SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLV — ANNO CXVII

(gennaio - dicembre 1978)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1979

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLV — ANNO CXVII

(gennaio - dicembre 1978)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1979

Sui sistemi di corrispondenze di una curva ellittica in sé *

Nota di CIRO CILIBERTO
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza del 7 gennaio 1978)

RIASSUNTO. — In questo lavoro si determinano i sistemi lineari e continui di curve a valenza sulle superficie delle coppie di punti di una curva ellittica.

SUMMARY. — In this paper I determine all linear and continous systems of curves with valence of the surfaces of pairs of points of an ellyptic curve.

INTRODUZIONE

Nella recente nota [1] ho stabilito alcuni risultati inerenti i sistemi di corrispondenze a valenza di una curva algebrica C, di genere $p(C) \geq 1$, in sé, ossia i sistemi lineari e continui di curve a valenza sulle superficie C^2 e $C^{(2)}$, rispettivamente prodotto di C per sé e prodotto simmetrico di C. Nel presente lavoro si approfondisce lo studio dei sistemi lineari e continui di curve sulle dette superficie, nel caso $p(C) = 1$.

I risultati ottenuti, relativi alla superficie C^2, possono così riassumersi: osservato che ogni divisore effettivo L di C^2 ha grado non negativo, si prova che:

a) il sistema lineare $|L|$ varia in un sistema continuo bidimensionale di sistemi lineari distinti, tutti regolari, se L ha grado positivo;

b) il sistema lineare $|L|$ varia in un sistema continuo massimale unidimensionale di sistemi lineari distinti, se L ha grado nullo; tali sistemi risultano allora composti con le curve di uno stesso fascio ellittico, costituito da curve ellittiche irriducibili.

Si determinano infine, calcolandone le relative dimensioni, tutti i sistemi lineari e continui di curve a valenza di C^2.

* Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

In relazione alla superficie $C^{(2)}$, sulla quale, com'è noto, le curve sono tutte a valenza, si determinano tutti i sistemi lineari e continui di curve, calcolandone le relative dimensioni. Si prova inoltre che ogni divisore aritmeticamente effettivo di $C^{(2)}$ varia in un sistema continuo unidimensionale di divisori disequivalenti e che su $C^{(2)}$ sono regolari tutti e soli i sistemi lineari aritmeticamente effettivi.

Nella dimostrazione dei risultati suddetti si è fatto uso di quanto provato in [1] e dell'esistenza di un gruppo continuo di trasformazioni birazionali delle citate superficie in sé. In qualche caso alla dimostrazione fondata sulla teoria generale delle superficie, si è preferita una dimostrazione diretta, al fine di rendere più omogenea ed elementare la trattazione. Ad esempio si è evitato di adoperare in (2.3) il Teorema fondamentale delle superficie irregolari, e dell'enunciato (2.4), ii) si è indicata una dimostrazione che prescinde dal Teorema di regolarità dell'aggiunto e che, tra l'altro, mette in luce la struttura dei sistemi lineari aritmeticamente effettivi di C^2.

1. - Notazioni e richiami

a) Nel presente lavoro saranno considerate varietà algebriche sul campo complesso; se V è una tale varietà, ne indicheremo con dim V la dimensione sul campo complesso.

b) Sia C una curva algebrica liscia di genere $p(C)$; se D è un divisore di C, indicheremo con il simbolo $|D|$ la serie lineare completa individuata da D; se D_1, D_2 sono divisori di C, scriveremo $D_1 \equiv D_2$, se $|D_1| = |D_2|$, cioè se D_1 e D_2 sono linearmente equivalenti.

c) Sia S una superficie algebrica liscia di genere geometrico $p_g(S)$, genere aritmetico $p_a(S)$, irregolarità $q(S)$. Se C è un divisore di S, cioè una curva effettiva o virtuale di S, ne indicheremo con $\rho(C)$, $\nu(C)$, $i(C)$ rispettivamente il genere virtuale, il grado virtuale, l'indice di specialità; indicheremo inoltre con $K(S)$ un qualunque divisore canonico di S. Se C_1, C_2 sono divisori di S, ne indicheremo con $C_1 \cdot C_2$ il numero virtuale dei punti a comune. Scriveremo inoltre $C_1 \equiv C_2$ se C_1 e C_2 sono linearmente equivalenti e indicheremo con $|C|$ il sistema lineare completo individuato dal divisore C su S; con il simbolo $\{C\}$ indicheremo un sistema continuo di divisori effettivi cui C appartiene e con il simbolo $\{|C|\}$ indicheremo il quoziente di $\{C\}$ rispetto all'equivalenza lineare.

d) Sia C una curva algebrica liscia; indicheremo con C^2 la superficie algebrica delle coppie ordinate (P_1, P_2) con $P_1, P_2 \in C$. Con il simbolo $C^{(2)}$ indicheremo invece il prodotto simmetrico di C per sé; $C^{(2)}$ è una superficie algebrica ed esiste una applicazione razionale

naturale $\pi : C^2 \longrightarrow C^{(2)}$; con il simbolo $[P_1, P_2]$ indicheremo la coppia non ordinata $\pi(P_1, P_2) = \pi(P_1, P_2)$ di punti di C.

È noto che ogni divisore effettivo di C^2 individua una corrispondenza algebrica di C in sé, e che ogni divisore effettivo di $C^{(2)}$ ne individua una simmetrica. I divisori di C^2 o di $C^{(2)}$ individuati da corrispondenze a valenza $\gamma \in \mathbb{Z}$ di C in sé (cfr. [3], vol. III), saranno detti *curve a valenza* di C^2 o di $C^{(2)}$. Analogamente a quanto fatto in [1], indicheremo con $\textcircled{H}_{n_1, n_2, \gamma}$ e $\textcircled{H}_{n,\gamma}$ rispettivamente i sistemi, eventualmente vuoti, delle corrispondenze a valenza γ, di indici n_1 e n_2, e simmetriche di indice n, di C in sé; $\textcircled{H}_{n_1, n_2, \gamma}$ e $\textcircled{H}_{n,\gamma}$ possono riguardarsi come sistemi di curve a valenza γ su C^2 e su $C^{(2)}$ rispettivamente. Come provato in [1], $\textcircled{H}_{n_1, n_2, \gamma}$ e $\textcircled{H}_{n,\gamma}$ sono costituiti da un numero finito di sistemi continui irriducibili di divisori di C^2 e di $C^{(2)}$ rispettivamente, ciascuno dei quali è completo, e i divisori di $\textcircled{H}_{n_1, n_2, \gamma}$, e quelli di $\textcircled{H}_{n,\gamma}$, sono algebricamente equivalenti su C^2 e su $C^{(2)}$ rispettivamente. Indicheremo infine con $\theta_{n_1, n_2, \gamma}$ e con $\theta_{n,\gamma}$ i quozienti dei sistemi continui $\textcircled{H}_{n_1, n_2, \gamma}$ e $\textcircled{H}_{n,\gamma}$ rispetto all'equivalenza lineare. I sistemi $\textcircled{H}_{n_1, n_2, \gamma}$, $\theta_{n_1, n_2, \gamma}$, $\textcircled{H}_{n,\gamma}$, $\theta_{n,\gamma}$ risultano strutturati a varietà algebriche in maniera naturale (cfr. [1], (2,2)).

2. - La superficie C^2, con $p(C) = 1$

a) In questo paragrafo considereremo la superficie C^2, con C curva algebrica liscia di genere 1. Si ha:

$$(1) \qquad p_g(C^2) = 1\,, \quad p_a(C^2) = -1\,, \quad q(C^2) = 2\,, \quad K(C^2) \equiv 0$$

avendo indicato con 0 il divisore nullo di C^2 (cfr. [1], (1.1)). Essendo $K(C^2) \equiv 0$, se L è un qualunque divisore di C^2, si ha:

$$(2) \qquad \nu(L) = 2\,p(L) - 2$$

(cfr. [4]). Tenendo inoltre conto di (1), si ha:

$$(3) \qquad \dim \text{virt}\,|L| = \frac{\nu(L)}{2} - 1$$

e, per il Teorema di Riemann-Roch:

$$(4) \qquad \dim |L| \geq \frac{\nu(L)}{2} - 1$$

b) Sia G il gruppo di Lie unidimensionale algebrico connesso delle trasformazioni di prima specie di C (cfr. [3], vol. III, pg. 251 e segg.). Ovviamente il gruppo $G \times G$ opera transitivamente e liberamente su C^2; $G \times G$ è generato dai sottogruppi $G_1 = G \times \{1\}$ e $G_2 = \{1\} \times G$, unidimensionali algebrici connessi. I gruppi G_1 e G_2 operano a loro volta su C^2 e le orbite per questa operazione sono curve ellittiche, birazionalmente equivalenti a C, costituenti due fasci di curve unisecantesi, Φ_2 e Φ_1 rispettivamente, ellittici, birazionalmente equivalenti a C (cfr. [1], (1.1)).

PROPOSIZIONE (2.1). — *Se* L *è un divisore effettivo di* C^2, L *appartiene ad un sistema continuo* $\{L\}$ *tale che* $\dim\{|L|\} \geq 1$.

ii) *Se* L *è un divisore effettivo irriducibile di* C^2 *con* $\nu(L) = 0$, *allora* L *è linearmente isolato,* $\dim\{L\} = 1$ *e* $\Phi = \{L\}$ *è un fascio ellittico.*

iii) *Se* Ω *è un sistema continuo irriducibile massimale di divisori effettivi su* C^2, *esso è univocamente individuato da ogni curva* L *che gli appartiene, e i sistemi lineari contenuti in* Ω *hanno tutti la stessa dimensione.*

Dimostrazione. i) Sia $\mathfrak{D}(C^2)$ il gruppo dei divisori di C^2. Si consideri l'applicazione:

$$f^L : \omega \in G \times G \longrightarrow \omega(L) \in \mathfrak{D}(C^2).$$

Poiché $G \times G$ opera transitivamente su C^2, l'immagine di $G \times G$ tramite f^L non è ridotta ad un punto; ne segue che almeno uno dei sottogruppi G_1, G_2 di $G \times G$ non stabilizza L. Supponiamo dunque che G_1 non stabilizzi L, e mostriamo che il codominio dell'applicazione $f^L_{/G_1}$ non è costituito da curve tutte linearmente equivalenti. Se così fosse infatti, le curve del sistema continuo $\{\omega(L)\}_{\omega \in G_1}$ contenuto in $|L|$ segherebbero su una qualunque curva C_2 di Φ_2 divisori equivalenti, il che è assurdo. Sia infatti D il divisore segato da L su C_2 e sia D' un divisore di C_2 linearmente equivalente a D e costituito da punti distinti. Poiché $\omega(L)$ sega su C_2 il divisore $\omega(D)$, se fosse $\{\omega(L)\}_{\omega \in G_1} \subseteq |L|$, la serie $\{\omega(D)\}_{\omega \in G_1}$ di divisori di C_2 sarebbe costituita da divisori linearmente equivalenti e quindi anche la serie $\{\omega(D')\}_{\omega \in G_1}$ di divisori di C_2 sarebbe costituita da divisori linearmente equivalenti, il che non può essere, essendo essa priva di punti doppi (cfr. [8], pg. 196). Da ciò segue che l'applicazione:

$$\varphi^L : \omega \in G \times G \longrightarrow |\omega(L)| \in \mathfrak{D}^*(C^2)$$

dove si è indicato con $\mathfrak{D}^*(C^2)$ il quoziente di $\mathfrak{D}(C^2)$ rispetto all'equivalenza lineare, ha codominio non ridotto ad un punto; da ciò l'asserto.

ii) Sia $\{L\}$ il sistema continuo la cui esistenza è provata in i). Essendo L irriducibile e $\nu(L) = 0$, non può essere $\dim\{L\} = 2$, e quindi si ha $\dim\{L\} = 1$; dovendo essere inoltre $\dim\{|L|\} \geq 1$, si ha necessariamente $\dim\{|L|\} = 1$, con L linearmente isolato. Il sistema $\Phi = \{L\}$ è pertanto un fascio irriducibile che è il codominio dell'applicazione $f^L_{/G_1}$, supposto, ciò che è lecito, che G_1 non stabilizzi L. Sul fascio Φ opera dunque il gruppo unidimensionale algebrico connesso G_1 come un gruppo di trasformazioni birazionali di Φ in sé; non essendo Φ razionale, esso è ellittico (cfr. [3], vol. III).

iii) È noto che esiste qualche curva $L' \in \Omega$, tale che Ω è univocamente individuato da L' (cfr. [9], pg. 96), e quindi tale che $\{\omega(L')\}_{\omega \in G \times G} \subseteq \Omega$. Indichiamo con Ω^* il quoziente di Ω rispetto all'equivalenza lineare, e distinguiamo i due casi: a) $\dim\Omega^* = 1$, b) $\dim\Omega^* = 2$. Nel caso a), per quanto visto in i), Ω^* coincide col codominio di $\varphi^{L'}$, e dunque esiste un $\omega \in G \times G$ tale che $\omega(L') \equiv L$. Ne segue che Ω^* coincide anche col codominio di φ^L e quindi che Ω è univocamente individuato da L, coincidendo col sistema continuo irriducibile massimale contenente il codominio di f^L. Esaminiamo il caso b), e proviamo che Ω^* coincide ancora col codominio di $\varphi^{L'}$, potendosi poi concludere come nel caso a). A tale scopo basta provare che il codominio di $\varphi^{L'}$ ha dimensione 2, come sistema continuo di sistemi lineari.

Cominciamo col provare che il codominio di $f^{L'}$ ha dimensione 2. come sistema continuo di divisori effettivi di C^2. Se così non fosse, esisterebbe un sottogruppo $\tilde{G}$, unidimensionale algebrico connesso di $G \times G$, che fissa L'; e quindi che ne fissa le componenti irriducibili; queste sarebbero dunque disgiunte, perché orbite per l'azione di $\tilde{G}$ su C^2, e quindi divisori irriducibili di grado zero, che per la ii) apparterrebbero ad un fascio irriducibile ellittico Φ. Il sistema lineare $|L'|$ sarebbe una serie lineare completa g_m^{m-1} su Φ, e tutte le g_m^{m-1} su Φ costituirebbero un sistema continuo unidimensionale irriducibile di sistemi lineari disequivalenti, cui $|L'|$ appartiene, contenuto in Ω^*. Essendo $\dim\Omega^* = 2$, il fascio Φ dovrebbe a sua volta variare in un sistema unidimensionale, e quindi esisterebbe su C^2 un sistema di curve irriducibili $\{F\}$, con $\nu(F) = 0$, e $\dim\{F\} = 2$, il che è assurdo. Ora, se il codominio di $\varphi^{L'}$ avesse dimensione uno, esisterebbe un sottogruppo unidimensionale algebrico connesso $\hat{G}$ di $G \times G$, che muta in sé il sistema lineare $|L'|$, senza fissare alcuna curva di $|L'|$.

Considerata un orbita $\bar{C}$ per l'azione di $\hat{G}$ su C^2, la serie segata su $\bar{C}$ dal sistema continuo $\{\omega(L')\}_{\omega \in \hat{G}}$ dovrebbe essere costituita da divisori equivalenti, il che è assurdo, come si verifica con ragionamenti analoghi a quelli svolti in i). Avendosi $\Omega^* = \{|\omega(L)|\}_{\omega \in G \times G}$, per ogni $L \in \Omega$, ed essendo $G \times G$ un gruppo di trasformazioni birazionali di C^2 in sé, è ovvio che i sistemi lineari di Ω^* hanno tutti la stessa dimensione.

c) PROPOSIZIONE (2.2). — i) *Se* L *è un divisore effettivo di* C^2, *si ha* $\nu(L) \geq 0$.

ii) *Se* L *e* L′ *sono divisori effettivi di* C^2, *si ha* $L \cdot L' \geq 0$.

Dimostrazione. i) Se L è irriducibile, essendo $\rho(L) \geq 1$ (cfr. [2]), si ha per la (2), $\nu(L) \geq 0$. Se $L = h_1 L_1 + \ldots + h_n L_n$, con $L_1, \ldots, L_n$ irriducibili e distinti, si ha:

$$\nu(L) = \sum_1^n h_i^2 \nu(L_i) + 2 \sum_{i<j} h_i h_j L_i \cdot L_j \tag{5}$$

da cui l'asserto, tenendo conto che $\nu(L_i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, per quanto precedentemente visto, e che $L_i \cdot L_j \geq 0$, per ogni coppia $1 \leq i < j \leq n$, essendo L_i, L_j divisori irriducibili distinti.

ii) Segue facilmente da i).

d) PROPOSIZIONE (2.3). — i) *Se* L *è un divisore effettivo di* C^2 *appartenente ad un sistema continuo massimale irriducibile* $\{L\}$ *tale che* $\dim\{|L|\} = 1$, *si ha* $\nu(L) = 0$, *ed esiste un fascio* Φ *ellittico di curve irriducibili ellittiche, tale che ogni sistema lineare contenuto in* $\{|L|\}$ *è una serie lineare completa su* Φ.

ii) *Se* L *è un divisore effettivo di* C^2, *con* $\nu(L) = 0$, *esiste un fascio* Φ *ellittico di curve irriducibili ellittiche, tale che* L *sia composto con curve di* Φ; L *appartiene ad un sistema continuo irriducibile massimale* $\{L\}$ *tale che* $\dim\{|L|\} = 1$.

Dimostrazione. i) Adoperiamo ancora le notazioni usate nella prova di (2.1), e cominciamo col provare che il codominio di f^L ha dimensione 1. Se così non fosse, essendo unidimensionale per ipotesi il codominio di φ^L, si perverrebbe ad un assurdo come nella prova di (2.1), iii). Esiste allora un sottogruppo $\tilde{G}$ unidimensionale algebrico connesso di $G \times G$ che fissa L. Le orbite per l'azione di $\tilde{G}$ su C^2 sono curve irriducibili di grado 0 su C^2, e per la (2.1), ii), appartengono ad

un fascio ellittico Φ; ovviamente i sistemi lineari contenuti in $\{|\,L\,|\}$ sono tutte e sole le g_m^{m-1} su Φ, per m intero opportuno. Da ciò segue che $\nu(L) = 0$.

ii) L'asserto segue da (2.1), ii), se L è irriducibile.

Se invece $L = h_1 L_1 + \ldots + h_n L_n$, con $L_1, \ldots, L_n$ irriducibili e distinte, per la (5), per (2.2) e per l'ipotesi $\nu(L) = 0$, si ha:

$$\nu(L_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad L_i \cdot L_j = 0 \qquad 1 \leq i < j \leq n.$$

Quindi i divisori $L_1, \ldots, L_n$ appartengono ad uno stesso fascio ellittico irriducibile Φ; posto $m = h_1 + \ldots + h_n$, L è un divisore d'ordine m su Φ. Se fosse $\dim\{|\,L\,|\} = 2$, tenendo conto di quanto visto nella prova di (2.1), iii), il fascio Φ dovrebbe variare con continuità in un sistema unidimensionale, in contraddizione con (2.1), ii).

PROPOSIZIONE (2.4). — i) *Se* L *è un divisore effettivo di* C^2, *appartenente ad un sistema continuo massimale* $\{L\}$, *tale che* $\dim\{|\,L\,|\} = 2$, *si ha* $\nu(L) > 0$.

ii) *Se* L *è un divisore effettivo di* C^2 *tale che* $\nu(L) > 0$, *esso appartiene ad un sistema continuo irriducibile massimale* $\{L\}$ *tale che* $\dim\{|\,L\,|\} = 2$, *e i sistemi lineari contenuti in* $\{|\,L\,|\}$ *sono tutti regolari.*

Dimostrazione. i) Tenendo conto di (2.2), i), per ogni divisore effettivo L di C^2, si ha $\nu(L) \geq 0$. Se fosse $\nu(L) = 0$, per la (2.3), ii) non potrebbe essere $\dim\{|\,L\,|\} = 2$, contro le ipotesi.

ii) Il codominio di f^L è un sistema continuo irriducibile contenente L; sia $\{L\}$ il sistema continuo irriducibile massimale contenente il codominio di f^L. Se fosse $\dim\{|\,L\,|\} = 1$, per (2.3), i) sarebbe $\nu(L) = 0$, contro le ipotesi. Si ha allora $\dim\{|\,L\,|\} = 2 = q(C^2)$.

La regolarità dei sistemi lineari contenuti in $\{|\,L\,|\}$ segue dal teorema di regolarità dell'aggiunto di Ramanujan (cfr. [5], [6]), tenendo conto dell'ipotesi $\nu(L) > 0$, di (1.2), ii), e del fatto che $K(C^2) \equiv 0$.

OSSERVAZIONE (2.5). — Mostriamo come alla prova della regolarità dei sistemi lineari contenuti in $\{|\,L\,|\}$, conseguita in ii) di (2.4) adoperando il teorema di Ramanujan, si possa pervenire direttamente, adoperando i risultati precedentemente stabiliti. A tale scopo cominciamo col supporre che esista in $\{L\}$ una curva L' irriducibile. In tal caso la serie caratteristica segata da $\{L\}$ su L' è parte della serie

canonica, essendo $K(C^2) \equiv 0$, e, poiché è $\dim\{L\} = \dim|L'| + 2$, in forza di (1.1), ii), si ha:

$$\dim\{L\} - 1 = \dim|L'| + 1 \leq p(L') - 1 = \frac{\nu(L')}{2}$$

da cui

$$\dim|L'| \leq \frac{\nu(L')}{2} - 1$$

Valendo anche la disuguaglianza inversa (cfr. (4)), ne segue la regolarità di $|L'|$ e quindi di ogni sistema lineare contenuto in $\{|L|\}$, per (2.1), iii). Supponiamo ora che il sistema $\{L\}$ sia costituito da curve riducibili, ma che esista in $\{|L|\}$ un sistema lineare $|L'|$ privo di parti fisse. Allora $|L'|$ sarebbe composto con le curve di un fascio Φ completo irriducibile, non irrazionale, essendo $\nu(L') > 0$. Dovrebbe dunque essere $\Phi = |A|$ e $|L'|$ sarebbe una g^k_k su Φ, con $k > 1$. Varrebbe dunque la relazione:

$$\nu(L') = k^2 \nu(A) \tag{6}$$

ed essendo $\nu(L') > 0$, si avrebbe $\nu(A) > 0$. Per il divisore irriducibile A varrebbero dunque le ipotesi del teorema e, per quanto già dimostrato nel caso irriducibile, si avrebbe:

$$1 = \dim|A| = \frac{\nu(A)}{2} - 1$$

da cui:

$$\nu(A) = 4 \tag{7}$$

Tenendo ora conto di (4), (6), e (7), si avrebbe:

$$k = \dim|L'| \geq \frac{\nu(L')}{2} - 1 = 2k^2 - 1$$

che è assurdo per $k > 1$. Resta infine da considerare il caso in cui ogni sistema lineare di $\{|L|\}$ abbia una componente fissa. Supponiamo $L = L_1 + L_2$ dove L_1 sia la componente fissa di $|L|$. Possono verificarsi le seguenti eventualità: $\alpha)$ $\nu(L_2) > 0$, $\beta)$ $\nu(L_2) = 0$.

Esaminiamo il caso $\alpha)$: il sistema lineare $|L_2|$ è regolare e irriducibile. Osserviamo che si ha pure $L_1 \cdot L_2 > 0$. Se infatti fosse $L_1 \cdot L_2 = 0$, poiché L_1 e L_2 variano in sistemi continui, per l'irriducibilità di $|L_2|$ esisterebbe un $\bar{L}_1 \in \{L_1\}$ tale che $\bar{L}_1 = L_2 + L_3$, e si

avrebbe $L_1 \cdot L_2 = \bar{L}_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_2 + L_3 \cdot L_2 > 0$ e quindi un assurdo. Essendo $L_1 \cdot L_2 > 0$ si ha:

$$\nu(L) = \nu(L_1) + \nu(L_2) + 2\, L_1 \cdot L_2 > \nu(L_2)$$

da cui:

$$\dim |L| \geq \frac{\nu(L)}{2} - 1 > \frac{\nu(L_2)}{2} - 1 = \dim |L_2|$$

il che è in contraddizione con l'essere L_1 componente fissa di $|L|$, che comporterebbe $\dim |L| = \dim |L_2|$.

Il caso α) non può perciò verificarsi. Esaminiamo il caso β). Per (1.3), ii), esiste un fascio irriducibile Φ di curve ellittiche, su cui $|L_2|$ è una g_k^{k-1}. Per ogni $F \in \Phi$ si ha $L_1 \cdot F > 0$. Se infatti fosse $L_1 \cdot F = 0$, L_1 sarebbe composto con divisori di Φ, e non sarebbe quindi parte fissa di $|L|$. Ne segue che si ha:

$$L_1 \cdot L_2 = L_1 \cdot (k\, F) \geq k$$

Tenendo ora conto di (4), si ha:

$$k - 1 = \dim |L_2| = \dim |L| \geq \frac{\nu(L)}{2} - 1 =$$

$$= \frac{\nu(L_1) + \nu(L_2) + 2\, L_1 L_2}{2} - 1 = \frac{\nu(L_1)}{2} - 1 + L_1 \cdot L_2 \geq$$

$$\geq \frac{\nu(L_1)}{2} - 1 + k$$

e tale relazione è compatibile solo se $\nu(L_1) = 0$ e $L_1 \cdot L_2 = k$, caso in cui vale l'uguaglianza, e dunque la regolarità di $|L|$. Il caso β), come si è visto, è a priori possibile, e può effettivamente verificarsi, come si vede considerando una curva del tipo $C_1 + C_{2,1} + \ldots + C_{2,k}$, dove $C_1 \in \Phi_1$ e $C_{2,i} \in \Phi_2$, $i = 1, \ldots, k$. Il teorema resta così provato e la precedente discussione mette in evidenza quali casi di riducibilità possono presentarsi per un sistema lineare di dimensione virtuale non negativa su C^2.

e) I risultati precedenti e quelli di [1], consentono di determinare tutti i sistemi lineari e continui di curve a valenza di C^2, e di calcolarne le relative dimensioni.

Valgono infatti le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE (2.6). — i) *Se su* C^2 *si ha* $\dim \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma} = 2$, *allora è* $n_1 n_2 > \gamma^2$.

ii) *Per ogni terna* $(n_1, n_2, \gamma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, *con* $n_1 n_2 > \gamma^2$, *si si ha su* C^2, $\dim \theta_{n_1,n_2,\gamma} = 2$, *avendosi, per ogni* $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$:

$$\dim |T| = n_1 n_2 - \gamma^2 - 1$$

Dimostrazione. i) Se $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$, si ha $\nu(T) = 2(n_1 n_2 - \gamma^2)$ (cfr. [1]), e quindi, per le ipotesi e per la (2.4), i), dovendo essere $\nu(T) > 0$, ne segue l'asserto.

ii) Cominciamo col dimostrare che, nelle ipotesi, è non vuoto il sistema $\textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$. Se $\gamma \geq 0$, l'esistenza del sistema $\textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$, nell'ipotesi $n_1 n_2 > \gamma^2$ segue dalla proposizione (2.14) di [1], dalla quale si trae anche che dim $\theta_{n_1,n_2,\gamma} = 2$. Se $\gamma < 0$, dalle ipotesi si ha intanto, per quanto precede, che $\textcircled{H}_{n_1,n_2,-\gamma} \neq \emptyset$ e che dim $\theta_{n_1,n_2,-\gamma} = 2$. Se ω è una corrispondenza di seconda specie di C in sé (cfr. [3]), e se $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,-\gamma}$, consideriamo la corrispondenza composta $T \circ \omega$ che appartiene a $\textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$, essendo $\omega \in \textcircled{H}_{1,1,1}$. Si ha pertanto $\textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma} \neq \emptyset$, e per ogni $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$, $\nu(T) = 2(n_1 n_2 - \gamma^2) > 0$. Da (2.4), ii) segue l'asserto.

PROPOSIZIONE (2.7). — i) *Se su* C^2 *si ha* $\dim \theta_{n_1,n_2,\gamma} = 1$, *esistono due numeri naturali primi fra loro* α_1, α_2, *tali che* $n_1 = d\alpha_1^2$, $n_2 = d\alpha_2^2$, $\gamma = \pm d\alpha_1\alpha_2$, *essendo* d *il massimo comune divisore di* n_1 *e* n_2.

ii) *Dati comunque due numeri naturali primi fra loro* α_1, α_2, *e un numero naturale* d, *e posto* $n_1 = d\alpha_1^2$, $n_2 = d\alpha_2^2$, $\gamma = \pm d\alpha_1\alpha_2$, *si ha su* C^2, $\dim \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma} = 1$; *le curve di* $\textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$ *sono riducibili in* d *componenti, e, per ogni* $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$ *si ha:*

$$\dim |T| = d - 1 \tag{8}$$

Dimostrazione. i) Per la (2.3), i), si ha, per ogni $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$, $\nu(T) = 2(n_1 n_2 - \gamma^2) = 0$, da cui $n_1 n_2 - \gamma^2 = 0$. Da tale relazione si trae:

$$\frac{n_1}{d}\,\frac{n_2}{d} = \frac{\gamma^2}{d^2}$$

ed essendo i fattori a primo membro primi tra loro e il secondo membro un quadrato, anche ciascuno dei fattori è un quadrato e

quindi esistono due numeri naturali α_1, α_2 tali che:

$$\frac{n_1}{d} = \alpha_1^2, \quad \frac{n_2}{d} = \alpha_2^2$$

da cui:

$$n_1 = d\,\alpha_1^2, \; n_2 = d\,\alpha_2^2, \; \gamma = \pm d\,\alpha_1\,\alpha_2,$$

e α_1 e α_2 sono primi tra loro per il significato di d.

ii) Per quanto visto nella prova di (2.6), ii), basta mostrare l'asserto per $\gamma \geq 0$. Si consideri una serie lineare completa $g^{\alpha_2^2}_{\alpha_2+1}$ su C, a mezzo della quale si può trasformare birazionalmente C in una curva C′ liscia di ordine $\alpha_2 + 1$ di un S_{α_2}. Sia T la corrispondenza di C′ in sé che ad ogni $P \in C'$ associa l'ulteriore intersezione di C′ con l'iperpiano iperosculatore a C′ in P.

Il primo indice di T è 1, la valenza α_2, ed è facile calcolarne, tenendo conto di [8], pg. 187, il secondo indice, che è α_2^2. Con ciò che si è provato che $\textcircled{H}_{1,\alpha_2^2,\alpha_2} \neq \emptyset$; analogamente si prova che $\textcircled{H}_{\alpha_1^2,1,\alpha_1} \neq \emptyset$.

Se $T \in \textcircled{H}_{1,\alpha_2^2,\alpha_2}$, $T' \in \textcircled{H}_{\alpha_1^2,1,\alpha_1}$, $\omega \in \textcircled{H}_{1,1,1}$, la corrispondenza composta $T \circ T' \circ \omega$ appartiene al sistema $\textcircled{H}_{\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_1\alpha_2}$, che non è vuoto. Ovviamente la somma di d curve di $\textcircled{H}_{\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_1\alpha_2}$ fornisce una curva di $\textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$, e quest'ultimo sistema è dunque non vuoto. Per ogni $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$ si ha:

$$\nu(T) = 2(n_1 n_2 - \gamma^2) = 2(d^2\alpha_1^2\alpha_2^2 - d^2\alpha_1^2\alpha_2^2) = 0$$

Dalla (2.3), ii), segue allora che $\dim\{|T|\} = \dim\theta_{n_1,n_2,-\gamma} = 1$. Osserviamo ora che le curve di $\textcircled{H}_{\alpha_1^2,\alpha_1^2,\alpha_1,\alpha_2}$, sono irriducibili. Infatti se $T \in \textcircled{H}_{\alpha_1^2,\alpha_1^1,\alpha_1,\alpha_2}$, si ha $\nu(T) = 0$ e, ancora per (2.3), ii), esiste un fascio Φ di curve irriducibili ellittiche, tale che $|T|$ sia una g_k^{k-1} su Φ. Se β_1, β_2, sono gli indici delle curve di Φ, cioè $\beta_i = F \cdot C$, $F \in \Phi$, $C \in \Phi_i$, $i = 1, 2$, si ha $\alpha_1^2 = k\,\beta_1$, $\alpha_2^2 = k\,\beta_2$ ed essendo α_1 e α_2 primi tra loro, è $k = 1$ e $\Phi = \textcircled{H}_{\alpha_2^1,\alpha_2^2,\alpha_1,\alpha_2}$. Da ciò segue che ogni curva di $\textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$ è composta con curve di $\textcircled{H}_{\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_1,\alpha_2}$ e, per ogni $T \in \textcircled{H}_{n_1,n_2,\gamma}$ vale la (8), essendo $\textcircled{H}_{\alpha_1^2,\alpha_2^2,\alpha_1\alpha_2}$ un fascio ellittico.

Osservazione (2.8). — Come provato in (2.7) sono non vuoti i sistemi del tipo $\textcircled{H}_{\gamma^2,1,\gamma}$, $\textcircled{H}_{1,\gamma^2,\gamma}$, per ogni $\gamma \in \mathbb{Z}$, e ogni curva appartenente a uno di tali sistemi è rappresentativa, su C^2, di una involuzione

ellittica su C, birazionalmente equivalente a C. Viceversa, se C è a moduli generali, ogni involuzione ellittica d'ordine n su C, birazionalmente equivalente a C, può interpretarsi come una corrispondenza d'indici n e 1, che ha una valenza γ per il teorema di Hurwitz-Severi (cfr. [3]). Risulta pertanto non vuoto il sistema $\textcircled{H}_{n,1,\gamma}$, le cui curve sono irriducibili ed ellittiche, essendo unisecate dalle curve del fascio Φ_2 (cfr. b)); per ogni $T \in \textcircled{H}_{n,1,\gamma}$ si ha allora:

$$\nu(T) = 2p(T) - 2 = 0 = 2(n - \gamma^2)$$

da cui $n = \gamma^2$; cioè su una curva ellittica a moduli generali C, ogni involuzione ellittica birazionalmente equivalente a C ha ordine quadrato; inoltre le involuzioni ellittiche su C birazionalmente equivalenti a C si ottengono tutte procedendo come fatto in (2.7), ii) per la costruzione dei sistemi $\textcircled{H}_{\gamma^2,1,\gamma}$, $\textcircled{H}_{1,\gamma^2,\gamma}$.

3. — La superficie $C^{(2)}$, con $p(C) = 1$

a) Nel presente paragrafo considereremo la superficie $C^{(2)}$, con C curva algebrica liscia di genere 1. Si ha:

$$p_g(C^{(2)}) = 0\,,\ p_a(C^{(2)}) = -1\,,\ q(C^{(2)}) = 1 \tag{9}$$

(cfr. [1]). Poiché i divisori effettivi di $C^{(2)}$ individuano corrispondenze simmetriche di C in sé (cfr. n. 1, d)), e poiché le corrispondenze simmetriche di una curva ellittica in sé sono tutte a valenza (cfr. [7], pg. 49), su $C^{(2)}$ esistono solo curve a valenza. Se T è un divisore effettivo di $C^{(2)}$, esistono quindi due interi n, γ, tali che $T \in \textcircled{H}_{n,\gamma}$ e si ha:

$$\nu(T) = n^2 - \gamma^2,\ p(T) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} + 1 \tag{10}$$

(cfr. [1], [7]), allora, tenendo conto di (9) e (10), si ha:

$$\dim \operatorname{virt} |T| = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1 \tag{11}$$

e, per il Teorema di Riemann-Roch:

$$\dim |T| \geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1 \tag{12}$$

con $T \in \mathcal{H}_{n,\gamma}$. Infine, con $T \in \mathcal{H}_{n,\gamma}$, $T' \in \mathcal{H}_{m,\xi}$, si ha:

$$T \cdot T' = n\,m - \gamma\,\xi \tag{13}$$

(cfr. [1], (1.3)).

b) Poiché le curve di $\mathcal{H}_{1,1,1}$ su C^2 sono simmetriche, su $C^{(2)}$ si ha $\dim \theta_{1,1} = \dim \theta_{1,1,1} = 1$, e per ogni $T \in \mathcal{H}_{1,1}$, si ha $\dim |T| = 0$, $\mathcal{H}_{1,1}$ risultando un fascio ellittico. Poiché invece le curve di $\mathcal{H}_{1,1,-1}$ in generale non sono simmetriche, l'applicazione naturale $\pi : C^2 \to C^{(2)}$ induce l'applicazione $\pi' : \mathcal{H}_{1,1,-1} \to \mathcal{H}_{2,2}$ che ad ogni corrispondenza $T \in \mathcal{H}_{1,1,-1}$ associa la corrispondenza simmetrica $T + T^{-1} \in \mathcal{H}_{2,-2}$. In $\mathcal{H}_{1,1,-1}$ esistono solo tre curve simmetriche, oltre l'identità I (cfr. [3], vol. III, pg. 263 e segg.); ne segue che $\mathcal{H}_{1,1}$ su $C^{(2)}$ è costituito da tre curve $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$, algebricamente equivalenti (cfr. [9], pg. 97), ma non appartenenti ad un sistema continuo connesso; l'identità J, riguardata come divisore di $C^{(2)}$, non appartiene a $\mathcal{H}_{1,-1}$, bensì a $\mathcal{H}_{2,-2}$, come osservato in [7], pg. 36 (cfr. anche [1], (1.4)). Il sistema $\mathcal{H} = \pi'(\mathcal{H}_{1,1,-1})$, essendo immagine di un'involuzione d'ordine 2, con 4 punti doppi sul fascio ellittico $\mathcal{H}_{1,1,-1}$, è un fascio razionale. Il fascio $\mathcal{H}$ non ha punti base, perché, se $T, T' \in \mathcal{H}$, si ha $T \cdot T' = 0$ (cfr. (13)); inoltre $\mathcal{H}$ non appartiene ad un sistema lineare più ampio. Per ogni $i = 1, 2, 3$, si ha inoltre $2\,T^{(i)} \in \mathcal{H}$.

c) La superficie $C^{(2)}$ è birazionalmente equivalente ad una rigata ellittica (cfr. [7], pg. 48), ed è una superficie ellittica, ammettendo un gruppo unidimensionale algebrico connesso di trasformazioni birazionali in sé. Infatti il gruppo G delle trasformazioni di prima specie di C opera su $C^{(2)}$ nel modo seguente:

$$\omega\,[P, Q] = [\omega(P), \omega(Q)],\ \omega \in G,\ [P, Q] \in C^{(2)}.$$

Le orbite per l'azione di G su $C^{(2)}$ sono le curve di $\mathcal{H}$ e G opera liberamente su ogni curva di $\mathcal{H}$ diversa da T^i, $i = 1, 2, 3$, mentre per ognuna delle curve $T^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, esiste un sottogruppo di G isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ il cui elemento non identico induce su $T^{(i)}$ identità.

Infatti se $T \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{2,-2}$ e se $[P, Q] \in T$, cioè se il divisore $T(P)$ di C contiene Q, per ogni $\omega \in G$ si ha:

$$T(\omega(P)) = \omega(T(P))$$

in quanto le trasformazioni di prima specie di C permutano con le corrispondenze di $\mathcal{H}$. Ne segue che $\omega(Q) \in \omega(T(P)) = T(\omega(P))$ e quindi $\omega\,[P, Q] = [\omega(P), \omega(Q)] \in T$. Se poi, con $[P, Q] \in C^{(2)}$, si ha $\omega\,[P, Q] = [P, Q]$, $\omega \in G - \{1\}$, deve essere $\omega(P) = Q$ e $\omega(Q) = P$, e

quindi $\omega^2 = 1$ e ω una delle tre trasformazioni involutorie di prima specie che s'identificano con le curve $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$; ne segue che $[P, Q]$ appartiene ad una di queste tre curve e lo stabilizzatore di $[P, Q]$ in G è costituito da 1 e ω risultando isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

PROPOSIZIONE 3.1). — i) *Se* L *è un divisore effettivo di* $C^{(2)}$ *che non è fissato da tutti gli elementi di* G, L *appartiene ad un sistema continuo irriducibile massimale* $\{L\}$, *tale che* $\dim \{|L|\} = q(C^{(2)}) = 1$, *ed i sistemi lineari contenuti in* $\{|L|\}$ *hanno tutti la stessa dimensione.*

ii) *Se* Ω *è un sistema continuo irriducibile massimale di divisori effettivi su* $C^{(2)}$, *esso è univocamente individuato da ogni curva* $L \in \Omega$.

Dimostrazione. Essendo la prova di ii) del tutto analoga a quella di (2.1), iii), caso a), limitiamoci alla prova di i), che è del resto simile a quella di 2.1), i). Si consideri l'applicazione:

$$f^L : \omega \in G \longrightarrow \omega(L) \in \mathfrak{D}(C^{(2)})$$

col solito significato di $\mathfrak{D}(C^{(2)})$. Poiché L non è fissato da G, l'immagine di G tramite f^L non è ridotta ad un punto, sicché le curve $\{\omega(L)\}_{\omega \in G}$ costituiscono un sistema continuo unidimensionale irriducibile cu L appartiene. Mostriamo che le curve di tale sistema non sono tutte linearmente equivalenti. Se lo fossero infatti, esse segherebbero su una $T \in \textcircled{H}$ irriducibile divisori effettivi equivalenti, in quanto, $\textcircled{H}$ essendo un fascio e L non potendo essere composto con curve di $\textcircled{H}$, deve essere $L \cdot T > 0$; ciò è assurdo, come si vede con un'argomentazione analoga a quella fornita in (2.1), i). Da ciò segue che $\{|\omega(L)|\}_{\omega \in G}$ è un sistema continuo irriducibile unidimensionale di sistemi lineari disequivalenti cui $|L|$ appartiene ed esso è massimale, poiché $q(C^{(2)}) = 1$. Ora, essendo G un gruppo di trasformazioni birazionali di $C^{(2)}$ in sé, due sistemi lineari $\{|\omega(L)|\}_{\omega \in G}$ hanno la stessa dimensione, e da ciò l'asserto.

d) PROPOSIZIONE (3.2). — Se $\textcircled{H}_{n,\gamma} \neq \emptyset$, *si ha* $n \geq |\gamma|$.

Dimostrazione. Sia $\gamma \geq 0$; se fosse $\gamma > n$, per ogni $T \in \textcircled{H}_{n,\gamma}$ e per ogni $T' \in \textcircled{H}_{1,1}$, si avrebbe $T \cdot T' = n - \gamma < 0$ (cfr. (13)), e quindi T conterrebbe ogni curva del fascio $\textcircled{H}_{1,1}$, il che è assurdo. Sia $\gamma < 0$; se fosse $-\gamma > n$, per ogni $T \in \textcircled{H}_{n,\gamma}$ e per ogni $T' \in \textcircled{H}$, si avrebbe $T \cdot T' = 2(n + \gamma) < 0$, e quindi T conterrebbe ogni curva del fascio $\textcircled{H}$, il che è assurdo.

PROPOSIZIONE (3.3). — *Se* $n > 0$ *e* $n \geq \gamma \geq 0$, *si ha, su* $C^{(2)}$, $\dim \theta_{n,\gamma} = 1$ *e, per ogni* $T \in \mathcal{H}_{n,\gamma}$ *è:*

$$\dim |T| = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1 \tag{14}$$

Dimostrazione. Nell'ipotesi si ha:

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1 \geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n - 1 \geq 0$$

e per la proposizione (2.14) di [1], il sistema $\mathcal{H}_{n,\gamma}$ è non vuoto, e si ha $\dim \theta_{n,\gamma} = 1$; inoltre, per la proposizione (2.3) di [1], $\theta_{n,\gamma}$ risulta una varietà irriducibile, birazionalmente equivalente alla varietà di Jacobi di C, che coincide con C stessa (cfr. anche (2.4) di [1]). Per dimostrare l'asserto basta dimostrare la validità della (14) per una qualunque curva $T \in \mathcal{H}_{n,\gamma}$, tenendo conto di (3.1) e del fatto che una curva $T \in \mathcal{H}_{n,\gamma}$ non è fissata da G perché si ha $T \cdot T' = 2(n+\gamma) > 0$, per ogni $T' \in \mathcal{H}$ (cfr. c)). Cominciamo col supporre $n = \gamma$ ed osserviamo che se $T \in \mathcal{H}_{n,n}$, $T' \in \mathcal{H}_{1,1}$, si ha $T \cdot T' = 0$, e quindi $|T|$ è composto con le curve del fascio ellittico $\mathcal{H}_{1,1}$ ed è una g_n^{n-1} su $\mathcal{H}_{1,1}$. Si ha perciò:

$$\dim |T| = n - 1$$

e vale la (14). Supponiamo ora $n > \gamma$, e mostriamo per prima cosa l'asserto se esiste una curva irriducibile $T \in \mathcal{H}_{n,\gamma}$. Essendo:

$$\nu(T) > n^2 - \gamma^2 - (n+\gamma) = 2\,p(T) - 2$$

la serie caratteristica segata da $\mathcal{H}_{n,\gamma}$ su T non è speciale e quindi si ha:

$$\dim \mathcal{H}_{n,\gamma} - 1 = \dim |T| \leq \nu(T) - p(T) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1$$

e valendo, per la (12), anche la disuguaglianza inversa, si ha l'asserto. Esaminiamo ora il caso in cui in $\theta_{n,\gamma}$ esista un sistema lineare $|T|$ riducibile ma privo di parti fisse, e dunque composto con le curve di un fascio Φ. Avendosi $n > \gamma$, è $\nu(T) > 0$ e Φ sarebbe razionale irriducibile completo, e quindi si avrebbe $\Phi = |T'|$, $T' \in \mathcal{H}_{m,\xi}$.

Il sistema $|T|$ sarebbe una g^k_k su Φ, con $k > 1$, e varrebbero le relazioni:

$$n = k\,m\,, \qquad \gamma = k\,\xi\,.$$

Essendo $n > \gamma \geq 0$, sarebbe $m > \xi \geq 0$ e per la curva irriducibile $T' \in \Phi$, per quanto precede ,si avrebbe:

$$\dim |T'| = 1 = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{\xi(\xi-1)}{2} - 1$$

Tenendo allora conto di (12) si otterrebbe:

$$k = \dim |T| \geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1 = \frac{n^2-\gamma^2}{2} + \frac{n+\gamma}{2} - 1 =$$

$$= k^2 \frac{(m^2-\xi^2)}{2} + k\,\frac{m+\xi}{2} - 1 \geq$$

$$\geq k\left[\frac{m(m+1)}{2} - \frac{\xi(\xi-1)}{2}\right] - 1 = 2\,k - 1$$

che è assurdo per $k > 1$. Esaminiamo infine il caso che il sistema $|T|$ abbia una componente fissa $A \in \textcircled{H}_{m,\xi}$. Se fosse $\xi \leq 0$, si avrebbe, per quanto precede e per la (12):

$$\dim |T| = \dim |T - A| = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} -$$

$$- \frac{(\gamma-\xi)(\gamma-\xi-1)}{2} - 1 \geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1$$

che è assurdo, essendo $n - m < n$ e $\gamma - \xi \geq \gamma$. Se $\xi > 0$, dovendo essere $\dim |A| = 0$, dovrebbe essere, tenendo conto di (3.2):

$$0 = \dim |A| \geq \frac{m(m+1)}{2} - \frac{\xi(\xi-1)}{2} - 1 \geq m - 1$$

e quindi $m = 1$, $\xi = 1$. Ma allora si avrebbe, per la (12):

$$\dim |T| = \dim |T - A| = \frac{(n-1)\,n}{2} - \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2} - 1 \geq$$

$$\geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} - 1$$

disuguaglianza assurda. Ciò prova l'asserto.

OSSERVAZIONE (3.4). — La prova del precedente teorema garantisce che dati comunque n, γ, con $n \geq \gamma \geq 0$ e $n > 0$, esiste il sistema $\mathcal{H}_{n,\gamma}$ e, se $n > \gamma$, esistono in $\mathcal{H}_{n,\gamma}$ curve irriducibili.

PROPOSIZIONE (3.5). — i) *Se n, γ sono interi tali che $n > -\gamma > 0$, si ha, su* $C^{(2)}$, $\dim \theta_{n,\gamma} = 1$, *e vale la* (14) *per ogni* $T \in \mathcal{H}_{n,\gamma}$.

ii) *Per ogni intero positivo n, si ha $\mathcal{H}_{n,-n} \neq \emptyset$ e $\dim \theta_{n,-n} = 0$; ogni curva di $\mathcal{H}_{n,-n}$ è del tipo $T + \varepsilon_1 T^{(1)} + \varepsilon_2 T^{(2)} + \varepsilon_3 T^{(3)}$, dove T è spezzata in curve del fascio $\mathcal{H}$ e $\varepsilon_i = 0, 1$, $i = 1, 2, 3$; $\mathcal{H}_{n,-n}$ è costituito di quattro componenti connesse che sono sistemi lineari completi di cui uno di dimensione $\frac{n}{2}$, gli altri di dimensione $\frac{n}{2} - 1$, se n è pari, e uno di dimensione $\frac{n-1}{2} - 1$, gli altri di dimensione $\frac{n-1}{2}$ se n è dispari.*

Dimostrazione. i) La i) segue dalla proposizione (2.16) di [1]. Proviamo la ii). Per ogni intero positivo il sistema $\mathcal{H}_{n,-n}$ è non vuoto. Infatti se $n = 2k$, la somma di k curve del fascio $\mathcal{H}$ costituisce un elemento di $\mathcal{H}_{n,-n}$; se $n = 2k + 1$, la somma di k curve di $\mathcal{H}$ e di una delle curve $T^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, costituisce un elemento di $\mathcal{H}_{n,-n}$. D'altra parte, per ogni n intero positivo e per ogni $T \in \mathcal{H}_{n,-n}$, $T' \in \mathcal{H}_{2,-2}$, si ha $T \cdot T' = 0$ e inoltre $T \cdot T^{(i)} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Ciò implica che il sistema lineare $|T|$ è composto con curve di $\mathcal{H}$, a meno di una componente costituita da una curva del tipo $\varepsilon_1 T^{(1)} + \varepsilon_2 T^{(2)} + \varepsilon_3 T^{(3)}$, non contenente componenti appartenenti a $\mathcal{H}$. Tenendo conto del fatto che, per ogni $i = 1, 2, 3$, $2T^{(i)} \in \mathcal{H}$, si ha $\varepsilon_i = 0, 1$, $i = 1, 2, 3$. Per ogni intero positivo k indichiamo con $\mathfrak{D}_k$ il sistema lineare completo di curve di $C^{(2)}$ costituito dalla serie g_k^k su $\mathcal{H}$, cioè da tutte le curve spezzate in k curve del fascio $\mathcal{H}$. Se $n = 2k$, per quanto precede, $\mathcal{H}_{n,-n}$ è spezzato in quattro componenti connesse, costituite dalle curve dei sistemi lineari $\mathfrak{D}_k$, $\mathfrak{D}_{k-1} + T^{(1)} + T^{(2)}$, $\mathfrak{D}_{k-1} + T^{(2)} + T^{(3)}$, $\mathfrak{D}_{k-1} + T^{(1)} + T^{(3)}$, di cui il primo ha dimensione $\frac{n}{2}$, gli altri di dimensione $\frac{n}{2} - 1$.

Se $n = 2k + 1$, $\mathcal{H}_{n,-n}$ è ancora costituito da quattro componenti connesse, che sono i sistemi lineari $\mathfrak{D}_k + T^{(1)}$, $\mathfrak{D}_k + T^{(2)}$, $\mathfrak{D}_k + T^{(3)}$, $\mathfrak{D}_{k-1} + T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$, di cui i primi tre hanno dimensione $\frac{n-1}{2}$, il quarto ha dimensione $\frac{n-1}{2} - 1$. Ovviamente in ogni caso si ha $\dim \theta_{n,-n} = 0$, $\theta_{n,-n}$ essendo costituito da quattro punti distinti.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CILIBERTO, *Sui sistemi di corrispondenze a valenza di una curva algebrica in sé.* Ricerche di Matematica, vol. 27, 1978.
[2] M. DE FRANCHIS, *Sulla varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica.* Rend. Circ. Mat. Palermo, 1903.
[3] F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Zanichelli, Bologna.
[4] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche.* Zanichelli, Bologna.
[5] C. P. RAMANUJAN, *Remarks on the Kodaira vanishing theorem.* Jour. Ind. Math. Soc. 36, 1972.
[6] C. P. RAMANUJAN, *Supplement to the article 5.* Jour. Ind. Math. Soc. 38, 1974.
[7] F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie.* Mem. Acc. Torino, Serie II, Tomo LIV.
[8] F. SEVERI, *Vorlesungen ueber algebraische geometrie.* Leipzig, 1921 .
[9] O. ZARISKI, *Algebraic surfaces.* Springer-Verlag, 1971.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, V. Dalla Volta e G. Panella.

Sul problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine, ipoellittici nella zona di degenerazione

Nota di ANTONIETTA CIOFFI *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 7 gennaio 1978)

RIASSUNTO. — In questo lavoro si dimostra un teorema di esistenza per il problema posto nel titolo.

SUMMARY. — In this paper we give an existence theorem for the problem in the title.

Nelle memorie [4], [5] A. CANFORA e, successivamente, M. L. BENEVENTO, T. BRUNO, L. CASTELLANO in [3], M. L. BENEVENTO in [2], hanno stabilito teoremi di esistenza di soluzioni deboli e quasi regolari per il problema del tipo di Dirichlet relativo ad alcune classi di operatori ellittico-parabolici in un aperto limitato e regolare Ω di R^{n+1}.

Tali operatori risultano quasi ellittici nei domini di degenerazione; inoltre l'intersezione di tali domini con la frontiera di Ω è costituita da porzioni di iperpiani normali ad assi coordinati.

In un mio recente lavoro (cfr. [6]) ho esteso i risultati delle memorie citate ad una classe di operatori del quarto ordine, ellittico-parabolici in Ω e ipoellittici nel dominio di degenerazione D; indicata con y la variabile tale che $\partial D \cap \partial \Omega$ appartiene all'iperpiano $y = 0$, gli operatori considerati sono del terzo ordine rispetto ad y. Essi appartengono inoltre alla classe di operatori studiata da S. MATARASSO in [10], a cui rimandiamo per la descrizione. Qui rileviamo che gli operatori $\mathcal{S}$ di tale classe godono della proprietà che tutte le derivate che figurano in $\mathcal{S}$ sono operatori più deboli di $\mathcal{S}$ [1].

In questo lavoro prendo in esame operatori ellittico-parabolici, ipoellittici in D, dove risultano di ordine $p \leq 3$ rispetto alla varia-

* Istituto di Matematica « Renato Caccioppoli » dell'Università di Napoli.

[1] Per la definizione di operatore più debole di $\mathcal{S}$ cfr. HÖRMANDER [7].

bile y, ed appartengono ad una classe più generale di quella prima citata, come illustrerò al § 1. Relativamente a tali operatori conseguo un teorema di esistenza di una soluzione debole u per il problema del tipo di Dirichlet. Stabilisco anche teoremi di regolarizzazione i quali mi permettono di asserire che la soluzione debole u dei problemi in questione è anche, internamente a D o ad $\Omega - D$, una soluzione forte [2] dell'equazione e verifica quasi ovunque le condizioni al contorno.

La tecnica impiegata è analoga a quella di [2] (approssimazione del problema con uno ellittico a coefficienti singolari su una parte di $\partial\Omega$). Per stabilire le necessarie formule di maggiorazione delle soluzioni approssimanti ho dovuto studiare alcuni problemi ipoellittici nel semispazio che, a differenza di quanto avviene in [6], non rientrano in quelli studiati da MATARASSO in [10]; i procedimenti di cui mi sono servita sono comunque similari a quelli impiegati in [6]. Le maggiorazioni che in tal modo ottengo sono però stabilite in spazi più generali di quelli considerati da Matarasso: infatti le funzioni ad essi appartenenti non sono necessariamente dotate, in L^2_{loc}, di tutte le derivate che figurano formalmente nell'operatore; ciò ha comportato qualche difficoltà nell'estendere i ragionamenti del mio citato lavoro. Ho risolto tali difficoltà ricorrendo ad una formula di Hörmander che dà una rappresentazione locale per una classe di operatori ipoellittici.

L'esposizione è così suddivisa: il § 1 contiene la posizione del problema e l'enunciato dei risultati; nel § 2 si stabiliscono formule di maggiorazione per le soluzioni di un problema differenziale nel semispazio relativo ad un operatore ipoellittico contenente il parametro; nel § 3 si pone il problema approssimante e si conseguono le necessarie maggiorazioni per le soluzioni approssimanti; infine nel § 4 si dimostra il teorema di esistenza.

§ 1. IPOTESI, POSIZIONE DEL PROBLEMA ED ENUNCIATO DEI RISULTATI.

1.1 - Notazioni ed ipotesi.

Sia L un operatore del quarto ordine, a coefficienti reali

$$L(x', D) = \sum_{|\alpha|\leq 4} a_\alpha (x')\, D^\alpha \qquad x' \in R^{n+1},$$

[2] Per la definizione di soluzione forte di una equazione formalmente ipoellittica cfr. HÖRMANDER [8].

il quale sia ellittico-parabolico in un aperto limitato Ω di R^{n+1}, la cui frontiera risulti di classe C^4.

Supponiamo verificate le seguenti ipotesi:

a) per i coefficienti a_α di L risulti

$$a_\alpha(x') \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega}) \qquad \forall\, \alpha : |\alpha| \leq 4;$$

b) indicata con φ una generica funzione reale di classe $C_0^\infty(\Omega)$, si abbia [3]

$$(\varphi, L\,\varphi) \geq a \,\|\varphi\|^2$$

a essendo una costante positiva indipendente da φ.

c) si abbia $\bar{\Omega} = E \cup D$, dove E è un aperto su $\bar{\Omega}$ nel quale L risulta ellittico del quarto ordine e D un dominio la cui intersezione con la frontiera $\partial\Omega$ di Ω è una regione contenuta nell'iperpiano $x'_{n+1} = 0$ e tale che nei suoi punti la normale interna a Ω è equiversa all'asse x'_{n+1}.

Ricordiamo ora alcune definizioni (cfr. HÖRMANDER [8]): un operatore $Q(D)$ si dice più debole di un operatore ipoellittico $P(D)$ se e solo se $|Q(i\xi)|/(|P(i\xi)| + 1)$ è limitato per ξ reale, e due operatori ipoellitici si diranno egualmente forti se ciascuno è più debole dell'altro. Un operatore $L(x', D)$ si dice formalmente ipoellittico in un dominio D se

1) $L(x'_0, D)$ è ipoellittico per ogni fissato $x'_0 \in D$

2) tutti gli operatori $L(x'_0, D)$ con $x'_0 \in D$ sono egualmente forti.

Ciò premesso, supponiamo verificata l'ulteriori ipoesi:

d) nel dominio D, l'operatore $L(x', D)$ sia formalmente ipoellittico. Posto, per ogni fissato punto x'_0 in D:

$$L(x'_0, D) = \mathfrak{F}^0(\partial) = \mathfrak{F}^0(\partial_x, \partial_y)$$

dove $x' = (x, y) = (x'_1, \ldots, x'_n, y)$ e $D = i\partial$, $\forall (\xi, \eta) = (\xi'_1, \ldots, \xi'_n, \eta) \in R^{n+1}$ per il polinomio $\mathfrak{F}^0(\xi, \eta)$ si abbia:

$$Re\, \mathfrak{F}^0(\xi, \eta) \geq 0; \tag{1.1}$$

inoltre posto

$$\mathfrak{F}^0(\xi, \eta) = a_0 \eta^p + a_1(\xi)\eta^{p-1} + \ldots + a_p(\xi)$$

[3] I prodotti scalari e la norma $\|\cdot\|$ vanno intesi nel senso di L^2; quando ciò non darà luogo ad equivoci, verrà omessa l'indicazione dell'insieme di integrazione.

si abbia $p \leq 3$ e anche

$$(1.2) \qquad p = 3 \Rightarrow Im\, a_0 > 0; \qquad p = 2 \Rightarrow Re\, a_1(\xi) \geq 0\ [4].$$

Infine esista un numero positivo N tale che, per $|\xi| > N$ valgano le diseguaglianze (cfr. PEETRE [13] pag. 350).

$$(1.3) \qquad \frac{1}{K}(|\eta|^p + |a_p(\xi)|) \leq |\mathcal{S}^0(\xi, \eta)| \leq K(|\eta|^p + |a_p(\xi)|)$$

K essendo una costante indipendente da ξ.

Dalla (1.3) si deduce che tutte le derivate pure rispetto a y che figurano in $\mathcal{S}^0$ sono operatori più deboli di $\mathcal{S}^0$; ciò non avviene necessariamente per le rimanenti derivate [5].

1.2 - Posizione del problema ed enunciato dei risultati.

In virtù dell'ipoellitticità del polinomio $\mathcal{S}^0(\xi, \eta)$ si dimostra (cfr. SCHECHTER [15]) che esiste una costante positiva H, indipendente da ξ, tale che, indicata con $\alpha^0(\xi)$ la generica radice dell'equazione $\mathcal{S}^0(\xi, \eta) = 0$, si ha

$$|Im\, \alpha^0(\xi)| \geq H, \quad |\xi| > N;$$

è dunque $\mathcal{S}^0(\xi, \eta) \neq 0$ per ξ, η reali e $|\xi| > N$.

Questo fatto, insieme con la (1.1), ci consente di affermare (cfr. lemma [1.2] di [2]) che l'equazione in η, $\mathcal{S}^0(\xi, \eta) = 0$, ha, per ogni ξ per cui $|\xi| > N$, esattamente r radici con parte immaginaria positiva, dove r è il numero così definito:

$$r = \begin{cases} \dfrac{p}{2} & \text{se } p \text{ è pari} \\ \dfrac{p+1}{2} & \text{se } p \text{ è dispari e } Im\, a_0 > 0 \\ \dfrac{p-1}{2} & \text{se } p \text{ è dispari e } Im\, a_0 < 0. \end{cases}$$

[4] Le ipotesi (1.2) sono qui assunte unicamente per evitare complicazioni formali nelle dimostrazioni.

[5] Ad esempio, l'operatore $\mathcal{S}^0 = \partial_y^4 + (\partial_{x_1'} + \partial_{x_2'})^2 + i\partial_{x_1'}$ verifica la (1.3) ma chiaramente $\partial_{x_1'}^2$ e $\partial_{x_2'}^2$ non sono operatori più deboli di $\mathcal{S}^0$.

Sia ora $f(x')$ una funzione di classe $L^2(\Omega)$; posto $\Sigma = D \cap \bar{E}$, consideriamo il problema al contorno del tipo di Dirichlet

$$(1.4)\quad \begin{cases} L\,u = f \\ D_\nu^j\, u\,|_{\partial E - \Sigma} = 0 \;\; j = 0, 1; \quad D_y^j\, u\,|_{\partial D - \Sigma} = 0 \;\; j = 0, 1, \ldots r-1, r \neq 0 \end{cases}$$

dove ν è la normale esterna a $\partial\,\Omega$. In tale problema gli operatori di frontiera verificano la condizione complementare rispetto all'operatore L in ogni punto di $\partial\,\Omega - \Sigma$; ciò è evidente per quanto concerne i punti di $\partial\,E - \Sigma$, mentre per quanto concerne i punti di $\partial\,D - \Sigma$, discende dall'osservazione di PEETRE [13] a pag. 351.

È evidente poi che il problema aggiunto del problema (1.4) ha la seguente formulazione:

$$(1.4)^*\quad \begin{cases} L^*\,v = g \\ D_\nu^j\, v\,|_{\partial E - \Sigma} = 0 \quad j = 0, 1; \quad D_y^j\, v\,|_{\partial D - \Sigma} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 0, 1, \ldots p - r - 1, p - r \neq 0 \end{cases}$$

$g(x')$ essendo una funzione di $L^2(\Omega)$ e L^* l'aggiunto formale di L; tale operatore ha senso in virtù dell'ipotesi a).

Al fine di porre il problema (1.4) in forma debole, denotiamo con $\mathcal{H}_o(\Omega)$ la classe delle funzioni $v \in C_o^\infty(\bar{\Omega})$ verificanti le condizioni al contorno del problema $(1.4)^*$, le quali risultino nulle in un intorno su $\bar{\Omega}$ di $\Sigma \cap \partial\,\Omega$.

Chiameremo soluzione debole del problema (1.4) una funzione u, di classe $L^2(\Omega)$, per la quale si abbia

$$(u, L^* v)_\Omega = (f, v)_\Omega \qquad \forall\, v \in \mathcal{H}_o(\Omega),$$

e diremo che una distribuzione $u \in L^2(\Omega)$, la quale risulti soluzione debole del problema (1.4), è una soluzione quasi forte dello stesso problema se risulta

$$u \in H^4_{loc}(E - \Sigma)$$

$$R(D)\,u \in L^2_{loc}(D - \Sigma),$$

R(D) essendo un qualunque operatore più debole di $L(x', D)$ in $D - \Sigma$. Orbene, proveremo il seguente

TEOREMA [1.1] — *Nelle ipotesi* a), b), c) *e* d) *il problema* (1.4) *ammette una soluzione debole u la quale è anche una soluzione quasi forte.*

§ 2. PROBLEMI DIFFERENZIALI NEL SEMISPAZIO.

2.1 - Preliminari di carattere algebrico.

Consideriamo il polinomio $\mathcal{P}^0(\xi, \eta)$ introdotto nel § 1. Posto, con $c = c(\xi) = |a_p(\xi)|^{1/p}$,

$$\dot{\mathcal{P}}^0(\xi, \eta) = a_0 \eta^p + \frac{a_1(\xi)}{c(\xi)} \eta^{p-1} + \ldots + \frac{a_{p-1}(\xi)}{c^{p-1}(\xi)} \eta + \frac{a^p(\xi)}{c^p(\xi)}$$

con che

$$\mathcal{P}^0(\xi, c(\xi)\eta) = c^p(\xi) \dot{\mathcal{P}}^0(\xi, \eta)$$

$$\alpha^0(\xi) = c(\xi) \dot{\alpha}^0(\xi)$$

dove con $\dot{\alpha}^0(\xi)$ indichiamo la generica radice di $\dot{\mathcal{P}}^0(\xi, \eta)$, si vede facilmente che in virtù della (1.3) si ha

$$\frac{|a_i(\xi)|}{c^i(\xi)} \leq K_1, \qquad |\xi| > N$$

e quindi con un ragionamento analogo a quello svolto nel lemma [2.2] di [6]

$$K_2 \leq |Im\, \dot{\alpha}^0(\xi)| \leq K_3, \qquad |\xi| > N \tag{2.1}$$

con K_i = cost. indipendente da ξ.

Detto ora ε un numero reale positivo minore di uno e posto $\sigma = 4 - p$, consideriamo il polinomio

$$\mathcal{P}(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^\sigma \eta^4 + \mathcal{P}^0(\xi, \eta).$$

Dalla (1.1) si trae subito

$$|\mathcal{P}| \geq |\mathcal{P}^0| \qquad \forall (\xi, \eta) \in R^{n+1}$$

per cui si ha che anche il polinomio $\mathcal{P}$, al pari di $\mathcal{P}^0$, è sprovvisto di radici reali per $|\xi| > N$, e inoltre, sempre per il lemma [1.2] di [2], che $\mathcal{P}$ ha, qualunque sia ε, due radici con parte immaginaria positiva per $|\xi| > N$.

Posto:

$$\dot{\mathcal{P}}(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^\sigma c^\sigma \eta^4 + \dot{\mathcal{P}}^0(\xi, \eta)$$

con che:

$$\mathfrak{F}(\varepsilon, \xi, c(\xi)\eta) = c^p(\xi)\,\dot{\mathfrak{F}}(\varepsilon, \xi, \eta)$$

$$\alpha(\varepsilon, \xi) = c(\xi)\,\dot{\alpha}(\varepsilon, \xi) \tag{2.2}$$

dove con $\dot{\alpha}(\varepsilon, \xi)$ e $\alpha(\varepsilon, \xi)$ indichiamo le radici di $\mathfrak{F}$ e $\dot{\mathfrak{F}}$ rispettivamente, si dimostra, con una tecnica analoga a quella usata in [6] il seguente

LEMMA [2.1] — *Esiste un numero positivo* δ *tale che per* $\varepsilon\, c(\xi) < \delta$ *e* $|\xi| > N$ *si ha, per* p *radici di* $\dot{\mathfrak{F}}$, *uniformemente rispetto a* ε *ed a* ξ:

$$\dot{\alpha}(\varepsilon, \xi) = \dot{\alpha}^0(\xi) + 0((\varepsilon c)^\sigma) \tag{2.3}$$

mentre per le rimanenti $4 - p$ *radici si ha, uniformemente rispetto a* ε *ed a* ξ:

$$\dot{\alpha}(\varepsilon, \xi) = \frac{\sqrt[4-p]{-a_0}}{\varepsilon c} + 0(1). \tag{2.4}$$

Da tale lemma si trae che:

per $\varepsilon c < \delta$ e $|\xi| > N$ tra le radici $\dot{\alpha}$ del tipo (2.3), r hanno parte immaginaria positiva (infatti di tale proprietà godono le funzioni $\dot{\alpha}^0(\xi)$) e quindi fra le radici $\dot{\alpha}$ del tipo (2.4), $2 - r$ hanno parte immaginaria positiva per $\varepsilon c < \delta$ e $|\xi| > N$.

D'ora in poi denoteremo con α_1 e α_2 le radici di $\mathfrak{F}$ con parte immaginaria positiva, supponendo, qualora sia $r > 0$, che α_1 verifichi la (2.3). Analogamente denoteremo con α_3 e α_4 le radici di $\mathfrak{F}$ con parte immaginaria negativa supponendo, qualora sia $p - r > 0$ che α_3 verifichi la (2.3).

Introduciamo ora alcune notazioni.

Poniamo:

$$\mathfrak{F}_+(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^{2-r}(\eta - \alpha_1(\varepsilon, \xi))(\eta - \alpha_2(\varepsilon, \xi))$$

$$\mathfrak{F}_-(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^{2-p+r}(\eta - \alpha_3(\varepsilon, \xi))(\eta - \alpha_4(\varepsilon, \xi))$$

e assegniamo poi i due polinomi in η, $Q_1(\varepsilon, \xi, \eta)$ e $Q_2(\varepsilon, \xi, \eta)$ così definiti:

$$Q_i(\varepsilon, \xi, \eta) = \begin{cases} c^{p-i}\eta^{i-1} & i = 1, \ldots, r\ (r > 0) \\ \varepsilon^{i-r}\eta^{(p-r)+i-1} & i = r+1, \ldots, 2\ (r < 2); \end{cases}$$

si verifica immediatamente che, per tali polinomi, vale la relazione

$$Q_i(\varepsilon, \xi, c(\xi)\eta) = c^{p-1}(\xi)\dot{Q}_i(\varepsilon, \xi, \eta)$$

$\dot{Q}_i$ essendo polinomi in η aventi coefficienti limitati per $\varepsilon c < \delta$. Poniamo infine

$$(2.5) \qquad \frac{Q_j(\varepsilon, \xi, \eta)}{\mathfrak{F}(\varepsilon, \xi, \eta)} = \frac{Q_j^+(\varepsilon, \xi, \eta)}{\mathfrak{F}_+(\varepsilon, \xi, \eta)} + \frac{Q_j^-(\varepsilon, \xi, \eta)}{\mathfrak{F}_-(\varepsilon, \xi, \eta)} \quad j = 1, 2$$

con $Q_j^+(\varepsilon, \xi, \eta)$ e $Q_j^-(\varepsilon, \xi, \eta)$ polinomi di primo grado in η e consideriamo le matrici hermitiane

$$A(\varepsilon, \xi) = \| \alpha_{ij}(\varepsilon, \xi) \| \qquad B(\varepsilon, \xi) = \| \beta_{ij}(\varepsilon, \xi) \|$$

dove

$$\alpha_{ij}(\varepsilon, \xi) = \int_R \frac{Q_i^+(\varepsilon, \xi, \eta)\,\overline{Q_j^+(\varepsilon, \xi, \eta)}}{|\mathfrak{F}_+(\varepsilon, \xi, \eta)|^2}\, d\eta$$

$$\beta_{ij}(\varepsilon, \xi) = \int_R \frac{Q_i^-(\varepsilon, \xi, \eta)\,\overline{Q_j^-(\varepsilon, \xi, \eta)}}{|\mathfrak{F}_-(\varepsilon, \xi, \eta)|^2}\, d\eta\,.$$

Ci proponiamo di dimostrare il seguente

LEMMA [2.2] — *Per* $\varepsilon c < \delta$ *e* $|\xi| > N$ *si ha, qualunque sia* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in C^2$

$$(2.6) \qquad \sum_{i,j}^{1,2} \tau_{ij}(\varepsilon, \xi)\lambda_i \bar{\lambda}_j \leq K_4 \sum_{i,j}^{1,2} \beta_{ij}(\varepsilon, \xi)\lambda_i \bar{\lambda}_j$$

dove $\tau_{ij}(\varepsilon, \xi)$ *sono gli elementi della matrice* $B A^{-1} B$ *e* K_4 *è una costante indipendente da* ξ *e da* ε.

A tale scopo poniamo

$$\mathfrak{F}_{+,0}(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^{2-r}; \qquad \mathfrak{F}_{+,1}(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^{2-r}(\eta - (\alpha_1 + \alpha_2))$$

$$\mathfrak{F}_{-,0}(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^{2-p+r}; \qquad \mathfrak{F}_{-,1}(\varepsilon, \xi, \eta) = \varepsilon^{2-p+r}(\eta - (\alpha_3 + \alpha_4))$$

$$(2.7) \qquad Q_j^+(\varepsilon, \xi, \eta) = Q_{j0}^+(\varepsilon, \xi) + Q_{j1}^+(\varepsilon, \xi)\eta \qquad j = 1,2$$

e osserviamo che utilizzando la (1.6) di [1] si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\mathfrak{F}_{+,1-h}(\varepsilon,\xi,\eta)\,Q_j^{+}(\varepsilon,\xi,\eta)\,d\eta}{\mathfrak{F}_{+}(\varepsilon,\xi,\eta)}=Q_{jh}^{+}(\varepsilon,\xi)\qquad \begin{matrix} j=1,2\\ h=0,1\end{matrix}$$

dove γ indica una curva semplice e chiusa contenuta in $Im\,\eta>0$ e contenente le radici α_1 e α_2.

Utilizzando la (2.5) si vede che è anche

$$(2.8)\qquad Q_{jh}^{+}(\varepsilon,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\mathfrak{F}_{+,1-h}(\varepsilon,\xi,\eta)\,Q_j(\varepsilon,\xi,\eta)\,d\eta}{\mathfrak{F}(\varepsilon,\xi,\eta)}\qquad \begin{matrix} j=1,2\\ h=0,1\end{matrix}$$

Svilupperemo il seguito della dimostrazione limitandoci al caso in cui è $p=2$, essendo lo schema identico nei casi rimanenti [6].

Calcolando gli integrali che figurano nella (2.8) mediante il metodo dei residui, tenendo conto delle posizioni precedenti e della (2.2), si ottiene

$$Q_{1h}^{+}(\varepsilon,\xi)=\frac{1}{c^h\,\varepsilon\,c\,(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2)}\left(\frac{\delta_{1,h}-\delta_{1,h+1}\,\dot\alpha_2}{(\dot\alpha_1-\dot\alpha_3)(\dot\alpha_1-\dot\alpha_4)}+\frac{\delta_{1,h+1}\,\dot\alpha_1-\delta_{1,h}}{(\dot\alpha_2-\dot\alpha_3)(\dot\alpha_2-\dot\alpha_4)}\right)$$

$$Q_{2h}^{+}(\varepsilon,\xi)=\frac{1}{c^h(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2)}\left(\frac{\delta_{2,h+1}\,\dot\alpha_1^2-\delta_{1,h+1}\,\dot\alpha_1^2\,\dot\alpha_2}{(\dot\alpha_1-\dot\alpha_3)(\dot\alpha_1-\dot\alpha_4)}+\frac{\delta_{1,h+1}\,\dot\alpha_1\,\dot\alpha_2^2-\delta_{2,h+1}\,\dot\alpha_2^2}{(\dot\alpha_2-\dot\alpha_3)(\dot\alpha_2-\dot\alpha_4)}\right)$$

da cui si ricava

$$(2.9)\qquad \det\|Q_{ij}^{+}(\varepsilon,\xi)\|=\frac{1}{c\cdot\varepsilon\,c}\,\frac{\dot\alpha_1+\dot\alpha_2}{(\dot\alpha_1-\dot\alpha_3)(\dot\alpha_1-\dot\alpha_4)(\dot\alpha_2-\dot\alpha_3)(\dot\alpha_2-\dot\alpha_4)}$$

Osserviamo ora che dalla (2.1) e dal lemma [2.1] segue che, per $\varepsilon\,c<\delta$ e $|\xi|>N$ valgono le maggiorazioni

$$(2.10)\qquad \begin{matrix} |\dot\alpha_i|\le K\quad i=1,3\,;\quad |\dot\alpha_i|\le K(\varepsilon\,c)^{-1} & i=2,4\\ \dfrac{1}{|Im\,\dot\alpha_i|}\le\dfrac{1}{K}\quad i=1,3\,;\qquad \dfrac{1}{|Im\,\dot\alpha_i|}\le\dfrac{1}{K}\,\varepsilon\,c & i=2,4\\ \dfrac{1}{|\dot\alpha_1-\dot\alpha_3|}\le\dfrac{1}{K}\,;\qquad \dfrac{1}{|\dot\alpha_i-\dot\alpha_j|}\le\dfrac{1}{K}\,\varepsilon\,c & (i,j)\ne(1,3).\end{matrix}$$

[6] Il caso $p=3$, $r=2$ è già stato trattato in [6]; nessuna modifica è da apportare a quanto lì esposto nel § 2, salvo tener presente la diversa accezione della funzione $c=c(\xi)$.

Applichiamo poi un risultato riportato da M. PICONE [14] per cui

$$\det A(\varepsilon, \xi) = \frac{1}{2!} \int_{R^2} \frac{|\det \| Q_i^+(\varepsilon, \xi, \rho_j) \| |^2 \, d\rho_1 \, d\rho_2}{|\mathcal{S}_+(\varepsilon, \xi, \rho_1)\, \mathcal{S}_+(\varepsilon, \xi, \rho_2)|^2}$$

$$= \frac{1}{2!} |\det \| Q_{ij}^+(\varepsilon, \xi) \| |^2 \int_{R^2} \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 \, d\rho_1 \, d\rho_2}{|\mathcal{S}_+(\varepsilon, \xi, \rho_1)\, \mathcal{S}_+(\varepsilon, \xi, \rho_2)|^2}$$

Dalla (2.9), calcolando l'integrale che figura nell'ultimo membro della precedente formula e tenendo conto delle (2.10), ricaviamo allora, per $\varepsilon c < \delta$ e $|\xi| > N$

$$\det A(\varepsilon, \xi) \geq K \frac{\varepsilon}{c}. \tag{2.11}$$

Vogliamo ora ottenere una valutazione per gli elementi della matrice $A^{-1}(\varepsilon, \xi)$, inversa della A; a tale scopo indichiamo con σ_{lt} il minore complementare di α_{lt} nella matrice A e con α^{lt} gli elementi di A^{-1}.

È facile convincersi, tenendo conto della (2.7) e delle (2.10) che si ha, per $\varepsilon c < \delta$ e $|\xi| > N$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{c} 0(\varepsilon c); \qquad \sigma_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{c} 0(\varepsilon c) \qquad \sigma_{22} = \frac{1}{c} 0(1).$$

Essendo

$$\alpha^{lt} = (-1)^{l+t} \frac{\sigma_{lt}}{\det A}$$

in virtù della (2.11) otteniamo per $\varepsilon c < \delta$ e $|\xi| > N$:

$$\alpha^{11} = c\, 0(1); \qquad \alpha^{12} = \overline{\alpha^{21}} = c\, 0(1)$$

$$\alpha^{22} = c\, 0 \frac{1}{\varepsilon c}. \tag{2.12}$$

Valutiamo ora i $\beta_{ij}(\varepsilon, \xi)$.
Posto

$$Q_j^-(\varepsilon, \xi, \eta) = Q_{j0}^-(\varepsilon, \xi) + Q_{j1}^-(\varepsilon, \xi)\, \eta \qquad j = 1, 2 \tag{2.13}$$

come precedentemente si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\mathcal{S}_{-,1-h}(\varepsilon,\xi,\eta)\,Q_j^-(\varepsilon,\xi,\eta)}{\mathcal{S}_-(\varepsilon,\xi,\eta)}\,d\eta = Q_{jh}^-(\varepsilon,\xi) \qquad \begin{matrix} j=1,2 \\ h=0,1 \end{matrix}$$

dove ora γ indica una curva semplice e chiusa in $Im\,\eta<0$ e contenente le radici α_3 e α_4. Si ha allora, per la (2.5)

$$Q_{jh}^-(\varepsilon,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\mathcal{S}_{-,1-h}(\varepsilon,\xi,\eta)\,Q_j(\varepsilon,\xi,\eta)}{\mathcal{S}(\varepsilon,\xi,\eta)}\,d\eta$$

e quindi, calcolando tali integrali e tenendo conto delle (2.10) per $\varepsilon c<\delta$ e $|\xi|>N$:

$$Q_{10}^- = 0(1) \;; \qquad Q_{11}^- = \frac{1}{c}\,0(\varepsilon c)$$

$$Q_{20}^- = 0(\varepsilon c) \;; \qquad Q_{21}^- = \frac{1}{c}\,0(\varepsilon c).$$

Da tali relazioni, tenendo conto della (2.13), delle (2.10) e della definizione dei β_{ij} si ricava:

$$(2.14) \qquad \beta_{11} = \frac{1}{c}\,0(1)\;; \qquad \beta_{12}=\beta_{21}=\frac{1}{c}\,0(\varepsilon c) \qquad \beta_{22}=\frac{1}{c}\,0(\varepsilon c).$$

Essendo ora τ_{ij}, gli elementi della matrice $B\,A^{-1}\,B$, dati da

$$\tau_{ij}=\sum_{l,t}^{1,2}\beta_{it}\,\alpha^{tl}\,\beta_{lj}$$

si ottiene per le (2.12) e (2.14)

$$\tau_{ij}=\frac{1}{c}\,\dot{\tau}_{ij}$$

con $\dot{\tau}_{ij}=0(1)$ per $\varepsilon c<\delta$ e $|\xi|>N$.

A questo punto, ragionando come nella dimostrazione del lemma 3 di MATARASSO [11], si ottiene il lemma [2.2].

2.2 - Maggiorazioni a priori per soluzioni di problemi con piccolo parametro.

Consideriamo l'operatore a coefficienti costanti e reali

$$A^o(\varepsilon, D_x, D_y) = P^o(D_x, D_y) + \varepsilon^\sigma D_y^4 + \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}^4,$$

dove si è posto $P^o(D_x, D_y) = \mathcal{P}^o\left(\frac{1}{i} D_x, \frac{1}{i} D_y\right)$; esso è, per ogni $\varepsilon > 0$, propriamente ellittico.

Posto $R_+^{n+1} = \{(x, y) : y > 0\}$, indichiamo con $\mathfrak{V}$ l'insieme delle funzioni reali v di classe C^∞ a supporto compatto in R_+^{n+1} per le quali si abbia, con $j = 1, 2$

$$\begin{cases} D_y^{j-1} v|_{y=0} = 0 & j = 1, \ldots, r \\ D_y^{(p-r)+j-1} v|_{y=0} = 0 & j = r+1, \ldots, 2. \end{cases}$$

Sussiste il seguente

TEOREMA [2.1] — *Risulta,* $\forall v$ *reale di classe* $C_o^\infty(R^{n+1}) \cup \mathfrak{V}$:

$$\varepsilon^\sigma \| D_y^4 v \| + \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} \| D_{x_i}^4 v \| + \| R(D_x, D_y) v \| \leq K(\| A^o v \| + \| v \|)$$

K *essendo una costante indipendente da* ε *e* $R(\xi, \eta)$ *un qualunque polinomio più debole di* $\mathcal{P}^o(\xi, \eta)$.

Dim. — Tale teorema, grazie al lemma [2.2], si dimostra con procedimenti analoghi a quelli impiegati nella dimostrazione del teorema [2.1] di [6].

§ 3. IL PROBLEMA APPROSSIMANTE E FORMULE DI MAGGIORAZIONE.

3.1 - Lemma preliminare.

LEMMA [3.1] — *Se* $P(D_x, D_y)$ *è un operatore ipoellittico, tale che* $P(\xi, \eta)$ *verifica la* (1.3), *esiste un numero positivo* $\nu_o < 1$ *tale che, se* $\nu_o \leq \nu \leq 1$, $\forall v(x, y) \in C_o^4(R^{n+1}) \cup \mathfrak{V}$, *risulta*:

$$\| P^{(\alpha)} v \| \leq K(\| P v \|^\nu \| v \|^{1-\nu} + \| v \|) \tag{3.1}$$

K *dipendendo soltanto da* ν.

Dim. — Se $v \in C_0^4(R^{n+1})$, la (3.1) discende immediatamente dalla (3.5) di HÖRMANDER [8]. Per dimostrare l'asserto nel caso generale basta allora far vedere che è possibile costruire un prolungamento v_1 di v a R^{n+1}, v_1 di classe $C_0^4(R^{n+1})$ tale che

$$\| v_1 \|_{R^{n+1}} \leq K \| v \|_{R_+^{n+1}} \tag{3.2}$$

$$\| P v_1 \|_{R^{n+1}} \leq K (\| P v \|_{R_+^{n+1}} + \| v \|_{R_+^{n+1}}). \tag{3.3}$$

A tale scopo poniamo

$$v_1(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & y \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{4} \gamma_j v\left(x, -\frac{y}{j+1}\right) & y < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

con $\sum_{j=0}^{4} \left(-\frac{1}{j+1} \right)^q \gamma_j = 1 \qquad q = 0, 1, \ldots, 4.$

È allora verificata la (3.2). Osserviamo ora che si ha

$$\| a_p(D_x) v_1 \|_{R^{n+1}} \leq K \| a_p(D_x) v \|_{R_+^{n+1}} . \tag{3.5}$$

Infatti dalle (3.4), indicando con $\sim$ la trasformazione di Fourier rispetto alla variabile x, otteniamo:

$$\| a_p(D_x) v_1 \|^2_{R^{n+1}} = \| a_p(\xi) \tilde{v}_1(\xi, y) \|^2_{R^{n+1}} = \int_{R_+} dy \int_{R^n} | a_p(\xi) |^2 | \tilde{v}(\xi, y) |^2 d\xi$$

$$+ \int_{R_-} dy \int_{R^n} | a_p(\xi) |^2 \left| \sum_{j=0}^{4} \gamma_j \tilde{v}\left(\xi, -\frac{y}{j+1}\right) \right|^2 d\xi$$

da cui con ovvi cambiamenti di variabile di integrazione

$$\| a_p(D_x) v_1 \|^2_{R^{n+1}} \leq K \| a_p(\xi) \tilde{v}(\xi, y) \|^2_{R_+^{n+1}} = K \| a_p(D_x) v(x, y) \|^2_{R_+^{n+1}}$$

e quindi la (3.5).

D'altra parte, per la (1.3), indicando con $\wedge$ la trasformazione di Fourier in R^{n+1}

$$\| P(D_x, D_y) v_1 \|_{R^{n+1}} \leq K(\| (|\eta|^p + |a_p(\xi)|) \hat{v}_1 \|_{R^{n+1}} + \| \hat{v}_1 \|_{R^{n+1}})$$
$$= K(\| (D_y^p + |a_p(\xi)|) \tilde{v}_1 \|_{R^{n+1}} + \| v_1 \|_{R^{n+1}})$$
$$\leq K(\| D_y^p v_1 \|_{R^{n+1}} + \| a_p(D_x) v_1 \|_{R^{n+1}} + \| v_1 \|_{R^{n+1}})$$

da cui, per la (3.4) e la (3.5) si ricava

$$\| P v_1 \|_{R^{n+1}} \leq K(\| D_y^p v \|_{R_+^{n+1}} + \| a_p(D_x) v \|_{R_+^{n+1}} + \| v \|_{R_+^{n+1}}).$$

Dal teorema 2.1 di [15] segue allora la (3.3).

3.2 - Un ulteriore lemma.

Poiché ciò non è restrittivo, supponiamo che l'origine 0 appartenga a D. Indichiamo con $\mathfrak{L}$ lo spazio vettoriale degli operatori differenziali a coefficienti costanti più deboli di $L(0, D)$; tale spazio è di dimensione finita [7].

Sia $L_1(D), \ldots, L_s(D)$ una base per $\mathfrak{L}$, che possiamo supporre costituita da operatori ipoellittici ed egualmente forti [8]. Poiché gli operatori $L(x_0', D)$, $\forall x_0'$ fissato in D, e $L(0, D)$ sono egualmente forti a causa dell'ipotesi di formale ipoellitticità, è chiaro che $L_1(D), \ldots, L_s(D)$ si può assumere come base anche per lo spazio vettoriale degli operatori a coefficienti costanti più deboli di $L(x_0', D)$. Da ciò si ricava il seguente lemma (cfr. la (7.1.1) di HÖRMANDER [7]):

LEMMA [3.2] — *Se x_0' è un punto qualunque fissato in* D, *si ha, in* D:

$$L(x', D) = L(x_0', D) + \sum_{j=1}^{s} c_j(x') L_j(D) \tag{3.6}$$

con $c_j(x')$ funzioni (ovviamente dipendenti da x_0') continue, nulle in x_0'.

[7] Cfr. HÖRMANDER [8].

[8] È facile constatare che se R (D) è un operatore più debole di un operatore ipoellittico P (D), gli operatori P e $cR + P$ con c costante di modulo sufficientemente piccolo, sono egualmente forti; da ciò segue che $cR + P$ è ipoellittico (cfr. anche MALGRANGE [9].

Possiamo poi applicare agli $L_j(D)$ il lemma [3.1] in quanto essi, essendo per costruzione egualmente forti a $L(0, D)$, verificano la (1.3); ricaviamo pertanto, per $j = 1, \ldots, s$:

$$\| L_j^{(\alpha)}(D) v \| \leq K (\| L_j(D) v \|^{\nu} \| v \|^{1-\nu} + \| v \|) \tag{3.7}$$

$\nu < 1$ essendo non inferiore ad un conveniente numero ν_0.

Detto ora G un compatto di $D - \Sigma$, porremo, se $v \in H^4(G)$

$$[v]_G = \varepsilon^{\sigma} \| D_y^4 v \|_G + \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} \| D_{x_i'}^4 v \|_G + \sum_{j=1}^{s} \| L_j(D) v \|_G \tag{3.8}$$

omettendo l'indicazione dell'insieme di integrazione quando ciò non darà luogo ad equivoci.

Conviene osservare che, in virtù di quanto sopra detto, se $R(D)$ è un qualunque operatore appartenente allo spazio $\mathfrak{L}$, per esso si ha

$$\| R(D) v \|_G \leq K [v]_G . \tag{3.9}$$

3.3 - Il problema approssimante e formule di maggiorazione.

Denotata con $\rho(x')$ la distanza del generico punto x' da $S = \partial E - \Sigma$, indichiamo con $W_{2,\Omega}^4$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che risulta

$$\rho^{|\gamma|-2} D^{\gamma} u \in L^2(\Omega) \qquad \forall \gamma : |\gamma| \leq 4;$$

tale spazio sarà munito della norma

$$\| u \|_{W_{2,\Omega}^4} = \sum_{|\gamma| \leq 4} \| \rho^{|\gamma|-2} D^{\gamma} u \|_{\Omega} .$$

Indicata poi con $\mathfrak{M}$ la classe delle funzioni $u \in W_{2,\Omega}^4$ verificanti le condizioni al contorno ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} & D_y^{j-1} u \,|_{\partial\Omega - \bar{S}} = 0 \qquad && j = 1, \ldots, r \\ & D_y^{(p-r)+j-1} u \,|_{\partial\Omega - \bar{S}} = 0 \qquad && j = r+1, \ldots, 2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

sussiste il seguente lemma (cfr. lemma [3.3] di [2]):

LEMMA [3.3] — *Ogni funzione $u \in \mathfrak{M}$ è approssimabile, nella norma $\| u \|_{W_{2,\Omega}^4}$ con funzioni di classe $C_0^{\infty}(\bar{\Omega} - S) \cap \mathfrak{M}$.*

Ciò posto consideriamo l'operatore a coefficienti singolari

$$\Delta(x', D) = \frac{\varepsilon}{\rho^4} + \varepsilon^{\sigma} D_y^4 + \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} D_{x_i'}^4$$

e il problema (approssimante)

$$\begin{cases} A u \equiv \Delta u + L u = f \\ u \in \mathfrak{A} \end{cases} \qquad f \in L^2(\Omega) \tag{3.11}$$

Grazie all'ipotesi b), ragionando come in [2], si dimostra che tale problema ammette un'unica soluzione u_ε per la quale si ha

$$\| u_\varepsilon \|_\Omega + \sqrt{\varepsilon} \| \rho^{-2} u_\varepsilon \|_\Omega + \sqrt{\varepsilon^{\sigma}} \| D_y^2 u_\varepsilon \|_\Omega + \sqrt{\varepsilon^{1/4}} \sum_{i=1}^{n} \| D_{x_i'}^2 u_\varepsilon \|_\Omega \leq K \| f \|_\Omega . \tag{3.12}$$

Utilizzeremo ora il risultato del teorema [2.1] al fine di ricavare limitazioni per la funzione u_ε e le sue derivate. A tal fine denotiamo con ζ una funzione di classe $C_0^\infty (D - \Sigma)$; per le considerazioni che faremo non è restrittivo supporre il diametro d del suo supporto sufficientemente piccolo. Applichiamo allora il teorema [2.1] alla funzione ζu_ε: ciò è lecito poiché a causa del lemma [3.3] la funzione u_ε è approssimabile nello spazio W_2^4 con funzioni di classe C^∞ verificanti le condizioni (3.10). Detto x_0' un punto del supporto di ζ, dal teorema [2.1] ricaviamo

$$[\zeta u_\varepsilon] \leq K (\| A^0 (\zeta u_\varepsilon) \| + \| \zeta u_\varepsilon \|). \tag{3.13}$$

Orbene risulta

$$\| (A - A^0)(\zeta u_\varepsilon) \| \leq \| (L(x', D) - L(x_0', D))(\zeta u_\varepsilon) \| + K \| \zeta u_\varepsilon \|;$$

dal lemma [3.2] d'altra parte otteniamo

$$\| (L(x', D) - L(x_0', D))(\zeta u_\varepsilon) \| \leq K d \sum_{i=1}^{s} \| L_i (D)(\zeta u_\varepsilon) \|.$$

Pertanto dalla (3.13) e dal teorema [2.1]:

$$[\zeta u_\varepsilon] \leq K (\| A (\zeta u_\varepsilon) \| + \| \zeta u_\varepsilon \|); \tag{3.14}$$

ma essendo, per la formula di Leibniz (cfr. la (1.4.12) di [7]),

$$\| A(\zeta u_\varepsilon) - \zeta A u_\varepsilon \| \leq K \Bigg(\varepsilon^\sigma \sum_{\substack{h+k=4 \\ h \neq 0}} \| D_y^h \zeta D_y^k u_\varepsilon \|$$

$$+ \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{h+k=4 \\ h \neq 0}} \| D_{x_i'}^h \zeta D_{x_i'}^k u_\varepsilon \| + \sum_{|\alpha| \geq 1} \| D^\alpha \zeta \cdot L^{(\alpha)}(x_0', D) u_\varepsilon \|$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha| \geq 1} \| D^\alpha \zeta \cdot L_j^{(\alpha)}(D) u_\varepsilon \| \Bigg)$$

dalla (3.14) segue

$$[\zeta u_\varepsilon] \leq K \Bigg(\| \zeta A u_\varepsilon \| + \varepsilon^\sigma \sum_{\substack{h+k=4 \\ h \neq 0}} \| D_y^h \zeta D_y^k u_\varepsilon \| \tag{3.15}$$

$$+ \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{h+k=4 \\ h \neq 0}} \| D_{x_i'}^h \zeta D_{x_i'}^k u_\varepsilon \| + \sum_{|\alpha| \geq 1} \| D^\alpha \zeta \cdot L^{(\alpha)}(x_0', D) u_\varepsilon \|$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha| \geq 1} \| D^\alpha \zeta \cdot L_j^{(\alpha)}(D) u_\varepsilon \| + \| \zeta u_\varepsilon \| \Bigg).$$

Dimostriamo ora che vale il seguente

TEOREMA [3.1] — *Detto* G *un compatto di* $D - \Sigma$, *vale la maggiorazione*

$$[u_\varepsilon]_G \leq K \| f \|_\Omega$$

K *essendo una costante indipendente da* ε.

Dim. — Possiamo pensare che G sia una sfera o semisfera (con base sull'iperpiano $y = 0$) di centro x_0' e raggio μ; indicheremo poi con G_τ una sfera o semisfera di raggio τ. Detti τ_1, τ_2, τ_3, $(\tau_1 < \tau_2 < \tau_3,\ \tau_3 - \tau_2 - \tau_2 - \tau_1 < 1)$, tre numeri positivi minori di μ, siano G_{τ_i} le sfere o semisfere concentriche con G.

Sia $\zeta'(x')$ una funzione per cui si abbia

$$\zeta'(x') = 1 \quad \text{in} \quad G_{\tau_2}, \qquad \operatorname{supp} \zeta' \subseteq \overset{\circ}{G}_{\tau_3}$$

$$| D^\gamma \zeta' | \leq c_\gamma' (\tau_3 - \tau_1)^{-|\gamma|}, \tag{3.16}$$

e supponiamo inoltre che la funzione ζ prima introdotta sia tale che

$$\zeta(x') = 1 \quad \text{in} \quad G_{\tau_1}, \qquad \operatorname{supp} \zeta(x') \subseteq \overset{\circ}{G}_{\tau_2}$$

$$| D^\gamma \zeta | \leq c_\gamma (\tau_3 - \tau_1)^{-|\gamma|}. \tag{3.17}$$

Dalla (3.15), tenendo conto delle (3.16) e (3.17), otteniamo

$$[\zeta u_\varepsilon] \leq K \left(\| f \|_\Omega + \frac{1}{(\tau_3 - \tau_1)^4} \left(\varepsilon^\sigma \sum_{k=0}^{3} \| D_y^k (\xi' u_\varepsilon) \| \right.\right.$$

$$+ \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{3} \| D_{x_i'}^k (\zeta' u_\varepsilon) \| + \sum_{|\alpha| \geq 1} \| L^{(\alpha)} (x_0', D) (\zeta' u_\varepsilon) \|$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{s} \sum_{|\alpha| \geq 1} \| L_j^{(\alpha)} (D) (\zeta' u_\varepsilon) \| \right) \right)$$

da cui, per la diseguaglianza di Gagliardo-Nirenberg, applicando il lemma [3.1] e tenendo conto delle (3.7) e (3.9), segue

$$[\zeta u_\varepsilon] \leq K \left(\| f \|_\Omega + \frac{1}{(\tau_3 - \tau_1)^4} ([\zeta' u_\varepsilon]^\nu \| f \|_\Omega^{1-\nu} + \| f \|_\Omega) \right) \tag{3.18}$$

con $\nu > \nu_0$, 3/4.

