a_j} M\left(\frac{2\lambda(b-a)}{n}\, u'(t)\right) dt\,.$$

Si fissi δ tale che $0 < \delta < (b - a)/3n$. Integrando la (1.11) rispetto ad η su $]a_{j-1} + \delta,\ a_j - \delta[$:

$$\left(\frac{b-a}{n} - 2\delta\right) M(\lambda\, u(x)) \leq \frac{1}{2} \int_{a_{j-1}+\delta}^{a_j-\delta} M(2\lambda\, u(t))\, dt +$$

$$+ \frac{n}{2(b-a)} \left(\frac{b-a}{n} - 2\delta\right) \cdot \int_{a_{j-1}}^{a_j} M\left(\frac{2\lambda(b-a)}{n}\, u'(t)\right) dt$$

ma per la scelta di δ, $((b - a)/n - 2\delta)^{-1} < (2(b - a)/3n)^{-1}$, quindi

$$M(\lambda\, u(x)) \leq \frac{3n}{4(b-a)} \int_{a_{j-1}+\delta}^{a_j-\delta} M(2\lambda\, u(t))\, dt +$$

$$+ \frac{n}{2(b-a)} \int_{a_{j-1}}^{a_j} M\left(\frac{2\lambda(b-a)}{n}\, u'(t)\right) dt\,.$$

Integrando rispetto ad x su $]a_{j-1}, a_j[$

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} M(\lambda u(x))\, dx \leq \frac{3}{4} \int_{a_{j-1}+\delta}^{a_j-\delta} M(2\lambda u(t))\, dt + \frac{1}{2} \int_{a_{j-1}}^{a_j} M\left(\frac{2\lambda(b-a)}{n} u'(t)\right) dt .$$

Sommando rispetto a j, per la scelta di n, si ottiene la tesi.

TEOREMA 1.9 — *Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ avente la proprietà del segmento oppure la proprietà di cono ed M una N-funzione, allora esiste una costante $K = K(\Omega)$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un aperto $\Omega_\varepsilon \subset\subset \Omega$ tale che per ogni $u \in W^1 L_M(\Omega)$ e per ogni $\lambda > 0$.*

$$\int_{\Omega} M(\lambda u(x))\, dx \leq \tag{1.12}$$

$$\leq \int_{\Omega} M\left(\lambda K \varepsilon \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u(x)|\right) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} M(\lambda K u(x))\, dx$$

e quindi

$$\|u\|_{1,M,\Omega} \leq 2K\varepsilon \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{M,\Omega} + 2K \|u\|_{M,\Omega_\varepsilon} \tag{1.13}$$

Dim. Se Ω è limitato ed ha la proprietà di cono esistono un numero finito di aperti Ω_j aventi frontiera localmente lipschitziana, e quindi dotati della proprietà del segmento, tali che $\cup_j Q_j = \Omega$. È sufficiente perciò dimostrare il teorema nel caso Ω limitato avente la proprietà del segmento.

Poiché Ω è limitato gli insiemi $\{U_j\}$ ed $\{y_j\}$ che compaiono nella definizione di proprietà del segmento sono entrambi finiti. Inoltre esistono aperti $V_j \subset\subset U_j$ tali che $\partial\Omega \subset \cup_j V_j$ e per qualche $\delta > 0$

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < \delta\} \subset \cup_j V_j;\ \Omega = \cup_j (V_j \cap \Omega) \cup \Omega_0$$

con $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Basta perciò dimostrare che $\forall \lambda > 0$ e $\forall u \in W^1 L_M(\Omega)$

$$\int_{V_j \cap \Omega} M(\lambda u(x))\, dx \leq \tag{1.14}$$

$$\leq \int_{\Omega} M\left(\lambda K_1 \varepsilon \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u(x)|\right) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon,j}} M(\lambda K_1 u(x))\, dx .$$

Per semplicità omettiamo l'indice j. Consideriamo gli insiemi

$$Q = \{x + t\,y : x \in U \cap \Omega,\ 0 < t < 1\}$$

$$Q_\eta = \{x + t\,y : x \in V \cap \Omega,\ \eta < t < 1\};$$

se $\eta > 0$ allora $Q_\eta \subset\subset Q$ e, per la proprietà del segmento $Q \subset \Omega$.

Sia L una retta parallela ad y ed avente punti in comune con V: tale retta interseca Q_0 in uno o più intervalli aventi lunghezza compresa tra $|y|$ e diam $\Omega = d$. Per il lemma precedente, per q.o. y' appartenente alla proiezione di Q_0 su un iperpiano perpendicolare ad y, $\forall \lambda > 0$, se $\eta < \varepsilon |y|/3$

$$\int_{L\cap Q_0} M(\lambda\, u(x))\, d\,s \le \frac{1}{2} \int_{L\cap Q_0} M(2\,\lambda\, d\,\varepsilon\, D_y\, u(x))\, d\,s + \frac{3}{4} \int_{L\cap Q_0} M(2\lambda u(x)) ds$$

esprimendo D_y in funzione delle D_{x_i} ed integrando sulla proiezione ortogonale di Q_0:

$$\int_{V\cap\Omega} M(\lambda\, u(x))\, d\,x \le \int_{Q_0} M(\lambda\, u(x))\, d\,x \le \int_{Q_0} M\Big(2\,\lambda\, d\,\varepsilon \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|\Big)\, d\,x +$$

$$+ \int_{Q_\eta} M(2\,\lambda\, u)\, d\,x \le \int_{\Omega} M\Big(2\,\lambda\, d\,\varepsilon \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|\Big)\, d\,x + \int_{Q_\varepsilon} M(2\,\lambda\, u)\, d\,x$$

dove $\Omega_\varepsilon = Q_\eta \subset\subset \Omega$. Ne segue la tesi.

TEOREMA 1.10 — *Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ avente la proprietà del segmento oppure la proprietà di cono ed M una N-funzione. Fissato ad arbitrio $\varepsilon_0 > 0$ esiste una costante $K = K(\varepsilon_0, m, \Omega)$ e per ogni ε soddisfacente $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ un aperto $\Omega_\varepsilon \subset\subset \Omega$ tali che per ogni $u \in W^m L_M(\Omega)$, per ogni intero j, $0 \le j < m$ e per ogni $\lambda > 0$*

$$(1.14) \qquad \sum_{|\beta|=j} \int_{\Omega} M(\lambda\, D^\beta u(x))\, d\,x \le$$

$$\le \sum_{|\beta|=m} \int_{\Omega} M(\lambda\, K\, \varepsilon\, D^\alpha u(x))\, d\,x + \int_{\Omega_\varepsilon} M(\lambda\, K\, \varepsilon^{-j/(m-j)}\, u(x))\, d\,x$$

ed inoltre

$$(1.15) \qquad \sum_{|\beta|=j} \|D^\beta u\|_{M,\Omega} \le \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon\, K\, \|D^\beta u\|_{M,\Omega} + K\, \varepsilon^{-j/(m-j)}\, \|u\|_{M,\Omega_\varepsilon}.$$

Dim. È noto che se $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ esiste un aperto Ω' tale che $\Omega_0 \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$ ed avente la proprietà di cono.

Per il teorema precedente esiste $K_1 = K_1(\Omega)$ tale che $\forall \lambda > 0$

$$\sum_{|\beta|=m-1} \int_{\Omega} M(\lambda D^{\beta} u)\, dx \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} M(\lambda K_1 \varepsilon D^{\alpha} u)\, dx + \sum_{|\beta|=m-1} \int_{\Omega_\varepsilon} M(\lambda K_1 D^{\beta} u)\, dx$$

e si può assumere che Ω_ε abbia la proprietà di cono. Per il Corollario 1.4, se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, esiste $K_2 = K_2(m, \Omega)$ tale che $\forall \lambda > 0$

$$\sum_{|\beta|=m-1} \int_{\Omega_\varepsilon} M(\lambda D^{\beta} u)\, dx \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_\varepsilon} M(\lambda K_2 \varepsilon D^{\alpha} u)\, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} M(\lambda K_2 \varepsilon^{-(m-1)} u)\, dx$$

e quindi

$$\sum_{|\beta|=m-1} \int_{\Omega} M(\lambda D^{\beta} u)\, dx \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} M(\lambda K_3 \varepsilon D^{\alpha} u)\, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} M(\lambda K_3 \varepsilon^{-(m-1)} u)\, dx$$

cioè la (1.14) per $j = m - 1$. Per induzione su j si ottiene la tesi.

§ 2.