Il teorema risulterà provato se faremo vedere che sussiste la diseguaglianza

$$[\zeta' u_\varepsilon] \leq K \frac{1}{(\tau_3 - \tau_1)^4} [u_\varepsilon]_{G_{\tau_3}} : \tag{3.19}$$

infatti dalla (3.18) si trarrà allora

$$(\tau_3 - \tau_1)^8 [u_\varepsilon]_{G_{\tau_1}} \leq K (\| f \|_\Omega + [u_\varepsilon]_{G_{\tau_3}}^\nu \| f \|_\Omega^{1-\nu})$$

da cui applicando un noto lemma di crescenza di MIRANDA ([12] lemma 3.1) seguirà l'asserto.

Essendo ovviamente

$$\varepsilon^\sigma \sum_{k=0}^{3} \| D_y^k (\zeta' u_\varepsilon) \| + \varepsilon^{1/4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{3} \| D_{x_i'}^k (\zeta' u_\varepsilon) \| \leq \frac{K}{(\tau_3 - \tau_1)^4} [u_\varepsilon]_{G_{\tau_3}}$$

per dimostrare la (3.19) basterà provare che

$$\| L_j (D) (\zeta' u_\varepsilon) \| \leq K [u_\varepsilon]_{G_{\tau_3}} \qquad \forall j = 1, \ldots, s. \tag{3.20}$$

Ora, tenendo conto della (3.16) e utilizzando la formula di Leibniz, è facile convincersi che sussiste la diseguaglianza

$$\| L_j (D) (\zeta' u_\varepsilon) \| \leq \frac{K}{(\tau_3 - \tau_1)^4} \sum_{|\alpha| \geq 0} \| L_j^{(\alpha)} (D) u_\varepsilon \|_{G_{\tau_3}} \qquad \forall j = 1, \ldots, s.$$

Da questa segue immediatamente la (3.20), ove si applichi agli $L_j^{(\alpha)}(D)$ la diseguaglianza (3.9): cosa lecita in quanto, per l'ipoellitticità degli $L_j(D)$, si ha che $L_j^{(\alpha)}(D)$, $\forall\, j \in \{1, \ldots s\}$ e $\forall\, \alpha : |\alpha| \geq 0$ appartiene allo spazio $\mathfrak{L}$.

§ 4. DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI DI ESISTENZA E DI REGOLARIZZAZIONE.

La dimostrazione del teorema [1.1] formalmente non differisce da quella in cui si stabilisce l'esistenza di una soluzione debole del problema studiato in [2], quando si utilizzi il teorema [3.1] in luogo del teorema [4.2] di tale lavoro. Non è pertanto il caso di esporla e, per i dettagli, rimandiamo a [2]. Occorre comunque rilevare che la soluzione debole che si ottiene in tal modo è il limite debole, in $L^2(\Omega)$, di una successione $\{u_{\varepsilon_n}\}_{n\in N}$, $\varepsilon_n \to 0$, estratta dalla famiglia $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Tale funzione è chiaramente di classe $H^q(E - \Sigma)$ e verifica le condizioni al contorno relative a $\partial E - \Sigma$.

Veniamo ora alla regolarizzazione in $D - \Sigma$.

Da un noto criterio di compattezza debole e dal teorema [3.1] si trae intanto il

TEOREMA [4.1] — *Risulta*:

$$R(D)\, u \in L^2_{loc}(D - \Sigma)$$

$R(D)$ *essendo un qualunque operatore più debole di* $L(x', D)$ *in* $D - \Sigma$. Osserviamo poi che in virtù della (1.3) dell'ipotesi d), gli operatori D_y^k, $k \leq p$ sono più deboli di L in $D - \Sigma$; pertanto dal teorema [4.1] discende il seguente

COROLLARIO [4.1] — *Si ha*

$$D_y^k u \in L^2_{loc}(D - \Sigma) \qquad k \leq p.$$

Infine, supponendo $r > 0$, osserviamo che, sempre per il solito criterio di compattezza debole, risulta

$$D_y^r u_\varepsilon \rightharpoonup D_y^r u \qquad \text{in } L^2_{loc}(D - \Sigma)$$

e ciò implica che, detto γ l'operatore traccia sull'iperpiano $y = 0$, la successione $\gamma D_y^{r-1} u_\varepsilon$ converge debolmente, in $(D - \Sigma)_{loc}$ ad una fun-

zione $g^{r-1}(x')$ che possiamo chiamare traccia di $D_y^{r-1} u$ su $\partial D - \Sigma$ e denotare ancora con $\gamma D_y^{r-1} u$. È chiaro allora, essendo per costruzione $\gamma D_y^{r-1} u_\varepsilon|_{\partial D-\Sigma} = 0$, che si ha ovviamente $\gamma D_y^{r-1} u|_{\partial D-\Sigma} = 0$. È poi il caso di osservare che se tutte le derivate che figurano formalmente in L sono operatori più deboli di L in $D - \Sigma$ come avviene in [6], dal teorema [4.1] e da quest'ultima osservazione discende che la soluzione u è quasi regolare e verifica quasi ovunque l'equazione e le condizioni al contorno.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* I, Comm. Pure Appl. Math., vol. 12 (1959), 623-727.

[2] M. L. BENEVENTO, *Sul problema del tipo di Dirichlet per operatori ellittico-parabolici di ordine 2 s, quasi ellittici nelle zone di degenerazione*, Ricerche di Matematica, vol. XXVI (1977), 203-253.

[3] M. L. BENEVENTO, T. BRUNO, L. CASTELLANO, *Sul problema del tipo di Dirichlet per una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni*, Ricerche di Matematica, vol. XXIV (1975), 280-340.

[4] A. CANFORA, *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine* I, Ricerche di Matematica, vol. XXI (1972), 86-156

[5] A. CANFORA, *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine* II, Ricerche di Matematica, vol. XXII (1973), 3-68.

[6] A. CIOFFI, *Sul problema di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine, ipoellittici nella zona di degenerazione*, Ricerche di Matematica, vol. XXVI (1977), 349-382.

[7] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag 1963, Berlin.

[8] L. HÖRMANDER, *On interior regularity of the solutions of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 11 (1958), 197-218.

[9] B. MALGRANGE, *Sur une classe d'operatéurs différentiels hypoelliptiques*, Bull. Soc. Math. France, vol. 85 (1957), 283-306.

[10] S. MATARASSO, *Regolarizzazione delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche*, Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli, serie 4, XLI (1974), 160-192.

[11] S. MATARASSO, *Formule di maggiorazione relative ad una classe di equazioni a coefficienti costanti*, Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli, serie 4, XLI (1973), 269-302.

[12] C. MIRANDA, *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, Annali di Matematica, vol. LIX (1962), 189-212.

[13] J. PEETRE, *On estimating the solutions of hypoelliptic differential equations near the plane boundary*, Mathematica Scandinavica, vol. 9 (1961), 337-351.

[14] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, ed. Rondinella 1940, Napoli.

[15] M. SCHECHTER, *On the dominance of partial differential operators* II, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XVIII (1964), 255-282.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e F. Cafiero.

Soluzioni positive per il problema di Dirichlet per equazioni di tipo parabolico

Nota di RAFFAELE PISANI *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 7 gennaio 1978)

RIASSUNTO. — In questo lavoro è dimostrato un teorema di esistenza di soluzioni positive del problema di Dirichlet per un'equazione parabolica semilineare. Tale teorema è un'estensione alle equazioni paraboliche di un analogo risultato di H. AMANN per le equazioni ellittiche.

SUMMARY. — Tre purpose of this paper is to study an existence theorem of positive solutions to the Dirichlet problem for a parabolic semilinear eqlation. This theorem is an extension to parabolic equations of an analogous result of H. AMANN for ellyptic equations.

Sia D, un dominio limitato nello spazio euclideo ad n dimensioni $\mathbb{R}^n$ ed $\Omega = D \times [0, T]$. Sia ∂D la frontiera di D e sia $S = \partial D \times [0, T]$. L'insieme $S \cup D = \Gamma$ è chiamata la frontiera normale di Ω. Sia B_T la parte di $\partial \Omega$ che si trova sull'iperpiano $t = T$ e poniamo $\overset{o}{\Omega} \cup B_T = \Omega_T$. Sia inoltre $(x, t) = (x_1, x_2, \ldots x_n, t)$ un punto variabile in $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\alpha \in (0, 1)$.

Consideriamo l'operatore differenziale lineare del secondo ordine

$$Lu = -\sum_{i,J=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t) u - \frac{\partial u}{\partial t}$$

uniformemente parabolico.

Recentemente C. V. PAO [1] ha dimostrato un teorema di esistenza delle soluzioni positive del seguente problema:

$$L u = f(x, t, u) \qquad x \in \overset{o}{D}, t \in (0, T]$$

* Istituto di Analisi Matematica dell'Università. Palazzo Atenco, Bari.

con la condizione al contorno non lineare

$$\beta \frac{\partial u}{\partial \nu} - g(x, t, u) = h(x, t) \qquad x \in \partial D, \quad t \in (0, T]$$

e la condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in \overset{\circ}{D}$$

dove f, g, h, u sono funzioni assegnate; ν la normale esterna su ∂D e $\beta \geq 0$ è una costante.

Questo risultato, di cui PAO illustra varie applicazioni fisiche e che include anche un teorema di esistenza per le soluzioni positive su tutto l'intervallo $[0, T]$ del problema di DIRICHLET (caso in cui $\beta = 0$, $g(x, t, u) = u$) per una equazione parabolica semilineare, è stato provato nelle ipotesi di esistenza di una soprasoluzione v e nelle ipotesi

(i) $$f(x, t, 0) \geq 0 \quad \text{e} \quad u_0(x) \geq 0 \qquad (x, t) \in \Omega_T$$

(ii) $$g(x, t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(x, t) \geq 0 \qquad (x, t) \in S$$

(iii) $$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ni' f(x, t, \eta_2) - f(x, t, \eta_1) \geq -c_1(\eta_2 - \eta_1)$$
$$(0 \leq \eta_1 \leq \eta_2), \ (x, t) \in \Omega_T$$
$$g(x, t, \eta_2) - g(x, t, \eta_1) \geq -c_2(\eta_2 - \eta_1)$$
$$(0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \bar{\rho}), \ (x, t) \in S$$

(dove $\bar{\rho} = \sup\{v(x, t), (x, t) \in \Omega_T\}$ e in opportune ipotesi sui coefficienti L, su f, g, u_0 e su ∂D.

Mi è sembrato non privo di interesse dimostrare che nel caso del problema di DIRICHLET

$$L u = f(x, t, u) \qquad x \in \overset{\circ}{D}, \ t \in (0, T]$$

$$u(x, t) = \varphi_0(x, t) \qquad \text{su } \Gamma$$

(φ_0 funzione assegnata) per un'equazione parabolica semilineare l'esistenza di soluzioni positive è assicurata prescindendo dalla (iii) e sotto condizioni meno restrittive per i coefficienti.

Alla dimostrazione di questo risultato è appunto dedicato il presente lavoro in cui mi sono, fra l'altro avvalso delle tecniche usate da H. AMANN in un suo lavoro sulle soluzioni positive per le equazioni ellittiche (cfr. [2]).

La prima parte del lavoro contiene alcuni risultati preliminari. I teoremi principali sono dimostrati nella seconda parte.

1. — Saranno sempre verificate nel seguito le ipotesi:

A) L sia uniformemente parabolico, cioè $\exists\, \gamma_0 > 0$ tale che

$$\gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \sum_{i,J=1}^{n} a_{ij}(x, t)\, \xi_i \xi_j \quad (x, t) \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

B) a_{ij}, a_i, $a \in C_{x\ t}^{\alpha\ \frac{\alpha}{2}}(\Omega)$[1] e la matrice a_{ij} sia simmetrica definita positiva in Ω.

Sia ora Δ un sottoinsieme di R^{n+1} e consideriamo una funzione arbitraria $f : \Delta \to \mathbb{R}$.

Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Per ogni $f : \Delta \times S \to \mathbb{R}$, indichiamo con la corrispondente lettera maiuscola F l'operatore di Nemytskii definito dalla seguente funzione:

Per ogni $\quad u : \Delta \to S \quad F(u)(x, t) = f(x, t, u(x, t)) \qquad (x, t) \in \Delta$

Sia $R_+ = (0, \infty)$. Sia quindi $f : \Omega_T \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ data; consideriamo allora il seguente problema al contorno non lineare nella seguente forma:

$$\begin{aligned} L\, u &= F(u) \quad \text{in} \quad \Omega_T \\ u(x, t) &= \varphi_0(x, t) \quad \text{su} \quad \Gamma \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove φ_0 è una funzione assegnata.

Ci saranno indispensabili nel seguito alcuni ben noti risultati relativi alle equazioni paraboliche che richiamiamo preliminarmente per comodità del lettore.

TEOREMA DEL MASSIMO MODULO. — *Nelle ipotesi* A) e B), *se* $u \in$ $\in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\Omega)$

$$\begin{aligned} L\, u &\geq 0 \qquad \text{in } \Omega_T \\ u &\geq 0 \qquad \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

allora $u(x, t) \geq 0 \quad \forall\ (x, t) \in \Omega_T$[2].

[1] C. V. PAO fa l'ipotesi che $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ siano hölderiane su Ω, che serve per le condizioni al contorno più generali.

[2] Cfr. [3], corollario 2.1 pg. 15.

TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ. — *Nelle ipotesi* A) *e* B) *e nell'ipotesi che* S *sia di classe* $C^{2+\alpha}$, *per ogni funzione* $f \in C_{x\,t}^{\alpha,\,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ e per *ogni* $\psi \in C_{x\quad t}^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Gamma)$, *il problema*

$$\begin{cases} L\,u(x,t) = f(x,t) & \text{in } \Omega_T \\ u = \psi & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $u \in C_{x\quad t}^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ *e*

$$\| u \|_{C_x^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)} \leq c\left(\| f \|_{C_{x\,t}^{\alpha,\,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)} + \| \psi \|_{C_x^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Gamma)}\right)^3$$

Passiamo quindi a dimostrare alcuni lemmi. Premettiamo alcune notazioni. Siano $\bar{v} \cdot \hat{v} \in C_{x\quad t}^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega)$ tali che $\bar{v} \leq \hat{v}$, definiamo

$$\Omega \times [\bar{v}, \hat{v}] = \{(x, t, \xi)/(x, t) \in \Omega, \bar{v}(x, t) \leq \xi \leq \hat{v}(x, t)\}$$

e simili definizioni diamo per $\Gamma \times [\bar{v}, \hat{v}]$, $\Omega \times [\bar{v}, \hat{v}]^2$. Vogliamo provare la seguente

PROPOSIZIONE 1.1. — *Sia* (g_n) *una successione limitata in* $C_{x\,t}^{\alpha,\,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times [\bar{v}, \hat{u}]^2)$ *convergente puntualmente ad una funzione* g *e sia* (u_n) *una successione in* $C_{x\quad t}^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ *soddisfacente la condizione*

$$\bar{v} \leq u_n \leq \hat{v}$$

che converga puntualmente ad una funzione u. *Sia per ogni* $n \geq 2$

$$\begin{aligned} L\,u_n &= G_n(u_n, u_{n-1}) && \text{in } \Omega_T \\ u_n &= \varphi && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

dove $\varphi \in C_{x\quad t}^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Gamma)$ e $G_n(u_n, u_{n-1})(x, t) = (x, t, u_n(x, t), u_{n-1}(x, t))$ $\forall (x, t) \in \Omega_T$. *Allora* $u \in C_{x\quad t}^{2+\alpha,\;1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ e soddisfa le condizioni:

$$\begin{aligned} L\,u &= G(u, u) && \text{in } \Omega_T \\ u &= \varphi && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

ed inoltre la successione (u_n) converge ad u in $C_{x,\,t}^{2,\,1}(\Omega_T)$.

[3] Cfr. [4] pg. 71, corollario 2; pg. 65, teorema 6.

Dimostrazione. Poiché (u_n) soddisfa la condizione (1.2), nelle ipotesi A) e B) le u_n soddisfano la seguente stima a priori in L^p:

$$\| u_n \|_{W_{p\,x\,t}^{2,1}(\Omega_T)} \leq c \left(\| G_n(u_n, u_{n-1}) \|_{L_p(\Omega_T)} + \| \varphi \|_{B_p^{2-\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{2p}}(\Gamma)} \right)^4.$$

Poiché la successione (g_n) è limitata in $C_{x\,t}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times [\bar{v}, \hat{v}]^2)$, la successione $(G_n(u_n, u_{n-1}))$ è limitata in $L_p(\Omega_T)$, quindi (u_n) è limitata in $W_{p\,x\,t}^{2,1}(\Omega_T)$. Ora per $p > n+2$, lo spazio di Sobolev $W_{p\,x\,t}^{2,1}(\Omega_T)$ è immerso con continuità in $C_{x\;t}^{1+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ con $\alpha < 1 - \dfrac{n+2}{p}$[5]; cioè esiste una costante γ tale che per ogni $u_n \in W_{p\,x\,t}^{2,1}(\Omega_T)$ risulta

$$\| u_n \|_{C_{x\;t}^{1+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)} \leq \gamma \| u_n \|_{W_{p\,x\,t}^{2,1}(\Omega_T)}$$

Segue che (u_n) è limitata in $C_{x\;t}^{1+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$. Questo fatto implica che $(G_n(u_n, u_{n-1}))$ è una successione limitata in $C_{x\,t}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$. Applicando ora la stima a priori di Schauder innanzi ricordata si ha:

$$\| u_n \|_{C_{x\;t}^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)} \leq c \left(\| G_n(u_n, u_{n-1}) \|_{C_{x\,t}^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)} + \| \varphi \|_{C_{x\;t}^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Gamma)} \right)$$

da cui risulta che (u_n) è limitata in $C_{x\;t}^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$.

Per il teorema di Ascoli-Arzelà, esisterà quindi una sottosuccessione di (u_n) convergente in $C^{2,1}(\Omega_T)$ ad un elemento $v \in C_{x\;t}^{2+\alpha,\, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$. Ma poiché (u_n) converge puntualmente ad u si ha che $u = v$ e inoltre l'intera successione converge in $C_{x\,t}^{2,1}(\Omega_T)$ ad u. Quindi u_n converge ad u uniformemente.

Infine si ha:

$$\begin{aligned} &| G_n(u_n, u_{n-1} - G(u, u)| \leq | G_n(u_n, u_n) - G_n(u, u)| + \\ &+ | G_n(u, u) - G(u, u)| \leq \gamma (| u_n - u |^\alpha + | u_{n-1} - u |^\alpha) + \\ &+ | G_n(u, u) - G(u, u)| \end{aligned}$$

che mostra che $G_n(u_n, u_{n-1})$ converge puntualmente a $G(u, u)$. Si ha anche che $u = \varphi$ su Γ.

[4] Cfr. [5], teorema 17, pg. 22.
[5] Cfr. [3], lemma 33 del Cap. III, pg. 80.

Dimostriamo ora la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.2.

Sia verificata la seguente ipotesi:

$$\text{Ipotesi H}\begin{cases} \textit{Siano } \bar{v},\ \hat{v} \in C_{x}^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T) \text{ con } \bar{v} \le \hat{v}, f \in C_{x\ t}^{\alpha\ \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times [\bar{v}, \hat{v}]), \\ \varphi_o \in C_{x}^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Gamma) \text{ tali che} \\ L\bar{v} \le F(\bar{v}) \text{ in } \Omega_T, \qquad \bar{v} \le \varphi_o \text{ su } \Gamma \\ L\hat{v} \ge F(\hat{v}) \text{ in } \Omega_T, \qquad \hat{v} \ge \varphi_o \text{ su } \Gamma \end{cases}$$

Inoltre esista una funzione non negativa $m \in C_{x\ t}^{\alpha\ \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ tale che *per ogni* $(x, t) \in \Omega_T$ *e per* ξ, η *tali che* $\bar{v}(x, t) \le \eta \le \xi \le \hat{v}(x, t)$ *si abbia*

$$f(x, t, \xi) - f(x, t, \eta) \ge -m(x, t)(\xi - \eta)$$

Definiamo la successione (u_n), $u_n \in C_{x}^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ tale che

$$\begin{aligned} &Lu_n + m u_n = F(u_{n-1}) + m u_{n-1} && \text{in } \Omega_T \\ &u_n = \varphi_o && \text{su } \Gamma. \end{aligned}$$

Allora, se $u_o = \hat{v}$ $(u_o = \bar{v})$, *la successione* (u_n) *converge da sopra (da sotto) ad una soluzione* $\hat{u}$ $(\bar{u})$ *di* (1.1.) *e* (u_n) *converge in* $C_{x\ t}^{2,1}(\Omega_T)$. *Inoltre ogni soluzione di* (1.1) *con* $\bar{v} \le u \le \hat{v}$ *soddisfa la diseguaglianza* $\bar{v} \le \bar{u} \le u \le \hat{u} \le \hat{v}$.

Dimostrazione. Sia $u_o = \hat{v}$. Allora u_1 è ben definito per il teorema preliminare ed inoltre per ipotesi si ha:

$$\begin{aligned} &L(u_1 - \hat{v}) + m(u_1 - \hat{v}) = F(\hat{v}) - L\hat{v} \le 0 && \text{in } \Omega_T \\ &u_1 - \hat{v} = \varphi_o - \hat{v} \le 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Quindi per il principio di massimo si ha che $u_1 \le \hat{v}$.

Da questa diseguaglianza e dal fatto che $F(\hat{v}) - F(\bar{v}) \ge -m(\hat{v} - \bar{v})$ si ha

$$\begin{aligned} &L(u_1 - \bar{v}) + m(u_1 - \bar{v}) \ge 0 && \text{in } \Omega_T \\ &u_1 = \bar{v} = \varphi_o - \bar{v} \ge 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Quindi ancora per il principio di massimo $u_1 \geq \bar{v}$. Ora per induzione, si può vedere che la successione (u_n) è ben definita, con $u_n \in$ $\in C_x^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$, e soddisfa la condizione

$$\bar{v} \leq \ldots u_n \leq u_{n-1} \ldots \leq u_1 \leq \hat{v}$$

Allora (u_n) converge puntualmente a qualche funzione $\hat{u}$ con $\bar{v} \leq \hat{u} \leq \hat{v}$.

Inoltre, per ogni n, poniamo:

$$g_n(x, t, \xi, \eta) = f(x, t, \eta) + m(\eta - \xi) \qquad (x, t, \xi, \eta) \in \Omega_T \times [\bar{v}, \hat{v}]^2$$

e applicando la proposizione 1.1 alla successione (u_n) con $u_0 = \hat{v}$, segue che $\hat{u}$ è tale che $L\hat{u} = F(\hat{u})$.

Analogamente si vede che nel caso $u_0 = \bar{v}$ si ha

$$\bar{v} \leq u_1 \leq \ldots u_{n-1} \leq u_n \leq \ldots \leq \hat{v}$$

e, quindi, che la successione (u_n) converge in $C_{x\,t}^{2,1}(\Omega_T)$ ad una soluzione $\bar{u}$ di (1.1) con $\bar{v} \leq \bar{u} \leq \hat{v}$.

Sia ora u tale che $\bar{v} \leq u \leq \hat{v}$ e u soluzione di (1.1). Allora si può prendere u invece di $\hat{v}$ e si ottiene $\bar{v} \leq \bar{u} \leq u$ e analogamente se prendo u invece di $\bar{v}$ si ha $u \leq \hat{u} \leq \hat{v}$.

Vediamo ora la seguente proposizione, che mi da l'unicità delle soluzioni di (1.1).

PROPOSIZIONE 1.3. — *Siano* $\bar{v}, \hat{v} : \Omega_T \to \mathbb{R}$ *con* $\bar{v} \leq \hat{v}$. *Assumiamo che per ogni* $(x, t) \in \Omega_T$ *e per ogni* ξ, η *con* $\bar{v}(x, t) \leq \xi \leq \eta \leq \hat{v}(x, t)$:

$$f(x, t, \xi) \geq f(x, t, \eta).$$

Allora (1.1) *ha al più una soluzione soddisfacente la condizione* $\bar{v} \leq u \leq \hat{v}$.

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 due soluzioni di (1.1) con $\bar{v} \leq u_1$, $u_2 \leq \hat{v}$. Sia

$$\Omega_T' = \{(x, t) \in \Omega_T \,/\, u_1(x, t) > u_2(x, t)\}$$

e osserviamo che poiché $L(u_1 - u_2) = F(u_1) - F(u_2) = f(x, t, u_1) - f(x, t, u_2)$ si ha

$$L(u_1 - u_2) \leq 0 \qquad \text{su } \Omega_T'$$

$$u_1 = u_2 \qquad \text{su } \Gamma$$

Quindi per il principio di massimo si ha $u_1 \leq u_2$ in Ω_T' e quindi in Ω_T.

Analogamente si prova che $u_1 \geq u_2$ e quindi l'unicità.

Sia $\gamma > 0$ il coefficiente di Hölder di f, cioè per ogni (x, t, ξ), $(y, \tau, \eta) \in \Omega_T \times [\bar{v}, \hat{v}]$

$$|f(x, t, \xi) - f(y, \tau, \eta)| \leq \gamma (|x - y|^\alpha + |t - \tau|^{\alpha/2} + |\xi - \eta|^\alpha)$$

e definiamo le funzioni $\bar{f}$ e $\hat{f} \in C_{x\ t}^{\alpha,\ \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times [\bar{v}, \hat{v}])$

$$\bar{f}(x, t, \xi) = f(x, t, \bar{v}(x, t)) - \gamma (\xi - \bar{v}(x, t))^\alpha$$
$$\hat{f}(x, t, \xi) = f(x, t, \hat{v}(x, t)) + \gamma (\hat{v}(x, t) - \xi)^\alpha$$

Con queste notazioni vale la seguente

PROPOSIZIONE 1.4. — *Sia soddisfatta l'ipotesi* H). *Inoltre* $\exists\, \delta > 0$ $\ni'$ $\ni' L\bar{v} - \bar{F}(\bar{v}) \leq -\delta$ e $L\hat{v} - \hat{F}(\hat{v}) \geq \delta$ in Ω_T.

Allora i problemi al contorno

$$\begin{cases} Lu = \bar{F}(u) & \text{in } \Omega_T \\ u = \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu = \hat{F}u & \text{in } \Omega_T \\ u = \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

ammettono rispettivamente un'unica soluzione $\bar{u}$ e $\hat{u}$.

Dimostrazione. L'unicità è una conseguenza del teorema precedente, per come sono definite $\bar{f}$ e $\hat{f}$. Si può ora vedere che esiste una costante $\sigma > 0$ tale che la funzione $\bar{w} = \bar{v} + \sigma$, $\hat{w} = \hat{v} - \sigma$ soddisfano la condizione

$$(1.3) \quad \begin{cases} L\bar{w} \leq \bar{F}(\bar{w}) & \text{in } \Omega_T \\ \bar{w} \leq \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases} \qquad (1.4) \quad \begin{cases} L\hat{w} \geq \hat{F}(\hat{w}) & \text{in } \Omega_T \\ \hat{w} \geq \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Infatti:

$$L\bar{w} - \bar{F}(\bar{w}) = L\bar{v} - \bar{F}(\bar{v}) + a\sigma + \bar{F}(\bar{v}) - \bar{F}(\bar{v} + \sigma) \leq -\delta + a\sigma + \gamma\sigma^\alpha$$

e

$$\bar{w} - \varphi_0 \leq \sigma \quad \text{su } \Gamma.$$

Quindi per σ sufficientemente piccolo sono verificate le (1.3). Analogamente per (1.4).

Chiaramente $\bar{f}$ è definita in $\Omega_T \times [\bar{w}, \hat{v} + \sigma]$ ed ivi per $\bar{v} + \sigma \leq \eta \leq \xi \leq \hat{v} + \sigma$ soddisfa la diseguaglianza

$$\bar{f}(x, t, \xi) - \bar{f}(x, t, \eta) = -(\xi - \bar{v}(x, t)) + \gamma(\eta - \bar{v}(x, t))^{\alpha} \geq$$
$$\geq -\alpha\gamma(\xi - \eta)\sigma^{\alpha-1}\ ^{6}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &L(\hat{v} + \sigma) \geq L(\hat{v}) \geq F(\hat{v}) \geq \bar{F}(\hat{v}) \geq F(\hat{v} + \sigma) && \text{in } \Omega_T \\ &\hat{v} + \sigma > \hat{v} \geq \varphi_0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Quindi per le proposizioni 1.2 e 1.3 applicate all'intervallo $[\bar{w}, \bar{v} + \sigma]$ esiste esattamente una soluzione $\bar{u}$ di

$$\begin{aligned} &L u = \bar{F}(u) && \text{in } \Omega_T \\ &u = \varphi_0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

soddisfacente la condizione $\bar{w} \leq \bar{u} \leq \hat{v} + \sigma$.

Analogamente esiste una soluzione $\hat{u}$ di

$$\begin{aligned} &L u = \hat{F}(u) && \text{in } \Omega_T \\ &u = \varphi_0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

soddisfacente la condizione $\bar{v} - \sigma \leq \hat{u} \leq \hat{w}$. Inoltre poiché

$$\begin{aligned} &L\hat{u} - \hat{F}(\hat{u}) \geq \bar{F}(\hat{u})\ ^{7} && \text{in } \Omega_T \\ &\hat{u} = \varphi_0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} &L(\hat{u} - \bar{u}) \geq \bar{F}(\hat{u}) - \bar{F}(\bar{u}) && \text{in } \Omega_T \\ &\hat{u} - \bar{u} = \varphi_0 - \varphi_0 = 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Sia $\Omega_T' = \{(x, t) \in \Omega_T / \hat{u}(x, t) < \bar{u}(x, t)\}$ e osserviamo che per la decrescenza della funzione $f(x, t, \cdot)$ si ha:

$$\begin{aligned} &L(\hat{u} - \bar{u}) \geq 0 && \text{in } \Omega_T \\ &\hat{u} - \bar{u} = 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Quindi, per il principio di massimo, si ha che $\bar{u} \leq \hat{u}$ in Ω_T.

[6] Si ha infatti:

Se $0 < \alpha < 1$ e $\frac{a}{b} > \sigma$, $\quad a^{\alpha} - b^{\alpha} \leq \alpha(a - b)\sigma^{\alpha-1}$

[7] Si osservi che $\bar{f} \leq f \leq \hat{f}$.

Proviamo ora che la proposizione 1.4 si può dimostrare senza fare alcuna ipotesi al di fuori dell'ipotesi H). Vale infatti la seguente:

PROPOSIZIONE 1.5. — *Sia* H) *soddisfatta. Allora i problemi al contorno*:

$$\begin{cases} \mathrm{L}\,u = \bar{\mathrm{F}}(u) & \text{in } \Omega_\mathrm{T} \\ u = \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{L}\,u = \hat{\mathrm{F}}(u) & \text{in } \Omega_\mathrm{T} \\ u = \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

hanno rispettivamente un'unica soluzione. Inoltre $\bar{v} \leq \bar{u} \leq \hat{u} \leq \hat{v}$.

Dimostrazione. Sia u^* l'unica soluzione del problema

$$\mathrm{L}\,u = 1 \quad \text{in } \Omega_\mathrm{T}$$

$$u = 1 \quad \text{su } \Gamma$$

Per il principio di massimo risulta $u^* > 0$. Poniamo per ogni n

$$\bar{v}_n = \bar{v} - \frac{1}{n}\,u^* \qquad \hat{v}_n = \hat{v} + \frac{1}{n}\,u^*$$

e definiamo $\bar{f}_n$ e $\hat{f}_n$ su $\Omega_\mathrm{T} \times [\bar{v}_n, \hat{v}_n]$

$$\bar{f}_n(x, t, \xi) = f(x, t, \bar{v}(x, t)) - \gamma\left(\xi - \bar{v}(x, t) + \frac{1}{n}\,u(x, t)\right)$$

$$\hat{f}_n(x, t, \xi) = f(x, t, \hat{v}(x, t)) + \gamma\left(\hat{v}(x, t) - \xi - \frac{1}{n}\,u(x, t)\right)$$

Allora per l'ipotesi H)

$$\mathrm{L}\,\bar{v}_n - \bar{\mathrm{F}}_n(\bar{v}_n) = \mathrm{L}\,\bar{v} - \frac{1}{n} - \bar{\mathrm{F}}(\bar{v}) \leq -\frac{1}{n} \quad \text{in } \Omega_\mathrm{T}$$

$$\bar{v}_n - \varphi_0 = \bar{v} - \frac{1}{n} - \varphi_0 \leq -\frac{1}{n} \quad \text{su } \Gamma$$

e analogamente

$$\mathrm{L}\,\bar{v}_n - \hat{F}_n(\hat{v}_n) \geq \frac{1}{n} \quad \text{in } \Omega_\mathrm{T}$$

$$\bar{v}_n - \varphi_0 \geq \frac{1}{n} \quad \text{su } \Gamma$$

Quindi per la proposizione precedente $\left(\delta = \frac{1}{n}\right)$, per ogni n esiste una sola soluzione rispettivamente per

$$\begin{cases} \mathrm{L}\, u = \bar{\mathrm{F}}_n(u) & \text{in } \Omega_\mathrm{T} \\ u = \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathrm{L}\, u = \hat{\mathrm{F}}_n(u) & \text{in } \Omega_\mathrm{T} \\ u = \varphi_0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

Inoltre $\bar{v}_n \leq \bar{u}_n \leq \hat{u}_n \leq \hat{v}_n$.

Ora osserviamo che su $\Omega_\mathrm{T} \times [\bar{v}_{n-1}, \hat{v}_{n-1}]$, abbiamo $\bar{f}_n \geq \bar{f}_{n-1}$.

Infatti

$$\bar{f}_n(x, t, \xi) = f(x, t, \bar{v}(x, t)) - \gamma \left(\xi - \bar{v}(x, t) + \frac{1}{n} u^*\right)^\alpha \geq$$

$$\geq f(x, t, \bar{v}(x, t)) - \gamma \left(\xi - \bar{v} + \frac{1}{n+1} u^*\right)^\alpha = \bar{f}_{n+1}.$$

Quindi $\mathrm{L}\, \bar{u}_n = \bar{\mathrm{F}}_n(u_n) \geq \bar{\mathrm{F}}_{n-1}(\bar{u}_n)$ e perciò

$$\mathrm{L}(\bar{u}_n - \bar{u}_{n-1}) \geq \bar{\mathrm{F}}_{n-1}(\bar{u}_n) - \bar{\mathrm{F}}_{n-1}(\bar{u}_{n-1})$$
$$\bar{u}_n - \bar{u}_{n-1} = \varphi_0 - \varphi_0 = 0$$

e quindi per la monotonia della successione $(\bar{f}_n(x, t, \cdot))$ e per il principio di massimo si prova che $\bar{u}_{n-1} \leq \bar{u}_n$ analogamente a quanto fatto nella proposizione 1.3.

Allo stesso modo si prova che $\hat{u}_n \leq \hat{u}_{n-1}$ e quindi si ha la catena

$$\bar{v}_1 \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_2 \leq \ldots \bar{u}_n \ldots \hat{u}_n \leq \hat{u}_{n-1} \leq \ldots \leq \hat{u}_1 \leq \hat{v}_1$$

Perciò, la successione $(\bar{u}_n)$ converge puntualmente ad una funzione $\hat{u}$ su Ω_T tale che:

$$\bar{v} \leq \bar{u} \leq \hat{u} \leq \hat{v}$$

Per ogni n, definiamo g_n su $\Omega_\mathrm{T} \times [\bar{v}_1, \hat{v}_1]^2$ mediante

$$g_n(x, t, \xi, \eta) = f_n(x, t, \xi)$$

Allora (g_n) converge puntualmente ad f e (g_n) è limitata in $\mathrm{C}^\alpha(\Omega_\mathrm{T} \times [\bar{v}_1, \hat{v}_1]^2)$. Quindi per la proposizione 1.1, $\bar{u} \in \mathrm{C}_x^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}{}_t(\Omega_\mathrm{T})$ ed è una soluzione del problema

$$\mathrm{L}\, u = \bar{\mathrm{F}}\, u \quad \text{in } \Omega_\mathrm{T}$$
$$u = \varphi_0 \quad \text{su } \Gamma$$

e tale soluzione per la proposizione 1.3 è unica per la monotonia di $\bar{f}(x, t, \cdot)$.

Analogamente si fa per $\hat{u}$.

2. — Possiamo ora dimostrare i risultati principali conseguiti in questo lavoro. Proviamo il seguente:

TEOREMA 2.1. — *Siano verificate le ipotesi* A), B), H). *Esiste almeno una soluzione del problema*

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\, u &= \mathrm{F}(u) \qquad \text{in } \Omega_T \\ u &= \varphi_0 \qquad\quad \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

tale che $\bar{v} \leq u \leq \hat{v}$. *Inoltre esiste una soluzione massimale* $\hat{u}$, $\bar{v} \leq \hat{u} \leq \hat{v}$ *ed una soluzione minimale* $\bar{u}$, $\bar{v} \leq \bar{u} \leq \hat{v}$ *nel senso che per ogni soluzione* u *con* $\bar{v} \leq u \leq \hat{v}$ *si ha:*

$$\bar{v} \leq \bar{u} \leq u \leq \hat{u} \leq \hat{v}$$

Dimostrazione. Per ogni coppia di funzioni $\bar{w}$, $\hat{w}$ $C_x^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ con $\bar{v} \leq \bar{w} \leq \hat{w} \leq \hat{v}$ definiamo le funzioni $\bar{f}(\cdot, \bar{w}) \in C_{x\ t}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times [\bar{w}, \hat{v}])$ e $\hat{f}(\cdot, \hat{w}) \in C_{x\ t}^{\alpha\ \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times [\bar{v}, \hat{w}])$

$$\bar{f}(x, t, \xi, \bar{w}) = f(x, t, \bar{w}(x, t)) - \gamma(\xi - \bar{w}(x, t))^{\alpha}$$

$$\hat{f}(x, t, \xi, \hat{w}) = f(x, t, \hat{w}(x, t)) + \gamma(\hat{w}(x, t) - \xi)^{\alpha}$$

Consideriamo, poi, le successioni $(\bar{u}_n)$, $(\hat{u}_n)$, con $\bar{u}_n$, $\hat{u}_n \in C_x^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}$ (Ω_T) definite da

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\, \bar{u}_n &= \bar{\mathrm{F}}(\bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}) \qquad \text{in } \Omega_T \\ \bar{u}_n &= \varphi_0 \qquad\qquad\quad \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

ponendo $\bar{u}_0 = \bar{v}$ e da

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\, \hat{u}_n &= \hat{\mathrm{F}}(\hat{u}_n, \hat{u}_{n-1}) \qquad \text{in } \Omega_T \\ \hat{u}_n &= \varphi_0 \qquad\qquad\quad \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

ponendo $\hat{u}_0 = \hat{v}$. Allora per mezzo della proposizione 1.5 ponendo $\bar{u}_{n-1}$

al posto di $\bar{v}_n$ e $\hat{u}_{n-1}$ al posto di $\hat{v}_n$, segue che queste successioni sono ben definite e soddisfano la diseguaglianza.

$$\bar{v} \leq \bar{u}_1 \leq \ldots \bar{u}_n \leq \ldots \leq \hat{u}_n \leq \ldots \hat{u}_1 \leq \hat{v}$$

Quindi $(\bar{u}_n)$ e $(\hat{u}_n)$ convergono puntualmente in Ω_T rispettivamente ad $\bar{u}$ e $\hat{u}$ tale che $\bar{v} \leq \bar{u} \leq \hat{u} \leq \hat{v}$.

Per ogni n, definiamo ora $g_n \in C_{x\ t}^{\alpha\ \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times [\bar{v}, \hat{v}]^2)$ mediante

$$g_n(x, t, \xi, \eta) = \begin{cases} f(x, t, \xi) & \text{se} \quad \bar{v}(x, t) \leq \xi \leq \eta \leq \hat{v}(x, t) \\ f(x, t, \eta) - \gamma(\xi - \eta)^\alpha & \text{se} \quad \bar{v}(x, t) \leq \eta \leq \xi \leq \hat{v}(x, t) \end{cases}$$

Con queste definizioni, la successione $(\bar{u}_n)$ soddisfa

$$\begin{aligned} L\,\bar{u}_n &= G_n(\bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}) && \text{in } \Omega_T \\ \bar{u}_n &= \varphi_0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Quindi si può applicare la proposizione 1.1 che prova che $\bar{u} \in \in C_{x}^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ e soddisfa

$$\begin{aligned} L\,\bar{u} &= F(\bar{u}) && \text{in } \Omega_T \\ \bar{u} &= \varphi_0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Allo stesso modo si fa per $\hat{u}$. Inoltre dalla proposizione 1.2 segue che $\bar{u}$ e $\hat{u}$ sono rispettivamente le soluzioni minimale e massimale.

Come conseguenza del teorema 1) segue subito il seguente

TEOREMA 2.1. — *Siano verificate le ipotesi A, B. Siano* $f \in C_{x\ t}^{\alpha\ \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T \times \mathbb{R}_+)$, $\varphi_0 \in C_{x}^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Gamma)$ *assegnate e si assuma che*

$$\begin{aligned} f(x, t, 0) &\geq 0 && \text{in } \Omega_T \\ \varphi_0(x, t) &\geq 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Allora, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione non negativa del problema (1.1) *è l'esistenza di una funzione non negativa* $v \in C_{x}^{2+\alpha,\ 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ *soddisfacente le condizioni*

$$\begin{aligned} L\,v &\geq F(v) && \text{in } \Omega_T \\ v &\geq \varphi_0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Inoltre, se la condizione è soddisfatta, allora esiste una soluzione massimale non negativa $\hat{u} \leq v$ *e una soluzione minimale* $\bar{u} \leq v$, *nel senso che per ogni soluzione non negativa* $u \leq v$ *di* (1.1) *vale la diseguaglianza* $\bar{u} \leq u \leq \hat{u}$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema consegue dal teorema 2.1 ponendo $\bar{v} = 0$ e $\hat{v} = v$ per la condizione sufficiente. La condizione necessaria è ovvia.

TEOREMA 3. — *Nelle stesse ipotesi del teorema* 2.2, *assumiamo che esiste* $g \in C_{x\,t}^{\alpha\,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ tale che

$$f(x, t, \xi) \leq g(x, t) \qquad \text{su} \qquad \Omega_T \times \mathbb{R}_+$$

Allora il problema (1.1) *ha almeno una soluzione non negativa.*

Dimostrazione. Denotiamo v l'unica soluzione del problema

$$\begin{aligned} L\,u &= g \qquad \text{in } \Omega_T \\ u &= \varphi_o \qquad \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $f(x, t, 0) \geq 0$, $\varphi_o \geq 0$ si ha per il principio di massimo che $v \geq 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} L\,v = g \geq F(v) \qquad &\text{in } \Omega_T \\ v = \varphi_o \qquad &\text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Quindi per il teorema 2.2 segue la tesi.

Concludiamo facendo notare che dal teorema (2.2) si potrebbero far escaturire dei teoremi relativi al problema non lineare degli autovalori, considerando lo spettro di

$$\begin{aligned} L\,u = \lambda\,F(u) \qquad &\text{in } \Omega_T \\ u = \lambda\,\varphi_o \qquad &\text{su } \Gamma \end{aligned}$$

Le dimostrazioni di tali teoremi sono analoghe a quelle relative al problema non lineare per il caso ellittico, studiato da H. AMANN.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. V. PAO, *Positive solutions of a nonlinear Boundary-Value Problem of Parabolic Type*, Copyright 1976 by Academic Press, Inc.

[2] H. AMANN, *On the existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary--Value Problems*, Indiana Univ. Math. Journal Vol. 21.

[3] LADYZENSKAJA, SOLONNIKOV AND URALCEVA, *Linear and quasi linear equations of parabolic* Type. Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1968.

[4] FRIEDMAN, *Partial differential Equatione of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N. J. 1964.

[5] V. A. SOLONNIKOV, *A Priori Estimates for Second-Order Parabolic Equations*, American Math. Soc. Translactions Series 2, Vol. 5.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e F. Cafiero.

Problema esterno di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine *

Nota di FAUSTO ACANFORA **
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 4 febbraio 1978)

RIASSUNTO. — Si dimostra un teorema di esistenza e regolarità della soluzione del problema di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui.

SUMMARY. — Existence and regularity theorem of exterior Dirichlet's problem for a class of second order elliptic equations with discontinuous coefficients.

Il problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche del secondo ordine è stato studiato da vari autori in ipotesi e con tecniche diverse. Dapprima da GIRAUD [3] e KRZYZANSKI [4] mediante la tecnica di traduzione del problema in equazione integrale. Più recentemente il problema è stato studiato da MEYERS e SERRIN [5] nella ipotesi che i coefficienti dell'equazione siano hölderiani sui compatti mediante la tecnica delle cosiddette φ-successioni [1]. Il caso in cui i coefficienti sono discontinui è stato trattato, per quanto mi risulti, solo per le equazioni di tipo variazionale da BOTTARO-MARINA [2] che si pongono per altro nel caso di un qualsiasi aperto non limitato. Scopo del presente lavoro è di studiare l'esistenza e la regolarità della soluzione del problema esterno relativo alle equazioni a coefficienti discontinui in ipotesi simili a quelle assunte da C. MIRANDA in [8] le quali consentono per altro di stabilire ulteriori proprietà di regolarità della soluzione.

* Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA-CNR.
** Istituto di Matematica « R. Caccioppoli » dell'Università di Napoli.
[1] Per una più ampia bibliografia vedi [6].

1. - Notazioni, ipotesi e richiamo di risultati.

Indicheremo con Ω [2] un aperto limitato di R^n con $n \leq 3$ la cui frontiera sia di classe C^3 e, fissato un numero reale $R_o > \sup_{x \in \Omega} |x|$, porremo per ogni $R \in [R_o, +\infty[: \Omega_R = (R^n - \bar{\Omega}) \cap B(0, R)$ dove con $B(0, R)$ intendiamo la sfera aperta di centro l'origine e raggio R. Denoteremo con $L^p(\Omega)$ ($p \geq 1$ ed Ω aperto qualsiasi) lo spazio delle funzioni misurabili su Ω e di potenza p-sima integrabile munito della norma:

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |x|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Con $H^{r,p}(\Omega)$ ($r \in N, p \geq 1$) l'ordinario spazio di Sobolev con la norma:

$$\| u \|_{r,p} = \sum_{j}^{1,\ldots,r} |D^j u|_p$$

dove si deve intendere:

$$|D^j u|_p = \sup_{|\alpha|=j} |D^\alpha u|_p$$

e con $H_o^{r,p}(\Omega)$ la chiusura in $H^{r,p}(\Omega)$ dello spazio $C_o^r(\Omega)$ formato dalle funzioni continue in Ω assieme alle loro derivate fino all'ordine r ed a supporto compatto in Ω. Facciamo ora alcuni richiami sulle equazioni ellittiche di tipo variazionale. Assegnato su un qualsiasi aperto di R^n l'operatore differenziale del secondo ordine:

$$L u = - (a_{ik} u_{x_i} + d_k u)_{x_k} + (b_i u_{x_i} + c u)$$

i cui coefficienti verificano le condizioni:

a) $a_{ik}(x)$ misurabili su Ω ed esiste un numero ν per cui

$$a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \geq \nu |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in R^n \text{ e per q.o } x \in \Omega$$

b) $b_i, d_k \in L^n(\Omega)$ $i, k = 1, 2, \ldots, n$ $\qquad c \in L^{n/2}(\Omega)$

in [2] si dimostra il seguente:

Teorema 1.1. — *Nelle ipotesi* a) *e* b) *e se inoltre esiste un numero* $K > 0$ *per cui si abbia (nel senso delle distribuzioni)*:

$$C - \sum_{k=1}^{n} (d_k)_{x_k} \geq K > 0 \tag{1.1}$$

[2] Con Ω, salvo esplicito avviso contrario, indicheremo un aperto limitato di R^n con frontiera di classe C^3.

esiste una costante M_0, *dipendente sola da* ν, n, K *e dalle norme in* $L^n(\Omega)$ *dei coefficienti* b_i *e* d_k, *tale che per ogni (eventuale) soluzione debole* u *del problema:*

$$L\,u = f \in L^2(\Omega) \qquad u \in H_0^{1,2}(\Omega) \tag{1.2}$$

vale la formula di maggiorazione

$$|u|_2 + |Du|_2 \leq M_0 |f|_2 \tag{1.3}$$

Prendiamo ora a considerare l'equazione:

$$a_{ik}(x)\, u_{x_i x_k} + b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u = f(x) \tag{1.4}$$

di cui diremo soluzione una qualsiasi funzione u di classe $H_{loc}^{2,2}(\Omega)$ che la soddisfa quasi ovunque. Faremo sui soefficienti della (1.4) le ipotesi seguenti:

A) $a_{ik}(x) \in L^\infty(R^n - \bar{\Omega})$ $\dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x_h} \in L^n(R^n - \bar{\Omega})$ $h,i,k = 1, 2, \ldots, n$

B) $b_i(x) \in L^n(R^n - \bar{\Omega})$ $\qquad c(x) \in L^{n/2}(R^n - \bar{\Omega})$ $\quad i = 1, \ldots, n$

C) esistono due numeri positivi m_0 ed m_1 tali che:

$$m_0 |\xi|^2 \leq a_{ik}(x)\, \xi_i \xi_k \leq m_1 |\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in R^n \text{ e per q. o. } x \in R^n - \bar{\Omega}$$

D) esiste $K_0 > 0$ tale che (nel senso delle distribuzioni):

$$c(x) \leq -K_0 < 0$$

Sussiste allora il seguente:

TEOREMA 1.2. — *Nelle ipotesi* A), B), C), D) *il problema esterno*

$$a_{ik}(x)\, u_{x_i x_k} + b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u = f(x) \in L^2(R^n - \bar{\Omega})$$
$$u \in H_0^{1,2}(R^n - \bar{\Omega}) \cap H_{loc}^{2,2}(R^n - \bar{\Omega})$$

ammette al più una soluzione per cui vale la (1.3).

La dimostrazione è un'immediata conseguenza del teorema 1.1. quando si osservi che alla (1.4) si può dare la forma variazionale:

$$(a_{ik}\, u_{x_i})_{x_k} + [b_i - (a_{ik})_{x_k}]\, u_{x_k} + c(x)\, u = f(x) \tag{1.6}$$

e che ogni soluzione del problema (1.5) è anche soluzione debole della (1.6) verificante la condizione al contorno $u \in H_o^{1,2}(R^n - \bar{\Omega})$. Nell'ipotesi che valga la A) introduciamo ora alcune nuove notazioni. Per ogni $R \in [R_o, +\infty[$ e per ogni $\sigma \geq 0$ porremo:

$$a_n(\sigma, R) = \sup \left\{ \left(\int_E |A(x)|^n \, dx \right)^{1/n}, \; E \subseteq \Omega_R \; m(E) \leq \sigma \right\}$$

dove intendiamo:

$$A(x) = \sum_{i,k,r}^{1,\ldots,n} \left| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} \right|$$

Osserviamo che per ogni $R \in [R_o, +\infty[$ la funzione $a_n(\sigma, R)$ risulta positiva, non decrescente e limitata in $[0, +\infty[$ e si ha:

$$\lim_{\sigma \to 0+} a(\sigma, R) = 0, \quad \lim_{\sigma \to \infty} a_n(\sigma, R) = \left(\int_{\Omega_R} A|^n \, dx \right)^{1/n}$$

Nell'ipotesi A) si può inoltre fare la posizione:

$$a_n(\sigma) = \sup \left\{ \left(\int_E |A|^n \, dx \right)^{1/n} ; \; E \subseteq R^n - \bar{\Omega}, \; m(E) \leq \sigma \right\}$$

con la quale risulta $a_n(\sigma) \geq a_n(\sigma, R) \; \forall \sigma \in [0, +\infty[$ e $\forall R \in [R_o, +\infty[$.

Poniamo ancora per ogni $\alpha > 0$ ed $R \in [R_o, +\infty[$

$$\omega_n(\alpha, R) = a_n\left(\frac{1}{\alpha^n} \int_{\Omega_R} |A|^n \, dx, \; R \right) \quad \omega_n(\alpha) = a_n\left(\frac{1}{\alpha^n} \int_{R^n - \bar{\Omega}} |A|^n \, dx \right)$$

Come subito si vede le precedenti funzioni sono decrescenti, infinitesime per $\alpha \to +\infty$, convergenti per $\alpha \to 0+$ e risulta

$$\omega_n(\alpha, R) \leq \omega_n(\alpha) \qquad \forall \alpha \in R \quad \forall R \in [R_o, +\infty[$$

2. - Costruzione e studio delle funzioni X_{rs}.

Per ogni funzione u di classe $C^1(\bar{\Omega})$ indichiamo con u_i le componenti del vettore, definito su $\partial\Omega$, grad $u - u_o \chi$ dove con $\chi = (X_1, \ldots, X_n)$ intendiamo il versore della normale esterna a $\partial\Omega$ e con u_o la derivata

di u secondo la direzione χ. Detta poi Σ una porzione di superficie regolare contenuta in $\partial\Omega$ di equazioni parametriche:

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (t_i) \in D$$

si ha (vedi [8])

$$(2.1) \qquad u_i(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{ik}(t) \frac{\partial u}{\partial t_k} \qquad i = 1, \ldots, n$$

dove le ω_{ik} sono funzioni di t che non dipendono da u. Determiniamo ora l'espressione esplicita delle ω_{ik} ponendoci per semplicità nel caso $n = 3$. Considerata la funzione $u[x_i(t) + \rho X_i(t)]$ si ha il sistema nelle incognite $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \rho \frac{\partial X_1}{\partial t_i}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \rho \frac{\partial X_2}{\partial t_i}\right) \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} X_3$$

il cui determinante $W(t)$ per $\rho = 0$ risulta dato da:

$$W^2(t) = \left\| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)} \right\|^2$$

risolvendo tale sistema e tenendo presente che

$$u_i = -\frac{\partial u}{\partial x_i} - X_i \sum_{h \neq i} X_h \frac{\partial u}{\partial x_h}$$

si ottengono le relazioni:

$$u_1 = \left(\frac{X_3}{W}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} - \frac{X_2}{W}\frac{\partial x_3}{\partial t_2}\right)\frac{\partial u}{\partial t_1} + \left(\frac{X_2}{W}\frac{\partial x_3}{\partial t_1} - \frac{X_3}{W}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)\frac{\partial u}{\partial t_2}$$

$$(2.2) \qquad u = \left(\frac{X_1}{W}\frac{\partial x_3}{\partial t_2} - \frac{X_3}{W}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}\right)\frac{\partial u}{\partial t_1} + \left(\frac{X_3}{W}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} - \frac{X_1}{W}\frac{\partial x_3}{\partial t_1}\right)\frac{\partial u}{\partial t_2}$$

$$u = \left(\frac{X_3}{W}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} - \frac{X_1}{W}\frac{\partial x_2}{\partial t_3}\right)\frac{\partial u}{\partial t_1} + \left(\frac{X_1}{W}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} - \frac{X_2}{W}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)\frac{\partial u}{\partial t_2}$$

i cui coefficienti non dipendono da u. Definiamo poi facendo uso delle (2.1) le funzioni:

$$X_{rs}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{sk}(t) \frac{\partial X_r}{\partial t_k}$$

Supposto ora che $\Sigma \subseteq \Gamma_{R_o} = \partial B(0, R_o)$ per ogni $R \in [R_o, +\infty[$ consideriamo la porzione di superficie di equazioni $x_i = R X_i(t)$ su cui le funzioni X_{rs} assumono la forma:

$$X_{rs}(t, R) = \sum_{k=1}^{n-1} co_{sk}(t, R) \frac{\partial X_r}{\partial t_k}$$

ed osserviamo che le $X_{rs}(t, R)$ sono limitate nel dominio $D \times [R_o, +\infty[$ infatti (ponendoci nel caso $n = 3$) si ha ad esempio:

$$X_{11}(t, R) = \frac{1}{R W} \left[\left(X_3 \frac{\partial X_2}{\partial t_2} - X_2 \frac{\partial X_3}{\partial t_2} \right) \frac{\partial X_1}{\partial t_1} + \left(X_2 \frac{\partial X_3}{\partial t_1} - X_3 \frac{\partial X_2}{\partial t_1} \right) \frac{\partial X_1}{\partial t_2} \right]$$

dove $W^2(t) = \dfrac{\partial (X_1, X_2, X_3)}{(\partial t_1, t_2)}$ da cui l'asserto.

3. - Teoremi di esistenza e regolarità.

Dimostriamo ora il seguente teorema che precisa il teorema 1.III di [8] per quanto concerne la dipendenza della costante che interviene nella formula di maggiorazione da R:

Teorema 3.1. — *Fissato* $R \in [R_o, +\infty[$, $f \in L^2(\Omega_R)$ *il problema di*

$$\sum a_{ik} p_{ik} = f \qquad u \in H_o^{1,2}(\Omega_R) \cap H^{2,2}(\Omega_R) \tag{3.1}$$

ammette una ed una sola soluzione, esiste inoltre una costante M *che dipende solo da* m_o, m_1 *e dalla funzione* $a_n(\sigma, R)$ (*quindi da* $a_n(\sigma)$ *nell'ipotesi* A)) *tale che*:

$$|u|_2 + |Du|_2 + |D^2 u|_2 \leq M_1 |f|_2 \tag{3.2}$$

Dim. — Come è noto basta dimostrare la (3.2) nell'ipotesi che $a_{ik} C^2(\bar{\Omega}_R)$, $f \in C^2(\bar{\Omega}_R)$ nel qual caso il problema (3.1) ammette una unica soluzione $u \in C^2(\bar{\Omega}_R) \cap C^3(\Omega_R)$. Detta θ una funzione positiva di

classe $C^1(\bar{\Omega}_R)$ dalla nota formula di maggiorazione [7]:

$$(3.3) \qquad m_o^2 \sum_{i,k}^{1,\dots,n} p_{ik}^2 \leq f^2 + \sum_{i,k,r,s}^{1,\dots,n} (a_{ir}\, a_{ks} - a_{ik}\, a_{rs}) \frac{\partial}{\partial x_k} (p_i\ p_{rs})$$

segue (vedi la (2.4) di [8]):

$$(3.4) \qquad m_o^2 \int_{\Omega_R} \theta \sum p_{ik}^2\, dx \leq \int_{\Omega_R} \theta f^2\, dx + \int_{\partial\Omega_R} \theta \sum p_i\, p_{rs}\, (a_{ir}\, a_{ks} - a_{ik}\, a_{rs})\, d\sigma$$

$$+ \int_{\Omega_R} \sum p_i\, p_{rs} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} (a_{ik}\, a_{rs} - a_{ir}\, a_{ks})\, dx$$

$$+ \int_{\Omega_R} \theta \sum p_i\, p_{rs} \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ik}\, a_{rs} - a_{ir}\, a_{ks})\, dx$$

detti J_1, J_2, J_3 ed J_4 gli integrali che figurano nella (3.4) si ha per $\theta = \theta_\nu = \left(\sum_{i,k}^{1,\dots,n} a_{ik}\, p_i\, p_k \right)^\nu$ con $\nu \geq 0$ e $q > 2$:

$$(3.5) \qquad J_1 \leq \gamma_1 |f|_q^2 |\, D\, u\, |_{\frac{2\nu q}{q-2}}^{2\nu}$$

dove γ_1 dipende solo da m_1, ν ed n. Per maggiorare J_2 procediamo nel modo seguente:

dette $S_1, \dots, S_p, S_{p+1}, \dots, S_{p+p'}$, $p + p'$ porzioni di superficie regolari a due prove di dunti interni comuni e tali che:

$$(3.6) \qquad \partial\, \Omega = \bigcup_{l=1}^{p} S_l \qquad\qquad \Gamma_R = \bigcup_{p+p'}^{l=p+1} S$$

di ogni S_l fissiamo una rappresentazione parametrica regolare

$$(3.7) \qquad x_i = x_i^{(l)}\ (t_1, \dots, t_{n-1}) \qquad\qquad t \in D_l$$

Posto:

$$\lambda_i = \sum_{k}^{1,\dots,n} a_{ik}\, X_k \qquad\qquad \mu = \sum_{i,k}^{1,\dots,n} a_{ik}\, X_i\, X_k$$

si ha su $\partial\, \Omega_R$ procedendo come in [8]:

$$(3.8) \qquad \sum_{i,k,r,s}^{1,\dots,n} p_i\, p_{rs}\, (a_{ir}\, a_{ks} - a_{ik}\, a_{rs})\, X_k = \sum_{i}^{1,\dots,n} p_i^2 \left[\sum_{r,s}^{1,\dots,n} X_{rs}\, \lambda_r\, \lambda_s - \mu \sum_{r,s}^{1,\dots,n} a_{rs}\, X_{rs} \right]$$

Ne segue:

$$(3.9)\qquad \sum_{i,k,r,s} \int_{\partial\Omega_R} p_i\, p_{rs}\, X_k\, \theta_\nu\, (a_{ir}\, a_{ks} - a_{ik}\, a_{rs})\, d\sigma \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{p} m_1^{\nu+2}\, (n^2+1) \sum_{r,s}^{1,\ldots,n} \sup_{t\in D_l} |X_{rs}(t)| \int_{S_l} (\sum p_i^2)^{\nu+1}\, d\sigma$$

$$+ \sum_{l=p+1}^{p+p'} m_1^{\nu+2}\, (n^2+1) \sum_{r,s}^{1,\ldots,n} \sup |X_{rs}(t, R)| \int_{S_l} (\sum p_i^2)^{\nu+1}\, d\sigma$$

e poiché le considerazioni svolte nel numero precedente assicurano che esiste un numero H che non dipende da R per cui risulta:

$$|X_{rs}(t, R)| \leq H \qquad \forall\, r, s \in \{1, \ldots, n\} \qquad \forall\, t \in \bigcup_{l=p+1}^{p+p'} D_l$$

dalla (3.9) segue l'esistenza di una costante γ_2 che dipende solo da m_1, ν ed n per cui si ha

$$(3.10)\qquad J_2 \leq \gamma_2 \int_{\partial\Omega_R} (\sum p_i^2)^{\nu+1}\, d\sigma$$

Osservando poi che:

$$\int_{\partial\Omega_R} \varphi^2\, d\sigma \leq \bar{\gamma}\, |\varphi|_2\, \|\varphi\|_{1,2} \qquad \forall\, \varphi \in H^{1,2}(\Omega_R)$$

dalla (3.10) si ricava:

$$(3.11)\qquad J_2 \leq \gamma_2' \left[|D u|_{(2\nu+1)}^{(2\nu+1)} + P_\nu^{1/2}\, |D u|_{(2\nu+1)}^{\nu+1} \right]$$

essendo:

$$P_\nu = \int_{\Omega_R} (\sum p_i^2)^\nu \sum p_{ik}^2\, dx \text{ e } \gamma_2' \text{ indipendente da R.}$$

Per maggiorare J_3 e J_4 basta ripetere senza alcuna variante il procedimento usato in [8] e si ha:

$$(3.12)\qquad J_3 \leq \gamma_3 \left[|f|_q\, P_\nu^{1/2}\, |D u|_{(2\nu+1)}^{\nu+1} + I \right]$$

con

$$I + \int_{\Omega_R} A(x) \left(\sum p_i^2\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \left(\sum p_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}} d x$$

e γ_3 che dipende sono da m_1 e da ν ovvero:

$$J_4 \leq \gamma_4 I \tag{3.13}$$

con γ_4 dipendente solo da m_1.

Si ha poi per ogni $\alpha > 0$:

$$I \leq \gamma_0 P_\nu^{\frac{1}{2}} \left[\alpha \, | D u |^{\nu+1}_{2(\nu+1)} + \omega_n(\alpha, R) \, | D u |^{\nu+1}_{\frac{2n(\nu+1)}{n-2}} \right] \tag{3.14}$$

con γ_0 che dipende solo da n.

Tenendo ora presenti le formule di maggiorazione (3.4), (3.5), (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) si può scrivere:

$$P_\nu \leq \gamma \left[| f |_q^2 \, | D u |^{2\nu}_{\frac{2\nu q}{q-2}} + | D u |^{2(\nu+1)}_{2(\nu+1)} + P_\nu^{\frac{1}{2}} \, | D u |^{\nu+1}_{2(\nu+1)} \right. \tag{3.15}$$

$$\left. + | f |_q P_\nu^{\frac{1}{2}} \, | D u |^{\nu}_{\frac{2\nu q}{q-2}} + \alpha P_\nu^{\frac{1}{2}} \, | D u |^{\nu+1}_{2(\nu+1)} + P_\nu^{\frac{1}{2}} \, \omega_n(\alpha, R) \, | D u |^{\nu+1}_{\frac{2n(\nu+1)}{n-2}} \right]$$

con γ che dipende da ν, m_0, m_1 ed $\omega_n(\alpha, R)$ ovvero per γ' che dipende dagli stessi parametri:

$$P_\nu \leq \gamma' \left[| f |_q^2 \, | D u |^{2\nu}_{\frac{2\nu q}{q-2}} + \right. \tag{3.16}$$

$$\left. + (1 + \alpha^2) \, | D u |^{2(\nu+1)}_{2(\nu+1)} + \omega_n(\alpha, R) \, | D u |^{2(\nu+1)}_{\frac{2n(\nu+1)}{n-2}} \right]$$

da cui:

$$P_\nu \leq \gamma' \left[| f |_q^2 \sup | D u |^{2\nu} + (1 + \alpha^2) \, | D u |^{2(\nu+1)}_{2(\nu+1)} + \right. \tag{3.17}$$

$$\left. + \omega_n(\alpha, R) \, | D u |^{2(\nu+1)}_{\frac{2n(\nu+1)}{n-2}} \right]$$

ed osservato che:

$$| D \, | D u |^{\nu+1} | \leq (\nu + 1)^2 \, | D u |^{2\nu} \, | D^2 u |^2$$

per il teorema di immersione di Sobolev applicato a $|Du|^{\nu+1} \in H^{1,2}(\Omega_R)$ si ha:

$$|Du|^{\frac{2(\nu+1)}{\frac{2n(\nu+1)}{n-2}}} \leq (\nu+1)^2 \bar{K} [P_\nu + |Du|^{\frac{2(\nu+1)}{2(\nu+1)}}] \tag{3.18}$$

con $\bar{K}$, costante di immersione di $H^{1,2}$ in $L^{\frac{n-2}{2n}}$ dipendente solo dal cono caratteristico di Ω_R e quindi non da R.

Posto ora nelle relazioni (3.17) e (3.18) $\nu = 0$, tenendo presente che $\lim_{\alpha \to \infty} \omega_n(\alpha, R) = 0$ e scegliendo α sufficientemente grande dal teotema (1.1) segue:

$$|D^2 u| \leq \mu |f|_2 \tag{3.19}$$

con μ che dipende da m_0, m_1 ed $\omega_n(\alpha, R)$.

Dalla (3.19) ricordando che $\omega_n(\alpha, R) \leq \omega_n(\alpha)$ ed ancora il teorema (1.1) segue la (3.2) con $M_1 = M_0 + \mu$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA 3.2. — *Nelle ipotesi* A), B) *e* C) *il problema esterno*:

$$\begin{gathered} a_{ik}(x)\, p_{ik} = f(x) \in L^2(R^n - \bar{\Omega}) \\ u \in H_0^{1,2}(R^n - \bar{\Omega}) \cap H^{2,2}(R^n - \bar{\Omega}) \end{gathered} \tag{3.20}$$

ammette una ed una sola soluzione per cui vale la formula di maggiorazione:

$$|u|_2 + |Du|_2 + |D^2 u|_2 \leq M |f|_2 \tag{3.21}$$

Dim. — Per ogni $m \in N$ sia ω_m la soluzione del problema

$$\begin{gathered} a_{ik}\, p_{ik} = f(x) \\ u \in H_0^{1,2}(\Omega_{R_{0+m}}) \cap H^{2,2}(\Omega_{R_{0+m}}) \end{gathered} \tag{3.22}$$

si ha per il teorema 3.1.

$$|u|_{2,\Omega_{R_{0+m}}} + |Du|_{2,\Omega_{R_{0+m}}} + |D^2 u|_{2,\Omega_{R_{0+m}}} \leq M_1 |f|_{2,\Omega_{R_{0+m}}} \tag{3.23}$$

con M_1 costante indipendente da m.

Detto poi, per ogni $m \in N$, P_m un operatore di prolungamento [3] da $H^{2,2}(\Omega_{R_{o+m}})$ in $H^{2,2}(R^n)$, che esiste per un noto teorema di Calderón, osserviamo che dalla relazione

$$\| P_m u_m \|_{2,R^n} \leq K \| u_m \|_{2,\Omega_{R_{o+m}}} \quad \forall m \in N$$

e dalla (3.23) segue in modo ovvio:

$$\| P_m u_m \|_{2,R^n - \bar{\Omega}} \leq K M_1 | f |_{2,R^n - \bar{\Omega}} \tag{3.24}$$

Essendo $\{P_m u_m\}$ limitata in $H_o^{1,2}(R^n - \bar{\Omega}) \cap H^{2,2}(R^n - \bar{\Omega})$ essa è relativamente debolmente compatta ed ammette quindi un'estratta che converge debolmente ad una funzione $u \in H_o^{1,2}(R^n - \bar{\Omega}) \cap {}^{2,2}(R^n - \bar{\Omega})$ che come subito si verifica è soluzione del problema (3.20) e soddisfa la (3.24).

Osservazione. I teoremi stabiliti in questo numero si estendono senza difficoltà all'equazione:

$$a_{ik} p_{ik} + b_i p_i + c u = f$$

purchè i coefficienti di quest'ultima verifichino le condizioni A), B), C) e D).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.

[2] G. Bottaro, M. E. Marina, *Problema di Dirichlet per le equazioni ellittice di tipo variazionale su insiemi non limitati*, Bollettino U.M.I., (4), **8**, 46-56 (1973).

[3] Giraud, *Nouvelle généralisation des problèmes relatif aux operations du type elliptique*, Ann. Soc. Polonaise de Mathématique, **14**, 74-115 (1935).

[4] Krzyzanski, *Sur le probleme de Dirichlet pour l'equation lineare du type elliptique dans un domaine borné*, Rend. Acc. Nazionale dei Lincei, (8), **4**, 408-416 (1948).

[5] N. Meyers, J. Serrin, *The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations*, J. Math. Mech., **9**, 513-538 (1960).

[6] C. Miranda, *Partial differential equations of elliptic type*, Ergebnisse der Mathematik, Springer Verlag 1970.

[7] C. Miranda, *Alcune limitazioni integrali per le equazioni lineari ellittiche di secondo ordine*, Ann. Mat. pura e appl., **49**, 375-384 (1960).

[8] C. Miranda, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coeicienti discontinui*, Ann. Mat. pura e appl., **63**, 353-386 (1963).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, F. Cafiero e C. Ciliberto.

[3] Per la nozione di operatore di prolungamento e per il teorema di Calderon vedi [1] cap. IV.

L'uso della cromatografia liquida ad alta pressione nell'analisi degli inquinanti cloroorganici

Nota di Sergio Chiosi *, Raffaella Di Costanzo *,
Ornella Montagna * e Giacomino Randazzo *
presentata dal socio ordinario Vincenzo Leone

(Adunanza del 4 febbraio 1978)

Riassunto. — La cromatografia liquida ad alta pressione è una nuova metodica utilizzata per la determinazione dei pesticidi presenti in piante ed animali. I risultati mostrano che questa tecnica non è selettiva per l'analisi dei PCB e DDE, mentre è applicabile quando i DDE sono trasformati in benzofenoni.

Summary. — High-performance liquid chromatography is introduced as a procedure for determination of pesticides in plant or animal materials. The results have shown that this technique, although not selective for mixtures of PCB and DDE, allows fractionation and quantitative determination of PCB and DDE when these latter are transformed in benzophenone derivatives.

I policlorodifenili (PCB) sono prodotti chimici utilizzati soprattutto come additivi per vernici, plastificanti per adesivi, stabilizzanti di polimeri, dielettrici, isolanti.

Possono inoltre entrare nella tecnologia della gomma e sono stati utilizzati nella formulazione di prodotti antiparassitari.

Essi sono miscele di tricloro fino ad octaclorodifenili isomeri, ossia sono derivati policlorurati di sostituzione del difenile.

I PCB sono stati trovati come contaminanti ambientali per la prima volta da Jensen [1] e successivamente da molti ricercatori in varie parti del mondo [2-13].

Essi sono composti molto stabili e non vengono distrutti né da agenti chimici né da agenti fisici. Infatti non sono reattivi e l'incenerimento di manufatti che li contengono porta solo alla loro vaporizzazione nell'atmosfera con conseguente ritorno alla superficie della terra [11].

* Istituto di Chimica Organica e Biologica dell'Università di Napoli, Via Mezzocannone 16 - 80134 Napoli.

I PCB interferiscono seriamente nella determinazione degli insetticidi cloro-organici [1] sia per quanto riguarda l'aspetto analitico [14] che quello strumentale [15].

I metodi descritti in letteratura [16] per detta determinazione prevedono:

a) triturazione ed omogenizzazione del campione biologico sotto indagine.

b) estrazione dei PCB, DDT, DDE, DDD con solventi organici (generalmente esano o etere di petrolio 40-70°).

c) ripartizione con acetonitrile della fase organica per eliminare i grassi.

d) cromatografia su colonna di Florisil o di Celite-H^+ o su allumina-$AgNO_3$ o carbone attivo [17] per separare i PCB dal gruppo dei DDT, DDE, DDD.

e) trasformazione dei PCB in decaclorobifenile [18].

f) dosaggio gas-cromatografico.

È facile prevedere che il punto critico della sequenza descritta è connesso al punto *d*. Questi problemi sono stati ben focalizzati da Zitko [18] ed Jensen [19]. Dalla lettura di questi lavori è possibile concludere che non esiste una metodica cromatografica generale veramente efficiente ed unica per separare i PCB dai DDE che sono i principali interferenti prima della determinazione gas-cromatografica. Detta separazione è necessaria perché i picchi gas-cromatografici relativi ai DDE hanno tempo di ritenzione uguale a quello di alcuni picchi dovuti ai PCB. Questi ultimi inoltre si rivelano al gas-cromatografo come una serie di picchi il cui numero dipende dalla capacità di risoluzione della colonna e la loro quantitivizzazione è spesso difficile. Quest'ultimo problema è stato superato trasformando i PCB in decaclorobifenile. Questo composto è ottenuto dai PCB, previa separazione dai DDT, DDE, DDD, per reazione con $SbCl_5$ a 170 °C per una notte in fiala chiusa.

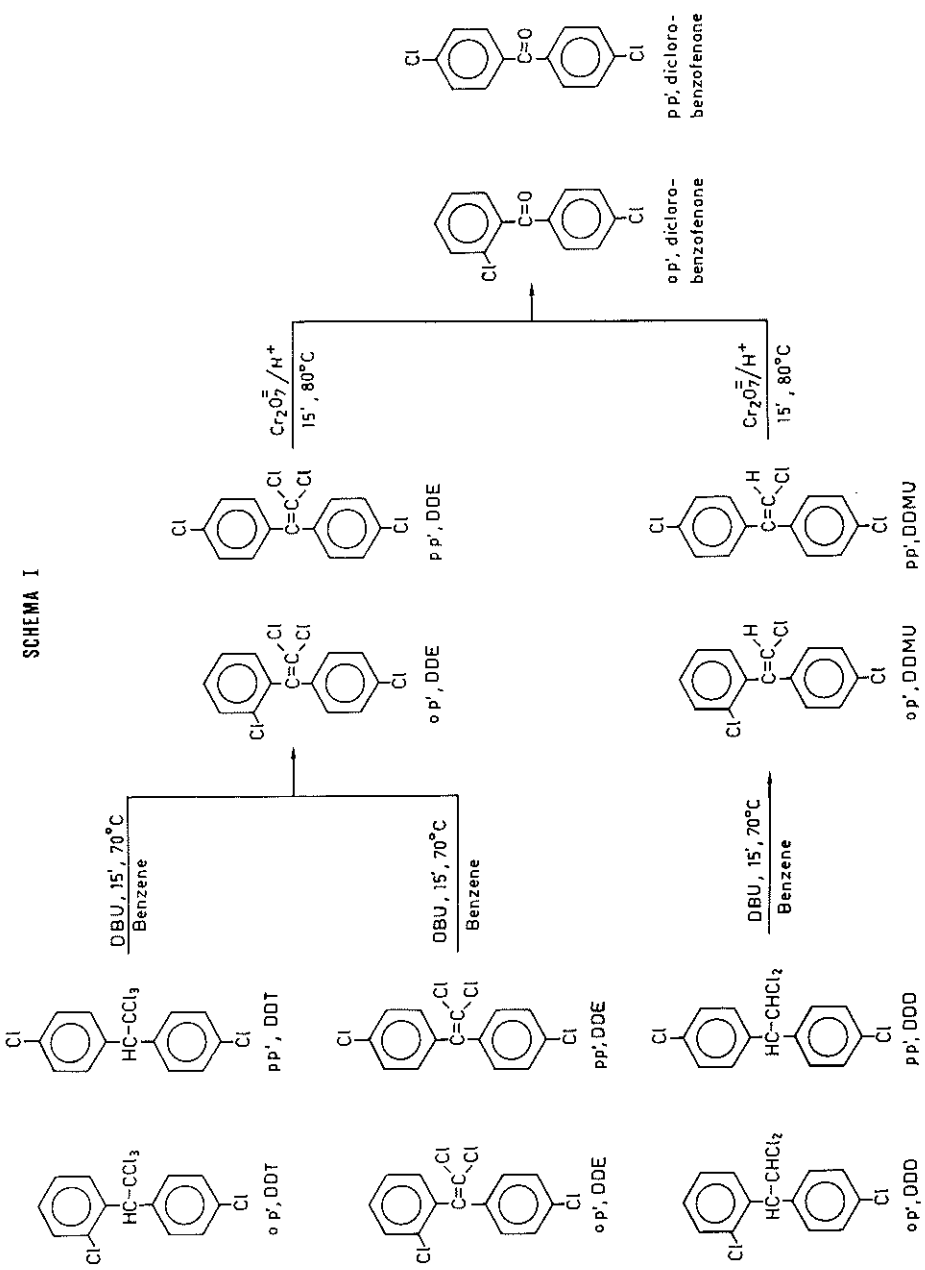
Allo scopo di evitare la lunga e complessa separazione di cui al punto *d*) dello schema di analisi, si sono considerate due possibili alternative:

1) analisi in miscela dell'estratto di cui al punto *c*) utilizzando la cromatografia liquida ad alta pressione.

2) trasformazione chimica dei DDT, DDE, DDD in benzofenoni mediante reazioni di deidroalogenazione ed ossidazione (Schema I). Queste reazioni lasciano inalterati i PCB. I prodotti ottenuti sono analizzati con un cromatografo liquido ad alta pressione. Le indagini relative al punto 1 sono state condotte utilizzando un cromatografo

[1] In particolare diclorodifenildicloroetilene (DDE), diclorodifenildicloroetano (DDD), diclorodifeniltricloroetano (DDT) nei loro isomeri p, p′ e o, p′.

SCHEMA I


o p', DDT
p p', DDT
DBU, 15', 70°C
Benzene
o p', DDE
p p', DDE
DBU, 15', 70°C
Benzene
o p', DDD
p p', DDD
DBU, 15', 70°C
Benzene
$Cr_2O_7^{=}/H^+$
15', 80°C
o p', diclorobenzofenone
p p', diclorobenzofenone
$Cr_2O_7^{=}/H^+$
15', 80°C
o p', DDMU
p p', DDMU

liquido ad alta pressione della Hewlett-Packard mod. 1010 B equipaggiato con un rivelatore 1032 UV a 254 nm, utilizzando una colonna di Linchrosorb Sy-100 5 μ lunga 50 cm e larga 4 mm, eluendo con esano saturo di acqua ad una pressione iniziale di 120 bar e con un flusso

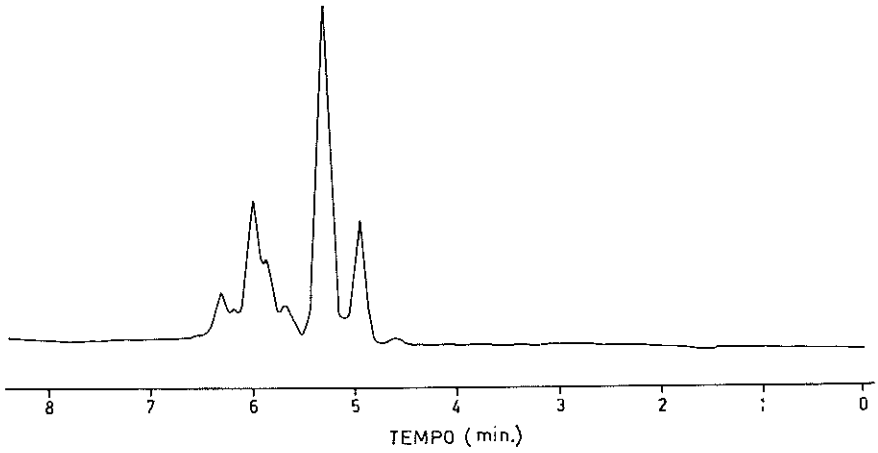


FIG. 1. - PCB.

di 1,4 ml/min. Le soluzioni esaminate contenevano 10-100 ppm e la sensibilità era di 0,16 AUFS; il volume iniettato 10 μl.

La fig. 1 mostra il cromatogramma di eluizione relativo ai PCB, la fig. 2 è relativa alla famiglia dei DDT e la fig. 3 è relativa alla mi-

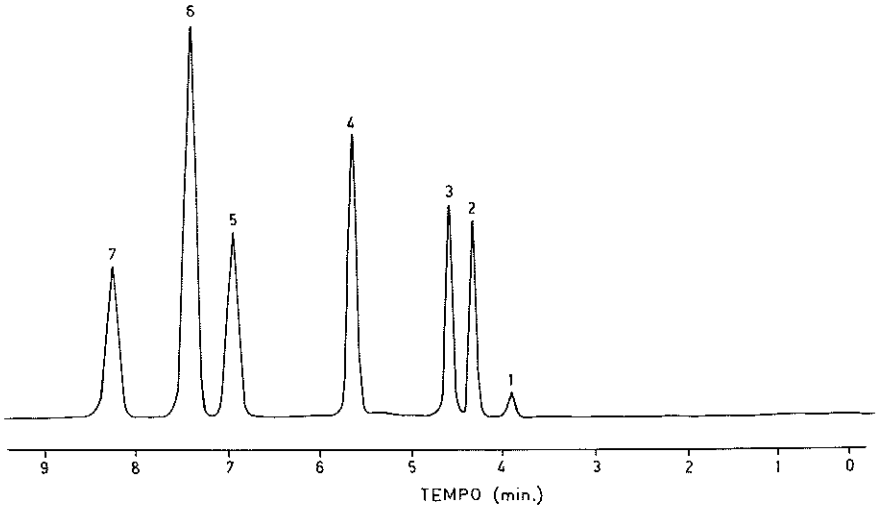


FIG. 2. - 1 Impurezza
2 Diclorobenzene
3 Clorobenzene
4 pp' DDE
5 pp' DDD
6 op' DDT
7 pp' DDT

scela. I risultati mostrano che il picco relativo al p, p' DDE si sovrappone ad uno dei picchi dovuti ai PCB. Analogo risultato si è avuto variando le fasi mobili, i supporti ed i parametri che condizionano questa metodica.

Per quanto riguarda il punto 2, la miscela dei pesticidi e PCB è stata dapprima sottoposta a reazioni di deidroalogenazione: 20 mg di miscela reagiscono con 13 ml di una soluzione benzenica al 5 % in 1,5-diazabiciclo(5.4.0) undeca-5-ene(DBU) per 15' a 70°. La miscela di reazione, controllata su strato sottile di gel di silice utilizzando come eluente benzene o n-esano, mostrava la formazione quantitativa di

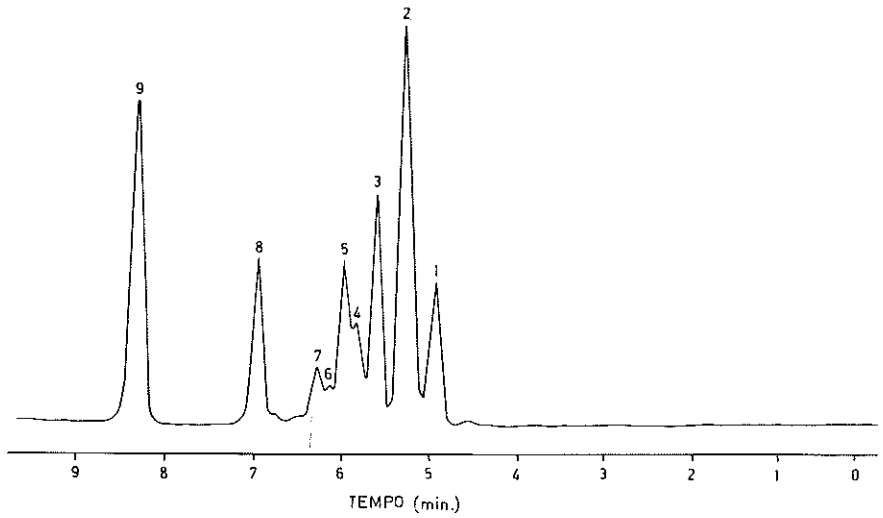


FIG. 3. - 1 PCB
2 PCB
3 PCB + pp' DDE
4 PCB
5 PCB
6 PCB
7 PCB
8 pp'DDD
9 pp'DDT

DDE e DDMU (1-cloro-2,2-bis-clorofenil) etilene (Schema I). I prodotti della reazione di deidroalogenazione erano direttamente ossidati con un eccesso di reattivo di Jones ($K_2Cr_2O_7$ 8N rispetto all'ossigeno in H_2SO_4) a 80° per 15'. Dopo tale tempo la miscela di reazione è raffreddata, diluita con acqua ed estratta con benzene caldo (3 × 20 ml).

Gli estratti organici riuniti sono lavati con acqua e successivamente con $NaHCO_3$ fino a neutralità, quindi anidrificati su Na_2SO_4 e portati a secco sotto pressione ridotta. Il residuo contenente una miscela di o, p'-p, p' diclorobenzofenone [21] e PCB, che non hanno subito trasformazione, è analizzato con un cromatografo liquido ad alta pressione Perkin-Elmer 1240 equipaggiato con un rivelatore 56 UV a 254 nm utilizzando una colonna di SIL-X-I lunga 0,5 m e larga 2,6 mm.

Nella tabella I sono riportate le condizioni sperimentali relative a tre esperimenti i cui cromatogrammi sono rappresentati nella Fig. 4.

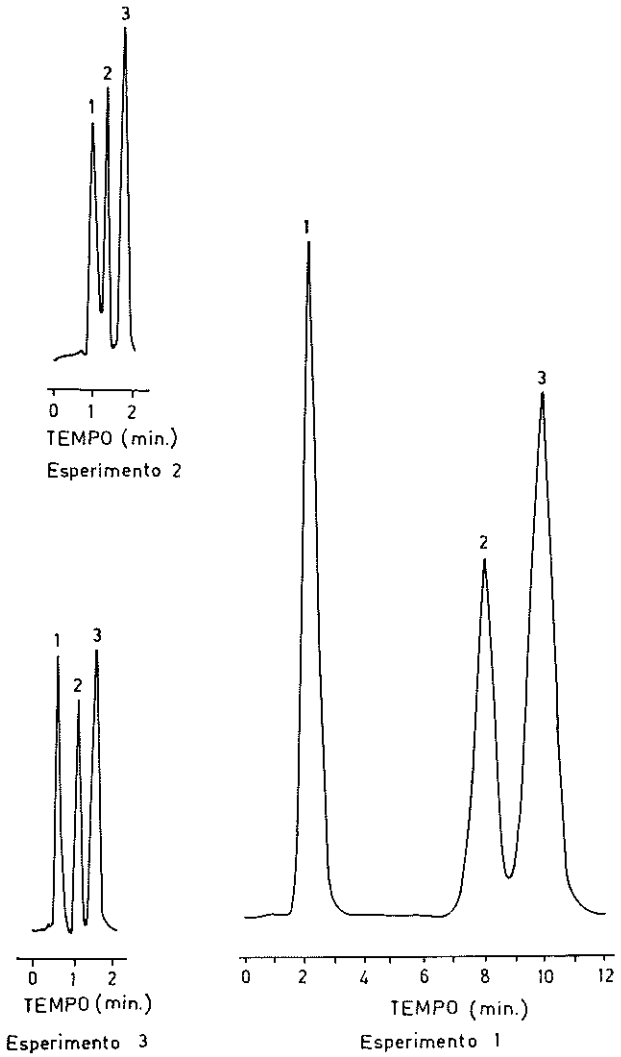


FIG. 4. - 1 PCB
2 pp' Diclorobenzofenone
3 op' Diclorobenzofenone

Le soluzioni esaminate contenevano da 1 a 10 ppm di sostanza e la sensibilità era di 0.16 AUFS; il volume iniettato era 1 µl. I risultati mostrano (Fig. 4) che nelle migliori condizioni in meno di due minuti è possibile determinare quantitativamente il contenuto di PCB e di clorobenzofenoni della soluzione in esame. Va notato che nelle nostre condizioni sperimentali la miscela dei PCB non viene risolta

e si registra come un unico picco evitando così possibili sovrapposizioni.

TABELLA I

Esperimenti	Pressione	Flusso	Eluente
1	100 psi	1 ml/230 sec	n-esano 12 $CHCl_3$ 2
2	500 psi	1 ml/ 44 sec	n-esano 9 etere etilico 1
3	700 psi	1 ml/ 30 sec	n-esano 95 etere etilico 5

Tentativi di analizzare la miscela dei PCB e di clorobenzofenoni per gas-cromatografia (colonna di 2 m $\times$ 2 mm impaccata con SE 30 all'1 % su cromosorb operando alla temperatura di 200 °C) non hanno avuto successo in quanto i tempi di ritenzione dei benzofenoni risultano uguali a quelli di alcuni picchi relativi ai PCB.

BIBLIOGRAFIA

[1] JENSEN S., New Scientist, **32**, 612 (1966).
[2] WIDMARK G. W., J.A.O.A.C., **50**, 1069 (1967).
[3] HOLMES D. C., SIMMONS J. H., TATTON J. O'G., Nature, Lond., **216**, 227 (1967).
[4] RISEBROUGH R. W., RIECHE P., HERMAN S. G., BEAKALL D. B., KIRVIN M. N., Nature, Lond., **220**, 1098 (1968); RISEBROUGH R. W., RIECHE P., OLCOTT H. S., Bull. Env. Cont. Toxicol., **4**, 192 (1969).
[5] KOEMAN J. H., TEN NOEVER DE BRAUW M. C., DE VOS R. H., Nature (Brit.), **221**, 1126 (1969).
[6] REYNOLDS L., Bull. Env. Cont. Toxicol., **4**, 128, (1969); Res. Rev. **34**, 27 (1971).
[7] BAGLEY G. E., REICHEL W. L., CROMARTIE E., J.A.O.A.C., **53**, 251 (1970).
[8] DUKE T. W., LOWE J. I., WILSON A. J. jr., Bull. Env. Cont. Toxicol., **5**, 171 (1970).
[9] JENSEN S., JOHNELS A. G., OLSSON M., OTTERLIND G., **224**, 247 (1969).
[10] HELLE H., JENSEN S., Ambio, **5**, 188 (1976).
[11] GUSTAFSON C. G., Environmental Sci. e Techonol., **4**, 814 (1970).
[12] WESTOO G., NOREU K., ANDERSON M., Varfoda, **22**, 9 (1970).
[13] BAJLEI S., BUNJAN P. J., FISSHIV - ICK F. B., Chemj Ind., **22**, 705 (1970).
[14] ANDERSON D. W., HICKEYX J. J., RISEBROUGH R. W., HUGHES D. F., CHRISTIANSEN R. E., Kan. Field. Natur., **89** (1969)
[15] DEUBERT K. H., Bull. Env. Cont. Toxicol., **5**, 379 (1970).
[16] PESTICIDE ANALYTICAL MANUAL, FOOD AND DRUG ADMINISTRATION, Vol. I, Section 211 (1970).
[17] BERG O. W., DIOSADY P. L. e RESS G. A. U., Bull. Env. Cont. Toxicol., **7**, 338 (1972).
[18] ARMOUR J A. e BURKE J. A., J.A.O.A.C., **56**, 987 (1973).
[19] ZITKO Y., Intern. Environm. Anal. Chem., **1**, 221 (1972).
[20] JENSEN S. e SUNDSTRON G., Ambio, **3**, 281 (1974).
[21] MILES J. E. W., J.A.O.A.C., **55** 1039 (1972).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Vincenzo Leone, Mario Covello e Rodolfo A. Nicolaus.

Influenza del raggio ionico sull'incorporazione dei metalli in tracce nelle valve del *Mytilus galloprovincialis* *

Nota di MARIO D'AGOSTINO **, AUGUSTO BIONDI ***,
GIOVANNA MISURACA ** e TERESA DE ANGELIS **
presentata dal socio ordinario RODOLFO ALESSANDRO NICOLAUS

(Adunanza del 4 febbraio 1978)

RIASSUNTO. — Il coefficiente di ripartizione ρ dei metalli bivalenti in tracce, tra valve e corpo del *Mytilus galloprovincialis*, dipende dalla differenza tra il pK_{ps} del carbonato del metallo inquinante e il pK_{ps} del $CaCO_3$ (ΔpK_{ps}) e dalla differenza, in valore assoluto, tra il raggio dello ione inquinante e quello di Ca^{2+} ($|\Delta r|$), secondo l'equazione empirica:

$$\rho = 0{,}7\,\Delta pK_{ps} - 2\,|\Delta r|.$$

L'influenza del raggio ionico, quindi, trascurabile per elevati valori del pK_{ps}, diventa determinante nelle vicinanze del pK_{ps} del $CaCO_3$.

SUMMARY. — The distribution coefficient ρ of bivalent trace metals, between valves and body of *Mytilus galloprovincialis*, depends upon the difference between the carbonate pK_{sp} of the polluting metal and the pK_{sp} of $CaCO_3$ (ΔpK_{sp}) as well as upon the absolute value of the difference between the radius of the polluting ion and that of Ca^{2+} ($|\Delta r|$), according to the empiric equation:

$$\rho = 0.7\,\Delta pK_{sp} - 2\,|\Delta r|.$$

This implies that the influence of ionic radius is negligible at high values of pK_{sp}, while it becomes significant in proximity of calcium carbonate pK_{sp}.

In un precedente lavoro [1], che aveva preso l'avvio da uno studio sull'inquinamento del Golfo di Napoli [2], si era giunti alla conclusione che il coefficiente di ripartizione ρ dei metalli in tracce, tra valve e corpo del Mytilus galloprovincialis, dipende dai pK_{ps} dei corrispondenti carbonati ed è praticamente indipendente dal raggio degli ioni. Anzi si era trovato che questi elementi si comportano in

* Lavoro eseguito con il contributo della Regione Campania.
** Istituto di Chimica Organica della Facoltà di Scienze, Università di Napoli - Via Mezzocannone 16, 80134 Napoli.
*** Istituto di Biorganica della Facoltà di Farmacia, Università di Napoli - Via L. Rodinò 22, 80138 Napoli.

due modi diversi a seconda che i pK_{ps} dei rispettivi carbonati sono minori o maggiori di 8,3, cioè del pK_{ps} del carbonato di calcio, definito come pK_{ps} d'interdizione. L'entità dell'incorporazione, infatti, quasi nulla nel primo caso, diventa, nel secondo, direttamente proporzionale al pK_{ps}. Questo andamento era stato attribuito alla estrema lentezza della cristallizzazione e al fatto che le distorsioni causate dalla cattura degli ioni inquinanti, essendo il numero di questi irrilevante rispetto a quello degli ioni calcio, potessero essere agevolmente sopportate dal reticolo cristallino. Si erano avute, però, delle perplessità a proposito dello zinco il cui coefficiente di ripartizione ($\rho = 0{,}03$) risultava enormemente più basso del previsto. Il problema si era artificiosamente risolto scegliendo come pK_{ps} del carbonato di zinco il valore di 7,5 che, tra tutti quelli discordanti riportati in letteratura (5,5; 7,5; 9,7; 10,7 e 10,8), più risultava aderente alla teoria. Già in quell'occasione, comunque, si era manifestato il sospetto che, in un intorno abbastanza ampio del pK_{ps} d'interdizione, non fosse del tutto trascurabile l'influenza del raggio ionico. D'altra parte, però, l'accumulo preferenziale dello zinco nel corpo del mollusco potrebbe anche essere imputato a cause biochimiche: si potrebbe, cioè, prendere in considerazione l'ipotesi che questo metallo eserciti una particolare funzione fisiologica e sia, perciò, chimicamente legato a qualche componente cellulare. Per chiarire definitivamente la questione è utile valutare simultaneamente i principali fattori che influenzano l'incorporazione degli ioni nelle valve del mollusco, partendo dal fatto ormai acquisito che, in ultima analisi, questo processo deve essere considerato come una vera e propria coprecipitazione [1]. A parità di carica ionica, quindi, l'entità dell'incorporazione deve dipendere non solo dalla differenza tra i pK_{ps} del carbonato dell'impurezza cationica e il pK_{ps} del $CaCO_3$ (ΔpK_{ps}) ma anche dalla differenza, in valore assoluto, tra il raggio dello ione inquinante e quello di Ca^{2+} ($|\Delta r|$). In altri termini, se ci si limita allo studio dell'incorporazione degli ioni metallici bivalenti, si può considerare ρ come funzione empirica di due variabili:

$$\rho = \alpha \Delta pK_{ps} - \beta |\Delta r| \tag{1}$$

Naturalmente, dovendo essere ρ positivo o tuttalpiù nullo, l'equazione (1) è valida solo per i valori di ΔpK_{ps} positivi che verificano la condizione:

$$\alpha \Delta pK_{ps} \geq \beta |\Delta r| \tag{2}$$

Per Cu^{2+} ($\rho = 0{,}9$; $\Delta pK_{ps} = 1{,}3$) e Cd^{2+} ($\rho = 2{,}0$; $\Delta pK_{ps} = 3{,}0$), essendo $|\Delta r| = 0{,}02$, si può ritenere trascurabile il termine $\beta |\Delta r|$ e

la (1) diventa l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi ($\rho = \alpha \Delta pK_{ps}$) che fornisce per α il valore di 0,7. Sostituendo questo valore nella (1) e utilizzando i dati relativi a Pb^{2+} ($\rho = 2{,}7$; $\Delta pK_{ps} = 4{,}5$; $|\Delta r| = 0{,}23$), si trova che β, approssimato per eccesso, è uguale a 2,0. Tenendo conto della diseguaglianza (2) si nota che l'equazione (1) non è più adatta a descrivere il fenomeno già per valori di pK_{ps} dei carbonati di circa 9, quando il $|\Delta r|$ è uguale, come nel caso di Zn^{2+}, a 0,25 Å, quando cioè il raggio dello ione inquinante differisce, in valore assoluto, da quello di Ca^{2+} di circa il 26 %. Questo vuol dire che il valore troppo basso di ρ per lo zinco non è dovuto a cause biochimiche ma dipende dal fatto che, in vicinanza del pK_{ps} d'interdizione, l'influenza del raggio ionico diventa determinante. Sembra lecito ritenere che, indicando con ρ il coefficiente di ripartizione delle impurezze ioniche tra cristalli e acque madri, l'equazione (1) possa essere applicata a tutti i processi di cristallizzazione di composti ionici, purché si prenda come pK_{ps} d'interdizione il valore del pK_{ps} del precipitato e si considerino solo gli ioni inquinanti aventi carica uguale a quella dello ione di segno omonimo del composto insolubile.

Ci sono, però, delle obiettive difficoltà non facilmente superabili. Prima di tutto ρ, così come è stato calcolato, non ha un preciso significato analitico. Infatti, nel campo di validità della legge di BERTHELOT-NERNST [3], quando cioè il generico ione contaminante M^{2+} è omogeneamente distribuito nella fase solida e questa è in equilibrio termodinamico con la fase liquida, il coefficiente di distribuzione è fornito dalla relazione:

$$D = \left(\frac{[M^{2+}]}{[Ca^{2+}]} \right)_{\text{solido}} \Big/ \left(\frac{[M^{2+}]}{[Ca^{2+}]} \right)_{\text{soluzione}}$$

D'altra parte, la conoscenza del vero coefficiente di distribuzione D non implica che l'equazione (1) possa essere indiscriminatamente applicata.

Sono prevedibili, infatti, delle notevoli limitazioni. Innanzitutto le impurezze debbono essere presenti solo in tracce in quanto una loro elevata concentrazione farebbe venir meno uno dei presupposti della teoria (numero irrilevante di ioni anomali rispetto agli ioni caratteristici del cristallo). Il precipitato, inoltre, non deve essere colloidale ma perfettamente cristallino per evitare il fenomero dell'adsorbimento superficiale che introdurrebbe nell'equazione un parametro nuovo difficilmente controllabile. Il processo, infine, deve avvenire con estrema lentezza per dare agli ioni inquinanti il tempo materiale di sostituire gli ioni principali nel reticolo ed evitare le

semplici occlusioni meccaniche. Da quanto detto si arguisce che, pur correggendo opportunamente ρ, l'equazione (1) non può essere rigorosamente valida per le usuali precipitazioni analitiche ma solo per le cristallizzazioni con andamento cinetico ideale. Del resto, tentativi analoghi, fatti con una relazione [4, 5] ricavata da precedenti considerazioni termodinamiche [6, 7], sono falliti non tanto perché è stata presa in esame solamente la dipendenza del coefficiente di ripartizione dalla radice quadrata del rapporto dei prodotti di solubilità, ma soprattutto perché non si è tenuto conto dei fattori cinetici [8]. L'importanza di questi fattori, d'altronde, è stata inequivocabilmente dimostrata [9] anche nel caso dell'incorporazione di impurezze isomorfe nei processi di vera e propria cristallizzazione da soluzioni acquose [10].

BIBLIOGRAFIA

[1] M. D'Agostino, A. Biondi, G. Misuraca e G. Sansone, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., **44**, 241-244 (1977).

[2] M. D'Agostino, A. Biondi e G. Sansone, ibidem, **43**, 282-286 (1976).

[3] I. M. Kolthoff, E. B. Sandell, E. J. Meehan e Stanley Bruckenstein, *Analisi Chimica Quantitativa*, pag. 250, Piccin, Padova, 1973.

[4] A. M. Feibush, K. Rowley e L. Gordon, Anal. Chem., **30**, 1605 (1958).

[5] J. A. Hermann, *Coprecipitation of Transuranium Elements with the Rare Earths: Coprecipitation of Americium with Lantanum Oxalate*, Ph. D. Thesis, The University of New Mexico, 1955

[6] A. P. Ratner, J. Chem. Phys., **1**, 789 (1933).

[7] F. Vaslow e G. E. Boyd, J. Am. Chem. Soc., **74**, 4691 (1952.

[8] L. Gordon, Murrel L. Salutsky e Hobart H. Willard, *Precipitation from Homogeneous Solution*, pagg. 107-135, John Wiley, 1959.

[9] R. Kern, in « Adsorption et Croissance Cristalline (Nancy, 6-12 juin 1965) », pagg. 337-339, Edition du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1965.

[10] Z. I. Zhmurova, V. Ia. Khaimov-Malkov, K. S. Bagdasarov e E. M. Akulenok, ibidem, pagg. 329-337.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, R. Sersale e P. Corradini.

Segnalazione di una probabile bocca eruttiva nei dintorni di Pollena-Trocchia (settore N-NW del Somma-Vesuvio) e di tufi zeolitici sovrapposti contenenti *K-Cabasite*

Nota di ENRICO FRANCO e GIUSEPPE ROLANDI
presentata dal socio emerito ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 4 febbraio 1978)

RIASSUNTO. — Si segnala un affioramento di vulcaniti sulle pendici N-NW del Somma, a quota 265 m s.l.m. in direzione dell'alveo di Pollena, disposte secondo una morfologia conica, probabilmente da ascrivere ad una attività laterale in questo settore impiantatasi verso la fine della fase « Somma Giovane » [11]. La composizione di questi prodotti (tefriti leucitiche-latiti), e i loro rapporti stratigrafici, portano un ulteriore contributo all'interpretazione dei processi evolutivi al Somma-Vesuvio.

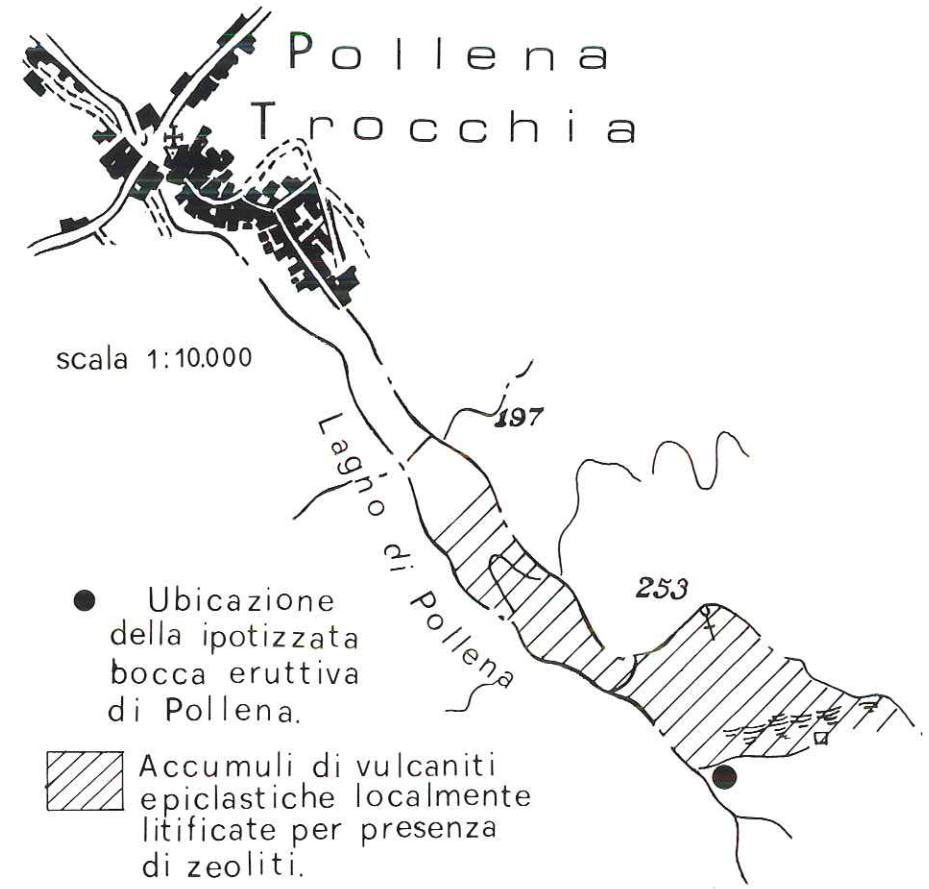
Viene infine segnalata anche in questo settore del Somma la presenza di tufi zeolitici a *K-Cabasite* [2]. Si riportano alcuni dati mineralogici su questo tipo di zeolite.

SUMMARY. — Vulcanic rocks on the N-NW sector of Somma-Vesuvius apparatus, near Pollena-Trocchia town, are been marked. There rocks are arranged with a volcanic cone morphology, probabily in connection to a lateral activity in this sector at the end of the « Young Somma » period [11]. Mineralogical and chemical characters of there volcanics rocks belonging to the tefrit-leucites and latites. Both this charatters, and their stratigrafic rapports are important to know the magma evolution at Somma-Vesuvius volcano during the « ottavianitic period » [11].

Finally there are been found yellow tuff containing K-Cabazite also in this sector of the Somma-Vesuvio volcano [2]. Mineralogical and cristallochemstry charatters are been described.

INTRODUZIONE.

In questa nota verranno illustrati alcuni risultati preliminari sulle ricerche mineralogiche e petrografiche in corso di svolgimento al Somma-Vesuvio. Si tratterà in particolare del rinvenimento di materiali scoriacei che probabilmente rappresentano la parte di una bocca eruttiva localizzata nella zona dell'alveo di Pollena a quota 265 s.l.m. (fig. 1) e del rinvenimento di tufi formatisi a spese di vulcaniti trasportate in massa per effetto dell'azione cementante prodotta dalla neoformazione di una varietà potassica di zeolite (K-CABASITE) [2]. La struttura



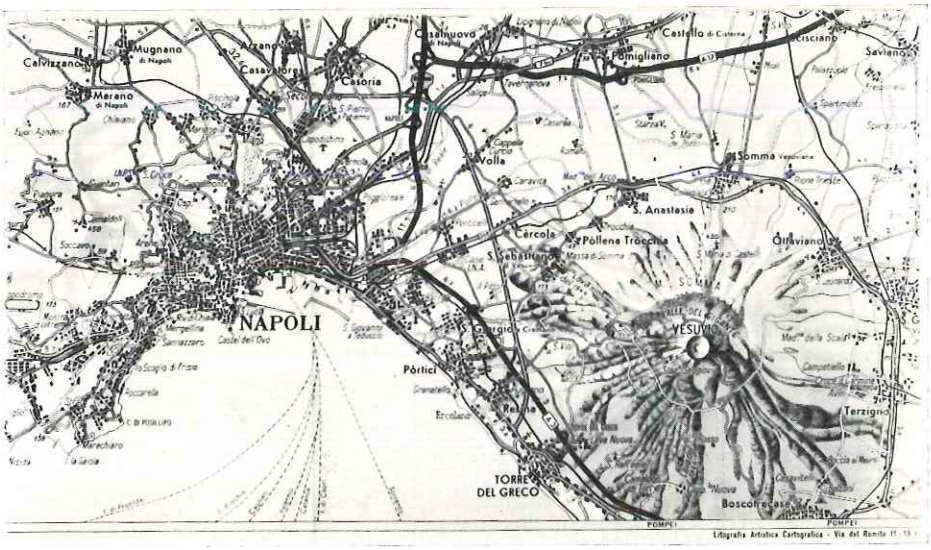


FIG. 1. - Zona dell'alveo di Pollena nella periferia sud della cittadina.

è stata evidenziata da scavi effettuati recentemente nella zona citata per l'estrazione di materiali da costruzione, e la sua morfologia è stata confermata da una serie di misure sulla orientazione degli strati. Si tratta di un cono costituito da materiali essenzialmente scoriacei e in minima parte da prodotti meno soffiati sfumanti talora in vere e proprie lave, con composizione chimica riferibile a tipi petrografici diversi (tefriti leucitiche e latiti) sovrapposti stratigraficamente. L'ipotizzata manifestazione laterale è prevedibilmente da mettere in relazione all'attività centrale del Somma nella fase finale del periodo ottavianitico [11] ed è certamente precedente all'attività recente flegrea come fanno supporre i prodotti della eruzione di Agnano stratigraficamente sovrapposti ai prodotti del cono di scorie rinvenuto.

Nella discussione dei dati verranno brevemente accennate le finalità di tali ricerche, sia in campo petrologico come contributo alla conoscenza evolutiva del magma fortemente potassico del Somma-Vesuvio, sia in campo mineralogico come caratterizzazione cristallochimica di una varietà potassica di zeolite.

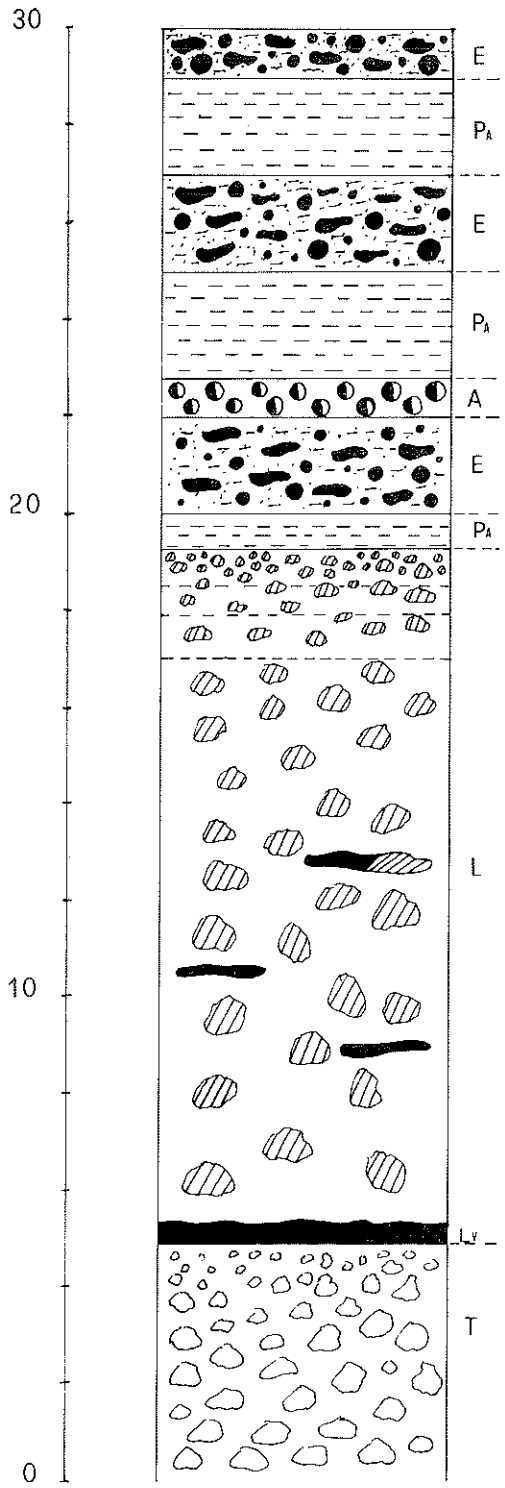
1. - Dati geologici e mineralogici sui vari prodotti rinvenuti.

a) *Dati geologici.*

Nel settore nord-nordw del Somma-Vesuvio, nei pressi della cittadina di Pollena-Trocchia, in direzione dell'alveo di Pollena, recenti scavi hanno evidenziato la presenza di un cono di materiali essenzialmenti scoriacei.

I dati stratigrafici (fig. 2) e la tettonica dei materiali concordano con questa interpretazione e permettono di definire con un certo dettaglio la morfologia della struttura, che si rende ulteriormente evidente dall'insieme dei rapporti tra i prodotti stratificati del cono e quelli risedimentati dei lahars soprastanti. Infatti dalla stratigrafia dei prodotti affioranti nella zona si distinguono, chiaramente discordanti sui prodotti stratificati sottostanti, le sovrapposizioni delle vulcanoclastiti trasportate in massa (fig. 3).

La successione dei prodotti inizia con scorie regolarmente stratificate di composizione tefritica leucitica (analisi CP_1), il cui diametro medio è di 25 cm. (T in fig. 2), (foto 1). Lo spessore complessivo non è noto in quanto la parte inferiore della formazione non è osservabile. Nella parte alta del banco il diametro delle scorie diminuisce sensibilmente (diam. medio 5 cm.) fino a sfumare in un livello formato da litici e ceneri dello spessore di 60 cm. A tetto di quest'ultimo livello si rinvengono, in concordanza con gli strati sottostanti, degli strati



T = scorie tefritiche-leucitiche
L = scorie latitiche
L_V = lava latitica
P_A = paleosuolo
A = pomici di Agnano
E = vulcaniti piroclastiche

FIG. 2. - Sezione schematica della stratigrafia dei prodotti affioranti a quota 265 s.l.m. nell'alveo di Pollena.

scoriacei di composizione latitica (L. in fig. 2) (foto 1) (an. CP_2) con diametro medio sui 25 cm, regolamente stratificate con potenza complessiva del banco sui 15 m. Verso l'alto diminuiscono sia lo spessore degli strati, che le dimensioni delle scorie, potendosi distinguere nettamente l'attività finale di tale manifestazione.

Si riconoscono infatti tre strati con spessore complessivo di mt. 2,90: Quello inferiore (spessore mt. 1) con diametro medio delle scorie di cm. 6, quello intermedio (spessore mt. 0,45) con scorie a diametro medio di cm. 3, e infine quello superiore (spessore m. 1,45) con scorie a diametro medio di cm. 2 (foto 2). Probabilmente la fase latitica segna la ripresa dell'attività che si inizia con l'espulsione di litici e ceneri, e successivamente prosegue con lanci di lava che si sono via via trasformati in lanci di scorie sempre più violenti, come dimostra la presenza in taluni punti di uno strato lavico sovrapposto al livello di litici e ceneri, con spessore di 30 cm. (Lv in fig. 2) (foto 1), che sfuma progressivamente in prodotti di consistenza scoriacea. Questo particolare si ritrova spesso nell'ambito delle scorie latitiche notandosi le caratteristiche tessiturali descritte in più punti (fig. 2) (foto 3).

È da rilevare che le fasi finali dei vari momenti di questa attività eiettiva sono segnati da un diffuso arrossamento dei prodotti, conseguenza diretta di una cospicua azione pneumatolitica che ha accompagnato l'attività esplosiva che ha dato luogo a questa manifestazione.

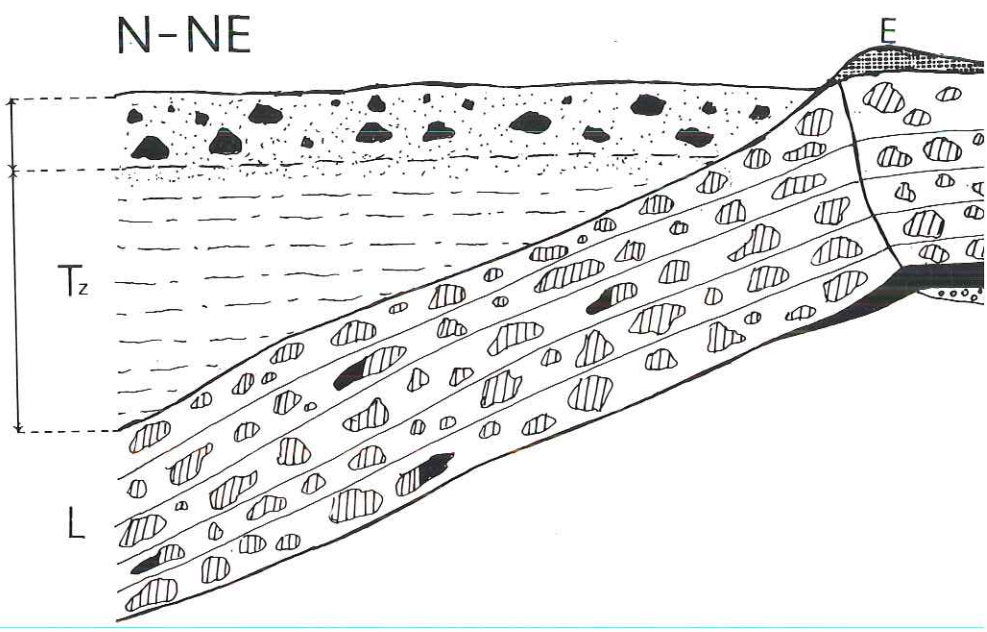
Sono stati effettuati infine dei rilievi sull'orientazione degli strati a ovest, e a sud si sono ottenute le seguenti misure:

1) Nord 110°-Est, immersione verso N-NE, inclinazione 32°
2) Nord 10°-Est, » » W-NW » 33°
3) Nord 100°-Est, » » S-SE » 32°

b) *Dati petrografici e mineralogici.*

Le scorie basali manifestano una tessitura caratterizzata dalla presenza di vacuoli. Nella massa vetrosa si notano distintamente dei globuli costituiti da aggregati plagioclasici (variole), e in qualche caso la disposizione di questi microfenocristalli è a tendenza intersertale.

La struttura è vitrofirica con una percentuale di cristalli riferibile in prima approssimazione attorno al 10 %. Tra questi si notano in abbondanza grossi fenocristalli di leucite. Sono presenti inoltre alcuni fenocristalli di plagioclasio di dubbia interpretazione dato il loro carattere acido. Tra i microfenocristalli sono abbondanti i pirosseni, i plagioclasi, questi ultimi frequentemente zonati, e l'olivina,, mostrante



— Disposizione degli strati lungo un profilo N-NE, S-SW

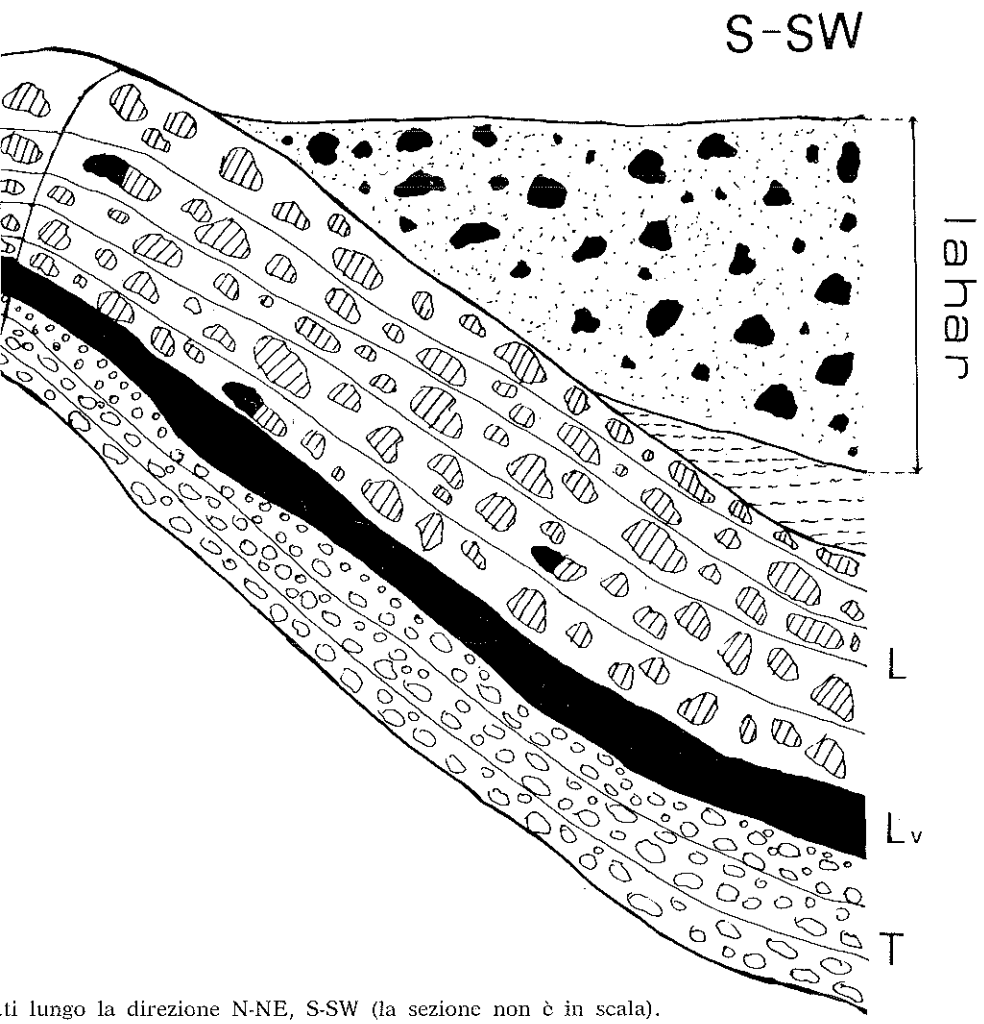
T = Tefriti leucitiche
L_v = Lava latitica
L = Latiti
E = Epiclastiti
T_z = Tufo zeolitico
C = Cava

FIG. 3. - Schema orientativo della disposizione tettonica

segni di iddingsitizzazione. Molto spesso i microfenocristalli plagioclasici sono inclusi nei grossi fenocristalli di pirosseno e leucite.

Vengono riportate di seguito le caratteristiche ottiche delle principali fasi mineralogiche presenti:

— Olivina 2 V 89° 16 % Fa
— Piross. 2 V 57° C — γ 38-40°
— Plagiocl. Su alcuni microfenocristalli omogenei è stata determinata una percentuale in An 70-75 %. Su diversi individui zonati sono state valutate al nucleo composizioni 70-75 % An, sul bordo 40-50 An, alla periferia 25-35 An. I pochi fenocristalli



ti lungo la direzione N-NE, S-SW (la sezione non è in scala).

presenti sono abbastanza omogenei e hanno una composizione 40 An, sono cioè più acidi dei nuclei dei microfenocristalli. Questa caratteristica è confermata da alcune misure del 2 V con valori sui 78°, corrispondente ad una composizione valutabile tra 35-40 An.

Le scorie superiori mostrano una tessitura simile alle precedenti. La struttura è vitrofirica con una percentuale di cristalli oscillante tra 10-15 %. Anche in questi prodotti scoriacei si rinvengono cristalli di grosse dimensioni, principalmente pirosseni (2 V γ 53°, C $-$ γ 43°), i quali sono abbondantemente rappresentati anche nell'ambito dei mi-

crofenocristalli. dove si nota un accenno al pleocroismo sui diversi toni di verde, al contrario dei fenocristalli che sono generalmente poco colorati. In queste fasi si notano inoltre abbondanti inclusioni di magnetite. Tra i microfenocristalli sono riconoscibili lamelle di mica biotite, plagioclasi (55-65 An). L'olivina è nettamente subordinata, rinvenendosi qualche microfenocristallo. Il sanidino è presente nella massa di fondo sotto forma di microliti con qualche individuo di dimensioni leggermente maggiori. Si notano inoltre microliti delle stesse fasi presenti come fenocristalli.

2. - Dati chimici.

In tabella I sono riportate le analisi chimiche dei prodotti stratificati del conetto, riferite ai due diversi tipi petrografici presenti (Analisi CP_1, CP_2).

Viene riportata inoltre l'analisi dei prodotti scoriacei del conetto dei Camaldoli della Torre (Analisi CT).

Dai dati analitici è stata ricavata la composizione mineralogica normativa in base al calcolo dell'A.M.S. di Rittmann [13] che viene riportata nella stessa tabella.

La fig. 4 mostra la proiezione dei campioni considerati nel doppio triangolo di Strekeisen e dalla classificazione proposta da questo autore [14] si vede che rientrano nei campi delle tefriti leucitiche e latiti.

3. - Dati mineralogici sul tufo zeolitico.

Le facies rinvenibili in colate di fango, sovrapposte in discordanza ai prodotti del cono di scorie, nel settore orientale presentano dei caratteri distintivi molto netti evidenziandosi una parte litificata inferiore per neoformazione di zeoliti, e una parte superiore incoerente non litificata. La facies inferiore mostra i caratteri di un conglomerato con litici e pomici di diverse dimensioni distribuiti in maniera caotica nella matrice cineritica. In particolare le pomici, che contengono grossi fenocristalli di sanidino, si presentano profondamente alterate e di colore giallognolo. I caratteri di questo sedimento sono quelli dei tufi caotici derivanti da colate di fango calde dove la litificazione è favorita dalla termalità residua della formazione vulcanoclastica. A seguito della interazione delle soluzioni circolanti capillarmente con le piroclastiti ancora calde viene ceduto calore al fluido che mobilizza il deposito, favorendo così la litificazione della massa a temperatura abbastanza alta e comunque diversa da quella ambiente, per neoformazione di zeoliti a spese della base vetrosa, sia delle pomici che delle ceneri.

La facies superiore invece si differenzia da quella sottostante oltre che per la mancanza di litificazione, per un aspetto tessiturale al-

TABELLA I

	CP_1	CP_2	CT
SiO_2	48.25	52.04	52.45
TiO_2	1.17	0.77	1.00
Al_2O_3	15.70	17.30	18.10
Fe_2O_3	5.75	2.82	4.13
FeO	3.57	4.69	3.40
MnO	0.25	0.20	0.22
MgO	6.28	4.15	2.80
CaO	9.12	8.20	7.46
Na_2O	2.08	2.68	3.26
K_2O	6.01	5.29	6.01
P_2O_5	0.68	0.55	0.50
H_2O^-	0.58	0.10	0.10
H_2O^+	0.16	0.60	0.60
	99.60	99.39	100.03
	A.M.S. (Norma Rittmann)		
Sanidino	3.4	36.4	44.4
Plagiocl.	29.5	31.7	25.7
Nefelina	0.5	—	—
Leucite	29.6	—	—
Olivina	8.6	—	—
Clinopir.	22	14.5	13.5
Biotite	—	14	8.6
Apatite	1.1	1.2	1.0
Ilmenite	1.1	0.3	0.6
Magnetite	1.7	1.9	1.6

quanto diverso che si manifesta con una disposizione degli elementi secondo una certa tendenza alla classazione, come è tipico dei tufi caotici originatisi da colate fangose fredde.

La curva termodifferenziale del tufo litoide ha l'identico andamento della varietà potassica di cabasite rinvenuta in depositi a Erco-

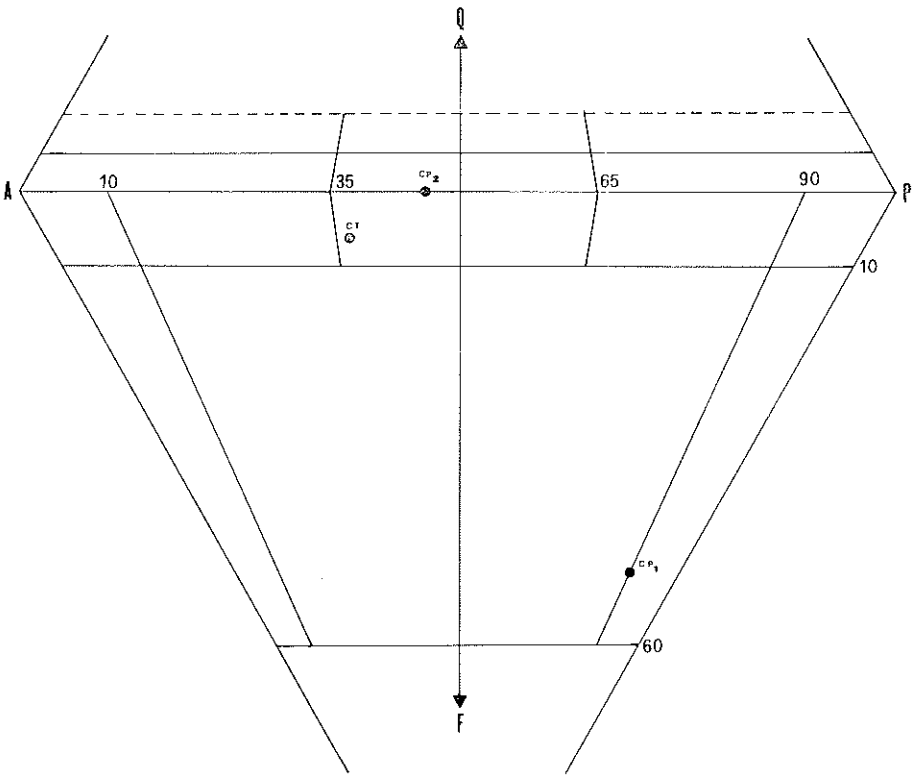


FIG. 4. - Classificazione delle vulcaniti studiate secondo A. L. Strekeisen.

lano (fig. 5 (foto 5) [2], andamento che è ben diverso dalle tipiche cabasiti sodico-calciche la cui curva termica è riportata per confronto nella stessa fig. 5.

DISCUSSIONE DEI DATI

La tettonica dei materiali costituenti l'affioramento descritto permette di stabilire con precisione che la disposizione degli strati ha una struttura riferibile ad una morfologia conica.

Nel settore nord gli strati seguono il pendio con immersione verso N-NE. procedendo verso ovest si può constatare che direzione e immersione degli strati variano, fino a che spostandosi verso sud-sudovest si ha l'ulteriore conferma che la stratificazione ha cambiato ancora orientazione, con immersione verso sud-sudovest, come si de-

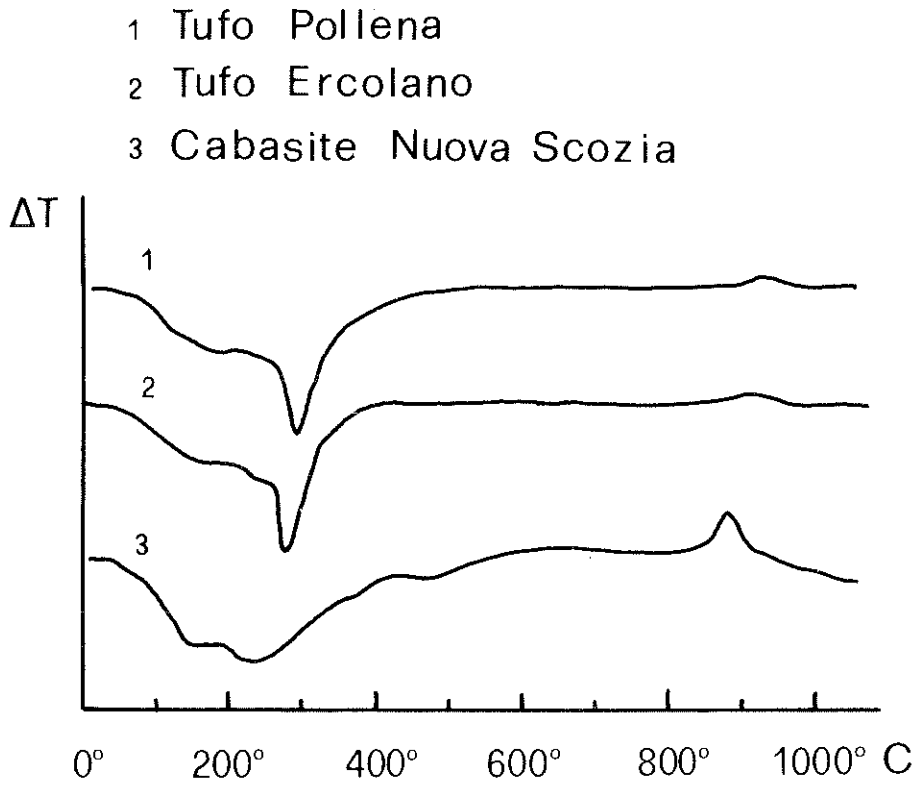


FIG. 5. - Diagrammi termodifferenziali dei tufi litoidi affioranti nell'alveo di Pollena confrontati con curve ottenute da rocce analoghe.

sume dai dati riportati. Non è possibile ricostruire l'andamento della morfologia a sud essendo questo settore interamente seppellito dai successivi prodotti vulcanoclastici trasportati in massa.

Un profilo schematico orientativo lungo la direzione N-NE, S-SW evidenzia una morfologia conica del tipo di quella riportata in fig. 3. Questa struttura in realtà potrebbe rappresentare una parte di un apparato eruttivo giacché l'andamento quaquaversale consta di strati disposti a cono diritto e a cono rovescio.

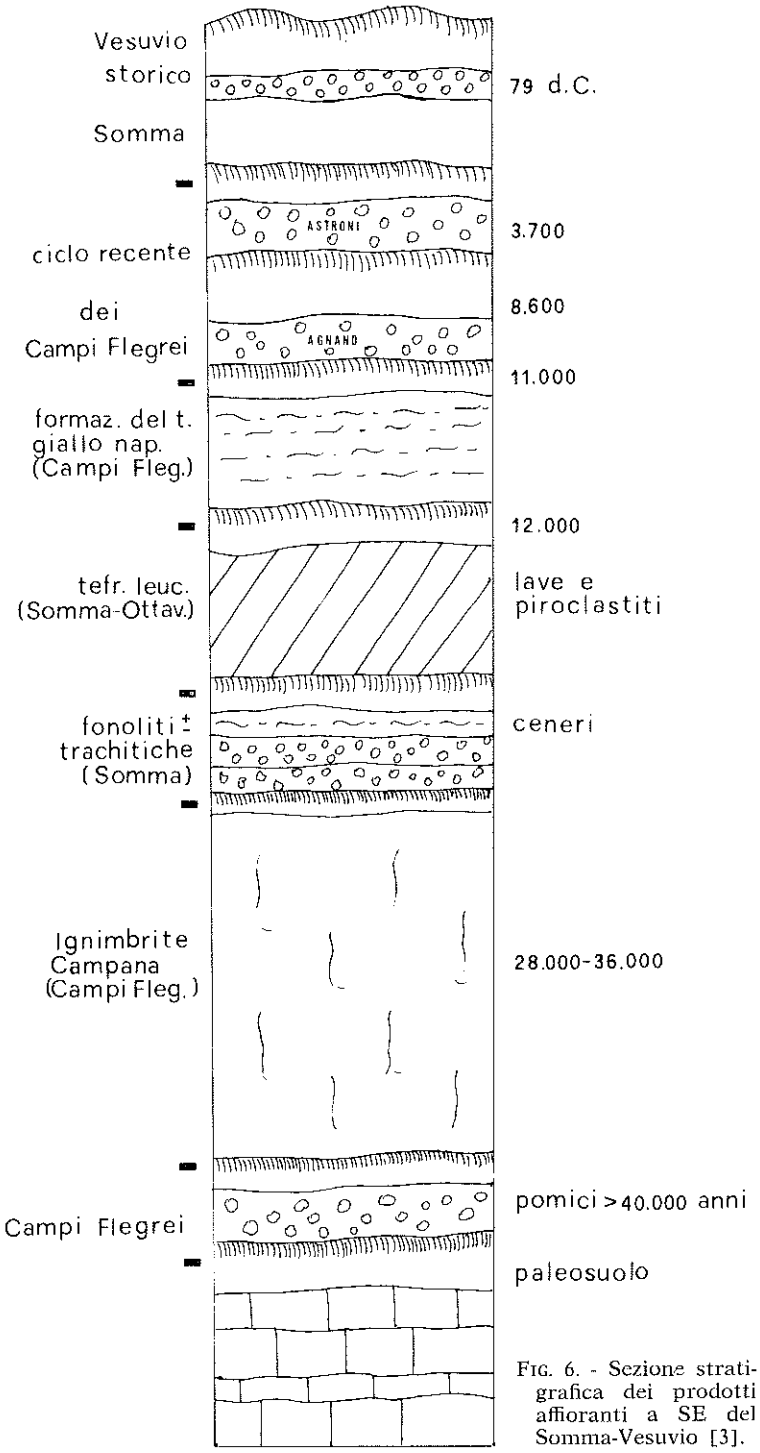


FIG. 6. - Sezione stratigrafica dei prodotti affioranti a SE del Somma-Vesuvio [3].

Non vi dovrebbero essere dubbi comunque che una tale disposizione sia il risultato di un accumulo di materiali esplosivi attorno ad un centro eruttivo, data anche la grandezza delle scorie (dimensioni massime dell'ordine di 50 cm) e il tipico arrossamento che ha interessato il complesso delle vulcaniti stratificate.

Potrebbe trattarsi di una eruzione laterale di tipo eiettivo, che in seguito assume un carattere misto, originandosi accanto a prodotti scoriacei delle colate laviche (foto 1).

La stratigrafia dei prodotti della zona è molto simile a quella che si osserva nei vari canaloni del Somma (S. Anastasia, Somma Vesuviana ecc.); nella zona di Ottaviano (S. Maria di Castello) la successione è particolarmente evidente rinvenendosi sotto i prodotti della grande eruzione del 79 d. C. tre strati di piroclastiti, separati da altrettanti paleosuoli, poggianti su lave tefritiche leucitiche [3]. Situazioni analoghe si rinvengono in altri settori e nelle vicine zone pedemontane. I prodotti sovrapposti al cono di scorie (E_1, E_2, E_3) si correlano agevolmente con queste piroclastiti che rappresentano i prodotti finali differenziati in senso sialico, del magma ottavianitico, per cui questa attività eiettiva impiantatasi nel settore N-NW del Somma deve inquadrarsi nell'ambito di tale fase notevolmente esplosiva.

Dallo studio dei rapporti stratigrafici dei prodotti appartenenti ai vari distretti campani [4] si desume chiaramente che l'attività vulcanica del Somma-Vesuvio è nel complesso piuttosto recente, alternandosi con quella flegrea, come mostra la fig. 2. L'attività che ha prodotto queste vulcaniti nel settore NW, in particolare è correlabile con le fasi più recenti flegree dato che, come mostra la fig. 2 (foto 6), si rinvengono, sovrapposti a questi prodotti scoriacei, separati dallo strato di vulcaniti E_1, le pomici dell'eruzione di Agnano. Questi prodotti flegrei sono stati rinvenuti in altri settori dell'edificio del Somma [4], e sempre alla base delle citate eruzioni pliniane, come mostra anche la fig. 6. Analoghi rapporti stratigrafici inoltre si rinvengono nelle zone pedemontane adiacenti l'edificio e sono particolarmente evidenti in alcune cave alla periferia di Pomigliano D'Arco [4]. Qui si può osservare che un paleosuolo e prodotti del 2° periodo flegreo, separano le pomici di Agnano dalla lava tefritica leucitica (ottavianitica) basale, e che questi prodotti flegrei a loro volta si trovano alla base dei livelli piroclastici generalmente attribuiti alla fase finale ottavianitica.

Le correlazioni stratigrafiche con altri affioramenti sul Somma e nelle zone pedemontane, e i rapporti con l'attività flegrea, permettono dunque di inquadrare i prodotti del cono rinvenuto e le piroclastiti sovrapposte, nell'ambito della attività finale esplosiva del periodo ottavianitico.

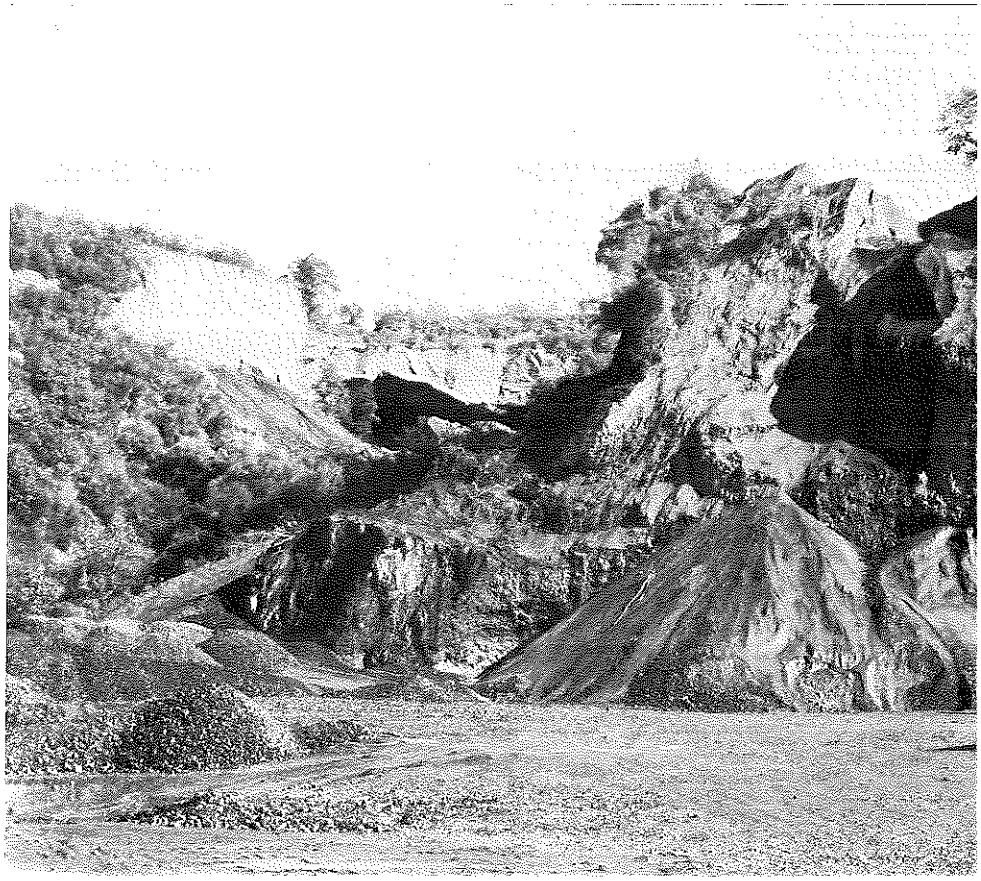


Foto 1. - Veduta d'assieme dal piazzale di cava delle vulcaniti costituenti la morfol conica. (La foto è stata scattata nel novembre 1977 in una fase avanzata

Precedentemente non erano state segnalate manifestazioni analoghe nel settore nord del Somma, mentre nel settore di sudW sono noti da tempo piccoli apparati laterali ed eccentrici (Torre di Bassano, Camaldoli della Torre, bocca del Viulo, fossa Monaca ecc. [5]). È interessante notare al riguardo che altre manifestazioni di epoca preistorica e quindi del periodo ottavianitico, hanno prodotto tipi petrografici a tendenza latitica, come nel caso dei Camaldoli della Torre (analisi C.T.).

È possibile quindi che questo tipo petrografico costituisca un momento della fase intermedia di differenziazione che ha interessato il magma ottavianitico, che alla fine evolve verso tipi alcalitrachitici e fonolitici [1] rappresentati nella zona in studio dai prodotti piroclastici E_1, E_2, E_3 che si rinvengono appunto in sovrapposizione alle latitiche CP_2. I dati mineralogici sulle fasi presenti nelle tefriti leuci-

di scavo. I cumuli di frana hanno mascherato parzialmente la disposizione degli , che in epoca precedente era ben visibile).

tiche CP_1 e nelle latiti CP_2 e C.T. sembrano accordarsi con questa ipotesi, che comunque dovrà essere confermata negli studi successivi.

Nell'alveo di Pollena, come del resto in tutti gli altri canaloni del Somma nel settore nord, sono ben visibili i rapporti tra le vulcaniti epiclastiche costituenti le fasi finali pliniane del magma ottavianitico con le colate di fango sovrapposte [3] le quali sono formate principalmente da materiali piroclastici derivanti dagli eventi esplosivi che distrussero il Somma. Si tratta quindi dei prodotti più evoluti del ciclo ottavianitico con tenori in potassio molto elevati che in opportune condizioni possono dar luogo a neoformazioni di minerali del gruppo delle zeoliti, in particolare di quelle varietà iperpotassiche tipiche della zona vesuviana [2].

I prodotti flegrei, che come è noto appartengono ai vari termini della serie latitebasalto-trachite [6-8-9] meno potassica, danno luogo

FOTO 2. - Particolare che evidenzia la disposizione degli strati riguardante le scorie latitiche, nel settore nord, e la diminuzione delle dimensioni dei prodotti nei livelli superiori.

FOTO 3. - Particolare del passaggio da lave a scorie che interessa la base della formazione latitica.

Foto 4. - Tufi zeolitici discordanti sulla struttura conica nel settore N-NE. E' evidente la litificazione dei blocchi staccati dalle pareti.

a cabasiti calcico-sodiche, e pertanto si può desumere che per le cabasiti vesuviane la composizione iperpotassica del vetro, unitamente al meccanismo di messa in posto che è responsabile delle particolari condizioni termiche di formazione di questi prodotti abbia influito in maniera determinante a formare la varietà di cabasite segnalata.

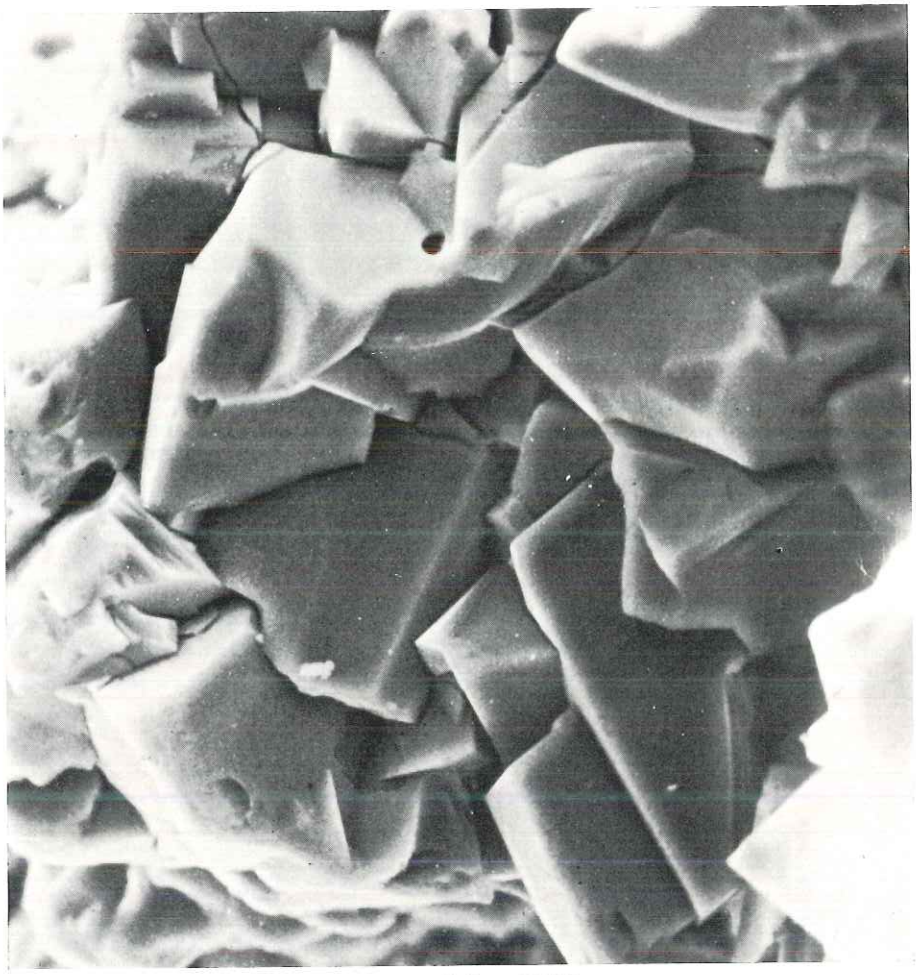


Foto 4. - Vedi foto 5 3000 x.

Conclusioni

Il ritrovamento di prodotti scoriacei disposti secondo una morfologia conica, come si desume dai dati sull'orientazione degli strati, probabilmente è da correlare con una attività laterale nel settore N-NW del Somma durante la fase finale del periodo ottavianitico, come dimostrano anche i rapporti di queste vulcaniti con quelle derivanti

dall'attività flegrea (eruzione di Agnano) rinvenute in sovrapposizione. I prodotti del cono di scorie rappresentano in successione stratigrafica tipi petrografici diversi inquadrabili nell'ambito una serie evolutiva che vede i materiali tefritici-leucitici basali tra quelli meno differen-

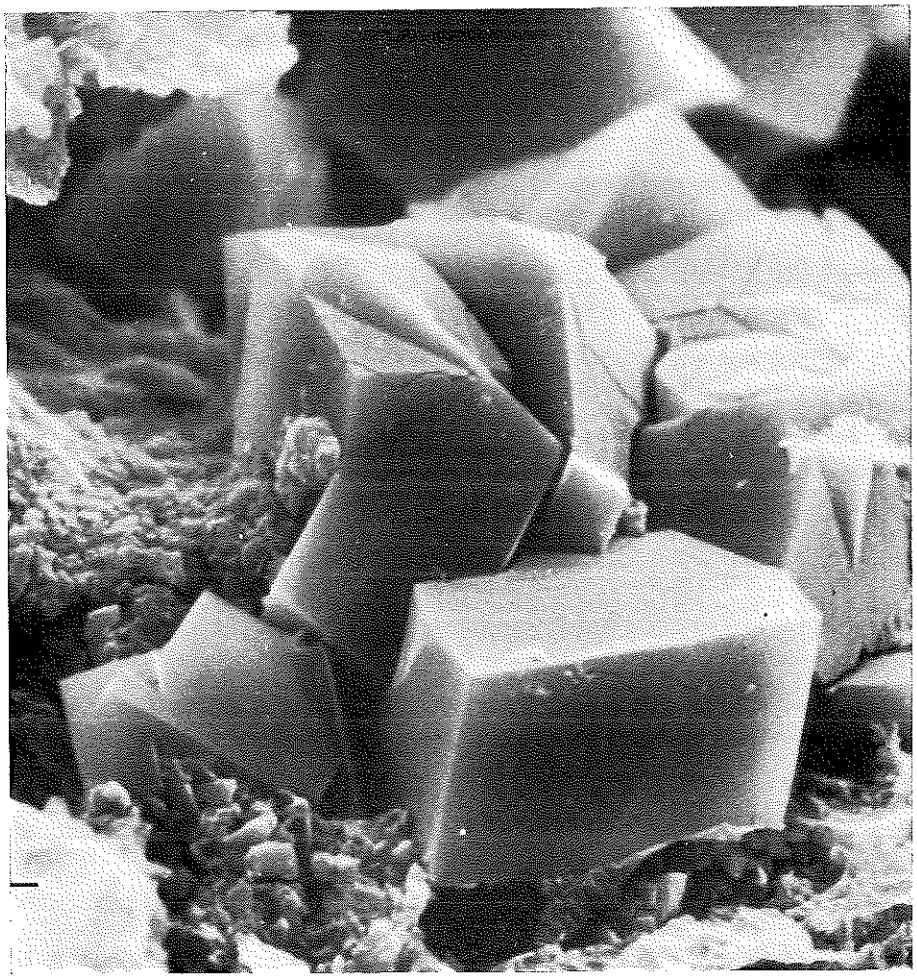


FOTO 5. - Microfotografie elettroniche a scansione della K-cabasite del tufo 7000 x.

ziati rispetto ai termini latitici superiori, e ai prodotti esplosivi successivi.

Il rinvenimento delle sopracitate vulcaniti, data la situazione stratigrafica descritta e le caratteristiche chimiche-mineralogiche evidenziate, può rivelarsi di fondamentale importanza per la ulteriore interpretazione dei complessi processi evolutivi al Somma-Vesuvio e più in generale della regione Campana.

Foto 6. - Rapporti stratigrafici tra le scorie latitiche del cono con le piroclastici flegree (A) e i prodotti della fase finale del periodo ottavianitico (E_1 E_2 E_3).

La formazione di tufi zeolitici a *K-Cabasite* infine si ritiene che debba essere messa in relazione alla particolare composizione chimica del vetro alterato, nonché al meccanismo di messa in posto di questi prodotti, probabilmente del tipo « colate di fango calde », che è in grado di creare le condizioni termiche ambientali atte a favorire il processo di zeolitizzazione.

Gli autori sono grati al prof. A. Panunzi, dell'istituto chimico dell'Università di Napoli, per la segnalazione dell'affioramento studiato, e per le proficue discussioni avute.

BIBLIOGRAFIA

[1] CUNDARI A., R. W. LE MAITRE, *On the petrogeny of the leucite-bearing rocks of the roman and Birunga volcanic regions.* Journ. of petrol., vol. 11, pp. 33-47 (1970).

[2] DE GENNARO M., FRANCO E., *La K-Cabasite di alcuni « tufi del Vesuvio ».* Acc. Naz. Linc. Rend. sc. mat. nat. serie VIII, vol. LX, fasc. 4 (1976).

[3] DI GIROLAMO P., *Petrografia del Somma Vesuvio: Le serie piroclastiche. Studio petrografico-stratigrafico delle eruzioni pliniane del periodo trachitico e ottavianitico del Somma-Vesuvio.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. della Soc. Naz. Sc. Lett. Arti in Napoli. Serie 4, vol. XXXV, 1968.

[4] DI GIROLAMO P., LIRER L., PORCELLI C., STANZIONE D., *Correlazioni stratigrafiche fra le principali formazioni piroclastiche della Campania (Roccamonfina, Campi Flegrei, Somma-Vesuvio).* Rend. Soc. It. Min. Petr., vol. XXVIII (1972).

[5] DI GIROLAMO P., *Rilevamento petrografico-stratigrafico lungo il margine SW del Somma-Vesuvio.* Rend. Soc. It. Min. Petr., vol. XXVI (1970).

[6] DI GIROLAMO P., ROLANDI G., STANZIONE D., *I clinopirosseni delle vulcaniti ad affinità shoshonitica della Campania.* Sottoposto al Periodico di Mineralogia (1977).

[7] FRANCO E., *La zeolitizzazione naturale.* Dal volume « zeoliti e zeolitizzazione ». Atti dei convegni Lincei, Roma (1974).

[8] GHIARA M. R., LIRER L., *Mineralogy and geochemystry of the low potassium series of the Roccamonfina volcanic suite (Campania, south Italy).* Bull. Volc., vol. 40 (1) (1976-77).

[9] GHIARA M. R., ROLANDI G., STANZIONE D., *Evoluzione delle vulcaniti ad affinità shoshonitica dei Campi Flegrei s.l.: Studio petrografico e geochimico.* Sottoposto al Periodico di Mineralogia (1978).

[10] PASSAGLIA E., *Cristalchemystry of chabazites.* Am. Min., vol. 55 (1970).

[11] RITTMANN A., *Die geologisch bedingt evolution und differentiation des Somma-Vesuvmagmas.* Zeits fur vulkan, XV, Berlino (1933).

[12] RITTMANN A., *L'eruzione vesuviana del 79 d. C.: Studio magmatologico e vulcanologico.* « Pompeiana », raccolta di studi per il centenario degli scavi di Pompei. Napoli (1950).

[13] RITTMAN A., *Stable assemblage of igneous rocks.* Springer verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).

[14] STREKEISEN A., *Die klassification der eruptivgesteine.* Geol. Rdsch., 55 (1965).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, G. Imbò e R. Sersale.

Alcune proprietà del centro simmetrico di un corpo

Nota di PAOLA MISSO *
presentata dal socio ordinario GIANFRANCO PANELLA

(Adunanza del 4 febbraio 1978)

ABSTRACT. — *Let* D *be a division ring with involution* $*$ *and center* Z. *If* S *is the set of symmetric elements of* D, *we prove that* $Z \cap S = \{a \in S) / (a\,s)^n = s^n\,a^n$, for all $s \in S$, $n = n(a) \geqslant 1\} = \{a \in S / (a\,s)^n = a^n\,s^n$, for all $s \in S$, $n = n(a) > 1\}$. *Moreover we show that the set* $\{a \in S / (a + s)^n = a^n + s^n$, for all $s \in S$, $n = n(a) > 1\}$ *is equal to* $Z \cap S$ *or* $\{0\}$ *according as char.* $D \neq 0$ *or char.* $D = 0$.

RIASSUNTO. — *Sia* D *un corpo con involuzione* $*$ *e centro* Z. *Se* S *è l'insieme degli elementi simmetrici di* D, *si dimostra che* $Z \cap S = \{a \in S / (a\,s)^n = s^n\,a^n$, per ogni $s \in S$, $n = n(a) \geqslant 1\} = \{a \in S / (a\,s)^n = a^n\,s^n$, per ogni $s \in S$, $n = n(a) > 1\}$. *Si dimostra inoltre che l'insieme* $\{a \in S / (a + s)^n = a^n + s^n$, per ogni $s \in S$, $n = n(a) > 1\}$ *è uguale a* $Z \cap S$ *se car* $D \neq 0$ *altrimenti è uguale a* $\{0\}$.

In [2] HERSTEIN ha dimostrato che, se R è un anello privo di nil ideali non banali, soddisfacente una delle seguenti condizioni:

$(x\,y)^N = x^N\,y^N$, per ogni $x, y \in R$, $N > 1$ intero fissato;

$(x + y)^N = x^N + y^N$, per ogni $x, y \in R$, $N > 1$ intero fissato; allora R è commutativo.

In [1] FELZENSZWALB, generalizzando il risultato di HERSTEIN, ha caratterizzato il centro Z di un anello semiprimo, dimostrando che $Z = \{a \in R / (a\,x)^n = x^n\,a^n$, per ogni $x \in R$, $n = n(a) \geq 1\} = \{a \in R / (a\,x)^n = a^n\,x^n$, per ogni $x \in R$, $n = n(a) > 1\}$ ed inoltre $\{a \in R / (a + x)^n = a^n + x^n$, per ogni $x \in R$, $n = n(a) > 1\} \subset Z$.

Qui vogliamo estendere i suddetti risultati al caso di un corpo con involuzione.

* Istituto di Matematica dell'Università, Via Archirafi 34, 90123 Palermo.

Sia D un corpo con involuzione $*$ e centro Z. Indichiamo con S l'insieme degli elementi simmetrici di D, e poniamo:

$Z_1 = \{a \in D / (a\,s)^n = s^n\,a^n$, per ogni $s \in S$, $n = n(a) \geq 1$ intero$\}$;

$Z_2 = \{a \in D / (a\,s)^n = a^n\,s^n$, per ogni $s \in S$, $n = n(a) > 1$ intero$\}$;

$Z_3 = \{a \in D / (a + s)^n = a^n + s^n$, per ogni $s \in S$, $n = n(a) > 1$ intero$\}$.

Se $Z^+ = Z \cap S$ e $Z_i^+ = Z_i \cap S$ $(i = 1, 2, 3)$, dimostreremo che $Z_1^+ = Z_2^+ = Z^+$, ed inoltre, se car. $D \neq 0$, $Z_3^+ = Z^+$; altrimenti $Z_3^+ = \{0\}$.

1. — Richiamiamo alcune proprietà degli anelli con involuzione. Se D è un corpo con involuzione $*$ e centro Z, l'insieme S degli elementi simmetrici e l'insieme K degli elementi obliqui sono definiti rispettivamente come: $S = \{x \in D / x = x^*\}$, $K = \{x \in D / x = -x^*\}$. Inoltre indichiamo con $N = \{xx^* / x \in D\}$ l'insieme delle norme e con $T = \{x + x^* / x \in D\}$ l'insieme delle tracce di D. È chiaro che $N, T \subset S$.

Osserviamo che Z è un ampliamento semplice di grado al più due di Z^+. Infatti, se per ogni $\alpha \in Z$, $\alpha = \alpha^*$, allora $Z = Z^+$. Possiamo quindi supporre che esista un α in Z tale che $\alpha \neq \alpha^*$. Sia β un qualunque elemento di Z. Si ha:

$$(\beta\,\alpha^* - \alpha\,\beta^*) + \alpha\,(\beta^* - \beta) = \beta\,(\alpha^* - \alpha)$$

e quindi

$$(\beta\,\alpha^* - \alpha\,\beta^*)\,(\alpha^* - \alpha)^{-1} + \alpha\,(\beta^* - \beta)\,(\alpha^* - \alpha)^{-1} = \beta.$$

Poiché $b = (\beta\,\alpha^* - \alpha\,\beta^*)\,(\alpha^* - \alpha)^{-1} \in Z^+$ e $c = (\beta^* - \beta)\,(\alpha^* - \alpha)^{-1} \in Z^+$, risulta $\beta = b + \alpha\,c$, quindi $Z = Z^+(\alpha)$.

Un risultato di cui ci serviremo nel seguito è il seguente: *se* $N \subset Z$, *allora* $T \subset Z$ e $\dim_Z D \leq 4$. Infatti per ogni $x \in D$, $(1 + x)\,(1 + x^*)$ è una norma quindi $(1 + x)\,(1 + x^*) \in Z$. Esplicitando questo prodotto si ottiene: $1 + x + x^* + xx^* \in Z$; dunque $x + x^* \in Z$, cioè $T \subset Z$. Inoltre, per ogni $x \in D$, si ha: $x^2 - (x + x^*)\,x + x^*\,x = 0$; poiché $x + x^* \in T \subset Z$ e $x^*\,x \in N \subset Z$, ne segue che x soddisfa un polinomio di secondo grado a coefficienti in Z. Per il lemma 6.2.3 di [3] (anzi, per la sua dimostrazione), D soddisfa l'identità polinomiale di grado cinque $[[x^2, y], [x, y]] = 0$. Possiamo ora applicare il teorema 6.3.1 di [3], otteniamo così che $\dim_Z D \leq 4$.

Nel corso delle dimostrazioni ci serviremo inoltre dei seguenti risultati:

TEOREMA A. (teorema 6.2.1 di [4]). — *Sia* D *un corpo con involuzione e sia* $W = \{w \in D / w s^n = s^n w,\ n = n(w, s) \geq 1,\ per\ tutti\ gli\ s \in S\}$. *Se* $N \not\subset Z$, *allora* $W \subset Z$.

TEOREMA B. (corollario al teorema 2.1.5 di [4]). — *Sia* R *un anello semplice con involuzione. Allora, se indichiamo con* $\bar{S}$ *il sottoanello di* R *generato da* S, *si ha*: $\bar{S} = R$ *oppure* $S \subset Z$ *e* $\dim_Z R \leq 4$.

TEOREMA C. — *Sia* D *un corpo con invouzione. Se l'insieme degli elementi simmetrici di* D *soddisfa un'identità polinomiale generalizzata, allora* $\dim_Z D < \infty$.

Il teorema C è conseguenza del teorema 1 di [5]. Si noti infatti che, nel caso di un corpo, si può facilmente eliminare l'ipotesi restrittiva sulla caratteristica imposta in [5].

2. — In questo numero assumeremo che D sia un corpo con involuzione $*$ e centro Z.

TEOREMA 1. — $Z_1^+ = Z^+$.

Dimostrazione. — Chiaramente $Z^+ \subset Z_1^+$. Sia $a \in Z_1^+$. Per ogni $s \in S$, si ha che $(a s)^n = s^n a^n$ ed applicando l'involuzione $*$ si ottiene $(s a)^n = a^n s^n$. Da ciò segue:

$$s^n a^{n+1} = (s^n a^n) a = (a s)^n a = a (s a)^n = a (a^n s^n) = a^{n+1} s^n .$$

Poiché n è un intero dipendente da a ma non da s, allora $a^{n+1} \in W = \{w \in D / w s^m = s^m w,\ \text{per tutti gli } s \in S,\ m = m(s, w) \geq 1\}$; possiamo pertanto applicare il teorema A. Otteniamo così $W \subset Z$ oppure $N \subset Z$.

Distinguiamo quindi due casi. Supponiamo che $N \not\subset Z$. Allora $W \subset Z$, e quindi $a^{n+1} \in Z$; si ha allora:

$$(s a)^{n+1} = s (a s)^n a = s (s^n a^n) a = s^{n+1} a^{n+1} = a^{n+1} s^{n+1},$$

ed applicando di nuovo la tecnica usata sopra, si ottiene:

$$s^{n+1} a^{n+2} = (a s)^{n+1} a = a (s a)^{n+1} = a^{n+2} s^{n+1} .$$

Poiché $N \not\subset Z$, $a^{n+2} \in Z$. In conclusione a^{n+1}, $a^{n+2} \in Z$ e quindi $a \in Z$. Il teorema è così dimostrato in questo caso.

Sia ora $N \subset Z$.

Se car. $D \neq 2$, allora, per ogni $s \in S$, $s = s/2 + s/2 \in T$ e quindi $T = S$. Per quanto osservato nel n. 1, $T \subset Z$, e quindi $S \subset Z$; pertanto $Z_1^+ \subset Z$.

Supponiamo ora che car. $D = 2$.

Per ipotesi si ha che $(a\,s)^n = s^n\,a^n$, per ogni $s \in S$. Se n è dispari, allora $(a\,s)^{n+1} = a\,s\,s^n\,a^n = s^{n+1}a^{n+1} \in Z$; infatti $n + 1$ è pari, quindi a^{n+1}, $s^{n+1} \in N \subset Z$. Possiamo quindi supporre che $(a\,s)^n \in Z$ ed n sia pari. Si osservi che in tale caso $(a\,s)^n = (s\,a)^n$.

Sia $n = 2\,m$. Poiché $(a\,s)^m\,(s\,a)^m = a^{2m}\,s^{2m} = (s\,a)^m\,(a\,s)^m$, risulta:

$$((a\,s)^m + (s\,a)^m)^2 = (a\,s)^n + (s\,a)^n + (a\,s)^m\,(s\,a)^m + (s\,a)^m\,(a\,s)^m = 0.$$

Essendo D un corpo, D non possiede elementi nilpotenti non nulli, pertanto $(a\,s)^m + (s\,a)^m = 0$, cioè $(a\,s)^m = (s\,a)^m$.

Iterando questo procedimento, perveniamo ad un intero $r \geq 1$, $(r, 2) = 1$, tale che $(a\,s)^r = (s\,a)^r$. Se $r = 1$, allora $a\,s = s\,a$ e per il teorema B, $a \in Z$. Possiamo quindi supporre $r > 1$.

Notiamo che, poiché $N \subset Z$, per quanto osservato al n. 1, D è di dimensione finita sopra il suo centro. Supponiamo ora che Z^+ sia finito. Allora, poiché Z è un ampliamento finito di Z^+, anche Z è finito. Pertanto D, essendo di dimensione finita sopra Z, è esso stesso finito. Allora, per il teorema di Wedderburn sui corpi finiti, D è un campo; in tale caso banalmente $a \in Z$. Possiamo quindi supporre che Z^+ sia infinito.

Applicando una tecnica che fa uso del determinante di Vandermonde, dimostreremo che $(a\,s)^{r-1} = (s\,a)^{r-1}$.

Sia $\lambda \in Z^+$. Per ogni $s \in S$, l'elemento $s + \lambda\,a$ è simmetrico; dall'ipotesi su a segue che $(a\,(s + \lambda\,a))^r = ((s + \lambda\,a)\,a)^r$, cioè $(a\,s + \lambda\,a^2)^r = (s\,a + \lambda\,a^2)^r$. Esplicitando tale uguaglianza si ottiene:

$$(a\,s)^r + \lambda\,((a\,s)^{r-1}\,a^2 + (a\,s)^{r-2}\,a^2\,(a\,s) + \ldots + (a\,s)\,a^2\,(a\,s)^{r-2} +$$

$$+ a^2\,(a\,s)^{r-1}) + \lambda^2\,q_2\,(a, s) + \lambda^3\,q_3\,(a, s) + \ldots + \lambda^r\,a^{2r} =$$

$$= (s\,a)^r + \lambda\,((s\,a)^{r-1}\,a^2 + (s\,a)^{r-2}\,a^2\,(s\,a) + \ldots + (s\,a)\,a^2\,(s\,a)^{r-2} +$$

$$+ a^2\,(s\,a)^{r-1}) + \lambda^2\,t_2\,(a, s) + \lambda^3\,t_3\,(a, s) + \ldots + \lambda^r\,a^{2r},$$

dove i $q_i\,(a, s)$ e $t_i\,(a, s)$ sono polinomi in a ed s a coefficienti negli interi modulo 2. Poiché $a^2 \in N \subset Z$, per ogni $i \geq 1$, $(a\,s)^{r-i}\,a^2\,(a\,s)^{i-1} = (a\,s)^{r-1}\,a^2$ ed $(s\,a)^{r-i}\,a^2\,(s\,a)^{i-1} = (s\,a)^{r-1}\,a^2$.

Ne segue che, poiché r è dispari e quindi $r \equiv 1 \pmod 2$,

$$(a\,s)^r + \lambda\,(a\,s)^{r-1}\,a^2 + \lambda^2\,q_2(a,s) + \ldots + \lambda^r\,a^{2r} =$$

$$= (s\,a)^r + \lambda\,(s\,a)^{r-1}\,a^2 + \lambda^2\,t_2(a,s) + \ldots + \lambda^r\,a^{2r}\,.$$

Se poniamo $p_i(a,s) = q_i(a,s) + t_i(a,s)$ $(i = 2, \ldots, r-1)$, risulta: $\lambda\,a^2((a\,s)^{r-1} + (s\,a)^{r-1}) + \lambda^2\,p_2(a,s) + \ldots + \lambda^{r-1}\,p_{r-1}(a,s) = 0$.

Poiché Z^+ è infinito, possiamo trovare degli elementi non nulli tutti distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1} \in Z^+$, e sia

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{r-1} \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{r-1} & \lambda_{r-1}^2 & \ldots & \lambda_{r-1}^{r-1} \end{pmatrix}.$$

Risulta:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{r-1} \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{r-1} & \lambda_{r-1}^2 & \ldots & \lambda_{r-1}^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2((a\,s)^{r-1} + (s\,a)^{r-1}) \\ p_2(a,s) \\ \vdots \\ p_{r-1}(a,s) \end{pmatrix} = 0.$$

Poiché $\det.\ \Lambda \neq 0$, Λ è una matrice invertibile, quindi risulta:

$$a^2((a\,s)^{r-1} + (s\,a)^{r-1}) = p_2(a,s) = \ldots = p_{r-1}(a,s) = 0.$$

In particolare si ha: $(a\,s)^{r-1} = (s\,a)^{r-1}$.

Abbiamo così le due uguaglianze $(a\,s)^r = (s\,a)^r$ e $(a\,s)^{r-1} = (s\,a)^{r-1}$. Risulta:

$(s\,a)^r = (a\,s)^r = (a\,s)^{r-1}\,a\,s = (s\,a)^{r-1}\,a\,s$, da cui segue $s\,a = a\,s$.

Per il teorema B, si ha che $\bar{S} = D$ oppure $S \subset Z$, ed in entrambi i casi il teorema è provato.

Dal teorema 1. discende facilmente il seguente

TEOREMA 2. — $Z_2^+ = Z^+$.

Dimostrazione. — Chiaramente $Z^+ \subset Z_2^+$. Dimostriamo l'altra inclusione.

Sia $a \in Z_2^+$ ed $s \in S$. Dall'ipotesi segue $(a\,s)^n = a^n\,s^n$; per cancellazione risulta $(s\,a)^{n-1} = a^{n-1}\,s^{n-1}$ e quindi $(a\,s)^{n-1} = ((s\,a)^{n-1})^* = (a^{n-1}\,s^{n-1})^* = s^{n-1}\,a^{n-1}$.

Possiamo applicare il teorema 1 ed otteniamo $a \in Z^+$.

Passiamo ora a dimostrare il seguente

LEMMA 1. — $Z_3^+ \subset Z^+$.

Dimostrazione. — Sia $a \in Z_3^+$. Per ogni $s \in S$, risulta $(a + s)^n = a^n + s^n$. Da ciò segue che $a + s$ commuta con $a^n + s^n$, si ha quindi $(a + s)\,(a^n + s^n) = a^{n+1} + a\,s^n + s\,a^n + s^{n+1} = a^{n+1} + a^n\,s + s^n\,a + s^{n+1} = (a^n + s^n)\,(a + s)$. Ciò implica:

$$a\,s^n - s^n\,a = a^n\,s - s\,a^n. \tag{1}$$

Se $a\,s^n - s^n\,a \neq 0$, allora $a\,X^n - X^n\,a = a^n\,X - X\,a^n$ è una identità polinomiale generalizzata soddisfatta dagli elementi in S. Per il teorema C risulta: $\dim_Z D < \infty$.

Sia $\lambda \in Z^+$. Poiché $\lambda\,s \in S$, si ha che $a\,(\lambda\,s)^n - (\lambda\,s)^n\,a = a^n\,\lambda\,s - \lambda\,s\,a^n$ cioè $\lambda^n\,(a\,s^n - s^n\,a) = \lambda\,(a^n\,s - s\,a^n)$. Ciò implica $\lambda^n = \lambda$ e, poiché n non dipende da λ, segue che Z^+ è un campo finito. Per quanto osservato nel n. 1, Z è un ampliamento finito di Z^+; inoltre $\dim_Z D < \infty$. Ciò implica che D è un corpo finito; dal teorema di Wedderburn sui corpi finiti, segue che D è un campo, dunque banalmente $Z_3^+ \subset Z^+$.

Possiamo quindi supporre che $a\,s^n = s^n\,a$, per ogni $s \in S$. Applicando il teorema A, otteniamo che $a \in Z$ oppure $N \subset Z$. Nel primo caso $Z_3^+ \subset Z^+$ ed il teorema è dimostrato. Sia dunque $N \subset Z$. Se car. $D \neq 2$, $S \subset Z$ e quindi $Z_3^+ \subset Z^+$. Sia allora car. $D = 2$. Per il teorema B, si ha che $S \subset Z$ oppure $\bar{S} = D$. Nel primo caso il teorema è dimostrato; supponiamo quindi che $\bar{S} = D$.

Per ogni $s \in S$, risulta $(a + s)^n = a^n + s^n$, e se tale n è dispari, allora a^{n+1} è una norma e quindi $a^{n+1} \in Z$. Inoltre dalla (1) e dall'uguaglianza $a\,s^n = s^n\,a$, segue che $a^n \in Z$. Ciò implica $a \in Z$. Possiamo quindi limitarci ad esaminare il caso in cui n sia pari.

Sia $n = 2^t\,r$, dove $(r, 2) = 1$, e supponiamo che $t > 1$. Se dimostriamo che $(a + s)^{n/2} = a^{n/2} + s^{n/2}$, allora, per induzione su t, potremo supporre che $t = 1$ e quindi $n = 2\,r$. Infatti: $((a + s)^{n/2} + a^{n/2} + s^{n/2})^2 = (a + s)^n + (a^{n/2} + s^{n/2})^2 = (a + s)^n + a^n + s^n = 0$, e, poiché D non possiede elementi nilpotenti non nulli, risulta $(a + s)^{n/2} = a^{n/2} + s^{n/2}$.

Sia dunque $n = 2\,r$, dove $(r, 2) = 1$.

Notiamo che, poiché $N \subset Z$, allora $\dim_Z D \leq 4$ e quindi, per quanto visto nella dimostrazione del teorema 1, possiamo supporre che Z^+ sia infinito. Sia $\lambda \in Z^+$, poiché $(\lambda s)^* = \lambda s \in S$, risulta: $(a + \lambda s)^n = a^n + \lambda^n s^n$. Sviluppando tale prodotto si ottiene:

$$a^n + \lambda (a^{n-1} s + a^{n-2} s a + \ldots + a s a^{n-2} + s a^{n-1}) + \lambda^2 p_2(a, s) +$$

$$+ \ldots + \lambda^n s^n = a^n + \lambda^n s^n,$$

dove, per $i = 2, \ldots, n-1$, $p_i(a, s)$ è un polinomio in a ed s a coefficienti negli interi modulo 2. Applicando la tecnica del determinante di Vandermonde usata nella dimostrazione del teorema 1, perveniamo all'uguaglianza:

$$a^{n-1} s + a^{n-2} s a + \ldots + a s a^{n-2} + s a^{n-1} = 0.$$

Poiché $N \subset Z$, $a^{n-i} s a^{i-1} = a^{n-1} s$ se i è dispari, ed $a^{n-i} s a^{i-1} = s a^{n-1}$ se i è pari ($i = 1, \ldots, n$); quindi dalla precedente uguaglianza si ricava:

$$a^{n-1} s + s a^{n-1} + a^{n-1} s + \ldots + a^{n-1} s + s a^{n-1} = 0,$$

cioè

$$(n/2)(a^{n-1} s + s a^{n-1}) = 0.$$

Poiché $n/2$ è dispari, si ha che $a^{n-1} s = s a^{n-1}$ e dunque $a^{n-1} \in Z$. D'altra parte $a^n \in Z$, quindi $a \in Z$. Il lemma è così dimostrato.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA 3. — *Se car.* $D \neq 0$, *allora* $Z_3^+ = Z^+$; *altrimenti* $Z_3^+ = \{0\}$.

Dimostrazione. — Sia car. $D = p > 0$. Se $a \in Z^+$, allora, per ogni $s \in S$, si ha: $(a + s)^p = a^p + s^p$; quindi $a \in Z_3^+$. Questo fatto insieme al lemma 1 dimostrano la prima parte del teorema.

Sia car. $D = 0$. In questo caso Z^+ è infinito, e sia $a \in Z_3^+$. Risulta allora: $(a+a)^n = a^n + a^n$, cioè $2^n a^n = (2a)^n = 2a^n$ da cui $(2^n - 2)a^n = 0$. Poiché $n > 1$ e car $D = 0$, si ha $a^n = 0$ e quindi $a = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. FELZENSZWALB, *Rings radical over subrings and some generalization of the notion of center*, Univ. of Chicago, thesis (1976).
[2] I. N. HERSTEIN, *Power maps in rings*, Michigan Math. J. **8** (1961), 29-32.
[3] I. N. HERSTEIN, *Noncommutative Rings*, Carus Monograph No .15, Mathematical Association of America, Washington D.C., 1968.
[4] I. N. HERSTEIN, *Rings with Involution*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.
[5] W. S. MARTINDALE, *III Primitive rings with involution whose symmetric elements satisfy a generalized polynomial identity*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 508-511.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, M. Curcio e G. Panella.

Comportamento nel tempo delle attività di alcuni enzimi nucleolitici nel plasma seminale bovino *

Nota di HISANORI SUZUKI **, MARIO ROCCA **, MARIO VALPREDA ***, BARBARA NICOLAUS ** e ROCCO DE PRISCO **

presentata dal socio ordinario VINCENZO LEONE

(Adunanza del 4 febbraio 1978)

SOMMARIO. — La variazione mensile di attività di alcuni enzimi nucleolitici presenti nel plasma seminale bovino è stata dimostrata in questo lavoro. Alte attività di ribonucleasi sono state riscontrate in primavera e inizio estate, periodi nei quali anche l'indice di fertilità dei tori stessi risulta alto.

Attività fosfodiesterasiche molto alte si sono riscontrate nei mesi che vanno da luglio a gennaio con un minimo in ottobre, nei quali periodi l'indice di fertilità non è alto.

Per quanto riguarda la 5′-nucleotidasi, l'attività è alta nei mesi di settembre, gennaio e aprile.

La variazione mensile del contenuto proteico rassomiglia a quello dell'attività ribonucleasica.

SUMMARY. — A monthly variation of activity for some nucleolytic enzymes of bull seminal plasma has been shown in this research.

High ribonuclease levels have been found in Spring and Summer, where also the fertility index of bulls is high.

Quite high phosphodiesterase levels have been detected during the months from July to January, with a minimum in October ; in those months the fertility index is not high.

5′-nucleotidase levels are high in the months of September, January and April.

The monthly variations of the protein concentration is very similar to those observed for ribonuclease.

* Questo lavoro è stato effettuato con un contributo del C.N.R. contratto n. 77.00343.85. Progetto finalizzato della Biologia della Riproduzione.

** Istituto di Chimica Organica e Biologica della Facoltà di Scienze - Università di Napoli.

*** Istituto Zooprofilattico Sperimentale del Piemonte e della Liguria.

Introduzione

Vari enzimi nucleolitici sono stati riconosciuti quali costituenti normali del plasma seminale di toro: 5'-nucleotidasi [1], adenosina deaminasi [2], xantina ossidasi [3], nucleoside fosforilasi [4], NAD glicoidrolasi [5] e ribonucleasi [6] sono stati tutti identificati a vari livelli di attività.

In particolare in questo laboratorio è stato approfondito lo studio su una ribonucleasi (RNASI BS-1) [7, 8] che presenta interessanti proprietà enzimatiche (struttura quaternaria, sequenza molto simile alla ribonucleasi pancreatica, capacità di scindere l'RNA a doppia elica) e biologiche (attività antispermatogenica, e effetto citostatico su culture di cellule trasformate da virus) [9, 10].

Recentemente una fosfodiesterasi capace di idrolizzare specificamente i nucleotidi ciclici 3', 5' è stata parzialmente purificata e caratterizzata [11].

Il ruolo fisiologico di questi enzimi nucleolitici non è affatto chiaro per cui con la presente ricerca si è voluto compiere un primo tentativo di determinare se esistano correlazioni di qualsiasi tipo fra livello di attività di vari enzimi in campioni di sperma bovino prelevati ad intervalli regolari nell'arco di un anno, e la fertilità degli animali stessi.

Materiali

Tori esaminati: tre di *razza piemontese*, uno di *razza bruna-alpina*, uno *frisone canadese*.

Tutti i campioni di sperma sono stati centrifugati a 12.000 giri per 15' onde eliminare gli spermatozoi.

RNA: il prodotto commerciale della Sigma è stato purificato secondo la metodica di Shortman [12].

I nucleotidi (3', 5' cAMP, 3', 5 cGMP, 3', 5' cCMP, 5' AMP) erano forniti dalla Sigma.

Gli altri reagenti erano tutti di grado analitico.

Metodi - Attività ribonucleasica

È stata saggiata secondo il metodo di Kunitz [13] seguendo la diminuzione di assorbanza a 300 mμ. La concentrazione di RNA usata era di 0,5 mg/ml e la temperatura di 25°. L'attività specifica è espressa come unità/mg di proteina.

ATTIVITÀ FOSFODIESTERASICA

L'attività fosfodiesterasica ciclica è stata saggiata usando i tre substrati (3′, 5′ cCAMP, 3′, 5′ cGMP, 3′, 5′ cCMP) alla concentrazione di 1 mM, nel volume totale di 0,5 ml contenente 0,06 M Tris/HCl pH 8.0, 5 mM $MgCl_2$ ed una aliquota di plasma seminale, incubando per 30′ a 37°. La concentrazione di nucleotidi ciclici corrisponde alla semisaturazione dell'enzima. La reazione è stata fermata con aggiunta di 0,5 ml di acido tricloroacetico al 12 % a 0°.

La quantità di fosforo inorganico è stata determinata colorimetricamente col metodo di KING [14]. La linearità di questa reazione è stata osservata fino a 30′ di incubazione.

ATTIVITÀ 5′ NUCLEOTIDASICA

L'attività è stata saggiata nelle stesse condizioni descritte per l'attività fosfodiesterasica, usando però 5′ AMP come substrato: una unità enzimatica equivale a una micromole di substrato idrolizzato per minuto. L'attività specifica è espressa come unità/mg di proteina.

TABELLA I

Proteine ed enzimi nucleolitici in plasma seminale di toro nei vari mesi dell'anno.

Mesi	Proteine (mg/ml)	Ribonucleasi (Unità Kunitz/ml)	Fosfodiesterasi ciclica (Unità/ml)			5′ Nucleotidasi Unità/ml
			cAMP	cGMP	cCMP	
Gennaio	49	83	909	421	623	77.010
Febbraio	44	128	397	164	312	36.988
Marzo	42	118	827	416	430	30.638
Aprile	47	135	394	362	177	62.489
Maggio	54	167	432	93	227	41.783
Giugno	56	185	337	46	136	53.551
Luglio	54	148	1105	530	810	46.569
Agosto	47	122	1176	590	959	28.468
Settembre	49	91	948	656	996	90.405
Ottobre	53	134	552	260	420	38.828
Novembre	59	104	976	600	664	64.370
Dicembre	53	100	965	392	532	68.538

PROTEINE

La concentrazione proteica è stata calcolata con il metodo di LOWRY et al. [15].

RISULTATI

1) *Variazioni del contenuto proteico*

Le variazioni del contenuto proteico sono mostrate nella tabella I e figura 1. Come si può notare. esso è basso nei mesi che vanno da gennaio ad aprile e per agosto e settembre, ed è alto nei mesi che vanno da maggio a luglio e da ottobre a dicembre.

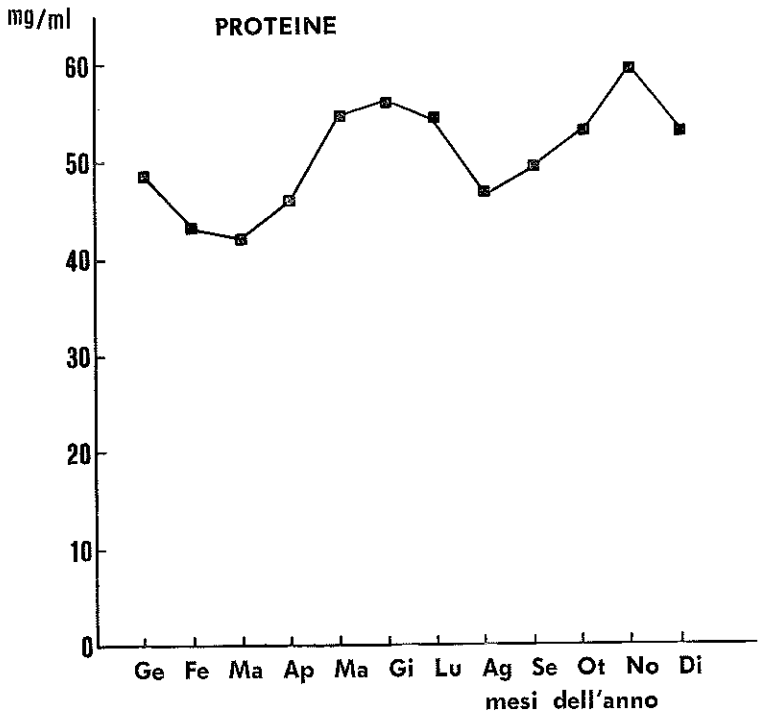


FIG. 1. - Variazione del contenuto proteico durante i mesi dell'anno. I valori riportati esprimono la media dei valori dei cinque tori esaminati.
Il saggio è stato effettuato come descritto nel testo.

2) *Attività ribonucleasica*

La variazione dell'attività ribonucleasica (Unità Kunitz/ml) è mostrata nella tabella I e figura 2. Si riscontrano alte attività nei mesi

che vanno da aprile a luglio; negli altri mesi l'attività è minore, con qualche punta solo nei mesi di febbraio ed ottobre.

3) *Attività fosfodiesterasica ciclica*

L'attività fosfodiesterasica ciclica è circa due volte più alta per 3', 5' cAMP che per non 3', 5' cGMP in tutti i mesi dell'anno. Le variazioni delle attività fosfodiesterasiche per questi tre substrati durante tutti i mesi dell'anno sono simili tra di loro, vedi figura 3. La caratteristica comune è che la massima attività si riscontra nei mesi che

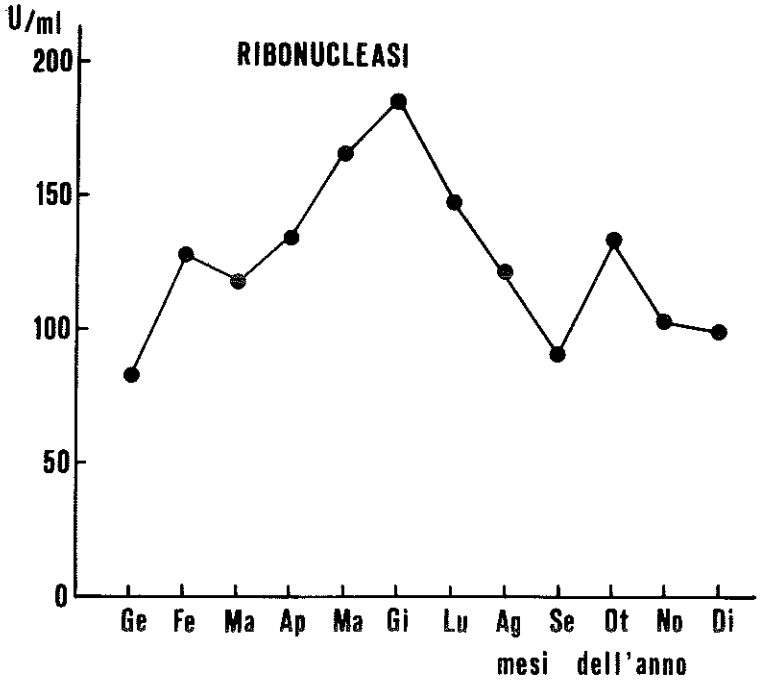


FIG. 2. - Variazione dell'attività ribonucleasica durante i mesi dell'anno. I valori riportati esprimono la media dei valori dei cinque tori esaminati. Il saggio è stato effettuato come descritto nel testo.

vanno da luglio a gennaio (con un minimo in ottobre) mentre nei restanti mesi l'attività è notevolmente minore (con l'eccezione di una punta a marzo).

4) *Attività 5' nucleotidasica*

L'attività 5' nucleotidasica è molto più alta rispetto a quelle fosfodiesterasiche (circa 100 volte). Come si può osservare dalla figura

4 si hanno attività molto alte nei mesi che vanno da settembre a gennaio (meno ottobre), e nettamente inferiori negli altri mesi, con la sola eccezione di aprile, in cui anche si ha una notevole attività.

Discussione

Da questo studio sono risultate variazioni nel tempo dell'attività ribonucleasica, delle attività fosfodiesterasiche sui nucleotidi ciclici e della 5′ nucleotidasi nonché del contenuto proteico nel plasma semi-

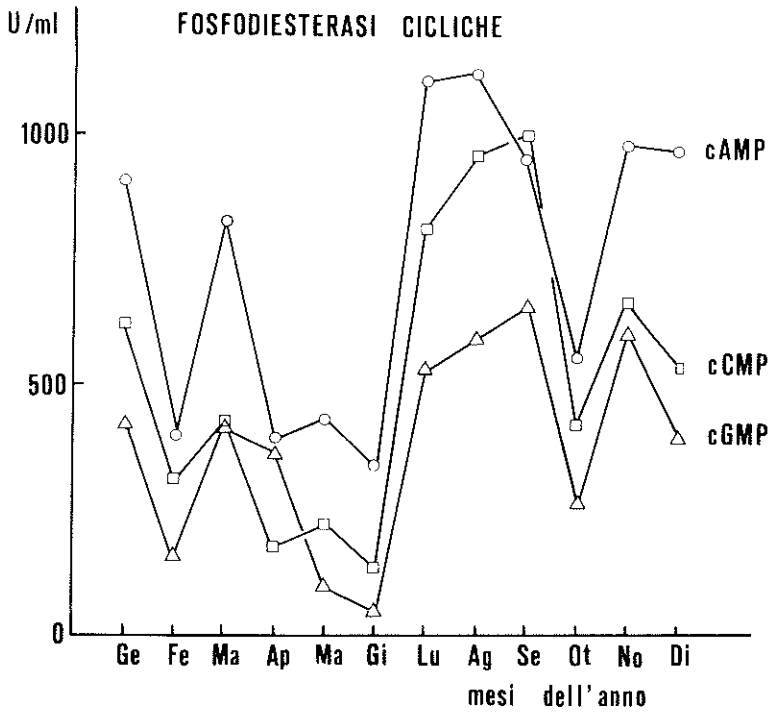


Fig. 3. - Variazione delle attività fosfodiesterasiche cicliche durante i mesi dell'anno. I valori riportati esprimono la media dei valori dei cinque tori esaminati. Il saggio è stato effettuato come descritto nel testo.

nale di cinque tori di varie razze. Come si può vedere dai risultati, la variazione dell'attività ribonucleasica e quella del contenuto proteico hanno andamento quasi simile. Ambedue mostrano due picchi di cui uno corrispondente alla primavera, inizio estate ed un altro all'autunno, mentre si nota una diminuzione nelle altre stagioni. Per quanto riguarda l'attività delle fosfodiesterasi specifiche per i nucleotidi ciclici

le variazioni sono simili per tutti e tre i substrati saggiati. La massima attività si è riscontrata nei mesi che vanno da luglio a settembre con altri due picchi secondari, uno a novembre e un altro a marzo.

Questo andamento è soprattutto evidente per l'attività fosfodiesterasica per 3', 5' cGMP che a giugno presenta una attività quasi trascurabile mentre si ha un notevole aumento nei mesi che vanno da luglio a settembre.

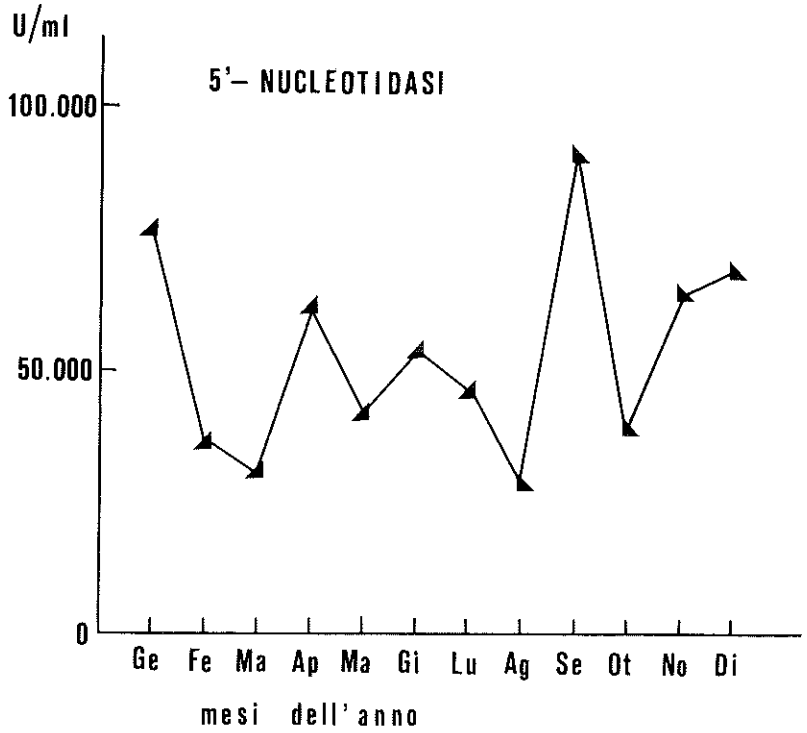


FIG. 4. - Variazione dell'attività 5'-nucleotidasica durante i mesi dell'anno. I valori riportati esprimono la media dei valori dei cinque tori esaminati. Il saggio è stato effettuato come descritto nel testo.

È ben noto che già alcuni indici di attività enzimatiche del plasma seminale bovino quale per esempio la fruttolisi [16] sono stati messi in relazione con la fertilità, trovando un comportamento quasi parallelo tra l'attività degli enzimi e la fertilità stagionale. Ora per quanto riguarda le attività enzimatiche e il contenuto proteico, oggetto di questa nota, risulta che la concentrazione proteica e l'attività ribonucleasica presentano anch'esse un andamento che coincide con le variazioni della fertilità: infatti come si è detto questi parametri

presentano un massimo nei periodi della primavera ed autunno che sono gli stessi periodi in cui si riscontra in questi tori una fertilità maggiore. Per quanto riguarda le attività fosfodiesterasiche per i nucleotidi ciclici, la situazione è alquanto diversa, in quanto il massimo dell'attività enzimatica (che è molto spiccata, come si è detto, specie per 3', 5' cGMP) si riscontra nei mesi che vanno da luglio a settembre, con una diminuzione nei mesi di novembre, dicembre e gennaio. Da questo andamento sembrerebbe esservi un ritardo nella comparsa della massima attività enzimatica, rispetto alla ribonucleasi e al contenuto proteico.

Al di fuori di piccole differenze anche il contenuto della 5' nucleotidasi è analogo.

BIBLIOGRAFIA

[1] HEPPEL L. A. e HILMOE R. Y., J. Biol. Chem., **188**, 665 (1951).
[2] LEONE E. e SANTOIANNI P., Ital. J. Biochem., **6**, 221 (1957).
[3] LEONE E., Boll. Soc. Ital. Biol. Sper., **29**, 513 (1953).
[4] LEONE E. e SANTOIANNI P., Ital. J. Biochem., **6**, 212 (1557).
[5] LEONE E. e BONADUCE L., Bioch. Bioph. Acta, **31**, 292 (1959).
[6] D'ALESSIO G., FLORIDI A., DE PRISCO R., PIGNERO A. e LEONE E., Eur. J. Biochem., **26**, 153 (1972).
[7] FLORIDI A., D'ALESSIO G. e LEONE E., Eur. J. Biochem., **26**, 162 (1792).
[8] LEONE E., SUZUKI H., GRECO L., PARENTE A., FARINA B. e LA MONTAGNA R., Proceed. of 8th Meeting Federation of European Bioch. Soc., Abstr. 259 (1972).
[9] LEONE E., GRECO L., RASTOGI R. K. e IELA L., J. Reprod. Fert., **34**, 197 (1973).
[10] VESCIA S., Comunicazione personale.
[11] SUZUKI H. e LEONE E., 1° Congr. Naz. Soc. Ital. Biochimica, 1975 Abstract Pb 27.
[12] SHORTMAN K., Bioph. Acta, **51**, 37 (1961).
[13] KUNITZ M., J. Biol. Chem., **164**, 563 (1946).
[14] KING E., Biochem. J., **26**, 292 (1932).
[15] LOWRY O. H., ROSENBROUGH N. J., FARR A. C. e RANDALL R. J., J. Biol. Chem., **193**, 265 (1951)
[16] BONADONNA T., Riproduzione animale e fecondazione, vol. V, UTET, 1974.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, B. De Lerma e G. Chieffi.