I corollari (1.4) e (1.5) permettono di indebolire le ipotesi fatte da A. Fougères (cfr. [5], Th. di esistenza), atte a garantire l'esistenza di una soluzione di problemi al bordo omogenei, in forma variazionale, per un operatore della forma

$$(2.1) \qquad A u = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, \nabla u, \ldots, \nabla^m u)\,, \quad x \in \Omega$$

Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Tali ipotesi vengono sostituite con condizioni analoghe a quelle imposte da G. P. Gossez [9]), nel caso Ω limitato, per il problema di Dirichlet ed a quelle abituali nel caso di operatori lineari. Osserviamo che le ipotesi fatte nella nota [5] non sono verificate se gli A_α crescono « lentamente », ad esempio come logaritmo,

ed implicano in effetti che l'operatore A sia coercitivo. Le ipotesi che faremo possono essere verificate sia nel caso A_α crescenti « rapidamente » sia nel caso A_α crescenti « lentamente ».

Prima di enunciare le ipotesi sui coefficienti A_α riportiamo alcune definizioni e notazioni che useremo in questo paragrafo e già utilizzate in [13].

DEF. Si dice che due spazi di Banach Y e Z formano una *coppia complementare* se esistono due sottospazi $Y_0 \subset Y$ e $Z_0 \subset Z$ tali che $Y_0^* = Z$ e $Z_0^* = Y$. In tal caso si dice che $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ è un *sistema complementare*. Ad esempio se M_i, $i = 1, \ldots, k$, sono N-funzioni ed $\bar{M}_i$ le N-funzioni complementari, $(\Pi L_{M_i}, \Pi E_{M_i}; \Pi L_{\bar{M}_i}, \Pi E_{\bar{M}_i})$, $\Pi L_{M_i} = \Pi_{i=1}^{k} L_{M_i}$, è un sistema complementare.

Indichiamo con s_m (risp s'_m) il numero delle derivate rispetto ad $x \in \mathbb{R}^n$ di ordine $\leq m$ (risp. di ordine $= m$) ed identifichiamo $\mathbb{R}^{s_m}$ con il campo di m-getti. Quindi se $\xi = \{\xi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\} \in \mathbb{R}^{s_m}$ ed u è una funzione derivabile, $\xi(u) = \{D^\alpha u : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$. Analogamente, se $\zeta = \{\zeta_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = m\} \in \mathbb{R}^{s'_m}$ ed $\eta = \{\eta_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| < m\} \in \mathbb{R}^{s_{m-1}}$, $\zeta(u)$ ed $\eta(u)$ indicheranno, rispettivamente, le derivate di u di ordine massimo e di ordine inferiore.

Nel caso Ω, aperto di R^n, illimitato le condizioni imposte ai coefficienti A_α dell'operatore (2.1) sono le seguenti:

(2.2) Condizione di Carathèodory: ogni $A_\alpha(x, \xi)$ sia una funzione definita in $\Omega \times \mathbb{R}^{s_m}$ a valori reali, continua rispetto a ξ per x fissato e misurabile rispetto ad x per ξ fissato.

(2.3) Esistano: una N-funzione, M, $a \in E_M(\Omega)$, b, $c_i \in \mathbb{R}^+$ tali che per ogni $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^{s_m}$ ed $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leq a(x) + b \sum_{|\beta| = m} \bar{M}^{-1} M(c_{|\beta|} \xi_\beta) + b \bar{M}^{-1} M(c_0 \xi_0).$$

(2.4) Per ogni $x \in \Omega$ e $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{s_m}$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')] (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geq 0 .$$

(2.5) Esistano: $b_\alpha \in E_{\bar{M}}(\Omega)$, $b \in L^1(\Omega)$, $d \in \mathbb{R}^+$ tali che per ogni $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^{s_m}$ sia

$$\sum_{|\alpha| \leq m} [A_\alpha(x, \xi) - b_\alpha(x)] \xi_\alpha \geq d \{ \sum_{|\alpha| = m} M(c_m \xi_\alpha) + M(c_0 \xi_0) \} + b(x)$$

dove c_m e c_0 sono le costanti che compaiono nella (2.3).

Siano B_Γ un operatore definito sulla frontiera, Γ, di Ω ed $Y = \{u \in W^m L_M(\Omega) : B_\Gamma u = 0\}$, $W_o^m L_M(\Omega) \subset Y \subset W^m L_M(\Omega)$, ove M è la N-funzione che compare nelle condizioni (2.3) e (2.5).