Sulla regolarità della soluzione di una disequazione variazionale

Nota di MIRELLA BIANCARDI e RAFFAELE TOSCANO
presentata dal socio corrispondente DONATO GRECO

(Adunanza del 4 marzo 1978)

SOMMARIO. — Il problema della ricerca della posizione di equilibrio di una membrana elastica tesa tra due ostacoli elastici viene, in questa nota, ricondotto ad una disequazione variazionale. Per quest'ultima vengono dimostrati teoremi di regolarità della soluzione.

SUMMARY. — In this paper the problem of finding the equilibrium position of an elastic membrane stretched between two elastic obstacles is seen to be equivalent to a variational inequality. The main results concern the regularity theorems for the solution of the variational inequality.

Scopo della presente nota è lo studio della regolarità della soluzione u di una disequazione variazionale, che trae origine dal problema della ricerca della posizione di equilibrio di una membrana elastica fissata al bordo e tesa tra due ostacoli elasticamente deformabili.

Uno studio analogo è già stato fatto in precedenza con ostacoli rigidi (G. STAMPACCHIA [9]), e si è pervenuti alla conclusione che, in opportune ipotesi sui dati, $u \in H^{2,p}$ $(p \geq 2)$, mentre in generale, u non appartiene ad $H^{3,p}$.

Orbene in questo lavoro viene mostrato che con ostacoli elasticamente deformabili, imponendo opportune condizioni ai dati, la soluzione appartiene ad $H^{2,p}$, nonché ad $H^{3,p}$, se le suddette condizioni diventano più forti.

Nel n. 1, introdotte le notazioni e la disequazione variazionale in oggetto, dopo aver precisato che quest'ultima ammette un'unica soluzione u, viene dimostrato un teorema che fornisce una caratterizzazione della u come soluzione di un sistema di complementarità.

Nel n. 2, passando allo studio della regolarità della u, vengono stabiliti due teoremi. La dimostrazione del primo di essi si ispira ad

un procedimento dovuto a G. STAMPACCHIA [9] e a dei risultati di U. Mosco [7], e consiste nell'approssimare la u mediante soluzioni di opportune disequazioni variazionali.

Infine, nel n. 3, utilizzando quanto stabilito nel n. 1, si interpreta la u come soluzione del problema fisico che ha dato origine al nostro studio.

1. Siano:

Ω un aperto limitato e connesso di R^n, di classe C^2;

$A = -\sum_{ij}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$, con $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, un operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico;

Ψ_1, Ψ_2 ed f elementi di $L^2(\Omega)$, con $\Psi_1 \leq \Psi_2$ q. o. in Ω;

E una funzione misurabile e limitata in Ω, dotata di minorante positivo.

Poniamo:

$$H = H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)^{1} \quad \text{e,} \quad \forall (u, v) \in H \times H,$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A u \, (v + E A v) \, d x;$$

poniamo ancora, $\forall v \in H$:

$$F(v) = \int_{\Omega} f (v + E A v), \qquad T(v) = v + E A v$$

[1] Per ogni $p \geq 2$ indichiamo con $H^{k,p}(\Omega)$ il completamento di $C^k(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma:

$$\| u \|_{H^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} | D^{\alpha} u |^p \, d x \right)^{1/p}$$

e porremo, come al solito, $H^k(\Omega) = H^{k,2}(\Omega)$. Con $H_o^1(\Omega)$ denotiamo il completamento di $C_o^1(\Omega)$ rispetto alla norma:

$$\| u \|_{H_o^1(\Omega)} = \left(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i}^{n} \| u_{x_i} \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

Si supporrà H munito del prodotto scalare di $H^2(\Omega)$:

$$((u, v))_H = (u, v) + \sum_{i}^{n} (u_{x_i}, v_{x_i}) + \sum_{ij}^{n} (u_{x_i x_j}, v_{x_i x_j})$$

dove col simbolo $(\bullet, \bullet)$ denotiamo, qui e nel seguito, il prodotto scalare in $L^2(\Omega)$. Evidentemente H è uno spazio di Hilbert.

È noto (cfr. [3]) che la forma bilineare in H $a(u, v)$ è continua e coercitiva, e che l'operatore lineare T di H in $L^2(\Omega)$ è continuo ed ha per codominio $L^2(\Omega)$.

Pertanto il sottoinsieme di H:

$$K = \{v \in H \mid \Psi_1 + E f \leq T(v) \leq \Psi_2 + E f \quad \text{q. o. in } \Omega\}$$

è chiuso, convesso e non vuoto, e la disequazione variazionale:

$$u \in K : a(u, v - u) \geq F(v - u) \; \forall v \in K \tag{1}$$

ammette soluzione unica.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema seguente, che caratterizza la soluzione della disequazione variazionale (1).

TEOREMA 1. — *Nelle ipotesi fatte su* Ω, f, Ψ_1, Ψ_2 *ed* E, *per ogni* $u \in H$, posto:

$$(A u - f)^+ = \max\{A u - f, 0\}, \; (A u - f)^- = \min\{A u - f, 0\}$$

le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) *Risulta*:

$$\begin{cases} \Psi_1 + E f \leq u + E A u \leq \Psi_2 + E f & \text{q. o. in } \Omega \\ (A u - f)^+ (u + E A u - \Psi_1 - E f) = 0 & \text{q. o. in } \Omega \\ (A u - f)^- (u + E A u - \Psi_2 - E f) = 0 & \text{q. o. in } \Omega \end{cases} \tag{2}$$

b) u *è soluzione della disequazione variazionale* (1).

Dim. — Infatti, se è vera la a), per la prima delle (2) $u \in K$.

D'altra parte, risultando per la seconda e la terza delle (2):

$$\int_\Omega (A u - f)^+ (\Psi_1 + E f - u - E A u) \, d x = 0$$

$$\int_\Omega (A u - f)^- (\Psi_2 + E f - u - E A u) \, d x = 0$$

per ogni $v \in K$ si ha:

$$\int_\Omega (A\,u - f)^+ (v + E\,A\,v - u - E\,A\,u)\,d\,x \geq 0$$

$$\int_\Omega (A\,u - f)^- (v + E\,A\,v - u - E\,A\,u)\,d\,x \geq 0$$

da cui:

$$\int_\Omega (A\,u - f)\,(T\,(v) - T\,(u))\,d\,x \geq 0 \qquad \forall\, v \in K.$$

Dimostriamo ora che b) $\Rightarrow$ a).
La prima delle (2) è ovvia.
Al fine di stabilire la seconda e la terza, poniamo:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid u \leq \Psi_1\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid \Psi_1 < u < \Psi_2\},\ \Omega_3 = \{x \in \Omega \mid u \geq \Psi_2\};$$

poniamo ancora:

$$g = \begin{cases} \Psi_1 + E\,f, & \text{in } \Omega_1 \\ u + E\,f, & \text{in } \Omega_2 \\ \Psi_2 + E\,f, & \text{in } \Omega_3 \end{cases}$$

e indichiamo con v_o l'unico elemento di H tale che $v_o + E\,A\,v_o = g$.
Poiché $v_o \in K$, si ha:

$$\int_\Omega A\,u\,(T\,(v_o) - T\,(u))\,d\,x \geq \int_\Omega f\,(T\,(v_o) - T\,(u))\,d\,x$$

ovvero:

$$\int_{\Omega_1} (A\,u - f)\ (\Psi_1 + E\,f - u - E\,A\,u)\,d\,x + \int_{\Omega_2} (A\,u - f)\ (f - A\,u)\,E\,d\,x +$$

$$\int_{\Omega_3} (A\,u - f)\ (\Psi_2 + E\,f - u - E\,A\,u)\,d\,x \geq 0.$$

Da ciò, tenuto conto che per l'appartenenza di u a K:

$$u \leq \Psi_1 \Rightarrow A\,u \geq f\,, \qquad u \geq \Psi_2 \Rightarrow A\,u \leq f$$

si trae:

$$\begin{aligned} (A\,u - f)(\Psi_1 + E\,f - u - E\,A\,u) &= 0 && \text{in } \Omega_1\,, \\ A\,u &= f && \text{in } \Omega_2\,, \\ (A\,u - f)(\Psi_2 + E\,f - u - E\,A\,u) &= 0 && \text{in } \Omega_3\,, \end{aligned}$$

nonché la seconda e la terza delle (2).

2. Scopo di questo numero è lo studio della regolarità della soluzione u della disequazione variazionale (1).

Sussiste in proposito il seguente:

TEOREMA 2. — *Posto*:

$$\begin{aligned} v_1 &= T^{-1}(\Psi_1 + E\,f), & v_2 &= T^{-1}(\Psi_2 + E\,f) \\ g_1 &= \max\{A\,v_1, 0\}, & g_2 &= \min\{A\,v_2, 0\} \end{aligned}$$

se f, g_1 *e* g_2 *appartengono a* $L^p(\Omega)$ $(p > 2)$, *allora la soluzione* u *della disequazione variazionale* (1) *appartiene ad* $H^{2,p}(\Omega)$.

Dim. — Poniamo per ogni $n \in N$:

$$K_n = \left\{ v \in H \,|\, \Psi_1 + E\,f - \frac{1}{n} \leq T(v) \leq \Psi_2 + E\,f + \frac{1}{n} \quad \text{q. o. in } \Omega \right\}$$

e denotiamo con u_n la soluzione della disequazione variazionale:

$$u_n \in K_n : (A\,u_n, T(v) - T(u_n)) \geq (f, T(v) - T(u_n)) \qquad \forall\, v \in K_n\,.$$

Poniamo ancora per ogni $t \in [0, +\infty[$:

$$\varphi(t) = t^{p-1},$$

ed indichiamo con J l'applicazione di dualità tra $L^p(\Omega)$ e $L^{p'}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ relativa a φ:

$$w \in L^p(\Omega) \to |w|^{p-2} w.$$

Ciò premesso, e posto per ogni $n \in \mathrm{N}$ e per ogni $t \in \mathrm{R}$:

$$h_1^{(n)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq -\dfrac{1}{n} \\ -n\,t, & \text{se } -\dfrac{1}{n} \leq t \leq 0 \\ 0, & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad , \quad h_2^{(n)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ n\,t, & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n} \\ 1, & \text{se } t \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

proviamo anzitutto che:

α) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un unico $u_\varepsilon \in \mathrm{K}_n$ tale che:

$$\mathrm{A}\,u_\varepsilon \in \mathrm{L}^p(\Omega)$$

$$\mathrm{T}(u_\varepsilon) + \varepsilon\,\mathrm{J}(\mathrm{A}\,u_\varepsilon - g_1\,h_1^{(n)}[\mathrm{T}(u_\varepsilon) - \mathrm{T}(v_1)] - g_2\,h_2^{(n)}[\mathrm{T}(u_\varepsilon) - \mathrm{T}(v_2)]) = \mathrm{T}(u_n) \tag{3}$$

A tale scopo, per ogni $w \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ denotiamo con $\mathrm{C}^{(\varepsilon)}\,w$ l'applicazione:

$$v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \to (\mathrm{A}\,\mathrm{T}^{-1}(w), v) + \left(\mathrm{J}^{-1}\left(\frac{w}{\varepsilon}\right), v\right) +$$

$$- (g_1\,h_1^{(n)}[w + \mathrm{T}(u_n) - \mathrm{T}(v_1)], v) - (g_2\,h_2^{(n)}[w + \mathrm{T}(u_n) - \mathrm{T}(v_2)], v).$$

Poiché:

AT^{-1} è continuo e $\forall (w_1, w_2) \in (\mathrm{L}^2(\Omega))^2$ $(\mathrm{AT}^{-1}(w_1) - \mathrm{AT}^{-1}(w_2), w_1 - w_2) \geq 0$,

J^{-1} è l'applicazione di dualità tra $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ e $\mathrm{L}^p(\Omega)$ relativa a φ^{-1},

$h_1^{(n)}$ è continua e decrescente,

$h_2^{(n)}$ è continua e crescente,

si ha che l'operatore $\mathrm{C}^{(\varepsilon)}$ di $\mathrm{L}^2(\Omega)$ in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ risulta emicontinuo e strettamente monotono. Inoltre, detto w un arbitrario elemento di $\mathrm{L}^2(\Omega)$ e posto $\bar{w} = \mathrm{T}^{-1}(w)$, essendo:

$$\| w \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \| \mathrm{T}(\bar{w}) \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \mathrm{cost} \| \bar{w} \|^2_{\mathrm{H}} \leq \mathrm{cost}\,(\mathrm{A}\,\bar{w}, \mathrm{T}(\bar{w})) =$$

$$= \mathrm{cost}\,(\mathrm{AT}^{-1}(w), w) \leq \mathrm{cost}\,(\mathrm{C}^{(\varepsilon)}\,w, w)$$

si ha:

$$\frac{(\mathrm{C}^{(\varepsilon)}\,w, w)}{\| w \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}} \to +\infty \qquad \text{per} \quad \| w \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \to +\infty.$$

Da quanto è stato detto, si trae per un noto teorema di HARTMAN-STAMPACCHIA (cfr. [4], [9]) l'esistenza di un unico $w_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ tale che:

$$(AT^{-1}(w_\varepsilon), v) + \left(J^{-1}\left(\frac{w_\varepsilon}{\varepsilon}\right), v\right) - (g_1 h_1^{(n)}\ [w_\varepsilon + T(u_n) - T(v_1)], v) +$$
$$- (g_2\ h_2^{(n)}\ [w_\varepsilon + T(u_n) - T(v_2)], v) = (-A u_n, v) \qquad \forall v \in L^2(\Omega)$$

ossia:

$$A(T^{-1}(w_\varepsilon) + u_n) - g_1 h_1^{(n)}\ [w_\varepsilon + T(u_n) - T(v_1)] +$$
$$- g_2\ h_2^{(n)}\ [w_\varepsilon + T(u_n) - T(v_2)] + J^{-1}\left(\frac{w_\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Pertanto, posto $u_\varepsilon = T^{-1}(w_\varepsilon) + u_n$, si ha:

$$u_\varepsilon \in H,\ A u_\varepsilon - g_1 h_1^{(n)}\ [T(u_\varepsilon) - T(v_1)] - g_2 h_2^{(n)}\ [T(u_\varepsilon) - T(v_2)] +$$
$$+ J^{-1}\left(\frac{T(u_\varepsilon) - T(u_n)}{\varepsilon}\right) = 0$$

il che implica:

$$A u_\varepsilon \in L^p(\Omega).$$

Mostriamo ora che $u_\varepsilon \in K_n$.
Allo scopo di provare la disuguaglianza:

$$T(u_\varepsilon) \leq T(v_2) + \frac{1}{n} \qquad \text{q. o. in } \Omega \tag{4}$$

poniamo:

$$\Omega' = \left\{x \in \Omega \mid T(u_\varepsilon) \geq T(v_2) + \frac{1}{n}\right\}$$
$$\Omega'' = \left\{x \in \Omega \mid u_\varepsilon \geq v_2 + \frac{1}{n}\right\}$$

e notiamo che in Ω' si ha:

$$T(u_\varepsilon) + \varepsilon J(A u_\varepsilon - g_2) = T(u_n) \qquad \text{in virtù della (3),}$$
$$J^{-1}\left(\frac{T(u_\varepsilon) - T(u_n)}{\varepsilon}\right) \geq 0 \tag{5}$$

nonché, conseguentemente:

$$A\,u_\varepsilon \leq A\,v_2\,.$$

Da ciò, tenendo anche conto della implicazione valida per ogni $x \in \Omega$:

$$\left[u_\varepsilon(x) \geq v_2(x) + \frac{1}{n}\,,\ T(u_\varepsilon)(x) \leq T(v_2)(x) + \frac{1}{n}\right] \Rightarrow A u_\varepsilon(x) \leq A v_2(x)$$

si trae:

$$\Omega' \subseteq \Omega'', \quad \text{in } \Omega'' \quad A\,u_\varepsilon \leq A\,v_2 \quad \text{e}$$

(6)

$$T(v_2) + \frac{1}{n} - T(u_\varepsilon) \geq v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon\,.$$

La seconda delle (5) implica che:

$$(7) \qquad \int_{\Omega'} J^{-1}\left(\frac{T(u_\varepsilon) - T(u_n)}{\varepsilon}\right)\left(T(v_2) + \frac{1}{n} - T(u_\varepsilon)\right) d\,x \leq 0.$$

Posto poi:

$$\vartheta = \min\left\{v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon, 0\right\}$$

appartenendo ϑ ad $H_0^1(\Omega)$ [2], si ha:

$$\int_{\Omega''} (A\,v_2 - A\,u_\varepsilon)\left(v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon\right) d\,x =$$

$$= \int_{\Omega''} A\left[v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon\right]\left(v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon\right) d\,x =$$

$$= \int_{\Omega} A\left[v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon\right]\vartheta\,dx = \sum_{ij}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\,d\,x =$$

$$= \sum_{ij}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\,d\,x \geq 0.$$

[2] Infatti, indicata $\forall\, v \in H^1(\Omega)$ con $\gamma_0 v$ la traccia di v su $\partial\Omega$, risulta:

$$\gamma_0 \vartheta = \min\left\{\gamma_0\left(v_2 + \frac{1}{n} - u_\varepsilon\right), 0\right\} = \min\left\{\frac{1}{n}, 0\right\} = 0$$

La relazione precedente, unitamente alle (5) ed alle (6), comporta che:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega'} J^{-1}\left(\frac{T(u_\varepsilon)-T(u_n)}{\varepsilon}\right)\left(T(v_2)+\frac{1}{n}-T(u_\varepsilon)\right)dx = \\
&= \int_{\Omega'} (g_2 - Au_\varepsilon)\left(T(v_2)+\frac{1}{n}-T(u_\varepsilon)\right)dx \geq \\
&\geq \int_{\Omega'} (g_2 - Au_\varepsilon)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx = \\
&= \int_{\Omega'} (g_2 - Av_2)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx + \\
&+ \int_{\Omega'} (Av_2 - Au_\varepsilon)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx \geq \\
&\geq \int_{\Omega'} (Av_2 - Au_\varepsilon)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx = \\
&= \int_{\Omega''} (Av_2 - Au_\varepsilon)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx - \\
&- \int_{\Omega''-\Omega'} (Av_2 - Au_\varepsilon)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx = \\
&= \int_{\Omega''} (Av_2 - Au_\varepsilon)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx + \\
&+ \int_{\Omega''-\Omega'} (Au_\varepsilon - Av_2)\left(v_2+\frac{1}{n}-u_\varepsilon\right)dx \geq 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Da (7) e (8) si trae:

$$
\int_{\Omega'} J^{-1}\left(\frac{T(u_\varepsilon)-T(u_n)}{\varepsilon}\right)\left(T(v_2)+\frac{1}{n}-T(u_\varepsilon)\right)dx = 0
$$

da cui, per la seconda delle (5):

$$
J^{-1}\left(\frac{T(u_\varepsilon)-T(u_n)}{\varepsilon}\right)\left(T(v_2)+\frac{1}{n}-T(u_\varepsilon)\right) = 0 \qquad \text{in } \Omega'.
$$

Pertanto, tenuto conto che per ogni $x \in \Omega'$:

$$J^{-1}\left(\frac{T(u_\varepsilon) - T(u_n)}{\varepsilon}\right)(x) = 0 \Rightarrow T(u_\varepsilon)(x) =$$

$$= T(u_n)(x) \Rightarrow T(u_\varepsilon)(x) = T(v_2)(x) + \frac{1}{n}$$

si ha:

$$T(u_\varepsilon) = T(v_2) + \frac{1}{n} \qquad \text{in } \Omega'$$

e quindi vale la (4).

Per quanto riguarda l'altra disuguaglianza:

$$T(u_\varepsilon) \geq T(v_1) - \frac{1}{n} \qquad \text{q. o. in } \Omega,$$

si pone:

$$\Omega' = \left\{ x \in \Omega \,|\, T(u_\varepsilon) \leq T(v_1) - \frac{1}{n} \right\}, \quad \Omega'' = \left\{ x \in \Omega \,|\, u_\varepsilon \leq v_1 - \frac{1}{n} \right\}$$

e si ripete un ragionamento analogo a quello svolto precedentemente, dopo aver osservato preliminarmente che in Ω':

$$T(u_\varepsilon) + \varepsilon J(A u_\varepsilon - g_1) = T(u_n).$$

Acquisita la α), rileviamo esplicitamente che l'appartenenza di $A u_\varepsilon$ ad $L^p(\Omega)$ e la coercitività dell'operatore A implicano (cfr. [6]):

$$u_\varepsilon \in H^{2,p}(\Omega), \qquad \| u_\varepsilon \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq \text{cost} \, \| A u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)}. \tag{9}$$

Fatta questa precisazione, mostriamo che per ogni $n \in N$:

$$A u_n \in L^p(\Omega). \tag{10}$$

Intanto si ha:

$$\forall v \in K_n \quad (A v, T(v) - T(u_n)) \geq (f, T(v) - T(u_n))$$

in particolare, per $v = u_\varepsilon$:

$$(A u_\varepsilon, T(u_\varepsilon) - T(u_n)) \geq (f, T(u_\varepsilon) - T(u_n))$$

ossia, in virtù della (3):

$$(A u_\varepsilon, J(A u_\varepsilon - g_\varepsilon)) \leq (f, J(A u_\varepsilon - g_\varepsilon))$$

essendo:

$$g_\varepsilon = g_1 h_1^{(n)} [T(u_\varepsilon) - T(v_1)] + g_2 h_2^{(n)} [T(u_\varepsilon) - T(v_2)].$$

Da ciò, tenuto conto che:

$$\varphi(\| A u_\varepsilon - g_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)}) \| A u_\varepsilon - g_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} = (A u_\varepsilon - g_\varepsilon, J(A u_\varepsilon - g_\varepsilon))$$

$$\| J(A u_\varepsilon - g_\varepsilon) \|_{L^{p'}(\Omega)} = \varphi(\| A u_\varepsilon - g_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)}) \tag{11}$$

si trae:

$$\begin{aligned} \| A u_\varepsilon - g_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} &\leq \| f \|_{L^p(\Omega)} + \\ + \| g_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} &\leq \| f \|_{L^p(\Omega)} + \| g_1 \|_{L^p(\Omega)} + \| g_2 \|_{L^p(\Omega)} \end{aligned} \tag{12}$$

e quindi:

$$\| A u_\varepsilon \|_{L^p(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} + 2 \| g_1 \|_{L^p(\Omega)} + 2 \| g_2 \|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{13}$$

Osserviamo ora che, per la (13), esistono $B_n \in L^p(\Omega)$ ed una successione infinitesima $\{\varepsilon_h\}$ di numeri positivi tali che per $h \to +\infty$:

$$A u_{\varepsilon_h} \to B_n \qquad \text{debolmente in } L^p(\Omega). \tag{14}$$

D'altra parte, essendo per ogni $h \in N$:

$$\begin{aligned} \| u_{\varepsilon_h} - u_n \|_H^2 &\leq \text{cost}\,(A u_{\varepsilon_h} - A u_n, T(u_{\varepsilon_h}) - T(u_n)) \leq \\ &\leq \text{cost}\,(\| A u_{\varepsilon_h} \|_{L^p(\Omega)} + \| f \|_{L^p(\Omega)}) \cdot \| T(u_{\varepsilon_h}) - T(u_n) \|_{L^{p'}(\Omega)} \end{aligned}$$

e tenendo conto di (3), (11), (12) e (13), si ha:

$$\lim_{h \to +\infty} u_{\varepsilon_h} = u_n \qquad \text{in } H$$

ed anche:

$$\lim_{h \to +\infty} (A u_{\varepsilon_h}, u_{\varepsilon_h} - u_n) = 0. \tag{15}$$

Da (14) e (15) si trae [3]:

$$B_n = A u_n \qquad \text{q. o. in } \Omega$$

e con ciò la (10).

[3] Infatti, per la monotonia di A, qualunque siano $v \in H$, $h \in N$, $t > 0$:

$$(A[u_n + t(v - u_n)], u_{\varepsilon_h} - u_n - t(v - u_n)) - (A u_{\varepsilon_h}, u_{\varepsilon_h} - u_n) \leq t (A u_{\varepsilon_h}, u_n - v)$$

Proviamo infine che:

$$u \in H^{2,p}(\Omega).$$

All'uopo osserviamo anzitutto che, risultando:

$$\lim_{h \to +\infty} A u_{\varepsilon_h} = A u_n \qquad \text{debolmente in } L^p(\Omega)$$

si ha:

$$\| A u_n \|_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{h \to +\infty}{}' \| A u_{\varepsilon_h} \|_{L^p(\Omega)}$$

e quindi per la (13):

$$\forall n \in N \quad \| A u_n \|_{L^p(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} + 2 \| g_1 \|_{L^p(\Omega)} + 2 \| g_2 \|_{L^p(\Omega)}$$

nonché (cfr. [6]):

$$(16) \qquad \forall n \in N \quad u_n \in H^{2,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \| u_n \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq$$
$$\leq \text{cost} (\| f \|_{L^p(\Omega)} + 2 \| g_1 \|_{L^p(\Omega)} + 2 \| g_2 \|_{L^p(\Omega)}).$$

Pertanto esistono $u' \in H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ed una successione $(u_{n_i})_{i \in N}$ estratta dalla $\{u_n\}$ tali che per $i \to +\infty$:

$$(17) \qquad u_{n_i} \to u' \qquad \text{debolmente in } H^{2,p}(\Omega).$$

D'altra parte, poiché $(K_n)_{n \in N}$ è decrescente e $K = \bigcap_{n \in N} K_n$, si ha (cfr. [7]):

$$(18) \qquad \lim K_n = K$$

Da (17) e (18) si trae (cfr. [7]):

$$u' = u$$

e quindi:

$$u \in H^{2,p}(\Omega).$$

e quindi, per $h \to +\infty$:

$$(A [u_n + t (v - u_n)], u_n - v) \leq (B_n, u_n - v)$$

da cui, per $t \to 0$:

$$(A u_n, u_n - v) \leq (B_n, u_n - v) \qquad \forall v \in H$$

il che implica:

$$A u_n = B_n \qquad \text{q. o. in } \Omega.$$

OSSERVAZIONE 1. — Supponiamo che f, Ψ_1 e Ψ_2 siano elementi di $L^p(\Omega)$; sicché per $i = 1, 2$, essendo:

$$\frac{v_i}{E} + A\, v_i = \frac{\Psi_i}{E} + f$$

si ha (cfr. [6]):

$$v_i \in H^{2,p}(\Omega)$$

$$\| v_i \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq \text{cost}\,(\| \Psi_i \|_{L^p(\Omega)} + \| f \|_{L^p(\Omega)} + \| v_i \|_{L^2(\Omega)}) \leq$$

$$\leq \text{cost}\,(\| \Psi_i \|_{L^p(\Omega)} + \| f \|_{L^p(\Omega)})$$

nonché

$$\| g_i \|_{L^p(\Omega)} \leq \| A\, v_i \|_{L^p(\Omega)} \leq \text{cost}\,(\| \Psi_i \|_{L^p(\Omega)} + \| f \|_{L^p(\Omega)}).$$

Ne segue, per la (16):

$$\| u \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq C\,(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| \Psi_1 \|_{L^p(\Omega)} + \| \Psi_2 \|_{L^p(\Omega)})$$

con $C = C(\Omega, E)$.

Conseguenza dei teoremi 1 e 2 è il seguente:

TEOREMA 3. — *Supponiamo* Ω *di classe* C^3, $a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$, E *dotata in* Ω *di derivate parziali prime continue e limitate.*

Se Ψ_1, Ψ_2 *ed* f *appartengono ad* $H^{1,p}(\Omega)$ $(p \geq 2)$, *allora la soluzione* u *della* (1) *appartiene ad* $H^{3,p}(\Omega)$.

Dim. — È sufficiente stabilire che $A\, u \in H^{1,p}(\Omega)$ (cfr. [6]).

All'uopo osserviamo subito che, in virtù del teorema 1 per quasi tutti gli x appartenenti ad Ω valgono le implicazioni:

$$u(x) \leq \Psi_1(x) \Rightarrow A\, u(x) = f(x) + \frac{\Psi_1(x) - u(x)}{E(x)}$$

$$\Psi_1(x) < u(x) < \Psi_2(x) \Rightarrow A\, u(x) = f(x)$$

$$u(x) \geq \Psi_2(x) \Rightarrow A\, u(x) = f(x) + \frac{\Psi_2(x) - u(x)}{E(x)}\,.$$

Pertanto risulta:

$$A\, u = f + \max\left\{\frac{\Psi_1 - u}{E}, 0\right\} + \max\left\{\frac{u - \Psi_2}{E}, 0\right\} \quad \text{q. o in } \Omega \tag{19}$$

da cui $A\, u \in H^{1,p}$, in virtù delle ipotesi fatte e del teorema 2.

OSSERVAZIONE 2. — Dalla (19), tenendo conto della osservazione 1, si trae immediatamente:

$$\| u \|_{H^{3,p}(\Omega)} \leq C (\| f \|_{H^{1,p}(\Omega)} + \| \Psi_1 \|_{H^{1,p}(\Omega)} + \| \Psi_2 \|_{H^{1,p}(\Omega)})$$

con $C = C(\Omega, E)$.

3. Vogliamo qui dare un esempio di problema della teoria dell'elasticità, che viene tradotto nella disequazione variazionale (1).

Nello spazio cartesiano x, y, z siano dati due corpi elastici, B_1 e B_2, aventi per comune proiezione sul piano $z = 0$ la chiusura di un aperto limitato Ω. Siano poi:

$$z = \Psi_1(x, y) \quad , \quad z = \Psi_2(x, y)$$

rispettivamente l'equazione della superficie S_1 che delimita superiormente B_1 e quella della superficie S_2 che delimita inferiormente B_2, e si abbia:

$$\Psi_1(x, y) \leq \Psi_2(x, y) \qquad \text{su } \Omega$$

in modo che B_1 sia sottostante B_2.

Assegnata una membrana elastica M tesa e fissata nei punti della frontiera di Ω in assenza degli ostacoli B_1 e B_2, desideriamo determinare la configurazione di equilibrio assunta da M quando essa viene deformata per effetto della presenza degli ostacoli B_1 e B_2 e di una forza distribuita $\vec{f}$.

Supponiamo che $\vec{f}$ sia perpendicolare al piano $x y$, e che la deformazione degli ostacoli sia proporzionale alla reazione vincolare secondo un comune coefficiente di proporzionalità espresso da una funzione $E(x, y)$.

Inoltre, detta F la componente secondo l'asse z della risultante delle forze attive e vincolari agenti su M, ed indicata con $z = u(x, y)$ l'equazione della configurazione di equilibrio della membrana, supponiamo che u verifichi il sistema ai limiti (eq. della elasticità linearizzata):

$$(20) \qquad \begin{cases} A\, u = F & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial \Omega \end{cases}$$

dove A è l'operatore differenziale del secondo ordine che descrive il comportamento elastico della membrana.

Dunque, se f è la componente di $\vec{f}$ secondo l'asse z, avremo:

$$u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega, \qquad \mathrm{F} = f$$

nei punti in cui la membrana non tocca gli ostacoli,

$$\mathrm{F} = f + \frac{\Psi_1 - u}{\mathrm{E}} \left[\text{risp. } \mathrm{F} = f + \frac{\Psi_2 - u}{\mathrm{E}}\right]$$

nei punti in cui la membrana tocca (ed eventualmente deforma) l'ostacolo B_1 [risp. B_2].

Quanto detto poc'anzi, si traduce, in virtù della (20) nelle relazioni:

$$(21) \qquad \begin{cases} u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \\ u \leq \Psi_1 \Rightarrow \mathrm{A}\,u = f + \dfrac{\Psi_1 - u}{\mathrm{E}} \\ \Psi_1 < u < \Psi_2 \Rightarrow \mathrm{A}\,u = f \\ u \geq \Psi_2 \Rightarrow \mathrm{A}\,u = f + \dfrac{\Psi_2 - u}{\mathrm{E}}\,. \end{cases}$$

Evidentemente la u verifica le (21) se, e solo se, risulta:

$$(22) \qquad \begin{cases} u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \\ \Psi_1 + \mathrm{E}\,f \leq u + \mathrm{E}\,\mathrm{A}\,u \leq \Psi_2 + \mathrm{E}\,f \\ (A\,u - f)^+ (u + \mathrm{E}\,\mathrm{A}\,u - \Psi_1 - \mathrm{E}\,f) = 0 \\ (\mathrm{A}\,u - f)^- (u + \mathrm{E}\,\mathrm{A}\,u - \Psi_2 - \mathrm{E}\,f) = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto, ambientando, com'è naturale, il problema posto nello spazio H, in virtù dell'equivalenza tra le (21) e (22), e tenendo conto del teorema 1, possiamo asserire che:
nelle ipotesi su Ω, f, Ψ_1, Ψ_2, E ed A precisate nel n. 1, il problema (21) è equivalente alla disequazione variazionale (1), e quindi ammette un'unica soluzione, la quale, nelle ulteriori ipotesi del teorema 2 [risp. teorema 3], appartiere ad $\mathrm{H}^{2,p}(\Omega)$ [risp. ad $\mathrm{H}^{3,p}(\Omega)$].

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BREZIS - G. STAMPACCHIA, *Sur la regularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 153-180.
[2] F. E. BROWDER, *Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **71** (1965), 780-785.
[3] R. GUIDOBALDI - R. TOSCANO, *Una disequazione variazionale connessa ad un problema di elasticità*, Ricerche di Matematica, volume XXV, 1976, fascicolo 2°.
[4] P. HARTMAN - G. STAMPACCHIA, *On some non linear elliptic functional differential equations*, Acta Math., **115** (1966), 271-310.
[5] H. LEWY - G. STAMPACCHIA, *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 153-188.
[6] C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type*, Springer-Verlag 1970.
[7] U. MOSCO, *Convergence of convex sets and of solutions of variational Inequalities*, Advances in Math., vol. 3, IV, **4** (1969), 510-585
[8] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson 1967.
[9] G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Pubbl. IAC, s. III, n. 25, Roma 1969.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Donato Greco, Carlo Miranda e Carlo Ciliberto.

Numerical Inversion of Laplace Transform by the Generalized Cardinal Series

Nota di MARIA LUISA DE CESARE * e MARIA ROSARIA MADDALENA *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 4 marzo 1978)

RIASSUNTO. — Nel presente articolo viene presentato un metodo per determinare numericamente l'antitrasformata di Laplace di una funzione $F(z)$ mediante una serie ottenuta sostituendo formalmente alle funzioni $Re\ \{F(z)\}$ ed $Im\ \{F(z)\}$ la loro serie cardinale generalizzata. Si perviene inoltre ad una maggiorazione dell'errore indipendente dalle derivate.

ABSTRACT. — In this paper a method is presented to evaluate the inverse Laplace transform of a function $F(z)$ numerically by means of a series obtained formally replacing the functions $Re\ \{F(z)\}$ and $Im\ \{F(z)\}$ with their generalized cardinal series. Furthermore, a derivative-free bound on the remainder is stated.

1. - INTRODUCTION

Let $f(t)$ be the real inverse Laplace transform of a function

$$F(x + i\,y) = u(x, y) + i\,v(x, y).$$

As we know [5], if the Riemann's inversion formula holds, the evaluation of $f(t)$ can be reduced to the evaluation of one of the following integrals:

$$(1.1) \qquad f(t) = \frac{2\,e^{xt}}{\pi}\int_0^\infty u(x, y)\,\cos(t\,y)\,d\,y \qquad t > 0$$

$$(1.2) \qquad f(t) = \frac{-\,2\,e^{xt}}{\pi}\int_0^\infty v(x, y)\,\sin(t\,y)\,d\,y \qquad t > 0$$

* Istituto Matematico « R. Caccioppoli » - Via Mezzocannone, 8 - Napoli.

where x is a real positive number greater than the exponential order x_c of $f(t)$.

In the present paper we give a numerical method to approximate $f(t)$ by means of a series obtained replacing the functions $u(x, y)$ and $v(x, y)$ in (1.1) and (1.2) with their generalized cardinal series and then formally integrating termwise. A bound is obtained on the difference between the sum of this series and the function $f(t)$ which it approximates.

In section 2 we give some definitions and theorems that will turn useful later.

In section 3 the numerical method is described and a derivative-free bound on the remainder is stated.

In section 4 we give some examples illustrating the use of the method.

2. - Definitions and theorems

We first recall and state some definitions and theorems.

Theorem 2.1.[1] — *The functions*

$$u(\bar{d}, w) = \frac{F(\bar{d} + i w) + F(\bar{d} - i w)}{2}$$

$$v(\bar{d}, w) = \frac{F(\bar{d} + i w) - F(\bar{d} - i w)}{2 i} \tag{2.1}$$

where $w = y + i\xi$, *are analytic in the strip*:

$$|\xi| < \bar{d} = x - x_c \tag{2.2}$$

Lemma 2.2.[2] — *The functions* $u(x, y)$ *and* $v(x, y)$ *satisfy the identities*:

$$u(x, y) = u(x, -y)$$

$$v(x, y) = -v(x, -y) \tag{2.3}$$

Definition 2.3.[3] — *Let* $p \geq 0$ *be an integer and let* $h > 0$ *be real. Given a function* $g : R \to C$, $g \in C^p(R)$ *the* $p - t\,h$ *cardinal series of* g *with respect to the interval* h, *is defined by*:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} g^{(q)}(m h)\, t_q(z - m h) \qquad z \in C \tag{2.4}$$

[1] Cfr. [5].
[2] Cfr. [5].
[3] Cfr. [2].

with:

$$(2.5)\quad t_q(z) = \frac{z^q}{q!}\left(\frac{\sin(\pi/h)\,z}{(\pi/h)\,z}\right)^{p+1}\sum_{r=0}^{[(p-q)/2]} b_{2r}(p)\left(\frac{\pi}{h}\,z\right)^{2r} \qquad z \in C$$

where the $b_{2r}(p)$ *are the coefficients of the Laurent expansion*

$$\frac{1}{\sin^{p+1} z} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{b_{2r}(p)}{z^{p+1-2r}} \qquad 0 < |z| < \pi$$

Remark. — The entire functions $t_q(z)$ have the same parity as q. If $p = 0$, the series (2.4) is the Whittaker's cardinal series of g [4].

LEMMA 2.4. [5] — *Let the function* g *be analytic in the strip* $B = R \times i[-d, d] \subset C$, $d > 0$; *then*

$$\chi_n(z)\,g(z) - \sum_{m=-n}^{n}\sum_{q=0}^{p} g^{(q)}(m\,h)\,t_q(z - m\,h) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\sin^{p+1}(\pi/h)\,z\int_{C_n}\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)\sin^{p+1}(\pi/h)\,\zeta} \qquad z \notin C_n$$

where C_n *denotes the boundary of the rectangle*:

$$B_n = \left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)h, \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right] \times i[-d, d] \subset B$$

and

$$\chi_n(z) = \begin{cases} 1 \text{ if } z \in B_n \\ 0 \text{ if } z \notin B_n \end{cases}$$

THEOREM 2.5. [6] — *Let* g *be an entire function such that*:

$$|g(z)| \leq c\,e^{\rho|y|} \qquad z = x + i\,y \in C$$

with real numbers $c \geq 0$ *and* $0 \leq \rho < (p+1)\frac{\pi}{h}$. *Then the* $p - t\,h$ *cardinal series of* g *with respect to* h *is locally uniformly convergent for all* $z \in C$ *and its sum is equal to* $g(z)$.

[4] Cfr. [4].
[5] Cfr. [2].
[6] Cfr. [2].

DEFINITION 2.6. — *Let $d > 0$ be real. Then S_d denotes the set of all functions g such that:*

$$|g(z)| = |g(x + iy)| \leq \frac{A}{|x|^{\beta}}$$

with $|x| \geq \delta$, $\delta > 0$, $|y| \leq d$ and A, β real numbers such that $A > 0$, $\beta > 1$.

LEMMA 2.7. — *Let $p \geq 0$ be an integer and h and t be real numbers such that*

$$h > 0$$

$$0 < t < \frac{\pi}{h} \tag{2.6}$$

Then

$$T_q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t_q(x)\, e^{-itx}\, dx < \infty \qquad (q = 0, 1, \ldots, p) \tag{2.6a}$$

where the functions $t_q(x)$ are defined by (2.5).

Proof. — From (2.5) we obtain for $z = x$: [7]

$$t_q(x) = \frac{b_{p-q}(p)}{q!\,(\pi/h)^{q+1}} \frac{\sin^{p+1}(\pi/h)\,x}{x} + \\ + \sum_{r=0}^{\frac{p-q}{2}-1} \frac{b_{2r}(p)}{q!\,(\pi/h)^{p+1-2r}} \frac{\sin^{p+1}(\pi/h)\,x}{x^{p+1-(q+2r)}} \qquad (p - q \text{ even})$$

$$t_q(x) = \sum_{r=0}^{\frac{p-q-1}{2}} \frac{b_{2r}(p)}{q!\,(\pi/h)^{p+1-2r}} \frac{\sin^{p+1}(\pi/h)\,x}{x^{p+1-(q+2r)}} \qquad (p - q \text{ odd})$$

Since

$$1 < p + 1 - (q + 2r) \leq p + 1, \quad \left(r = 0, 1, \ldots, \left[\frac{p-q-1}{2}\right];\ q < p\right)$$

[7] $\sum_{r=0}^{\frac{p-q}{2}-1} (\cdot) = 0$ for $p - q = 0$.

the assertion follows if we prove that:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{p+1}(\pi/h)\,x}{x} \quad e^{-itx}\,dx < \infty$$

This immediately follows, under the assumption (2.6), if p is even, making use of the identities:

$$\sin^{p+1}\left(\frac{\pi}{h}x\right)\cos(t\,x) = \frac{1}{(2\,i)^p}\sum_{q=0}^{p/2}(-1)^q\binom{p+1}{2}\times$$

$$\frac{1}{2}\left\{\sin\left((p+1-2\,q)\frac{\pi}{h}+t\right)x+\sin\left((p+1-2\,q)\frac{\pi}{h}-t\right)x\right\}$$

$$\sin^{p+1}\left(\frac{\pi}{h}x\right)\sin(t\,x) = \frac{1}{(2\,i)^p}\sum_{q=0}^{p/2}(-1)^q\binom{p+1}{2}\times$$

$$\frac{1}{2}\left\{\cos\left((p+1-2\,q)\frac{\pi}{h}-t\right)x-\cos\left((p+1-2\,q)\frac{\pi}{h}+t\right)x\right\}$$

and other similar relations that hold if p is odd.

THEOREM 2.8. — *Under the assumptions of Lemma* 2.7, *let* $a_{p,q}$ *be defined by*:

$$(2.7) \qquad a_{p,q} = a_{p,q}(t) = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{2\,\pi}{h}\right)^{q+1}\mathrm{T}_q(t) \qquad (q = 0, 1, \ldots, p)$$

where the $\mathrm{T}_q(t)$ *are defined by* (2.6a), *and let*

$$s = \frac{2\,\pi}{h\,t}.$$

Then for the quantities $a_{p,q}$ *we have*

i)

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{p,0} = [1 - 4/(p^2\,s^2)]\,a_{p-2,0}$$

$$a_{p,1} = -[8\,i/(p^2\,s)]\,a_{p-2,0} + [1 - 4/(p^2\,s^2)]\,a_{p-2,1}$$

$$(2.8)\quad a_{p,q} = (2/p)^2\, a_{p-2,q-1} - [8\,i/(p^2\,s)]\, a_{p-2,q-1} + [1 - 4/(p^2\,s^2)]\, a_{p-2,q} \qquad (q = 2, 3, \ldots, p-2)$$

$$a_{p,p-1} = (2/p)^2\, a_{p-2,p-3} - [8\,i/(p^2\,s)]\, a_{p-2,p-2}$$

$$a_{p,p} = \left[\frac{1}{(p/2)!}\right]^2$$

if p is even, and

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{p,0} = [1 - 2/(p+1)\,s]\, a_{p-1,0}$$

$$(2.9)\quad a_{p,q} = [-2\,i/(p+1)]\, a_{p-1,q-1} + [1 - 2/(p+1)\,s]\, a_{p-1,q} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p-1)$$

$$a_{p,p} = \frac{-2\,i}{p+1}\left[\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}\right]^2$$

if p is odd.

ii) *The recursion formulae* (2.8) *and* (2.9) *are numerically stable.*

Proof.

i) The functions $e^{i\rho z}$ and $e^{-i\rho z}$ satisfy the assumptions of Theorem 2.5, if we choose $0 \leq \rho < (p+1)\frac{\pi}{h}$. Therefore we get: [8]

$$e^{i\rho z} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} (i\rho)^q\, e^{i\rho m h}\, t_q(z - m h)$$

$$e^{-i\rho z} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} (-i\rho)^q\, e^{-i\rho m h}\, t_q(z - m h)$$

If we multiply both sides of these identities by e^{-ixt} and integrate over the interval $[0, h]$ of the real axis we have:

$$(2.10)\quad \int_0^h e^{i(\rho - t)x}\, dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} (i\rho)^q\, e^{i(\rho-t)mh} \int_{-mh}^{-(m-1)h} t_q(x)\, e^{-itx}\, dx$$

[8] Cfr. [2].

$$(2.11)\qquad \int_0^h e^{-i(\rho+t)x}\,dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} (-i\rho)^q\, e^{-i(\rho+t)mh} \int_{-mh}^{-(m-1)h} t_q(x)\, e^{-itx}\,dx$$

Setting $\rho - t = j\dfrac{\pi}{h}$ in (2.10) and $\rho + t = n\dfrac{\pi}{h}$ in (2.11), for all j and n even integers such that $0 \le j \le p$ and $2 \le n \le p+1$ we have, for Lemma 2.7

$$\int_0^h e^{ij\frac{\pi}{h}x}\,dx = \sum_{q=0}^{p} \left[i\left(j\,\frac{\pi}{h} + \frac{2\pi}{sh} \right) \right]^q \int_{-\infty}^{\infty} t_q(x)\, e^{-itx}\,dx$$

$$(j = 2r,\ r = 0, \ldots, [p/2])$$

$$\int_0^h e^{-in\frac{\pi}{h}x}\,dx = \sum_{q=0}^{p} \left[-i\left(n\,\frac{\pi}{h} - \frac{2\pi}{sh} \right) \right]^q \int_{-\infty}^{\infty} t_q(x)\, e^{-itx}\,dx$$

$$(n = 2r,\ r = 1, \ldots, [(p+1)/2])$$

Thus, making use of (2.7) and evaluating the integrals on the left sides, we are led to the system of linear equations:

$$1 = \sum_{q=0}^{p} \left(\frac{i}{s} \right)^q a_{p,q}$$

$$(2.12)\qquad 0 = \sum_{q=0}^{p} \left[i\left(r + \frac{1}{s} \right) \right]^q a_{p,q}$$

$$r = \begin{cases} \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm p/2 & p \text{ even} \\ \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (p-1)/2,\ -(p+1)/2 & p \text{ odd} \end{cases}$$

Define a polynomial p_p of degree p, by:

$$p_p(z) = \sum_{q=0}^{p} a_{p,q}\, z^q$$

Then (2.12) read:

$$p_p\left(\frac{i}{s} \right) = 1$$

$$p_p\left(i\left(r + \frac{1}{s} \right) \right) = 0$$

Hence:

$$p_0(z) = 1$$

$$p_p(z) = \prod_{r=1}^{p/2} [(z/r)^2 - (2\,i\,z)/(r^2\,s) - 1/(r^2\,s^2) + 1], (p = 2, 4, \ldots) \tag{2.13}$$

$$p_p(z) = \left[\frac{(z - i/s)}{\frac{i\,(p+1)}{2}} + 1\right] \prod_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} [(z/r)^2 - (2\,i\,z)/(r^2\,s) - 1/(r^2\,s^2) + 1], \quad (p = 1, 3, \ldots) \tag{2.14}$$

The indentities (2.13) and (2.14) can be written:

$$\sum_{q=0}^{p} a_{p,q}\,z^q = \{(2/p)^2\,z^2 - [8\,i/(p^2\,s)]\,z + 1 - 4/(p^2\,s^2)\} \sum_{q=0}^{p-2} a_{p,q}\,z^q$$

$$\sum_{q=0}^{p} a_{p,q}\,z^q = \left[\frac{-2\,i}{p+1}\,z + 1 - \frac{2}{(p+1)\,s}\right] \sum_{q=0}^{p-1} a_{p,q}\,z^q$$

Comparing the coefficients, we find the recursion formulae (2.8) and (2.9).

ii) Denote by:

$\mathrm{M}(k) = \{m_{r,j}(k)\}$ the $(p+1) \times (p+1)$ matrix defined for all integers p and $k = 2\,n$, $n = 0, 1, \ldots, [p/2]$, as follows:

$$m_{r,j}(k) = \begin{cases} 1 - 4/k^2\,s^2 & (r = 1, 2, \ldots, k+1;\ j = r) \\ -8\,i/k^2\,\mathrm{s} & (r = 2, 3, \ldots, k+1;\ j = r-1) \\ 4/k^2 & (r = 3, 4, \ldots, k+1;\ j = r-2) \\ 0 & (\text{elsewere}) \end{cases}$$

$\mathrm{D}(p) = \{d_{r,j}(p)\}$ the $(p+1) \times (p+1)$ matrix defined for all odd integers p as follows:

$$d_{r,j}(p) = \begin{cases} 1 - 2/(p+1)\,s & (r = 1, 2, \ldots, p+1;\ j = r) \\ -2\,i/(p+1) & (r = 2, 3, \ldots, p+1;\ j = r-1) \\ 0 & (\text{elsewere}) \end{cases}$$

$X(k) = \{x_r(k)\}$ the column vector of order $p+1$ defined for all integers p and $k = 0, 1, \ldots, p$ as follows:

$$x_r(k) = \begin{cases} a_{k,r-1} & (r = 1, 2, \ldots, k+1) \\ 0 & (\text{elsewere}) \end{cases}$$

where the $a_{k,r-1}$ are defined by (2.7).

Then (2.8) and (2.9) can be written in vectorial form as:

$$X(p) = \begin{cases} C \times X(0) \text{ if } p \text{ is even} \\ C \times X(0) \text{ if } p \text{ is old} \end{cases}$$

where

$$C = M(p) \times M(p-2) \times \ldots \times M(2)$$

$$C' = D(p) \times M(p-1) \times M(p-3) \times \ldots \times M(2)$$

If $\rho(C)$ and $\rho(C')$ are the spectral radius of C and C′ respectively, we have:

$$\rho(C) = \prod_{n=1}^{p/2} |1 - 4/(2ns)^2| \qquad (\text{even } p)$$

$$\rho(C') = |1 - 2/(p+1)s| \prod_{n=1}^{(p-1)/2} |1 - 4/(2ns)^2| \qquad (\text{odd } p)$$

and for condition (2.6) we obtain

$$\rho(C) < 1, \ \rho(C') < 1$$

From this the assertion ii) follows.

LEMMA 2.9. — *Setting*:

$$J_p(t, \zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{p+1}(\pi y/h) \cos(ty)}{\zeta - y} \, dy \tag{2.15}$$

where $h > 0$, $0 < t < \dfrac{\pi}{h}$, *if* $\zeta = \xi \pm i\eta$, $\eta > 0$, *we get, for even* p

$$J_p(t, \zeta) = \frac{1}{(2i)^p} e^{i\mu(p+1)\pi\zeta/h} \sum_{q=0}^{p/2} (-1)^q \binom{p+1}{q} e^{-2i\mu q\pi\zeta/h} \cos(t\zeta) \tag{2.16}$$

and for odd p

$$(2.17)\quad J_p(t,\zeta)=\frac{1}{(2i)^p}\left[e^{i\mu(p+1)\pi\zeta/h}\sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^q\binom{p+1}{q}e^{-2i\mu q\pi\zeta/h}\cos(t\zeta)+\right.$$

$$\left.+(-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{1}{2}\binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}e^{i\mu t\zeta}\right]$$

where

$$\mu=\mu(\zeta)=\begin{cases}1 \text{ if } \zeta=\xi+i\eta\\ -1 \text{ if } \zeta=\xi-i\eta\end{cases}$$

Proof. — (2.16) and (2.17) are obtained evaluating the integral (2.15) by means of the residue thecnique and using the identities:

$$\sin^{p+1}y=\frac{1}{(2i)^p}\sum_{q=0}^{p/2}(-1)^q\binom{p+1}{q}\sin(p+1-2q)y,\quad (p \text{ even})$$

$$\sin^{p+1}y=$$

$$=\frac{1}{(2i)^{p+1}}\left[2\sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^q\binom{p+1}{q}\cos(p+1-2q)y+(-1)^{\frac{p+1}{2}}\binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}\right]$$

(p odd)

3. - The numerical method and the error-bound estimation

From (2.3), we can write (1.1) and (1.2) as:

$$(3.1)\qquad f(t)=\frac{e^{\bar{d}t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\bar{d},y)\cos(ty)\,dy \qquad t>0$$

$$(3.2)\qquad f(t)=-\frac{e^{\bar{d}t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(\bar{d},y)\sin(ty)\,dy \qquad t>0$$

where $\bar{d}$ is defined by (2.2).

Setting

$$(3.3)\quad I_p(h,u,t)=\frac{2e^{\bar{d}t}}{\pi}h\left\{\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{[p/2]}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2q}a_{p,2q}\,u^{(2q)}(\bar{d},0)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{q=0}^{[p/2]}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2q}a_{p,2q}\,u^{(2q)}(\bar{d},mh)\cos(mht)+\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{q=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]-1}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2q+1}i\,a_{p,2q+1}\,u^{(2q+1)}(\bar{d},mh)\,sin\,(mht)\right]\right\}$$

$$(3.4)\quad \bar{I}_p(h,v,t)=\frac{-2e^{\bar{d}t}}{\pi}h\left\{\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]-1}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2q+1}a_{p,2q+1}\,v^{(2q+1)}(\bar{d},0)+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{q=0}^{[p/2]}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2q}a_{p,2q}\,v^{(2q)}(\bar{d},mh)\sin(mht)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{q=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]-1}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2q+1}i\,a_{p,2q+1}\,v^{(2q+1)}(\bar{d},mh)\cos(mht)\right]\right\}$$

where the weights $a_{p,k}$, $k=0,1,\ldots,p$, are defined by (2.7), the series (3.3) and (3.4) can be used as approximate formulae for the evaluation of $f(t)$[9]. Indeed the following theorems hold:

THEOREM 3.1.[10] — *If* $u(\bar{d},y)\in S_d$ *and* $t\in\left]0,\frac{\pi}{h}\right[$, *then*

$$f(t)+\varepsilon_p(t)=I_p(h,u,t)$$

with

$$(3.5)\quad |\varepsilon_p(t)|\leq\frac{2e^{-dt(s/2-\alpha)}}{\pi}\,\frac{\cosh(dt)}{\sinh^{p+1}\frac{dst}{2}}\,M(d)\quad(p=2k,\ k=0,1,\ldots)$$

$$(3.6)\quad |\varepsilon_p(t)|\leq\frac{2M(d)}{\pi\sinh^{p+1}\frac{dst}{2}}\left\{e^{-dt(s-\alpha)}\cosh(dt)\times\right.$$

$$\left.\left[1-\frac{1}{2^{p+1}}\binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}\right]+\frac{1}{2^{p+1}}\binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}e^{dt(\alpha-1)}\right\}(p=2k+1;\ k=0,1,\ldots)$$

[9] For $p=0$, we obtain the method described in [6].

[10] Under the assumption that the functions u and v are elements of the set S_d, certainly the Riemann's formula holds (see [1], pg. 42).

where:

$$d = \frac{\bar{d}}{\alpha},\ \alpha > 1,\ s = \frac{2\pi}{h\,t} > 2,\ \mathrm{M}(d) = \int_{0+id}^{\infty+id} |\,u(\bar{d}, \zeta)\,|\,d\,s$$

Proof. — From Lemma 2.4 we get:

$$\chi_n\,u(\bar{d}, y) - \sum_{m=-n}^{n} \sum_{q=0}^{p} u^{(q)}(\bar{d}, m\,h)\,t_q(y - m\,h) =$$

(3.7)

$$= \frac{1}{2\pi i} \sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\,y \int_{C_n} \frac{u(\bar{d}, \zeta)}{(\zeta - y)\sin^{p+1}\dfrac{\pi}{h}\,\zeta}\,d\zeta, \qquad y \notin C_n$$

If we multiply both sides of (3.7) by $\cos(t\,y)$ and integrate over $(-\infty, \infty)$, for Lemma 2.7 we have:

$$\int_{-(n+\frac{1}{2})h}^{(n+\frac{1}{2})h} u(\bar{d}, y)\cos(t\,y)\,d\,y +$$

$$- \sum_{m=-n}^{n} \left[\sum_{q=0}^{[p/2]} u^{(2q)}(\bar{d}, m\,h)\cos(m\,h\,t) \int_{-\infty}^{\infty} t_{2q}(y)\cos(t\,y)\,d\,y + \right.$$

(3.8)

$$\left. - \sum_{q=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]-1} u^{(2q+1)}(\bar{d}, m\,h)\sin(m\,h\,t) \int_{-\infty}^{\infty} t_{2q+1}(y)\sin(t\,y)\,d\,y \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\,y\cos(t\,y) \int_{C_n} \frac{u(\bar{d}, \zeta)}{(\zeta - y)\sin^{p+1}\dfrac{\pi}{h}\,\zeta}\,d\zeta\,d\,y$$

In order to evaluate the right side of (3.8), we interchange the order of integration and discuss the case of even p and the case of odd p separately.

a) $p = 2\,k,\ k = 0, 1, \ldots$

In this case, from (2.16) and for $\zeta = \xi \pm i\,d$, we get:

$$|\,J_p(t, \zeta)\,| \leq e^{-\pi d/h}\cosh(t\,d). \tag{3.9}$$

Recalling the definition of C_n, we obtain:

$$\frac{1}{2i}\int_{C_n}\frac{u(\bar{d},\zeta)}{\sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\zeta}\,J_p(t,\zeta)\,d\zeta = \tag{3.10}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\int_{(n+\frac{1}{2})h-id}^{(n+\frac{1}{2})h+id}\frac{u(\bar{d},\zeta)}{\sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\zeta}\,J_p(t,\zeta)\,d\zeta + \int_{(n+\frac{1}{2})h+id}^{-(n+\frac{1}{2})h+id}\frac{u(\bar{d},\zeta)}{\sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\zeta}\,J_p(t,\zeta)\,d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_{-(n+\frac{1}{2})h-id}^{-(n+\frac{1}{2})h-id}\frac{u(\bar{d},\zeta)}{\sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\zeta}\,J_p(t,\zeta)\,d\zeta + \int_{-(n+\frac{1}{2})h-id}^{(n+\frac{1}{2})h-id}\frac{u(\bar{d},\zeta)}{\sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\zeta}\,J_p(t,\zeta)\,d\zeta\right\}.$$

Now it turns out that:

$$\left|\frac{1}{2i}\int_{\pm(n+\frac{1}{2})h-id}^{\pm(n+\frac{1}{2})h+id}\frac{u(\bar{d},\zeta)}{\sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\zeta}\,J_p(t,\zeta)\,d\zeta\right| \leq \tag{3.11}$$

$$\leq d\cosh(t\,d)\max_{\eta\in[-d,d]}\left|u\left(\bar{d},\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)h+i\eta\right)\right|$$

and, setting:

$$\Phi_p(t,h,d) = \frac{e^{-\pi d/h}\cosh(t\,d)}{\sinh^{p+1}\pi\,d/h},$$

we get:

$$\left|\frac{1}{2i}\int_{-(n+\frac{1}{2})h\pm id}^{(n+\frac{1}{2})h\pm id}\frac{u(\bar{d},\zeta)}{\sin^{p+1}\frac{\pi}{h}\zeta}\,J_p(t,\zeta)\,d\zeta\right| \leq \frac{1}{2}\Phi_p(t,h,d)\int_{-(n+\frac{1}{2})h\pm id}^{(n+\frac{1}{2})h\pm id}|u(\bar{d},\zeta)|\,ds \tag{3.12}$$

From (2.16), being $u\in S_d$ *and from* (3.10) *and* (3.11), *letting* $n\to\infty$ in (3.8), it follows:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(\bar{d},y)\cos(t\,y)\,dy + \tag{3.13}$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{q=0}^{[p/2]} u^{(2q)}(\bar{d}, m\,h) \cos(m\,h\,t) \int_{-\infty}^{\infty} t_{2q}(y) \cos(t\,y)\,d\,y + \right.$$

$$\left. - \sum_{q=0}^{\left[\frac{p+1}{2}\right]-1} u^{(2q+1)}(\bar{d}, m\,h) \sin(m\,h\,t) \int_{-\infty}^{\infty} t_{2q+1}(y) \sin(t\,y)\,d\,y \right] = \mathrm{E}_p(t)$$

where

$$\mathrm{E}_p(t) = \frac{1}{(2\,i)^{p+1}} \sum_{q=0}^{p/2} (-1)^q \binom{p+1}{q} \left[\int_{-\infty+id}^{\infty+id} \frac{e^{i(p+1-2q)\pi\zeta/h} \cos(t\,\zeta)}{\sin^{p+1} \frac{\pi}{h}\zeta} u(\bar{d},\zeta)\,d\zeta + \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty-id}^{\infty-id} \frac{e^{-i(p+1-2q)\pi\zeta/h} \cos(t\zeta)}{\sin^{p+1} \frac{\pi}{h}\zeta} u(\bar{d},\zeta)\,d\zeta \right]$$

With the aid of (3.12), we can estimate:

$$|\mathrm{E}_p(t)| \leq \frac{1}{2} \Phi_p(t, h, d) \left[\int_{-\infty+id}^{\infty+id} |u(\bar{d},\zeta)|\,d\,s + \int_{-\infty-id}^{\infty-id} |u(\bar{d},\zeta)|\,d\,s \right]$$

and by Lemma 2.2:

$$|\mathrm{E}_p(t)| \leq 2\,\Phi_p(t, h, d) \int_{0+id}^{\infty+id} |u(\bar{d},\zeta)|\,d\,s \tag{3.14}$$

Comparing (3.13) with (3.1), we have:

$$f(t) + \varepsilon_p(t) = \mathrm{I}_p(h, u, t)$$

where:

$$\varepsilon_p(t) = \frac{e^{\bar{d}t}}{\pi} \mathrm{E}_p(t)$$

Therefore, by (3.14) we get (3.5).

b) $p = 2\,k + 1,\ k = 0, 1, \ldots$

In this case, from (2.17) and for $\zeta = \xi \pm i\,d$, we have:

$$|\mathrm{J}_p(t, \zeta)| \leq e^{-2\pi d/h} \cosh(\mathrm{t}\,d) \left[1 - \frac{1}{2^{p+1}} \binom{p+1}{\frac{p+1}{2}} \right] + \frac{1}{2^{p+1}} \binom{p+1}{\frac{p+1}{2}} e^{-dt}$$

Proceeding as in the case a), we get:

$$E_p(t) = \frac{1}{(2i)^{p+1}} \left\{ \sum_{q=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^q \binom{p+1}{q} \left[\int_{-\infty+id}^{\infty+id} \frac{e^{i(p+1-2q)\pi\zeta/h} \cos(t\zeta)}{\sin^{p+1} \frac{\pi}{h}\zeta} u(\bar{d},\zeta) d\zeta + \right. \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty-id}^{\infty-id} \frac{e^{-i(p+1-2q)\pi\zeta/h} \cos(t\zeta)}{\sin^{p+1} \frac{\pi}{h}\zeta} u(\bar{d},\zeta)\, d\zeta \right] +$$

$$+ (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{1}{2} \binom{p+1}{\frac{p+1}{2}} \left[\int_{-\infty+id}^{\infty+id} \frac{e^{it\zeta}}{\sin^{p+1} \frac{\pi}{h}\zeta} u(\bar{d},\zeta)\, d\zeta + \right.$$

$$\left. \left. + \int_{-\infty-id}^{\infty-id} \frac{e^{-it\zeta}}{\sin^{p+1} \frac{\pi}{h}\zeta} u(\bar{d},\zeta)\, d\zeta \right] \right\}$$

Furthermore, the following bound holds:

$$|E_p(t)| \leq \frac{2}{\sinh^{p+1} \frac{\pi}{h} d} \left\{ e^{-2\pi d/h} \cosh(t\,d) \left[1 - \frac{1}{2^{p+1}} \binom{p+1}{\frac{p+1}{2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{p+1}} \binom{p+1}{\frac{p+1}{2}} e^{-dt} \right\} \int_{0+id}^{\infty+id} |u(\bar{d},\zeta)|\, ds$$

from which (3.6) follows.

In a similar way we state:

THEOREM 3.2. — *If* $v(\bar{d},y) \in S_d$ *and* $t \in \left]0, \frac{\pi}{h}\right[$, *then*

$$f(t) + \tilde{\varepsilon}_p(t) = \tilde{I}_p(h, v, t)$$

with

$$(3.15)\qquad |\tilde{\varepsilon}_p(t)| \leq 2\,\frac{e^{-d t(s/2-\alpha)}}{\pi}\,\frac{\cosh(d\,t)}{\sinh^{p+1}\dfrac{d\,s\,t}{2}}\,\tilde{M}(d)\qquad (p=2k,\ k=0,1,\ldots)$$

$$(3.16)\qquad |\tilde{\varepsilon}_p(t)| \leq \frac{2\,\tilde{M}(d)}{\pi\,\sinh^{p+1}\dfrac{d\,s\,t}{2}}\left\{ e^{-d t(s-\alpha)}\cosh(d\,t)\times\right.$$

$$\left.\left[1-\frac{1}{2^{p+1}}\binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}\right]+\frac{1}{2^{p+1}}\binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}e^{d t(\alpha-1)}\right\}\quad (p=2k+1;\ k=0,1,\ldots)$$

where:

$$d=\frac{\bar{d}}{\alpha},\ \alpha>1,\ s=\frac{2\pi}{h\,t}>2,\ \tilde{M}(d)=\int_{0+id}^{\infty+id}|v(\bar{d},\zeta)|\,d\,s$$

Remark. — Note that in the case when $f(t)$ isn't a real-valued function, the following identity holds [3]:

$$f(t)=\frac{e^{xt}}{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}[F(x+i\,y)+F(x-i\,y)]\cos(t\,y)\,d\,y+\right.$$

$$\left.+\,i\int_0^{\infty}[F(x+i\,y)-F(x-i\,y)]\sin(t\,y)\,d\,y\right\}$$

and hence, making use of (2.1), the method is valid again.

Finally, formulae (3.5) and (3.6), (or (3.15) and (3.16)) allow to control the error suitably choosing the parameter d.

4. - Numerical examples

From the examples of this section we can get some idea of the performance of the method described in this paper with different choices of the parameter p.

All the calculations reported here, have been performed in single precision (6 significant figures) making use of (3.3), with α and s fixed and with the product $\bar{d}\,t$ constant.

In the series (3.3) a number of terms has been summed, such that the truncation error is less than or equal to the magnitude of the error $\varepsilon(t)$.

$$\text{I)}\quad F_1(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}; \qquad f_1(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\,t}\, e^{-t/2} \sin\left(\sqrt{3}\,t/2\right)$$

$$\text{II)}\quad F_2(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}; \qquad f_2(t) = \frac{t}{2} \sin t$$

with $z = x + i\,y$.

In tables I, II we report the values of the computed inverses of the functions F_1, F_2 respectively and the error bound estimation that can be compared with the absolute error.

TABLE I

Evaluation of $f_e = f_1 = .533507$ (*exact value of* $f_1(t)$ *for* $t = 1$). *Parameter values are*: $s = 5,\ \bar{d}\,t = 1.266,\ \alpha = 1.1$.

p	$f_e = f(t)$ computed	$\varepsilon_p(t)$	$\lvert f_e - f_c \rvert$
0	0.5323013	.24920 (− 1)	.12059 (− 2)
1	0.5333209	.46277 (−2)	.18632 (− 3)
2	0.5335003	.31783 (− 3)	.69141 (− 4)
3	0.5335025	.44771 (− 4)	.47684 (− 5)

TABLE II

Evaluation of $f_e = f_2(1) = .420735$ (*exact value of* $f_2(t)$ *for* $t = 1$). *Parameter values are*: $s = 5,\ \bar{d}\,t = 1.266,\ \alpha = 1.1$.

p	$f_e = f(t)$ computed	$\varepsilon_p(t)$	$\lvert f_e - f_c \rvert$
0	0.3853684	.21990	.35367 (− 1)
1	0.4176218	.40837 (− 1)	.31137 (− 2)
2	0.4205607	.28047 (− 2)	.17476 (− 3)
3	0.4208415	.39508 (− 3)	.10603 (− 3)

REFERENCES

[1] GHIZZETTI A., *Calcolo Simbolico*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1943.

[2] KRESS R., *On the General Hermite Cardinal Interpolation*, Math. of Comp., **26**, 925-933 (1972).

[3] KRILOV V. I. and SKOBLYA N. S., *Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transforms*, I.P.S.T. Jerusalem, 1969.

[4] MC NAMEE J., STENGER F. and WHITNEY E. L., *Whittaker's Cardinal Function in Retrospect*, Math. of Comp., **25**, 141-154 (1971).

[5] MURLI A., *Sull'impiego di un metodo numerico per il calcolo dell'antitrasformata di Laplace*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. della Soc. Naz. Scienze Lettere ed Arti, Napoli, Serie 4, **23**, 89-96 (1970).

[6] MURLI A. and PATRUNO V., *Un metodo per l'inversione numerica della trasformata di Laplace*, Calcolo, **15**, n. 1, 51-58 (1978).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Carlo Ciliberto, Donato Greco e Carlo Miranda.

I semi-invarianti ed il teorema del limite centrale per campi aleatori

Nota di RODOLFO DE DOMINICIS *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 4 marzo 1978)

SUMMARY. — By employing the apparatus of semi-invariants of higher-orders, the author proofs the central limit theorem for random fields that verify the Rosenblatt mixing condition.

The result presents, as corollary, a theorem employing the Dobrushin condition.

RIASSUNTO. — Scopo della presente nota è quello di indicare, attraverso l'utilizzazione dei semi-invarianti di ordine comunque grande, delle ipotesi sotto cui sia verificata la proprietà del limite centrale per campi aleatori.

Il risultato ottenuto reca, come corollario, un teorema contenente una condizione dovuta a Dobrushin che viene ora dimostrata valida sotto ipotesi del tutto generali.

Sia Z^n il reticolo intero in $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che per ciascun $t \in Z^n$ esista una variabile aleatoria (v. a.) ξ_t.

Una famiglia di v. a. ξ_t, $t \in Z^n$ su uno spazio misurabile $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ viene detta campo aleatorio. Imponiamo che

$$\forall\, t \in Z^n \qquad E(\xi_t) = \int_{\mathcal{S}} \xi_t \, dP = 0$$

dove P è la misura di probabilità su $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$.

Consideriamo le somme

$$\eta_k = \sum_{t \in U_k} \xi_t$$

dove U_k è una sequenza di sottoinsiemi finiti di Z^n; sia N_k il numero di elementi di U_k.

* Dipartimento di Matematica - Università della Calabria. Lavoro realizzato col parziale contributo del Consiglio di Amministrazione dell'Università della Calabria.

Diciamo che una successione η_k verifica la proprietà del limite centrale se per $k \to \infty$ e $a \in \mathbb{R}$, si ha:

$$(1) \qquad P\left(\frac{\eta_k}{\sigma_k} < a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx$$

dove σ_k^2 è la varianza di η_k.

Scopo del presente scritto è quello di indicare delle ipotesi sotto le quali sia verificata la relazione (1).

1. Lemmi preliminari

Se **A** e **B** sono due algebre di eventi, porremo per il seguito:

$$\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup_{\substack{A \in \mathbf{A} \\ B \in \mathbf{B}}} |P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)|$$

Siano U′ e U″ due sottoinsiemi del reticolo Z^n, poniamo:

$$\alpha(U', U'') = \alpha(\mathbf{A}(U'), \mathbf{A}(U''))$$

dove $\mathbf{A}(U)$ è la σ-algebra generata dalle variabili ξ_t per $t \in U$.

Denotiamo con $|U|$ il numero di elementi in U e con $\rho(U', U'')$ la distanza euclidea fra i sottoinsiemi U′ e U″. Definiamo quindi il coefficiente di miscelazione:

$$(A) \qquad \alpha_m(r) = \sup_{|U'|+|U''|=m;\, \rho(U', U'') \leq r} \alpha(U'\, U'')$$

essendo m un intero e $r \in \mathbb{R}$.

Supponiamo ora che $\mu(t)$ sia una funzione su Z^n che assuma valori interi non negativi e sia diversa da zero al più su un insieme finito e definiamo:

$$|\mu| = \sum_t \mu(t);\ \xi^n = \prod_t (\xi_t)^{\mu(t)};\ \mu! = \prod_t \mu(t)!$$

In questa notazione possiamo esprimere i momenti del campo ξ nella forma

$$(2) \qquad M_\mu = E\, \xi^\mu$$

ed i semi-invarianti nella forma

$$S_\mu = \mu! \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{M_{\nu_1} \dots M_{\nu_k}}{\nu_1! \dots \nu_k!} \tag{3}$$

dove la somma è estesa su tutti gli insiemi ordinati $(\nu_1, \dots \nu_k)$ soddisfacenti la condizione $\nu_1 + \dots + \nu_k = \mu$.

Sia $T(\mu) = \{t : \mu(t) > 0\}$ il sostegno della funzione μ.

Al fine di enunciare il *teorema del limite centrale per campi aleatori*, premettiamo i due seguenti lemmi:

LEMMA 1. — *Siano* μ' *e* μ'' *due funzioni su* Z^n *a sostegno disgiunto tali che*:

$$\mu = \mu' + \mu''$$

Sia

$$T(\mu') = T', \; T(\mu'') = T'', \; \rho(T', T'') = r > 2$$

allora

$$| M\mu' - M\mu' M\mu'' | \leq 10 \, C_{p|\mu|}^{1/p} \, \alpha_S^{(p-2)/p}(r) \tag{4}$$

$$\textit{dove} \quad C_p = \sup_t E | \xi_t |^p ; \quad p = 1, 2, \dots \tag{4'}$$

La dimostrazione del lemma 1 è analoga a quella di un teorema di [3].

Deduciamo dal lemma 1 il seguente:

LEMMA 2. — *Sotto le ipotesi del lemma* 1, *per* $T' \neq \phi$, $T'' \neq \phi$, *si ha*:

$$| S_\mu | \leq 10 \, C_{p|\mu|}^{1/p} \, | \mu |^{|\mu|} \, \alpha_S^{(p-2)/p}(r) \tag{5}$$

Dimostrazione. — Sia ν una funzione non negativa a valori interi tale che $\nu \leq \mu$. Si ha ovviamente $T(\nu) \subseteq T(\mu)$, ma di più se $\mu = \mu' + \mu''$ con μ' e μ'' funzioni a supporti disgiunti, dette ν' e ν'' le restrizioni di ν a T' e T'', si ha:

$$\nu = \nu' + \nu''; \; T(\nu') \subseteq T'; \; T(\nu'') \subseteq T''.$$

Poniamo allora:

$$L_\nu = M_{\nu'} M_{\nu''} ; \; D_\nu = M_\nu - L_\nu \tag{5'}$$

Abbiamo l'identità

$$(6) \qquad M_{\nu_1} \dots M_{\nu_k} = \sum_{L=1}^{k} L_{\nu_1} \dots L_{\nu_{L-1}} D_{\nu_L} M_{\nu_{L+1}} \dots M_{\nu_k} + L_{\nu_1} \dots L_{\nu_k}$$

Sostituendo la (6) nella (3) si ha:

$$(7) \qquad S_\mu = \mu! \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{\sum_{L=1}^{k} L_{\nu_1} \dots L_{\nu_{L-1}} D_{\nu_L} M_{\nu_{L+1}} \dots M_{\nu_k}}{\nu_1! \dots \nu_k!} +$$

$$+ \mu! \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{L_{\nu_1} \dots L_{\nu_k}}{\nu_1! \dots \nu_k!}$$

Notiamo che la seconda somma nella (7) è nulla, infatti essa rappresenta l'espressione del semi-invariante S_μ quando il campo aleatorio ξ sia stato modificato in modo che i gruppi di v. a. ξ_t corrispondenti ai due insiemi T' e T'' sono stocasticamente indipendenti ed identicamente distribuiti.

Notiamo ora che dalla (4') si ricava la seguente:

$$(7') \qquad |M_\nu| \leq C_{p|\mu|}^{|\nu|/p|\mu|}$$

Per cui, utilizzando la 1ª delle (5') e la (7') si ottiene che:

$$(7'') \qquad |L_\nu| \leq C_{p|\mu|}^{|\nu|/p|\mu|}$$

ed utilizzando la 2ª delle (5') e le (7') e (7'') si ottiene che:

$$(7''') \qquad |D_\nu| \leq 10\, C_{p|\nu|}^{1/p}\, \alpha_S^{(p-2)/p}(r) \leq 10\, C_{p|\mu|}^{|\nu|/p|\mu|}\, \alpha_S^{(p-2)/p}(r)$$

Per finire è facile verificare che

$$(8) \qquad \sum_{\nu_1+\dots+\nu_k=\mu} \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_k!} \leq \frac{|\mu|^{|\mu|}}{\mu!}$$

La (7) con le (7'), (7''), e (7''') e (8) forniscono l'asserto.

2. Risultati e dimostrazioni

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema. — *La relazione* (1) *è vera se sono verificate contemporaneamente le tre seguenti condizioni*:

$$(B) \qquad C_p < \infty\,, \quad p = 1, 2, \dots$$

(C) $$\Gamma_m(r) = \sup_{\substack{|\mu|=m \\ \delta(\mu)\geqslant r}} |S_\mu| = 0(r^{-q})$$

(D) $$N_k^{-\beta}\,\sigma_k \to \infty\,, \quad \beta > \frac{1}{2}\,, \quad k \to \infty$$

dove m e q sono interi, $r \in \mathbb{R}$ e

$$\delta(\mu) = \sup \rho(T', T'')$$

essendo

$$T' \neq \phi\,; \quad T'' \neq \phi\,; \quad T' \cap T'' = \phi\,.$$

Dimostrazione. — Alla luce di un teorema di Markov (cfr. ad es. [4]), è sufficiente far vedere che, sotto le ipotesi del teorema, i semi-invarianti:

(9) $$s_m^{(k)} = \frac{m!}{\sigma_k^m} \cdot \sum_{\substack{|\mu|=m \\ T(\mu)\subset U_k}} \frac{S_\mu}{\mu!}$$

delle somme normate η_k/σ_k tendono a zero per $m \geq 3$.

Per verificare quanto detto scriviamo la (9) come segue:

(9′) $$s_m^{(k)} = \frac{m!}{\sigma_k^m} \sum_{J_1} \frac{S_\mu}{\mu!} + \frac{m!}{\sigma_k^m} \sum_{J_2} \frac{S_\mu}{\mu!}$$

dove

$$J_1 = \{\mu : |\mu| = m;\ T(\mu) \subseteq U_k;\ \delta(\mu) < L\}$$

$$J_2 = \{\mu : |\mu| = m;\ T(\mu) \subseteq U_k;\ \delta(\mu) > L\}$$

con $L \geq 1$.

Notiamo che per valori di $\delta(\mu) \geq L$, possiamo invocare direttamente la condizione (C) del teorema.

Per valori di $\delta(\mu) < L$ possiamo sostituire al semi-invariante S_μ la stima:

(10) $$|S_\mu| \leq C_m\, m^m$$

La (10) si ottiene dalla (3) e dalla

(11) $$|M_\nu| \leq C_m^{|\nu|/m}\,,$$

valida per $|\nu| \leq m = |\mu|$; infatti la (3) con la (11) fornisce

$$|S_\mu| = |\mu!| \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k=\mu} \frac{C_m^{|\nu_1|/m} \ldots C_m^{|\nu_k|/m}}{\nu_1! \ldots \nu_k!},$$

per la (8) con $|\mu| = m$ si ha allora:

$$|S_\mu| \leq C_m^{\frac{|\nu_1|+\ldots+|\nu_k|}{m}} m^m.$$

e la (10).

Allora in ciascuna delle somme della (9'), scegliendo il termine $\max_{J_i} |S_\mu|$, $(i = 1, 2)$ e stimando il numero dei termini, otteniamo:

$$|s_m^{(k)}| \leq \frac{N_k}{\sigma_k^m} m!\ 2^{(m-1)(n+1)} (m L)^{m(m-1)} \cdot \tag{12}$$

$$\cdot \max_{J_1} |S_\mu| + \frac{N_k^m}{\sigma_k^m} \max_{J_2} |S_\mu|.$$

Ponendo $L = N_k^\gamma$, dove $\gamma < (3\beta - 1)/3n(m-1)$, applicando le (10), (12), e la condizione (C) si verifica l'asserzione del teorema. A norma del lemma 2 risulta evidente che la condizione (A) è una conseguenza della condizione (C) del Teorema; possiamo quindi fornire il seguente:

COROLLARIO — *La relazione limite* (1) *è vera se sono soddisfatte le seguenti condizioni*:

(B) $\quad C_p < \infty \quad , \quad p = 1, 2, \ldots$

(A) $\quad \alpha_p(r) = 0(r^{-q}), \quad p, q$ *naturali;* r *indefinitivamente grande*

(D) $\quad N_k^{-\beta} \sigma_k \to \infty \quad , \quad k \to \infty;\ \beta > \frac{1}{2}$

Condizioni di miscelazione del tipo (A) sono state introdotte da Dobrushin [1] che ha mostrato che erano soddisfatte per una larga classe di campi aleatori. È essenziale notare che per un p prefissato, la condizione (A) impone vincoli solo sulle algebre di insiemi generate da p variabili $\xi(t)$. Parimenti nel caso unidimensionale la condizione (A) è essenzialmente più debole dell'analoga condizione imposta sulle algebre $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{A}''$, generate rispettivamente da ξ_t per $t \leq s$ e ξ_t per $t \geq s + r$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. L. DOBRUSHIN, *Prescribing a system of random variables by conditional distributions*, Theor. Probability Appl., **15** (1970), 458-480.

[2] K. JOSHIDA, *Functional Analysis*, Springer, 1971.

[3] I. A. IBRAGIMOV - V. LINNIK, *Independent and stationarily connected variables*, Nordhoff, Groningen, 1971.

[4] KOLMOGOROV, *Limit distributions for sums of dependent random variables*, « Nauka » Moscow (1949).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Carlo Miranda, Giuseppe Scorza Dragoni e Carlo Ciliberto

On a longstanding conjecture of G. A. Miller *

Nota di ELISABETTA STRICKLAND **
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 4 marzo 1978)

SOMMARIO — Si considera la classe dei gruppi finiti in cui due elementi dello stesso ordine sono coniugati. G. A. Miller ha dimostrato che nel caso risolubile gli unici due gruppi appartenenti alla classe sono C_2, gruppo ciclico di ordine 2, ed S_3, gruppo simmetrico su 3 elementi, ed ha formulato la congettura che tale risultato è valido anche senza l'ipotesi di risolubilità. Vengono pertanto dati alcuni risultati in questa direzione, relativi a proprietà globali e locali dei gruppi assegnati e la struttura dei loro sottogruppi di Sylow, con particolare riguardo al caso $p = 2$.

INTRODUCTION

G. A. MILLER has shown in [1] that the symmetric groups of degree 2 and 3 are the only finite solvable groups which have the property that all their elements of the same order are conjugate for every such order. In the same paper Miller conjectures that the statement is true without the hypothesis of solvability. This paper gives results in this direction. Local properties of the class of groups are listed and the Sylow subgroups S_p are studied, with particular attention to the case $p = 2$. It can be easily proved that the complex characters of the groups we are dealing with are integer valued, i. e. such groups belong to a very special subclass of the class of ambivalent groups, but this doesn't help a lot, because there exist many nonsolvable groups with all characters rational valued, while for solvable groups the situation is much more special [2]. Looking at the Sylow subgroups instead seems to be the shortest way to obtain the proof of the conjecture.

* Supported by G.N.S.A.G.A. of C.N.R.
** Istituto di Matematica dell'Università di Roma.

NOTATION

Throughout this paper we shall adhere to the following notation.

(C)	=	the class of finite groups G such that any two elements of the same order are conjugate
$\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$	=	the set of prime, natural, integer, complex numbers
$Z(G)$	=	the center of the group G
G'	=	derived subgroup of the group G
S_p	=	p-Sylow subgroup of the group G
$o(x)$	=	order of the element x in G
$C_G(x)$	=	centralizer of the element x in G
$Cl(x)$	=	conjugacy class of x in G
$< x >$	=	the cyclic subgroup generated by the element x in G
$\lvert G \rvert$	=	the order of the group G
C_n	=	the cyclic group of order n
$H \leq G$	=	H is a subgroup of G
$H \not\leq G$	=	H is not a subgroup of G
$H \trianglelefteq G$	=	H is a normal subgroup of G
$[G : H]$	=	the index of the subgroup H of G in G
$G \times \bar{G}$	=	direct product of the group G with the group $\bar{G}$
$G \simeq \bar{G}$	=	the group G is isomorphic to the group $\bar{G}$
$\varphi(n)$	=	Euler's function of the integer n
$N_G(H)$	=	normalizer of the subgroup H of G in G
$C_G(H)$	=	centralizer of the subgroup H of G in G
$\mathrm{Aut}(G)$	=	the group of the automorphisms of the group G
$x \sim y$	=	the element x in conjugate to the element y in G

§ 1. SOME RESTRICTIONS ON THE ORDER OF THE GROUPS IN (C)

Let G be a group belonging to the class (C). Such class has the following group-theretic properties.

LEMMA 1.1. — *If* $x \in G$ *and* $o(x) = n$, *then there are* $k\varphi(n)$, $k \in \mathbb{N}$ *elements of order in* G.

Proof. — In $< x >$ there are $\varphi(n)$ elements of order n and if $o(y) = n$, then $< y >$ contains $\varphi(n)$ elements of order n which cannot coincide with anyone of the first list, otherwise $< x > = < y >$.

LEMMA 1.2. — *If* $x \in G$ *and* $o(x) = n$, *then* $\varphi(n) / |G|$.

Proof. — This is obvious, since $Cl(x)$ gives the number of elements in G of order n, and as $|Cl(x)| / |G|$, by 1.1., $\varphi(n) / |G|$.

COROLLARY 1.3. — *The order of* G *is even.*

Proof. — If p is a prime dividing G and p is odd, then $\varphi(p) = p - 1$ divides $|G|$, and $p - 1$ is even.

Let now $H \leq G$. We define, for every $n \in \mathbb{N}$

$$(H)_n = \{x \in H \mid o(x) = n\}$$

and, for any $p \in \mathbb{P}$,

$$(H)_{p'} = \{x \in H \mid x \text{ is a } p\text{-element}\}$$

Let S_p be a p-Sylow subgroup of G. Then

Lemma 1.4. — $C_G(S_p))_{p'} \leq S_p$

Proof. — If $x \in C_G(S_p) - S_p$ and x is a p-element, then $\langle x, S \rangle \geq S_p$ and $\langle x, S_p \rangle$ is a p-group, which gives a contradiction.

COROLLARY 1.5. — *If* $x \in Z(S_p)$, *then* $o(x) = p$.

Proof. — If $o(x) = p^h$, with $h > 1$, there are in G $k\varphi(p^h) = k p^{h-1}(p-1)$, $k \in \mathbb{N}$, elements of order p^h, that is to say $[G : C_G(x)] = k p^{h-1}(p-1)$, so $p / [G : C_G(x)]$. But $x \in Z(S_p)$ and so $S_p \leq C_G(x)$ and $|S_p| / |C_G(x)|$, which gives a contradiction.

COROLLARY 1.6. — $Z(S_p) \simeq C_p \times \ldots \times C_p$.

Now, if $x \in S_{p_i}$, p_i-Sylow of G and $o(x) = p_i^h$, there are in G $k\varphi(p_i^h) = k p_i^{h-1}(p_i - 1)$ elements of order p_i^h, so $[G : C_G(x)] = k p_i^{h-1}(p_i - 1)$ that is to say $p_i^{h-1}(p_i - 1) / [G : C_G(x)]$. On the other hand $\langle x \rangle \leq C_G(x)$, so $p_i^h / |C_G(x)|$. This gives $p_i^h \cdot p_i^{h-1} / |G|$. From this we obtain $h \leq s_i + 1/2$.

We have proved that

PROPOSITION 1.7. — *If* $x \in G$ *and* $o(x) = p_i^h$, where $p_i^h = |S_{p_i}|$, $(i = 1, \ldots t)$, $h \leq (s_i + 1)/2$.

The following statement will be of great importance in the rest.

PROPOSITION 1.8. — *There exist in* G *elements of order* $p_i - 1$, *where* p_i *is a prime dividing the order of* G.

Proof. — Let x be an element of order p_i and $H = < x >$. As H is cyclic of order p_i, $N_G(H)/C_G(H) \tilde{\leq} \mathrm{Aut}_G(H)$, where $\mathrm{Aut}_G(H)$ has order $p_i - 1$. So $N_G(H)/C_G(H)$ is a group of automorphisms which acts transitively, as the elements of the same order are conjugate in G. Let $y\, C_G(x)$ be a generator of the quotient group. Then y has order $h(p_i - 1)$, $h \in \mathbb{N}$ and the conclusion is obvious.

PROPOSITION 1.9. — $|Z(G)| \leq 2$.

Proof. — If $p \neq 2$, and $p/Z(G)$, then there exists $x \in Z(G)$ with $o(x) = p$. But $o(x) = o(x^2) = p$ and so there exists $y \in G$ such that $y^{-1} x y = x^2$. As $y^{-1} x y = x$, $(x \in Z(G))$, we obtain $x = x^2$, and $x = 1$, a contradiction. So $|Z(G)| = 2^h$. Now, if $h > 1$, there is a subgroup of order 4 in Z(G) and this contains two distinct elements of order 2, which being conjugate, produce a contradiction.

PROPOSITION 1.10. — $[G : G'] \leq 2$.

Proof. — If $a \in G$, $o(a) = o(a^{-1})$ and so $a \sim a^{-1}$. Then a and a^{-1} belong to the same coset of the derived group, so $a\,G' = a^{-1}\,G' = (a\,G')^{-1}$, and $o(a\,G') = 2$, for any a in G. We have obtained in this way that G/G' has exponent 2. Now let $a\,G'$, $b\,G' \in G/G'$ and let

$$o(a) = 2^m k \qquad h, k \text{ odd}$$
$$o(b) = 2^n k$$

(i) $m = n$. Then, $o(a^k) = o(b^h)$ gives $a^k \sim b^h$, so $a^k\,G' = b^h\,G'$. But $a^k\,G' = (a\,G')^k = a\,G'$, as k is odd and $a\,G'$ has order 2. In the same way $b^h\,G' = b\,G'$, so $a\,G' = b\,G'$ and G/G' has order 2.

(ii) $m > n$. Then

$$o[(a^k)^{2^{m-n}}] = o(b^h)$$

and so $b^h \sim (a^k)^{2^{m-n}} \in < a^2 > \leq G'$, and the only element not equal to 1 is $a\,G'$.

PROPOSITION 1.11. — *If* $|G| = 2\, p_1^{s_1} \ldots p_t^{s_t}$, $p_i \neq 2$, $i = 1, \ldots, t$, then $G \simeq C_2$ or $G \simeq S_3$.

Proof. — In G there are no elements of order $2k$, with $k/p_1^{s_1} \dots p_t^{s_t}$, otherwise their number would be a multiple of $\varphi(2k) = \varphi(k)$, which is even and the centralizer of one of them should be of odd order, which gives a contradiction, because it contains the cyclic group generated by such element, of even order. On the other hand G contains elements of even order, by 1.8, so $|G| = 2 \cdot 3^h$. Let S_3 be a 3-Sylow subgroup of G. $Z(S_3)$ is not trivial, so, if $g \in Z(S_3)$, $|C_G(g)| = 3^h (|Z(G)| \leq 2)$. So $[G : C_G(g)] = |Cl(g)| = 2$, there are only two elements of order 3 and the subgroup generated by one of them is normal. But then S_3 is cyclic and it contains an element of order 3^h. This gives $h \leq h + 1/2$, so $h \leq 1$. This means $|G|/6$ and it's easy to check that $G \simeq S_3$ and $G \simeq C_2$.

PROPOSITION 1.12. — $Z(G) = 1$ *or* $G \simeq C_2$.

Proof. — If $|G| = 2 p_1^{s_1} \dots p_t^{s_t}$ then, by 1.11, the thesis. Let now $|G| = 2^2 p_1^{s_1} \dots p_t^{s_t}$ and $|Z(G)| = 2$.

S_2 cannot be a Klein group, so $S_2 \simeq C_4$. There exists then an element x of order 4, so $4/|C_G(x)|$, and this implies that $2/[G : C_G(x)]$, while on the other hand $2/[G : C_G(x)]$, because $\varphi(4) = 2$, a contradiction. If $|G| = 2^s p_1^s \dots p_t^s$, with $s > 3$ and if $|Z(G)| = 2$, in S_2 there is only one subgroup of order 2 and so, as it is well known that if P is a finite p-group with only one element of order p, then P is cyclic or generalized quaternion and that a group G which is generalized quaternion, has order $|G| = 2^n$, with $n \geq 3$ and it contains only one element of order 2^{n-1}, we can say that S_2 contains an element of order 2^{s-1} or an element of order 2^s.

But then, by 1.7, $s - 1 \leq s + 1/2$, and so $s \leq 3$, which gives a contradiction. We are left with the case $|G| = 2^3 p_1^{s_1} \dots p_t^{s_t}$.

There are no elements of order 8 and no elements of order $4 p_j$ $(j = 1, \dots t)$, because in such case $4 p_j$ should divide the order of the centralizer and $\varphi(4 p_j) = 2(p_j - 1)$ would divide the index of the centralizer, which is not possible. If g is an element of even order, then $g = g' z$, with $z \in Z(G)$, supposing that $|Z(G)| = 2$ and $o(g')$ is odd. Let now $x \in G$ with $o(x) = p_j$ and let x be a generator of $\mathbb{Z}_{p_j}^*(\cdot)$. But then there exists $h \in G$ such that $h^{-1} x h = x^\alpha$ and so

$$h^{-k} x h^k = x^{\alpha^k}$$

By 1.8. $p_j - 1/o(h)$ and $o(h)$ is even. Now, if $o(h) \neq 4$, $h = h' z$, with $z \in Z(G)$ and $o(h')$ odd and

$$(h')^{-1} x h' = h^{-1} x h$$

so $p_i - 1/o(h')$, which gives a contradiction. We have obtained $o(h) = 4$. But then $h^2 \in Z(G)$, and

$$x^{\alpha^2} = h^{-2} x h^2 = x$$

But the minimum k such that $\alpha^k = 1 \pmod{p_i}$ is $p_i - 1$, so $p_i - 1 = 2$ and $|G| = 2^3 3^k$. If x is an element of order 3, since $|Z(G)| = 2$, $|C_G(x)| \geq 3^k \cdot 2$.

But it must be $|C_G(x)| = 3^k 2$, otherwise there would be in $C_G(x)$ an element of order 4 and so an element of order 12, which is not possible. Therefore there are 4 elements of order 3, and so two subgroups of order 3. But these two subgroups are conjugate and if H is one of them, $[G : N_G(H)] = 2$ and $N_G(H) \triangle G$, that is to say $N_G(N_G(H)) = G$. But as $S_3 \leq N_G(H)$, $N_G(N_G(H)) = N_G(H)$, a contradiction.

From what precedes it results that if there exists a group G in the class (C) besides C_2 and S^3, then, by 1.10 and 1.11 it must be perfect and have order which is divisible by 4, and its center is trivial.

§ 2. The Sylow Subgroups

Let $A = Z(S_p)$. Then $C_G(A) \triangleq N_G(A)$ and $S_p \leq C_G(A)$. So $N_G(A) = N_{N_G(A)}(S_p) C_G(A)$
by Frattini's Argument, and

$$N_G(A) = (N_G(S_p) \cap N_G(A)) C_G(A) = N_G(S_p) C_G(A)$$

so we obtain

Proposition 2.1.

$$N_G(Z(S_p)) = N_G(S_p) C_G(Z(S_p))$$

Furthermore $Z(S_p) \triangleq N_G(S_p)$, because $Z(S_p)$ is characteristic in S_p and $S_p \triangleq N_G(S_p)$. This gives

$$N_G(S_p) = N_{N_G(S_p)}(Z(S_p)) Z(S_p),$$

by Frattini's Argument, and so

Proposition 2.2.

$$N_G(S_p) = (N_G(S_p) \cap N_G(Z(S_p))) Z(S_p)$$

But then, as $Z(S_p) \leq C_G(Z(S_p))$, from 2.1. and 2.2, follows that

PROPOSITION 2.3.

$$N_G(S_p) \leq N_G(Z(S_p))$$

and

$$N_G(Z(S_p)) = N_G(S_p)\, C_G(Z(S_p))$$

We are now going to use the isomorphism theorem on the subgroups mentioned in 2.3

$$\frac{N_G(Z(S_p))}{C_G(Z(S_p))} = \frac{N_G(S_p)\, C_G(Z(S_p))}{C_G(Z(S_p))} \simeq \frac{N_G(S_p)}{N_G(S_p) \cap C_G(Z(S_p))}$$

and by the N/C theorem we obtain

$$\frac{N_G(S_p)}{N_G(S_p) \cap C_G(Z(S_p))} \tilde{\leq} \text{Aut } (Z(S_p))$$

that is to say $N_G(S_p)/N_G(S_p) \cap C_G(Z(S_p))$ is a group of automorphisms of the elementary abelian p-group $Z(S_p)$.

On the other hand, the prime p doesn't divide the order of such group, because $S_p \leq N_G(S_p) \cap C_G(Z(S_p))$, so $N_G(S_p)/N_G(S_p) \cap C_G(Z(S_p))$ is a p'-group of automorphisms of $Z(S_p)$.

We can use the following [3], 5.2.3.

THEOREM 2.4. — *If* A *is a p'-group of automorphisms of the abelian p-group* P, *then*

$$P = C_P(A) \times [P, A]$$

This gives in our case

$$Z(S_p) = (C_G(N_G(S_p) - C_G(Z(S_p))) \cdot Z(S_p) \times [Z(S_p), N_G(S_p)]$$

Suppose now that $C_G(N_G(S_p) - C_G(Z(S_p))) \cap Z(S_p) > 1$. Then there exists an $x \in Z(S_p)$ such that $C_G(x) \geq N_G(S_p)$. Let $p > 2$.