Il *problema al bordo*

$$A\varphi = f, \qquad B_\Gamma \varphi = g$$

si dice *ammissibile* se Y è $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_M)$-chiuso e tale che:

$$(2.6) \qquad Y = \sigma(\Pi L_M, \Pi L_{\bar{M}})\text{-chiusura di } Y_o, \qquad Y_o = Y \cap W^m E_M(\Omega).$$

In tali ipotesi Y e $Z = \Pi L_{\bar{M}} / Y_o^\perp$ formano una coppia complementare.

Ricordiamo che se Ω ha la proprietà del segmento i problemi di Dirichlet e di Neumann sono ammissibili. In una precedente nota (cfr. [13], § 1) abbiamo dato condizioni sufficienti affinché problemi al bordo « intermedi » e « misti » siano ammissibili.

Se $f \in Z$ per risolvere il problema ammissibile

$$A u = f \qquad B_\Gamma u = 0$$

si deve determinare $u \in Y$ in modo che $A_\alpha(\xi(u)) \in L_{\bar{M}}(\Omega)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$ e

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi(u))\, D^\alpha v \, dx = \langle v, f \rangle \qquad \forall\, v \in Y_o .$$

TEOREMA 2.1 — *Siano Ω un aperto dotato dell'uniforme proprietà di cono, A un operatore della forma* (2.1) *soddisfacente le ipotesi* (2.2)-(2.5), *Y un sottospazio di $W^m L_M(\Omega)$ $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\bar{M}})$- chiuso, verificante la* (2.6) *ed* (Y, Y_o; Z, Z_o) *il sistema complementare da esso generato. Allora per ogni* $f \in Z_o$ *esiste in* Y *almeno una soluzione dell'equazione* $Au = f$.

Questo teorema garantisce l'esistenza di una soluzione di un problema al bordo omogeneo ammissibile, per l'operatore

$$A u = (-1)^n \sum_{|\alpha| = m} D^\alpha p(D^\alpha u) + p(u)$$

con $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, dispari, monotona non decrescente, tale che

$$p(t) \to +\infty \text{ per } t \to +\infty \left(\text{in questo caso } M(t) = \int_o^t p(r)\, dr \right).$$

Tale operatore non verifica le ipotesi del teorema di esistenza di [5] e nel caso Ω non limitato, neppure quelle fatte da G. P. Gossez per il proolema di Dirichlet (cfr. [8], Es. 4.11).

Dim. Per il teorema 4.9 di [8] basta verificare che per ogni $f \in$ $\in Z_0$ esistono un intorno $U(f)$ in Z ed una costante K tali che per ogni eventuale soluzione $u \in Y$ di $A(u) = h$, $h \in U(f)$, sia $\| u \|_Y \leq K$. Rileviamo che per l'ipotesi fatta su Ω si può applicare il Corollario 1.4.

Fissata $f \in Z_0$, si può determinare
$(f_\alpha)_{|\alpha| \leq m} = \tilde{f} \in \Pi E_{\bar{M}}$ tale che $\| f \|_Z = \| \tilde{f} \|_{\Pi E_M}$ e $< v, f > = \Sigma f_\alpha D^\alpha v$ $\forall v \in Y$ (cfr. [13]).

Fissato $\lambda > \max \left\{1, \dfrac{2m+1}{d} K_1/c_m, K_1/c_0\right\}$ dove c_m, c_0, d sono le costanti che compaiono nella (2.5), K_1 è una costante per cui vale (1.7) con $\varepsilon = 1$, si determini K_2 in modo che

$$\int_\Omega \bar{M}(\lambda^2 + 1) f_\alpha) \, dx < K_2.$$

Allora un intorno di f in Z può essere identificato con un sottoinsieme di

$$U = \left\{ h = (h_\alpha) \in \Pi L_{\bar{M}} : \int_\Omega \bar{M}(\lambda^2 h_\alpha) \, dx < K_2 + 1 \right\}$$

(cfr. [13]). Se $u \in Y$ è soluzione di $A(u) = h$ con h appartenente all'intorno di f considerato:

$$\int_\Omega \Sigma_\alpha A_\alpha(\xi(u)) D^\alpha v \, dx = \int_\Omega \Sigma_\alpha h_\alpha D^\alpha v \qquad \forall v \in Y,$$

(2.7)

$$\int_\Omega \Sigma_\alpha (A_\alpha(\xi(u)) - b_\alpha) D^\alpha u \, dx = \int_\Omega \Sigma_\alpha (h_\alpha - b_\alpha) D^\alpha u \, dx$$

Per la condizione (2.5) il primo membro della (2.7) è maggiore di

$$d \int_\Omega \{ \sum_{|\alpha|=m} M(c_m D^\alpha(u)) + M(c_1 u) \} \, dx - \text{cost}$$

Per la disuguaglianza di Young e per la (1.7) il secondo membro della (2.7) è maggiorato da

$$\text{cost} + 2\,\frac{m+1}{\lambda}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m} \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{D}^{\alpha}u}{\lambda}\right) + \mathrm{M}\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx$$

poiché $\lambda > 1$, M è convessa e $b_{\alpha} \in \mathrm{E}_{\bar{\mathrm{M}}}$. Per la scelta di λ, si ottiene

$$\| u \|_{\mathrm{M},\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \| \mathrm{D}^{\alpha} u \|_{\mathrm{M},\Omega} \leq \text{cost}$$

e per il corollario 1.5

$$\| u \|_{\mathrm{Y}} \leq \text{cost}.$$

Nel caso Ω limitato dotato della proprietà di cono si possono indebolire le condizioni (2.3) e (2.4): supponiamo in questo caso che A sia un operatore della forma (2.1) verificante le condizioni (2.2), 2.5) ed inoltre

(2.8) Per ogni $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^{s_{m-1}}$, $\zeta, \zeta' \in \mathbb{R}^{s'_m}$ con $\zeta \neq \zeta'$ sia

$$\sum_{|\alpha|=m} [\mathrm{A}_{\alpha}(x, \zeta, \eta) - \mathrm{A}_{\alpha}(x, \zeta', \eta)](\zeta_{\alpha} - \zeta'_{\alpha}) > 0$$

(2.9) Per ogni $x \in \Omega$, $\zeta', \zeta'' \in \mathbb{R}^{s'_m}$

$$\sum_{|\alpha|=m} (\mathrm{A}_{\alpha}(x, \zeta, \eta) - \zeta'_{\alpha})(\zeta_{\alpha} - \zeta''_{\alpha}) \to +\infty$$

per $|\zeta| \to +\infty$, in $\mathbb{R}^{s'_m}$, uniformemente per η e ζ' limitati.

(2.10) Esistono: $a_{\alpha} \in \mathrm{E}_{\bar{\mathrm{M}}}(\Omega)$, $c_1 \in \mathbb{R}^{+}$ una N-funzione $\mathrm{P} \ll \mathrm{M}$ tali che per ogni $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^{s_m}$ sia: per $|\alpha| = m$

$$|\mathrm{A}_{\alpha}(x, \xi)| \leq a_{\alpha}(x) + c_1 \sum_{|\beta|=m} \bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\mathrm{M}(c\,\xi_{\beta}) +$$

$$+ c_1 \sum_{|\beta|<m} \bar{\mathrm{P}}^{-1}\,\mathrm{M}(c_1\,\xi_{\beta}) + c_1\,\bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\mathrm{M}(c\,\xi_{0})$$

per $|\alpha| < \mathrm{m}$

$$|\mathrm{A}_{\alpha}(x, \xi)| \leq a_{\alpha}(x) + c_1 \sum_{|\beta|\leq m} \bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\mathrm{P}(c_1\,\xi_{\beta}) + \sum_{|\beta|<m} \bar{\mathrm{M}}^{-1}\,\mathrm{M}(c\,\xi_{\beta})$$

dove c ed M sono la costante e la N-funzione che compaiono nella (2.5).

TEOREMA 2.2 — *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *limitato e dotato della proprietà di cono,* A *un operatore della forma* (2.1) *verificante le condizioni* (2.2), (2.5), (2.8), (2.9), (2.10), Y *un sottospazio di* $W^m L_M(\Omega)$ $\sigma(\Pi L_M, \Pi E_{\bar{M}})$*-chiuso e verificante la* (2.6). *Allora per ogni* $f \in Z_0$ *esiste in* Y *almeno una soluzione dell'equazione* $A(u) = f$.

La dimostrazione è simile a quella del teorema precedente: In questo caso si utilizza, oltre ai corollari 1.4 e 1.5, il teorema 1 di [9]: Basta osservare che $A\text{-}\Sigma_\alpha b_\alpha$ è un operatore monotono all'esterno di un'opportuna sfera di Y_0.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[2] T. K. DONALDSON, *Non linear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev spaces*, J. Differential Equations, **10**, 507-528 (1971).

[3] T. DONALDSON, N. S. TRUDINGER, *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Funct. Anal., **8** 52-75 (1971).