As $o(x) = o(x^2)$, there is y in G such that $x^y = x^2$, but $x, x_2 \in Z(S_p) \triangleq C_G(S_p)$ and so y cannot be chosen in $N_G(S_p)$ (fusion), which gives $x = x^2$, a contradiction. So, if $p > 2$, we have proved the following.

PROPOSITION 2.5. — *If* S_P *is a p-Sylow subgroup of* G, *with* $p > 2$,

$$Z(S_p) = [Z(S_p), N_G(S_p)]$$

Let now $p = 2$. With the same argument we obtain that

PROPOSITION 2.6. — *If* S_2 *is a 2-Sylow subgroup of* G,

a) $Z(S_2) = C_2$

or:

b) $Z(S_2) = [Z(S_2), N_G(S_2)]$

PROPOSITION 2.7. — $C_G(S_2) = Z(S_2)$.

Proof. — It is sufficient to prove that $C_G(S_2) \leq S_2$. We already know that $C_G(S_2)_{\bar{2}} \leq S_2$.

That is to say, if $x \in C_G(S_2) - S_2$ and x is not a 2-element, then there is an $y \in C_G(S_2)$ such that $o(y) = p$, p odd and so $S_2 \leq C_G(y)$. But the index of $C_G(y)$ is $k(p-1)$, while, as $S_2 \leq C_G(y)$, $2^s = |S_2| / / |C_G(y),|$, a contradiction.

Now let's see what should be the conclusion. From the above results it should be possible to prove that case b) in 2.6 cannot occur. So one is left with $Z(S_2) = C_2$. From this one should derive that a nonsolvable group in the class (C) has 2-Sylow subgroups cyclic or generalized quaternions. But then W. BURNSIDE ([3] VIII, 4.3) proved that a finite group with cyclic S_2 is not simple and R. Brauer and M. Suzuki used modular characters theory to prove that a group with a 2-Sylow subgroup which is generalized quaternion is not simple. So there are no simple groups in the class (C). On the other hand we proved that such a group should have order divisible by 4 and be perfect. Now, if such a perfect group were not simple and of composite order, its quotient group would have this property. Hence it would result that the group of lowest order which could have the property in question would be simple and of composite order, and this, together with the rest, would give the thesis.

REFERENCES

[1] G. A. MILLER, *On groups in which either all the operators or all the subgroups of the same order are conjugate*, Proc. Nat. Ac. of. Sc., vol. 19, 332-335 (1933).

[2] R. GOW, *Groups whose characters are rational valued*, Journal of Algebra, **40**, 280-299 (1976).

[3] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper & Row 1968.

[4] R. BRAUER, M. SUZUKI, *On finite groups of even order whose 2-Sylow subgroups is a generalized quaternion*, Proc. Nat. Ac. Sc., **45**, 1757-1759 (1959).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Mario Curzio, Vittorio Dalla Volta e Alfredo Franchetta.

Simulazione col calcolatore della disposizione delle molecole di un idrocarburo a catena lunga nel liquido; confronto delle risultanze con dati sperimentali

Nota di MICHELE VACATELLO *, ANGELA TUZI *,
GUSTAVO AVITABILE * e del socio ordinario PAOLO CORRADINI *

(Adunanza del 4 marzo 1978)

INTRODUZIONE

Numerose proprietà di sistemi macromolecolari in soluzione o nello stato fuso dipendono dal valore medio di parametri legati alla conformazione della macromolecole [1]. Tali medie, quali la distanza quadratica media tra gli estremi della catena o il raggio di girazione quadratico medio, possono essere calcolate per una macromolecola isolata sia con metodi meccanico-statistici [2-5] che tramite simulazione diretta con tecniche di tipo Monte Carlo [6-11]. L'accordo dei valori così calcolati con quelli ottenuti sperimentalmente in soluzione di solventi θ [12-14] o nel fuso [2], permette di concludere che la conformazione media delle macromolecole non è influenzata sensibilmente dalla presenza del solvente e che il polimero fuso si comporta esso stesso da solvente θ.

Nonostante ciò, la questione relativa alla presenza o meno di ordine locale in sistemi macromolecolari amorfi o fusi è tutt'oggi dibattuta. Alcuni dati sperimentali sono stati infatti interpretati sulla base di un modello contenente microstrutture locali costituite da fasci di segmenti paralleli a contatto di catene adiacenti [15-17]. Considerazioni teoriche sembrano inoltre indicare la formazione di tali microstrutture come necessaria per l'impacchettamento delle molecole di polimero alla densità osservata [18]. È stato d'altra parte evidenziato che la presenza di ordine locale del tipo descritto sarebbe compatibile con una conformazione media della macromolecola identica a quella prevedibile per molecole isolate [18].

Sembra evidente che una risposta a tale problema può essere ottenuta solo con tecniche che permettano di esaminare in modo

* Istituto Chimico, Università di Napoli.

diretto la situazione locale istantanea nel polimero fuso. Una tecnica sperimentale atta allo scopo è certamente la simulazione con l'uso di calcolatori elettronici ad alta velocità. Mentre però i metodi di simulazione di macromolecole isolate sono ben noti e di uso comune [6-11], i problemi sia teorici che numerici legati alla simulazione di insiemi di macromolecole interagenti non sono stati ancora superati se non con l'uso di modelli estremamente semplificati [19].

In questo lavoro vengono riportati i risultati di una simulazione con tecniche di Monte Carlo della situazione locale in un idrocarburo a catena lunga ($C_{30}H_{62}$). Tali risultati permettono di affermare che macromolecole in conformazione media impertubata possono coesistere alla corretta densità in assenza di qualsiasi tipo di ordine locale.

Modello di simulazione

Agli scopi della simulazione una molecola di n-$C_{30}H_{62}$ può essere considerata come un insieme di 30 unità ($U_1, \ldots U_{30}$) la cui distribuzione spaziale è sottoposta ai seguenti vincoli:

a) la distanza di $U_i - U_{i+1}$, $1 \leq i < 30$ è costante e pari alla lunghezza di legame —CH_2—CH_2— ($l = 1.54$ Å);

b) l'angolo $\widehat{U_{i-1}\,U_i\,U_{i+1}}$, $1 \leq i < 30$ è costante e pari all'angolo di legame —CH_2—CH_2—CH_2— ($\theta = 112°$);

c) l'angolo diedro φ tra i piani individuati dai centri delle unità $U_{i-1}\,U_i\,U_{i+1}$ e $U_i\,U_{i+1}\,U_{i+2}$ $1 < i < 29$ (angolo di torsione sul legame $U_i - U_{i+1}$) può assumere i valori tra 0 e 360° con peso statistico $p(\varphi)$;

d) la distanza d tra unità U_i e U_j ($i, j = 1, \ldots 30$; $|i - j| > 3$), può assumere i valori tra 0 e 37.1 Å (distanza tra unità terminali nella massima estensione) con peso statistico $\omega(d)$.

La simulazione di un insieme di molecole all'opportuna densità pone l'ulteriore vincolo:

e) la distanza r tra unità appartenenti a molecole diverse può assumere qualsiasi valore con peso statistico $g(r)$.

Risulta evidente che una simulazione credibile può essere ottenuta solo per un sistema contenente un numero sufficientemente elevato di molecole. Ciò è particolarmente vero se si considera che in prossimità delle superfici limitanti il sistema simulato, la situazione locale risulta perturbata dalla presenza delle superfici stesse. Tale problema può essere superato imponendo al sistema condizioni di periodicità. Esso risulta allora costituito da un reticolo (Fig. 1) in

cui l'intorno di ciascuna unità della cella elementare è statisticamente significativo purché i periodi di ripetizione siano abbastanza grandi e qualsiasi proprietà di tali intorni venga determinata entro distanze dall'unità considerata inferiori a metà dei periodi. In questa simulazione è stata scelta una cella elementare cubica con assi di 30.5 Å,

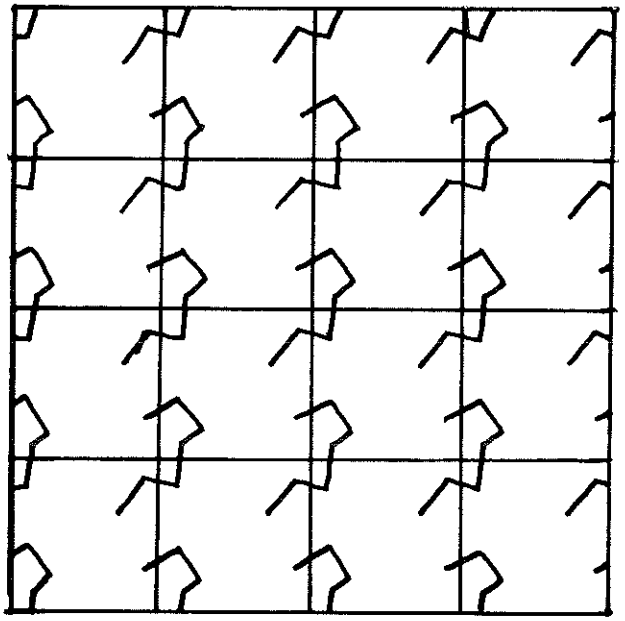


FIG. 1. - Modello schematico bidimensionale di reticolo generato dall'imposizione di periodicità al sistema.

contenente 31 molecole di idrocarburo, che costituisce un utile compromesso tra le esigenze statistiche ed una minore laboriosità di calcolo.

La scelta delle funzioni

$$p(\varphi) = \exp(-U(\varphi)/RT)$$
$$\omega(d) = \exp(-V(d)/RT)$$
$$g(r) = \exp(-E(r)/RT)$$

che caratterizzano il modello dal punto di vista chimico-fisico, è stata operata tramite opportune modifiche di funzioni di letteratura. L'energia potenziale torsionale intorno al legame centrale del butano è stata descritta come [20]

$$U(\varphi) = \frac{U_m}{2} [x(1 - \cos\varphi) + (1 - x)(1 - \cos 3\varphi)]$$

In questo lavoro le costanti U_m e x sono state scelte rispettivamente pari a 4100 cal mol^{-1} e 0.163, in modo da fornire il miglior accordo con i più recenti dati sulla distribuzione degli angoli di torsione nel n-butano gassoso [21].

L'energia potenziale di interazione tra unità metileniche della stessa molecola separate da più di 3 legami è stata descritta in questo lavoro come:

$$\begin{aligned} V(d) &= \infty && d \leq 3.2\text{Å} \\ V(d) &= 2.739 \cdot 10^8 \exp(-3.329d) - 2.942 \cdot 10^6/d^6 + 150 && 3.2\text{Å} < d \leq 3.8\text{Å} \\ V(d) &= 0 && d > 3.8\text{Å} \end{aligned}$$

essendo $V(d)$ espressa in cal mol^{-1}. Questa costituisce una utile modificazione della funzione di potenziale di MASON e KREEVOY [22], rilevante ai fini del contenimento dei tempi di elaborazione e in accordo, unitamente al precedente potenziale torsionale, con la distribuzione delle coppie di angoli di torsione nel n-pentano gassoso [21].

Uno dei principali problemi connessi alla simulazione con metodi di Monte Carlo di insiemi disordinati di entità non puntiformi, consiste nella formazione di situazioni locali che rendono indisponibile una parte del volume ed impediscono l'ottenimento di elevati coefficienti di impacchettamento. Non è quindi possibile costruire « in loco » in successione le molecole di idrocarburo direttamente con la funzione $E(r) = V(r)$ se non utilizzando una temperatura di simulazione molto elevata, che porterebbe ad un sistema senza alcun reale significato fisico.

Una possibilità di aggirare tale ostacolo, esaminata in questo lavoro, consiste nel rendere mobili le molecole nel modello simulato, che può essere in tal caso raffreddato in stadi successivi fino alla temperatura finale di simulazione. La mobilità delle molecole è stata realizzata con il metodo testa-coda, in cui una unità metilenica viene spostata, come descritto nella parte sperimentale e coerentemente con le funzioni di potenziale intra ed intermolecolari scelte, dalla coda alla testa della molecola. In alternativa alla diminuzione della temperatura, il raffreddamento in stadi successivi può essere realizzato anche con opportune variazioni delle funzioni di potenziale. In questo lavoro si è difatti preferito operare alla temperatura costante di 400 K, variando invece la funzione $E(r)$ in quattro stadi successivi nel modo seguente:

Stadio 1, 2, 3	$E(r) = \infty$	$r \leq R$
	$E(r) = 0$	$r > R$
Stadio 4	$E(r) = V(r)$	

ove R = 2.5 Å, 2.9 Å e 3.2 Å rispettivamente nei primi tre stadi. Ciò equivale ad un effettivo « raffreddamento intermolecolare » del sistema, porta a tempi di elaborazione accettabili e consente, come descritto in sede di discussione, di osservare l'influenza della distanza minima tra unità di molecole diverse sulla conformazione molecolare media. La simulazione è stata in pratica effettuata secondo il seguente schema:

A) 31 terne di unità metileniche sono state collocate con le unità centrali ai vertici di un sottoreticolo cubico a facce centrate.

B) Usando E (r) nella forma dello stadio 1, sono state costruite le 31 molecole da simulare aggiungendo unità successive a molecole scelte a caso; nel caso di molecole già complete, l'unità terminale opposta a quella aggiunta è stata cancellata, realizzando così movimenti testa-coda.

C) La simulazione di movimenti testa-coda è stata proseguita fino a totale perdita di memoria del sottoreticolo iniziale.

D) Usando E (r) nella forma dello stadio 2 sono stati effettuati movimenti fino alla scomparsa di distanze tra atomi di molecole diverse inferiori a 2.9 Å. Tali movimenti sono proseguiti, allo scopo di consentire una migliore equilibrazione interna del sistema, fino a costanza della distribuzione di distanze tra unità di molecole diverse.

E) In modo analogo, il sistema simulato è stato posto in equilibrio con la funzione E (r) dello stadio 3 e quindi con quella dello stadio 4. I movimenti sono stati interrotti, in quest'ultimo caso, quando la distribuzione delle distanze tra unità di molecole diverse è risultata praticamente costante nella zona 3.2-3.8 Å e coerente con la funzione E (r) usata.

Parte sperimentale

Dopo l'inizializzazione del sistema, un unico programma di calcolo è stato usato per l'allungamento ed i movimenti delle molecole. In questo, un insieme χ di numeri pseudocasuali, uniformemente distribuiti nell'intervallo $[0,1[$, viene generato col metodo congruenziale ed i suoi elementi sono adoperati sequenzialmente per scelte casuali. Un insieme Φ di angoli di torsione, distribuiti con peso $p(\varphi)$ nell'intervallo $[0, 2\pi[$ viene generato nel modo seguente: scelto a caso un angolo φ, questo viene accettato se l'elemento di χ attualmente in uso è minore di $p(\varphi)$. I due insiemi χ e Φ vengono rigenerati non appena tutti i loro elementi siano stati utilizzati.

La posizione delle varie unità metileniche nella cella elementare è conservata utilizzando coordinate cartesiane; le coordinate sono arrangiate in memoria in modo tale che di ciascuna unità siano immediatamente note la molecola cui appartiene e il numero d'ordine i ($1 \leq i \leq 30$) che etichetta in sequenza le unità di ciascuna molecola. Queste possiedono in tal modo una testa e una coda, che vengono invertite saltuariamente.

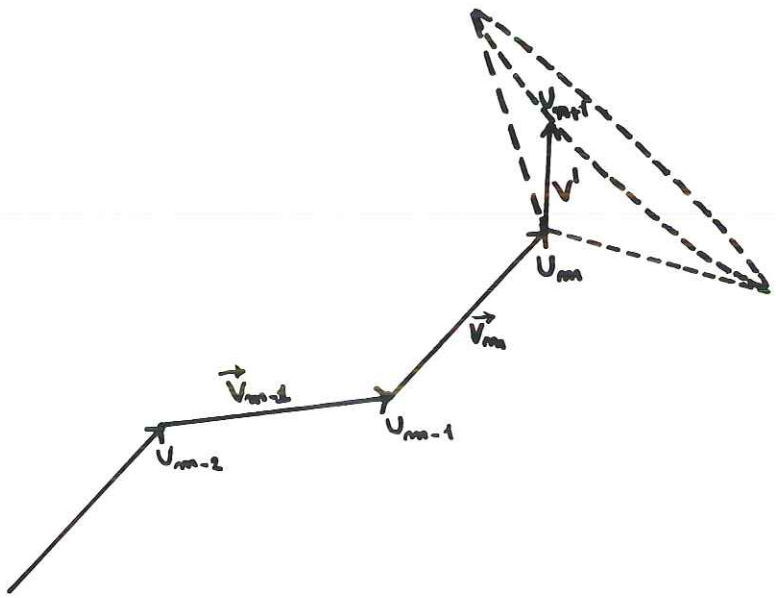


FIG. 2. - Figura che illustra la generazione delle coordinate di una nuova unità U_{m+1} a partire da quelle delle tre unità precedenti e dall'angolo di torsione sul legame $U_{m-1}\,U_m$.

Una molecola viene scelta a caso ed una nuova unità metilenica viene aggiunta alla sua testa nel modo seguente; se m è il numero d'ordine della unità attualmente terminale della molecola, il vettore V_{m-1} viene ruotato attorno alla direzione di V_m di un angolo pari all'elemento di Φ in uso, dando il vettore V' che è sommato ad U_m per fornire le coordinate della nuova unità U_{m+1} (Fig. 2).

Allo scopo di determinare la compatibilità della unità U_{m+1} con il potenziale $V(d)$, viene determinata la sua distanza [1] dalle altre unità già presenti nella molecola e separate da essa da più di tre legami. A ciascuna distanza viene associato, già presente in memoria, il peso statistico $\omega(d)$ e se l'elemento corrente di χ è maggiore di $\omega(d)$, l'unità U_{m+1} viene cancellata e si passa ad un'altra molecola.

[1] La distanza non viene calcolata se una delle coordinate di U_{m+1} differisce dalla corrispondente coordinata dell'unità considerata per più di 3.8 Å.

Terminati i controlli intramolecolari, vengono calcolate [2] le distanze tra U_{m+1} e le unità di altre molecole. Nei primi tre stadi, l'unità U_{m+1} viene cancellata ove una di tali distanze sia minore rispettivamente di 2.5, 2.9 e 3.2.Å; nello stadio 4 la cancellazione avviene se l'elemento corrente di χ è maggiore di $\omega(r)$.

Una volta che l'unità U_{m+1} sia stata accettata, se $m = 30$ l'unità U_1 viene cancellata e il numero d'ordine di tutte le altre unità è decrementato; in caso contrario non viene effettuata alcuna operazione e si passa alla scelta casuale di una nuova molecola. Il programma effettua un numero prefissato di iterazioni; la situazione finale viene conservata in memoria, pronta per essere utilizzata in nuovi cicli o per la determinazione di vari parametri. In vari stadi successivi sono stati calcolati:

1) I quadrati delle distanze tra unità $U_1 - U_{30}$.
2) Le proiezioni sull'asse x dei vettori $U_1 - U_{30}$.
3) I valori medi degli inversi delle distanze tra unità U_i e U_j della stessa molecola al variare di $|i - j|$.
4) I quadrati di raggi di girazione.
5) La frazione di angoli di torsione tra φ e $\varphi + \Delta\varphi$.
6) La frazione di angoli di torsione tra φ' e $\varphi' + \Delta\varphi'$ successivi a un angolo di torsione tra φ e $\varphi + \Delta\varphi$.
7) La funzione di distribuzione radiale intramolecolare.
8) La funzione di distribuzione radiale intermolecolare.
9) La funzione di distribuzione radiale totale $N(r)$.
10) L'intensità diffratta dal sistema ai raggi X.
11) L'intensità media diffratta da molecola singola ai raggi X.
12) Il valor medio del parametro di correlazione $\tau(r_m) = \frac{3 < \cos^2 \delta > - 1}{2}$ essendo δ l'angolo tra vettori $U_i - U_{i+2}$ $(i \leq 28)$ di molecole diverse, al variare della distanza r_m tra le unità U_{i+1} centrali considerate.

La funzione di distribuzione radiale totale $N(r)$ è stata calcolata come numero di unità mediamente presenti a distanza compresa tra r e $r + \Delta r$ da una unità data fino alla distanza di 15 Å, inferiore a metà del periodo d'identità. Tale distribuzione è stata calcolata anche considerando solo distanze tra unità della stessa molecola (punto 7) o solo distanze tra unità appartenenti a molecole diverse (punto 8).

[2] La distanza non viene calcolata se una delle coordinate di U_{m+1} differisce dalla corrispondente coordinata dell'unità considerata per più di 2.5, 2.9 e 3.2 Å nei primi tre stadi e di 3.8 Å nel quarto.

L'intensità della radiazione X diffratta dal sistema è stata calcolata come [23]:

$$\frac{I(\mu)}{N f^2(\mu)} = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} (\rho(r) - \rho_0)\, r^2 \frac{\operatorname{sen} \mu r}{\mu r}\, dr \simeq$$

$$\simeq 1 + \frac{4\pi \rho_0}{\mu^2}\left(D \cos \mu D - \frac{\operatorname{sen} \mu D}{\mu} \right) + \sum^{D} N(r) \frac{\operatorname{sen} \mu r}{\mu r}$$

ove $\mu = \dfrac{4\pi \operatorname{sen} \theta}{\lambda}$ (θ = angolo di diffrazione; λ = lunghezza d'onda della radiazione X usata), $f(\mu)$ è il potere diffrangente di una unità metilenica, ρ_0 è la densità media espressa come numero di gruppi metilenici presenti per unità di volume, $\rho(r)$ è il numero di gruppi metilene attualmente presenti in media per unità di volume a distanza r da un gruppo dato, D è il raggio della sfera oltre la quale la distribuzione di unità metileniche è supposta continua, $N(r)$ è la funzione di distribuzione radiale totale ed $N = \sum^{D} N(r)$. L'intensità media diffratta ai raggi X da una molecola singola è stata analogamente ottenuta dalla funzione di distribuzione radiale intracatena come [23]

$$\frac{I(\mu)}{N f^2(\mu)} = 1 + \sum^{D} N(r) \frac{\operatorname{sen} \mu r}{\mu r}$$

Un valore di D pari a 10-12 Å rende il calcolo meno laborioso e fornisce curve di intensità diffratta praticamente indentiche a quelle ottenute con D = 15 Å.

Utilizzando la periodicità del sistema, sulla forma finale di quest'ultimo è stato eseguito un calcolo dei quadrati dei fattori di struttura della cella triclina (con $a = b = c$ e $\alpha = \beta = \gamma = 90°$) nella forma:

$$\frac{F^2(h\,k\,l)}{N f^2(\mu)} =$$

$$= \frac{1}{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{930} \cos 2\pi(h x_i + k y_i + l z_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{930} \cos 2\pi(h x_i + k y_i + l z_i) \right)^2 \right]$$

ove $\mu = \dfrac{2\pi \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}{c}$ essendo, c il periodo di identità e le $x_i\, y_i\, z_i$ coordinate frazionarie. L'andamento della curva $F^2(\mu)/N f^2(\mu)$, con $F^2(\mu)$ il valor medio di $F^2(h\,k\,l)$ in un intorno di μ, risulta in

buon accordo con quello dell'intensità diffratta calcolata a partire dalla funzione di distribuzione radiale.

Risultati e discussione

I risultati di questo lavoro rappresentano il primo esempio di simulazione realistica della situazione locale istantanea presente in una sostanza polimetilenica allo stato fuso. Tale simulazione è stata effettuata su due sistemi indipendenti, mediando opportunamente i risultati. In tabella 1 sono riportati i valori di alcuni parametri che

Tabella 1

	CELLA 1				CELLA 2					MEDIA
	stadio I	stadio II	stadio III	stadio finale	stadio I	stadio II	stadio III	stadio finale		stadio finale
f_g	43	44	44	46	42	40	46	46		46
f_t	57	56	56	54	58	60	54	54		54

	$< r^2 >$	$< s^2 >$	$< r^2 > / < s^2 >$	$< r^2 > / nl^2$	$< s^2 > / nl^2$
media sulle celle	354	49	7.2	5.1	0.71
calcolato rif. 1	385	52	7.4	5.6	0.75

Valori di alcuni paramenti conformazionali ottenuti dai modelli simulati in vari stadi e loro valori prevedibili secondo il modello rotazionale isomerico.
$< r^2 >$ = distanza quadratica media tra unità U_1-U_{30} della molecola.
$< s^2 >$ = raggio di girazione molecolare quadratico medio.
n = numero di legami della molecola
l = lunghezza di legame della molecola

caratterizzano i modelli simulati dal punto di vista conformazionale, insieme con il loro valore prevedibile per molecole isolate secondo l'approssimazione rotazionale isomerica [21]. In figura 3 è riportata la distribuzione degli angoli di torsione ricavata dalla simulazione, e in fig. 4 è rappresentata la distribuzione delle coppie di angoli di torsione. I valori di tabella 1 mostrano separatamente i risultati ottenuti nelle due simulazioni indipendenti nei vari stadi. Le figg. 3 e 4 rappresentano invece risultati mediati sulle due simulazioni effettuate nello stadio finale; tali distribuzioni sono risultate in pratica iden-

tiche nei vari stadi della simulazione. Si può osservare come le proprietà conformazionali dei modelli simulati siano in ottimo accordo sia con i valori previsti per molecole isolate con tecniche meccanico-statistiche [21], sia con i dati sperimentali di letteratura [24, 25]. La invarianza delle proprietà dipendenti dalla conformazione al variare del potenziale intermolecolare usato, mostra che la conformazione molecolare media non è influenzata da esigenze di impacchettamento.

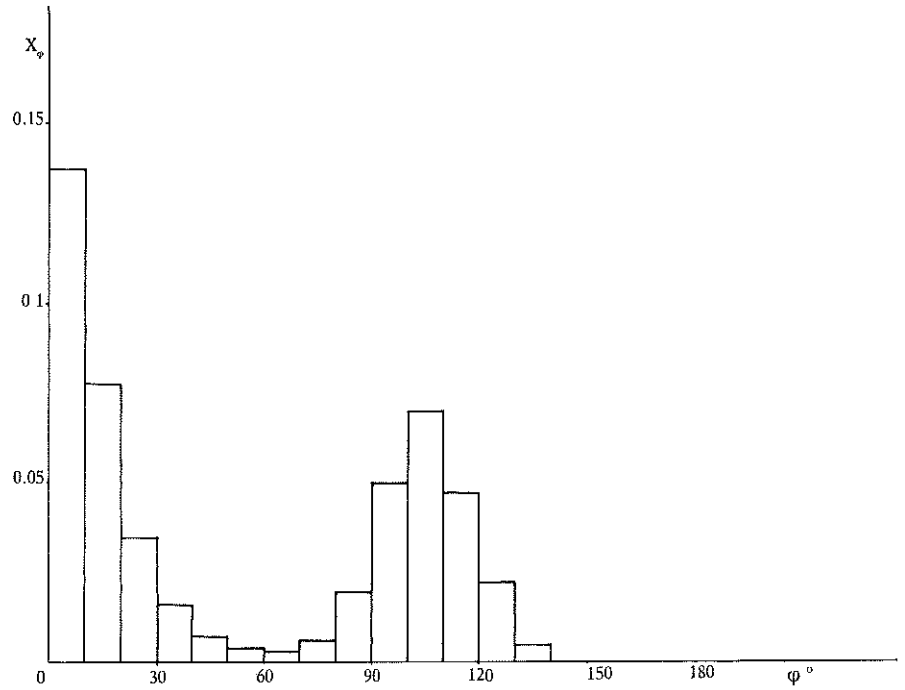


FIG. 3. - Istogramma rappresentante la frazione di angoli di torsione in intervalli di 10° di φ tra $\varphi = 0°$ e $\varphi = 180°$ ($x_\varphi = x_{360-\varphi}$); risultati dallo stadio finale.

In fig. 5 è riportata la funzione $\rho(r)$, numero di gruppi metilene per unità di volume mediamente presenti a distanza r da un gruppo dato, ottenuta nello stadio finale. Si può osservare come essa sia consistente con i potenziali intramolecolare ed intermolecolare usati. Si evidenziano in particolare massimi di densità in corrispondenza di distanze pari a 3.1 Å, 3.9 Å e 4.4 Å, oltre ad uno alone slargato nella zona 5-6 Å. Tali massimi sono presenti in analoghe funzioni ottenute in studi sperimentali sul polietileme amorfo a 400 K circa da vari autori [26, 27]. In particolare i primi tre massimi possono essere

attribuiti all'abbondanza relativa di distanze corrispondenti rispettivamente a legami in conformazione gauche o trans nei primi due casi e a coppie di legami gauche-trans nel terzo caso. L'alone nella zona 5-6 Å sembra invece essenzialmente dovuto a distanze intermolecolari.

In fig. 6 è riportato un grafico di $I(\mu)/N f^2(\mu)$ in funzione di μ, calcolato a partire dalla funzione di distribuzione radiale ottenuta

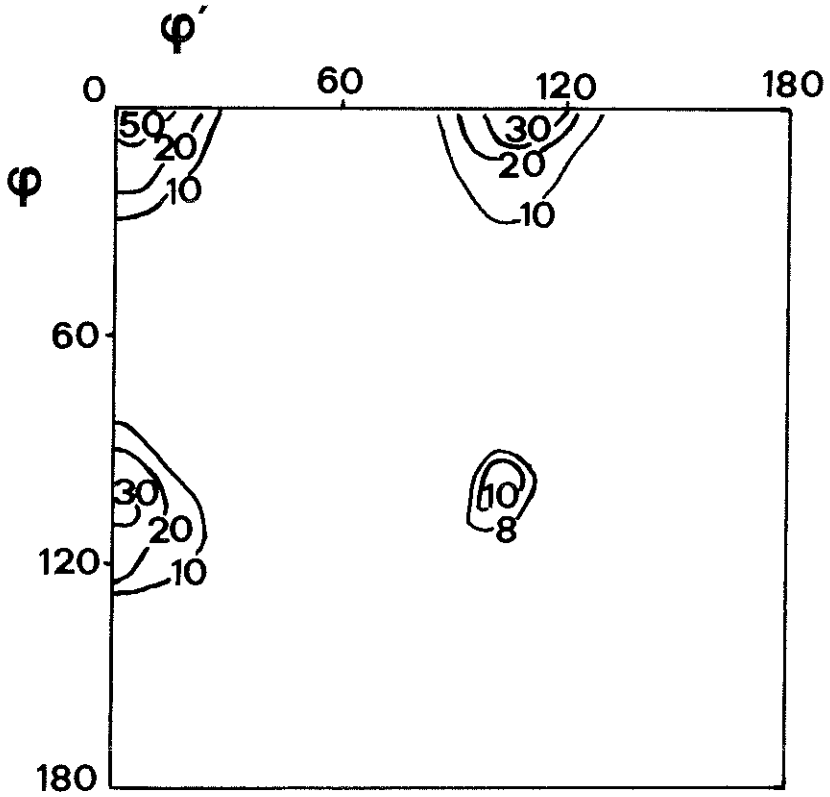


FIG. 4. - Distribuzione delle coppie di angoli di torsione, come numero di angoli di torsione φ' seguenti un angolo di torsione φ. Risultati dallo stadio finale.

nello stadio finale. L'intensità diffratta risulta in ottimo accordo con i dati sperimentali, presentando massimi a valori di μ pari a circa 1.4 $Å^{-1}$, 3.2 $Å^{-1}$ e 5.2$Å^{-1}$; in particolare l'alone amorfo caratteristico di sostanze polimetileniche allo stato fuso, centrato intorno a $\mu \approx 1.4$ $Å^{-1}$, viene riprodotto ottimamente sia in posizione che in intensità. Tale confronto è stato operato anche con spettri di polietilene fuso da noi ottenuti.

Tutto ciò mostra come il modello simulato possa essere ritenuto fin d'ora una promettente approssimazione a quella che è la situazione

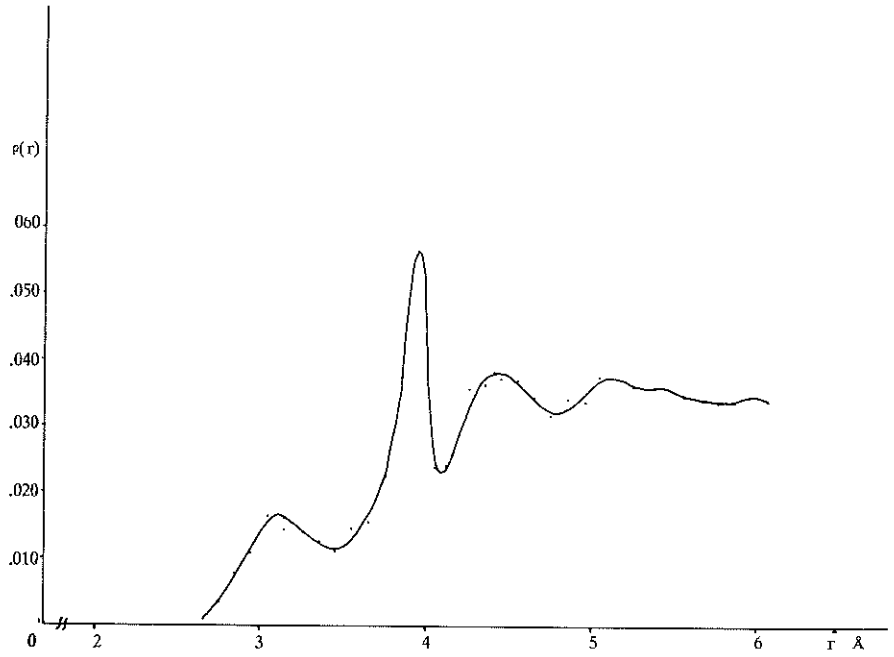


FIG. 5. - Grafico della funzione $\rho(r)$, numero di gruppi metilene per unità di volume mediamente presenti a distanza r da un gruppo dato. Risultati dallo stadio finale.

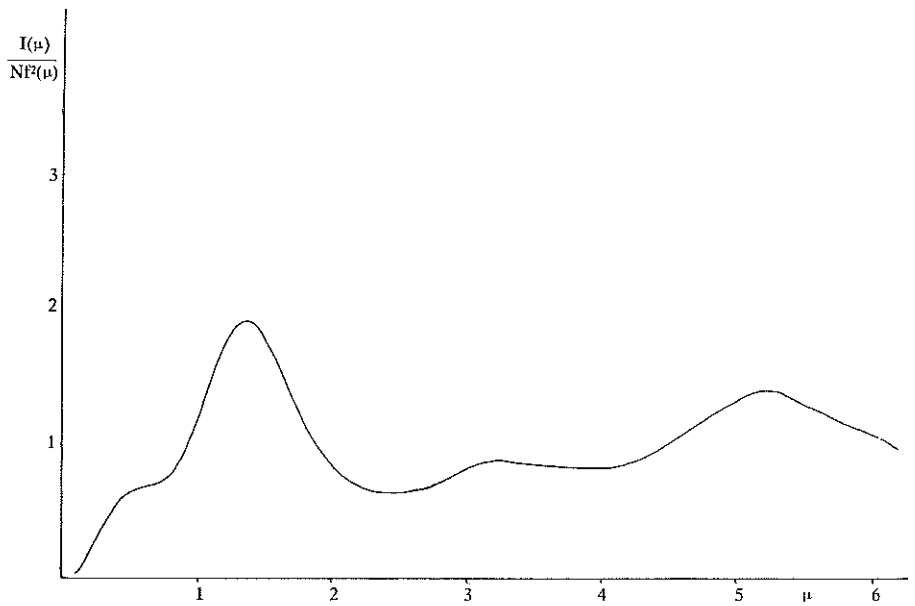


FIG. 6. - Grafico di $I(\mu)/N f^2(\mu)$ in funzione di μ, calcolato a partire dalla funzione di distribuzione radiale ottenuta nello stadio finale della simulazione.

reale nel polietilene amorfo a 400 K. In figura 7 è riportata l'intensità diffratta in media da una molecola isolata, calcolata dal modello simulato nello stadio finale. Il suo andamento è risultato identico in

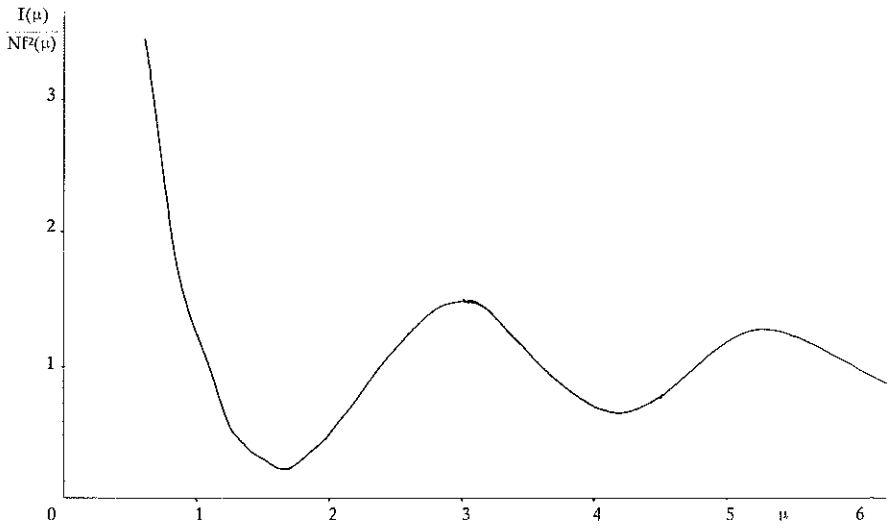


FIG. 7. - Intensità mediamente diffratta da una molecola isolata nello stadio finale della simulazione.

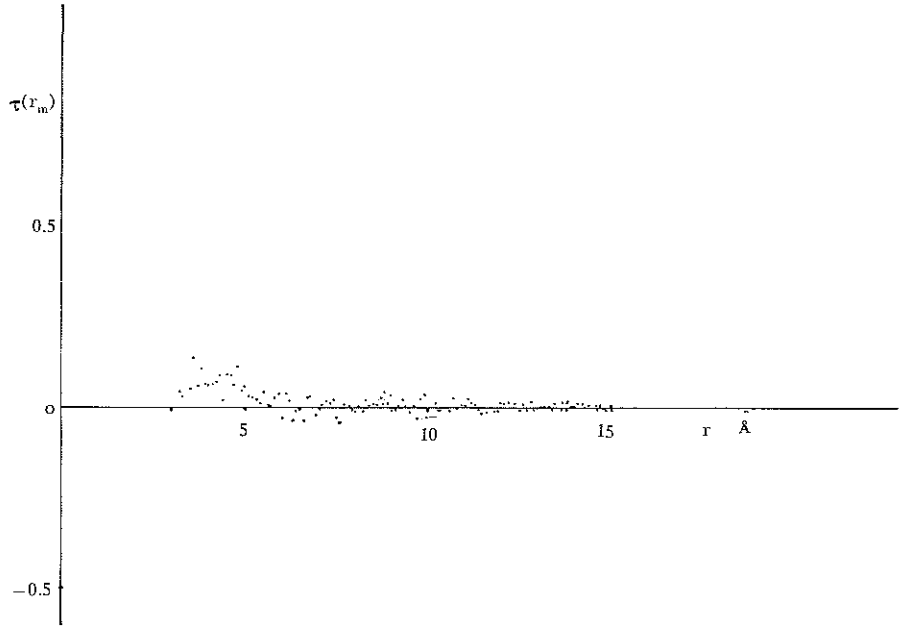


FIG. 8. - Grafico del parametro di correlazione $\tau(r_m)$ in funzione di r_m.
Dati calcolati dai sistemi simulati nelle loro configurazioni finali e mediati.

tutti gli stadi della simulazione, il che conferma come la conformazione molecolare media non sia influenzata, neppure a livello locale, da esigenze in impacchettamento.

In fig. 8 è riportato un grafico del parametro di correlazione $\tau(r_m)$, ricavato dalle due simulazioni nel loro stadio finale, in funzione della distanza r_m. Tale parametro è costituito in modo da assumere valore 0 in assenza di correlazioni di orientazione tra i vettori considerati, mentre varia tra 0 e 1 nel caso di loro parallelismo preferenziale. Si può osservare che tranne per piccole deviazioni nella zona tra 3 e 5 Å di immediato contatto fra gli atomi, tale parametro è in pratica sempre nullo, indicando l'assenza di qualsiasi genere di correlazione di orientazione tra segmenti di catene diverse a contatto ed escludendo quindi l'esistenza delle microstrutture postulate in letteratura .

BIBLIOGRAFIA

[1] J. J. Flory, Macromolecules, **1**, 381 (1974).
[2] C. A. J. Hoeve, J. Chem. Phys., **35**, 1266 (1961).
[3] A. Ciferri, C. A. Hoeve, P. J. Flory, J. Am. Chem. Soc., **83**, 1015 (1961).
[4] H. Benoit, J. Chem. Phys, **44**, 18 (1947).
[5] W. J. Taylor, J. Chem. Phys., **15**, 412 (1947).
[6] J. J. Freire, A. Horta, J. Chem. Phys., **65**, 4049 (1976).
[7] T. M. Birshtein, A. M. Skvortson, A. A. Sariban, Vysocomol, Soyed. A 19; No 1, 63.
[8] F. T. Wall, R. A. White, Macromolecules, **8**, 336 (1974).
[9] F. T. Wall e F. Mandel, J. Chem. Phys., **63**, 4592 (1975).
[10] E. De Vos, A. Bellemans, Macromolecules, **8**, 651 (1975).
[11] N. C. Smith, R. J. Fleming, J. Phys. A: Mat. gen. **8**, 929 (1975).
[12] P. J. Flory, J. Chem. Phys., **17**, 303 (1949).
[13] P. J. Flory, Jupac macromolecular chemistry (London), **8**, 1 (1973).
[14] P. M. Henry, J. Polymer Sci., **36**, 3 (1959).
[15] V. A. Kargin, A. I. Kitaigorodoskii, G. L. Slonimskii, Colloid J, USSR, **19**, 141 (1975).
[16] G. S. Y. Yeh, J. Macromol. Sci., B 6, 465 (1972).
[17] W. Pechhold, M. E. T. Hauber, E. Liska, Kolloid Z. u. Z., Polymere, **251**, 818 (1973).
[18] R. E. Robertson, J. Phys. Chem., **69**, 1575 (1965).
[19] R. De Santis, H. G. Eachmann, Kolloid Z. u. Z. Polymere, **255**, 729 (1977).
[20] W. J. Taylor, J. Chem. Phys., **16**, 257 (1948).
[21] P. J. Flory, *Statistical Mechanics of chain Molecules*, WILEY-INTERSCIENCE, New York, 1969.
[22] E. A. Mason, M. M. Kreevoy, J. Am. Chem. Soc., **77**, 5808 (1955).
[23] R. W. James, *The Optical Principles of the Diffraction of x-rays*, G. Bell and Sons LTD, London, 1962, p. 458.
[24] G. Zerbi, L. P. Piseri, F. Cabassi, Mol. Phys., **22**, 241 (1971).
[25] R. G. Snyder, M W. Poore, Macromolecules, **6**, 708 (1973).
[26] G. W. Longmann, G. D. Wignall, R. P. Sheldon, Polymer, **17**, 485 (1976).
[27] I. Voigt-Martin, F. C. Mijlhoff, J. Appl. Phys., **47**, 2942 (1976).

Sulle varietà segate dagli iperpiani in varietà di Grassmann

Nota di LORA DI FIORE D'ONOFRIO (a Napoli) *
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza dell'1 aprile 1978)

RIASSUNTO. — Sia G $(1, n)$ la varietà di Grassmann relativa alle rette di un S_n: essa appartiene ad un S_r, con $r = \frac{1}{2} n(n+1) - 1$, ed è di dimensione $2n-2$ e ordine $\nu = \frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n}$. In questa nota si dimostra che una varietà V^{ν}_{2n-1} di S_{r+1}, le cui sezioni iperpiane sono $G(1, n)$, per $n > 3$, è un cono, avente per vertice un punto.

SUMMARY. — Let G $(1, n)$ be the Grassmann manifold related to the S_n lines: it belongs to S_r, where $r = \frac{1}{2} n(n+1) - 1$, it is of dimension $2n-2$ and is of order $\nu = \frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n}$. We prove that a manifold V^{ν}_{2n-1} of S_{r+1} which prime sections are $G(1, n)$, being $n > 3$, is a point-cone.

1. — È noto che una varietà algebrica di uno spazio proiettivo complesso segata dagli iperpiani in varietà di Veronese o in varietà di Segre è un cono avente per vertice un punto [1], [2]. In questa nota la proprietà viene estesa alle varietà le cui sezioni iperpiane sono varietà $G(1, n)$ di Grassmann, relative alle rette di un S_n, con $n > 3$.

La varietà $G(1, n)$, com'è ben noto, è proiettivamente definita, appartiene a un S_r, con $r = \frac{1}{2} n(n+1) - 1$, è normale, di dimensione $2n-2$ e ordine $\nu = \frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n}$. Vogliamo dimostrare che *una varietà* V^{ν}_{2n-1} *di* S_{r+1}, *le cui sezioni iperpiane sono* $G(1, n)$ per $n > 3$, *è un cono, avente per vertice un punto.*

* Istituto di Matematica dell'Università.

2. — Richiamiamo una proprietà delle $G(1, n)$ dimostrata in [3] e in [4] per $n = 4$ e per ogni $n > 3$ in [5].

Alla $G(1, n)$ appartengono delle varietà $G(1, n-2)$ rappresentative delle rette appartenenti a un S_{n-2} di S_n. Fissiamo una $\bar{G}(1, n-2)$ di tali varietà, che determina il proprio spazio di appartenenza $\bar{S}$, di dimensione $\bar{r} = \dfrac{n(n-3)}{2}$ e uno spazio S^* di dimensione $2n-2$, sghembo con $\bar{S}$. La proprietà in discorso afferma che la $G(1, n)$ si proietta biunivocamente da $\bar{S}$ su S^* e che nella rappresentazione così ottenuta, le sezioni iperpiane di $G(1, n)$ si trasformano nelle quadriche di S^* passanti per una V_{n-1}^{n-1} di un iperpiano di S^*, che è una varietà di Segre degli indici $(1, n-2)$, rappresentativa delle coppie formate da un punto di un S_1 e da un punto di un S_{n-2}, ottenibile come luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti di due S_{n-2} omografici, sghembi fra loro.

3. — Ciò posto, consideriamo una varietà V_{2n-1}^{ν} di S_{r+1} le cui sezioni iperpiane siano $G(1, n)$. Fissato un iperpiano generico $\bar{\pi}$ di S_{r+1}, sulla $\bar{G}(1, n)$ sezione di V con $\bar{\pi}$ fissiamo una $\bar{G}(1, n-2)$ e indichiamo con $\bar{S}$ lo spazio, di dimensione $\bar{r} = \dfrac{n(n-3)}{2}$ che la contiene. Per la proprietà ricordata nel n. 2, gli spazi di dimensione $\bar{r}+1$ di $\bar{\pi}$ per $\bar{S}$ segano $\bar{G}(1, n)$ e quindi V, fuori di $\bar{G}(1, n-2)$, in un solo punto. Lo stesso accadrà per ogni spazio di dimensione $\bar{r}+1$ per $\bar{S}$ e ne segue che V si proietta biunivocamente da $\bar{S}$ su uno spazio S_{2n-1}^* sghembo con esso.

Per determinare le immagini delle sezioni iperpiane di V nella rappresentazione così ottenuta, consideriamo un generico iperpiano π per $\bar{S}$ e la sua sezione $G(1, n)$ con V. Nella proiezione, le sezioni iperpiane della $G(1, n)$ vanno, come si è ricordato nel n. 2, in quadriche per una V_{n-1}^{n-1} di Segre, appartenente ad un S_{2n-3}. Ne segue che una sezione iperpiana di V si proietta in una quadrica di S_{2n-1}^* passante per una varietà V_n^{n-1} di uno spazio σ, di dimensione $2n-2$, le cui sezioni iperpiane sono varietà di Segre. Per un risultato richiamato nel n. 1, V_n^{n-1} è un cono ,avente per vertice un punto, che indichiamo con O. Siccome la V_{2n-1}^{ν} è normale. avendo le sezioni normali, il sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane di V_{2n-1}^{ν} sarà il sistema Φ di tutte le quadriche di S_{2n-1}^* per V_n^{n-1}. Esse risultano essere tutte tangenti in O a σ, poiché O è doppio per le loro sezioni con σ. Imponendo ora ad una quadrica di Φ il passaggio per un punto O' infini-

tamente vicino ad 0 ma non su σ, la quadrica diventa un cono con punto doppio O e si ha lo stesso sistema di coni con punto doppio O qualunque sia il punto O' infinitamente vicino ad O. Dunque l'intorno di O (eccetto O) rappresenta un unico punto P della varietà V, e due sezioni iperpiane di V passanti per P hanno per immagini coni con lo stesso vertice O, pertanto la varietà V è un cono di vertice P.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. SCORZA, *Sopra una certa classe di varietà razionali*, Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXVIII (2° sem. 1909), pp. 400-401.

[2] G. SCORZA, *Sulle varietà di Segre*, Opere scelte, Vol. I, pp. 376-386.

[3] J. G. SEMPLE, *On quadric representations of the lines of four-dimensional space*, Proceedings of the London Math Soc., series 2, Vol. XXX, 1930, pp. 500-512.

[4] J. A. TODD, *The locus representing the lines of four-dimensional space and its application to linear complexes in four dimensions*, Proceedings of the London Math Soc., Series 2, Vol. XXX, 1930, pp. 513-550.

[5] J. G. SEMPLE, *On representations of the* S_k*'s of* S_n *and of the Grassmann manifolds* $G(k, n)$, Proceedings of the London Math Soc., Series 2, Vol. XXXII, 1931, pp. 200-221.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, V. Dalla Volta e G. Panella.

Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico. Nota IV. Influenza della temperatura di reazione *

Nota di VINICIO DI LUDOVICO, VITTORIO SABATELLI
e GIAN LORENZO VALENTI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza dell'1 aprile 1978)

RIASSUNTO. — Sono state studiate le reazioni di idratazione del silicato tricalcico puro e di sue soluzioni solide, alle temperature di 20 °C, 40 °C e 60 °C, nell'ambito delle prime ventiquattro ore di stagionatura.

L'influenza positiva della temperatura sul decorso delle reazioni è risultata in stretta dipendenza con il tipo di ione presente in soluzione solida. I valori delle energie di attivazione, calcolati in base ai dati sperimentali, hanno fornito utili indicazioni circa i meccanismi che regolano l'andamento delle reazioni di idratazione.

SUMMARY. — The hydration of pure tricalcium silicate and of its solid solutions have been studied, at 20 °C, 40 °C, and 60 °C, during the first 24 hours of reaction.

It has been pointed out that the positive influence of the reaction temperature on the course of the hydration, is strictly related to the ion present in solid solution. The activation energy values gave moreover useful indications about the mechanisms of the hydration reaction.

INTRODUZIONE

In precedenti note [1] [2] [3] [4] è stato studiato il comportamento idraulico del silicato tricalcico e di sue soluzioni solide, ad uno e a due componenti estranei, alla temperatura ordinaria e a tempi di stagionatura compresi fra 1 e 28 giorni. Il presente lavoro ha per oggetto lo studio dell'influenza della temperatura di reazione sull'idratazione del silicato tricalcico puro e di alcune sue soluzioni solide. Tale studio appare interessante sia sotto il profilo teorico che sotto quello applicativo.

* Lavoro svolto con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il primo aspetto è collegato all'effetto della temperatura sulla transizione da uno stadio controllato da una reazione chimica ad uno controllato dalla diffusione di reagenti e prodotti attraverso la pellicola di fasi di neoformazione [5]; il secondo è collegato ad un prevedibile incremento dei valori di resistenza meccanica alle brevi stagionature, imputabile ad una più pronta idratazione del principale costituente del clinker di cemento Portland.

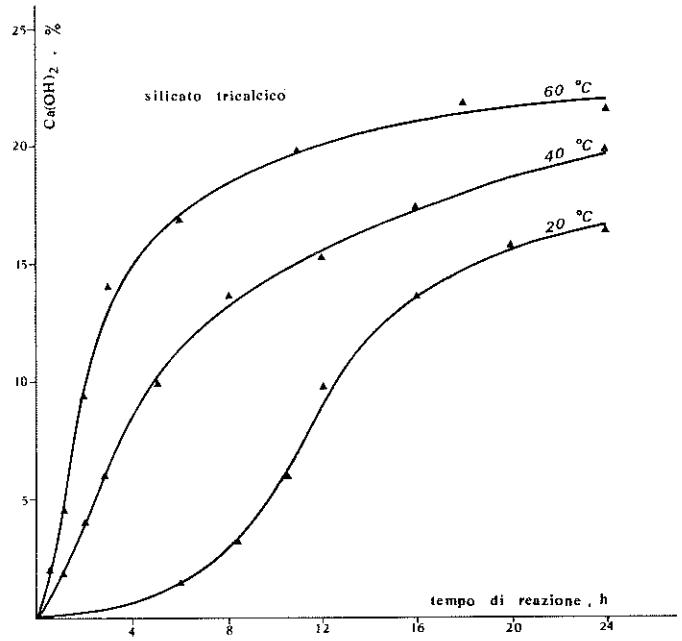


FIG. 1. - Andamento, in funzione del tempo, della concentrazione dell'idrossido di calcio prodotto a seguito dell'idratazione del silicato tricalcico.

In questa Nota si dà conto dei risultati conseguiti nella valutazione della cinetica di idratazione del silicato tricalcico e di alcune aliti sintetiche, nell'arco delle prime 24 ore di reazione, alle temperature di 20 °C, 40 °C, e 60 °C.

PARTE SPERIMENTALE

Sono stati sottoposti ad indagine:

a) un campione di silicato tricalcico puro;
b) un campione di alite contenente l'1 % di MgO;
c) un campione di alite contenente l'1 % di Fe_2O_3 .

Per la preparazione dei campioni si rimanda ad una precedente Nota [3]. L'idratazione dei provini è stata effettuata alle temperature di 20 °C, 40 °C e 60 °C, adottando un rapporto acqua/solido di 0,5; le stagionature sono state fissate in un intervallo di tempo compreso tra i 30 minuti e le 24 ore. I preparati sono stati mantenuti per il periodo di idratazione prescelto in contenitori di plexiglass, fuori dal contatto con l'aria, in un termostato atto ad assicurare una temperatura costante con una precisione pari a $\pm$ 0,5 °C. Per ciò che concerne la preparazione e la conservazione delle paste, l'arresto dell'idratazione ed i successivi trattamenti di macinazione ed essiccamento si rinvia a quanto descritto in una precedente Nota [1].

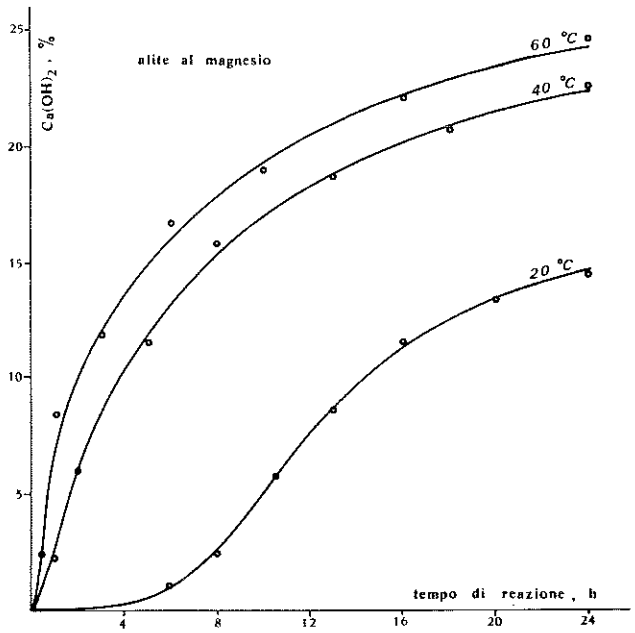


FIG. 2. - Andamento, in funzione del tempo, della concentrazione dell'idrossido di calcio prodotto a seguito dell'idratazione dell'alite al magnesio.

L'idrossido di calcio prodotto a seguito dell'idratazione dei campioni in esame è stato assunto ad indice del grado di avanzamento della reazione. La sua valutazione è stata effettuata mediante estrazione chimica ed analisi termogravimetrica [6] utile, quest'ultima, pure alla stima della perdita al fuoco a 1000 °C.

Per l'estrazione chimica è stato adottato il metodo di Franke modificato [7] che si basa sull'impiego di una miscela di alcool isobutilico e di acetoacetato di etile come solvente e di una soluzione di acido perclorico in alcool isobutilico come agente titolante.

Risultati e discussione

Nelle figg. 1, 2, e 3 è diagrammata, in funzione del tempo di stagionatura e per ogni temperatura adottata, la concentrazione di idrossido di calcio (espressa in percentuale ponderale su base ignita), prodotto a seguito dell'idratazione del silicato tricalcico puro, dell'alite al magnesio e dell'alite al ferro, rispettivamente. L'influenza comunque positiva della temperatura sul decorso dell'idratazione si esplica in maniera assai diversa per i tre campioni. Gli incrementi di tempera-

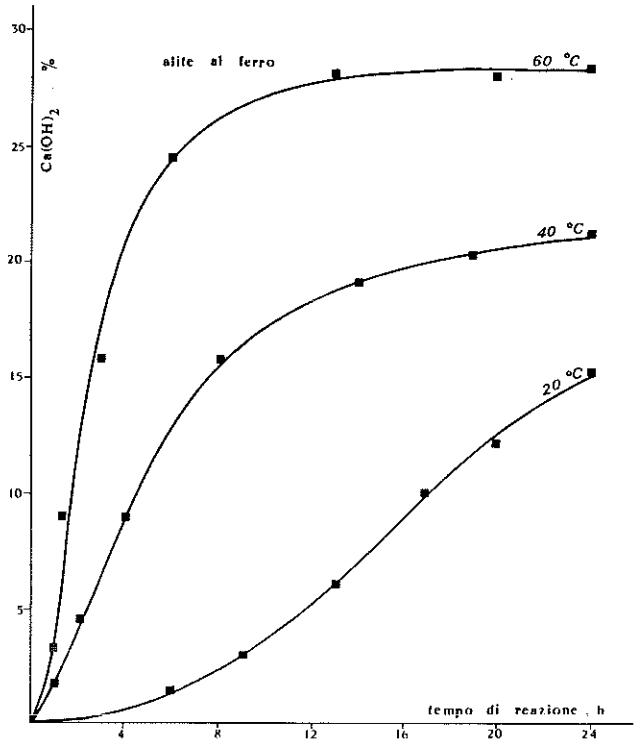


Fig. 3. - Andamento, in funzione del tempo, della concentrazione dell'idrossido di calcio prodotto a seguito dell'idratazione dell'alite al ferro.

tura da 20 °C a 40 °C e da 40 °C a 60 °C provocano aumenti del grado di avanzamento della reazione assai più sensibili nell'alite al ferro (fig. 3) che nel silicato tricalcico puro (fig. 1), mentre nell'alite al magnesio (fig. 2) l'incremento che si registra nel passaggio da 20 °C a 40 °C è molto più ampio di quello che si verifica innalzando la temperatura da 40 °C a 60 °C. Dopo 24 ore di stagionatura, la percentuale più alta di idrossido di calcio prodotta è presentata: a 20 °C, dal sili-

cato tricalcico puro; a 40 °C, dall'alite al magnesio; a 60 °C, dall'alite al ferro. Le curve nelle figg. 4, 5 e 6 (ottenute per derivazione grafica di quelle presentate nella figg. 1, 2 e 3), mostrano l'andamento della velocità di reazione in termini di incremento di concentrazione di idrossido di calcio nell'unità di tempo, in funzione del tempo di stagionatura e per ciascun campione, alle temperature di 20 °C, 40 °C e 60 °C, rispettivamente. L'esame dei grafici consente di rilevare alcune

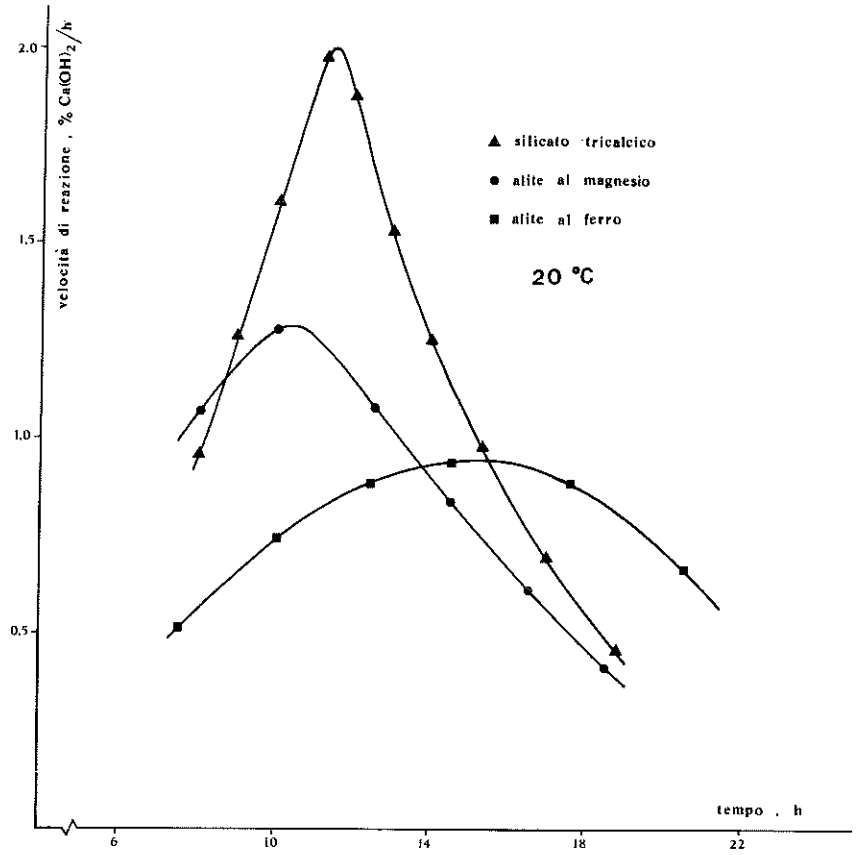


FIG. 4. - Andamento della velocità di reazione in funzione del tempo a 20 °C.

analogie e interessanti differenze di comportamento da campione a campione. A tutte le temperature esaminate, la massima velocità di reazione è raggiunta nel tempo più breve dall'alite al magnesio e nel tempo più lungo dall'alite al ferro: per la prima si registrano tempi pari a 10 h 30′, 1 h 15′, 35′, rispettivamente a 20° C, 40 °C e 60 °C; per la seconda tempi pari a 15 h 30′, 4 h, 1 h 20′ relativamente alle stesse

temperature, nell'ordine. La sequenza dei valori delle massime velocità di reazione è differente da temperatura a tempratura: a 20 °C (fig. 4) si ha C_3S puro > alite al magnesio > alite al ferro; a 40 °C (fig. 5) alite al magnesio > C_3S puro = alite al ferro; a 60 °C (fig. 6) alite al ferro > alite al magnesio > C_3S puro. La massima velocità di idratazione del silicato tricalcico che a 20 °C è il doppio di quella dell'alite al ferro, a 60 °C ne diventa circa la metà; l'alite al magnesio, la cui

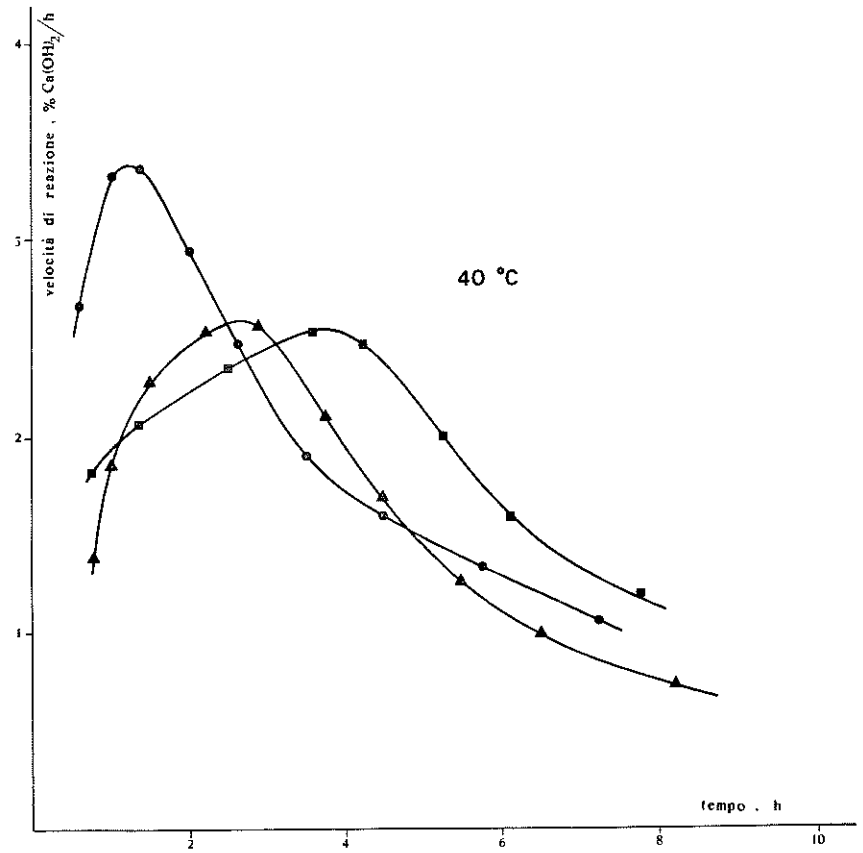


FIG. 5. - Andamento della velocità di reazione in funzione del tempo a 40 °C (per il significato dei simboli v. fig. 4).

massima velocità di reazione è inferiore sia a quella del C_3S puro a 20 °C, che a quella dell'alite al ferro a 60 °C, supera entrambe di circa il 30 % a 40 °C.

In letteratura mancano dati cinetici relativi ad idratazioni condotte a temperature superiori alla ordinaria su soluzioni solide di silicato tricalcico. KANTRO, BRUNAUER, e WEISE [8] hanno studiato la

reazione di idratazione del silicato tricalcico puro alle temperature di 5 °C, 25 °C e 50 °C. ODLER e SKALNY [9] hanno seguito la stessa reazione alle temperature di 25 °C, 50 °C, 75 °C, 100 °C.

Tali studi hanno assodato che il ruolo svolto dalla temperatura sulla idratazione è molto efficace nei primi stadi di reazione e che per tempi di stagionatura crescenti la velocità di idratazione dipende in maniera meno sensibile dalla temperatura. I risultati del presente lavoro mostrano che una simile linea di tendenza è presentata anche

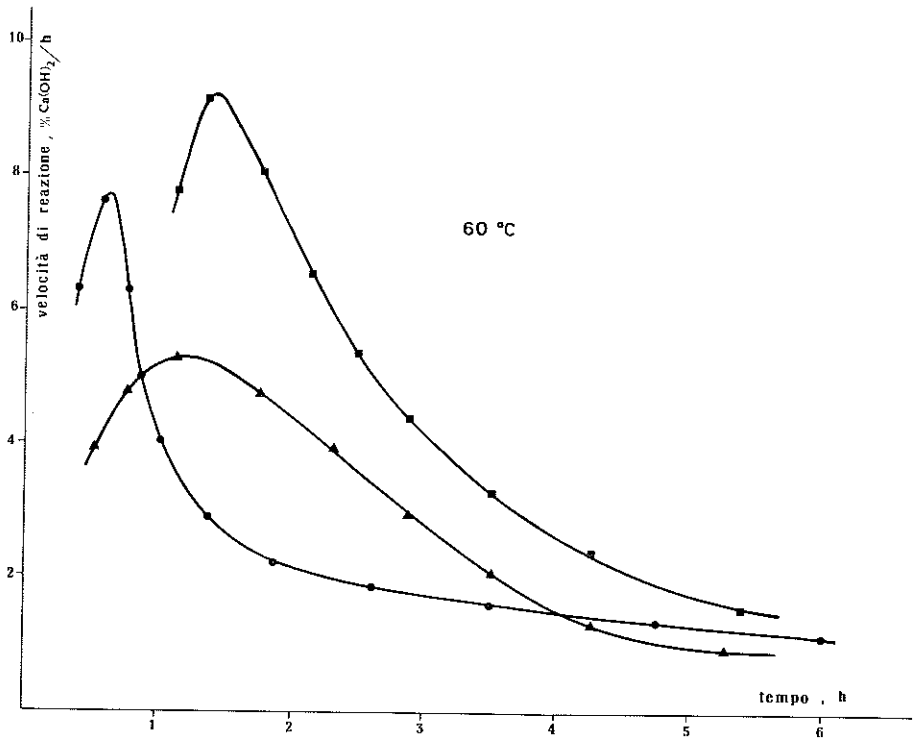


FIG. 6. - Andamento della velocità di reazione in funzione del tempo a 60 °C (per il significato dei simboli v. fig. 4).

dalle soluzioni solide di silicato tricalcico, riscontrandosi, così come nel caso del C_3S puro, una crescente prevalenza di fenomeni diffusivi su quelli propriamente chimici, mano mano che lo strato dei prodotti di idratazione durante lo svolgimento della reazione assume una certa consistenza attorno al granello di sostanza non reagita [8]. È interessante comunque osservare che la presenza di ioni estranei nel reticolo del silicato tricalcico, pur non alterando la natura dei meccanismi che regolano il processo di idratazione del C_3S, influenza in modo

significativo il momento di transizione dallo stadio di controllo propriamente chimico a quello diffusivo, nonché la durata del periodo di coesistenza dei due fenomeni. Ciò risulta evidente dal grafico di fig. 7, in cui sono diagrammati, in funzione del tempo per ciascuno dei tre campioni in esame, i valori dell'energia di attivazione « apparente » del processo nell'intervallo 40 °C ÷ 60 °C. Tali valori sono stati calcolati utilizzando i dati di velocità di reazione, alle due sud-

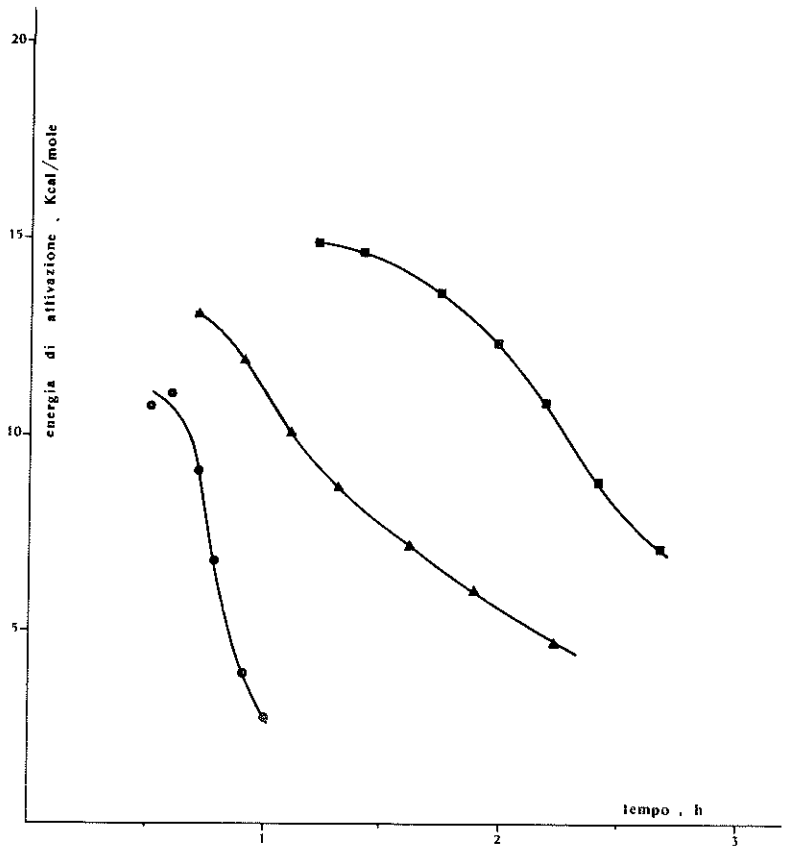


FIG. 7. - Energia di attivazione del processo nell'intervallo 40 ÷ 60 °C (per il significato dei simboli v. fig. 4).

dette temperature, in base alle ipotesi che la velocità di idratazione sia proporzionale ad un'incognita funzione della composizione e che tale funzione abbia lo stesso valore ad ambedue le temperature per un grado di idratazione fissato [10]. La diminuzione osservabile dell'energia di attivazione in funzione del tempo è da mettere in relazione ad un cambiamento del meccanismo di idratazione, in quanto ad un

processo regolato dalla diffusione spetta un'energia di attivazione più bassa di quella che compete ad un processo controllato da una reazione chimica [11].

L'andamento delle curve in fig. 7 mostra chiaramente che la presenza del magnesio nel reticolo del C_3S provoca nei confronti del silicato tricalcico puro un anticipo della transizione dallo stadio di controllo chimico a quello diffusivo e un più rapido decadimento dell'energia di attivazione verso valori tipici della diffusione [12]; la presenza del ferro, al contrario, induce un ritardo nella comparsa del fenomeno diffusivo e determina un ampliamento del pericolo di coesistenza di tale fenomeno con quello propriamente chimico.

Conclusioni

L'influenza della temperatura sulla cinetica di idratazione alle brevi stagionature del C_3S e di sue soluzioni solide contenenti singolarmente magnesio e ferro, è notevolmente diversa da campione a campione. La sequenza dei valori delle massime velocità di reazione è differente a 20 °C, 40 °C e 60 °C, anche se alle suddette temperature la massima velocità di idratazione è sempre raggiunta nel tempo più breve dall'alite al magnesio e nel tempo più lungo dall'alite al ferro. La presenza del magnesio nel reticolo del silicato tricalcico induce ad anticipo della transizione da un meccanismo di controllo chimico ad uno diffusivo e riduce il periodo di tempo in cui i due meccanismi operano concomitantemente; la presenza del ferro gioca in senso diametralmente opposto.

Gli Autori desiderano ringraziare il Prof. R. Sersale per le utili discussioni e il Sig. A. Annetta per l'assistenza tecnica.

BIBLIOGRAFIA

[1] Sabatelli V., Valenti G. L., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico.* Nota I, *Aliti ad un componente estraneo.* Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. (1), XLII, Napoli, 1975.

[2] Valenti G. L., Sabatelli V., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico.* Nota II, *Aliti a due componenti estranei.* Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. (4), XLII, Napoli, 1975.

[3] Sabatelli V., Valenti G. L., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico.* Nota III. *Relazione fra idrossido di calcio e resistenza meccanica.* Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. (4), XLIII, 444, Napoli, 1976.

[4] Sersale R., *Hydraulic behaviour of Al, Fe, Mg - bearing alites.* VI Int. Congress on the chemistry of cement, Moscow (1974), II, 3.

[5] KONDO R., UEDA S., *Kinetics and mechanisms of the hydration of cements.* Proceedings of the Fifth Int. Symp. on the Chem. of Cem., Tokyo, Part 2, 203, 1968.

[6] PERULLO A., SABATELLI V., VALENTI G. L., *Valutazione dell'idrossido di calcio, in presenza di silicati di calcio idrati, mediante estrazione con solvente e mediante analisi termogravimetriac.* Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. (4), XLIII, 438, Napoli, 1976.

[7] PRESSLER E. E., BRUNAUER S., KANTRO D. L., WEISE C. H., *Determination of the free calcium hydroxide contents of hydrated Portland cements and calcium silicate.* Anal. Chem. **33**, 877 (1961).

[8] KANTRO D. L., BRUNAUER S., WEISE C. M., *Development of Surface in the Hydration of Calcium Silicates.* II *Extension of Investigations to Earlier and Later Stages of Hydration.* J. Phys. Chem. **66**, 1804 (1962).

[9] ODLER I., SKALNY J., *Hydration of Tricalcium Silicate at Elevated Temperatures.* J. Appl. Chem. Biothechnol. **23**, 661 (1973).

[10] MTSCHEDLOW-PETROSSIAN P., SEN A. P., USCHEROV-MARSCHAK A. W., *Kalorimetrische Untersuchungen der Frühstadien der Hydrationsreaktion von C_3S.* Silikattechnik **21**, 259 (1970).

[11] COPELAND L. E., KANTRO D. L., *The Chemistry of Cements.* Vol. I, Cap. 8, 313, Academic Press - London and New York, 1964.

[12] KANTRO D. L. (comunicazione privata).

Istituto di Chimica Applicata - Facoltà di Ingegneria - Università di Napoli.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. Sersale, M. Covello, A. Scherillo.

Contributo alla conoscenza geochimica dei travertini campani: travertini di Paestum e della Valle del Tanagro (Salerno)

Nota di MARIA FERRERI * e DAMIANO STANZIONE *
presentata dal socio emerito ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 6 maggio 1978)

RIASSUNTO. — Sono state eseguite e confrontate analisi isotopiche e chimiche su due serie di campioni di travertini provenienti dagli affioramenti di Paestum (< 80.000 anni) e della bassa Valle del Tanagro (≫ 80.000 anni).

I dati sono anche stati confrontati con la composizione chimica delle acque mineralizzate delle zone limitrofe e, per la bassa Valle del Tanagro, con i dati di un campione di travertino recente della vicina zona di Contursi.

I dati isotopici hanno evidenziato, per $\delta^{13}C$, una deposizione in equilibrio isotopico con CO_2 atmosferica per tutti i campioni, tranne TC1, attuale ($\delta^{13}C = +7.27$) e TM8 ($\delta^{13}C = +6.05$) per i quali si è ipotizzata una CO_2 di origine profonda; TM3b ($\delta^{13}C = -7.54$), probabilmente di origine secondaria, deriva da acque ricche di CO_2 organica. Le temperature calcolate con $\delta^{18}0$ non danno mai temperature > 20 °C tranne per TC1.

I travertini di Paestum hanno una composizione sia isotopica che chimica più costante di quelli della bassa Valle del Tanagro.

La composizione chimica per quasi tutti gli elementi sembra ancora riflettere quella delle acque di deposizione, nonostante siano intervenute notevoli modifiche diagenetiche, testimoniate anche dalla variabilità dei dati chimici in ambedue le frazioni analizzate (solubile ed insoluble) soprattutto nella serie TM e nei livelli più ricchi in spatite chiara (vedi anche $\delta^{13}C$ di TM3b) ed in quelli costituiti da materiale sciolto.

ABSTRACT. — Two series of travertine specimens have been analyzed for their isotopic and chemical compositions: one series from Paestum (< 80.000 years) and the other from the low Tanagro Valley (≫ 80.000 years).

The data have been compared with the ones existing of the nearby areas mineralized waters and, for a comparison with the low Tanagro Valley ancient travertines, also a recent travertine from the nearby Contursi area has been analyzed.

The isotopic data have shown that deposition was at isotopic equilibrium with atmospheric CO_2; for TC1, recent ($\delta^{13}C = +7.27$) and TM8 ($\delta^{13}C = +6.05$) CO_2 had a deep origin; TM3b ($\delta^{13}C = -7.54$) is secondary cement, from waters rich in organic CO_2.

* Istituto di Mineralogia - Università di Napoli - Via Mezzocannone 8.

Calculated paleotemperatures are always less than 20 °C; only TC1 has a greater temperature (31 °C).

Paestum travertine have an isotopic and chemical composition more regular than those of low Tanagro Valley.

The ancient travertines chemical composition seems to reflect their deposition water composition for most elements, because the differences between the two groups of travertines are the same existing between the actual mineralized waters of the two zones. This similarity can be identified even if quite a strong diagenetic action interested most of all the low Tanagro Valley travertines, as is proved by isotopic (f.i. for TM3 specimen) and chemical data variability in both the soluble and insoluble fractions for the specimens with light sparry calcite and for the loose ones.

INTRODUZIONE

In questo lavoro si presentano i primi dati di carattere geochimico di una ricerca interdisciplinare sui travertini della bassa Valle del Tanagro (BRANCACCIO et al., in preparazione).

L'approfondirsi, in questi ultimi anni, soprattutto grazie alla diffusione di nuove e più precise metodologie analitiche, delle conoscenze sul ciclo dell'acqua e delle sue interazioni con quello delle rocce, ha portato anche un rinnovato interesse nei riguardi dei travertini, allo scopo di ricavarne informazioni sulle soluzioni da cui hanno tratto origine (FRITZ, 1965; GONFIANTINI et al. 1968; FRIEDMAN, 1970; PANICHI e TONGIORGI, 1975; MANFRA et al., 1974; 1976; SAVELLI e WEDEPHOL, 1968; DEMOVIC et al., 1972; CIPRIANI et al., 1972).

Tuttavia una esatta interpretazione dei dati forniti dalle analisi dei travertini non può prescindere dall'ipotesi che processi diagenetici possano averne modificato più o meno profondamente la composizione originaria, sia per gli elementi maggiori e in tracce (CIPRIANI et al., 1972), sia per gli isotopi del carbonio e dell'ossigeno (MANFRA et al., 1974; 1976).

Allo scopo di ottenere informazioni più complete ed esatte ci è sembrato opportuno in primo luogo eseguire delle campionature in serie onde poter individuare le variazioni temporali attraverso uno studio comparativo isotopico, geochimico e sedimentologico.

Sulla base delle considerazioni sopra riportate sono stati analizzati i travertini di Paestum (piastrone alle pendici di Monte Soprano) e quelli della bassa Valle del Tanagro. Per questi ultimi si è cercato di individuare se esistano o meno correlazioni con i travertini attuali della vicina zona di Contursi (Fig. 1).

Dal punto di vista cronologico l'età relativa di questi due affioramenti può stabilirsi rispetto alla duna di Gromola nella Piana di Paestum (80.000 anni circa, Wurm I - Wurm II). I travertini di Pae-

stum sono posteriori alla formazione della duna, mentre quelli della Valle del Tanagro sembrano nettamente anteriori (BRANCACCIO, comunicazione verbale).

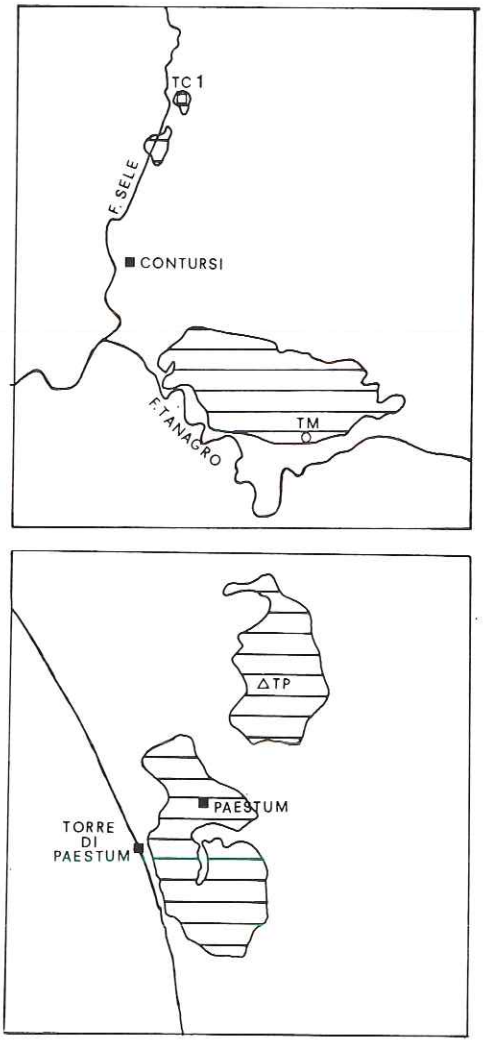


FIG. 1. - Ubicazione dei travertini della Campania considerati nel presente lavoro.

Per ogni campione è stata preventivamente eseguita una attenta osservazione sia macroscopica che microscopica per il calcolo della porosità % e della spatite di riempimento di cavità % sulla calcite totale, allo scopo di separare, quando possibile, in più frazioni quei campioni che mostrano componenti nettamente diverse e di meglio interpretare i dati isotopici. Il calcolo non è stato possibile per i

campioni incoerenti o poco coerenti, fra TP7 e TP15, molto ricchi in alloclasti, che rappresentano spiagge fossili con incrostazioni travertinose (Tab. I).

Sono state eseguite analisi del $\delta^{13}C$ e $\delta^{18}0$ e calcolate le paleotemperature secondo il metodo di O'NEIL et al., 1969, ipotizzando un $\delta^{18}0$ delle acque = – 5,5 vs SMOW.

TABELLA I

Composizione isotopica, porosità e spatite in cristalli limpidi

Campione	δ^{13} C Vs PDB	δ^{18} 0 Vs SMOW	Porosità %	Spatite %	Campione	δ^{13} C Vs PDB	δ^{18} 0 Vs SMOW	Porosità %	Spatite %
TP1	– 4,00	20,27	9	13	TC1	+ 7,27	21,74	—	—
TP2	– 2,25	25,19	6	3					
TP3	– 2,11	25,17	6	3					
TP4	+ 0,57	26,18	6	3	TM1	+ 0,04	24,83	—	—
TP5	– 1,16	25,99	3	2	TM2	+ 2,90	25,35	5	12
TP6	– 1,90	25,29	9	8	TM3	a + 2,02	25,60	8	33
						b – 7,54	27,25		
TP7	– 0,81	24,87	—	—	TM4	+ 0,60	25,65	22	8
TP8	+ 2,28	25,63	20	0	TM5	a + 2,56	23,73	8	10
						b – 0,02	24,35		
TP9	+ 1,44	25,29	3	0	TM6	– 2,33	25,03	—	—
TP10	+ 1,81	24,59	21	5	TM7	– 1,76	24,63	8	0
TP11	+ 1,65	26,06	18	5	TM8	+ 6,05	25,18	13	0
TP12	+ 1,62	25,75	27	0	TM9	– 2,30	24,58	1	0
TP13	+ 2,25	26,35	7	3	TM10	– 1,69	24,59	2	0
TP14	+ 0,27	25,89	7	0	TM11	– 0,28	24,42	4	0
TP15	+ 0,81	26,29	—	—	TM12	– 4,36	26,40	—	—

È stato inoltre calcolato il residuo insolubile di HCL 1N (PERSOZ e REMANE, 1976) nonché i tenori di Li, Na, K, Rb, Mg, Sr, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, sia per la frazione solubile che per quella insolubile, mediante spettrofotometro ad assorbimento atomico, l'SO_4 è stato determinato con metodo ponderale (Tab. II e III).

Infine l'interpretazione è stata possibile sulla base dei dati già esistenti in letteratura ed inediti per le acque sorgive delle due zone in esame

CAMPIONATURA E PRESENTAZIONE DEI DATI

1) Il travertino campionato a Paestum costituisce la parte superiore di un carotaggio effettuato a circa due km dalla sorgente di Capodifiume verso valle.

TABELLA II

Valori percentuali dei costituenti maggiori

Campione	R. I.	$MgCO_3$	$CaSO_4$	$CaCO_3$	Campione	R. I.	$MgCO_3$	$CaSO_4$	$CaCO_3$
TP1	5,10	0,71	0,016	94,17	TC1	0,79	0,83	2,582	95,79
TP2	0,74	0,78	0,002	98,48					
TP3	1,31	0,79	0,031	97,86					
TP4	0,51	1,68	0,086	97,72	TM1	27,48	0,69	0,073	71,75
TP5	4,39	0,83	0,015	94,76	TM2	10,11	0,47	0,017	89,41
TP6	1,06	1,11	0,026	97,80	TM3	0,29	0,49	0,006	99,21
TP7	19,05	0,57	0,036	80,34	TM4	1,70	0,53	0,058	97,70
TP8	1,70	1,47	0,199	96,62	TM5	3,56	0,36	0,874	95,20
TP9	2,33	1,37	0,029	96,27	TM6	1,73	0,43	0,073	97,76
TP10	1,26	1,20	0,199	97,34	TM7	7,90	0,45	0,030	91,62
TP11	1,30	1,61	0,189	96,89	TM8	1,20	0,41	0,061	98,32
TP12	0,25	1,61	0,507	97,63	TM9	3,37	0,47	0,039	96,12
TP13	1,49	1,65	0,259	96,60	TM10	6,90	0,43	0,044	92,62
TP14	1,89	0,73	0,084	97,30	TM11	11,46	0,36	0,035	88,14
TP15	30,02	0,88	0,256	68,84	TM12	32,40	0,31	0,524	66,76

Le profondità che corrispondono ai singoli campioni sono le seguenti:

TP1 = 0 m	TP2 = 3 m	TP3 = 6 m	TP4 = 8 m	TP5 = 9 m
TP6 = 10 m	TP7 = 11 m	TP8 = 12 m	TP9 = 12,5 m	TP10 = 13 m
TP11 = 13,5 m	TP12 = 15 m	TP13 = 18 m	TP14 = 19 m	TP15 = 23 m

2) Per quanto riguarda il travertino della bassa Valle del Tanagro, sono state campionate due serie a poca distanza una dall'altra (circa una decina di metri), in località Macchiatelle.

La prima serie comprende i primi termini di deposizione ivi affioranti (TM1 - TM2 - TM3 - TM4 - TM5 - TM6 dal basso verso l'alto).

TABELLA III

Composizione della frazione solubile

Campione	Mg %	Sr p.p.m.	Na p.p.m.	K p.p.m.	Li p.p.m.	Rb p.p.m.	Fe p.p.m.	Mn p.p.m.	Cu p.p.m.	Cr p.p.m.	Co p.p.m.	Ni p.p.m.	SO_4 p.p.m.
TP1	0,216	85,62	228,7	63,22	1,53	n.d.	168,59	305,58	5,27	11,23	4,49	5,80	77,82
TP2	0,227	56,42	87,3	15,05	n.d.	n.d.	50,15	40,12	4,01	11,76	4,70	3,20	12,21
TP3	0,235	50,66	81,0	10,13	n.d.	n.d.	126,66	60,80	2,53	11,76	5,29	4,10	217,12
TP4	0,487	138,20	208,5	25,12	n.d.	n.d.	135,69	90,40	6,53	10,87	4,89	3,80	606,89
TP5	0,251	84,98	224,9	57,53	n.d.	n.d.	193,49	41,84	5,23	14,71	4,70	4,10	98,29
TP6	0,324	56,85	175,9	10,11	n.d.	n.d.	126,34	96,02	5,05	8,15	4,89	3,53	183,14
TP7	0,204	69,48	231,8	43,24	n.d.	n.d.	599,13	111,18	6,79	12,66	5,06	5,37	208,22
TP8	0,432	133,52	320,4	61,04	n.d.	n.d.	137,33	71,21	6,93	14,04	4,49	3,37	1454,84
TP9	0,404	89,59	255,9	20,49	n.d.	n.d.	281,56	71,67	5,63	11,11	4,16	3,33	200,22
TP10	0,349	107,60	273,6	35,45	n.d.	n.d.	136,72	162,04	5,57	10,75	4,03	4,30	1392,23
TP11	0,471	107,64	265,9	15,20	n.d.	n.d.	162,11	40,52	6.58	10,63	3,98	2,65	1319,62
TP12	0,466	68,92	255,7	20,05	n.d.	n.d.	190,48	45,11	6,52	10,99	4,12	2,74	3571,05
TP13	0,482	107,86	270,4	15,23	n.d.	n.d.	152,27	45,68	4,06	11,49	4,31	2,87	1803,72
TP14	0,214	82,21	186,2	20,38	n.d.	n.d.	127,41	30,57	5,10	8,06	3,76	3,22	584,73
TP15	0,364	151,83	378,6	78,59	n.d.	n.d.	857,38	357,24	11,43	18,11	4,34	3,62	1265,19
TC1	0,241	509,01	89,7	8,06	5,04	1,21	n.d.	20,16	14,61	6,52	6,70	3,00	18076,06
TM1	0,276	43,09	193,1	231,66	10,34	2,27	3688,64	517,10	33,09	20,00	10,00	6,62	372,75
TM2	0,150	27,81	27,6	28,92	2,78	1,23	806,54	233,62	12,79	8,79	8,20	3,64	107,87
TM3	0,140	25,07	18,0	n.d.	1,00	0,24	51,14	55,16	6,02	5,10	8,60	3,06	40,88
TM4	0,156	31,47	23,1	8,06	2,51	0,99	50,35	55,39	5,03	5,43	7,06	3,26	137,62
TM5	0,109	32,40	14,5	8,06	2,59	0,47	699,92	103,69	9,33	7,30	8,42	3,93	5950,35
TM6	0,127	40,70	29,5	67,16	2,31	0,32	1170,24	35,61	6,10	5,74	8,62	3,44	505,11
TM7	0,141	51,57	30,4	15,20	2,71	0,27	n.d.	122,15	4,34	5,15	8,76	2,83	198,94
TM8	0,121	18,97	7,1	34,41	1,01	0,18	n.d.	60,73	5,68	5,43	8,15	3,26	426,82
TM9	0,140	38,81	201,8	20,70	1,30	n.d.	129,40	206,97	4,14	11,49	4,59	2,29	268,34
TM10	0,134	40,28	155,7	64,45	1,34	n.d.	193,34	256,18	8,05	11,11	4,44	2,50	296,90
TM11	0,119	42,35	189,2	146,83	1,41	n.d.	271,06	183,53	7,34	11,76	4,70	2,94	218,61
TM12	0,133	55,47	288,5	192,31	n.d.	n.d.	1213,02	798,08	36,98	16,23	4,87	2,59	2501,20

segue: Tabella III

Composizione del residuo insolubile (R. I.)

Campione	R. I. %	Mg %	Sr p.p.m.	Na %	K %	Li p.p.m.	Fe %	Mn %	Cu p.p.m.	Cr p.p.m.	Co p.p.m.
TP1	5,10	0,931	122,54	1,03	1,76	24,50	0,31	0,10	16,13	104,55	54,54
TP2	0,74	4,054	337,84	3,38	1,89	n.d.	0,67	0,13	35,71	33,33	66,67
TP3	1,31	1,908	190,83	1,37	0,61	n.d.	0,92	0,38	19,23	100,00	66,67
TP4	0,51	1,850	343,30	3,13	1,17	n.d.	2,64	0,24	29,78	168,75	25,00
TP5	4,39	1,437	22,78	0,50	0,91	45,50	0,42	0,01	41,67	66,66	66,67
TP6	1,06	5,750	117,92	1,23	0,66	n.d.	1,18	0,37	35,71	125,00	12,00
TP7	19,05	0,092	3,28	0,42	0,94	5,24	0,25	0,02	25,00	178,57	59,52
TP8	1,70	4,706	514,70	0,79	1,47	88,23	0,79	0,08	36,36	90,90	68,18
TP9	2,33	1,931	107,29	0,53	0,21	n.d.	1,18	0,01	71,43	100,00	100,00
TP10	1,26	5,159	198,41	1,07	0,95	n.d.	1,07	0,09	25,00	142,85	142,86
TP11	1,30	4,563	192,30	1,23	0,46	n.d.	1,23	0,01	26,67	83,33	125,00
TP12	0,25	3,000	350,00	0,72	0,20	n.d.	7,60	0,10	75,00	138,89	111,11
TP13	1,49	4,530	167,78	1,01	0,20	n.d.	1,00	0,02	103,33	76,92	33,33
TP14	1,89	1,984	132,27	0,74	0,63	n.d.	0,66	0,01	26,67	71,42	142,86
TP15	30,02	0,100	4,16	0,73	1,33	15,33	0,20	0,01	127,30	40,32	24,19
TC1	0,79	0,633	316,40	0,16	0,12	n.d.	0,44	n.d.	159,00	106,00	n.d.
TM1	27,48	0,710	45,49	0,05	0,17	45,48	0,37	0,01	76,00	100,00	n.d.
TM2	10,11	0,692	86,54	0,04	0,24	39,56	0,74	0,01	188,90	88,89	n.d.
TM3	0,29	3,448	431,34	0,37	0,06	n.d.	3,10	0,17	100,00	125,00	n.d.
TM4	1,70	1,470	110,29	0,16	0,62	38,82	3,53	0,04	168,80	81,25	n.d.
TM5	3,56	0,772	351,12	0,12	0,44	7,02	2,25	0,05	95,50	104,54	n.d.
TM6	1,73	2,456	505,78	0,36	1,56	31,21	3,47	0,03	103,90	19,23	n.d.
TM7	7,90	0,158	74,11	0,03	0,07	12,65	0,52	0,01	150,00	166,67	n.d.
TM8	1,20	1,458	104,66	0,13	0,50	33,33	2,29	0,04	75,00	31,25	n.d.
TM9	3,37	0,519	34,09	0,41	0,50	23,85	0,37	0,01	30,80	57,69	19,23
TM10	6,90	0,622	18,11	0,34	2,02	15,94	0,26	0,01	75,00	75,00	25,00
TM11	11,46	0,504	10,90	2,12	1,57	17,80	0,21	0,01	43,30	83,00	50,00
TM12	32,40	0,771	3,86	0,20	1,38	41,66	0,25	0,04	108,69	136,95	124,54

La seconda serie comprende invece gli ultimi termini di deposizione (TM9 - TM10 - TM11 - TM12, sempre dal basso verso l'alto).

Inoltre sono stati prelevati alcuni altri campioni al di sotto della seconda serie (TM7 e TM8) e, in località Contursi Bagni (Terme Rosapepe), un campione di travertino di recentissima formazione (TC1).

Discussione dei dati e conclusioni

Le informazioni che ci siamo proposti di ottenere dallo studio degli isotopi dell'ossigeno e del carbonio riguardano:

1) una valutazione relativa della temperatura dell'acqua di deposizione, a parità di composizione isotopica di quest'ultima una temperatura minore viene registrata da un $\delta^{18}0$ più positivo del carbonato deposto (McCrea, 1950; Epstein et al., 1951; 1953; O'Neil et al., 1969);

2) le possibili fonti della CO_2 di deposizione: valori negativi di $\delta^{13}C$ sono a favore di una sua origine organica, valori molto positivi a favore di una sua origine profonda, p. es. per decarbonatazione di formazioni sedimentarie marine presenti nel sottosuolo, valori intermedi a favore di un equilibrio con CO_2 atmosferica (Craig, 1963; Panichi e Tongiorgi, 1975).

Per quanto riguarda $\delta^{13}C$ tutti i nostri campioni, tranne TC1 e TM8, cadono entro lo stesso intervallo dei carbonati marini e lacustri che si depositano in equilibrio isotopico con CO_2 atmosferica (Degens, 1967; Taylor et al., 1967). TC1 ($\delta^{13}C = +7.27$) e TM8 ($\delta^{13}C = +$ $= +6.05$) fanno però ipotizzare un'origine almeno in parte profonda della CO_2 di formazione sia dei travertini attuali di Contursi che di quelli fossili della bassa Valle del Tanagro.

Per quanto riguarda $\delta^{18}0$, i valori ottenuti sono tutti compatibili con un'origine prevalentemente meteorica delle acque di deposizione, come d'altra parte è stato finora riscontrato (Manfra et al., 1976). Si hanno valori maggiori per i campioni TP che per i TM e TC, e questo può essere dovuto o ad una minore temperatura delle acque di deposizione dei TP o a diversa composizione isotopica delle acque stesse, dovuta a differenze locali e temporali e/o a mescolamenti con altri tipi di acque.

Le paleotemperature calcolate ipotizzando $\delta^{18}0$ delle acque sorgive $= -5.5$ non superano mai i 20 °C circa tranne per il campione TC1, di 31 °C, confrontabile alla temperatura reale alla sorgente, sui 39 °C.