[4] G. EHRLING, *On a type of eigenvalue problem for certain elliptic differential operators*, Math. Scand., **2**, 267-285 (1954).

[5] A. FOUGÈRES, *Opérateurs elliptiques du calcul des variations a coefficients très fortement non lineaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A., **274**, A 763 - A 766 (1972).

[6] E. GAGLIARDO. *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., **7**, 102-137 (1958).

[7] E. GAGLIARDO, *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., **8**, 24-51 (1959).

[8] G. P. GOSSEZ, *Non linear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **190**, 163-205 (1974).

[9] G. P. GOSSEZ, *Surjectivity results for pseudo-monotone mappings in complementary systems*, J. Math. Anal. Appl., **53**, 484-494 (1976).

[10] L. NIREMBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **8**, 649-675 (1955).

[11] L. NIREMBERG, *An extended interpolation inequality*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** 733-737 (1966).

[12] G. PALMIERI, *Sulle tracce di funzioni di una classe di spazi di Orlicz-Sobolev con peso*. In corso di stampa su B.U.M.I.

[13] G. PALMIERI, *Sui problemi ellittici non lineari, con coefficienti crescenti « rapidamente » o « lentamente »*. In corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Avantaggiati, C. Ciliberto e G. Cimmino.

RELAZIONE SUI LAVORI COMPIUTI DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

durante l'anno 1979, letta nell'adunanza plenaria del 29 gennaio 1980

dal socio VINCENZO LEONE

Segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

Nell'anno 1979 la nostra Accademia ha tenuto le consuete 8 sedute ordinarie, sotto la presidenza del Socio De Lerma, essendo Vicepresidente il Socio Ghiara e Tesoriere e Segretario rispettivamente i Soci Sersale e Leone.

Sono state tenute 38 comunicazioni scientifiche, per la maggior parte (27) nell'ambito delle Scienze Matematiche, oltre che delle Scienze Biologiche (4), delle Scienze della Terra (4) e delle Scienze Chimiche (3).

Per le Scienze Biologiche il Socio Leone ha comunicato due lavori di Chimica biologica, uno di B. Farina, M. R. Faraone Mennella e A. Mauro sull'impiego di derivati di coenzimi piridinici in alcune reazioni enzimatiche, ed uno di M. R. Pinto e R. De Santis sulle proteine d'un organismo marino, la *Ciona intestinalis*.

Il Socio De Lerma ha presentato una nota di P. Battaglini sull'assetto ecologico delle comunità animali del fiume Sarno, e il Socio Gàlgano un lavoro suo e di A. Gàlgano su studi biometrici di modelli di capelli.

Per le Scienze della Terra, il Socio D'Argenio ha presentato due note, di cui una, di R. Catalano e L. Montanari sulla Geologia del Foglio Termini Imerese in Sicilia, mentre il Socio Scherillo ha presentato un lavoro di A. Palumbo sulle modificazioni microclimatiche in rapporto all'urbanizzazione della città di Napoli.

Per le Scienze Chimiche il Socio Nicolaus ha presentato due lavori, uno di F. De Simone, su steroli di basidiomiceti commestibili e uno di R. Cerri, F. De Simone, F. Senatore e F. Zollo sulla composizione dei pollini di tre specie di pino; il Socio Covello ha comunicato un lavoro di M. I. La Rotonda, S. Salvati e O. Schettino sul frazionamento con cromatografia liquida ad alta pressione di mezzi di contrasto radiologici.

Per le Scienze Matematiche, il Socio Nicolini ha presentato un lavoro di Badolati sull'equazione di Keplero e la Scuola Matematica