Le differenze più evidenti si sono ottenute per le due frazioni del campione TM3, nel quale si è separata la calcite in grossi cristalli limpidi (TM3b) dalla calcite in cristalli di dimensioni inferiori e di

colore bruno (TM3a): per la frazione TM3b si sono ottenuti $\delta^{13}C = -$ $= -7.54$ e $\delta^{18}0 = +27.25$, nettamente più negativo il primo e più positivo il secondo non solo di TM3a ma di tutti gli altri campioni delle due zone. Questi valori stanno ad indicare per il TM3b un'origine organica della CO_2 ed una temperatura molto bassa.

Per i travertini di Paestum vi è una variazione abbastanza sensibile da valori positivi a valori negativi di $\delta^{13}C$ da TP7 verso l'alto, concomitante alla presenza di calcite spatica di riempimento di cavità (quasi assente da TP15 a TP17) (Fig. 2). Comunque, tale variazione è riconoscibile anche per i campioni TM per quanto riguarda $\delta^{13}C$, non correlato però alla percentuale in spatite chiara; tale andamento può essere attribuito anche ad una minore velocità di sedimentazione (DEMOVIC et al., 1972).

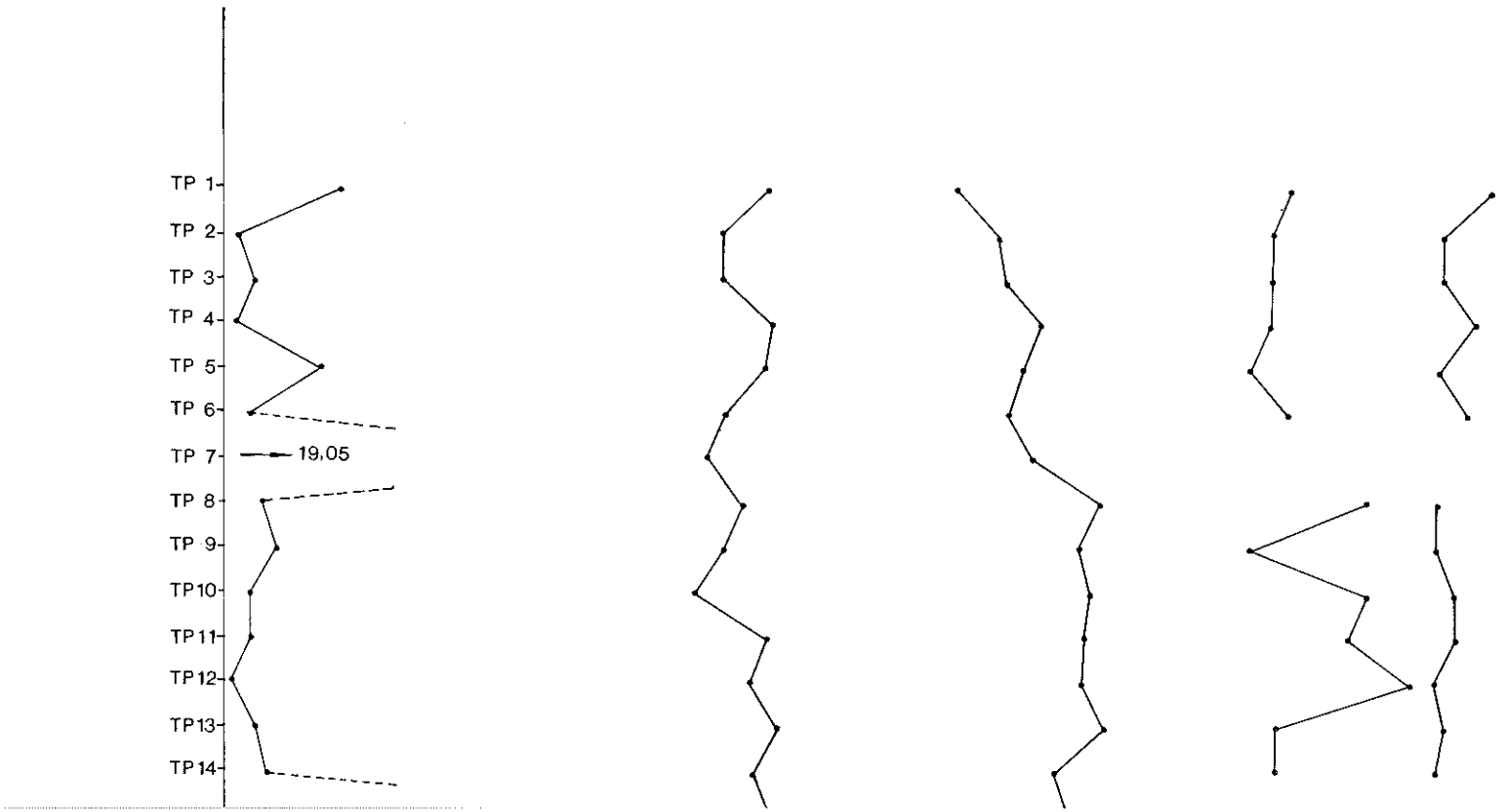
La variazione della composizione chimica ed isotopica mostra un andamento più regolare per i travertini di Paestum che non per quelli della bassa Valle del Tanagro (Figg. 2-3). La minore variabilità nell'ambito della serie TP può essere messa in relazione sia con una diagenesi meno spinta sia con una maggiore omogeneità dell'ambiente di deposizione nel tempo rispetto ai travertini TM (CORTESI e LEONI, 1958).

Tra gli elementi in tracce il litio si è rivelato caratteristico per i travertini in esame, in quanto presente, sebbene in piccole quantità, sia nella frazione solubile che in quella insolubile dei travertini della Valle del Tanagro come pure nel campione di travertino attuale analizzato per confronto TC1, mentre non è dosabile nei travertini di Paestum: questa differenza è riconducibile alle acque di deposizione, più ricche in litio a Contursi che non a Paestum (TALENTI e BORGIOLI, 1948; dati inediti del laboratorio dell'Istituto di Mineralogia).

Il rubidio mostra comportamento analogo al litio.

Na e K hanno un comportamento perfettamente analogo nella frazione solubile dei campioni di Paestum ma non in quella dei campioni della bassa Valle del Tanagro, dove l'aumento in K nella frazione solubile coincide per lo più con i valori più negativi di $\delta^{13}C$, correlabile con la presenza di materia organica all'atto della formazione o durante processi di alterazione successivi. Il tenore in Na di TC1 supera quello di tutti i campioni TM ma è solo 1/3 della media dei campioni TP. Ciò riflette in parte la differenza nei tenori di Na delle acque di Paestum e di Contursi (nelle prime Na è circa dieci volte maggiore che nelle seconde).

Il residuo insolubile, per il suo contenuto almeno parzialmente argilloso, risulta naturalmente molto arricchito sia in Na che in K rispetto alla frazione solubile in ambedue le serie; la corrispondenza di comportamento fra i due elementi è minore che per la frazione


TP 1
TP 2
TP 3
TP 4
TP 5
TP 6
TP 7
19,05
TP 8
TP 9
TP10
TP11
TP12
TP13
TP14

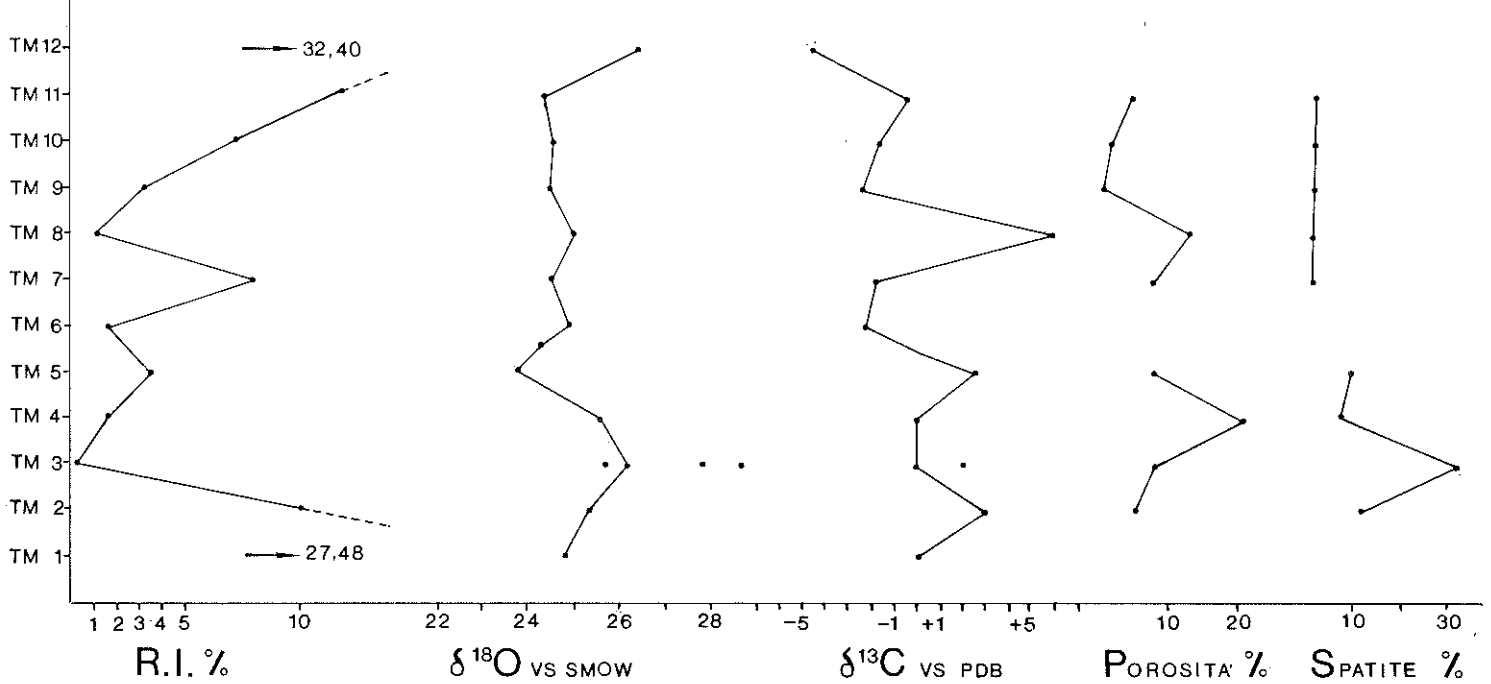
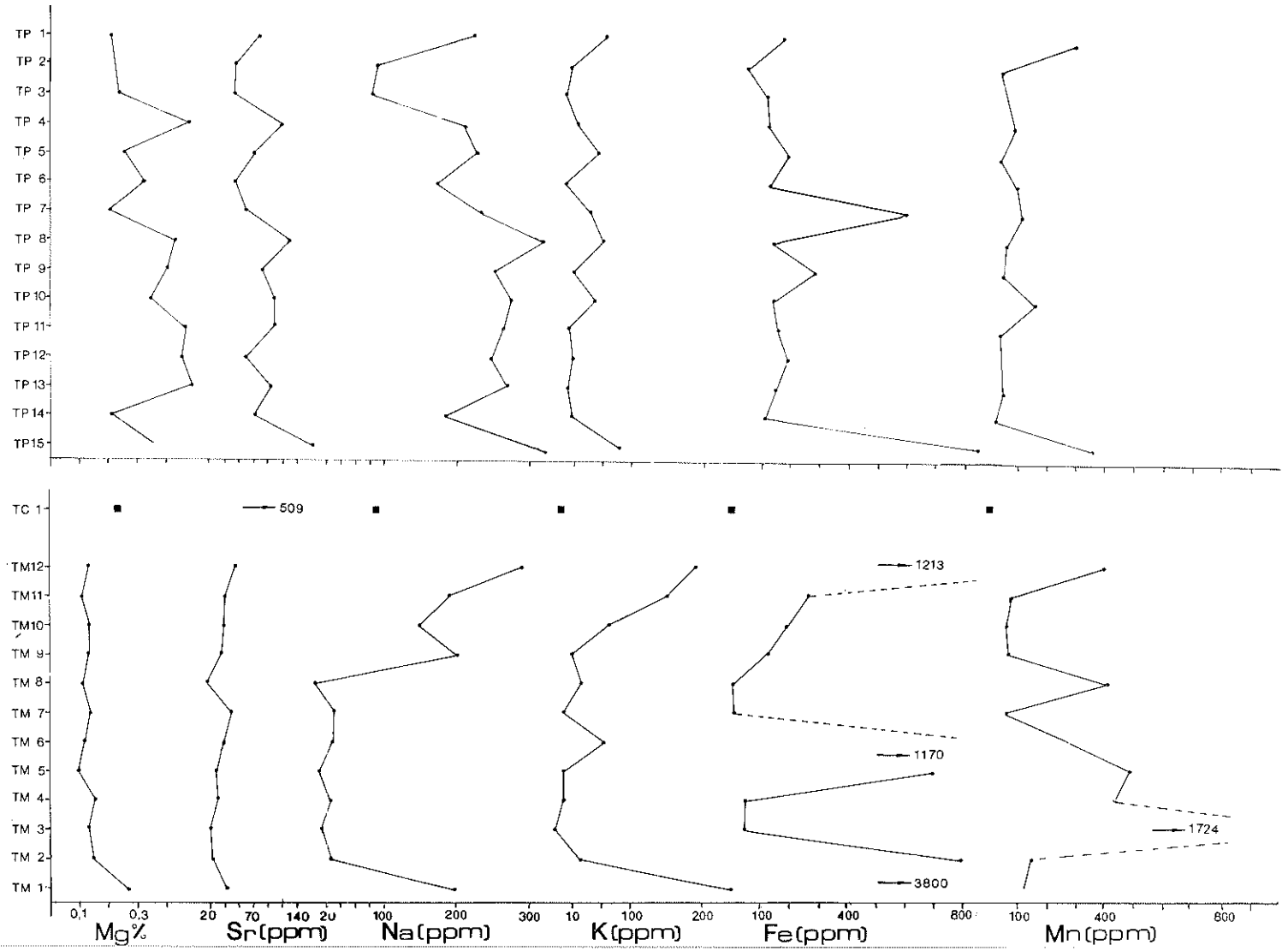

TM 12
TM 11
TM 10
TM 9
TM 8
TM 7
TM 6
TM 5
TM 4
TM 3
TM 2
TM 1
32,40
27,48
1 2 3 4 5 10
R.I. %
22 24 26 28
δ 18O VS SMOW
−5 −1 +1 +5
δ 13C VS PDB
10 20
POROSITA' %
10 30
SPATITE %

FIG. 2.


TP 1
TP 2
TP 3
TP 4
TP 5
TP 6
TP 7
TP 8
TP 9
TP 10
TP 11
TP 12
TP 13
TP 14
TP15
TC 1
509
TM12
TM11
TM10
TM 9
TM 8
TM 7
TM 6
TM 5
TM 4
TM 3
TM 2
TM 1
1213
1170
1724
3800
0,1
0,3
Mg%
20
70
140
200
Sr(ppm)
100
200
300
Na(ppm)
10
100
200
K(ppm)
100
400
800
Fe(ppm)
100
400
800
Mn(ppm)

solubile a Paestum e non esiste affatto per i campioni TM, ove la percentuale di residuo è maggiore.

Anche per quanto riguarda il magnesio abbiamo un tenore maggiore nella parte solubile di TC1 rispetto ai campioni TM, comunque sensibilmente minore alla media dei campioni TP, ed anche per Mg questa differenza ne riflette una analoga nelle acque attuali delle due zone. Il residuo insolubile è ugualmente più ricco in Mg nei campioni TP.

I tenori di Sr delle frazioni solubili dei campioni di Paestum sono risultati maggiori di tutti quelli della Valle del Tanagro, ma minori di TC1. Nelle frazioni insolubili Sr presenta comportamento opposto. Poiché le acque attuali di Contursi sono più ricche in Sr di quelle di Paestum, come risulta d'altra parte anche dalla composizione di TC1, si potrebbe pensare che le acque di deposizione dei travertini fossili fossero molto diverse dalle attuali, oppure che una gran parte di Sr originario sia andato perduto, specie nella frazione solubile dei campioni esaminati, per processi diagenetici di solubilizzazione e mobilizzazione che hanno influenzato maggiormente questo elemento rispetto agli altri. Quest'ultima ipotesi ci sembra più valida per le considerazioni riguardanti gli altri elementi. L'accentuata mobilità di Sr è evidenziata anche da SHROEDER, 1969; BAUSH, 1968; FORNASERI e GRANDI, 1968; KINSMAN, 1970; CIPRIANI et al., 1972; IRION e MULLER, 1968. I valori di SO_4 sono alquanto dispersi nella serie TM, mentre nella serie TP mostrano diminuzione dal basso verso l'alto, nelle due serie i valori medi sono simili. Il campione attuale di Contursi presenta il massimo valore; inoltre in esso è stato riscontrato anche dello zolfo libero.

Il ferro presenta nella frazione solubile valori quasi identici nei campioni di Paestum (tranne TP15, TP7, TP9) e grandi variazioni in quelli della bassa Valle del Tanagro, dove mediamente è più abbondante. Un tenore in Fe alto nella parte solubile è da mettere in relazione con un ambiente mantenuto riducente da abbondante materia organica (KRAUSCOPF, 1967); in questo senso sembra esserci per la maggior parte dei campioni una correlazione con i valori negativi di $\delta^{13}C$. Nel residuo Fe risulta arricchito rispetto al solubile e mediamente presente in percentuali simili nelle due serie.

I tenori in Mn sono in media maggiori nella Valle del Tanagro che a Paestum per la frazione solubile e viceversa per il residuo: in questo vi è dispersione nei valori soprattutto a Paestum.

Il Co e il Ni risultano poco significativi in entrambe le frazioni delle due serie. Il cromo ha una distribuzione più regolare nella frazione solubile della serie TP che in TM; per l'insolubile vi sono notevoli variazioni nell'ambito di ambedue le serie. Il rame presenta

valori mediamente più alti nei campioni TM e, per entrambe le serie, nella frazione insolubile.

Pertanto la composizione chimica dei travertini fossili per quasi tutti gli elementi sembra ancora riflettere quella delle acque di deposizione, nonostante siano intervenuti probabili variazioni ambientali e notevoli modifiche diagenetiche, testimoniate dalla variabilità (specie per i campioni TM) sia dei dati isotopici che di quelli chimici per quanto riguarda gli elementi maggiori e in tracce (soprattutto Sr ed SO_4), in ambo le frazioni (solubile ed insolubile) analizzate, nei livelli più ricchi in spatite chiara ed in quelli costituiti da materiale sciolto.

I dati esposti hanno messo in evidenza una serie di problemi legati, da una parte a processi diagenetici (p. es. presenza di spatite secondaria) e dall'altra a diverse modalità deposizionali (porosità primaria). Pertanto ci proponiamo, per il futuro , un confronto più completo con dati sedimentologici e lo studio di più serie significative in uno stesso bacino deposizionale per ricercare anche possibili variazioni laterali.

RINGRAZIAMENTI

Le analisi isotopiche sono state effettuate nel laboratorio dell'I.I.R.G. del C.N.R. di Pisa; ringraziamo il Prof. C. Panichi, del suddetto Istituto, per le utili discussioni e suggerimenti.

Ringraziamo inoltre il dott. G. Buccino e il dott. C. Porcelli per averci fornito i campioni della serie TP.

BIBLIOGRAFIA

BAUSH W. M., *Outlines of distribution of strontium in marine limestones.* In « Recent Developments in Carbonate Sedimentology in Central Europe », pp. 106-115, Berlin, Springer-Verlag (1968).

BRANCACCIO L., BUCCINO G., D'ARGENIO B., FERRERI M., FERRERI V., PANICHI C., STANZIONE D., *Stratigrafia, sedimentologia e geochimica dei travertini della bassa Valle del Tanagro* (in preparazione).

CIPRIANI N., ERCOLI A., MALESANI P., VANNUCCI S., *I travertini di Rapolano Terme (Siena).* Mem. Soc. Geol. It., vol. 11, pp. 31-46 (1972).

CORTESI C., LEONI M., *Studio sedimentologico e geochimico del travertino di un sondaggio a Bagni di Tivoli.* Period. Miner., vol. 27, pp. 407-458 (1958).

CRAIG H., *The geochemistry of the stable carbon isotopes.* Geochim. Cosmochim. Acta, vol. 3, pp. 53-92 (1953).

DEGENS E. T., *Stable isotopes distribution in carbonates.* In « Carbonate rocks. Phisical and chemical aspects », pp. 193-208, Elsevier, Amsterdam (1967).

DEMOVIC R., HOEFS J., WEDEPOHL K. H., *Geochemische Untersuchungen an Travertinen der Slowakei.* Contr. Miner. and Petr. vol. 31, pp. 15-38 (1972).

EPSTEIN S., BUSHBAM R., LOWESTAM H., UREY H., *Carbonate-water isotopic temperature scale.* Bull. Soc. Geol. Am., vol. 64, pp. 417-426 (1951).

EPSTEIN S., BUSHBAM R., LOWESTAM H., UREY H., *Revised carbonate-water temperature scale.* Bull. Soc. Geol. Am., vol. 64, pp. 1315-1326 (1953).

FORNASERI M., GRANDI L., *Nuovi dati sul contenuto in stronzio di serie calcaree italiane.* Period. Miner., vol. 3, pp. 733-775 (1968).

FRIEDMAN I., *Some investigations of the deposition of travertine from Hot Spring I; the isotopic chemistry of a travertine depositing spring.* Geochim. Cosmochim. Acta, vol. 34, pp. 1303-1314 (1970).

FRITZ P., *Composizione isotopica del carbonio e dell'ossigeno dei travertini della Toscana.* Boll. Geof. Teor. Appl., vol. 7, pp. 25-30 (1965).

GONFIANTINI R., PANICHI C., TONGIORGI E., *Isotopic disequilibria in travertine deposition.* E.P.S.L., vol. 5, pp. 55-58 (1968).

IRION G., MULLER G., *Mineralogy, petrology and chemical composition of some calcareous tufa from the Schwabische Alb, Germany.* In « Recent Developments in Carbonate Sedimentology in Central Europe », pp. 157-171 (1968).

KINSMAN D. J. J., *Diagenetic history of limestones determined from Sr^{++} distribution.* In « Carbonate Cements, The John Hopkins University Studies in Geology, n. 19, pp. 259-263 (1970).

KRAUSCOPF K., *Introduction to Geochemistry,* Mc Graw-Hill Book company, pp. 81-85, (1967).

MANFRA L., MASI U., TURI B., *Effetti isotopici nella diagenesi dei travertini.* Geol. Rom., vol. 13, pp. 147-155 (1974).

MANFRA L., MASI U., TURI *B., La composizione isotopica dei travertini del Lazio.* Geol. Rom., vol. 15, pp. 127-174 (1976).

MCCREA J. M., *On the isotopic chemistry of carbonates and a paleotemperature scale.* J. Chem. Phys., vol. 18, pp. 849-857 (1950).

O'NEIL J. R., CLAYTON N., MAYEDA T. K., *Oxygen isotope fractionation in divalent metal carbonates.* J. Chem. Phys., vol. 451, pp. 5547-5558 (1969).

PANICHI C., TONGIORGI E., *Carbon isotopic composition of CO_2 from springs, fumaroles, mofetes, and travertines of central and southern Italy: a preliminary prospection method of geothermal area.* 2nd Symposium on the development and use of geothermal resources, San Francisco May 19-29, pp. 815-824 (1975).

PERSOZ F., REMANE J., *Mineralogie et geochimie des formations a la limite Jurassique-Cretace dans le Jura et le Bassin Vocontien.* Eclogae Geol. Helv., vol. 69, pp. 1-38 (1976).

SAVELLI C., WEDEPOHL K. H., *Geochemische Untersuchungen an Sinterkalken (Travertinen).* Contr. Min. Petr., vol. 21, pp. 238-256 (1969).

SHROEDER J. H., *Experimental dissolution of calcium, magnesium and strontium from recent biogenic carbonates: a model of diagenesis.* J. Sed. Petr. vol., 39, pp. 1057-1073 (1969).

TALENTI M., BORGIOLI N., *L'acqua ipotermale di S. Antonio al Monte (Terme Rosapepe) a Contursi (Salerno).* Ann. Chim. Appl., vol. 38, pp. 195-211 (1948).

TAYLOR H. P., FRECHEN J., DEGENS D., *Oxygen and carbon isotope studies of carbonatites from the Leacher District, West Germany, and the Alno District, Sweden.* Geochim. Cosmochim. Acta, vol. 31, pp. 407-418 (1967).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, M. Covello e P. Corradini.

Applicazioni pseudoaffini tra varietà differenziabili e loro proprietà

Nota di Rosa Anna Marinosci (Lecce) *
presentata dal socio corrispondente Vittorio Dalla Volta

(Adunanza del 6 maggio 1978)

Summary. — Let M and M′ be manifolds provided with linear pseudoconnections Γ and Γ' respectively; a differential mapping $f : M \to M'$ is a pseudoaffine mapping if f maps each parallel vector field along each curve γ of M into a parallel vector field along the curve $f \circ \gamma$. In this paper some properties of pseudoaffine mappings are studied; in particular pseudoaffine transformations and pseudoaffine infinitesimal transformations of a differentiable manifold M, are considered.

Introduzione.

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione n, se $\mathfrak{F}(M)$ è l'algebra delle funzioni differenziabili su M, si denoterà con $\mathfrak{D}^r_s(M)$ (r, s interi non negativi) l'$\mathfrak{F}(M)$-modulo dei campi tensoriali differenziabili su M di tipo (r, s); se p è un punto di M, si denoterà con $T^r_s(p)$ (r, s interi non negativi) lo spazio dei tensori di tipo (r, s) sullo spazio $T_p(M)$ tangente in p ad M. Inoltre se $f : M \to M'$ è una applicazione differenziabile tra due varietà differenziabili M ed M′, si indicherà con $(f_*)_p$ il differenziale di f nel punto $p \in M$; se poi f è un diffeomorfismo ed X è un campo di vettori su M, si denoterà con $f_*(X)$ il campo di vettori su M′ definito da:

$$(f_*(X))_{p'} = (f_*)_{f^{-1}(p')}(X_{f^{-1}(p')}) \text{ per ogni } p' \in M'.$$

In [1] è stata introdotta la nozione di pseudoconnessione lineare su uno spazio fibrato principale (P, G, Ψ, M, Π), come un campo tensoriale differenziabile Γ di specie (1,1) tale che:

a) $\Gamma_u(X_u) = 0$ per ogni $u \in P$ e per ogni vettore tangente X_u verticale.

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

b) $\Gamma_{ua}\,(\Psi_a)_{*u}\,(X_u) = (\Psi_a)_{*u}\,\Gamma_u(X_u)$ per ogni $u \in P$ e per ogni $a \in G$.

Se in particolare il fibrato principale è quello dei riferimenti lineari sopra M, Γ si chiama pseudoconnessione lineare su M, ed è questa la definizione a cui si farà riferimento nel seguito.

Nel presente lavoro dopo aver introdotto la nozione di applicazione pseudoaffine tra varietà differenziabili, se ne studiano alcune proprietà geometriche: ad esempio si trova che ogni applicazione pseudoaffine trasforma geodetiche in geodetiche, commuta con l'applicazione esponenziale, ecc.

In particolare si studiano le trasformazioni pseudoaffini di una varietà differenziabili M e si trova una relazione tra la nozione di trasformazione pseudoaffine e quella di pseudoconnessione lineare invariante rispetto ad una trasformazione di M. Infine il lavoro si conclude con lo studio delle trasformazioni infinitesime pseudoaffini di una varietà differenziabile M, cioè di quei campi di vettori che generano gruppi locali di trasformazioni locali pseudoaffini di M; si dimostra che l'insieme $A(M)$ delle trasformazioni infinitesime pseudoaffiini di M è una sottoalgebra di $\mathfrak{D}_1(M)$.

1. - Applicazioni pseudoaffini tra varietà differenziabili.

Siano M ed M′ varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$ e dimensioni rispettivamente n ed n'; siano inoltre Γ ed Γ' pseudoconnessioni lineari (cfr. [1]) rispettivamente su M ed M′; nel seguito si denoteranno con $A(A')$ il campo tensoriale di $\mathfrak{D}_1^1(M)$ $(\mathfrak{D}_1^1(M'))$ associato a Γ (Γ') e con $\nabla_{X(t)}\,Y$ $(\nabla'_{X'(t)}\,Y')$ la pseudoderivata covariante di un campo di vettori [1] $Y : t \to Y(t)$ $(Y' : t \to Y'(t))$ lungo la curva [1] $\gamma : I \to M$ $(\gamma' : I' \to M')$ nella direzione di $X(t)$ $(X'(t))$ essendo $X : t \to X(t)$ $(X' : t \to X'(t))$ un campo di vettori lungo la curva γ (γ') tale che:

$$A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t)$$

$$(A'_{\gamma'(t)}\,(X'(t)) = \dot{\gamma}'(t))$$

Mantenendo le notazioni ora introdotte si da la seguente definizione:

Definizione 1.1. — *Siano* Γ *e* Γ' *pseudoconnessioni lineari sulle varietà differenziabili* M *ed* M′ *rispettivamente; sia* $f : M \to M$ *una ap-*

[1] Si sottintende sia qui che nel seguito che i campi di vettori e le curve sono campi di vettori differenziabili e curve differenziabili.

plicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, *si dice che* f *è un'applicazione pseudoaffine se per ogni curva* $\gamma : I \to M$ *su* M, *ogni campo di vettori parallelo lungo* γ, *si trasforma tramite la* f *in un campo di vettori parallelo lungo la curva* $\gamma' = f \circ \gamma$.

Più esplicitamente la def. 1.1 afferma che se $X : t \to X(t)$ è un campo di vettori lungo la curva $\gamma : I \to M$, tale che $A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t)$ ed $Y : t \to Y(t)$ è un campo di vettori lungo γ tale che:

$\tau_{\gamma, X}^{(t_1, t_2)}(Y(t_1)) = Y(t_2)$ per ogni $t_1, t_2 \in I$ (essendo $\tau_{\gamma, X}^{(t_1, t_2)}$ il trasporto parallelo di $T_{\gamma(t_1)}(M)$ in $T_{\gamma(t_2)}(M)$ associato alla curva γ e al campo di vettori di X - cfr. [1]), allora devono aversi le due seguenti uguaglianze:

$$A'_{\gamma'(t)}(X'(t)) = \dot{\gamma}'(t) \qquad \forall\, t \in I$$

$$\tau_{\gamma', X'}^{(t_1, t_2)}(Y'(t_1)) = Y'(t_2) \qquad \forall\, t_1, t_2 \in I$$

essendo $X'(t) = (f_*)_{\gamma(t)}(X(t))$ ed $Y'(t) = (f_*)_{\gamma(t)}(Y(t))$.

PROPOSIZIONE 1.1. — *Sia* $f : M \to M$ *una applicazione pseudoaffine, se* $\gamma : I \to M$ *è una* X*-geodetica*[2] *allora la curva* $\gamma' = f \circ \gamma$ *è una* X'*-geodetica, essendo* $X' : t \to X'(t)$ *il campo di vettori lungo* γ' *definita da:* $X'(t) = (f_*)_{\gamma(t)}(X(t))$ *per ogni* $t \in I$.

Dim. — Se γ è una X-geodetica il campo $X : t \to X(t)$ è un campo di vettori paralleli lungo γ, essendo f una applicazione pseudoaffine il campo $X' : t \to X'(t)$ risulta parallelo lungo la curva γ', da cui si conclude che γ' è una X-geodetica.

COROLLARIO 1.1. — *Se* $f : M \to M'$ *è un'applicazione pseudoaffine allora* f *commuta con l'applicazione esponenziale*[3], *cioè:*

$$f \circ \exp X_o = \exp \circ (f_*)_p(X_o)$$

per ogni punto $p \in M$ *e per ogni vettore tangente* $X_o \in T_p(M)$.

[2] Per la definizione di X-geodetica si veda [3].
[3] Per la definizione di applicazione esponenziale si veda [3].

Dim. — Sia p un punto di M ed X_o un vettore tangente in p ad M; è noto che esiste un'unica X-geodetica γ_X definita in un intorno aperto di 0 in R contenente l'unità, e tale che si abbia:

$$\gamma_X(0) = p$$
$$X(0) = X_o$$

γ_X si chiama geodetica di condizioni iniziali (p, X_o).

L'applicazione $X \to \gamma_X(1)$ definita in un opportuno intorno aperto di $T(M)$, contenente M, ed a valori in M, si chiama applicazione esponenziale; ciò premesso se $f : M \to M'$ è una applicazione pseudoaffine si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\exp((f_*)_p(X_o)) = (f \circ \gamma)_{X'}(1) =$$
$$= f(\gamma_X(1)) =$$
$$= f(\exp X_o)$$

dove $X' : t \to X'(t)$ è il campo di vettori lungo la curva $f \circ \gamma$ tale che: $X'(t) = (f_*)_{\gamma(t)}(X(t))$ per ogni $t \in I$.

DEFINIZIONE 1.2. — *Sia* $f : M \to M'$ *un'applicazione differenziabile, un campo di vettori* X *su* M *è f-related con un campo di vettori* X′ *su* M′ *se è soddisfatta la seguente condizione*:

$$(f_*)_x(X_x) = X'_{f(x)} \qquad \text{per ogni } x \in M$$

PROPOSIZIONE 1.2. — *Sia* $f : M \to M'$ *una applicazione pseudoaffine, siano* X, Y, Z *campi di vettori su* M *f-related rispettivamente con i campi di vettori* X′, Y′, Z′ *su* M′, *allora valgono le seguenti proprietà*:

(a)	$A(X)$	*è f-related con*	$A'(X')$
(b)	$\nabla_X Y$	*è f-related con*	$\nabla'_{X'} Y'$
(c)	$T(X, Y)$	*è f-related con*	$T'(X', Y')$

essendo T *e* T′ *i campi tensoriali di torsione*[4] *rispettivamente di* Γ *e* Γ′

(d)	$R(X, Y)Z$	*è f-related con*	$R'(X', Y')Z'$

essendo R *ed* R′ *le applicazioni di curvatura*[5] *rispettivamente di* Γ *e* Γ′.

[4] Si veda per la torsione [2].
[5] Si veda per la curvatura [2].

Dim.

(a) Sia x un punto qualunque di M, si considerino le geodetiche γ di condizioni iniziali (x, X_x) e γ' di condizioni iniziali $(f(x), (f_*)_x(X_x))$. Poiché f è una applicazione pseudoaffine, per la prop. 1.1 trasforma geodetiche di M in geodetiche di M'; si hanno allora le seguenti uguaglianze:

$$A'_{f(x)}\ ((f_*)_x(X_x)) = \dot{\gamma}'(t) =$$

$$= \widehat{(f \circ \gamma)}(t) = (f_*)_x(\dot{\gamma}(t)) = (f_*)_x(A_x(X_x)).$$

(b) Siano x_0 un punto di M e $\gamma : [-\varepsilon, +\varepsilon] \to M$ la curva integrale di X tale che $\gamma(0) = x_0$; tenendo presente la definizione di pseudoderivata covariante associata ad una pseudoconnessione lineare [6] si ha:

$$(\nabla'_{X'}\ Y')_{f(x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (\tau'^{(h,0)}_{\gamma',X'}\ (Y'(h) - Y'(0))) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (\tau'^{(h,0)}_{\gamma',X'}\ ((f_*)_{\gamma(h)}(Y(h)) - (f_*)_{x_0}(Y(0))) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} ((f_*)_{\gamma(0)}\ (\tau^{(h,0)}_{\gamma,X}\ (Y(h)) - (f_*)_{\gamma(0)}(Y(0))) =$$

$$= (f_*)_{\gamma(0)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (\tau^{(h,0)}_{\gamma,X}\ (Y(h)) - Y(0)) =$$

$$= (f_*)_{\gamma(0)}\ (\nabla_X\ Y)_{x_0}$$

essendo γ' la curva $f \circ \gamma$ e $\tau^{(h,0)}_{\gamma,X}$ $(\tau^{(h,0)}_{\gamma',X'})$ lo spostamento parallelo di $T_{\gamma(h)}(M)$ $(T_{\gamma'(h)}(M'))$ in $T_{x_0}(M)(T_{f(x_0)}(M'))$ rispetto alla curva γ (γ') ed al campo di vettori X (X').

(c) Si osservi che se X ed Y sono campi di vettori su M, f-related rispettivamente con i campi di vettori X', Y' su M', consegue che anche il campo [X, Y] è f-related con il campo [X', Y'] e quindi per la (a) già dimostrata si ha che:

$$[A(X), A(Y)] \text{ è f-related con } [A'(X'), A'(Y')].$$

Si ricordi inoltre che il campo tensoriale di torsione T associato ad una pseudoconnessione lineare Γ su M, sulla coppia (X, Y) ha

[6] Cfr. [1].

espressione:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]_A$$

essendo

$$[X, Y]_A = [A(X), Y] + [X, A(Y)] - A[X, Y].$$

Ciò premesso fissato un punto $x \in M$ si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}(T'(X', Y'))_{f(x)} &= (\nabla'_{X'} Y')_{f(x)} - (\nabla'_{Y'} X')_{f(x)} - ([X', Y']_{A'})_{f(x)} = \\ &= (f_*)_x (\nabla_X Y)_x - (f_*)_x (\nabla_Y X)_x - \{[A'(X'), Y']_{f(x)} + \\ &+ [X', A'(Y')]_{f(x)} - (A'[X', Y'])_{f(x)}\} = \\ &= (f_*)_x (\nabla_X Y)_x - (f_*)_x (\nabla_Y X)_x - \{(f_*)_x [A(X), Y]_x + \\ &+ (f_*)_x [X, A(Y)]_x - (f_*)_x (A([X, Y]))_x\} = (f^*)_x (T(X, Y))_x\end{aligned}$$

da cui la tesi.

(d) La dimostrazione è analoga alla (c), purché si tenga presente l'espressione dell'applicazione di curvatura:

$$R(X, Y) Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]_A}) Z .$$

Nel seguito se f è un diffeomorfismo di una varietà differenziabile M, f si chiamerà trasformazione differenziabile di M.

DEFINIZIONE 1.3. — *Una trasformazione pseudoaffine di una varietà differenziabile* M *è una trasformazione differenziabile di* M, *che è anche una applicazione pseudoaffine rispetto ad una assegnata pseudoconnessione lineare* Γ *su* M.

Siano f una trasformazione differenziabile di una varietà differenziabile M e Γ una pseudoconnessione lineare su M, tramite f e Γ si costruisce su M una pseudoconnessione lineare $\tilde{\Gamma}$, al modo seguente: se A è il campo tensoriale su M associato a L e ∇ è la pseudoderivata covarianza di Γ si denoteranno con $\tilde{A}$ e $\tilde{\nabla}$ rispettivamente il campo tensoriale su M e l'$\mathfrak{F}(M)$-omomorfismo $X \to \nabla_X$ di $\mathfrak{D}_1(M)$ in $\mathrm{End}_R(\mathfrak{D}_1(M))$ così definito:

$$\tilde{\nabla}_X Y = f_*^{-1} (\nabla_{f_*(X)} f_*(Y))$$

$$\tilde{A}(X) = f_*^{-1} (A(f_*(X)))$$

per ogni X, Y $\in \mathfrak{D}_1(M)$. - La coppia $(\tilde{A}, \tilde{\nabla})$ definisce su M una pseudoconnessione lineare $\tilde{\Gamma}$ che si chiama la trasformata di Γ tramite la f; se $\Gamma = \tilde{\Gamma}$, Γ è invariante rispetto alla trasformazione f.

Una relazione tra la nozione di trasformazione pseudoaffine e quella di pseudoconnessione lineare invariante, è messa in luce dalla seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1.3. — *Sia f una trasformazione differenziabile di una varietà dierenziabile* M, *e sia* Γ *una pseudoconnessione lineare su* M, *f è una trasformazione pseudoaffine rispetto a* Γ *se e solo se* Γ *è invariante rispetto ad f.*

Dim. — Sia f una trasformazione pseudoaffine di M; per ogni X, Y $\in \mathfrak{D}_1(M)$, essendo f una trasformazione differenziabile, risulta: X f-related con $f_*(X)$ ed Y f-related con $f_*(Y)$; inoltre essendo f pseudoaffine risulta anche $A(X)$ f-related con $A(f_*(X))$ e $\nabla_X Y$ f-related con $\nabla_{f_*(X)} f_*(Y)$. Ciò premesso si ha

$$\tilde{A}(X) = f_*^{-1}(A(f_*(X))) = f_*^{-1}(f_*(A(X))) = A(X)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = f_*^{-1}(\nabla_{f_*(X)} f_*(Y)) = f_*^{-1}(f_* \nabla_X Y) = \nabla_X Y$$

da cui si conclude che $\Gamma = \tilde{\Gamma}$.

Viceversa sia Γ invariante rispetto ad f; sia inoltre Y un campo di vettori parallelo lungo una curva $\gamma : I \to M$ nella direzione di un campo di vettori X lungo γ; si consideri un qualunque punto $t_o \in I$, se $\gamma(t_o) \neq 0$ esistono un numero reale positivo ε e due campi vettoriali X′ e Y′ su M tali che

$$X'_{\gamma(t)} = X(t), \quad Y'_{\gamma(t)} = Y(t) \qquad \forall\, t \in [t_o - \varepsilon,\ t_o + \varepsilon]$$

ed essendo per ipotesi

$$A(f_*(Y')) = f_*(A(Y'))$$

$$\nabla_{f_*(X')} f_*(Y') = f_*(\nabla_{X'} Y')$$

si ha:

$$\nabla_{(f_*)_{\gamma(t)}(X(t))} f_*(Y) = 0 \qquad \forall\, t \in [t_o - \varepsilon,\ t_o + \varepsilon]$$

se poi $\gamma(t_o) = 0$ si ha anche facilmente che

$$\nabla_{(f_*)_{\gamma(t)}(X(t_o))} f_*(Y) = 0$$

e per l'arbitrarietà di t_0 si conclude che $f_*(Y)$ è parallelo lungo la curva $f \circ \gamma$ nella direzione $f_*(X)$ e quindi f è una trasformazione pseudoaffine.

OSSERVAZIONE 1.1. — Se M è una varietà differenziabile, si denoterà con η il fibrato $L(M) \xrightarrow{\pi} M$ dei riferimenti lineari sopra M. Ogni trasformazione differenziabile f di M, induce in modo canonico una trasformazione differenziabile $\tilde{f}$ della varietà differenziabile $L(M)$ dei riferimenti lineari su M, tale che per ogni $x \in M$ e per ogni $u = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ riferimento lineare in x, risulti:

$$\tilde{f}(u) = ((f_*)_x(X_1), \ldots, (f_*)_x(X_n)).$$

$\tilde{f}$ è un automorfismo del fibrato η quindi lascia invariante ogni campo fondamentale su $L(M)$. Se f è una trasformazione pseudoaffine allora $\tilde{f}$ trasforma il sottospazio orizzontale di $T_u(L(M))$ nel sottospazio orizzontale di $T_{\tilde{f}(u)}(L(M))$, per ogni riferimento lineare $u \in L(M)$.

Si richiamerà ora la definizione di campo di vettori basico rispetto ad una assegnata pseudoconnessione lineare Γ su una varietà differenziabile M: per ogni $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in R^n$, si chiama campo di vettori basico associato a ξ il campo di vettori $B(\xi)$ su $L(M)$ definito per ogni $u = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in L(M)$ da:

$$(B(\xi))_u = s_u(\xi^i X_i)$$

essendo $s_u : T_{\pi(u)}(M) \to H_u$[7] il sollevamento orizzontale definito per ogni $X \in T_{\pi(u)}(M)$ da: $s_u(X) = \Gamma_u(\bar{X})$ ove $\bar{X}$ è un vettore tangente di $T_u(L(M))$ tale che $(\pi_*)_u(\bar{X}) = X$.

Ciò premesso si dimostra la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1.4. — *f è una trasformazione pseudoaffine su una varietà differenziabile* M, *se e solo se l'automorfismo $\tilde{f}$ indotto da f nel fibrato dei riferimenti lineari di* M, *lascia invariante ogni campo di vettori basico.*

Sia $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in R^n$, se f è una trasformazione pseudoaffine e se $B(\xi)$ è il campo α di vettori basico associato a ξ, per ogni $u = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ di $L(M)$ si ha:

$$(\tilde{f}_*)_u((B(\xi))_u) = (\tilde{f}_*)_u(s_u(\xi^i X_i)) =$$

$$= (\tilde{f}_*)_u(\Gamma_u(\bar{X}_u)) = \Gamma_{\tilde{f}(u)}((\tilde{f}_*)_u(\bar{X}_u)) =$$

[7] H_u è il sottospazio orizzontale di $T_u(L(M))$, ossia $H_u = \Gamma_u(T_u(L(M)))$.

$$= s_{\bar{f}(u)}((f_*)_{\pi(u)}(\xi^i X_i)) = s_{\bar{f}(u)}(\xi^i (f_*)_{\pi(u)}(X_i)) =$$
$$= (B(\xi))_{\bar{f}(u)} .$$

essendo $(\pi_*)_u(\bar{X}) = \xi^i X_i \in T_{\pi(u)}(M)$.

Viceversa sia f una trasformazione differenziabile di M che lascia invariante ogni campo di vettori basico; sia $\bar{X}$ un campo di vettori su L(M), e sia $u = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in L(M)$; poiché $(\pi_*)_u(\bar{X}_u) = \xi^i X_i$ con $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in R^n$, si ha:

$$(\bar{f}_*)_u((B(\xi))_u) = (B(\xi)_{\bar{f}(u)}$$

d'altra parte essendo $(B(\xi)_{\bar{f}(u)} = \Gamma^1_{\bar{f}(u)}((\bar{f}_*)_u(\bar{X}_u))$ e $(\bar{f}_*)_u((B(\xi))_u) = (\bar{f}_*)_u(\Gamma_u(\bar{X}_u))$, si ottiene l'altra eguaglianza

$$\Gamma_{\bar{f}(u)}((\bar{f}_*)_u(\bar{X}_u)) = (\bar{f}_*)_u(\Gamma_u(\bar{X}_u))$$

da cui si conclude che Γ è invariante rispetto a f e quindi per la prop. 1.3 f è una trasformazione pseudoaffine.

PROPOSIZIONE 1.5. — *L'insieme* $\mathcal{G}(\Gamma)$ *delle trasformazioni pseudoaffini di una varietà differenziabili* M, *rispetto ad una assegnata pseudoconnessione* Γ *su* M, *è un gruppo rispetto alla usuale legge di composizione di applicazioni.*

Dim. — Si omette per brevità.

2. - GRUPPI LOCALI AD UN PARAMETRO DI TRASFORMAZIONI LOCALI PSEUDOAFFINI DI UNA VARIETÀ DIFFERENZIABILE.

In ciò che segue si continuerà ad indicare con M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione n, con L(M) l'insieme dei riferimenti lineari su M e con η il fibrato $L(M) \xrightarrow{\pi} M$ dei riferimenti lineari associati ad M, di gruppo strutturale $G = GL(n, R)$. Ciò premesso si enuncia la seguente proposizione che sarà utile nel seguito:

PROPOSIZIONE 2.1. — *Ogni campo di vettori* X *su* M *induce su* L(M) *uno ed uno solo campo di vettori* $\bar{X}$ *soddisfacente le seguenti proprietà*:

a) $\bar{X}$ è *invariante rispetto a* $G = GL(n, R)$

b) $L_{\tilde{X}}\,\theta = 0$ [8]

c) $\tilde{X}$ è Π-*related con* X

Viceversa ogni campo di vettori $\tilde{X}$ *su* L(M) *soddisfacente* a) *e* b) *induce su* M *uno ed uno solo campo di vettori* X *tale che* $\tilde{X}$ *è* Π-*related con* X.

Per la dimostrazione della prop. 2.1 si rimanda a [5] pag. 230.

DEFINIZIONE 2.1. — *Sia* Γ *una pseudoconnessione lineare su* M; *un campo di vettori* $X \in \mathfrak{D}_1(M)$ *si dice che è una trasformazione infinitesima pseudoaffine se per ogni punto* $p \in M$ *il gruppo locale ad un parametro* $\Psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U_p \to M$ *generato da* X *in un intorno aperto* U_p *del punto p, soddisfa alla proprietà:*

« *Per ogni* $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ $\Psi_t : U_p \to M$ *è una applicazione pseudoaffine* ».

È bene sottolineare che nella def. 2.1 si sottintende su U_p la pseudoconnessione $\Gamma|_{U_p}$ restrizione di Γ all'intorno U_p.

PROPOSIZIONE 2.1. — *Sia* Γ *una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile* M; *un campo di vettori* X *su* M *è una trasformazione infinitesima pseudoaffine se e solo se la derivata di* Lie $L_{\tilde{X}}\ \Gamma$ *è uguale al campo tensoriale nullo di* $\mathfrak{D}^1_1(L(M))$.

Dim. — Sia X una trasformazione infinitesima pseudoaffine di M; se p è un qualunque punto di M, considerato il gruppo locale ad un parametro $\varphi : I_\varepsilon \times U_p \to M$ generato da X, si ha che l'applicazione $\tilde{\varphi} : I_\varepsilon \times \Pi^{-1}(U_p) \to L(M)$ è il gruppo locale ad un parametro che genera $\tilde{X}$, inoltre risulta $\Gamma_{\tilde{\varphi}_t(u)}((\tilde{\varphi}_t)_{*u}(Y_u)) = (\tilde{\varphi}_t)_{*u}(\Gamma_u(Y_u))$ per ogni $u \in T_u(\Pi^{-1}(U_p))$ e per ogni $Y_u \in T_u(\Pi^{-1}(U_p))$; ma allora per il corollario 3.7 pag. 33 di [5] consegue che $L_{\tilde{X}}\,\Gamma$. Analogamente si dimostra il viceversa.

PROPOSIZIONE 2.2. — *Sia* Γ *una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile* M *di dimensione n; per ogni* $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in R^n$ *e per ogni trasformazione infinitesima pseudoaffine* X *di* M, *il campo di vettori* $[\tilde{X}, B(\xi)]$ *è un campo di vettori orizzontale.*

Dim. — Poiché ogni campo di vettori basico è orizzontale, per ogni $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in R^n$ e per ogni punto $p \in M$ esistono un in-

[8] $L^*_{\tilde{X}}\,\theta$ indica la derivata di Lie della forma canonica θ di η rispetto al campo di vettori $\tilde{X}$ (cfr. [5] pag. 29 e pag. 118).

torno U di p ed un campo differenziabile Z su $\Pi^{-1}(U)$ tali che $B(\xi)|_{\Pi^{-1}(U)} = \Gamma|_{\Pi^{-1}(U)}(Z)$; d'altra parte se X è una trasformazione infinitesima di M, per la prop. 2.1 risulta:

$$(L_{\tilde{X}|\Pi^{-1}(U)}\ \Gamma|_{\Pi^{-1}(U)})(Z) = 0$$

essendo però

$$(L_{\tilde{X}|\Pi^{-1}(U)}\ \Gamma|_{\Pi^{-1}(U)})(Z) = [\tilde{X}|_{\Pi^{-1}(U)}\ ,\ \Gamma|_{\Pi^{-1}(U)}(Z)] - \\ - \Gamma|_{\Pi^{-1}(U)}([\tilde{X}|_{\Pi^{-1}(U)}\ ,\ Z])$$

si conclude che

$$[\tilde{X}|_{\Pi^{-1}(U)}\ ,\ B(\xi)|_{\Pi^{-1}(U)}] = \Gamma|_{\Pi^{-1}(U)}([\tilde{X}|_{\Pi^{-1}(U)}\ ,\ Z])$$

da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 2.3. — *L'insieme* $A(M)$ *delle trasformazioni infinitesime pseudoaffini di una varietà differenziabile* M *è una sottoalgebra di* $\mathfrak{D}_1(M)$.

Dim. — Sia $\mathcal{A}(L(M))$ l'insieme dei campi di vettori $\bar{X}$ su $L(M)$ che soddisfano alle tre condizioni: 1) $\bar{X}$ è invariante per l'azione di $GL(n, R)$; 2) $L_{\bar{X}}\,\theta = 0$; 3) $L_{\bar{X}}\,\Gamma = 0$; essendo $L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ l'insieme $\mathcal{A}(L(M))$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{D}_1(L(M))$. D'altra parte l'applicazione $\mathfrak{D}_1(M) \to \mathfrak{D}_1(L(M))$ è un omomorfismo iniettivo, inoltre se $X \to \tilde{X}$ $X \in A(M)$ allora $\tilde{X} \in \mathcal{A}(L(M))$ e viceversa se $\bar{X} \in \mathcal{A}(L(M))$ allora poiché $\bar{X}$ verifica la 1) e 2) esiste uno ed uno solo campo di vettori X su M tale che $\tilde{X} = \bar{X}$; inoltre poiché $L_{\bar{X}}\,\Gamma = \Gamma_{\bar{X}}\,\Gamma = 0$, X è una trasformazione infinitesima pseudoaffine cioè $X \in A(M)$, si conclude allora che $A(M)$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{D}_1(M)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. DI COMITE, *Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (VI), vol. I C (1974), pp. 109-142.

[2] C. DI COMITE, *Sulla curvatura delle Pseudoconnessioni su uno spazio fibrato principale differenziabile*, Accademia Nazion. dei XL-Scrie, IV, vol. XXIV-XXV (1974), pp. 1-19.

[3] C. DI COMITE, *Geodetiche rispetto ad una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile*, Le Matematiche Sem. mat. dell'Univ. di Catania, Vol. XXX, fasc. II (1975). pp. 320-337.

[4] C. Di Comite, *Pseudoconnessioni affini,* Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. Napoli, Serie IV,, vol. XLIII, 1976.

[5] S. Kobayashi-K. Nomizu, *Foundation of differential geometry,* vol. I (1963), Interscience Publishers.

[6] S. Kobayashi, *Transformation Groups in differential geometry,* (1972), Springer-Verlag.

[7] R. Marinosci, *Invarianza della derivata totale di Lie per simmetrie,* Atti del Sem. Mat. e Fis.. Univ. Modena, XXIII (1974), pp. 262-268.

[8] R. Marinosci, *Pseudoconnessioni lineari invarianti su uno spazio omogoneo riduttivo,* B.U.M.I. (5), 14 A (1977), pp. 382-390.

[9] R. Marinosci. *Pseudoconnession lineari invarianti canoniche su uno spazio omogeneo riduttivo,* Rendiconti del Seminario Mat. dell'Univ. e del Politecnico di Torino (1977, vol. 35 (1976-77), pp. 475-484.

[10] A. Sanini, *Trasformazioni pseudoaffini di una varietà differenziabile,* Atti dell'Acc. Naz. dei Lincei, vol. LVI, fasc. 4 (1974).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Dalla Volta, A. Franchetta e G. Panella.

Due osservazioni concernenti forte paracompattezza e numerabile paracompattezza

Nota di FERNANDO BOMBINI *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 3 giugno 1978)

RIASSUNTO. — Nella presente nota si stabiliscono condizioni sufficienti, coinvolgenti ricovrimenti aperti e localmente numerabili, affinché uno spazio topologico sia numerabilmente paracompatto e fortemente paracompato.

SUMMARY. — In this note, two results are established concerning strong-paracompactness and countable-paracompactness of topological spaces endowed with suitable locally-countable open coverings fulfilling appropriate countable-compactness conditions.

Nella presente nota (nel n. 2) si presentano due risultati concernenti forte paracompattezza e numerabile paracompattezza per spazi topologici, dotati di ricovrimenti aperti e localmente numerabili con opportune ed accettabili condizioni relative alla frontiera nel primo caso e all'aderenza nel secondo caso.

Il materiale preparatorio, nonché opportuni richiami, vengono presentati nel n. 1.

1. - RICOVRIMENTI LOCALMENTE FINITI

Si richiamono preliminarmente, per comodità del lettore le definizioni ed i risultati di cui si farà uso sistematico nel seguito mentre per quanto concerne terminologia e simboli ci si atterrà a quelli di [1] e [7] [1].

* Istituto di Analisi Matematica - Università - Bari.

[1] I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

DEFINIZIONE 1. — *Se* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è una famiglia di parti dell'insieme* E *e se* X *è una qualunque parte di* E, *chiamasi stella di* X *in* I *per* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *l'insieme degli* $\iota \in I$ *tali che* $U_\iota \cap X \neq \emptyset$.

PROPOSIZIONE 1. — *Siano* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *una famiglia di parti dell'insieme* E, X *ed* Y *due parti di* E, I^*_X *e* I^*_Y *rispettivamente le stelle di* X *ed* Y *in* I *per* $(U_\iota)_{\iota\in I}$. *Allora se* $X \subset Y$ *risulta* $I^*_X \subset I^*_Y$.

DEFINIZIONE 2. — *Una famiglia* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *di parti dell'insieme* E *si dice finita a stella se per ogni* $\lambda \in I$ *la stella* $I^*_{U_\lambda}$ *di* U_λ *in* I *per* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è finita.*

PROPOSIZIONE 2. — *Siano* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *e* $(V_\iota)_{\iota\in I}$ *due famiglie di parti dell'insieme* E *tali che per ogni* $\iota \in I$ *risulti* $U_\iota \subset V_\iota$.

Allora se $(V_\iota)_{\iota\in I}$ *è finita a stella* (def. 2) *anche* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è finita a stella.*

DEFINIZIONE 3. — *Una famiglia* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *di parti dello spazio topologico* E *si dice localmente finita* (risp. *localmente numerabile*) *se per ogni* $x \in E$ *esiste* V *intorno di* x *tale che sia finito* (risp. *numerabile*) *l'insieme degli* $\iota \in I$ *per i quali risulti* $A_\iota \cap V \neq \emptyset$.

PROPOSIZIONE 3. — *Sia* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *una famiglia di parti di uno spazio topologico* E. *Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è localmente finita* (risp. *numerabile*) (def. 3),

b) *Per ogni* $x \in E$ *esiste un intorno* V *di* x *tale che la stella* I^*_V *di* V *in* I *per* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ (def. 1) *sia finita* (risp. *numerabile*),

c) *Esiste un ricovrimento aperto* $(U_k)_{k\in K}$ *di* E *tale che per ogni* $k \in K$ *la stella* $I^*_{U_k}$ di U_k *in* I *per* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *sia finita* (risp. *numerabile*).

PROPOSIZIONE 4. — *Siano* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *e* $(B_\iota)_{\iota\in I}$ *due famiglie di parti di uno spazio topologico* E *tali che per ogni* $\iota \in I$ *risulti* $A_\iota \subset B_\iota$. *Allora se* $(B_\iota)_{\iota\in I}$ *è localmente finita* (def. 3) *anche* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è localmente finita.*

PROPOSIZIONE 5. — *Sia* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *una famiglia localmente finita di parti di uno spazio topologico* E. *Allora* $\overline{\bigcup_{\iota\in I} A_\iota} = \bigcup_{\iota\in I} \bar{A}_\iota$.

COROLLARIO. 1. — *La riunione di una famiglia localmente finita di sottoinsiemi chiusi di uno spazio topologico è un sottoinsieme chiuso.*

PROPOSIZIONE 6. — *Se* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è una famiglia localmente finita di parti di uno spazio topologico* E, *la famiglia* $(\bar{A}_\iota)_{\iota\in I}$ *è localmente finita.*

PROPOSIZIONE 7. — *Sia* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *un ricovrimento aperto e finito a stella* (def. 2) *di uno spazio topologico* E. *Allora* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è una famiglia localmente finita* (def. 3).

Un interessante risultato concernente ricovrimenti localmente finiti che G. AQUARO *attribuisce a* A. H. STONE, *è fornito dalla seguente*

PROPOSIZIONE 8. — *Siano* E *uno spazio topologico,* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *una famiglia di parti di* E, $\mathfrak{A}(I)$ *l'insieme delle parti finite di* I. *Allora, se per ogni* $J \in \mathfrak{A}(I)$ *si pone* $U_J = \bigcap_{\iota\in C(J)} C(\bar{A}_\iota)$ *si ha:*

1°) *Per ogni* $J \in \mathfrak{A}(I)$ *la stella* $I^*_{U_J}$ *di* U_J *in* I *per* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è contenuta in* J *e pertanto è finita.*

2°) *Se* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è localmente finita,* $(U_J)_{J\in\mathfrak{A}(I)}$ *è un ricovrimento aperto di* E.

Dimostrazione di 1°). — *Sia* $\iota \in I^*_{U_J}$, allora $U_J \cap A_\iota \neq \emptyset$. Se fosse $\iota \in C(J)$ sarebbe $U_J \subset C(\bar{A}_\iota) \subset C(A_\iota)$ e quindi $U_J \cap A_\iota = \emptyset$ il che è escluso.

Dimostrazione di 2°). — Se $(A_\iota)_{\iota\in I}$ è localmente finita per ogni $J \in \mathfrak{A}(I)$ risulta (cfr. prop. 5) $U_J = C(\bigcup_{\iota\in C(J)} A_\iota) = C(\overline{\bigcup_{\iota\in C(J)} A_\iota})$ donde U_J è un insieme aperto di E.

D'altra parte, essendo $(\bar{A}_\iota)_{\iota\in I}$ al pari di $(A_\iota)_{\iota\in I}$ localmente finito (cfr. prop. 6) per ogni $x \in E$ esiste un intorno V di x tale che la stella I^*_V di V in I per $(\bar{A}_\iota)_{\iota\in I}$ sia finita (cfr. prop. 3). Se $\iota \in C(I^*_V)$ risulta $V \cap \bar{A}_\iota = \emptyset$ ossia $V \subset C(\bar{A}_\iota)$ pertanto $V \subset \bigcap_{\iota\in C(I^*_V)} C(\bar{A}_\iota) = U_{I^*_V}$ e quindi $x \in V \subset U_{I^*_V}$ donde $(U_J)_{J\in\mathfrak{A}(I)}$ è un ricovrimento di E.

COROLLARIO 2. — *Se* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è una famiglia localmente finita di parti dello spazio topologico* E, *esiste un ricovrimento aperto* $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ *di* E *tale che* card (L) = card (I) *e per ogni* $\lambda \in L$ *sia finita la stella di* U_λ *in* I *per* $(A_\iota)_{\iota\in I}$.

Dim. — Consegue dalla prop. 8 non appena si tenga presente che card $(\mathfrak{A}(I))$ = card (I).

COROLLARIO 3. — *Se* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è una famiglia di parti dello spazio topologico* E, *denotato con* $\mathfrak{N}(I)$ *l'insieme delle parti finite di* I, *se per ogni* $J \in \mathfrak{A}(I)$ *si pone* $U_J = \bigcap_{\iota\in C(J)} C(\bar{A}_\iota)$ *le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è localmente finita,*

b) $(U_J)_{J\in\mathfrak{N}(I)}$ *è un ricovrimento aperto di* E.

Dim. — Consegue banalmente in forza delle prop. 3 e prop. 8.

LEMMA 1. — *Siano* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *una famiglia di parti di uno spazio topologico* E *e* $(B_j)_{j\in J}$ *un ricovrimento chiuso localmente finito di* E (def. 3) *tale che per ogni* $j \in J$ *la stella* $I^*_{B_j}$ *di* B_j *in* I *per* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ (def. 1) *sia finita. Allora esiste una famiglia* $(A'_\iota)_{\iota\in I}$ *di insiemi aperti di* E *tale* che:

1°) *Per ogni* $\iota \in I$ *risulta* $A_\iota \subset A'_\iota$,

2°) $(\iota \in I,\ j \in J : A_\iota \cap B_j \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A'_\iota \cap B_j \neq \emptyset)$,

3°) *La famiglia* $(A'_\iota)_{\iota\in I}$ *è localmente finita,*

4°) *Se per ogni* $\iota \in I$ *è finita la stella* $J^*_{A_\iota}$ *di* A_ι *in* J *per* $(B_j)_{j\in J}$, *la famiglia* $(A'_\iota)_{\iota\in I}$ *è finita a stella* (def. 2).

Dim. — Sia, per ogni $\iota \in I$, $J^*_{A_\iota}$ la stella di A_ι in J per $(B_j)_{j\in J}$ e

$$A'_\iota = C\Big(\bigcup_{j\in C(J^*_{A_\iota})} B_j\Big) \tag{1}$$

Essendo per ipotesi, $(B_j)_{j\in J}$ localmente finita e per ogni $j \in J$ B_j insieme chiuso di E, $\bigcup_{j\in C(J^*_{A_\iota})} B_j$ è un insieme chiuso (cfr. coroll. 1) e pertanto quale che sia $\iota \in I$, A'_ι è un insieme aperto di E.

Dimostrazione di 1°). — Sia $\iota \in I$. Osservato che per ogni $j \in C(J^*_{A_\iota})$ risulta $A_\iota \cap B_j = \emptyset$ ossia $A_\iota \subset C(B_j)$ si ha

$$A_\iota \subset \bigcap_{j\in C(J^*_{A_\iota})} C(B_j) = C\Big(\bigcup_{j\in C(J^*_{A_\iota})} B_j\Big) = A'_\iota ,$$

Dimostrazione di 2°). — Tenuto conto di 1°), per ogni $\iota \in I$ risulta $J^*_{A_\iota} \subset J^*_{A'_\iota}$ (cfr. prop. 1).

Osservato che per dimostrare 2°) è sufficiente riconoscere che $J^*_{A_\iota} = J^*_{A'_\iota}$, si passa a stabilire l'inclusione $J^*_{A'_\iota} \subset J^*_{A_\iota}$.

A tale fine sia $j \in J^*_{A'_\iota}$ e, ragionando per assurdo si supponga $j \in C(J^*_{A_\iota})$. Allora

$$A'_\iota \cap B_j \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad B_j \subset \bigcup_{j\in C(J^*_{A_\iota})} B_\iota = C(A'_\iota)$$

ossia simultaneamente

$$A'_\iota \cap B_j \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad A'_\iota \cap B_j = \emptyset$$

il che è assurdo.

Dimostrazione di 3°). — Essendo $(B_j)_{j\in J}$ localmente finita esiste un ricovrimento aperto $(U_k)_{k\in K}$ di E tale che per ogni $k \in K$ la stella $J^*_{U_k}$ di U_k in J per $(B_j)_{j\in J}$ sia finita (cfr. prop. 3.) Quale che sia $k \in K$, si denoti con $I^*_{U_k}$ la stella di U_k in I per $(A'_\iota)_{\iota\in I}$.

Siano $k \in K$ e $\iota \in I^*_{U_k}$.

Allora

$$A'_\iota \cap U_k \neq \emptyset \tag{2}$$

D'altra parte a causa delle ipotesi

$$E = \bigcup_{j\in J} B_j \tag{3}$$

donde

$$U_k = U_k \cap E = \bigcup_{j\in J} (U_k \cap B_j) = \bigcup_{j\in J^*_{U_k}} (U_k \cap B_j) \subset \bigcup_{j\in J^*_{U_k}} B_j \tag{4}$$

Tenuto conto di (2) e (4)

$$\bigcup_{j\in J^*_{U_k}} (A'_\iota \cap B_j) \neq \emptyset \tag{5}$$

e quindi

$$\exists\, j \in J^*_{U_k} \ni' A'_\iota \cap B_j \neq \emptyset \tag{6}$$

donde, tenuto conto di 2°),

$$\exists\, j \in J^*_{U_k} \ni' A_\iota \cap B_j \neq \emptyset \tag{7}$$

ossia

$$\iota \in \bigcup_{j\in J^*_{U_k}} I^*_{B_j} \tag{8}$$

e, per l'arbitrarietà della scelta di ι in $I^*_{U_k}$,

$$I^*_{U_k} \subset \bigcup_{j\in J^*_{U_k}} I^*_{B_j} \tag{9}$$

Essendo, per ipotesi, $I^*_{B_j}$ finita per ogni $j \in J$ e $J^*_{U_k}$ finita, da (9) consegue che $I^*_{U_k}$ è finita il che, data l'arbitrarietà di $k \in K$, dimostra che $(A'_\iota)_{\iota \in I}$ è localmente finita (cfr. prop. 3).

Dimostrazione di 4°). — Nelle ipotesi di 4°), denotata per ogni $\lambda \in I$ con $I'^*_{A_\lambda}$ la stella di A'_λ in I per $(A')_{\iota \in I}$, si passa a riconoscere che $I'^*_{A_\lambda}$ è finita quale che sia $\lambda \in I$.

Sia $\lambda \in I$. Osservato che

$$E = \bigcup_{j \in J} B_j = \left(\bigcup_{j \in J^*_{A_\lambda}} B_j \right) \cup \left(\bigcup_{j \in C(J^*_{A_\lambda})} B_j \right) = \left(\bigcup_{j \in J^*_{A_\lambda}} B_j \right) \cup (C(A'_\lambda))$$

risulta

$$A'_\lambda \subset \bigcup_{j \in J^*_{A_\lambda}} B_j \tag{10}$$

Sia ora $\mu \in I'^*_{A_\lambda}$. Allora

$$A'_\mu \cap A'_\lambda \neq \emptyset \tag{11}$$

donde, tenuto conto di (10)

$$\bigcup_{j \in J^*_{A_\lambda}} (A'_\mu \cap B_j) \neq \emptyset \tag{12}$$

e quindi

$$\exists\, j \in J^*_{A_\lambda} \ni' A'_\mu \cap B_j \neq \emptyset \tag{13}$$

Da (13), in forza di 2°),

$$\exists\, j \in J^*_{A_\lambda} \ni' A_\mu \cap B_j \neq \emptyset$$

ossia

$$\exists\, j \in J^*_{A_\lambda} \ni' \mu \in I^*_{B_j}$$

donde

$$\mu \in \bigcup_{j \in J^*_{A_\lambda}} I^*_{B_j}$$

il che, data l'arbitrarietà di μ in $I'^*_{A_\lambda}$, dimostra

$$I'^*_{A_\lambda} \subset \bigcup_{j \in J^*_{A_\lambda}} I^*_{B_j}.$$

Essendo, per ipotesi, $J^*_{A_\lambda}$ finita e $I^*_{B_j}$ finita quale che sia $j \in J$, $I^{*}_{A_\lambda}$ è finita.

2. - Alcuni risultati connessi con la numerabile compattezza e la numerabile paracompattezza

Lemma 1. — *Se* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è una famiglia numerabile localmente finita di parti dello spazio numerabilmente compatto* E, *l'insieme* H *degli* $\iota \in I$ *per i quali* $A_\iota \neq \emptyset$ *è finito.*

Dim. — A causa delle ipotesi (cfr. n. 1, coroll. 2) esiste un ricovrimento aperto $(U_k)_{k\in K}$ di E tale che K sia numerabile e per ogni $k \in K$ la stella $I^*_{U_k}$ di U_k in I per $(A_\iota)_{\iota\in I}$ sia finita.

Essendo E numerabilmente compatto, esiste una parte finita L di K tale che $E = \bigcup_{k\in L} U_k$.

Si passa a riconoscere che

$$H \subset \bigcup_{k\in L} I^*_{U_k} . \tag{1}$$

Sia $\iota \in H$, allora $A_\iota \neq \emptyset$. Se $x \in A_\iota$ esiste $k \in L$ tale che $x \in U_k$ donde, $x \in A_\iota \cap U_k$ e quindi $A_\iota \cap U_k \neq \emptyset$.

Pertanto

$$\forall\, \iota \in H \;\; \exists\, k \in L \;\; \ni' \iota \in I^*_{U_k}$$

donde la validità di (1).

Essendo L finito e per ogni $k \in L$ $I^*_{U_k}$ finita, la (1) dimostra l'asserto.

Osservazione 1. — Il lemma sopra dimostrato è noto e trovasi in [4] (lemma di pag. 215). La dimostrazione qui adottata si distingue da quelle conosciute per l'utilizzazione del teorema di Stone (cfr. prop. 8 del n. 1).

Proposizione 1. — *Se* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *è una famiglia localmente finita di sottoinsiemi non vuoti di uno spazio topologico numerabilmente compatto* E, *l'insieme degli indici* I *è finito.*

Dim. — Se I fosse infinito, denotata con D una sua parte infinita numerabile, la sottofamiglia $(A_\iota)_{\iota\in D}$ essendo numerabile e localmente finita per il lemma 1 dovrebbe essere finita, il che è assurdo.

Una caratterizzazione degli spazi topologici numerabilmente compatti si ottiene tenendo presente la prop. 1 e la seguente

PROPOSIZIONE 2. — *Sia* E *uno spazio topologico di cui ogni famiglia localmente finita di sottoinsiemi non vuoti abbia l'insieme degli indici necessariamente finito. Allora* E *è numerabilmente compatto.*

Dim. — Sia $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione monotona decrescente di insiemi chiusi non vuoti di E. Per una nota caratterizzazione degli spazi numerabilmente compatti è sufficiente riconoscere che

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Ragionando per assurdo si supponga $E = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_E(F_n)$. Posto per ogni $n \in \mathbf{N}$ $G_n = C_E(F_n)$, $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è un ricovrimento aperto di E ed inoltre

$$(1) \qquad (n \in \mathbf{N},\ p \in \mathbf{N},\ n < p) \Rightarrow (G_n \cap F_p = \emptyset)$$

invero se $n < p$, a causa delle ipotesi, $F_p \subset F_n$ e quindi $G_n \subset C(F_p)$.

Pertanto per ogni $n \in \mathbf{N}$ la stella $\mathbf{N}^*_{G_n}$ di G_n in $\mathbf{N}$ per $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è finita perché contenuta in $[0, n]_{\mathbf{N}}$. Allora $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è localmente finita (cfr. n. 1, prop. 3) e a causa delle ipotesi $\mathbf{N}$ è finito, il che è assurdo.

Una condizione necessaria per la numerabile paracompattezza di uno spazio topologico è fornita dalla seguente

PROPOSIZIONE 3. — *Se* A *è un sottospazio numerabilmente compatto di uno spazio topologico numerabilmente paracompatto* E (cfr. [1], def. 1, § 5), *l'aderenza* $\bar{A}$ *di* A *è un sottospazio numerabilmente compatto.*

Dim. — Sia $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di insiemi aperti di E tale che

$$(1) \qquad \bar{A} \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n .$$

Si ponga per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$(2) \qquad V_n = \begin{cases} C(\bar{A}) & \text{se } n = 0 \\ U_{n-1} & \text{se } 1 \leq n. \end{cases}$$

Evidentemente $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è un ricovrimento aperto di E, pertanto a causa delle ipotesi, esiste un ricovrimento aperto localmente finito $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di E tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$W_n \subset V_n . \tag{3}$$

La famiglia $(A \cap W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ costituisce un ricovrimento aperto, localmente finito e numerabile dello spazio numerabilmente compatto A, allora in forza del lemma 1 l'insieme

$$P = \{n \in \mathbf{N} \mid A \cap W_n \neq 0\} \tag{4}$$

è finito.

Si riconosce che

$$\bar{A} \subset \bigcup_{p\in P} W_p \tag{5}$$

invero che $x \in \bar{A}$ esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $x \in W_n$, d'altra parte $A \cap W_n \neq \emptyset$ e quindi $n \in P$.

Ora $0 \notin P$, invero $W_0 \subset V_0 = C(\bar{A}) \subset C(A)$ ossia $W_0 \cap A = \emptyset$.

Allora tenuto conto di (2), (5) e della circostanza che $0 \notin P$ risulta

$$\bar{A} \subset \bigcup_{p\in P} U_{p-1}$$

e ciò dimostra che $\bar{A}$ è un sottospazio numerabilmente compatto di E.

PROPOSIZIONE 4. — *Se* $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *è un ricovrimento aperto (numerabile) dello spazio topologico* E *e se per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *la frontiera* $\mathrm{Fr}.(U_n)$ *è numerabilmente compatta, esiste un ricovrimento aperto finito a stella (quindi localmente finito* (cfr. n. 1 prop. 7)) $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *di* E *tale che per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *risulti* $V_n \subset U_n$.

Dim. — Sia $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la successione di sottinsiemi di E definita ponendo

$$(1) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} : A_n = \begin{cases} U_0 & \text{se } n = 0 \\ U_n \cap (C_E(\bigcup_{l=0}^{n-1} U_l)) & \text{se } 1 \leq n \end{cases}$$

Evidentemente

$$(2) \qquad (p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N},\ p \neq q) \Rightarrow (A_p \cap A_q = \emptyset),$$

$$(3) \qquad n \in \mathbf{N} \Rightarrow A_n \subset U_n$$

$$(4) \qquad \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$$

D'altra parte

$$(5) \qquad (n \in \mathbf{N},\ p \in \mathbf{N},\ n < p) \Rightarrow (U_n \cap A_p = \emptyset)$$

invero se $n < p$ ossia $n \leq p - 1$

$$A_p = U_p \cap (C_E(\bigcup_{l=0}^{p-1} U_l)) \subset U_p \cap C_E(U_n) \subset C_E(U_n)$$

Ora per ogni $x \in E$ esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $x \in U_n$ e, per (5), tale che la stella $\mathbf{N}^*_{U_n}$ di U_n in $\mathbf{N}$ per $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sia finita.

Pertanto (cfr. n. 1 prop. 3)

$$(6) \qquad (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

è localmente finita.

Osservato che per ogni $n \in \mathbf{N}$, $1 \leq n$

$$\mathrm{Fr.}(A_n) \subset \mathrm{Fr.}(U_n) \cup (\bigcup_{l=0}^{n-1} \mathrm{Fr.}(U_l))\ ^2$$

$\mathrm{Fr.}(A_n)$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio numerabilmente compatto $\mathrm{Fr.}(U_n) \cup (\bigcup_{l=0}^{n-1} \mathrm{Fr.}(U_l))$ e, come tale, è un insieme numerabilmente compatto.

Fissato $n \in \mathbf{N}$, tenuto conto di (6) e di quanto testé stabilito,

$$(7) \qquad (\mathrm{Fr.}(A_n) \cap A_p)_{p \in \mathbf{N}}$$

è una successione localmente finita (cfr. n. 1, prop. 4) di sottoinsiemi dello spazio numerabilmente compatto $\mathrm{Fr.}(A_n)$.

[2] Se $(X_\iota)_{\iota \in I}$ è una famiglia finita di sottoinsiemi di uno spazio topologico E e se X ed Y sono sottoinsiemi di S risulta

$$\mathrm{Fr.}(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota) \subset \bigcup_{\iota \in I} \mathrm{Fr.}(X_\iota), \qquad \mathrm{Fr.}(X - Y) \subset \mathrm{Fr.}(X) \cup \mathrm{Fr.}(Y).$$

Allora, posto

$$(8) \qquad P_n = \{ p \in N \mid \mathrm{Fr.}(A_n) \cap A_p \neq \emptyset \}$$

in forza del lemma 1, P_n è finito.

Si consideri la successione

$$(9) \qquad (\bar{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

Tenuto conto di (4) e (6) (cfr. n. 1, prop. 6), (9) è un ricovrimento chiuso localmente finito di E.

Si passa ora a riconoscere che per ogni $n \in \mathbf{N}$ la stella $\mathbf{N}^*_{\bar{A}_n}$ di $\bar{A}_n$ in $\mathbf{N}$ per $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è finita.

Invero, tenuto conto di (2), se $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$, $n \neq p$ risulta

$$\bar{A}_n \cap A_p = (\bar{A}_n \cap (A_n \cup C_E(A_n))) \cap A_p = (A_n \cup (\bar{A}_n \cap C_E(A_n))) \cap A_p =$$

$$= (\bar{A}_n \cap C_E(A_n)) \cap A_p \subset (\bar{A}_n \cap \overline{C_E(A_n)}) \cap A_p = \mathrm{Fr.}(A_n) \cap A_p$$

donde $\mathbf{N}^*_{\bar{A}_n} \subset P_n$.

D'altra parte

$$(10) \qquad (n \in \mathbf{N},\ p \in \mathbf{N},\ n < p) \Rightarrow (\bar{A}_p \cap A_n = \emptyset)$$

invero, tenuto conto di (5), $A_p \subset C(U_n)$ e quindi, per (3), $\bar{A}_p \subset \overline{C(U_n)} = C(U_n) \subset C(A_n)$.

Tenuto conto di (10) per ogni $n \in \mathbf{N}$ la stella $\mathbf{N}^*_{A_n}$ di A_n in $\mathbf{N}$ per $(\bar{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è finita in quanto contenuta in $[0, n]_{\mathbf{N}}$.

Allora (cfr. n. 1, lemma 1) esiste una successione $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di insiemi aperti di E tale che

$$(11) \qquad \forall\ n \in \mathbf{N} : A_n \subset G_n,$$

$$(12) \qquad (G_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ è localmente finita,}$$

$$(13) \qquad (G_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ è finita a stella.}$$

Ove si ponga

$$(14) \qquad \forall\ n \in \mathbf{N} : V_n = G_n \cap U_n$$

evidentemente

(15) $\forall\ n \in \mathbf{N} : V_n$ è un insieme aperto di E,

(16) $\forall\ n \in \mathbf{N} : A_n \subset V_n \subset U_n$,

(17) $\forall\ n \in \mathbf{N} : V_n \subset G_n$.

Da (13) e (17) consegue che $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è finita a stella (cfr. n. 1 prop. 1); da (4), (15) e (16) che $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è un ricovrimento aperto di E tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti $V_n \subset U_n$.

Una generalizzazione della prop. 4 è fornita dalla seguente

PROPOSIZIONE 5. — *Se* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è un ricovrimento aperto localmente numerabile* (cfr. n. 1, def. 3) *dello spazio topologico* E *e se per ogni* $\iota \in I$ *la frontiera* $\mathrm{Fr}.(U_\iota)$ *è numerabilmente compatta, esiste un ricovrimento aperto finito a stella* $(V_\iota)_{\iota\in I}$ *di* E *tale che per ogni* $\iota \in I$ *risulti* $V_\iota \subset U_\iota$.

Dim. — Essendo $(U_\iota)_{\iota\in I}$ localmente numerabile (cfr. [7], prop. 2) esiste una partizione $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ di I tale che

(1) $(\alpha' \in A,\ \alpha'' \in A,\ \alpha' \neq \alpha'',\ \iota' \in I_{\alpha'},\ \iota'' \in I_{\alpha''}) \Rightarrow (U_{\iota'} \cap U_{\iota''} = \emptyset)$

e

(2) $\forall\ \alpha \in A : I_\alpha$ numerabile.

Si ponga

(3) $$\forall\ \alpha \in A : U_\alpha^* = \bigcup_{\iota\in I_\alpha} U_\iota$$

Evidentemente $(U_\alpha^*)_{\alpha\in A}$ è un ricovrimento aperto di E formato da insiemi a due a due disgiunti.

A causa delle ipotesi, in forza della prop. 4, per ogni $\alpha \in A$ esiste una famiglia (numerabile) $(V_\iota)_{\iota\in I_\alpha}$ costituente un ricovrimento aperto finito a stella di U_α^* tale che per ogni $\iota \in I_\alpha$ risulti $V_\iota \subset U_\iota$. Evidentemente $(V_\iota)_{\iota\in I}$ è un ricovrimento aperto finito a stella di E tale che per ogni $\iota \subset I$ risulti $V_\iota \subset U_\iota$.

La definizione di spazio fortemente paracompatto trovasi, per esempio, in [4] cap. V, pp. 228 ed essa può essere formulata come segue

DEFINIZIONE 1. — *Uno spazio topologico* E *dicesi fortemente paracompatto se ogni suo ricovrimento aperto è dotato di un raffinamento aperto finito a stella.*

In realtà siffatti spazi erano stati già studiati da K. MORITA (cfr. [6]) che li adoperò con la denominazione di « spaces with the star finite property ».

COROLLARIO 1. — *Se* E *è uno spazio topologico tale che ogni suo ricovrimento aperto sia dotato di un raffinamento aperto localmente numerabile costituito da insiemi aperti la cui frontiera sia numerabilmente compatta, esso è fortemente paracompatto* (cfr. def. 1).

PROPOSIZIONE 6. — *Se* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è un ricovrimento aperto localmente numerabile* (cfr. n. 1, def. 3) *dello spazio normale* E *e se per ogni* $\iota \in I$ *l'aderenza* $\bar{U}_\iota$ *di* U_ι *è numerabilmente paracompatta,* E *è numerabilmente paracompatto* (cfr. [1], § 5, def. 1).

Dim. — Essendo $(U_\iota)_{\iota\in I}$ localmente numerabile (cfr. [7], prop. 2) esiste una partizione $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ di I tale che

$$(1)\quad (\alpha' \in A,\ \alpha'' \in A,\ \alpha' \neq \alpha'',\ \iota' \in I_{\alpha'},\ \iota'' \in I_{\alpha''}) \Rightarrow (U_{\iota'} \cap U_{\iota''} = \emptyset)$$

e

$$(2)\qquad \forall\ \alpha \in A\ :\ I_\alpha \text{ numerabile.}$$

Si ponga

$$(3)\qquad \forall\ \alpha \in A\ :\ U^*_\alpha = \bigcup_{\iota\in I_\alpha} U_\iota\ .$$

Evidentemente $(U^*_\alpha)_{\alpha\in A}$ è un ricovrimento aperto di E costituito da insiemi a due a due disgiunti e quindi chiusi. Essendo E normale, per ogni $\alpha \in A$ U^*_α, in quanto insieme chiuso di E, è normale. D'altra parte per ogni $\alpha \in A$ e per ogni $\iota \in I_\alpha$, $\bar{U}_\iota$, in quanto insieme chiuso dello spazio normale U^*_α, è normale.

Tenuto conto delle ipotesi e di (3), per ogni $\alpha \in A$, U^*_α è numerabilmente paracompatto (cfr. [5], Theorem 3.6 (i)). Essendo $(U^*_\alpha)_{\alpha\in A}$ un ricovrimento aperto di E localmente finito in quanto costituito da insiemi a due a due disgiunti, E è numerabilmente paracompatto (cfr. [1], § 5, prop. 5).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. AQUARO, *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **47** (1959), 319-390.

[2] N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, Fasc. des resultats, Livre I (4.me éd.), Hermann, Paris (1958).

[3] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. 1 et 2, Livre III (4.me éd.), Hermann, Paris (1966).

[4] R. ENGELKING. *Outline of general topology*, North-Holland Publishing Company-Amsterdam (1968).

[5] K. MORITA, *Paracompactness and product spaces*, Fundamenta Mathematicae (1962). 223-236.

[6] K. MORITA, *Star-finite coverings and the star-finite property*, Math. Japonicae, vol. 1, n. 2 (1948), 60-68.

[7] M. A. PUGLISI, *Intorno ad una classe di spazi topologici localmente di Lindelöf*, Riv. Mat. Univ. Parma (2). **10** (1969), 1-7.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, C. Ciliberto e C. Miranda.

Spazi metrizzabili con una distanza di spazio completo

Nota di FERNANDO BOMBINI *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 3 giugno 1978)

RIASSUNTO. — Lo scopo della presente nota è quello di stabilire condizioni sufficienti, coinvolgenti ricovrimenti normali, affinché uno spazio uniformizzabile possa essere munito di una struttura uniforme di spazio completo.

SUMMARY. — The aim of this note consists in giving a sufficient condition, involving normal coverings, in order that a uniform space can be equipped with an equivalent complete uniformity. The result is then applied to two special cases.

Nella presente nota si stabilisce (Teor. 1) una condizione sufficiente affinché uno spazio uniformizzabile possa essere munito di una struttura uniforme di spazio completo, preservando la cardinalità di una base, a condizione che esista un ricovrimento normale dello spazio i cui elementi siano sottospazi uniformi completi relativamente alla struttura uniforme inizialmente data.

Facile conseguenza di questo risultato è la possibilità di metrizzare con una distanza di spazio metrico completo ogni spazio metrico localmente compatto nonché, come è già noto, ogni sottoinsieme aperto di uno spazio metrico completo.

Per quanto concerne terminologia e simboli ci si atterrà a quelli di [1], [2], [3], [4] e [5] [1] mentre eventuali modifiche saranno esplicitamente segnalate come si fa introducendo la seguente

DEFINIZIONE 1. — *Un ricovrimento* $\mathcal{R}$ *dello spazio topologico* E *si dice normale se esiste una successione* $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *di ricovrimenti aperti di* E *tale che* $\mathcal{R}_0$ *sia più fine di* $\mathcal{R}$ (cfr. [1], § 1, def. 2) *e per ogni* $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{R}_{n+1}$ *sia un raffinamento a stella di* $\mathcal{R}_n$ (cfr. [1], § 1, def. 5).

* Istituto di Analisi Matematica - Università - Bari.

[1] I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

PROPOSIZIONE 1. — *Se* $\mathfrak{R}$ *è un ricovrimento normale dello spazio topologico* E (cfr. def. 1) *esiste un sistema uniformizzante di Tukey su* E (cfr. [1], § 1, def. 9) *la cui struttura uniforme generata* (cfr. [1], § 1, def. 8) *è dotata di un sistema fondamentale numerabile di adiacenze,* $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *tale che* $(V_1(x))_{x\in E}$ *sia un raffinamento di* $\mathfrak{R}$ (cfr. [1], § 1, def. 2) *e per ogni* $n \in \mathbf{N}$, V_{n+1} *o* $V_{n+1} \subset V_n$; *inoltre la suddetta struttura uniforme induce su* E *una topologia meno fine di quella di cui* E, *in quanto spazio topologico, è munito.*

Dim. — Essendo $\mathfrak{R}$ un ricovrimento normale di E esiste una successione $((U_\iota^{(n)})_{\iota\in I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ di ricovrimenti aperti di E tali che $(U_\iota^{(0)})_{\iota\in I_0}$ sia più fine di $\mathfrak{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$, $(U_\iota^{(n+1)})_{\iota\in I_{n+1}}$ sia un raffinamento a stella di $(U_\iota^{(n)})_{\iota\in I_n}$.

Si ponga, per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$V_n = \bigcup_{\iota\in I_n} (U_\iota^{(n)} \times U_\iota^{(n)})$$

Allora (cfr. [1], § 1, coroll. 2 della prop. 3)

$$\forall\, n \in \mathbf{N} : V_{n+1} \text{ o } V_{n+1} \subset V_n$$

nonché (cfr. [1], § 1, coroll. 1 della prop. 3) $(V_1(x))_{x\in E}$ è un ricovrimento di E più fine di $(U_\iota^{(0)})_{\iota\in I_0}$ e quindi più fine di $\mathfrak{R}$.

Palesemente la successione $((U_\iota^{(n)})_{\iota\in I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ di ricovrimenti di E è un sistema uniformizzante di Tukey la cui struttura uniforme generata, $\mathfrak{U}$, ha $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ quale sistema fondamentale di adiacenze (cfr. [1], § 1, prop. 5).

Sia $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$ la topologia su E dedotta da $\mathfrak{U}$ ed U un arbitrario elemento di $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$. Se x è un arbitrario elemento di U esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che $V_n(x) \subset U$. Denotata con $\mathcal{T}$ la topologia di cui E è inizialmente munito, si passa a riconoscere che $V_n(x) \in \mathcal{T}$ stabilendo che è intorno di ciascun suo punto per la topologia $\mathcal{T}$. Sia y un arbitrario elemento di $V_n(x)$, allora $(x, y) \in \bigcup_{\iota\in I_n} (U_\iota^{(n)} \times U_\iota^{(n)})$ pertanto esiste $\lambda \in I_n$ tale che $(x, y) \in U_\lambda^{(n)} \times U_\lambda^{(n)}$, donde $y \in U_\lambda^{(n)}$; d'altra parte $U_\lambda^{(n)} \subset V_n(x)$ invero se $z \in U_\lambda^{(n)}$, $(y, z) \in U_\lambda^{(n)} \times U_\lambda^{(n)} \subset V_n$ donde, essendo $(x, y) \in V_n$, $(x, z) \in V_n$ e quindi $z \in V_n(x)$.

Allora essendo $U_\lambda^{(n)} \in \mathcal{T}$ e $y \in U_\lambda^{(n)} \subset V_n(x)$, $V_n(x)$ è un intorno di y per $\mathcal{T}$.

Essendo $x \in V_n(x) \subset U$, U è intorno di x per la topologia $\mathcal{T}$ il che dimostra, x essendo un arbitrario elemento di U, che $U \in \mathcal{T}$. Pertanto $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$ è meno fine di $\mathcal{T}$.

Al fine di stabilire un risultato che avrà ufficio fondamentale nel seguito si premette il seguente

LEMMA 1. — *Sia* E *uno spazio uniforme ed* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *un ricovrimento di* E *tale che esista una adiacenza* V *di* E *per cui* $(V(x))_{x\in E}$ *sia un raffinamento di* $(\dot{X}_\iota)_{\iota\in I}$ (cfr. [1], § 1, def. 2). *Allora ogni filtro* $\mathfrak{F}$ *di Cauchy su* E *ha come traccia un filtro sopra almeno uno degli* X_ι.

Dim. — Per dimostrare l'asserto è sufficiente riconoscere che

$$(1) \qquad \exists\, \lambda \in I \ni' \forall\, F \in \mathfrak{F} : F \cap X_\lambda \neq \emptyset$$

Ragionando per assurdo si supponga

$$(2) \qquad \forall\, \iota \in I \ \exists\, F_\iota \in \mathfrak{F} \ni' X_\iota \subset C_E(F_\iota)$$

Essendo $\mathfrak{F}$ un filtro di Cauchy su E, esiste $F \in \mathfrak{F}$ tale che $F \times F \subset V$.

Sia $x \in F$, allora $F \subset V(x)$ e, tenuto conto delle ipotesi, esiste $\iota \in I$ tale che $V(x) \subset X_\iota$, donde per (2) $F \subset C_E(F_\iota)$ ossia $F \cap F_\iota = \emptyset$ contro uno degli assiomi di filtro.

TEOREMA 1. — *Sia E uno spazio topologico uniformizzabile ed* $\mathfrak{U}$ *una struttura uniforme su* E, *compatibile con la topologia di* E, *assoggettato alla seguente condizione*: *esiste un ricovrimento normale* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *di* E (cfr. def. 1) *tale che per ogni* $\iota \in I$, X_ι *sia un sottospazio uniforme completo di* (E, $\mathfrak{U}$).

Allora per ogni sistema fondamentale di adiacenze $\mathfrak{B}$ *di* $\mathfrak{U}$ *esiste una struttura uniforme di spazio completo* $\mathfrak{U}^*$ *su* E, *più fine di* $\mathfrak{U}$, *compatibile con la topologia di* E *ed avente un sistema fondamentale di adiacenze* $\mathfrak{B}^*$ *tale che* $\operatorname{card}(\mathfrak{B}^*) \leq \operatorname{card}(\mathfrak{B})$.

Dim. — A causa delle ipotesi, in forza della prop. 1, esiste una struttura uniforme $\mathfrak{U}'$ su E avente un sistema fondamentale numerabile di adiacenze $(V_n)_{n\in N}$ tale che

$$(1) \qquad (V_1(x))_{x\in E} \text{ è un raffinamento di } (X_\iota)_{\iota\in I}$$

$$(2) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} : V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$$

Inoltre se $\mathfrak{T}$ è la topologia di cui è inizialmente munito E e se $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}$ è la topologia su E dedotta da $\mathfrak{U}'$ risulta

$$(3) \qquad \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'} \subset \mathfrak{T}\,.$$

Sia $\mathfrak{B}'$ l'insieme degli elementi di $(V_n)_{n\in N}$ e sia $\mathfrak{B}$ un sistema fondamentale di adiacenze di $\mathfrak{U}$. Si consideri la struttura uniforme $\mathfrak{U}^*$ su E definita come estremo superiore di $\mathfrak{U}$ ed $\mathfrak{U}'$. $\mathfrak{U}^*$ ha come sistema fondamentale di adiacenze l'insieme $\mathfrak{B}^*$ delle parti di $E \times E$ della forma $A \cap B$ con $(A, B) \in (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}') \times (\mathfrak{B} \cup '\mathfrak{B})$.

Essendo $\mathfrak{B}'$ numerabile risulta $\text{card}(\mathfrak{B}^*) \leq \text{card}(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}') = \text{card}(\mathfrak{B})$.

Denotata con $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*}$ la topologia su E dedotta da $\mathfrak{U}^*$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*}$ è la meno fine delle topologie su E più fini di $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$ e $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$. Osservato che $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}} = \mathcal{T}$, tenuto conto di (3) $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*} \subset \mathcal{T}$, d'altra parte $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathfrak{U}} \subset \mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*}$ pertanto $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*} = \mathcal{T}$ e quindi $\mathfrak{U}^*$ è compatibile con la topologia di E.

Si passa ora a dimostrare che $(E, \mathfrak{U}^*)$ è uno spazio uniforme completo.

Sia $\mathfrak{F}$ un filtro di Cauchy su $(E, \mathfrak{U}^*)$. Tenuto conto di (1), in forza del lemma 1, esiste almeno un $\iota \in I$ tale che la traccia di $\mathfrak{F}$ su X_ι sia un filtro. Essendo $\mathfrak{U}^*$ più fine di $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ è un filtro di Cauchy su $(X_\iota, \mathfrak{U}_{X_\iota})$ che, per ipotesi, è completo. Allora $\mathfrak{F}_{X_\iota}$ converge in X_ι verso un punto $x \in X_\iota$, che viene ad essere punto aderente ad $\mathfrak{F}_{X_\iota}$ in X_ι e quindi aderente ad $\mathfrak{F}$ in E. Essendo $\mathfrak{F}$ filtro di Cauchy per $\mathfrak{U}^*$ ed x aderente ad $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ converge in E verso x. Pertanto $(E, \mathfrak{U}^*)$ è uno spazio uniforme completo.

COROLLARIO 1. — *Sia* E *uno spazio topologico quasi-metrizzabile* (cfr. [1], § 3, def. 7) *con la quasi-metrica d tale che* (E, *d*) *sia completo. Allora per ogni insieme aperto* U *di* E *esiste una quasi-metrica d' su* U *compatibile con la topologia del sottospazio* U *tale che* (U, *d'*) *sia uno spazio quasi-metrico completo.*

Dim. — Sia $\mathfrak{U}$ *d* la struttura uniforme definita da *d* ed U un insieme aperto di E. Essendo E quasi-metrizzabile esiste una successione

$$(1) \qquad (U_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

di insiemi aperti di E tale che $U = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n$ e tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\bar{U}_n \subset U$ (cfr. [1], § 4, prop. 3 e prop. 2).

Si passa ora a dimostrare che (1) costituisce un ricovrimento normale (cfr. def. 1) del sottospazio U.

Osservato che U, quale spazio topologico in modo canonico, è quasi-metrizzabile e quindi normale, per quanto segnalato da E. MICHAEL (cfr. [7]) è sufficiente dimostrare che esiste un ricovrimento aperto localmente finito di U più fine di (1). D'altra parte, essendo U quasi-metrizzabile, per un noto teorema di A. H. STONE (cfr. [9]),

U è paracompatto e quindi esiste un ricovrimento aperto localmente finito di U più fine di (1).

Palesemente $(\bar{U}_n)_{n\in\mathbf{N}}$, al pari di (1), è un ricovrimento normale di U. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\bar{U}_n$ come sottospazio uniforme chiuso di $\mathfrak{U}\, d$ è completo con una struttura uniforme, la $(\mathfrak{U}\, d)_{\bar{U}_n}$ indotta da $\mathfrak{U}\, d$ su $\bar{U}_n$, dotata di un sistema fondamentale numerabile di adiacenze $\mathfrak{B}$. Allora in corrispondenza di $\mathfrak{B}$, per il teor. 1, esiste una struttura uniforme $\mathfrak{U}'$ di spazio completo su U compatibile con la topologia di U avente un sistema fondamentale numerabile di adiacenze. Allora U è quasi-metrizzabile e la relativa quasi-metrica d' realizza la tesi.

COROLLARIO. 2. — *Sia* (E, d) *uno spazio quasi metrico* (risp. *metrico*) *localmente compatto. Allora esiste una quasi-metrica* (risp. *metrica*) d' *su* E, *compatibile con la topologia di cui è canonicamente munito* E, *tale che* (E, d') *sia uno spazio quasi-metrico* (risp. *metrico*) *completo.*

Dim. — Sia $\mathfrak{T}\, d$ la topologia di cui E è canonicamente munito. Essendo E localmente compatto esiste un ricovrimento aperto $(U_\iota)_{\iota\in I}$ di E tale che per ogni $\iota \in I$, $\bar{U}_\iota$ sia un insieme compatto. Essendo (E, $\mathfrak{T}\, d$) quasi-metrizzabile, con argomentazione identica a quella seguita nella dimostrazione del coroll. 1, $(U_\iota)_{\iota\in I}$ è un ricovrimento normale di E (cfr. def. 1) e quindi palesemente anche $(\bar{U}_\iota)_{\iota\in I}$ è un ricovrimento normale di E. Essendo, per ogni $\iota \in I$, $\bar{U}_\iota$ un insieme compatto, $(\bar{U}_\iota, d_{\bar{U}_\iota})$ ($d_{\bar{U}_\iota}$ denota la quasi-metrica indotta da d su $\bar{U}_\iota$) è uno spazio quasi-metrico completo. Denotata con $\mathfrak{U}\, d$ la struttura uniforme canonicamente associata a d e, per ogni $\iota \in I$ con $\mathfrak{U}\, d_{\bar{U}_\iota}$ la struttura uniforme associata a $d_{\bar{U}_\iota}$, osservato che $\mathfrak{U}\, d_{\bar{U}_\iota}$ è identica alla struttura uniforme indotta da $\mathfrak{U}\, d$ su $\bar{U}_\iota$, per ogni $\iota \in I$, $\bar{U}_\iota$ è un sottospazio uniforme completo di (E, $\mathfrak{U}\, d$).

Osservato che $\mathfrak{U}\, d$ è dotata di un sistema fondamentale numerabile di adiacenze, relativamente ad esso, in forza del teor. 1, esiste una struttura uniforme $\mathfrak{U}'$ su E più fine di $\mathfrak{U}\, d$ e tale che

(1) (E, $\mathfrak{U}'$) è uno spazio uniforme completo

(2) $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}\, d}$ $(= \mathfrak{T}\, d)$

(3) $\mathfrak{U}'$ è dotata di un sistema fondamentale numerabile di adiacenze.

Tenuto conto di (2) e (3), E è quasi metrizzabile. Sia d' la quasi-metrica su E tale che $\mathfrak{U}\, d' = \mathfrak{U}'$. Per (1), (E, d') è uno spazio quasi-metrico completo ed inoltre $\mathcal{T}\, 'd = \mathcal{T}_{\mathfrak{U}\, d'} = \mathcal{T}_{\mathfrak{U}'} = \mathcal{T}_{\mathfrak{U}\, d} = \mathcal{T}\, d$.

Se poi d è una metrica, $\mathcal{T}\, d$ essendo una topologia di spazio di Hausdorff, $\mathcal{T}\, d'$ è una topologia di spazio di Hausdorff e quindi d' è una metrica.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Aquaro, *Rcovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **47** (1959), 319-390.

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Actual. Scient. et Ind., 1212, Hermann, Paris (1954).

[3] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Actual. Scient. et Ind., 1243, Hermann, Paris (1956).

[4] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Actual. Scient. et Ind., 858-1142 ,Herman, Paris (1951).

[5] N. Bourbaki, *Topologie Générale*. Actual. Scient. et Ind., 1045, nouvelle éditio, Hermann, Paris (1958).

[6] E. Michael, *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 831-839.

[7] E. Michael, *Local properties and topological spaces*, Duke Math. J., **21** (1954). 163-171.

[8] E. Michael, *Another note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1958), 822-828.

[9] A H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **54**, (1948), 977-982.

[10] J. W. Tukey. *Convergence and uniformity in topology*, Annals. of Math. Studies, n. 2 (1940).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, C. Ciliberto e C. Miranda

Una formula di maggiorazione per il gradiente delle soluzioni di un'equazione ellittica del quarto ordine

Nota di VINCENZO ESPOSITO
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 3 giugno 1978)

SUMMARY. — In this paper an estimate for solutions $u(x, y)$ of the equation $(\Delta - a_1)(\Delta - a_2)\, u = 0$, $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$, is obtained.

RIASSUNTO. — Si stabilisce una formula di maggiorazione per il modulo del gradiente delle soluzioni dell'equazione $(\Delta - a_1)(\Delta - a_2)\, u = 0$, $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$.

È ben noto (cfr. C. MIRANDA [7], S. AGMON [4], ecc.) che se $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ è soluzione di un'equazione ellittica del quarto ordine in un aperto limitato Ω, vale la formula di maggiorazione:

$$|\operatorname{grad} u| \leq K_1 \max_{\partial\Omega} |u| + K_2 \left(\max_{\partial\Omega} \left| \frac{du}{d\nu} \right| + \max_{\partial\Omega} \left| \frac{du}{ds} \right| \right)$$

K_1 e K_2 essendo costanti positive indipendenti da u.

Solo in casi particolari, però, è nota una valutazione esplicita delle costanti K_1 e K_2; un risultato di questo tipo, riguardante le funzioni biarmoniche, è contenuto in una memoria di C. MIRANDA (cfr. [8]). Recentemente A. CIOFFI (cfr. [6]) ha esteso tale risultato alle soluzioni $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, nulle al contorno, dell'equazione:

$$(1) \qquad (\Delta - a_1)(\Delta - a_2)\, u = 0 \qquad 0 \leq a_1 \leq a_2.$$

Si pone allora lo stesso problema per le soluzioni dell'equazione (1) che non siano nulle sul contorno.

In questo lavoro mi occupo di tale questione e, utilizzando un procedimento di C. MIRANDA (cfr. [8]), nonché alcuni teoremi di G. ADLER (cfr. [1] e [2]) ottengo una valutazione esplicita di K_1 e K_2, che estende al caso generale quella stabilita in [6].

1. - Notazioni e risultati

Sia Ω un dominio piano limitato di classe C^2; indichiamo con Σ la sua frontiera e con $2d$ il suo diametro. Sia L la lunghezza di Σ e siano P e Q i generici punti rispettivamente di Ω e di Σ. Denotiamo con φ l'angolo formato dall'asse $\overrightarrow{QP}$ con la normale interna ν a Σ in Q, orientato nel verso che va da $\overrightarrow{QP}$ a ν. Poniamo inoltre $\Phi = \max_{\bar{\Omega}} |\varphi|$.

Supponiamo che esiste un numero $\rho > 0$ tale che, $\forall Q \in \Sigma$, i cerchi di raggio ρ tangenti internamente ed esternamente a Σ in Q siano contenuti rispettivamente in Ω e in $R^2 - \Omega$; inoltre, $\forall Q \in \Sigma$, sull'arco $Z_0(\rho)$ di Σ contenuto nella striscia di semiampiezza ρ e parallela alla normale ν a Σ in Q, si abbia:

$$|ds| \leq \sqrt{2}\,|dr| \tag{1.1}$$

s essendo l'ascissa curvilinea con origine in Q e r la distanza del generico punto di Σ da Q.

Detti a_1 e a_2 due numeri reali non negativi tali che:

$$a_1 d^2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{8} \qquad a_1 \leq a_2 \tag{1.2}$$

consideriamo il problema:

$$\begin{cases} (\Delta - a_1)(\Delta - a_2)\,u = 0 & \forall (x, y) \in \Omega \\ u|_\Sigma = f;\ \left.\dfrac{du}{d\nu}\right|_\Sigma = g & f \in C^1(\Sigma),\ g \in C^0(\Sigma). \end{cases} \tag{1.3}$$

Dimostreremo il seguente:

Teorema. — *Se* $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *è soluzione del problema* (1.3), *sussiste la formula di maggiorazione*:

$$|\operatorname{grad} u| \leq K_1 \max|g| + \frac{K_2}{\rho} \max|f| + K_3 \left(\frac{L}{\rho} + 1 + \rho\sqrt{a_2} \right) \max|f'|,$$

dove:

$$K_1 = \min_{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{[1 - \lambda(1 + 2\,a_1\,d^2)]\,(2 - \sqrt{\lambda^2 - 6\,\lambda + 8})}}$$

$$\text{con } \lambda \in \left(3 - \sqrt{5},\ \frac{1}{1 + 2\,a_1\,d^2}\right),$$

$$K_2 = 10\,(K_1 + 1),$$

$$K_3 = (4927 + 30\,\Phi)\,(K_1 + 1).$$

2. - Maggiorazioni del gradiente delle soluzioni dell'equazione $(\Delta - a)\,u = 0$.

Sia $C(P_0, \rho)$ un cerchio di R^2 di centro P_0 e raggio ρ, detto (t, ϑ) un sistema di coordinate polari di polo P_0, consideriamo il problema:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \Delta V = 0 & \text{in } C \\ V_{|\partial C} = \begin{cases} \varphi(\vartheta) & \text{se } |\vartheta| \leq \omega \\ 0 & \text{se } |\vartheta| > \omega \end{cases} \end{cases}$$

ω essendo un numero positivo minore di $\frac{\pi}{2}$ e $\varphi(\vartheta)$ una funzione continua nell'intervallo $(-\omega, \omega)$.

Come è ben noto, (cfr. G. Adler [1]), esso ammette l'unica soluzione $V(t, \vartheta) = \int_{-\omega}^{\omega} \varphi(\vartheta)\,\frac{\rho^2 - t^2}{\rho^2 + t^2 - 2\,\rho\,t\cos(\vartheta - \tau)}\,d\tau$ continua e limitata in $\bar{C} - \{(\rho, \omega), (\rho, -\omega)\}$ e per ogni $\vartheta \neq \{-\omega, \omega\}$ esiste finito il limite $B_V(\vartheta) = \lim_{t \to \rho} \frac{\partial V}{\partial t}(t, \vartheta)$.

Ciò posto, consideriamo il problema:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \Delta U - a\,U = 0 & \text{in } C \\ U_{|\partial C} = V_{|\partial C}. \end{cases}$$

Esso ammette l'unica soluzione $U(t, \vartheta)$ continua e limitata in $\bar{C} - \{(\rho, \omega), (\rho, -\omega)\}$, avente l'espressione:

$$U(t, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_{-\omega}^{\omega} \varphi(\tau)\, e^{in\tau}\, d\tau}{I_n(\sqrt{a}\,\rho)} \cdot I_n(\sqrt{a}\,t)\, e^{in\vartheta}, \tag{2.3}$$

dove $I_n(\sqrt{a}\,t)$ è la funzione di Bessel modificata di 1ª specie; per U dimostriamo il seguente lemma:

LEMMA (2.1). — *Per la funzione* $U(t, \vartheta)$ *si ha*:

$$|U| \leq \max_{-\omega \leqslant \vartheta \leqslant \omega} |\varphi| \tag{2.4}$$

e per ogni $\vartheta \neq \{-\omega, \omega\}$ *esiste finito il limite*

$$B_U(\vartheta) = \lim_{t \to \rho} \frac{\partial U}{\partial t}(t, \vartheta) \tag{2.5}$$

e vale la maggiorazione:

$$|B_U(\vartheta)| \leq \frac{4a\rho}{\pi} \max |\varphi| + |B_V(\vartheta)|. \tag{2.6}$$

Dim. — La (2.4) segue banalmente dalla (2.3). Ciò detto, sia $W(t, \vartheta) \in H^2(\bar{C}) \cap C^\infty(C)$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta W - a W = -a V \\ W_{|\partial C} = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

È subito visto che la tesi del nostro lemma è equivalente alla seguente altra: per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$ esiste finito il limite:

$$B_W(\vartheta) = \lim_{t \to \rho} \frac{\partial W}{\partial t}(t, \vartheta) \tag{2.8}$$

e si ha

$$|B_W(\vartheta)| \leq \frac{4a\rho}{\pi} \max |\varphi|; \tag{2.9}$$

infatti la funzione $U = V + W$ è chiaramente soluzione del problema (2.2) e verifica la (2.5) e la (2.6).

Ciò posto, denotiamo con $B_W(\vartheta) \in L^2[0,2\pi]$ la traccia su ∂C di $\frac{\partial W}{\partial t}(t, \vartheta)$ ci proponiamo di determinare lo sviluppo in serie trigonometrica di Fourier di $B_W(\vartheta)$; a tal fine; poniamo:

$$z^{(n)} = I_n(\sqrt{a}\, t)\, e^{in\vartheta} \qquad n = (0, \pm 1, \pm 2, \ldots,);$$

come è ben noto si ha $\Delta z^{(n)} - a z^{(n)} = 0$ da cui si trae che la funzione $B_W(\vartheta)$ è soluzione del seguente sistema di equazioni di Fischer-Riesz (cfr. C. MIRANDA [7]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_W(\vartheta)\, e^{in\vartheta}\, d\vartheta = \frac{-a}{2\pi\rho\, I_n(\sqrt{a}\,\rho)} \int_C V\, I_n(\sqrt{a}\, t)\, e^{in\vartheta}\, dc;$$

da esso, con facili calcoli, si stabilisce per i coefficienti di Fourier C_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots)$ di $B_W(\vartheta)$ la seguente disuguaglianza:

$$|C_n| \leq \frac{4a\rho}{\pi} \max|\varphi| \frac{1}{n(n+2)}$$

da tale maggiorazione si deduce che $B_W(\vartheta)$ è continua in $[0,2\pi]$ e per un risultato di L. AMERIO, [5] (cfr. teorema II e III e dim.) sussiste la (2.8); la (2.9) è poi ovvia conseguenza della stessa maggiorazione; il lemma è così dimostrato.

Da tale lemma e con procedimenti analoghi a quelli del teorema I di G. ADLER in [1] si trae il seguente:

LEMMA (2.2). — *Se la funzione* $H(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$ *è soluzione dell'equazione* $(\Delta - a)H = 0$, *si ha la limitazione*:

$$\max_{\bar{\Omega}} |\operatorname{grad} H(x, y)| \leq \left(\frac{22\, a\rho}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\rho}\right) \max_{\Sigma} |H| +$$

$$+ 5 \max_{\Sigma} \left|\frac{dH}{ds}\right| + \frac{2\rho}{\sqrt{2}} \max_{\Sigma} \left|\frac{d^2 H}{ds^2}\right| .$$

3. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

Costruiamo una soluzione $z(P) \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ dell'equazione (1) tale che $z_{|\Sigma} = f$ e che verifichi la limitazione

$$|\operatorname{grad} z(P)| \leq H_1 \max|f| + H_2 \max|f'|$$

con H_1 e H_2 costanti dipendenti dai dati geometrici del dominio.

1° Caso: $0 < a_1 < a_2$.

Denotata con $K_n(x)$ la funzione di Bessel di seconda specie modificata e con r la distanza PQ poniamo:

$$(3.1) \qquad A_1(r) = \frac{\pi}{\log a_1 - \log a_2} (K_0(\sqrt{a_1}\, r) - K_0(\sqrt{a_2}\, r))$$

$$(3.2) \qquad A_2(r) = \frac{\pi}{a_2 - a_1} (a_1 K_2(\sqrt{a_1}\, r) - a_2 K_2(\sqrt{a_2}\, r));$$

essendo $2\varphi K_0(\sqrt{a_i}\, r)$ e $\operatorname{sen} 2\varphi K_2(\sqrt{a_i}\, r)$ $(i = 1, 2)$ soluzioni dell'equazione $(\Delta - a_i) u = 0$, la funzione:

$$(3.3) \qquad w(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma (2\varphi A_1(r) + \operatorname{sen} 2\varphi A_2(r)) f'(s)\, ds$$

è chiaramente soluzione della (1) in Ω.

Scindiamo la $w(P)$ nella somma:

$$(3.4) \qquad w(P) = w^{(1)}(P) + w^{(2)}(P) + w^{(3)}(P)$$

dove:

$$w^{(1)}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma (2\varphi + \operatorname{sen} 2\varphi) f'(s)\, ds,$$

$$w^{(2)}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma (2\varphi (A_1(r) - 1)) f'(s)\, ds,$$

$$w^{(3)}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma (\operatorname{sen} 2\varphi (A_2(r) - 1)) f'(s)\, ds.$$

Osserviamo che (cfr. C. MIRANDA [8]) la funzione $w^{(1)}(P)$ è di classe $C^\infty(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ e per essa, detto Q_0 un fissato punto di Σ e τ_0 e ν_0 l'asse tangente positivo e la normale interna a Σ in tal punto e detto ψ l'angolo formato dall'asse $\overrightarrow{QP}$ con ν_0 orientato nel verso che va $\overrightarrow{PQ}$ a ν_0, si ha:

$$(3.5) \qquad \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \tau_0}\right)_{P=Q_0} = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \left(\frac{4 \cos\psi \cos^2\varphi}{r}\right)_{P=Q_0} f'(s)\, ds +$$

$$+ f'(Q_0) = \chi_1(Q_0) + f'(Q_0)$$

inoltre si ha (cfr. G. ADLER [2]):

$$\max_{\bar{\Omega}} |\operatorname{grad} w^{(1)}| \leq \frac{2}{\pi}\left(\frac{L}{\rho} + 4850\right) \max |f'|, \tag{3.6}$$

$$\max_{\Sigma} |\chi_1| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{L}{\rho} + 5\right) \max |f'|, \tag{3.7}$$

$$\max_{\Sigma} \left|\frac{d\chi_1}{ds}\right| \leq \frac{4}{\pi}\left(\frac{L}{\rho} + \frac{6}{\rho}\right) \max |f'|. \tag{3.8}$$

Ci proponiamo di ricavare disuguaglianze analoghe per $w^{(2)}(P)$ e $w^{(3)}(P)$. A tal fine dimostriamo i seguenti lemmi:

LEMMA (3.1). — *Per le funzioni* $A_i(r)$ $(i = 1, 2)$ *valgono le limitazioni*:

$$|r A_i'(r)| \leq \frac{\pi}{2}; \qquad |A_i'(r)| \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{a_2}; \tag{3.9}$$

$$|r^2 A_i''(r)| \leq \frac{3}{2}\pi. \tag{3.10}$$

Dim. Incominciamo con l'osservare che valgono le disuguaglianze:

$$|K_n(x)| \leq \frac{1}{\chi^{n+1}}; \qquad |K_n(x)| \leq \frac{n+1}{\chi^{n+2}} \quad (n = 0, 1) \tag{3.11}$$

che si stabiliscono integrando opportunamente per parti nella seguente formula di rappresentazione per le funzioni $K_n(x)$ (cfr. WATSON [9]):

$$K_n(x) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) 2^n}{x^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\cos x u}{(u^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}\, du \tag{3.12}$$

Ciò posto, dimostriamo il lemma per $i = 1$.

Dalla (3.1) per le note formule ricorrenti per le funzioni di Bessel [1] si ha:

$$(3.13)\qquad A_1(r) = \frac{\pi}{\log a_2 - \log a_1}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial}{\partial t}K_0(\sqrt{t}\,r)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{\log a_2 - \log a_1}\int_{a_1}^{a_2}\frac{r}{2\sqrt{t}}K_1(\sqrt{t}\,r)\,dt,$$

da cui derivando rispetto ad r e utilizzando le già citate formule ricorrenti segue:

$$(3.14)\qquad A_1'(r) = \frac{\pi}{\log a_2 - \log a_1}\int_{a_1}^{a_2} -\frac{r}{2}K_0(\sqrt{t}\,r)\,dt$$

e quindi per le (3.11), restano stabilite le (3.9).

Derivando poi la (3.14) rispetto ad r si ha:

$$(3.15)\quad A_1''(r) = \frac{\pi}{\log a_2 - \log a_1}\,\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}(-K_0(\sqrt{t}\,r) + \sqrt{t}\,r K_1(\sqrt{t}\,r))\,dt$$

e dalle (3.11) si ha la (3.10).

Il lemma risulta così provato per $i = 1$; allo stesso modo si prova per $i = 2$.

LEMMA (3.2). — *Le funzioni* $A_i''(r)\,(i = 1, 2)$ *hanno un solo zero in* $]0, +\infty[$.

Dim. Proviamo il lemma per $i = 1$.

Incominciamo con l'osservare che la funzione $\mu(\tau) = -K_0(\tau) + \tau K_2(\tau)$ ha un solo zero τ_0 per $\tau \in]0, +\infty[$, infatti è evidente che $\lim_{\tau\to 0}\mu(\tau) = -\infty$, ed essendo $K_1(\tau) > K_0(\tau)$, risulta $\mu(\tau)$ positiva per $\tau > 1$; inoltre $\mu'(\tau) = K_1(\tau) - \tau K_0(\tau)$ è positiva per $\tau < 1$.

[1] Riportiamo le formule ricorrenti per le funzioni di Bessel di cui facciamo uso

$$K_n'(x) = -\frac{n}{x}K_n(x) - K_{n-1}(x);\quad K_n'(x) = \frac{n}{x}K_n(x) - K_{n+1}(x);\quad K_0'(x) = -K_1(x).$$

Ciò detto, nell'integrale della (3.15) effettuando la sostituzione $\tau = \sqrt{t}\, r$ si ha

$$r^2 A_1''(r) = \frac{\pi}{\log a_2 - \log a_1} \int_{\sqrt{a_1} r}^{\sqrt{a_2} r} \mu(\tau)\, \tau\, d\tau \tag{3.16}$$

da cui segue:

$$r^2 A_1''(r) \begin{cases} > 0 & \text{per } r \geq \dfrac{\tau_0}{\sqrt{a_1}} \\ < 0 & \text{per } r \leq \dfrac{\tau_0}{\sqrt{a_2}} \end{cases}$$

e per $r \in \left[\dfrac{\tau_0}{\sqrt{a_2}}, \dfrac{\tau_0}{\sqrt{a_1}} \right]$ si ha che $r^2 A_2''(r)$ è crescente; infatti per tali valori di r la (3.16) può scriversi:

$$r^2 A_1''(r) = \frac{\pi}{\log a_2 - \log a_1} \left(\int_{\sqrt{a_1} r}^{\tau_0} \mu(\tau)\, \tau\, d\tau + \int_{\tau_0}^{\sqrt{a_2} r} \mu(\tau)\, \tau\, d\tau \right) \tag{3.17}$$

e i due integrali che figurano al secondo membro della (3.17) sono funzioni crescenti di r. Il lemma risulta così provato, per $i = 1$; con un procedimento del tutto analogo può essere provato per $i = 2$.

LEMMA (3.3). — *Le funzioni* $w^{(2)}(P)$ *e* $w^{(3)}(P)$ *sono di classe* $C^\infty(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *e per esse si ha*:

$$\max_{\bar{\Omega}} |\operatorname{grad} w^{(2)}| \leq (1 + \Phi) \left(\frac{1}{2} \frac{L}{\rho} + 4 + 2 \sqrt{a_2}\, \rho \right) \max |f'|, \tag{3.18}$$

$$\max_{\bar{\Omega}} |\operatorname{grad} w^{(3)}| \leq \left(\frac{L}{\rho} + 6 + 3 \sqrt{a_2}\, \rho \right) \max |f'|. \tag{3.19}$$

Dim. Dimostriamo il lemma per la $w^{(2)}(P)$; per la $w^{(3)}(P)$ si procede in maniera analoga.

Detta λ una qualsiasi direzione e β l'angolo formato dall'asse $\overrightarrow{QP}$ con λ, orientato nel verso che va da $\overrightarrow{QP}$ a λ, poniamo:

$$M(P, Q) = -2 \operatorname{sen} \beta \frac{A_1(r) - 1}{r} + 2 \varphi \cos \beta\, A_1'(r);$$

con qualche calcolo si prova che:

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} M(P, Q) f'(s)\, ds ; \tag{3.20}$$

dalla continuità di $\dfrac{A_1(r) - 1}{r}$ e di $A'(r)$, $\forall r \geq 0$, e di $f'(s)$ su Σ, nonché dalla regolarità di Ω segue pertanto che $w^{(2)}(P) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.

Proviamo ora la (3.18). Se il punto $P \in \bar{\Omega}$ è tale da risultare $\min_{Q \in \Sigma} r \geq \rho$, allora dalla (3.20) e dal lemma (3.1) segue subito la (3.18).

Sia quindi $P \in \bar{\Omega}$ e tale che $\min_{Q \in \Sigma} r = t < \rho$ e sia $Q_0 \in \Sigma$ il punto di Σ per il quale $\overline{PQ_0} = t$; se $P \in \Sigma$ sia $Q_0 \equiv P$.

Dal lemma (3.1) discende subito che:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Sigma - Z_{Q_0}(\rho)} M(P, Q) f'(s)\, ds \right| \leq \frac{1}{2} (1 + \Phi) \frac{L}{\rho} \max |f'| , \tag{3.21}$$

In virtù della (1.1) sull'arco $Z_Q(\rho)$ si ha poi:

$$|ds| \leq \sqrt{2}\,(r\,|d\psi| + |dr|) , \tag{3.22}$$

e per $r \leq \rho$,
dal lemma (3.1) e dalla (3.22) si trae:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{Z_{Q_0}(\rho)} M(P, Q) f'(s)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \max |f'| \left(\int_0^{\pi/2} (|A_1(r) - 1| + \Phi\, |r A_1'(r)|)\, d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\rho} \left(\frac{|A_1(r) - 1|}{r} + \Phi\, |A_1'(r)| \right) dr \right) \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \max |f'| \left(\frac{\pi^2}{4} (1 + \Phi) + \frac{\pi}{2} (1 + \Phi) \sqrt{a_2}\, \rho \right) \leq$$

$$\leq (1 + \Phi)(2\sqrt{a_2}\, \rho + 4) \max |f'| ;$$

da quest'ultima disuguaglianza e dalla (3.21) segue la (3.18); il lemma resta così provato.

Posto ora:

$$(3.23)\qquad \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial \tau_o}\right)_{P\equiv Q_o} = \chi_2(Q_o) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\partial w^{(3)}}{\partial \tau_o}\right)_{P\equiv Q_o} = \chi_3(Q_o)$$

dimostriamo il seguente lemma:

LEMMA (3.4). — *Per* χ_2 *e* χ_3 *valgono le limitazioni*:

$$(3.24)\qquad \max_{\Sigma}\left|\frac{d}{ds}\chi_2\right| \leq \left((1+2\Phi)\frac{L}{\rho^2} + 2(1+\Phi)\sqrt{a_2}\right)\max|f'|,$$

$$(3.25)\qquad \max_{\Sigma}\left|\frac{d}{ds}\chi_3\right| \leq \left(\frac{3L}{\rho^2} + 8\sqrt{a_2}\right)\max|f'|.$$

Dim. Posto

$$N(P,Q)_{P\equiv Q_o} = \left(-2\operatorname{sen}2\psi\,\frac{A_1(r)-1}{r^2} + \right.$$

$$\left. + (2\operatorname{sen}2\psi + 2\varphi\cos^2\psi)\,\frac{A_1'(r)}{r} + 2\varphi\operatorname{sen}^2\psi\,A_1''(r)\right)_{P\equiv Q_o},$$

si ha:

$$(3.26)\qquad \left(\frac{d}{ds}\chi_2\right)_{P\equiv Q_o} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}(N(P,Q))_{P\equiv Q_o}\,f'(s)\,ds.$$

Dal lemma (3.1) si deduce facilmente:

$$(3.27)\qquad \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Sigma - Z_{Q_o}(\rho)}(N(P,Q))_{P\equiv Q_o}\,f'(s)\,ds\right| \leq (1+2\Phi)\frac{L}{\rho^2}\max|f'|.$$

Avendosi poi sull'arco $Z_{Q_o}(\rho)$ (cfr. ADLER [2]):

$$|\cos\psi| \leq \frac{1}{2}|\vartheta|^2;\ |\cos\varphi| \leq \frac{3}{2}|\vartheta|;\ r \geq \frac{2}{\pi}\rho|\vartheta|;$$

[2] Sia Γ_i la circonferenza tangente internamente a Σ in Q_o; per ogni $P \in Z_{Q_o}(\rho)$ sia P' il punto di Γ_i tale che la retta PP' sia parallela alla normale ν a Σ in Q_o, ϑ è l'angolo formato da ν e dalla retta per P' passante per il centro di Γ_i.

dalla (1.1), con l'ausilio dei lemmi (3.1) e (3.2), per $r \leq \rho$ si hanno le maggiorazioni:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{Z_{Q_0}(\rho)} (N\ (P,\ Q))_{P\equiv Q_0}\ f'(s)\,ds\right| \leq \frac{\max|f'|}{\pi}\left(\int_{Z_{Q_0}(\rho)}\left(\frac{\pi}{4}\frac{\vartheta}{\rho\,\vartheta}\left|\frac{A_1(r)-1}{r}\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi}{4}\frac{\vartheta}{\rho\,\vartheta}|A_1'(r)| + \frac{\pi}{4}\frac{\vartheta}{\rho\,\vartheta}\Phi\,|A_1'(r)|\right)ds + \int_{Z_Q(\rho)}\Phi\,|A_1''(r)|\,ds\right) \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\max|f'|\left(\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}\frac{\pi}{4}\sqrt{a_2}(2+\Phi)dr + 2\,\Phi\max_{r\geq 0}|A_1'(r)|\right) \leq$$

$$\leq 2\sqrt{a_2}(1+\Phi)\ \max|f'|$$

e dalla (3.27) si deduce la (3.24). La (3.25) si prova allo stesso modo.

Poniamo ora

$$\varphi(Q_0) = \chi_1(Q_0) + \chi_2(Q_0) + \chi_3(Q_0). \tag{3.28}$$

Dai lemmi fin qui provati si deduce il seguente:

LEMMA (3.5). — *La funzione* $w(P)$ *è di classe* $C^\infty(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ *e per essa si hanno le limitazioni*:

$$\max_{\bar\Omega}|w| \leq 2(\Phi+1)\,L\max|f'|, \tag{3.29}$$

$$\max_{\bar\Omega}|\operatorname{grad} w| \leq \tag{3.30}$$

$$\leq\left((3+\Phi)\frac{L}{\rho} + (5+2\Phi)\sqrt{a_2}\,\rho + 4860 + 4\Phi\right)\max|f'|,$$

$$\max_{\Sigma}|\varphi| \leq \left((3+\Phi)\frac{L}{\rho} + (5+2\Phi)\sqrt{a_2}\rho + 11 + 4\Phi\right)\max|f'|, \tag{3.31}$$

$$\max_{\Sigma}\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| \leq \left((6+2\Phi)\frac{L}{\rho^2} + \frac{6}{\rho} + (10+2\Phi)\sqrt{a_2}\right)\max|f'|. \tag{3.32}$$

Sia ora $\omega \in C^\infty(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ soluzione del problema al contorno:

$$\begin{cases} \Delta\omega - a_1\omega = 0 & \text{in } \Omega \\ \left.\dfrac{d\omega}{ds}\right|_\Sigma = \varphi & ; \end{cases}$$

dalle (3.5), (3.23) e (3.28) discende subito che su Σ si ha:

$$\frac{d}{ds}(w - \omega) = f'(s) \tag{3.33}$$

da cui

$$(w - \omega)_{|\Sigma} = f + c \tag{3.34}$$

c essendo una costante. Indichiamo allora con ω_1 la soluzione di $(\Delta - a_1)\,\omega_1 = 0$, uguale $-c$ su Σ. Poniamo:

$$H(P) = \omega(P) - \omega_1(P); \tag{3.35}$$

$$z(P) = w(P) - H(P). \tag{3.36}$$

Risulta chiaramente che $z(P)$ è soluzione dell'equazione (1) in Ω e che:

$$z(P)_{|\Sigma} = f. \tag{3.37}$$

Dalle (3.34) e (3.35) discende che:

$$\max_{\Sigma} |H(P)| \leq \max_{\Sigma} |w(P)| + \max |f|$$

e dal lemma (2.2), nonché dal lemma (3.5), per $a_1 \rho^2 \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$ si ha allora che:

$$\max_{\Omega} |\operatorname{grad} H| \leq \frac{10}{\rho} \max |f| + \tag{3.38}$$

$$+ \left((47 + 29\,\Phi)\,\frac{L}{\rho} + (45 + 14\,\Phi)\,\sqrt{a_2}\,\rho + (67 + 20\,\Phi) \right) \max |f'|$$

da cui:

$$\max_{\bar{\Omega}} |\operatorname{grad} z| \leq \frac{10}{\rho} \max |f| + \tag{3.39}$$

$$+ \left((50 + 30\,\Phi)\,\frac{L}{\rho} + (50 + 16\,\Phi)\,\sqrt{a_2}\,\rho + 4927 + 24\,\Phi \right) \max |f'|\,.$$

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema.

Dalla (3.37) si ha:

$$(u(\mathrm{P}) - z(\mathrm{P}))_{|\Sigma} = 0$$

e quindi dal teorema 2 di A. CIOFFI di [6] si ha:

$$\max_{\overline{\Omega}} |\operatorname{grad}(u - z)| \leq \mathrm{K}_1 \max_{\Sigma} \left| \frac{d}{d\nu} (u - z) \right| \leq$$

$$\leq \mathrm{K}_1 (\max |g| + \max_{\overline{\Omega}} |\operatorname{grad} z|);$$

da tale maggiorazione e dalla (3.39) discende il teorema.

Nei casi $0 < a_1 = a_2$ e $0 = a_1 < a_2$ il Teorema si consegue allo stesso modo del primo caso, ponendo:

$$\mathrm{A}_1(r) = \frac{\pi}{2} \sqrt{a_1}\, r\, \mathrm{K}_1(\sqrt{a_1}\, r)$$

$$\mathrm{A}_2(r) = \frac{\pi}{2} \sqrt{a_1}\, r\, \mathrm{K}_3(\sqrt{a_1}\, r) - 2\pi\, \mathrm{K}_2(\sqrt{a_1}\, r)$$

se $0 < a_1 = a_2$,

$$\mathrm{A}_1(r) = 1$$

$$\mathrm{A}_2(r) = \frac{4}{a_2 r^2} - \pi\, \mathrm{K}_2(\sqrt{a_2}\, r)$$

se $0 = a_1 < a_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ADLER, *Maggiorazioni del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno*, Mem. Acc., vol. VI, fasc. 7°, pp. 183-201, Roma 1961.

[2] G. ADLER, *Maggiorazione delle funzioni biarmoniche di due variabili*, Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat., serie IV, vol. XXVIII (1961).

[3] G. ADLER, *Principi di massimo relativi alle equazioni ellittico paraboliche nel caso di condizioni al contorno non continue e non limitate*, Rend. Acc. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XXX, pp. 178-181 (1961).

[4] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBRG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differenzial equations satisfying general boundary conditions*, Communications on pure and applied mathematics, vol. XII, pp. 623-727 (1959).

[5] L. AMERIO, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi,* Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LXXVIII, IX serie III, Milano 1944-45, pp. 79-102.

[6] A. CIOFFI, *Una formula di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione del quarto ordine,* Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli, serie IV, vol. XLIII, 1976.

[7] C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type,* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1970.

[8] C. MIRANDA, *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche in due variabili,* Giorn. di Matem. Battaglini, LXXVIII (1948-49) pp. 97-118.

[9] WATSON, *Theory of Bessel functions,* II edizione 1944.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, F. Cafiero e C. Ciliberto.

Main properties of the dansylated derivative of seminal ribonuclease *

Nota di BENEDETTA FARINA, ANTONELLA CARSANA, PIERA QUESADA
e del socio ordinario ENZO LEONE **

(Adunanza del 3 giugno 1978)

SUMMARY. — Dansylation of seminal ribonuclease has been performed by the same experimental techniques described for dansylation of pancreatic ribonuclease (RNAase A). It has been found that the seminal enzyme, a dimeric protein (m.w. 27,400), usually binds from 2 to 4 moles dansyl chloride per mole, with a parallel decrease of specific activity; the decrease amounts to about 50 % by the Kunitz assay on yeast RNA, and to about 30 % by the cytidine 2',3'-cyclic phosphate assay. Chromatography of DNS-seminal RNAase on a column of SP-Sephadex C-50 has given a peak with a molar DNS/protein ratio of 3. The u.v. spectrum of the homogenous fraction of the dansylated derivative shows the characteristic peak at 330 nm, specific of the dansyl group. Dansylation experiments in the presence of phosphate, which has a protecting effect on the molecule active site, as well as experiments of different duration and at different DNS-Cl concentrations, do not lead to significative changes in the extent of dansylation and inactivation of the enzyme, relative to standard conditions.

RIASSUNTO. — La dansilazione della ribonucleasi seminale è stata effettuata seguendo le tecniche sperimentali già descritte per la ribonucleasi pancreatica (RNAasi A).

L'enzima seminale, una proteina dimerica (p.m. 27.400), lega da 2 a 4 moli di dansil-cloruro per mole di proteina, con un conseguente decremento della attività specifica di circa il 50 % usando come substrato RNA da lievito (saggio Kunitz) e del 30 % con citidina 2',3'-fosfato ciclico.

La cromatografia della DNS-RNAasi seminale su colonna di SP-Sephadex C-50 separa una frazione con un contenuto di dansile pari a circa 3 moli per mole di proteina. Lo spettro u.v. di una frazione omogenea del derivato dansilato della ribonu-

* Istituto di Chimica Organica e Biologica, Facoltà di Scienze, Università di Napoli.

** This work was done with the financial help of CNR, Contract N° 77.00343.85 of Progetto Finalizzato della Biologia della Riproduzione.

Abbreviations: DNS, dansyl, (5-dimethylamino-1-naphthalenesulfonyl)
RNA, ribonucleic acid
Tris, tris(hydroxymethyl)-aminomethane
t.l.c., thin-layer chromatography

clcasi seminale mostra il massimo di assorbimento a 330 nm caratteristico del gruppo dansile.

Prove di dansilazione sia in presenza di fosfato, che protegge il sito attivo della molecola, sia a diversi tempi di reazione e a differenti concentrazioni di DNS-Cl, non svelano varazioni significative nel grado di dansilazione e di inattivazione dell'enzima.

Introduction

The characteristic fluorescence conferred to enzyme proteins by reacting with dansyl chloride represents an advantageous procedure of labeling which can be used for studying their structure, on the basis of possible modifications of their physico-chemical and enzymological properties.

Reaction of DNS-Cl with pancreatic RNAase A, studied by White [1], has shown that the enzyme activity remains totally unaffected on dansylation which leads, in given experimental conditions, to the binding of about 2 moles of reagent per mole protein. In a preliminary study, similar experiments [2] with seminal RNAase, mol. wt. 27,400, have shown this enzyme, at difference with RNAase A, to undergo on dansylation a decrease in activity. It may be inferred that introduction of dansyl groups in the seminal RNAase molecule leads to chemical modifications which are reflected on the enzyme mechanism of action.

The purpose of the present work has been, therefore, to examine some properties of the dansyl-derivative of seminal RNAase in order to clarify the amount and the extension of modifications caused by the reaction with DNS-Cl.

Materials and methods

Bull seminal ribonuclcasc has been isolated and purified following a procedure worked out in our laboratory [3]. DNS-Cl and cytidine 2',3'-cyclic phosphate were products from Sigma. Yeast RNA (from Sigma) was purified according to Shortman [4]. SP-Sephadex C-50 and Sephadex G-25 were products of Pharmacia. Polyamide sheets were from BDH, silica-gel sheets from Merck.

The reaction of seminal RNAase with DNS-Cl in « standard conditions » was performed according to White [1]. To an aqueous solution of the protein (5 mg/ml), the pH of which was taken to 8.7 with 0.2 N NaOH, a DNS-Cl solution (0.4 mg/ml) in acetone is added, in the proportion of 4 moles per mole of dimeric protein, after cooling at 4° C both solutions. The reaction is left to proceed in the

dark for 3 hours at 4° C; the protein is then precipitated at − 5° C by addition of 5 volumes of a mixture of acetone —N HCl (39: 1), and the precipitate is washed 3 times with the same mixture, and twice with ether at 0° C. After evaporating the ether at room temperature the protein is dissolved in H_2O and dialyzed. The recovery of labeled protein has been calculated both by the procedure of LOWRY *et al.* [5], using as a reference a solution of non-labeled seminal RNAase, and by dry weight determination with a Cahn-Gram electrobalance.

U.v. spectra were read with a Cary mod. 118 spectrophotometer. Polyacrylamide gel electrophoresis at pH 4.5 was effected according to REISFELD *et al.* [6].

For column chromatography, SP-Sephadex C-50 was equilibrated, in a 0.8 × 18 cm column, with 0.005 M Tris-HCl buffer pH 7.0, in the presence of 0.1 M NaCl. Following adsorption of sample (40 mg) the column was eluted first with the same buffer as above (about 3 column volumes), and then with 0.005 M Tris-HCl buffer pH 8.0 containing 0.1 M NaCl (2 column volumes).

A linear concentration gradient was applied at this point, utilizing the above buffer solution with NaCl from 0.1 to 0.5 M. The eluted fractions were read at 280 and 330 nm and the protein content of single fractions, after desalting, was determined according to LOWRY *et al.* [5].

RNAase activity, with yeast RNA as a substrate, was assayed by the KUNITZ [7] procedure; activity towards cytidine 2',3'-cyclic phosphate was determined according to CROOK *et al.* [8].

The amount of dansyl groups bound, mole per mole, by the dimeric seminal RNAase protein was calculated according to the following formula:

$$D = \frac{\alpha \cdot M}{3450 \cdot c}$$

where M is the mol. wt. of seminal RNAase (27,400), α is the reading at 330 nm, c is the protein concentration and 3450 is the molar extinction at 330 nm of the sulfonamide derivative of DNS-Cl, in aqueous solution at pH 5.0, which is assumed to be identical to the analogous coefficient of the protein dansyl derivative.

RESULTS

Seminal ribonuclease binds from 2 to 4 dansyl groups per mole of dimeric protein, when the same conditions are followed, described by WHITE [1] for dansylation of pancreatic ribonuclease.

Labeling of seminal ribonuclease leads to a decrease of enzyme activity, the extent of which is related to the degree of dansylation, when enzyme activity is measured by the usual Kunitz spectrophotometric assay with yeast RNA. So, with 3 to 4 dansyl groups per mole protein, an inactivation of about 50 % is observed, and the inactivation is limited to 35 % when 2 dansyl groups are bound per mole protein. On the other hand, irrespective of the number of bound dansyl groups, a 35 % inactivation is always observed, when enzyme activity is measured on cytidine 2',3'-cyclic phosphate as a substrate.

The dansylation reaction of seminal RNAase has been analysed in function of time and of reagent concentration. Experiments have been performed at different times (1,2,3,6,24 hours), and at different DNS-Cl/protein molar ratios (4,6,8,10,20 and 50 DNS groups per mole protein). In no instance dansylation extent and inactivation degree could be considered to significantly differ with respect to values observed in standard conditions. In fact, even with a 24 hours reaction or with 50 times excess of DNS-Cl, at most 4 moles dansyl groups per mole seminal RNAase are bound.

On the basis of such results, all dansylation reactions have been routinely performed for 3 hours, with a reagent concentration equivalent to 4 dansyl groups per mole protein.

The possible effect of phosphate has been investigated, in order to see whether a variation in the degree both of dansylation and of inactivation occurred. Dansylation procedure was therefore modified as follows: protein was dissolved in 0.1 M phosphate buffer pH 8.2 at a concentration of 5 mg/ml and reaction with DNS-Cl, in the standard conditions, was performed at room temperature for 3 hours. To get rid of non-bound reagent, of secondary reaction products and of phosphate, the sample was successively chromatographed on a Sephadex G-25 column (cm 1.8×25) equilibrated with H_2O, which was also used as an eluting medium. An experiment, performed in parallel in the absence of phosphate but with all other conditions unchanged, has shown that in both cases there is no variation either in extent of dansylation or in activity levels. In fact, in both cases 4 dansyl groups per mole protein had been bound with 50 % or 35 % inactivation, depending whether calculated on the basis of the Kunitz test on yeast RNAase (50 %) or of the cytidine 2',3'-cyclic phosphate test (35 %); all of these values closely correspond to those obtained in standard conditions.

In order to obtain a homogenous DNS-seminal RNAase preparation free from non-labeled protein an SP-Sephadex C-50 column chromatography was performed. As it can be seen from Fig. 1, after

a small protein peak which is initially eluted, and which probably corresponds to a secondary reaction product, all ribonuclease activity is eluted in a single peak in the ionic strength interval between 0.2 and 0.35 M NaCl.

This peak contains seminal RNAase species with different extent of dansylation. All fractions showing a dansyl content of 3 moles per mole protein were pooled together, concentrated and utilized in analyses aimed at a full characterization of the dansylated protein.

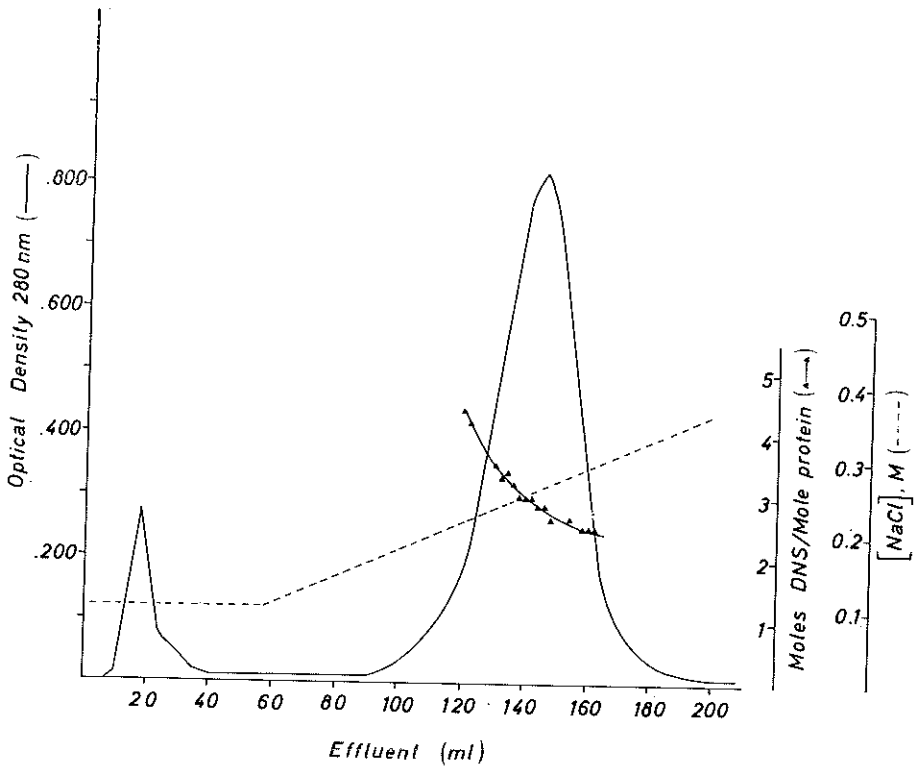


FIG. 1. - SP-Sephadex C-50 column (cm 0.8 × 18) chromatography of DNS-seminal RNAase. Fraction volume, 1 ml; flow rate, 20 ml/hr. |————|, optical density at 280 nm; |— — — —|, eluant molarity; |—▲—▲—|, DNS content.

U.v. spectra of DNS-seminal RNAase and of DNS-RNAase A show a marked similarity (Fig. 2 and 3).

Polyacrylamide gel electrophoresis at pH 4.5 of DNS-seminal RNAase shows a single component with a mobility lower than the native protein (Fig. 4).

To identify the aminoacid residues bound to dansyl groups a hydrolysis of DNS-seminal RNAase in 5.7 N HCl for 18 hours at

110° C was performed; the hydrolysate was then analysed by thin-layer chromatography on polyamide sheets according to the procedure of HARTLEY [9].

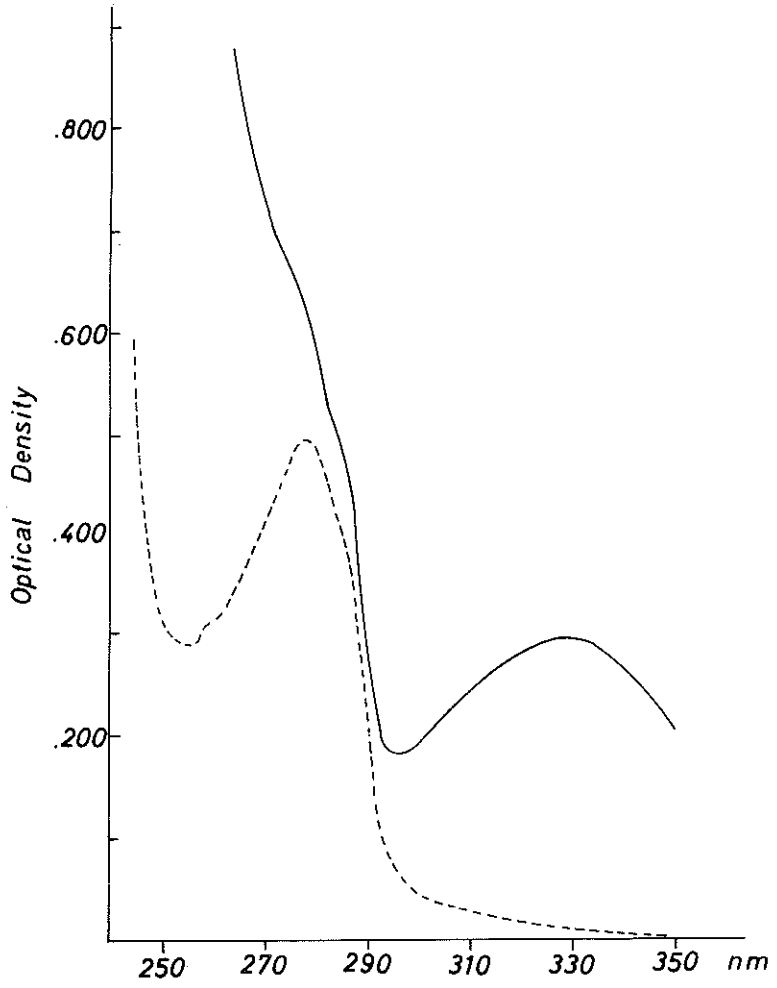


FIG. 2. - U. v. spectrum of seminal RNAase (1 mg/ml), native (|— — — —|) and dansylated (|————|) in 0.1 M acetate buffer, pH 5.0.

Bis-DNS-lysine and α- and/or ε-DNS-lysine were found to be the only dansyl-aminoacids of the hydrolysate. The presence of bis-DNS-lysine, which was confirmed by t.l.c. on silica gel with a benzene-pyridine-acetic acid (80:20:2) system [10], shows that the labeling occurs on the N-terminal residue of the protein. This result is a

confirmation that the amino-groups of lysine residues are primarily interested in the dansylation reaction, although a partial dansylation of tyrosine and histidine residues as well [11] cannot be ruled out.

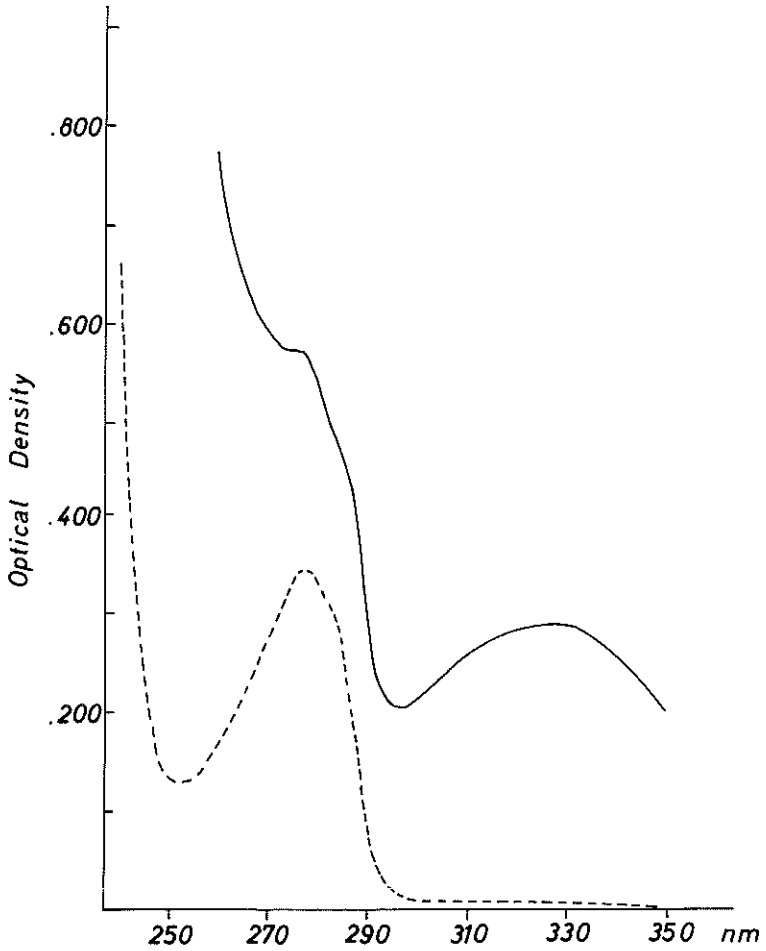


FIG. 3. - U. v. spectrum of RNAase A, native (0,5 mg/ml, |— — — —|) and dansylated (0,6 mg/ml, |————|), in 0.1 M acetate buffer, pH 5.0.

CONCLUSIONS

Seminal RNAase shows, in standard conditions, an extent of dansylation comparable to that reported for RNAase A [1], if allowance is made for the monomeric nature of the pancreatic enzyme, which binds 1.8 dansyl groups per mole protein. The binding of 3.6

dansyl groups per mole of seminal RNAase, a dimeric protein, is equivalent to 1.8 dansyl groups per monomeric protein. Dansylation gives, however, quite different results on the enzyme activity; this is unchanged in DNS-RNAase A whereas it undergoes a definite decrease in DNS-seminal RNAase. Moreover, the extent both of dansylation and of inactivation of the seminal RNAase remains unchanged if one increases time of incubation and dansyl concentration beyond standard conditions (3 hours at 4° C, and 4 moles DNS-Cl per mole

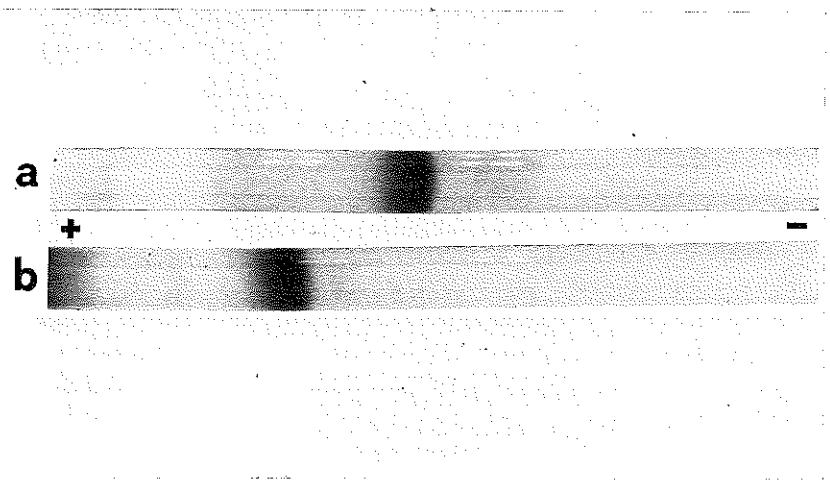


FIG. 4. - Polyacrylamide gel electrophoresis at pH 4.5 of seminal RNAase, native (a) and dansylated (b).

protein, respectively). This last observation gives support to the hypothesis that native seminal RNAase occurs in such a conformational state that the aminoacid residues accessible to dansylation are quite limited; for this reason an extended incubation time or an excess of reagent have negligible effect both on dansyl binding and on enzyme activity.

The different degree of enzyme inactivation which results for dansylated seminal RNAase depending on the adopted procedure (50 % decrease by the Kunitz assay versus 30 % decrease by the cyclic CMP assay) is probably explained assuming a major effect of dansylation on the initial overall enzymic reaction, as measured by the Kunitz assay, rather than on the hydrolysis of cyclic pyrimidine nucleotides.

It appears significant the result that seminal RNAase dansylation in the presence of phosphate does not carry any difference in the

extent of dansylation and inactivation in respect to the protein treated in the usual, phosphate-less conditions. It is known from modification studies of RNAase A [12, 13, 14] that phosphate has a protecting effect on lysine 41, which is essential for enzyme activity. In this light, the decrease of seminal RNAase activity, which is observed on dansylation both in the presence and in the absence of phosphate, appears to rule out the implication of modifications at lysine 41; it seems rather to be supposed that the introduction of dansyl groups leads to specific interactions of these groups with aminoacid residues which are not direct constituents of the active site but have however an influence on its catalytic function, leading to a significant decrease of activity. In RNAase A, on the contrary, it is probable that the specific differences in the primary structure relative to the seminal enzyme, together with its monomeric nature, do not lead, on dansylation, to significant conformational changes of activity, which in fact is left inaltered. On the basis of these observations further research is being carried out with the aim of identifying the aminoacid residues specifically reacted upon by the dansyl groups.

REFERENCES

[1] WHITE, F. H. Jr., *J. Biol. Chem.*, **239**, 1032-1037 (1964).
[2] FARINA, B., QUESADA, P., CARSANA, A. e LEONE, E., *II Congr. Naz. Soc. It. Biochim. Abstr.* **37** (Venezia 1976).
[3] D'ALESSIO, G., FLORIDI, A., DE PRISCO, R., PIGNERO, A. e LEONE, E., *Eur. J. Biochem.*, **26**, 153-161 (1972).
[4] SHORTMAN, K., *Biochim. Biophys. Acta*, **51**, 37-49 (1961).
[5] LOWRY, O. H., ROSEBROUGH, N. J., FARR, A. L. e RANDALL, R. J., *J. Biol. Chem.*, **193**, 265-275 (1951).
[6] REISFELD, R. A., LEWIS, V. J. e WILLIAMS, D. E., *Nature*, **195**, 281-283 (1962).
[7] KUNITZ, M., *J. Biol. Chem.*, **164**, 563-568 (1946).
[8] CROOK, E. M., MATHIAS, A. P. e RABIN, B. R., *Biochem. J.*, **74**, 234-238 (1960).
[9] HARTLEY, B. S. e MASSEY, V., *Biochim. Biophys. Acta*, **21**, 58-70 (1956).
[10] MORSE, D. e HORECKER, B. L., *Anal. Biochem.*, **14**, 429-433 (1966).
[11] WEBER, G., *Biochem. J.*, **51**, 155-167 (1952).
[12] HIRS, C. H. W., HALMANN, M. e KYCIA, J. H., in « Biological Structure and Function », Goodwin, T. W. e Lindberg, O., Eds. Vol. **1**, 41-57, Academic Press, London, New York (1961).
[13] CROOKE, J. P., ANFINSEN, C. B. e SELA, M., *J. Biol. Chem.*, **238**, 2034-2039 (1963).
[14] FRENSDORFF, A. e SELA, M., *Eur. J. Biochem.*, **1**, 267-280 (1967).

Sulle derivate dei polinomi di Stancu

Nota di GIUSEPPE MASTROIANNI e MARIO ROSARIO OCCORSIO
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 3 giugno 1978)

RIASSUNTO. — Si studia la convergenza delle successioni delle derivate dei polinomi di Stancu associati ad una funzione sufficientemente regolare. Si dimostra che i polinomi di Stancu conservano l'eventuale concavità (convessità) della funzione.

SUMMARY. — The authors study the convergence of the sequences of the derivatives of the Stancu's polynomials for sufficiently smooth functions.

They show that Stancu's polynomials have the same concavity (convexity) of the related function.

1. - INTRODUZIONE

Come è ben noto, la pseudopotenza $x^{(r,h)}$ di base reale x, pseudoesponente intero non negativo r e parametro reale h è definita mediante la posizione

$$x^{(r,h)} = \begin{cases} 1 & \text{per } r = 0 \\ \prod_{s=0}^{r-1} (x - s\,h) & \text{per } r > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Come è noto [1], i polinomi di Stancu si possono esprimere mediante le pseudopotenze. Invero, detto $S_m(\alpha; f; x)$ il polinomio di Stancu nella variabile x di grado m e parametro reale non negativo α, associato alla funzione $f \in C^0\,[0, 1]$, si ha:

$$S_m(\alpha; f; x) = \sum_0^m {}_i \binom{m}{i} \frac{x^{(i,-\alpha)}\,(1 - x)^{(m-i,-\alpha)}}{1^{(m,-\alpha)}}\, f\left(\frac{i}{m}\right) \tag{1.2}$$

Le significative proprietà di cui godono i polinomi di Stancu, ne consentono un proficuo impiego nella teoria dell'approssimazione delle funzioni continue [1-2].

Con questo lavoro si vuole contribuire allo studio dei polinomi di Stancu. Si dimostra (cfr. n. 2) che la successione

$$\{S_m^{(p)}(\alpha; f; x)\}_{m\in N}$$

delle derivate p-me dei polinomi di Stancu, associati ad una funzione $f \in C^p[0, 1]$, converge uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$ alla derivata p-ma della f, e si danno utili formule di maggiorazione dell'errore. Si dimostra inoltre (cfr. n. 3) che se $f \in C^p[0, 1]$ è convessa (concava) di ordine $p - 1$ [1], i polinomi di Stancu di grado m ($m \geq p$), associati ad f, sono convessi (concavi) dello stesso ordine.

2. - Posto nella (1.2):

$$w_i(m, \alpha, x) = \frac{\binom{m}{i} x^{(i,-\alpha)} (1 - x)^{(m-i,-\alpha)}}{1^{(m,-\alpha)}} \tag{2.1}$$

derivando rispetto a x, si ha:

$$\frac{d}{dx} S_m(\alpha; f; x) = \sum_0^m{}_i f\left(\frac{i}{m}\right) \frac{d}{dx} w_i(m, \alpha, x)$$

Tenendo allora presente che risulta:

$$\frac{d}{dx} x^{(r+1,h)} = \sum_0^r{}_k k! \binom{r+1}{k+1} (-h)^k x^{(r-k,h)},$$

con facili calcoli si ottiene:

$$\frac{d}{dx} S_m(\alpha; f; x) = \tag{2.2}$$

$$= \sum_0^{m-1}{}_j (\alpha m)^j b_{j,m} \sum_0^{m-j-1}{}_i w_i(m - j - i, \alpha, x) \frac{\frac{\Delta_{i+1}}{m} f\left(\frac{i}{m}\right)}{(j+1)/m}$$

ove si è posto:

$$b_{j,m} = \prod_{q=0}^{j} \frac{1 - \frac{q}{m}}{1 - (m - q - 1)\alpha}$$

[1] Una funzione f si dice convessa (concava) di ordine $p - 1$ in [a, b] se tutte le differenze divise di ordine p su punti di $[a, b]$ sono positive (negative).

Si generalizza poi la (2.2) fornendo un'espressione della derivata p-ma $S_m^{(p)}(\alpha; f; x)$. Posto invero:

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_p) \in \mathbf{N}^p$$

$$\sigma_0 = 1; \quad \sigma_s = \sum_1^s{}_j (h_j + 1) \qquad s \geq 1$$

$$\mathrm{I}_j = [0, m - \sigma_{j-1} - 1] \cap \mathbf{N}$$

$$\mathfrak{I}_p = \mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2 \times \ldots \times \mathrm{I}_p$$

$$a_h = \prod_1^p{}_r \; b_{h_r, m-\sigma_{r-1}} \; \alpha^{h_r} \; (m - \sigma_{r-1})^{h_r} \left(1 - \frac{\sigma_{r-1}}{m}\right)$$

$$u_j = (h_j + 1)/m; \quad \nu_p = m - \sigma_{p-1} - 1$$

procedendo per induzione si ottiene:

$$(2.3) \quad S_m^{(p)}(\alpha; f; x) = \sum_{h \in \mathfrak{I}_p} a_h \sum_0^{\nu_p}{}_i \, w_i(\nu_p, \alpha, x) \prod_1^p{}_j \frac{1}{u_j} \; \Delta_{u_j} f\left(\frac{i}{m}\right)$$

Isolando nella (2.3) il termine corrispondente al multiindice:

$$h = (0, 0, \ldots, 0) = 0 \in \mathbf{N}^p$$

si ottiene:

$$(2.4) \quad S_m^{(p)}(\alpha; f; x) = p! \prod_1^p{}_\nu \frac{1 - \dfrac{\nu - 1}{m}}{1 + (m - \nu)\alpha} \sum_0^{m-p}{}_i \, w_i(m - p, \alpha, x)$$

$$\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+p}{m}; f\right] +$$

$$+ \sum_{h \in \mathfrak{I}_p - \{0\}} a_h \sum_0^{\nu_p}{}_i \, w_i(\nu_p, \alpha, x) \prod_1^p{}_j \frac{1}{u_j} \; \Delta_{u_j} f\left(\frac{i}{m}\right)$$

Posto poi:

$$(2.5) \qquad \lambda_{h,p}(\alpha, x) = a_h \sum_0^{\nu_p}{}_i \, w_i(\nu_p, \alpha, x) \prod_1^p{}_j \frac{1}{u_j} \; \Delta_{u_j} f\left(\frac{i}{m}\right)$$

$$(2.6) \qquad \varphi_{m,p}(\alpha, x) = \sum_{h \in \mathfrak{I}_p - \{0\}} \lambda_{h,p}(\alpha, x); \quad \beta_{m,p}^{\alpha} = \prod_1^p{}_\nu \frac{1 - \dfrac{\nu - 1}{m}}{1 + (m - \nu)\alpha}$$

la (2.4) si scrive:

$$S_m^{(p)}(\alpha; f; x) = p!\, \beta_{m,p}^{\alpha} \sum_{0}^{m-p} {}_i\, w_i(m-p, \alpha, x) \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+p}{m}; f\right] + \varphi_{m,p}(\alpha, x) \tag{2.7}$$

Dalla (2.5), con facili calcoli, si ha:

$$|\lambda_{h,p}(\alpha, x)| < (\alpha m)^{\sum_1^p {}_i\, h_i} \, \|f^{(p)}\| \tag{2.8}$$

ove la norma è quella di Tchebycheff. Dalle (2.6) e (2.8) segue allora:

$$|\varphi_{m,p}(\alpha, x)| < \|f^{(p)}\| \cdot \left(\frac{\alpha m}{1-\alpha m} + \frac{\alpha m}{(1-\alpha m)^2} + \ldots + \frac{\alpha m}{(1-\alpha m)^p} \right)$$

da cui, posto:

$$\gamma_{m,p}^{\alpha} = \frac{1-(1-\alpha m)^p}{(1-\alpha m)^p} \qquad (\alpha m < 1) \tag{2.9}$$

si ottiene:

$$|\varphi_{m,p}(\alpha, x)| < \gamma_{m,p}^{\alpha} \, \|f^{(p)}\| \tag{2.10}$$

Se in particolare nella (2.7) si pone $\alpha = 0$, si ottiene la formula di Popoviciu [3] relativa alla derivata dei polinomi di Bernstein.

Supponiamo ora che $f^{(p)}$ risulti continua in $[0, 1]$. Posto:

$$T_p = [0, 1] \times [0, t_1] \times \ldots \times [0, t_{p-1}]$$

$$d\,T_p = \prod_1^p {}_j\, d\,t_j\,; \quad t_j \in [0, 1] \qquad t = \sum_1^p {}_j\, t_j$$

si ha l'identità [4]:

$$f^{(p)}(x) - p!\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+p}{m}; f\right] = p! \int_{T_p} \left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m}\right)\right] d\,T_p \tag{2.11}$$

Inoltre, definito il resto tramite l'uguaglianza:

$$R_m(\alpha; f; x) = f(x) - S_m(\alpha; f; x),$$

utilizzando le (2.7) e (2.11), si ottiene:

$$R_m^{(p)}(\alpha; f; x) = \tag{2.12}$$

$$= p!\, \beta_{m,p}^{\alpha} \int_{T_p} \sum_{0}^{m-p}{}_i w_i(m-p, \alpha, x) \left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m} \right) \right] d T_p +$$

$$+ (1 - \beta_{m,p}^{\alpha})\, f^{(p)}(x) - \varphi_{m,p}(\alpha, x)$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente:

TEOREMA 1. — *Se* $\alpha = \alpha_m = o(m^{-1})$, *per ogni* $f \in C^p[0,1]$, $(p < m)$, *si ha*:

$$\lim_m S_m^{(p)}(\alpha; f; x) = f^{(p)}(x)$$

uniformemente rispetto a $x \in [0,1]$.

Inoltre, detto $\omega(f^{(p)}; \delta)$ *il modulo di continuità di* $f^{(p)}$, *sussiste la seguente maggiorazione*:

$$| R_m^{(p)}(\alpha; f; x) | < 2\,\omega(f^{(p)}; \sqrt{\delta_{m,p}(x)}) + \tag{2.13}$$

$$+ \| f^{(p)} \| \left(\frac{1}{(1-\alpha m)^p} - \beta_{m,p}^{\alpha} \right)$$

ove

$$\delta_{m,p}(x) = \frac{[1 + \alpha(m-p)]\, x(1-x)}{(1+\alpha)(m-p)} + \frac{3p}{m}.$$

Infatti, qualsiasi sia δ reale positivo, sussistono le limitazioni:

$$\left| \sum_{0}^{m-p}{}_i w_i(m-p, \alpha, x) \left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(x - \frac{i+t}{m} \right) \right] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{0}^{m-p}{}_i w_i(m-p, \alpha, x)\, \omega\left(f^{(p)}; \left| x - \frac{i+t}{m} \right| \right) \leq$$

$$\leq \omega(f^{(p)}; \delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\sum_{0}^{m-p}{}_i w_i(m-p, \alpha, x) \left(x - \frac{i+t}{m} \right)^2} \right\}$$

Dunque, per

$$\delta = \sqrt{\sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x)\left(x - \frac{i+t}{m} \right)^2}$$

si ha:

$$(2.14) \quad \sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x) \left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(x - \frac{i+t}{m} \right) \right] \leq$$

$$\leq 2\, \omega\left(f^{(p)}; \sqrt{\sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x)\left(x - \frac{i+t}{m} \right)^2} \right)$$

Poiché è poi:

$$\sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x)\left(x - \frac{i+t}{m} \right)^2 <$$

$$< \frac{[1 + \alpha(m-p)]\, x(1-x)}{(1+\alpha)(m-p)} + \frac{3p}{m}$$

posto:

$$\delta_{m,p}(x) = \frac{[1 + \alpha(m-p)]\, x(1-x)}{(1+\alpha)(m-p)} + \frac{3p}{m}$$

dalla (2.14) si ottiene:

$$\left| \sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x) \left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m} \right) \right] \right| \leq 2\, \omega(f^{(p)}; \sqrt{\delta_{m,p}(x)}).$$

Tenendo conto di quest'ultima e della (2.10), dalla (2.12) segue il teorema 1.

Ad esempio la successione

$$\{ S_m(1/m^2; f; x) \}_{m \in \mathbb{N}}$$

converge ad $f^p(x)$ uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$.

Andremo ora a stabilire una stima dell'errore nell'ipotesi che la funzione f sia dotata di derivata $(p+1)$-ma continua. A tal fine dimostreremo il

TEOREMA 2. — *Se* $\alpha = \alpha_m = o(m^{-1})$, *per ogni* $f \in C^{p+1}[0, 1]$ *sussiste la maggiorazione*:

$$(2.15) \qquad |R_m^{(p)}(\alpha; f; x)| < 2\sqrt{\delta_{m,p}(x)}\,\omega(f^{(p+1)}; \sqrt{\delta_{m,p}(x)}) + \frac{p}{m}\|f^{(p+1)}\| + \left(\frac{1}{(1-\alpha m)^p} - \beta_{m,p}^{\alpha}\right)\|f^{(p)}\|.$$

Infatti, per il teorema di Lagrange, si può scrivere:

$$-\left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m}\right)\right] = f^{(p+1)}(x)\left(x - \frac{i+t}{m}\right) + \left(x - \frac{i+t}{m}\right)(f^{(p+1)}(x) - f^{(p+1)}(\xi_i))$$

con

$$|x - \xi_i| < \left|x - \frac{i+t}{m}\right|.$$

Ne segue:

$$\left|\sum_0^{m-p} {}_i\, w_i(m-p, \alpha, x)\left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m}\right)\right]\right| \le \frac{p}{m}\|f^{(p+1)}\| + \sum_0^{m-p} {}_i\, w_i(m-p, \alpha, x)\left|x - \frac{i+t}{m}\right|\left|f^{(p+1)}(x) - f^{(p+1)}\left(\frac{i+t}{m}\right)\right|$$

da cui

$$\left|\sum_0^{m-p} {}_i\, w_i(m-p, \alpha, x)\left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m}\right)\right]\right| \le \frac{p}{m}\|f^{(p+1)}\| + \sum_0^{m-p} {}_i\, w_i(m-p, \alpha, x)\left|x - \frac{i+t}{m}\right|\omega\left(f^{(p+1)}; \left|x - \frac{i+t}{m}\right|\right).$$

Da questa si ricava, per ogni δ reale positivo

$$\left|\sum_0^{m-p} {}_i\, w_i(m-p, \alpha, x)\left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m}\right)\right]\right| \le \frac{p}{m}\|f^{(p+1)}\| + \omega(f^{(p+1)}; \delta)\sum_0^{m-p} {}_i\, w_i(m-p, \alpha, x)\left|x - \frac{i+t}{m}\right|.$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \left| x - \frac{i+t}{m} \right| \right\} = \frac{p}{m} \| f^{(p+1)} \| + \omega (f^{(p+1)}; \delta) \cdot$$

$$\cdot \sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x) \left\{ \left| x - \frac{i+t}{m} \right| + \frac{1}{\delta} \left(x - \frac{i+t}{m} \right)^2 \right\} .$$

Ne segue

$$\left| \sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x) \left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m} \right) \right] \right| \leq \frac{p}{m} \| f^{(p+1)} \| +$$

$$+ \omega (f^{(p+1)}; \delta) \sqrt{\delta_{m,p}(x)} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{\delta_{m,p}(x)}}{\delta} \right)$$

da cui, ponendo $\delta = \sqrt{\delta_{m,p}(x)}$, si ottiene:

$$\left| \sum_{0}^{m-p}{}_{i} w_i (m-p, \alpha, x) \left[f^{(p)}(x) - f^{(p)}\left(\frac{i+t}{m} \right) \right] \right| \leq \frac{p}{m} \| f^{(p+1)} \| +$$

$$+ 2 \sqrt{\delta_{m,p}(x)} \; \omega (f^{(p+1)}; \sqrt{\delta_{m,p}(x)}) .$$

Tenendo conto di quest'ultima e della (2.10), dalla (2.12) segue il teorema 2.

Se, in particolare, si suppone che f sia dotata di derivata $(p+1)$-ma lipschitziana con costante M_{p+1}, dalla (2.15) segue:

$$(2.16) \qquad | R_m^{(p)} (\alpha; f; x) | \leq 2 M_{p+1} \delta_{m,p}(x) + \frac{p}{m} \| f^{(p+1)} \| +$$

$$+ \left(\frac{1}{(1-\alpha m)^p} - \beta_{m,p}^{\alpha} \right) \| f^{(p)} \| .$$

Se infine $f \in C^{p+2}[0, 1]$, sussiste la seguente disuguaglianza di facile dimostrazione:

$$(2.17) \quad | R_m^{(p)} (\alpha; f; x) | \leq \delta_{m,p}(x) \frac{\| f^{(p+2)} \|}{2} + \frac{p}{m} \| f^{(p+1)} \| +$$

$$+ \left(\frac{1}{(1-\alpha m)^p} - \beta_{m,p}^{\alpha} \right) \| f^{(p)} \| .$$

Si noti che le (2.13), (2.15), (2.16) e (2.17) restituiscono, per $p = 0$, ben note diseguaglianze stabilite da STANCU [1] e, per $\alpha = 0$, analoghe maggiorazioni ottenute in [5].

3. - Allo scopo di esaminare se i polinomi di Stancu $S_m(\alpha; f; x)$, associati ad una funzione $f \in C^p[0, 1]$, conservino. al pari dei polinomi di BERNSTEIN [3], l'eventuale convessità (concavità) di ordine $p-1$ della funzione f, si osservi che, nell'ipotesi che $f \in C^p[0, 1]$, risulta:

$$(3.1) \qquad \min_x f^{(p)}(x) \leq \prod_1^p{}_j \frac{1}{u_j} \Delta_{u_i} f\left(\frac{i}{m}\right) \leq \max_x f^{(p)}(x).$$

Dunque, tenendo conto della (3.1) e delle relazioni

$$\sum_{h \in \mathfrak{I}_p} a_h > 0 \; ; \qquad S_n(\alpha; 1; x) = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

dalla (2.3) si ottiene:

$$(3.2) \qquad \min_x f^{(p)}(x) \leq \frac{S_m^{(p)}(\alpha; f; x)}{\sum_{h \in \mathfrak{I}_p} a_h} \leq \max_x f^{(p)}(x).$$

La (3.2) assicura che, se $f^{(p)}$ risulta positiva (negativa) in $[0, 1]$, altrettanto accade per le derivate dei polinomi di Stancu $S_m^{(p)}(\alpha; f; x)$ $(m \geq p)$. Quindi, tenuta presente la relazione che intercorre fra differenza divisa di ordine p e derivata di ordine p di una funzione, siamo pervenuti, per funzioni $f \in C_p[0, 1]$, ad una nuova dimostrazione del noto:

TEOREMA 3 (POPOVICIU [3]). — *Per ogni funzione convessa (concava) di ordine $p-1$ in $[0, 1]$ esiste almeno una successione di polinomi convessi (concavi) di ordine $p-1$ uniformemente convergente ad essa.*

BIBLIOGRAFIA

[1] D. D. STANCU, *Approximation of functions by a new class of linear polinomial operators*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. XIII, **8**, 1173-1194 (1968).

[2] D. D. STANCU, *Approximation properties of a class of linear positive operators*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Cluj, Ser-Math, **15**, 33-38 (1970).

[3] T. POPOVICIU, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur*, Mathematica, **10**, 49-54 (1935).

[4] G. MARINESCU, *Analiza Numerica*, Ed. Acad. Rep. Soc. Rom. (1974).

[5] G. MASTROIANNI-M. R. OCCORSIO, *Una generalizzazione dell'operatore di Bernestein*. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, Serie IV, Vol. XLIV, 151-169 (1977).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, C. Ciliberto e C. Miranda.

Relazioni intercorrenti fra costituzione di leganti sintetici, reattività con acqua e prestazioni meccaniche *

Nota di VITTORIO SABATELLI e GIAN LORENZO VALENTI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 3 giugno 1978)

RIASSUNTO. — Sono stati valutati e correlati al comportamento meccanico parametri quali: il grado di idratazione e la composizione del prodotto di neoformazione, relativi alla reazione con acqua del silicato tricalcico e di sue soluzioni solide contenenti, singolarmente, alluminio, ferro, magnesio.

È stato posto in luce che la costituzione delle aliti esaminate influenza il loro comportamento tecnico attraverso modifiche significative dei valori dei suddetti parametri.

Sono state riscontrate, in particolare, analogie di comportamento fra il silicato tricalcico e la soluzione solida col magnesio da un lato, fra le aliti contenenti alluminio e ferro dall'altro.

SUMMARY. — The reaction degree and the composition of the newly-formed products concerned with the hydration of tricalcium silicate and its solid solutions containing, separately, aluminium, iron, magnesium, have been evaluated and correlated to the mechanical behaviour. It has been pointed out that the constitution of the alites, appreciably modifying the above mentioned parameters, can influence their technical properties. In particular, analogies have been found between tricalcium silicate and its solid solution containing magnesium and between the aluminium and iron alites.

INTRODUZIONE

Il clinker, componente dei leganti idraulici più diffusamente impiegati, è costituito da silicato tricalcico, C_3S [1], silicato bicalcico, C_2S, alluminato tricalcico, C_3A, e da una fase di composizione prossima a C_4AF, alluminio-ferrito tetracalcico.

* Lavoro svolto con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

[1] Si adopera la notazione abbreviata adottata nella chimica del cemento in base alla quale $C = CaO$; $S = SiO_2$; $A = Al_2O_3$; $F = Fe_2O_3$.

Le predette fasi non sono costituite da composti chimicamente puri, ma da loro soluzioni solide con specie chimiche presenti in concentrazioni non elevate, provenienti dalle materie prime naturali (calcare e argilla) utilizzate per la fabbricazione del clinker.

Particolare interesse rivestono le soluzioni solide di silicato tricalcico (aliti), costituente fondamentale del clinker e principale responsabile del processo di indurimento del cemento alle brevi stagionature. Specie generalmente ricorrenti in soluzione nel silicato tricalcico sono: Al^{+3}, Fe^{+3}, Mg^{+2}. Esse, anche se presenti in concentrazioni modeste [2], sono in grado di influenzare in maniera apprezzabile le proprietà meccaniche [2] [3].

Appare interessante quindi disporre di dati circa l'influenza esercitata dai suddetti ioni sul complesso dei fenomeni che presiedono al comportamento tecnico.

Oggetto del presente studio è pertanto la valutazione di parametri connessi con le reazioni di idratazione di aliti preparate sinteticamente in laboratorio, utili alla comprensione dei meccanismi attraverso cui si esplica l'azione delle specie ioniche presenti in soluzione nel silicato tricalcico.

Parte sperimentale

Sono stati preparati, secondo le modalità descritte in una precedente Nota [2], un campione di silicato tricalcico puro e tre aliti contenenti separatamente l'1 % di MgO, l'1 % di Fe_2O_3, l'1 % di Al_2O_3; le concentrazioni delle specie chimiche estranee al C_3S erano inferiori o uguali ai limiti di solubilità delle stesse ,a 1550 °C, nel silicato tricalcico [1].

Le prove di resistenza meccanica a compressione [4] sono state eseguite alle stagionature di 1, 2, 3, 7, 28 giorni su provini di dimensioni 40 × 40 × 40 mm, confezionati con 92 % di C_3S o di sue soluzioni solide e l'8 % di una miscela gesso-quarzo nel rapporto 3 a 5: il rapporto acqua/solido impiegato era 0,50. Lo stesso rapporto è stato adottato per la confezione di provini in pasta, per la cui preparazione e conservazione, unitamente alle procedure di arresto dell'idratazione, di macinazione ed essiccamento si rimanda ad una precedente Nota [2]; la temperatura di idratazione era 20 °C.

Il grado di idratazione e la composizione del silicato di calcio idrato sono stati valutati a stagionature coincidenti con quelle previste

[2] I limiti di solubilità di tali specie espresse come ossidi sono a 1550 °C: 2,0 % per MgO; 1,0 % per Al_2O_3; 1,1 % per Fe_2O_3 [1].

per le resistenze meccaniche e inoltre a tempi di 7,5 h, 9,0 h, 10,5 h, 12,0 h, 16,0 h, 20,0 h, e 14 giorni.

Per la determinazione del primo parametro si è valutata la frazione di C_3S o di alite non reagita mediante analisi roentgenografica quantitativa, impiegando ossido di magnesio come standard interno [5]: i picchi di riferimento adottati sono stati quello a 41.30° 2 θ Cu Kα per il C_3S o l'alite e quello a 43.00° 2 θ Cu Kα per l'MgO.

Per la determinazione della composizione del silicato di calcio idrato si è fatto ricorso all'analisi termogravimetrica [6]; essa, attraverso la misura dell'acqua proveniente dalla decomposizione termica del silicato idrato, ha permesso di stabilirne il rapporto acqua/silice e, mediante la stima dell'acqua perduta dall'idrossido di calcio prodotto nell'idratazione, ha consentito di risalire, noto il grado di idratazione, al rapporto calce/silice.

L'analisi termogravimetrica si è resa utile anche alla stima della perdita al fuoco, necessaria per riferire i dati sperimentali al peso iniziale di C_3S o di alite; la velocità di riscaldamento della termobilancia è stata di 5 °C/min.

Risultati e discussione

In fig. 1 è riportato il diagramma delle resistenze meccaniche a compressione esibite dai campioni in esame, in funzione del periodo di stagionatura. Nelle figg. 2, 3 e 4 sono descritti, nell'ordine, gli andamenti nel tempo del grado di idratazione e dei rapporti molari calce-silice ed acqua-silice nel silicato di calcio idrato neoformato [7] [8].

Dal confronto fra le figg. 1 e 2 risulta immediatamente che non è riscontrabile, a parità di tempo di stagionatura, una correlazione puntuale fra grado di idratazione e resistenza meccanica; è interessante notare, d'altra parte, come le soluzioni solide contenenti alluminio e ferro, che manifestano i valori più bassi del grado di idratazione durante le prime 24 ore di reazione, diano luogo, dopo due giorni di stagionatura e in misura via via più rilevante col trascorrere del tempo, a resistenze meccaniche più elevate di quelle esibite dal silicato tricalcico puro e dall'alite al magnesio.

Dall'esame delle figg. 3 e 4, si osserva che le soluzioni solide di alluminio e di ferro producono, a seguito della reazione con l'acqua, silicati di calcio idrati con un rapporto calce/silice relativamente basso e un rapporto acqua/silice relativamente alto; è opportuno sottolineare che le differenze più consistenti si registrano durante le

prime 24 ore di stagionatura e che tali differenze tendano ad attenuarsi nel tempo, anche se la sequenza dei valori rimane immutata.

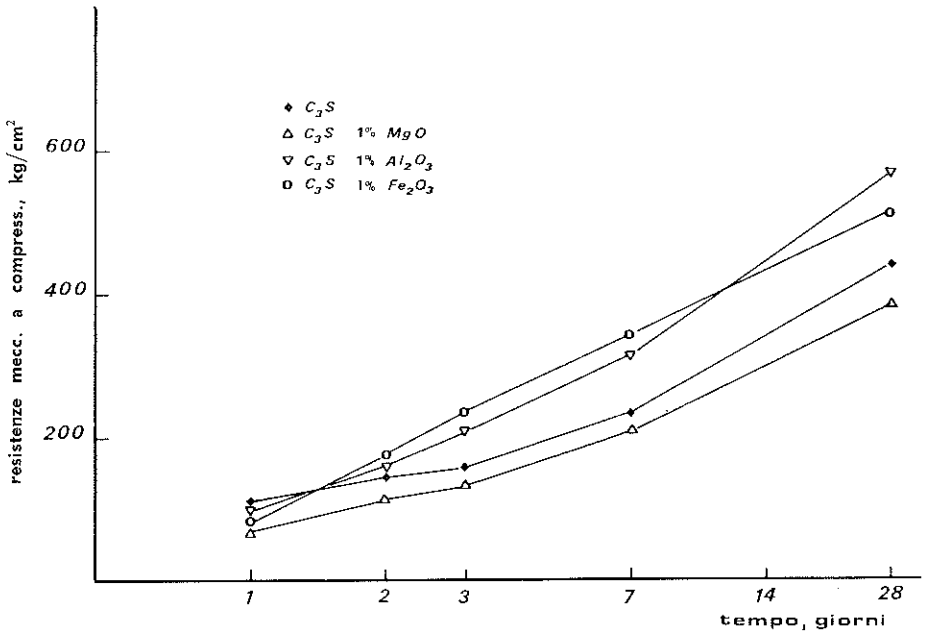


FIG. 1. - Andamento delle resistenze meccaniche a compressione in funzione del tempo di stagionatura.

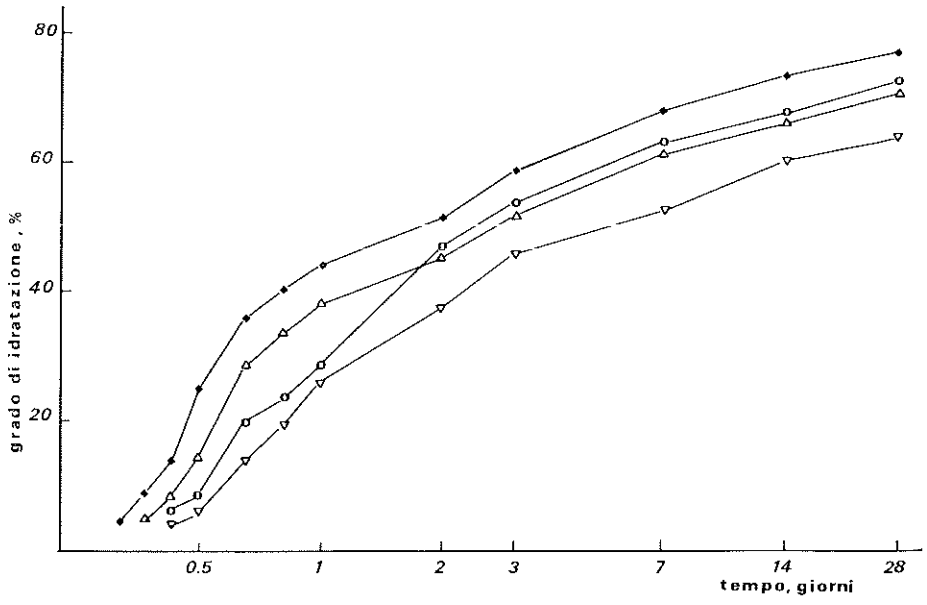


FIG. 2. - Andamento del grado di idratazione in funzione del tempo di stagionatura.

A rapporti calce/silice più bassi e a rapporti acqua/silice più alti corrispondono quindi valori di resistenza meccanica più elevati,

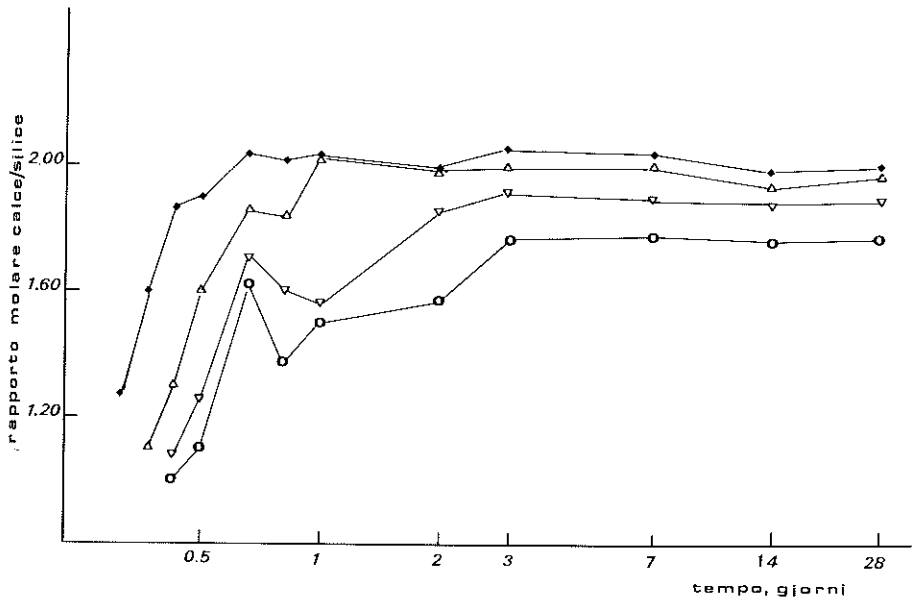


FIG. 3. - Evoluzione nel tempo del rapporto molare calce/silice nel silicato di calcio idrato.

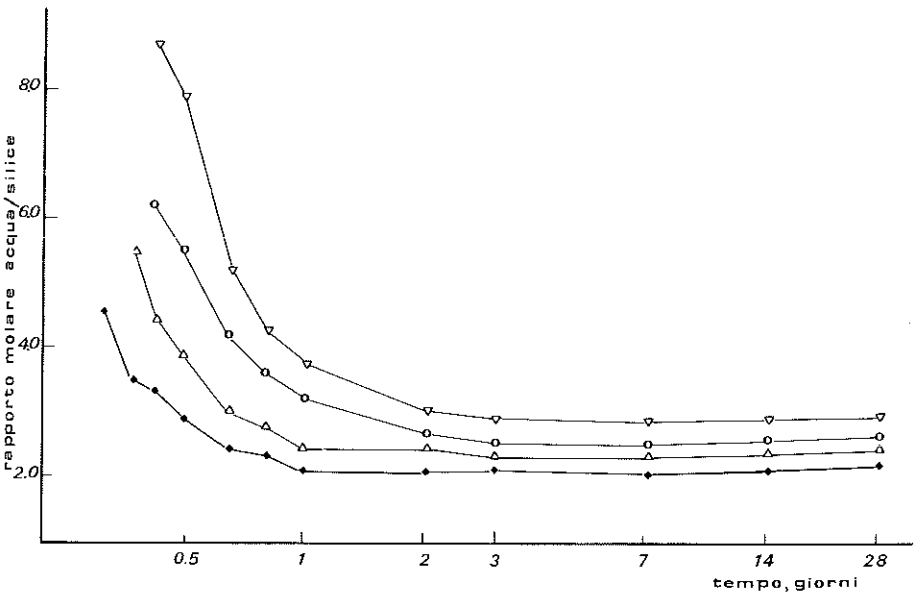


FIG. 4. - Evoluzione nel tempo del rapporto molare acqua/silice nel silicato di calcio idrato.

dal secondo giorno di stagionatura in poi: è presumibile che tale influenza della composizione chimica del silicato di calcio idrato si esplichi attraverso modifiche ,significative soprattutto nelle prime 24 ore di stagionatura, della sua superficie specifica piuttosto che della sua morfologia [9].

Le analogie riscontrate tra alite all'alluminio e al ferro da un lato, fra alite al magnesio e silicato tricalcico puro dall'altro, sembrano indicare che la carica dello ione estraneo presente nel reticolo del silicato tricalcico determini in maniera essenziale il comportamento idraulico della soluzione solida.

Il magnesio, ione bivalente, è in grado di sostituire solamente il calcio; l'alluminio e il ferro, ioni trivalenti, possono sostituire sia il silicio che il calcio ed occupare inoltre, sia pure in misura limitata e in determinate circostanze, alcuni siti ottaedrici nel reticolo del silicato tricalcico [10]. Un differente inserimento di ioni estranei nel reticolo cristallino può pertanto modificare in diversa misura la distribuzione dei difetti strutturali nella soluzione solida e conseguentemente il suo comportamento tecnico.

Conclusioni

Nello studio del processo di idratazione del silicato tricalcico e di sue soluzioni solide contenenti, singolarmente, Al, Fe e Mg, è stata individuata una correlazione fra resistenze meccaniche da un lato e grado di idratazione e composizione del prodotto di neoformazione dall'altro. Le soluzioni solide contenenti alluminio e ferro, che manifestano a partire da due giorni di stagionatura resistenze meccaniche più alte di quelle mostrate dal silicato tricalcico e dall'alite al magnesio, presentano valori bassi del grado di idratazione durante le prime 24 ore di reazione; le stesse aliti, per tutto l'arco di tempo esaminato e cioè fino a 28 giorni di stagionatura, producono un silicato di calcio idrato avente rapporto calce/silice più basso e rapporto acqua/silice più alto rispetto a quelli dei prodotti di idratazione del silicato tricalcico e della sua soluzione solida col magnesio. Tale comportamento può essere collegato al differente inserimento degli ioni trivalenti rispetto a quello dei bivalenti nel reticolo del silicato tricalcico.

Gli Autori desiderano ringraziare il prof. R. Sersale per le utili discussioni e la sig.ra Maria Palumbo per l'assistenza tecnica.

Istituto di Chimica Applicata - Facoltà di Ingegneria - Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] WOERMAN E., EYSEL W., HAHN TH., *Chemische und strukturelle Untersuchungen der Mischkristallbildung von Tricalciumsilikat*, 3° Bericht Zem - Kalk - Gips **21**, 241 (1968); 4° Bericht Zem - Kalk - Gips **22**, 235 (1969).

[2] SABATELLI V., VALENTI G. L., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico*, Nota I, *Aliti ad un componente estraneo*, Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat., **1**, XLII (1975).

[3] VALENTI G. L., SABATELLI V., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico*, Nota II, *Aliti a due componenti estranei*, Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat., **4**. XLII (1975).

[4] SABATELLI V., VALENTI G. L., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico*, Nota III, *Relazione fra idrossido di calcio e resistenza meccanica*, Rend. Acc. Sci. Fis e Mat., **4**, XLII (1976).

[5] SABATELLI V., VALENTI G. L., *Analisi roentgenografica quantitativa di aliti sintetiche*, Il Cemento, **3**, 157 (1976).

[6] VALENTI G. L., SABATELLI V., *Contributo dell'analisi termoponderale allo studio della stechiometria di idratazione del silicato tricalcico*, Il Cemento, **3**, 141 (1974).

[7] VALENTI G. L., SABATELLI V., *The composition of the hydration products of synthetic alites*, Annali di Chimica, **66**, 551 (1976).

[8] VALENTI G. L., SABATELLI V., *Study on the composition of the hydration products of synthetic alites. II, Investigations at ages ranging from 1 to 28 days*, Annali di Chimica (in corso di stampa).

[9] VALENTI G. L., SABATELLI V., MARCHESE B., *Hydration kinetics of tricalcium silicate solid solutions at early ages*, Cement and Concrete Research, **8**, 61 (1978).

[10] HAHN T., EYSEL W., WOERMANN E., *Crystal chemistry of tricalcium silicate solid solutions*, Proc. of the Fifth Int. Symp. on the Chem. of Cem. Tokyo, I, 61 (1968).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, C. Ciliberto e C. Miranda.

Su un problema di selezione continua di un'applicazione plurivoca ad n valori non tutti distinti

Nota di MARIA TUCCI (Bari) *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 3 giugno 1978)

SUMMARY. — In this paper a theorem of continuous selection is proved for n-valued functions defined in a compact and convex subset of $\mathbf{R}^k$, with values in a metric space, when the n values are not all distinct.

INTRODUZIONE

In un suo recente lavoro [2] L. CARBONE ha dimostrato alcuni teoremi di esistenza per un sistema di equazioni funzionali, servendosi essenzialmente di un teorema di selezione continua da egli stesso stabilito in [1].

Tale teorema prova che se θ è un'applicazione plurivoca definita su di un convesso compatto in uno spazio di Banach, ed è continua ad n valori distinti in uno spazio metrico, essa ammette n selezioni continue.

Mi è sembrato non privo di interesse, anche ai fini di eventuali applicazioni a sistemi di equazioni funzionali, studiare se un analogo risultato sussiste nell'ipotesi in cui θ sia un'applicazione plurivoca ad n valori non tutti distinti.

In effetti ho stabilito un teorema di selezione continua per funzioni plurivoche definite in uno spazio S convesso compatto nello spazio $\mathbf{R}^k$, con $k > 1$ ad n valori distinti in uno spazio metrico, eccetto che per un punto x_0 interno ad S, in cui assumono un numero di valori minore di n.

La presente nota consiste di due parti.

Nella prima parte si riportano i risultati relativi alla costruzione di n selezioni continue in $S - I(x_0, r)$, con $I(x_0, r)$ intorno di x_0 in $\mathbf{R}^k$ contenuto in S, e al loro prolungamento in $S - \{x_0\}$.

* Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi Nazionali per la Matematica del C.N.R. (G.N.A.F.A.).

Il procedimento di costruzione seguito in questa parte è analogo a quello seguito da L. CARBONE in [1], con opportuni accorgimenti di cui si dà un cenno, omettendo, per brevità, le dimostrazioni che sono contenute, in tutti i dettagli, in [3].

Il procedimento di L. CARBONE, però, non permette assolutamente di costruire selezioni locali in $I(x_0, r)$ quando $\theta(x_0)$ è costituito da p elementi con $1 \leq p < n$.