Napoletana; il Socio Miranda ha comunicato tre note, rispettivamente di D'Acunto, su un teorema dell'energia nell'urto elastico di una corda, di Fusco su dualità e semicontinuità per integrali del tipo dell'area, e di Nunziante su alcuni aspetti del problema di Dirichlet. Il Socio Cafiero ha presentato una comunicazione di G. Mastroianni su un operatore lineare e positivo, ed una di E. D'Arienzo e M. Franciosi sul prolungamento delle funzioni finitamente additive. Il Socio Curzio ha comunicato due note di D. Lenzi su alcuni sistemi di assiomi gruppali rispetto ai booleani del sostegno di una relazione ternaria, una di C. De Vivo su un problema di minimalità riguardante le torri di Sylow, una di S. Franciosi su alcuni monomorfismi tra reticoli di sottogruppi, ed una di C. Ferrero Cotti sugli stems sul cui quadrato esiste una involuzione. Il Socio Ciliberto ha presentato note di L. Biacino e D. Miserendino (« Le derivate di ordine frazionario e gli spazi di W_0^S »), di M. Franciosi (« Su un'equazione lineare ellittico-parabolica a coefficienti continui »), di M. Garroni, B. Hanouzet, J. L. Joly (« Régularité pour la solution d'un système I.Q.V. »), di M. Tucci (« Teoremi di selezione continua per applicazioni plurivoche »), di L. Maddalena (« Principio di massimo per sottosoluzioni di sistemi debolmente accoppiati quasi lineari »), di R. Carrese (« Sulla differenziabilità regolare delle funzioni di n variabili »). Il Socio Rionero ha presentato due lavori, uno di M. Maiellaro e A. Redaelli e un altro di M. Maiellaro e L. Palese, concernenti aspetti diversi di moti magneto-idrodinamici stazionari.

Il Socio Avantaggiati ha comunicato una nota di A. Farinola e M. Leuci sulla pseudoconnessione di prima specie su uno spazio fibrato principale differenziabile, una di M. M. Coclite su un modello per l'espansione di atomi metallici su un atomizzatore, ed una di G. Palmieri su alcune diseguaglianze per derivate intermedie.

Il Socio Giangreco ha presentato un lavoro di L. Toscani su un procedimento di calcolo per sezioni di travi in precompresso.

Il Socio Franciosi ha presentato una nota sua e di C. D'Onofrio sul carico di punta in regime viscoso per travi di sezione variabile.

Il Socio Franchetta ha comunicato una nota di S. Freni Casale sulle ipersuperficie luogo di spazi lineari. Il Socio Panella infine ha presentato due lavori, uno di P. Conti sulle immagini epimorfe d'un M_1-piano archimedeo, ed uno di G. Gerla e A. Lettieri su quasicorpi di dimensione infinita sul proprio nucleo.

Tutte le comunicazioni fatte saranno pubblicate nel Volume 46° della Serie IV dei Rendiconti (Anno CXVIII) dell'Accademia.

L'Accademia ha delegato il Socio Merola a rappresentarla al I Convegno Nazionale dei Docenti di Scienze Naturali, tenutosi a Sor-

rento dal 9 all'11 marzo 1979; ai lavori del Convegno hanno preso parte anche il Presidente De Lerma ed altri Soci.

Sono stati nel corso dell'anno eletti Soci Corrispondenti Nazionali Liliana Jannelli, Leopoldo Massimilla e Mario De Vincentis per la Sezione di Scienze Naturali, e Antonio Zitarosa, Salvatore Rionero e Sandro Buoncristiano per la Sezione di Scienze Matematiche.

Per l'anno 1980 il Consiglio di Classe risulta costituito dai Soci Gianfranco Ghiara, Presidente, Carlo Ciliberto, Vicepresidente, Riccardo Sersale, Tesoriere, e Vincenzo Leone, Segretario.

INDICE

SCIENZE BIOLOGICHE

P. BATTAGLINI — Assetto ecologico delle comunità animali del fiume Sarno (Campania) . . . . . pag. 253

B. FARINA, M. R. FARAONE MENNELLA, A. MAURO — ε-NAD as a substrate in ADP-ribosylation reactions . . . . . » 359

M. GÀLGANO, A. GÀLGANO — Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli . . . . . » 409

M. R. PINTO, R. DE SANTIS — Proteine del corion di *Ciona intestinalis* e loro esposizione . . . . . » 541

SCIENZE DELLA TERRA

L. BRANCACCIO, A. CINQUE, I. SGROSSO — Forma e genesi di alcuni versanti di faglia in rocce carbonatiche: il riscontro naturale di un modello teorico » 139

R. CATALANO, L. MONTANARI — Geologia dei Monti di Trabia - Termini Imerese e dei Monti Sicani orientali (Fogli Bagheria e Termini Imerese, Sicilia centro settentrionale) . . . . . » 287

A. PALUMBO — Modifiche microclimatiche indotte dall'urbanizzazione a Napoli . . . . . » 501

F. HUERTAS, A. POZZUOLI, J. LINARES — Studio del potere decolorante della sepiolite con un semplice apparato di percolazione . . . . . » 619

SCIENZE CHIMICHE

M. I. LA ROTONDA, S. SALVATI, O. SCHETTINO — Analisi di mezzi di contrasto radiologici mediante cromatografia liquida ad alta pressione in coppie ioniche a fasi invertite . . . . . » 91

R. CERRI, F. DE SIMONE, F. SENATORE, F. ZOLLO — Fatty acids, long-chain alchools, sterols from pollens of three species of *pinus* . . . . . » 399

F. DE SIMONE — Sterols from two edible Basidiomycetes . . . . . » 405

SCIENZE MATEMATICHE

E. BADOLATI — L'equazione di Keplero e la scuola matematica napoletana . » 5

B. D'ACUNTO — Teorema dell'energia nell'urto elastico di una corda in un caso non lineare . . . . . » 27

C. DE VIVO — Su un problema di minimalità riguardante le torri di Sylow nei gruppi finiti . . . . . » 43

A. FARINOLA, M. LEUCI — Sulle pseudoconnessioni di prima specie su uno spazio fibrato principale differenziabile . . . . . pag. 63

S. FRANCIOSI — Alcuni monomorfismi tra reticoli di sottogruppi . . . » 75

N. FUSCO — Dualità e semicontinuità per integrali del tipo dell'area . . » 81

D. LENZI — Su alcuni sistemi di assiomi gruppali definiti rispetto al Booleano del sostegno di una relazione ternaria . . . . . » 103

D. LENZI — Una generalizzazione di certi sistemi di assiomi gruppali relativamente alla famiglia dei Booleani successivi del sostegno di una relazione ternaria . . . . . » 113

L. TOSCANI — Un procedimento di calcolo per il disegno delle sezioni delle travi in precompresso . . . . . » 119

G. MASTROIANNI — Su un operatore lineare e positivo . . . . . » 161

C. FERRERO COTTI — Sugli stems sul cui quadrato esiste una involuzione . » 177

L. BIACINO, D. MISERENDINO — Le derivate di ordine frazionario e gli spazi $W_0^s(\Omega)$ . . . . . » 189

E. NATALE — n-Quasigruppi mediali idempotenti commutativi . . . . » 221

D. NUNZIANTE — Problema di Dirichlet per operatori ellittici in dominii limitati di R^n con punti conici . . . . . » 231

P. CONTI — Le immagini epimorfe di un M_1-piano archimedeo . . . » 315

E. D'ARIENZO, M. FRANCIOSI — Sul prolungamento delle funzioni finitamente additive . . . . . » 331

C. D'ONOFRIO — Il carico di punta in regime viscoso per travi di sezione variabile . . . . . » 341

M. FRANCIOSI — Su di un'equazione lineare ellittico-parabolica a coefficienti continui . . . . . » 365

S. FRENI CASALE — Sulle ipersuperfici luogo di spazi lineari . . . . » 387

M. G. GARRONI, B. HANOUZET, J. LUC JOLY — Régularité pour la solution d'un système I. Q. V. . . . . » 395

L. MADDALENA — Principio di massimo per sottosoluzioni di sistemi debolmente accoppiati quasilineari . . . . . » 459

M. MAIELLARO, L. PALESE — Sui moti M. H. D. stazionari di una miscela binaria in uno strato obliquo poroso in presenza di effetto Hall e sulla loro stabilità . . . . . » 471

M. MAIELLARO, A. REDAELLI — Sui moti magnetoidrodinamici stazionari tra cilindri coassiali in presenza di correnti anisotrope e sulla loro stabilità » 483

M. TUCCI — Teoremi di selezione continua per applicazioni plurivoche i cui valori sono unione di uno stesso numero n di insiemi chiusi e convessi » 547

R. CARRESE — Sulla differenziabilità regolare delle funzioni di n variabili . » 563

M. M. COCLITE — Su un modello teorico per l'espansione di atomi di un metallo posto su di un atomizzatore . . . . . » 581

G. GERLA, A. LETTIERI — Quasicorpi di dimensione infinita sul proprio nucleo » 609

G. PALMIERI — Alcune disuguaglianze per derivate intermedie negli spazi di Orlicz - Sobolev e applicazioni . . . . . » 633

Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1979 . . . . . » 653

TERMINATO DI STAMPARE OGGI
XXI APRILE MCMLXXX NELLE
OFFICINE GRAFICHE NAPOLETANE
« FRANCESCO GIANNINI & FIGLI »

Direttore responsabile: Prof. MICHELE FUIANO

Autorizzazione del Tribunale di Napoli, B/2315 del 14 agosto 1954