Nella seconda parte si dimostrano i risultati principali di questo lavoro, attraverso un'opportuna definizione di molteplicità per gli elementi di $\theta(x_0)$ ed attraverso la costruzione di selezioni continue di θ definite in un intorno $I(x_0, r)$ di x_0, che si raccordano alle selezioni definite in $S - I(x_0, r)$.

1. — Sia S un compatto convesso nello spazio euclideo $\mathbf{R}^k$, con $k > 1$.

Indicheremo con L uno spazio metrico e C(L) linsieme delle parti chiuse e non vuote di L.

Con $I(x_0, \delta)$, $x_0 \in S$ (risp. $x_0 \in L$) indicheremo l'intorno circolare in S (risp. in L) di centro x_0 e raggio δ.

Denoteremo ancora con d, quando non c'è ambiguità, sia la distanza in $\mathbf{R}^k$, sia quella in L, sia la distanza di Hausdorff, in C(L) che è così definita:

$$d : X \times Y \in C(L) \times C(L) \to \max \{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\}$$

Data un'applicazione $\theta : S \to C(L)$, plurivoca, una selezione estratta da θ è un'applicazione φ da S in L tale che

$$\varphi : x \in S \to \varphi(x) \in \theta(x) \subset L$$

mentre per ogni $x \in S$, diremo selezione locale estratta da θ ogni applicazione φ_x definita in un intorno di x, $I(x, \delta)$, a valori in L, tale che

$$\varphi_x : y \in I(x, \delta) \to \varphi_x(y) \in \theta(y) \subset L$$

Sussiste il seguente:

TEOREMA 1.1. — *Sia θ un'applicazione continua da S in C(L) tale che $\theta(x)$ è costituito da n elementi ($n > 1$), per ogni $x \in S$, eccetto che per un punto x_0 interno ad S, per il quale $\theta(x_0)$ è formato da p elementi, con $1 \leq p < n$.*

Allora per ogni $I(x_0, r)$ *intorno di* x_0 *in* $\mathbf{R}^k$ *contenuto in* S, *la restrizione di* θ *ad* $S - I(x_0, r)$ *ammette n selezioni continue* $\theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \ldots, \theta_n^{(r)}$ *definite in* $S - I(x_0, r)$ *a valori in* L *tali che*:

$$(1) \qquad \forall\, x \in S - I(x_0, r) : \theta_i^{(r)}(x) \neq \theta_j^{(r)}(x), \qquad i \neq j$$

Come detto nell'introduzione, per la dimostrazione di questo teorema, si procede con la stessa tecnica adoperata da L. CARBONE per la dimostrazione del teorema 1.1. di [1], costruendo dapprima selezioni locali continue in un intorno di un punto di $S - I(x_0, r)$ e poi prolungando con continuità tali selezioni a tutto $S - I(x_0, r)$.

Sono però necessari alcuni accorgimenti e, soprattutto, i risultati contenuti nei seguenti due lemmi (per altro abbastanza elementari) il primo dei quali rende possibile il prolungamento delle selezioni locali, il secondo permette di supplire alla mancanza della convessità di $S - I(x_0, r)$, convessità essenziale nella dimostrazione che fa L. CARBONE.

LEMMA 1.1. — *Se* S *è uno spazio convesso nello spazio* $\mathbf{R}^k$, *con* $k > 1$, *sia* x_0 *un punto interno ad* S. *Se* $r \in \mathbf{R}_+^*$ *è tale che* $I(x_0, r)$ *è un intorno in* $\mathbf{R}^k$ *di* x_0, *contenuto in* S, *allora per ogni* $\delta \in \mathbf{R}_+^*$, *con* $\frac{5}{4}\delta < r$ *e per ogni* $s \in S - I(x_0, r)$ *e* $x \in I\left(s, \frac{3}{2}\delta\right) - I(s, \delta)$, *con* $x \notin I(x_0, r)$ *risulta non vuoto l'insieme*

$$(I(x, \delta) \cap I(s, \delta)) - I(x_0, r)$$

LEMMA 1.2. — *Se* x_0 *è un punto interno ad* S, *spazio convesso in* $\mathbf{R}^k$, $k > 1$, *ed* $I(x_0, r)$ *è un intorno di* x_0 *in* $\mathbf{R}^k$ *contenuto in* S, *per ogni* $\delta \in \mathbf{R}_+^*$, con $\delta < r$, *e per ogni* $s \in S - I(x_0, r)$ ed $s' \in I(s, \delta) - I(x_0, r)$, *l'insieme*

$$(I(s, \delta) \cap I(s', \delta)) - I(x_0, r)$$

è connesso per archi in $S - I(x_0, r)$.

Tenendo presente il modo in cui si sono costruite le selezioni di cui al teorema precedente, si prova facilmente il seguente risultato:

TEOREMA 1.2. — *Nelle stesse ipotesi del teorema* 1.1., *per ogni* $r' \in \mathbf{R}_+^*$, $r' < r$, *le selezioni* $\theta_1^{(r')}, \theta_2^{(r')}, \ldots, \theta_n^{(r')}$ *sono i prolungamenti delle selezioni* $\theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \ldots, \theta_n^{(r)}$.

Si può, così stabilire il teorema seguente:

TEOREMA 1.3. — *Se* θ *è un'applicazione continua da* S *in* C (L) *tale che* $\theta(x)$ *è costituito da n punti* $(n>1)$, *per ogni* $x \in S$, *eccetto che per un punto* x_o *interno ad* S *per il quale* $\theta(x_o)$ *è costituito da p elementi con* $1 \leq p < n$, *allora esistono n selezioni continue* θ_1' , θ_2' , ... , θ_n' *definite in* $S - \{x_o\}$ *tali che*:

$$(2) \qquad \forall\, x \in S - \{x_o\} : \theta_i'(x) \neq \theta_j'(x), \qquad i \neq j$$

Dim. — Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ sia

$$\theta_i' : S - \{x_o\} \to L$$

così definita (cfr. teorema 1.1.):

$$x \in S - \{x_o\} \to \theta_i^{(r)}(x)$$

dove $r \in \mathbf{R}_+^*$ è tale che $x \in S - I(x_o, r)$, con $I(x_o, r)$ intorno di x_o in $\mathbf{R}^k$ contenuto in S.

Per il teorema 1.2. le applicazioni θ_i' sono ben definite, inoltre sono continue in ogni $x \in S - \{x_o\}$, data la continuità delle selezioni $\theta_i^{(r)}$.

Infine è ovviamente verificata la (2), in quanto ogni $\theta_i^{(r)}$ soddisfa la (1).

2. — Data un'applicazione plurivoca θ da S in C (L) tale che per ogni $x \in S$ $\theta(x)$ ha n elementi eccetto che per un punto x_o interno ad S, esaminiamo dapprima il caso particolare in cui $\theta(x_o)$ è costituito da un solo elemento.

Sussiste a tal proposito il seguente:

TEOREMA 2.1. — *Se* $\theta : S \to C(L)$ *è continua in* S *e per ogni* $x \in S$, $\theta(x)$ *è costituito da n punti* $(n > 1)$, *eccetto che per un punto* x_o *interno ad* S *per il quale* $\theta(x_o)$ *è costituito da un solo elemento, allora* θ *ammette n selezioni continue* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *e inoltre si ha*:

$$(3) \qquad \forall\, x \in S,\ x \neq x_o : \theta_i(x) \neq \theta_j(x), \qquad i \neq j$$

Dim. — Posto $\theta(x_o) = \{x_o^1\}$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, sia

$$\theta_i : S \to L$$

così definita (cfr. Teorema 1.3.):

$$\forall\, x \in S : \theta_i(x) = \begin{cases} x_o^1 & \text{se } x = x_o \\ \theta_i'(x) & \text{se } x \neq x_o \end{cases}$$

θ_i risulta continua in $S - \{x_o\}$, stante la continuità delle selezioni θ_i', inoltre, essendo per la continuità di θ in x_o,

$$\lim_{x \to x_o} \theta_i(x) = x_o^1$$

si ha che θ_i è continua in x_o^1, θ_i è quindi continua in tutto S.

La (3) poi sussiste in quanto ogni θ_i' verifica la (2).

L'asserto è dunque provato.

Se $\theta : S \to C(L)$ è tale che per ogni $x \in S$ $\theta(x)$ ha un numero finito di elementi, per ogni $\varepsilon > 0$, $x \in S$ e $y_1 \in L$, si pone:

$$\theta_{y_1}^{\varepsilon}(x) = \{x_i \in \theta(x) \mid d(x_i, y_1) < \varepsilon\} \tag{4}$$

Essenziale per stabilire i nostri risultati è la seguente

DEFINIZIONE 2.1. — *Se $x_o \in S$, si dice che un punto $y \in \theta(x_o)$ ha molteplicità $m \in N$, $m \geq 1$, se esistono $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ tali che:*

$$\text{card. } \theta_y^{\varepsilon}(x) = m \qquad \forall\, x \in I(x_o, \delta), \quad x \neq x_o$$

Allo scopo di stabilire un criterio di selezione continua, premettiamo il seguente lemma:

LEMMA 2.1. — *Sia θ un'applicazione continua da S in C(L) tale che $\theta(x)$ sia costituito da n elementi, $n > 1$, eccetto che per un punto x_o interno ad S per il quale $\theta(x_o)$ ha p elementi, con $1 < p < n$.*

Se $\theta(x_o) = \{x_o^1, x_o^2, \ldots, x_o^p\}$ e per ogni $h \in \{1, 2, \ldots, p\}$ x_o^h ha molteplicità p_h (cfr. def. 2.1.) *con $1 \leq p_h < n$, esistono $\varepsilon_o > 0$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $x \in I(x_o, \delta)$ si ha:*

$$\theta_{x_o^h}^{\varepsilon_o}(x) \cap \theta_{x_o^{h'}}^{\varepsilon_o}(x) = \emptyset, \qquad \forall\, h, h' \in \{1, \ldots, p\}, \quad h \neq h' \tag{5}$$

$$\theta(x) = \bigcup_{h=1}^{p} \theta_{x_o^h}(x) \tag{6}$$

Inoltre posto $L' = C(L)$ *ed* $r = \frac{1}{2}\delta$, *se* $C(L')$ *denota l'insieme delle parti chiuse e non vuote di* L', *munito della distanza di Hausdorff, l'applicazione*

$$\theta' : \bar{I}(x_o, r) \to C(L')$$

così definita:

$$(7) \qquad \begin{cases} \theta'(x) = \{\theta^{\varepsilon_o}_{x_o^1}(x), \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^2}(x), \ldots, \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^p}(x)\} & \text{se } x \neq x_o \\ \theta'(x) = \{\{x_o^1\}, \{x_o^2\}, \ldots, \{x_o^p\}\} & \text{se } x = x_o \end{cases}$$

è continua in $\bar{I}(x_o, r)$.

Dim. — Per ogni $h \in \{1, \ldots, p\}$ siano $\varepsilon_h > 0$ e $\delta_h > 0$ tali che

$$(8) \qquad \text{card. } \theta^{\varepsilon_h}_{x_o^h}(x) = p_h \qquad \forall\, x \in I(x_o, \delta_h),\ x \neq x_o$$

Si consideri $\varepsilon_o > 0$ tale che

$$(9) \qquad \varepsilon_o < \frac{1}{6} \min\{\min_{h\in\{1,\ldots,p\}} \varepsilon_h, \min_{\substack{h,h'\in\{1,\ldots,p\} \\ h\neq h'}} d(x_o^h, x_o^{h'})\}$$

e $\delta_o > 0$ tale che per ogni $x \in I(x_o, \delta_o)$ si abbia

$$(10) \qquad d(\theta(x), \theta(x_o)) < \varepsilon_o$$

Se ora si pone $\delta = \min\{\delta_o, \min_{h\in\{1,\ldots,p\}} \delta_h\}$, risulta, per ogni $h, h' \in \{1, \ldots, p\}$, $h \neq h'$, verificata la (5).

Infatti se $x_i \in \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x) \cap \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^{h'}}(x)$, si ha

$$(11) \qquad d(x_i, x_o^h) < \varepsilon_o, \quad d(x_i, x_o^{h'}) < \varepsilon_o$$

da cui $d(x_o^h, x_o^{h'}) < 2\,\varepsilon_o$, il che è assurdo in quanto per la (9) $d(x_o^h, x_o^{h'}) \geq 6\,\varepsilon_o$.

È, poi, per (10) ovviamente verificata la (6).

Posto $r = \frac{1}{2}\delta$ proviamo che l'applicazione θ' definita in $\bar{I}(x_o, r)$ come in (7) è continua in $\bar{I}(x_o, r)$.

Sia $x \in \bar{I}(x_o, r)$, $x \neq x_o$ ed $\varepsilon^* > 0$ con $\varepsilon^* < \varepsilon_o$.

Essendo per definizione, se ancora con d denotiamo la distanza su $C(L')$

$$(12) \qquad d(\theta'(x), \theta'(y)) = \max\{\sup_{X \in \theta'(x)} d(X, \theta'(y)), \sup_{Y \in \theta'(y)} d(\theta'(x), Y)\}$$

dove

$$(13) \qquad d(X, \theta'(y)) = \inf_{Y \in \theta'(y)} d(X, Y)$$

$$(14) \qquad d(\theta'(x), Y) = \inf_{X \in \theta'(x)} d(X, Y)$$

è sufficiente provare che esiste $\delta^* > 0$, $\delta^* < r$, tale che per ogni $y \in I(x, \delta^*) \subset \bar{I}(x_o, r)$ con $y \neq x_o$, risulti:

$$(15) \qquad d(X, \theta'(y)) < \varepsilon^* \qquad \forall\ X \in \theta'(x)$$

e inoltre risulti

$$(16) \qquad d(\theta'(x), Y) < \varepsilon^* \qquad \forall\ Y \in \theta'(y)$$

In corrispondenza di $\varepsilon^* < \varepsilon_o$, sia $\delta^* < r$ tale che $I(x, \delta^*) \subset \bar{I}(x_o, r)$ e

$$(17) \qquad d(\theta(x), \theta(y)) < \varepsilon^* \qquad \forall\ y \in I(x, \delta^*)$$

Consideriamo $X \in \theta'(x)$ e $y \in I(x, \delta^*)$ con $y \neq x_o$. Per (7) sia per esempio $X = \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x)$ con $h \in \{1, \ldots, p\}$.

Essendo per (5) $\theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x) \subset \theta(x)$, da (17) consegue

$$d(x_i, \theta(y)) < \varepsilon^* \qquad \forall\ x_i \in \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x)$$

per cui, per ogni $x_i \in \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x)$ esiste $y_i \in \theta(y)$ tale che

$$(18) \qquad d(x_i, y_i) < \varepsilon^*$$

Poiché $\theta(y) = \bigcup_{h=1}^{p} \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(y)$, in quanto $d(x_o, y) < \delta$, si ha che $y_j \in \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^{h'}}(y)$ con $h' \in \{1, \ldots, p\}$.

Risulta $x_o^{h'} = x_o^h$. Infatti che $x_o^h \neq x_o^{h'}$, essendo

$$d(y_j, x_o^{h'}) < \varepsilon_o,\ d(x_i, x_o^h) < \varepsilon_o$$

per (18) si ha $d(x_o^h, x_o^{h'}) < 3\,\varepsilon_o$, il che è assurdo perché per (9) $d(x_o^h, x_o^{h'}) \geq 6\,\varepsilon_o$ dunque risulta

$$y_j \in \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(y)$$

da ciò e da (18) consegue

$$d(x_i, \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(y)) < \varepsilon^*, \qquad \forall\ x_i \in \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x)$$

dunque, tenendo presente che $\theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x) = \mathrm{X}$, si ha:

$$\sup_{x_i \in \mathrm{X}} d(x_i, \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(y)) < \varepsilon^*$$

Analogamente se $\mathrm{Y} = \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(y)$ si ha:

$$\sup_{y_j \in \mathrm{Y}} d(\mathrm{X}, y_j) < \varepsilon^*$$

In definitiva, per come è definita la distanza su C(L), si ha:

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) < \varepsilon^*$$

Per la (13) risulta:

$$d(\mathrm{X}, \theta'(y)) < \varepsilon^*$$

da cui consegue la (15).

Analogamente sussiste la (16).

Con ciò resta provato che θ' è continua in ogni $x \in \bar{\mathrm{I}}(x_o, r)$, $x \neq x_o$.

In modo analogo, con qualche ovvia variante si prova che θ' è continua anche in x_0.

Il lemma precedente ci permette, ora, di costruire delle selezioni continue in un intorno del punto x_0.

TEOREMA 2.2. — *Nelle stesse ipotesi del lemma* 2.1., *esistono* $\theta_{x_0,1}$, $\theta_{x_0,2}$, ..., $\theta_{x_0,n}$ *n selezioni locali definite in un intorno chiuso di di* x_0, $\bar{I}(x_0, r)$, *e ivi continue, tali che per ogni x appartenente a tale intorno risulti*:

$$\theta_{x_0,i}(x) \neq \theta_{x_0,j}(x), \qquad i \neq j \tag{19}$$

Dim. — Sia θ' l'applicazione continua di $\bar{I}(x_0, r)$ in $C(L')$ definita come in (7) (cfr. lemma 2.1.).

Essendo $\bar{I}(x_0, r)$ un insieme compatto convesso in S e inoltre per ogni $x \in \bar{I}(x_0, r)$ $\theta'(x)$ costituito da h elementi, per il teorema di selezione di L. CARBONE [1], esistono p selezioni di θ'

$$\theta'_h : \bar{I}(x_0, r) \to L' = C(L)$$

continue in $\bar{I}(x_0, r)$ tali che:

$$\forall\, x \in \bar{I}(x_0, r) : \theta'_h(x) \neq \theta'_{h'}(x) \quad \forall\, h, h' \in \{1, \ldots, p\}, \quad h \neq h'$$

Da ciò per (5) si ha:

$$\forall\, x \in \bar{I}(x_0, r) : \theta'_h(x) \cap \theta'_{h'}(x) = \emptyset, \quad h \neq h' \tag{20}$$

Si osserva ora che per ogni selezione locale θ'_h e $\varepsilon^* < \varepsilon_0$, se $\delta'_h > 0$ è tale che $\delta'_h < r$ e per ogni $x, y \in \bar{I}(x_0, r)$, $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ si abbia:

$$d(\theta'_h(x), \theta'_h(y)) < \varepsilon^*,$$

se, inoltre, $\theta'_h(x) = \theta^{\varepsilon_0}_{x^h_0}(x)$ e $\theta'_h(y) = \theta^{\varepsilon_0}_{x^{h'}_0}(y)$, allora necessariamente $x^h_0 = x^{h'}_0$.

Lo stesso accade se $x = x_0$ oppure $y = x_0$. Dunque se si pone $\delta' = \{\delta'_1, \ldots, \delta'_p\}$ ed $r' = \frac{1}{2}\delta'$, le selezioni, che denotiamo ancora

[1] Cfr. Teorema 1.1. di [1].

con θ'_h, definite in $\bar{I}(x_o, r')$ e ivi continue, sono tali che:

$$\forall\ x \in \bar{I}(x_o, r') : \theta'_h(x) = \begin{cases} \{x_o^h\} & \text{se } x = x_o \\ \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x) & \text{se } x \neq x_o \end{cases}$$

ed inoltre, per come si è scelto δ (cfr. dim. lemma 2.1.), essendo $r' < \delta$, per (8) si ha

$$\text{card. } \theta'_h(x) = \text{card. } \theta^{\varepsilon_o}_{x_o^h}(x) = p_h, \qquad \forall\ x \in \bar{I}(x_o, r), \quad x \neq x_o$$

mentre è $\theta'_h(x_o)$ costituito da un solo elemento x_o^h.

Alle funzioni θ'_h, $h \in \{1, \ldots, p\}$, così ottenute per selezione da θ', possiamo ulteriormente applicare il nostro precedente teorema 2.1. Questo infatti assicura l'esistenza, per ogni $h \in \{1, \ldots, p_h\}$, di p_h selezioni $\theta'_{h,i}$ continue in $\bar{I}(x_o, r)$ tali che:

$$(21) \qquad \forall\ x \in \bar{I}(x_o, r),\ x \neq x_o : \theta'_{h,i}(x) \neq \theta'_{h,j}(x) \qquad i \neq j$$

Essendo $p_1 + p_2 + \ldots + p_p = n$, in definitiva esistono n selezioni locali, che denotiamo con $\theta_{x_o,1}, \theta_{x_o,2}, \ldots, \theta_{x_o,n}$, continue in $\bar{I}(x_o, r)$.

Inoltre per (20) e (21) sussiste la (19).

TEOREMA 2.3. — *Sia* S *un connesso compatto nello spazio* $\mathbf{R}^k$, *con* $k > 1$, L *uno spazio metrico,* θ *un'applicazione continua da* S *in* C(L) *tale che* $\theta(x)$ *sia costituito da* p *elementi con* $1 \leq p < n$.

Se $\theta(x_o) = \{x_o^1, x_o^2, \ldots, x_o^p\}$ *e per ogni* $h \in \{1, \ldots, p\}$ x_o^h *ha molteplicità* p_h, *con* $1 \leq p_h < n$, *allora* θ *ammette* n *selezioni continue* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ *e inoltre*:

$$(22) \qquad \forall\ x \in S,\ x \neq x_o,\ \theta_i(x) \neq \theta_j(x), \qquad i \neq j$$

Dim. — Per $p = 1$ la tesi è contenuta nel teorema 2.1.

Sia $p > 1$. Fissato $r > 0$ come nel teorema precedente, i teoremi 2.2 e 1.1, ci assicurano l'esistenza di n selezioni continue in $\bar{I}(x_o, r)$ e di n selezioni continue in $S - I(x_o, r)$.

Occorre dimostrare che le selezioni in $\bar{I}(x_o, r)$, si raccordano con continuità attraverso la frontiera $\mathfrak{F}_r(I(x_o, r))$, alle selezioni in $S - I(x_o, r)$.

Fissiamo $\theta_{x_o,i}$ una selezione locale di θ definita in $\bar{I}(x_o,r)$, intorno chiuso di x_o ed $s \in \mathcal{F}_r(I(x_o,r))$. Posto $\theta(s) = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$, se $\theta_{x_o,i}(s) = s_i$, scegliendo opportunamente ε_o e $\delta \in \mathbf{R}_+^*$, la selezione $\theta_i^{(r)}$ definita in $S - I(x_o, r)$ ottenuta col procedimento di L. CARBONE [2] come prolungamento della selezione locale θ_{s_i} definita in $I(s,\delta) - I(x_o, r)$, è un prolungamento della selezione locale $\theta_{x_o,i}$, in quanto risulta, per il corollario 1.1. di [1]:

$$\theta_{x_o,i}(y) = \theta_i^{(r)}(y) \qquad \forall\, y \in \mathcal{F}_r(I(x_o, r))$$

Si ottengono in tal modo n selezioni di θ, che denotiamo con $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ continue in S a valori in L, che ovviamente verificano la condizione (22).

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CARBONE, *Su un criterio di selezione continua*, B.U.M.I., 12 (1975), 127-138.

[2] L. CARBONE, *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni funzionali*, Ricerche di Mat. XXV (1976), 31-50.

[3] M. TUCCI, *Su un problema di selezione continua di un'applicazione plurivoca ad n valori non tutti distinti*, Quaderni dell'Istituto di Analisi Matematica dell'Università di Bari.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, C. Ciliberto e C. Miranda.

[2] Cfr. dim. Teorema 1.1. di [1].

Convergence in category

Nota di ELZBIETA WAGNER
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 3 giugno 1978)

SOMMARIO. — Per una successione di funzioni godenti della proprietà di Baire, viene introdotta la nozione di convergenza in categoria, come duale della convergenza in misura. Tale nozione, dopo alcuni risultati preliminari, è confrontata con quella di convergenza a meno di un insieme di prima categoria (nearly everywhere) e con gli usuali tipi di convergenza.

SUMMARY. — A notion of convergence in category, as dual of that of convergence in measure, is given for a sequence of functions possessing the Baire property. Using previos results, convergence nearly everywhere (except of a set of first category on the line) is studied.

The notions of upper and lower limits in measure of a sequence $\{f_n\}$ of measurable functions were studied by C. GOFFMAN and D. WATERMAN in [1]. Among others they have proved that a sequence $\{f_n\}$ is convergent in measure to f if and only if the upper limit in measure of this sequence is equal to the lower limit in measure and both are equal to f.

It is well known (see for example [5]) that a sequence $\{f_n\}$ of measurable functions converges in measure to f if and only if every subsequence $\{f_{m_n}\}$ of $\{f_n\}$ contains a subsequence $\{f_{mp_n}\}$ converging almost everywhere to f. Using the above fact we shall introduce in a similar manner the notion of convergence in category of a sequence $\{f_n\}$ of functions possessing the Baire property. We shall prove that the set of all equivalence classes of functions having the Baire property, where two functions are equivalent if they are equal except on the set of the first category, is a complete lattice and we shall introduce the notions of upper and lower limits in category of a sequence $\{f_n\}$. At last we shall prove that a sequence $\{f_n\}$ is convergent in category to f if and only if the upper and lower limits in category of $\{f_n\}$ are equal to f.

Let (X, τ) be a topological space, $\mathfrak{B}^*$ — the class of subsets of X having the Baire property and $\mathfrak{I}$ — the ideal of subsets of the first category in X. Identifying the sets $A, B \in \mathfrak{B}^*$ if and only if $A \triangle B \in \mathfrak{I}$ we obtain a quotient Boolean algebra $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{I}$. The class including a set A will be denoted by $[A]$. For classes $[A], [B] \in \mathfrak{B}^*/\mathfrak{I}$ the denotation $[A] \subset [B]$ means that $A_1 - B_1 \in \mathfrak{I}$ for every $A_1 \in [A]$ and $B_1 \in [B]$.

A statement that holds for all points of a set A except a set of the first category will be said to hold nearly everywhere on A or for nearly all points of A.

A real function defined on X is a null function if and only if it vanishes nearly everywhere, two functions f and g having the Baire property are called equivalent if and only if $f-g$ is a null function. The class of functions equivalent to f is denoted by $[f]$. For equivalence classes $[f]$ and $[g]$ the denotation $[f] \leq [g]$ means that $f_1(x) \leq g_1(x)$ for nearly all $x \in X$ when $f_1 \in [f]$ and $g_1 \in [g]$.

LEMMA 1. — *The Boolean algebra $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{I}$ is a complete lattice if and only if the family $\mathfrak{M}$ of equivalence classes of real functions having the Baire property on* X *is a complete lattice.*

Proof. — The proof is similar to that of lemma 1 in [2].

Sufficiency. — Let $[A_t]_{t \in T}$ be a family of members of $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{I}$ and let $f \in \sup_t [\chi_{A_t}]$, where χ_{A_t} is a characteristic function of the set A_t. Then $0 \leq f(x) \leq 1$ nearly everywhere on X. Indeed, suppose that $f(x) < 0$ on a set of the second category, then we should have $\chi_{A_t}(x) < 0$ on the set of the second category for every $t \in T$, because $[\chi_{A_t}] \leq \leq \sup_t [\chi_{A_t}] = [f]$. This is a contradiction. Suppose now that $f(x) > 1$ on the set of the second category. Then there exists a $t_0 \in T$ such that $\chi_{A_{t_0}}(x) > 1$ on the set of the second category — again a contradiction. Similarly one can prove that the set $\{x : 0 < f(x) < 1\}$ is of the first category. So $f(x) = 0$ or $f(x) = 1$ nearly everywhere on X. There exists a set $A \subset X$ such that $f(x) = \chi_A(x)$ nearly everywhere on X. All sets A_t and all functions χ_{A_t} have the Baire property and $\mathfrak{M}$ is a complete lattice, so f and at last A also have the Baire property. For every $t \in T$ we have $[\chi_{A_t}] \leq [f]$, so $[A_t] \subset [A]$. Moreover, if $[B] \in \mathfrak{B}^*/\mathfrak{I}$ is such that for every $t \in T$ $[A_t] \subset [B] \subset [A]$, then for every $t \in T$ $[\chi_{A_t}] \leq [\chi_B] \leq [\chi_A] = \sup_t [\chi_{A_t}]$. Hence $[\chi_B] = [\chi_A]$ and $[B] = [A]$, so $[A] = \sup_t [A_t]$.

Necessity. — Let f_t, $t \in T$ be a family of functions having the Baire property. Without loss of generality we may assume that all functions f_t are non-negative. For every $t \in T$ we shall define a non-decreasing sequence $\{f_t^n\}_{n \in N}$ converging to f_t, in a following way:

$$f_n^t(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \text{if} \quad \dfrac{k-1}{2^n} \leq f_t(x) < \dfrac{k}{2^n}, \; k = 1, \ldots, n\,2^n; \\ n & \text{if} \quad f_t(x) \geq n. \end{cases}$$

Let $E_t^{nk} = \{x : (k-1) \cdot 2^{-n} \leq f_t(x) < k \cdot 2^{-n}\}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ and let $E_t^{n\nu} = \{x : f_t(x) \geq n\}$, where $\nu = n \cdot 2^n + 1$. These sets, of course, have the Baire property. For fixed n, let E_{nk} be an element of $\sup_t [E_t^{nk}]$ for $k = 1, 2, \ldots, \nu$. Let $F_{nk} = E_{nk} - \bigcup_{j=k+1}^{\nu} E_{nj}$ for every $k = k = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ and let $F_{n\nu} = E_{n\nu}$. All sets F_{nk} have the Baire property, are disjoint and $[\bigcup_{k=1}^{\nu} F_{nk}] = [X]$. Put $g_n(x) = \sum_{k=1}^{\nu} (k-1) \cdot 2^{-n} \cdot \chi_{F_{nk}}(x)$, for $x \notin \bigcup_{k=1}^{\nu} F_{nk}$ g_n is defined in arbitrary manner. For every natural n g_n has the Baire property and $[g_n] = \sup_t [f_t^n]$. Indeed, suppose that for some $t_0 \in T$ the set $A = \{x : g_n(x) < f_{t_0}^n(x)\}$ is of the second category. Then there exists $k_0 \in \{1, 2, \ldots, \nu - 1\}$ such that $A \cap F_{nk_0}$ is of the second category. For $x \in F_{nk_0}$ we have $g_n(x) = (k_0 - 1) \cdot 2^{-n}$, so $f_{t_0}^n(x) \geq k_0 \cdot 2^{-n}$ for $x \in A \cap F_{nk_0}$. Hence $F_{nk_0} \cap \bigcap \bigcup_{j=k_0+1}^{\nu} E_{nj}$ is of the second category, which is impossible. Then for every $t \in T$ we have $[f_t^n] \leq [g]$. Suppose now that there exists a function h having the Baire property such that for every $t \in T$

$$[f_t^n] \leq [h] \tag{1}$$

and the set $A = \{x : g_n(x) > h(x)\}$ is of the second category. We can suppose that h takes only the values $(k-1) \cdot 2^{-n}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$, in contrary case it suffices to take a function h_0 defined in the following way: $h_0(x) = \max\{(k-1) \cdot 2^{-n} : (k-1) \cdot 2^{-n} \leq h(x)\}$. (Obviously h_0 also fulfills (1)). So there exists $k_0 \in \{2, \ldots, \nu\}$ such that $A \cap F_{nk_0}$ is of the second category. We have $h(x) < (k_0 - 1) \cdot 2^{-n}$ for $x \in A \cap \cap F_{nk_0}$. Simultaneously for every $t \in T$ $f_t^n(x) \leq h(x)$ except on a set H_t of the first category. Hence $f_t^n(x) < (k_0 - 1) \cdot 2^{-n}$ for $x \in (A \cap F_{nk_0}) -$

$- H_t$, then $((A \cap F_{nk_0}) - H_t) \cap E_t^{nk_0} = \emptyset$. So for every $t \in T$ $[E_t^{nk_0}] \subset$ $\subset [E_{nk_0} - (A \cap F_{nk_0})]$, hence $\sup_t [E_t^{nk_0}] \subset [E_{nk_0} - (A \cap F_{nk_0})]$. Then we have $E_{nk_0} \notin \sup_t [E_t^{nk_0}]$, because $A \cap F_{nk_0}$ is the set of the second category. This is a contradiction, so $[g_n] = \sup_t [f_t^n]$.

Moreover, since $[f_t^n] \leq [f_t^{n+1}]$ for every $t \in T$ and for every n, then $[g_n] = \sup_t [f_t^n] \leq \sup_t [f_t^{n+1}] = [g_{n+1}]$, so $[g_1] \leq [g_2] \leq \ldots \leq$ $\leq \ldots [g_n] \leq \ldots$. Hence $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ exists nearly everywhere on X, g has a Baire property and $[g] = \sup_n [g_n] = \sup_{n,t} [f_t^n] = \sup_t [f_t]$.

LEMMA 2. — *$\mathfrak{B}^*/\mathfrak{I}$ is a complete lattice.*

Proof. — It follows immediately from the fact that $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{I}$ is isomorphic with the algebra of regular open sets (see [3]).

COROLLARY. — *$\mathfrak{M}$ is a complete lattice.*

We shall denote both $[f]$ and its elements by f, hoping that no ambiguity will result and that the reader will make suitable distinction according to the context.

DEF. 1. — *We shall say that a sequence $\{f_n\}$ of functions having the Baire property on a set $A \in \mathfrak{B}^*$ converges in category to a function f having also the Baire property if and only if every subsequence $\{f_{m_n}\}$ of $\{f_n\}$* contains a subsequtnce $\{f_{m_{p_n}}\}$ converging nearly everywhere on A to f.

Obviously there exist sequences which converge in category but not nearly everywhere on X. For example let $X = [0, 1]$. Put $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$, $f_3 = \chi_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}$, $f_4 = \chi_{\left[0, \frac{1}{4}\right]}$, $f_5 = \chi_{\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]}$ and so on. Then $\{f_n\}$ converges in category to 0 and does not converge nearly everywhere to 0 (it is a very well known example of a sequence converging in measure, but not almost everywhere).

We shall now define an equivalence relation for sequences of functions having the Baire property. Let $\{f_n\}$ be equivalent to $\{g_n\}$ if and only if $\{f_n - g_n\}$ converges in category to zero.

Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions having the Baire property and let $\mathfrak{F}$ be the equivalence class including $\{f_n\}$.

DEF. 2. — *We shall say that* $U \in \mathfrak{M}$ ($L \in \mathfrak{M}$) *is an upper (lower) limit in category of a sequence* $\{f_n\}$ *if and only if*

$$U = \inf\,[\limsup_{n\to\infty} g_n : \{g_n\} \in \mathfrak{F}]$$

$$(L = \sup\,[\liminf_{n\to\infty} g_n : \{g_n\} \in \mathfrak{F}].$$

The existence of U and L follows from the corollary and from the fact that for every sequence $\{g_n\}$ of functions having the Baire property a function $\limsup_n g_n$ ($\liminf_n g_n$) has also the Baire property.

LEMMA 3. — *If* U *and* L *are the upper and lower limits in category of a sequence* $\{f_n\}$, *then* $L \leq U$.

Proof. — Suppose that $U(x) < L(x)$ on a set of the second category. Then there exists a sequence $\{h_n\} \in \mathfrak{F}$ such that $\limsup_n h_n(x) < L(x)$ on the set of the second category and there exists a sequence $\{g_n\} \in \mathfrak{F}$ such that $\limsup_n h_n(x) < \liminf_n g_n(x)$ on the set F of the second category. We have $F = \bigcup_{\substack{w>0\\ w\in W}} \{x : \limsup_n h_n(x) + w < \liminf_n g_n(x)\}$, where W is the set of rational numbers, so there exists a rational number $w_0 > 0$ such that the set $\{x : \limsup_n h_n(x) + w_0 < \liminf_n g_n(x)\}$ is of the second category. Because $\limsup_n h_n(x) = \lim_{n\to\infty} (\sup(h_n(x), h_{n+1}(x), \ldots))$ and $\liminf_n g_n(x) = \lim_{n\to\infty} (\inf(g_n(x), g_{n+1}(x), \ldots))$, then $\{x : \limsup_n h_n(x) + w_0 < \liminf_n g_n(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : \sup(h_n(x), h_{n+1}(x), \ldots) + w_0 < \inf(g_n(x), g_{n+1}(x), \ldots)\}$. There exists a natural number n_0 such that the set $E = \{x : \sup(h_{n_0}(x), h_{n_0+1}(x), \ldots) + w_0 < \inf(g_{n_0}(x), g_{n_0+1}(x), \ldots)\}$ is of the second category. So for every $x \in E$ and for every $n \geq n_0$ we have $g_n(x) - h_n(x) > w_0 > 0$, hence $\{g_n\}$ is not equivalent $\{h_n\}$ — a contradiction.

Now we shall suppose that all functions under considerations are defined on the interval [0, 1] (and have the Baire property, of course).

LEMMA 4. — *If a sequence* $\{f_n\}$ *does not converge in category to zero, then at least one of the following conditions is fulfilled*:

1. *there exist a subsequence* $\{f_{m_n}\}$ *of* $\{f_n\}$, *a set* $A_0 \subset [0, 1]$ *of the second category and a natural number* k_0 *such that for every sub-*

sequence $\{f_{m_{p_n}}\}$ *of* $\{f_{m_n}\}$ $\lim\limits_n \sup f_{m_{p_n}}(x) \geq k_0^{-1}$ *nearly everywhere on* A_0.

2. *there exist a subsequence* $\{f_{m_n}\}$ *of* $\{f_n\}$, *a set* $A_0 \subset [0, 1]$ *of the second category and a natural number* k_0 *such that for every subsequence* $\{f_{m_{p_n}}\}$ *of* $\{f_{m_n}\}$ $\lim\limits_n \inf f_{m_{p_n}}(x) \leq -k_0^{-1}$ *nearly everwhere on* A_0.

Proof. — Suppose in contrary that for every subsequence $\{f_{m_n}\}$, for every set A of the second category and for every natural number k there exists a subsequence $(f_{m_{p_n}})$ of $\{f_{m_n}\}$ such that $\lim\limits_n \sup f_{m_{p_n}}(x) < -k^{-1}$ on the subset of A of the second category and that for every subsequence $\{f_{m_n}\}$, for every set A of the second category and for every natural number k there exists a subsequence $\{f_{m_{p_n}}\}$ of $\{f_{m_n}\}$ such that $\lim\limits_n \inf f_{m_{p_n}}(x) > -k^{-1}$ on the subset A of the second category.

Let $\{f_{m_n}\}$ be an arbitrary subsequence of $\{f_n\}$. Let $A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ and let $k = 1$. There exists a subsequence $\{f_n^{(1)}\}$ of $\{f_{m_n}\}$ such that $\lim\limits_n \sup f_n^{(1)}(x) < 1$ on the set of the second category $E_1 \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Consider $\{f_n^{(1)}\}$, $A_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ and $k = 1$. There exists a subsequence $\{f_n^{(2)}\}$ of $\{f_n^{(1)}\}$ such that $\lim\limits_n \sup f_n^{(2)}(x) < 1$ on the set of the second category $E_2 \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Observe that $\lim\limits_n \sup f_n^{(2)}(x) < 1$ for $x \in E_1 \cup E_2$. Consider $\{f_n^{(2)}\}$, $A_3 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $k = 1$. We obtain a subsequence $\{f_n^{(3)}\}$ of $\{f_n^{(2)}\}$ such that $\lim\limits_n \sup f_n^{(3)}(x) < 1$ for $x \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$, where $E_3 \subset \subset \left[0, \frac{1}{4}\right]$ is the set of the second category. Repeating this procedure for $A_4 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $A_5 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ and so on and for $k = 1$ we obtain a family of subsequences

$$\{f_n^{(1)}\} \supset \{f_n^{(2)}\} \supset \ldots \supset \{f_n^{(i)}\} \supset \ldots \tag{2}$$

such that for every i $\lim\limits_n \sup f_n^{(i)}(x) < 1$ for $x \in E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_i$, where $E_j \subset A_j$ $_{j=1,\ldots,i}$ is the set of the second category.

Let $\{\hat{f}_n^{(i)}\}$ be a diagonal subsequence chosen from the family (2). Then $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \{x : \limsup_n \hat{f}_n^{(i)}(x) < 1\} = B_1$ and its is easy to verify that B_1 has the Baire property. From the above construction it follows that if $[a, b] \subset [0, 1]$ is an arbitrary interval, then $[a, b] \cap B_1$ is of the second category. Let $B_1 = 0 \triangle P$, where 0 is open and P is of the first category. Then 0 is dense in $[0, 1]$, so 0 is a residual set and B_1 is also a residual set in $[0, 1]$.

Now we shall consider the subsequence $\{\hat{f}_n^{(1)}\}$ and we shall repeat all procedure for the same sets $A_1, A_2, \ldots$ and for $k = 2$. We obtain a subsequence $\{\hat{f}_n^{(2)}\}$ of $\{\hat{f}_n^{(1)}\}$ such that the set $B_2 = \left\{x : \limsup_n \hat{f}_n^{(2)}(x) < \frac{1}{2}\right\}$ is residual in $[0, 1]$. Doing similarly for $k = 3, 4, \ldots$ we obtain a family of subsequences

$$\{\hat{f}_n^{(1)}\} \supset \{\hat{f}_n^{(2)}\} \supset \ldots \supset \{f_n^{(i)}\} \supset \ldots \tag{3}$$

such that for every i $\limsup_n \hat{f}_n^{(i)} < \frac{1}{i}$ for $x \in B_i$ and B_i is a residual set in $[0, 1]$.

Let $\{\bar{f}_n\}$ be a diagonal subsequence chosen from the family (3). Then $\{x : \limsup_n \bar{f}_n(x) \leq 0\} \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, so this set is residual in $[0, 1]$, in other words $\limsup_n \bar{f}_n(x) \leq 0$ nearly everywhere on $[0, 1]$.

Using the second part of the assumption we can choose similarly a subsequence $\{f_{m_{p_n}}\}$ of $\{\bar{f}_n\}$ for which $\liminf f_{m_{p_n}} \geq 0$ nearly everywhere on $[0, 1]$. Then obviously $\lim f_{m_{p_n}}(x) = 0$ nearly everywhere on $[0, 1]$, so we have proved that every subsequence $\{f_{m_n}\}$ of $\{f_n\}$ contains a sebsequence $\{f_{m_{p_n}}\}$ converging nearly everywhere to zero — a contradiction. The lemma is proved.

THEOREM 1. — *A sequence* $\{f_n\}$ *converges in category to* f *if and only if* $U = L$, *and then* $f = U = L$.

Proof. — Suppose that $\{f_n\}$ converges in category to f. Then a sequence $\{f_n\}$ is equivalent to a sequence $\{g_n\}$, where $g_n = f$ for $n = 1, 2, \ldots$. Obviously $\limsup_n g_n(x) = f(x)$, so $U \leq f$. Similarly one can prove that $L \geq f$. Hence $f \leq L \leq U \leq f$ and $U = L$.

Suppose that $U = L$. We shall prove that $\{f_n\}$ converges in category to U. Without loss of generality we can suppose that $U = 0$. Assume that $\{f_n\}$ does not converge to zero and that the first condition of the lemma 4 is fulfilled (in the remaining case the proof is similar). To finish the proof we shall show that $U(x) \geq k_0^{-1}$ nearly everywhere on A_0.

Let $\{g_n\}$ be a sequence equivalent to $\{f_n\}$. Then $g_n = f_n + a_n$, where $\{a_n\}$ is a sequence converging in category to zero. Let $\{f_{m_n}\}$ be a subsequence described in the lemma 4. There exists a subsequence $\{a_{m_{p_n}}\}$ of $\{a_{m_n}\}$ such that $\lim_n a_{m_{p_n}}(x) = 0$ nearly everywhere on $[0, 1]$, more precisely for $x \in [0, 1] - C$, where C is a set of the first category. Let $x \in A_0 - C$. Then $\limsup_n g_n(x) \geq \limsup_n g_{m_{p_n}}(x) = \limsup_n (f_{m_{p_n}}(x) + a_{m_{p_n}}(x)) \geq k_0^{-1}$. So for every sequence $\{g_n\} \in \mathfrak{F}$ $\limsup_n g_n(x) \geq k_0^{-1}$ nearly everywhere on A_0. Hence from the definition of U we have $U(x) \geq k_0^{-1}$ nearly everywhere on A_0 — a contradiction.

It is easy to construct a sequence of measurable and having the property of Baire functions, which is convergent in measure but not in category / or conversely /. Indeed, let $A, B \subset [0, 1]$ be a pair of sets such that A is of the first category, B is of Lebesque measure zero and $A \cup B = [0, 1]$ / see [4], p. 5 /. If $f_n = (-1)^n \chi_A$ for every n, then the sequence $\{f_n\}$ converges nearly everywhere / so also in category / to the function $f \equiv 0$ but $\{f_n\}$ does not converge in measure. If we put $g_n = (-1)^n \chi_B$, then we obtain a sequence convergent almost everywhere to $g \equiv 0$ but not convergent in category. Obviously every f_n and g_n is measurable and has the property of Baire.

A little more difficult is to construct a sequence of continuous functions which is convergent in measure but not in category / or conversely /.

Let $A \subset [0, 1]$ be a closed nowhere dense set of positive measure and let $\{(a_n, b_n)\}$ be a sequence of components of $[0, 1] - A$. Put

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{for } x \in A \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} (a_n, b_n) \\ 0 & \text{for } x \in \bigcup_{i=1}^{n} [a_i + (b_i - a_i)\,2^{-n},\ b_i - (b_i - a_i)\,2^{-n}] \\ \text{linear on the intervals } [a_i, a_i + (b_i - a_i)\,2^{-n}] & \\ \text{and } [b_i - (b_i - a_i)\,2^{-n}, b_i] \text{ for } i = 1, \ldots, n. & \end{cases}$$

It is not dofficult to see that the sequence $\{f_n(x)\}$ converges to zero for every $x \notin A$, so $\{f_n\}$ converges in category to $f \equiv 0$.

Simultaneously $\{f_n\}$ does not converge in measure, because this sequence does not fulfill the Cauchy condition in measure. Indeed, for $\varepsilon < 2$ we have the inclusion $\{x : |f_n(x) - f_{n+1}(x)| > \varepsilon\} \supset A$.

Let now

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{for } x \in \bigcup_{i=1}^{n} \left[\frac{i}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}, \frac{i}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2}\right] \\ 0 \quad \text{for } x \in \left[0, \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \left[\frac{i}{n+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{i+1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \cup \left[\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, 1\right] \\ \text{linear on the intervals } \left[\frac{i}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{i}{n+1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2(n+1)^2}\right], \\ \left[\frac{i}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2}, \frac{i}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

It is not difficult to see that the sequence $\{g_n\}$ converges in measure to $g \equiv 0$. Indeed, the Lebesgue: measure of the set $\{x : g_n(x) \neq 0\}$ is equal to $2n : (n+1)^2$. We shall prove that $\{g_n\}$ does not converge in category. Let $\{g_{m_n}\}$ be an arbitrary subsequence of $\{g_n\}$. We shall show that the set $\{x : \lim_n \sup g_{m_n}(x) = 1 \text{ and } \lim_n \inf g_{m_n}(x) = 0\}$ is a residual set in $[0, 1]$. Denote $A_n = \text{Int } \{x : g_n(x) = 0\}$ and $B_n = \text{Int } \{x : g_n(x) = 1\}$. Then $\{x : \lim_n \sup g_{m_n}(x) = 1\} \supset \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_{m_n}$. The set $\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_{m_n}$ is open and dense in $[0, 1]$. Hence $\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_{m_n}$ is a residual set. Similarly one can prove that $\{x : \lim_n \inf g_{m_n}(x) = 0\} \supset$ $\supset \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_{m_n}$ is a residual set. From the fact that $\{g_{m_n}\}$ was an arbitrary subsequence we conclude that $\{g_n\}$ does not converge in category.

REFERENCES

[1] C. GOFFMAN, D. WATERMAN, *On upper and lower limits in measure*, Fund. Math., XLVIII, **2**, 1960, 127-133.

[2] C. GOFFMAN, R. E. ZINK, *Concerning the measurable boundaries of a real function*, ibidem, 105-111.

[3] P. R. HALMOS, *Lectures on Boolean Algebras*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1974.

[4] J. C. OXTOBY, *Measure and category*, Springer-Verlag, New York, Heidelgerg, Berlin 1971.

[5] R. SIKORSKI, *Funkcje rzeczywiste*, Warszawa 1958 PWN.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, C. Ciliberto e C. Miranda.

Individuazione di un indice di normalità in relazione al contenuto di alcuni metalli pesanti in *Mytilus Galloprovincialis* del golfo di Napoli

Nota di AUGUSTO BIONDI *, LUCIA ROSSI **,
GIOVANNI SANSONE * e UMBERTO GALLONE *
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 4 novembre 1978)

RIASSUNTO. — Si è indagato sul contenuto di alcuni metalli pesanti nelle valve e nel corpo dei mitili prelevati da colonie provenienti da diverse stazioni del golfo di Napoli, cercando di individuare un Indice di normalità quale indicatore delle capacità disinquinanti dei mitili o della loro potenziale pericolosità.

SUMMARY. — There was studied the content of some heavy metals in valves und bodies of mussels collected from colonies of different stations of the Gulf of Naples, trying to find an index of normality which indicates the capacity of the mussels in cleaning up the sea water as well as their potential hazard.

Nell'ambito di ricerche sul contenuto di metalli pesanti è stato riferito che le concentrazioni di Cr, Cd e Pb determinate nelle valve (Cv) e nel corpo del mollusco (Cc), mostrano che il potere disinquinante del Mytilus *galloprovincialis* rispetto ai suddetti elementi (Cv/Cc) cresce dal Cromo al Piombo, mentre l'indice di pericolosità degli stessi (Cc/Cv) aumenta in senso inverso [1].

Si è pensato di mettere in relazione il potere disinquinante e l'indice di pericolosità individuando nel loro rapporto un indice che consentisse di stabilire una condizione di normalità:

$$\frac{\text{Potere disinquinante}}{\text{Indice di pericolosità}} = \text{In (Indice di normalità).}$$

* Istituto di Biorganica Facoltà di Farmacia Università di Napoli.
** Stazione Zoologica Napoli.

A tal fine si è reso necessario procedere alla sommatoria delle concentrazioni dei metalli presi in considerazione, in quanto è l'insieme dei metalli distribuiti in misura maggiore nelle valve rispetto al corpo, a determinare il grado finale di capacità filtrante dei mitili; pertanto si è corretto rispettivamente il potere disinquinante e l'indice di pericolosità [1] con la seguente formulazione: CMv/CMc e CMc/CMv.

Ponendo in rapporto tra loro tali indici si esprime l'indice di normalità: $\frac{CMv/CMc}{CMc/CMv} = CMc^2/CMv^2 = In$ (Tab. B).

Risulta evidente dalla Tab. A che i rapporti Cv/Cc e Cc/Cv considerati per i tre metalli presi in esame singolarmente non sono sovrapponibili fra di loro in quanto è diversa la concentrazione del tipo

TABELLA A

Località	Concentrazione del metallo (ug/g di sostanza secca)						Potere disinquinante (Cmv/Cmc)			Indice di pericolosità (Cmc/Cmv)		
	Valve (Cmv)			Corpo (Cmc)								
	Cr	Cd	Pb	Cr	Cd	Pb	Cr	Cd	Pb	Cr	Cd	Pb
1. Cuma	11,5	5,0	60,6	7,8	1,4	19,7	1,5	3,6	3,1	0,7	0,3	0,3
2. Torre Gaveta	5,9	3,5	55,7	6,5	1,5	27,2	0,9	2,3	2,0	1,1	0,4	0,5
3. Punta Torre di Fumo	6,0	5,2	40,8	5,1	2,8	15,4	1,2	1,8	2,6	0,8	0,5	0,4
4. Marina di Vita Fumo	7,0	4,8	40,8	4,9	3,1	20,2	1,4	1,5	2,0	0,7	0,6	0,5
5. Miliscola	5,5	5,0	42,8	3,7	1,9	10,7	1,5	2,6	4,0	0,7	0,4	0,2
6. Capo Miseno	7,5	4,8	42,8	5,9	2,4	19,1	1,3	2,0	2,2	0,8	0,5	0,4
7. Porto di Miseno	6,0	3,0	65,0	3,2	1,8	18,6	1,9	1,7	3,5	0,5	0,6	0,3
8. Gerolomini	5,5	4,2	54,0	5,2	2,4	18,8	1,0	1,7	2,9	0,9	0,6	0,3
9. Bagnoli	10,9	3,6	80,9 *	7,5	1,7	85.0 *	1,4	2,1	0,9	0,7	0,5	1,0

* Valori anomali.
CMv = Concentrazione dei metalli nelle valve.
CMc = Concentrazione dei metalli nel corpo.

di metallo nelle acque a seconda della vicinanza di varie fonti di inquinamento.

Infatti l'esempio fornito dalle colonie di Bagnoli è esplicativo in tal senso data la presenza di un grosso complesso siderurgico.

Quando il valore dell'In è minore o uguale a 1, la colonia dei mitili considerata è in condizioni molto precarie, viceversa se tale In è maggiore di 1. Quanto più grande è l'Indice di normalità, tanto diventa migliore la capacità filtrante e quindi di sottrarre in maniera stabile i metalli dall'ambiente circostante. La eventuale anormalità espressa con questi indici consiste nel fatto che la concentrazione di alcuni metalli in qualche stazione (Tab. A) risulta quasi egualmente distribuita tra valve e corpo; ciò può essere interpretato con varie ipotesi.

Come è noto, gli ioni, prima di essere incorporati nelle valve devono diffondere attraverso il mantello nello strato di liquido palleale [3].

Può capitare che gli ioni inquinanti non possano raggiungere il liquido palleale e quindi andarsi a depositare nelle valve per una inibizione dei meccanismi preposti a tale scopo; inibizione che può essere provocata, ad esempio, da una forte concentrazione di ioni che può risultare tossica per il metabolismo del mitile, oppure perché i sistemi di trasporto degli ioni dal corpo al liquido palleale sono saturati.

L'indice di normalità è stato calcolato per colonie di mitili prelevati in zone diverse, ottenendo così una graduatoria (Tab. B) in cui si nota la presenza all'ultimo posto delle colonie di mitili prove-

TABELLA B

Indice di Normalità

$$In = \frac{\text{Potere Disinquinante}}{\text{Indice di Pericolosità}} = \frac{CMv}{CMc} \Big/ \frac{CMc}{CMv} = \frac{CMv^2}{CMc^2}$$

Graduatoria	Località	CMv	CMc	In	
I	Miliscola	53,3	16,3	10,6	↑ Indice di normalità
II	Porto di Miseno	74,0	23,6	9,8	
III	Cuma	77,1	28,9	7,1	
IV	Gerolomini	63,7	26,4	5,8	
V	P. Torre di Fumo	42,0	23,3	5,0	
VI	Capomiseno	55,1	27,4	4,0	
VII	Torregaveta	65,1	35,2	3,4	
VIII	M. di Vita Fumo	52,6	28,2	3,4	
IX	Bagnoli	95,4	94,2	1,0	Potenziale Pericolosità ↓

CMv = Concentrazione dei metalli nelle valve.
CMc = Concentrazione dei metalli nel corpo.

nienti dal litorale antistante Bagnoli ed al primo quelle provenienti dal litorale di Miliscola (Zona priva di industrie e comunque la più esposta al gioco delle correnti marine).

Possiamo ritenere quindi che l'indice proposto rappresenti un facile parametro per la identificazione dello stato di salute di mitili in rapporto al grado di inquinamento da metalli nell'habitat di provenienza.

Parte sperimentale. — Le tecniche e i materiali utilizzati sono descritti nella nota precedente [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] M. D'Agostino, A. Biondi e G. Sansone, *Accumulo di alcuni metalli pesanti nelle valve e nel corpo del Mytilus galloprovincialis*, Estratto dal rendiconto dell'Acc. di Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, serie IV, vol. XLIII, 1976.

[2] M. D'Agostino, A. Biondi, G. Misuraca e G. Sansone, *Ricerche sull'incorporazione dei metalli in tracce nelle valve del Mytilus galloprovincialis*, Estratto dal rendiconto dell'Acc. di Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, serie IV, vol. LIV, 1977.

[3] K. M. Wilber, *Shell formation and regeneration* (in *Physiology of Mollusca*) di K. M. Wilber e C. M. Yange, pp. 243-276, Academia Press, New York 1964.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, V. Leone e G. Chieffi.

I depositi argillosi dal Cretacico Superiore al Miocene Inferiore nella piattaforma carbonatica Campano-Lucana: variazioni mineralogiche ed evoluzione paleoambientale

Nota di MARIA BONI *, DAMIANO STANZIONE **
e FORTUNATO ZENONE ***
presentata dal socio emerito ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 4 novembre 1978)

RIASSUNTO. — Vengono presi in considerazione alcuni affioramenti di materiali argillosi intercalati ai sedimenti calcarei della Piattaforma Carbonatica Campano-Lucana dal Cretacico superiore al Miocene inferiore. Le indagini mineralogiche effettuate su tali depositi hanno messo in luce che per le argille del Cretacico superiore il costituente principale è dato da caolinite T ad alta cristallinità, mentre nei depositi paleocenici prevalgono fillosilicati del tipo illite e *mixed-layer*. Nelle argille residuali in posizione superiore nella serie, oltre ad essere presente caolinite a bassa cristallinità e *mixed-layer*, sono state rinvenute notevoli percentuali di minerali detritici fra cui quarzo, feldspato, zircone e tormalina.

Tali diversità mineralogiche in un ambito tanto ristretto ci hanno portato ad ipotizzare probabili fasi ripetute di emersione, convalidate da dati micropaleotologici, fra il Senoniano ed il Paleocene, oltre ad un ringiovanimento dell'evoluzione tettonica della piattaforma interna, almeno limitatamente ad un periodo precedente al Langhiano.

ABSTRACT. — Clay deposits interbedded within late Cretaceous to early Miocene carbonates of Southern Apennines (Campania-Lucania Carbonate Platform) have been studied.

Mineralogic analyses indicates that the main component of the late Cretaceus clays is highly crystallized T-kaolinite, while in the Paleocenic clays, illite and mixed-layer types predominate. The uppermost clays besides lowly crystallized kaolinite and mixed-layer, contain large percentage of detrital minerals (quartz, feldspar, zircon and tourmaline).

The evolutionary trends clay minerals in a relatively short stratigraphic interval allow to infer repeated emersion episodes, that are also supported by micropaleontological as well as sedimentological data.

* Istituto di Geologia e Geofisica dell'Università di Napoli. Largo S. Marcellino, 10 - 80138 Napoli.
** Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli. Via Mezzocannone, 8 - 80134 Napoli.
*** CEMENTIR - Cementerie del Tirreno S.p.A. - Servizio Centrale Controlli & Ricerche. Via Coroglio, 71 - 80124 Napoli.

Inquadramento geologico

I terreni in facies carbonatica, da cui sono in prevalenza costituite le dorsali di M. Soprano, M. Sottano - Trentinara e M. Vesole (Cilento Nord-orientale), appartengono alle unità della piattaforma carbonatica interna (Ippolito et al., 1975): essi comprendono essenzialmente termini del Cretacico (inferiore e superiore) in facies calcareo-dolomitica di retroscogliera, del Paleocene sup.-Eocene (Formazione di Trentinara, Selli, 1962), nonché del Miocene (Formazione di Capaccio e Roccadaspide, Selli, 1962).

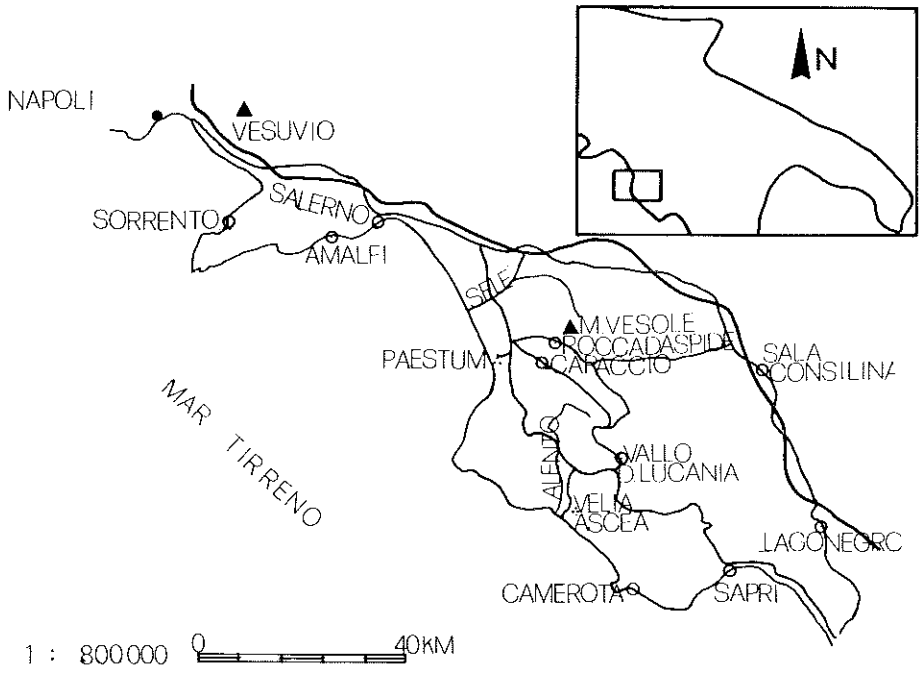


Fig. 1. - Ubicazione geografica dell'area in esame.

Lo studio biostratigrafico della serie Cretaceo-Paleocenica nella zona in esame si deve, oltre che a Selli (1962) il quale, in riferimento ai termini paleocenici istituì la Formazione di Trentinara, ed a Sartoni e Crescenti (1963), che si occuparono più che altro del Mesozoico in generale, a Sgrosso (1968) ed a Scorziello e Sgrosso (1965), a cui fa capo soprattutto la ripartizione delle facies nella parte alta del Cretacico e l'individuazione dei rapporti fra quest'ultimo ed il Paleocene.

Dall'esame delle microfacies riscontrate da Sgrosso (1968) nella successione di M. Vesole si è potuta infatti accertare la presenza di tutti i piani del Cretacico superiore, dal Cenomaniano al Senoniano,

del Paleocene superiore (Eocene?), ed infine del Miocene. Ben caratterizzati sono il Cenomaniano ed il Turoniano e così pure la base del Senoniano il cui inizio si fa coincidere con la comparsa di *Accordiella conica* FARINACCI. Fra le altre forme di importanza stratigrafica rinvenute invece nell'intervallo più alto, si ricordano *Montcharmontia apenninica* DE CASTRO, *Rotorbinella scarsellai* TORRE, *Nummoloculina robusta* TORRE, *Sgrossoella partenopeia* DE CASTRO ed infine *Scandonea mediterranea* DE CASTRO la cui comparsa indicherebbe come minimo la presenza dell'intervallo Campaniano-Maestrichtiano, se non il Maestrichtiano vero e proprio (DE CASTRO, 1974).

FIG. 2 - Capaccio (Salerno). Argille caolinitiche intercalate nei calcari Senoniani.

Il passaggio Senoniano-Paleocene, da SGROSSO (1968) descritto come trasgressivo, non è rappresentato però da una corrispondente brusca variazione delle microfacies, dal momento che è stata verificata la coesistenza, in alcuni livelli di ambienti particolari, (ad es. i livelli a crostacei decapodi del M. Vesole), di forme ancora cretaciche unitamente ad altre di forte affinità paleocenica (Spirolina, Rotalia, trocamminidi e nubecolaridi).

Fra il Senoniano e il Paleocene viene comunque ammessa la presenza di più fasi regressive (almeno due), a cui sono probabilmente connesse brevi lacune di sedimentazione e facies di acque salmastre. La prima, localizzata durante l'intervallo Campaniano-Maestrichtiano, è caratterizzata dalla presenza di un livello discontinuo lentiforme di argille rosso-giallastre molto compatte e da « fiamme » rossastre nei calcari (BONI et al., 1979) (Fig. 2), un'altra da un livello calciruditico

già Paleocenico a matrice giallo-verdastra che ricopre i calcari sottostanti secondo una superficie molto irregolare.

Dal punto di vista litologico la Formazione di Trentinara (Paleocene-Eocene inf.?) è costituita da calcari compatti, calcareniti e talora calciruditi di colore biancastro o grigiastro e di ambiente da marino salmastro a lagunare (SELLI, 1962).

Le calcareniti possono sfumare in brecciole e talora si hanno anche calcari pseudo-oolitici, mentre le calciruditi (*pseudogalets*), con elementi arrotondati di dimensioni da 1 a 8 cm sono spesso cementate da marne calcaree giallo-verdastre. Tali marne, che passano localmente a vere e proprie argille verdi, rappresentano talvolta chiare intercalazioni ricorrenti a più altezze nella serie: il loro spessore massimo può superare il metro (Fig. 3).

FIG. 3. - Strada statale Trentinara-Monteforte Cilento. Formazione di Trentinara; Marne verdi e brecciole con intercalazioni di letti più argillosi.

Nella parte alta della serie paleocenica sono visibili brecciazioni ed arrossamenti a cui si aggiunge l'impianto di un modesto carsismo superficiale con sacche che possono raggiungere anche lo spessore di 8 metri. Tali fenomeni sono connessi al lungo periodo di emersione anteriore alla trasgressione miocenica, cui si devono inoltre locali spessi accumuli di argille rosse più o meno compatte, ricche in ferro e in elementi terrigeni di provenienza alloctona (BONI, 1974).

Questo materiale, già da molti rilevatori definito come « argilla bauxitica », in base alla sua affinità litologica con le bauxiti della piattaforma Abruzzese-Campana, ne rappresenta anche il corrispettivo dal punto di vista giaciturale (anche qui, infatti, viene marcata una lacuna sedimentaria con emersione); il letto delle sacche, rappresentato esclu-

sivamente dai già descritti terreni paleocenici, presenta inoltre un carsismo simile per entità a quello che si riscontra nella maggior parte degli affioramenti bauxitici dell'Appennino, mentre è meno spinto di quello delle depressioni carsiche a letto delle bauxiti dell'avampaese pugliese (BÁRDOSSY et al., 1977). In ogni caso la carsificazione è ristretta nell'ambito della Formazione di Trentinara e non giunge quasi mai (almeno per quanto è possibile vedere) al sottostante Cretacico. Risulta inoltre evidente la forma lenticolare delle sacche che, pur rappresentando un livello relativamente costante, sono distribuite lungo il contatto Paleocene-Miocene in modo abbastanza irregolare. Vi sono, infatti, zone dove il contatto è rappresentato dalla sovrapposizione immediata delle calcareniti aquitaniane sui calcari paleocenici, senza alcuna intercalazione di materiale residuale, mentre, a pochi metri di distanza, si approfondisce una sacca di argille rosse con spessore anche notevole. Viene pertanto a delinearsi, per i depositi in oggetto, una origine legata allo sviluppo di un paleocarsismo epigeo, impiantatosi sulla superficie dei calcari della Formazione di Trentinara, ed il cui scarso approfondimento è dovuto, probabilmente, all'interporsi dei frequenti intercalari marnosi e argillosi della formazione stessa.

LOCALIZZAZIONE DEI CAMPIONI

I campioni esaminati provengono dai livelli Senoniano-Paleocenici affioranti lungo la strada provinciale Trentinara-Monteforte Cilento, intorno al Km 15, poco distante dal paese di Trentinara. Citeremo qui soltanto i più significativi (BONI et al., 1979).

Campioni 1-2-5-6: Calcilutiti biancastre con chiazze e laminazioni giallo-rosate. Senoniano.

Campioni 3-4-11-13: Argilla rossastra di aspetto molto coerente, intercalata in piccoli corpi lentiformi nell'ambito dei calcari Senoniani.

Campioni 7-8: Argille e argille marnose verdi, intercalate ai calcari della Formazione di Trentinara. Paleocene.

Campioni 9-10-12: Brecce a cemento marnoso verde della Formazione di Trentinara. Paleocene.

Per quanto riguarda le argille « bauxitiche », sono stati presi in considerazione soltanto due affioramenti, l'uno localizzato ai piedi del Monte Sottano, in un livello residuale abbastanza continuo, e l'altro nella zona di Madonna del Granato, Km 2.00, immediatamente al di sotto del vecchio castello.

Campioni 14-15-16-17-18: Argille rossastre più o meno coerenti, con contenuto variabile in ooliti e pisoliti, provenienti dalla sacca B del Monte Sottano.

Campioni 19-20-21-22-23: Argille rossastre, abbastanza ricche in pisoliti, provenienti da una delle sacche in località Madonna del Granato.

Metodologia

I metodi di indagine da noi usati nel presente studio consistono in analisi termo-differenziali, chimiche e roentgenografiche (diffrattometrie), queste ultime eseguite sia sui tout-venant *che sulle frazioni inferiori a 2 μ. Su alcune di tali frazioni sono state inoltre eseguite analisi di aggregati orientati, prove di espandimento reticolare col glicole etilenico e prove di riscaldamento, onde accertare l'esatta natura dei minerali argillosi.*

I residui insolubili dei calcari e dei calcari marnosi sono stati ottenuti mediante attacco con CH_3COOH diluito allo scopo di eliminare la frazione carbonatica.

Su tutti i campioni sono state eseguite inoltre osservazioni macroscopiche e microscopiche, in sezione sottile, queste ultime precedute da inglobaggio in resine, data l'estrema incompetenza della maggior parte del materiale. In alcuni casi si è resa necessaria la frantumazione del campione, con eliminazione della matrice argillosa mediante lavaggi e ripetuti attacchi con H_2O_2, HCl diluito e Desogen, per poter effettuare una separazione fra clasti a differenti granulometrie, per determinarne la natura e le caratteristiche morfoscopiche.

È stato usato un diffrattometro Siemens Cristalloflex 800, con goniometro orizzontale, per bassi ed alti angoli e contatore proporzionale.

Condizioni di operazione:

Fenditura di divergenza: 1°
Fenditura ricevente: 0.1 mm
Fenditura di diffusione: 1°
Radiazione: CuKα (filtro Ni)
40 KV - 16 mA
Velocità del goniometro: 2 θ/min
Costante di tempo: 2-4 sec
Impulsi al secondo 1×10^3; 4×10^1
Velocità di scorrimento della carta: 1 cm/min

Per le analisi termodifferenziali è stata usata un'apparecchiatura Dupont 990 Thermal Analyzer nelle seguenti condizioni:

Inerte di riferimento: Al_2O_3
Velocità di riscaldamento: 10°/min
Atmosfera: aria
Scala: per T-0.8 MV/in; per T-0.004 MV/in.

Per ogni analisi sono stati usati 50 mg di sostanza.

ANALISI DEI RISULTATI

Campione 1. Calcare micritico ricco in fossili con cavità riempite da calcite spatica. Talora sono presenti cristallini di pirite. Tra i foraminiferi, per la maggior parte spatizzati, sono visibili resti di Thaumatoporelle e di *Rotorbinella scarsellai* TORRE. L'ambiente è di retroscogliera, probabilmente lagunare. Età: Senoniano.

All'analisi diffrattometrica il camp. 1 è costituito quasi esclusivamente da calcite; il residuo insolubile mostra arricchimenti in caolinite prevalente, quarzo ed argille M-L.

L'analisi termodifferenziale evidenzia solo il picco endotermico tipico della calcite. Anche dall'analisi chimica il camp. 1 si può considerare un calcare abbastanza puro, dal momento che le percentuali combinate in SiO_2, Al_2O_3 e Fe_2O_3 raggiungono a stento il 3 % del totale.

Campione 2. Simile al camp 1, con concrezioni algali ed un inizio di dolomitizzazione. Età: Senoniano.

Anche qui prevale di gran lunga la calcite, con tracce di quarzo. Il residuo insolubile evidenzia un minimo arricchimento del quarzo ed una notevole precentuale di caolinite (il grado di cristallinità secondo il criterio di HINCKLEY (1963), è qui inferiore ad 1). Si rinvengono anche tracce di interstratificati.

All'analisi termodifferenziale si evidenzia la presenza di calcite, ed anche dal punto di vista chimico il camp. 2 è analogo al camp. 1.

Campione 5. Calcarenite a matrice micritica molto sottile con molti foraminiferi spatizzati. Sono visibili resti di Thaumatoporelle, ed inoltre di *Nummoloculina robusta* TORRE. Età: Senoniano.

Dal punto di vista mineralogico è identico al campione 1: la calcite è prevalente e vi sono tracce di quarzo. Nel residuo insolubile quest'ultimo è molto abbondante, per quanto sia prevalente la caolinite.

L'analisi termodifferenziale mostra il picco endotermico ben delineato della calcite; chimicamente, infine, si tratta di un calcare ad alto grado di purezza, superiore a quello degli altri campioni appartenenti ai livelli Senoniani ($CaCO_3$ 99.14 %).

Campione 6. Calcare micritico molto sottile di ambiente relativamente calmo. Tra le forme prevalentemente spatizzate si riconoscono resti di Thaumatoporelle. Età: Senoniano.

All'analisi diffrattometrica il camp. 6, come già i camp. 1-2-5, è costituito per la quasi totalità da calcite con tracce di quarzo. Il residuo insolubile contiene alte percentuali di caolinite (a cristallinità

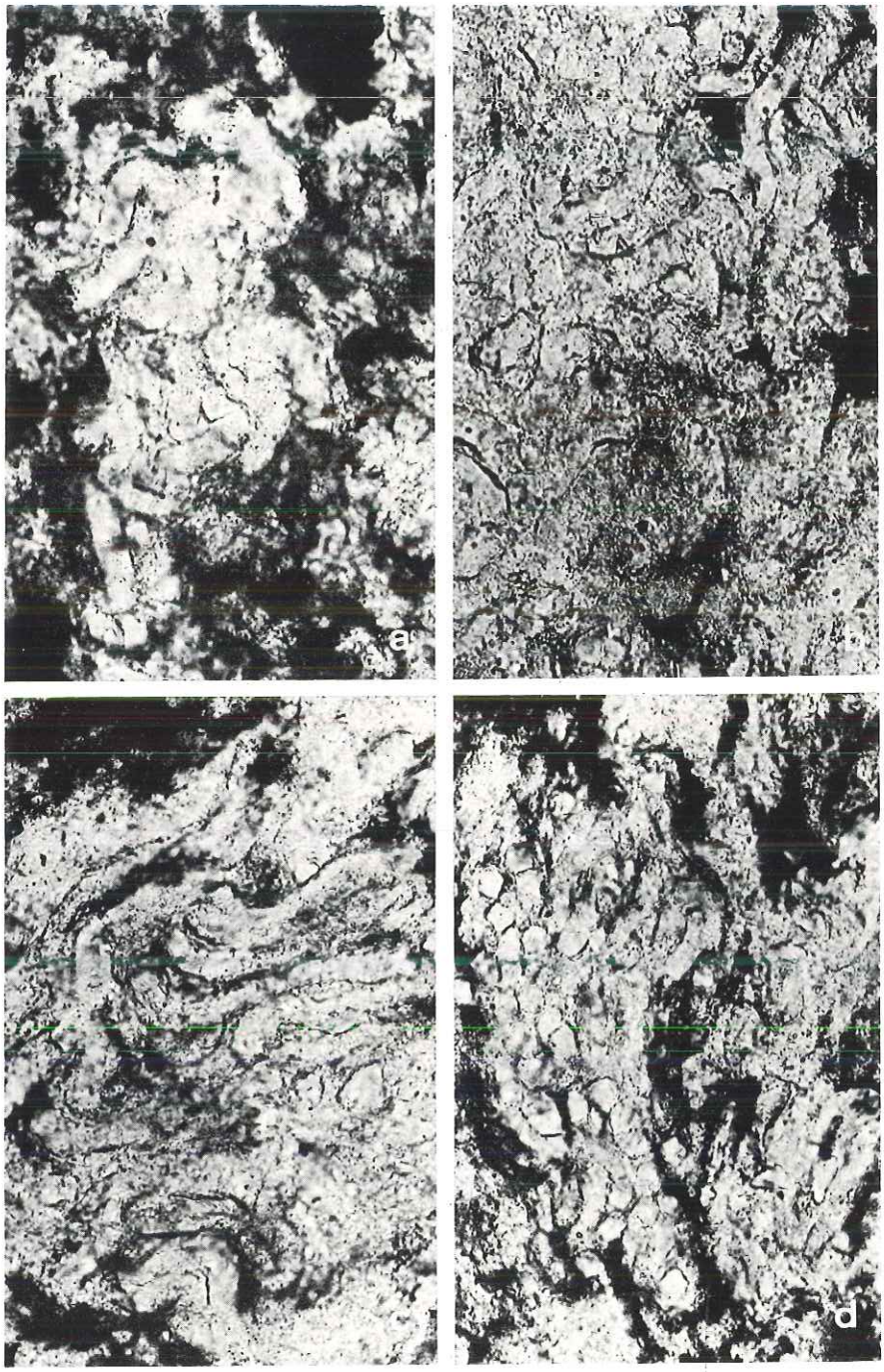


FIG. 4. - a-b (campione 4), c-d (campione 13). Agglomerati caolinitici reniformi con strutture vermicolari; 400 x.

piuttosto bassa), con esigue percentuali di argille *mixed-layer*, di quarzo e di idrossidi di ferro. Anche questo campione mostra all'analisi termodifferenziale esclusivamente il picco endotermico della calcite, mentre chimicamente si differenzia dagli altri tre campioni simili per una percentuale leggermente più alta di SiO_2 (1.13 %).

Campione 3. Argilla caolinitica dura, non plastica, a frattura concoidale e grana fine. In sezione sono visibili aggregati globulari attraversati da un reticolo misto di idrossidi di ferro e materiale organico (Fig. 4). Si rinvengono anche grossi cristalli di ematite a strut-

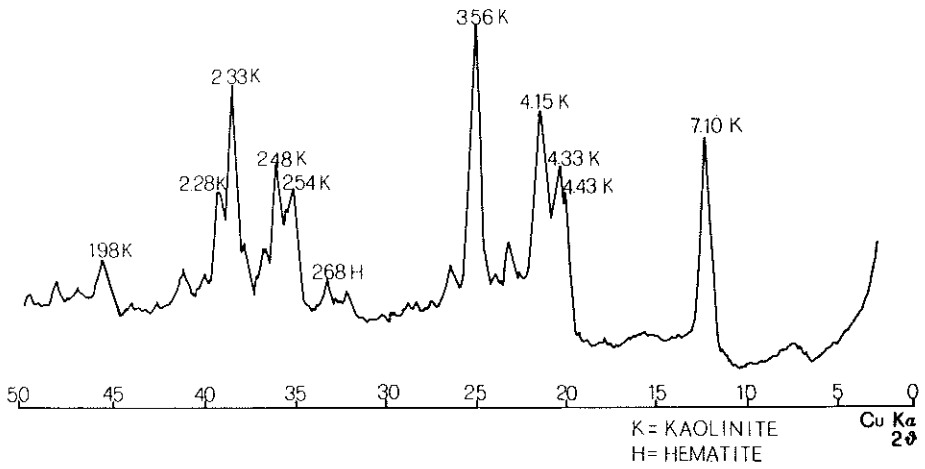


FIG. 5. - Campione 3 - Diffrattogramma dell'argilla caolinitica senoniana.

tura fibroso-raggiata e chiazze di goethite altamente birifrangente. Localmente gli agglomerati di caolinite hanno aspetto reniforme, in cui sono visibili i pacchetti di lamelle ad estenzione ondulata.

All'analisi diffrattometrica risulta una prevalenza di caolinite ad altissimo grado di cristallinità (politipo T, superiore all'unità secondo HINCKLEY, 1963) (Fig. 5). Si rinvengono anche piccole percentuali di ematite e tracce di goethite, quarzo e argille *mixed-layer*. L'analisi termodifferenziale comprova la presenza di caolinite (Fig. 6).

Dal punto di vista chimico, tenendo come base la formula teorica della caolinite, si è ricavato per il campione in esame una percentuale in caolinite intorno al 75 %; il completamento a 100 è espresso come ossidi di ferro idrati, quarzo ed anatasio.

Le immagini elettroniche della caolinite mostrano qui lamelle esagonali ben formate, tipiche del politipo T; molto comuni sono

inoltre aggregati a struttura tubolare di lamelle sovrapposte, già del resto osservati al microscopio ottico sotto forma di concrezioni vermiformi ad estinzione ondulata (Fig. 7).

Campione 4. Simile al camp. 3, in cui gli aggregati di caolinite, a bassi colori di interferenza appaiono imbrigliati in un reticolo di minerali di ferro.

All'analisi diffrattometrica il campione si rileva perfettamente analogo al camp. 3; anche qui la caolinite presenta un rapporto di cristallinità superiore ad 1.

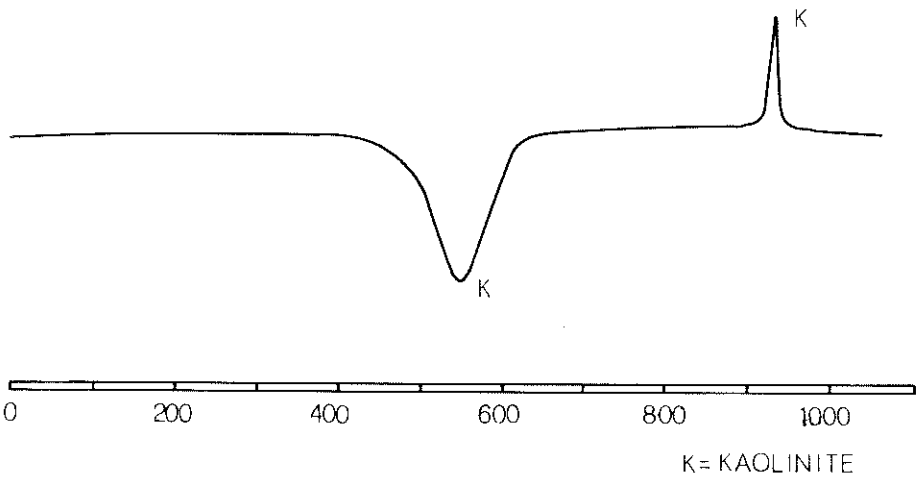


FIG. 6. - Campione 3 - Analisi termodifferenziale dell'argilla caolinitica senoniana.

Anche l'analisi termodifferenziale e quella chimica danno il medesimo risultato, anche se la percentuale in caolinite rispetto al campione precedente risulta alquanto più bassa.

Campione 11. Molto simile ai camp. 3 e 4. La traccia diffrattometrica, probabilmente per le basse percentuali di ossidi di ferro presenti (Fe_2O_3 3.90 %) è la migliore fra quelle dei quattro campioni che abbiamo raggruppato come costituiti da caolinite prevalente.

Anche la traccia della termodifferenziale è più netta; il tenore in caolinite raggiunge qui valori di molto superiori all'80 %.

È dal campione 11 che provengono inoltre i preparati meglio riusciti, fra quelli da noi osservati al microscopio elettronico.

Campione 13. Argilla caolinitica di colore giallo-arancio, con il solito reticolo di minerali opachi. Sono molto abbondanti le vene e

le concrezioni ematitico-goethitiche, per la maggior parte dovute ad ossidazione più tarda.

La diffrattometria evidenzia la prevalenza della caolinite, oltre a tracce di ematite, goethite ed argille M-L. Per quanto riguarda l'analisi termodifferenziale, i risultati non sono diversi da quelli osservati

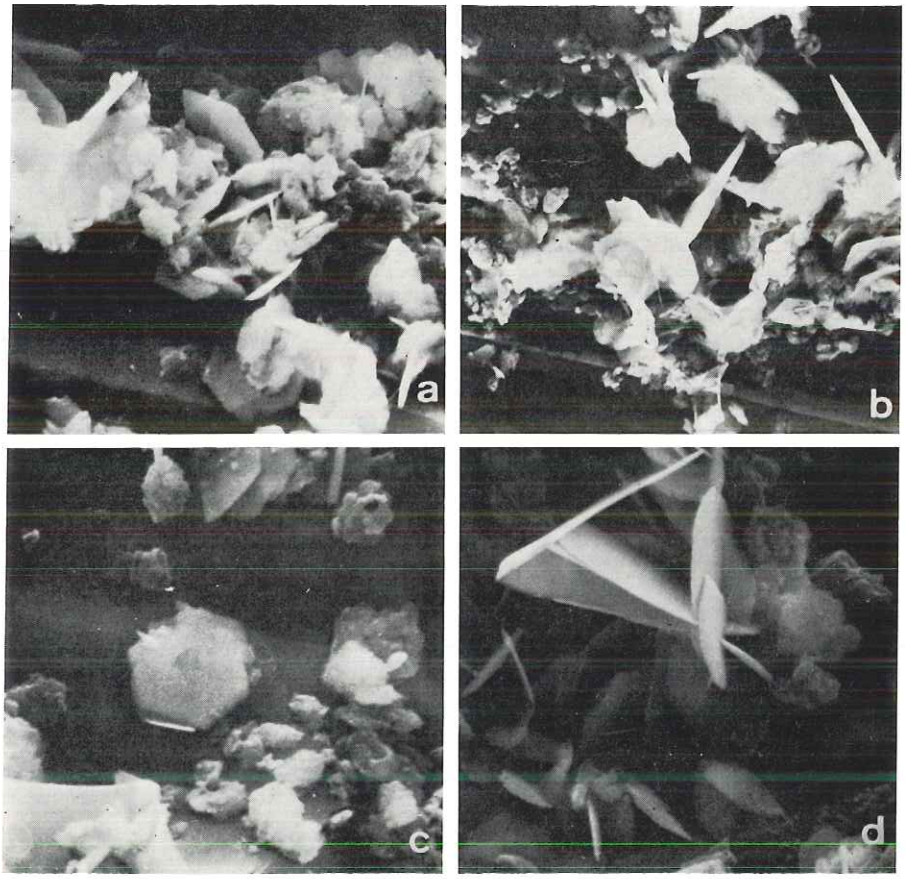


FIG. 7. - Microfotografie al microscopio elettronico (scanning) dell'argilla caolinitica senoniana.
a-b) Camp. 3. Agglomerati di cristalli di caolinite; x 3000.
c) Camp. 11. Cristallo esagonale di caolinite; x 5000.
d) Camp. 11. Aggregato di lamelle esagonali di caolinite; x 5000.

nei 3 campioni precedenti. Dal punto di vista chimico è interessante notare l'alta percentuale in TiO_2 (2.56 %), evidenziata all'analisi diffrattometrica come anatasio (3.51 Å).

Campione 9. Brecciola calcarea debolmente cementata, con matrice marnosa verde, talora attraversata da vene di calcite. Sono pre-

senti molti Ostracodi ed una abbondante fauna di Rotaline. L'ambiente di deposizione sembrerebbe lagunare. Età: Paleocene.

All'analisi diffrattometrica il campione si rileva costituito per la maggior parte da calcite, con minori percentuali di illite; sono anche presenti tracce di quarzo. L'illite si evidenzia in sommo grado nel residuo insolubile, di cui costituisce il minerale prevalente, insieme a limitati quantitativi di argille M-L.

All'analisi termodifferenziale essa contribuisce anche a rendere parzialmente asimmetrico il picco endotermico della calcite. Quest'ultimo è comunque il minerale prevalente del camp. 9 (89 % $CaCO_3$); la presenza dell'illite è evidenziata già dal tenore riscontrato in K_2O (0.69 %), che è superiore a quello di tutti i calcari precedentemente esaminati.

Campione 10. Brecciola verde, calcareo-marnosa, con clasti ricchi in fauna, per lo più cretacica rimaneggiata, in cui si riconoscono esemplari di Eolisaccus. Nella matrice si rinvengono inoltre Rotaline, gusci spatizzati di piccoli molluschi e di ostracodi, nonché cristallini di pirite. L'ambiente è lagunare, abbastanza tranquillo, ma con periodiche frane ai bordi del bacino. Età: Paleocene.

Anche qui prevale di gran lunga la calcite, con una piccola percentuale in quarzo. Come già per il camp. 9, il residuo insolubile è costituito da illite prevalente, con tracce di quarzo e di probabili interstratificati.

Per quanto riguarda l'analisi termodifferenziale, la traccia è identica a quella del camp. 9; pure simili sono i risultati dell'analisi chimica, che rivela rispetto a quello, solo percentuali maggiori di $CaCO_3$.

Campione 12. Calcare micritico a grana molto sottile, con una fauna abbondantissima di ostracodi. L'ambiente di deposizione ne risulta pertanto fra lagunare e dulcicolo. Età: Paleocene.

Ad ogni tipo di analisi il camp. 12 risulta simile ai camp. 9 e 10, se si escludono il tenore più basso in $CaCO_3$ rilevato dall'analisi chimica e quello più alto in SiO_2 (6.34 %).

Campione 7. Argilla verde marnosa, che presenta a N+ i colori d'interferenza dell'illite. Si riconoscono in essa rari, minutissimi cristalli di quarzo (talora con inclusioni) e nuclei carbonatici.

All'analisi diffrattometrica è stata evidenziata la componente calcitica prevalente, accompagnata da basse percentuali d'illite. Sono anche presenti minime percentuali d'interstratificati. Questi sono stati osservati anche nel residuo insolubile, dopo attacco con acido acetico, naturalmente in quantità subordinate rispetto all'illite preva-

lente. Tale minerale argilloso è del resto l'unico che compare all'analisi termica, con tutta una serie di picchi endotermici ben delineati.

L'analisi chimica, oltre ad evidenziare la componente carbonatica (20.92 % $CaCO_3$), mette chiaramente in luce anch'essa la presenza dell'illite, mediante gli alti tenori in SiO_2 (38.19 %), Al_2O_3 (19.86 %) e soprattutto in K_2O (5.50 %).

Campione 8. Analogo al camp. 7, solo con la componente carbonatica praticamente assente. Anche qui si è riscontrata la presenza di sporadici cristallini di quarzo.

L'analisi diffrattometrica, come anche quella termodifferenziale, mostra la presenza di sola illite; ciò è del resto confermato anche dall'analisi chimica, in cui compaiono tenori in K_20 pari al 6.85 %.

Le immagini elettroniche dei cristalli di illite da noi osservate allo *Scanning*, mostrano aggregati di lamelle ad andamento irregolare e solo raramente siamo riusciti ad individuare forme grosso modo esagonali.

Campione 14. Questo campione rappresenta la parte bassa della sacca. È un'argilla molto friabile e facilmente riducibile in polvere. La pasta di fondo non è omogenea e presenta zonature di vari colori. Nella porzione rossastra si notano chiazze e concrezioni nere e lucide e pisoliti concentrate localmente, le cui dimensioni raggiungono un massimo di 2-3 mm. Nella zona più grigiastra non si rinvengono pisoliti all'esame macroscopico.

Campione 15. Abbastanza simile al precedente; argilla poco compatta con pasta di fondo grigio-rossastra nella quale si notano talvolta superfici nere e lucide. A differenza del precedente campione le pisoliti sembrano però del tutto assenti.

Campione 16. Argilla non molto compatta di colore da grigio a rossastro, presa a contatto con i calcari paleocenici. La parte più grigia è abbastanza omogenea con numerose chiazze nere (ossidi di Fe e Mn) ed è priva di pisoliti. La frazione più rossastra, invece, contiene una notevole percentuale di pisoliti con dimensioni variabili fino ad un massimo di 2-3 mm. Tale frazione, osservata in sezione sottile, si presenta come una massa argillosa piuttosto scura, in cui sono immersi un gran numero di granuli di quarzo (fino al 25 % del totale) a contorno prevalentemente spigoloso. Nei granuli più grandi sono visibili inclusioni di forma ovoidale o in aghetti rossastri (rutilo).

Le analisi semiquantitative effettuate con metodi diffrattometrici hanno permesso inoltre di mettere in luce percentuali di caolinite che

si aggirano intorno al 40 % e di ossidi ed idrossidi di ferro sul 10 %, oltre a evidenziare la presenza di minimi quantitativi di gibbsite (< 2 %) e di altri minerali argillosi.

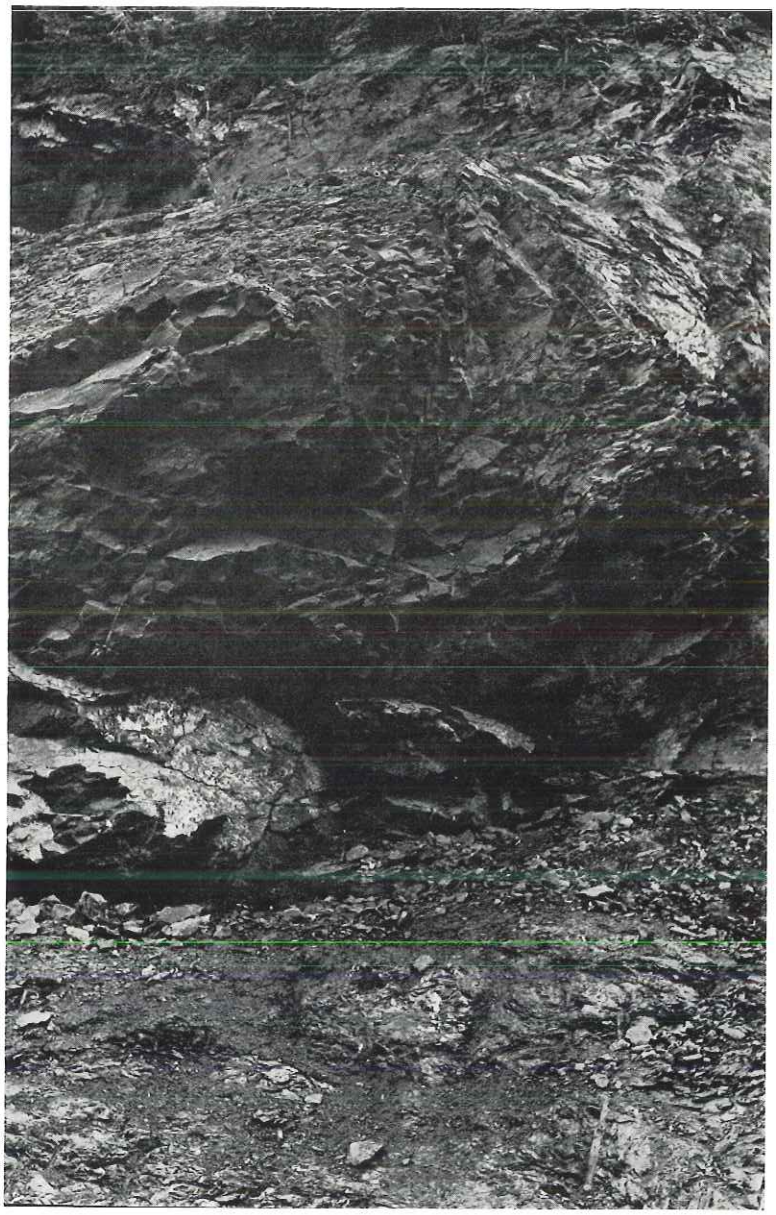


FIG. 8. - Monte Sottano (Trentinara). Argille rosse « bauxitiche ».

Campione 17. Argilla marrone-giallastra a contatto con il Miocene calcarenitico, che si sfalda prevalentemente secondo superfici chiazzate

di ossidi ferro-manganesiferi. Sono presenti clasti di forma irregolare e di dimensioni di circa 5 mm, probabilmente formati dall'unione di più pisoliti. Queste sono comunque abbastanza numerose e di dimensioni variabili: quelle più piccole, inferiori al mm, mostrano lucentezza metallica, le altre, più opache, raggiungono un diametro massimo di 3 mm.

Campione 18. Arenite costituita prevalentemente da elementi oolitici e pisolitici, immersi in una matrice di apparenza argillosa abbastanza sottile. Il diametro massimo delle pisoliti è di circa 5 mm ed esse si presentano qui molto irregolari. Nella matrice risultano abbondantissimi i clasti di quarzo detritico (fino al 50 % del totale), mentre nelle pisoliti non si giunge al 10 %. Oltre al quarzo sono anche visibili piccoli clasti arrotondati di zircone ad altissima birifrangenza, oltre a molti cristallini pleocroici di tormalina. Come nel camp. 16, sono anche qui riconoscibili nel quarzo inclusioni di aghetti di rutilo. Piuttosto alta è la precentuale dei minerali ossidati di ferro (ematite + goethite $\sim$ 30 %), mentre più bassa è invece quella della caolinite ($<$ 30 %).

Campione 19. Argilla poco compatta di colore grigio-rossastro con numerose incrostazioni ferro-manganesifere e rare pisoliti (1-3 mm di diametro). Rappresenta il sedimento della zona più bassa della sacca ed è costituita da caolinite prevalente (50 %) con minori percentuali in quarzo (12 %) e minerali ossidati di ferro (goethite + ematite 20 %). Benché non visibili in sezione sottile, sono presenti, come nella maggior parte dei depositi di argille residuali, l'anatasio e poca gibbsite.

Campione 20. Abbastanza simile come mineralogia al camp. 19, ma con maggiori percentuali di argille *mixed-layer* (15 %) che appaiono alquanto ridotte negli altri campioni esaminati. Sono inoltre fortemente arricchite le pisoliti, con dimensioni variabili da poco meno di 1 mm ad un massimo di 2 mm di diametro.

Campione 21. Argilla molto dura e compatta con pasta di fondo rosso scura con chiazze più giallastre. Sono visibili numerose concrezioni ferro-manganesifere nerastre. Le pisoliti, molto diffuse, hanno dimensioni massime 3 $\times$ 3 mm e si presentano interamente costituite da materiale piuttosto scuro o dall'alternanza di gusci più duri e neri con altri più teneri e di colore giallastro. Il quarzo è piuttosto abbondante, soprattutto nella matrice (25 %) e così pure ematite e goethite (15 + 20 %), mentre la caolinite non arriva al 25 %. Anche qui è stato individuato l'anatasio.

Campione 22. Il campione, prelevato nella parte alta della sacca in esame, è rappresentato da un sedimento abbastanza duro di colore marrone rossastro per alte percentuali di ossidi ed idrossidi di ferro. Vi si rinvengono numerose pisoliti quasi completamente sferiche, con diametro massimo di 7 mm. Queste risultano possedere un nucleo spesso corrispondente ad una crosta ematitica, circondato poi da gusci alternativamente sottili o spessi, di colore scuro. Le più piccole presentano generalmente all'esterno un guscio di ossidi ferro-manganesiferi a lucentezza metallica. In ogni caso ematite e goethite non risultano qui particolarmente arricchite (6 + 8 %), al contrario del quarzo (20 %). Alta è anche la percentuale della caolinite (50 %).

Campione 23. Si tratta di un campione molto interessante, di aspetto meno friabile, colore rosso scuro e ricchissimo in pisoliti. La struttura varia da quella di un'arenite a quella di un conglomerato ad elementi minuti, immerso in una matrice più sottile, costituita da argilla caolinitica (10 %), goethite in vene e concrezioni (40 %) e da piccoli clasti di quarzo detritico. Si possono suddividere le pisoliti, a seconda delle loro caratteristiche, in 2 tipi fondamentali:

a) di forma sferica e non, a struttura concentrica con gusci goethitico-ematitici e con al nucleo frammenti di croste ferrifere o piccoli clasti di quarzo;

b) di forma grossolanamente arrotondata o irregolare, povere in ematite sulla quale prevale la goethite, senza struttura concentrica e contenenti frammenti detritici di pisoliti di prima generazione.

I clasti di quarzo presenti nella matrice (35 % del totale) sono spesso pieni di inclusioni di zircone o rutilo, ed insieme ad essi si riconoscono rari frammenti di feldspato potassico.

In talune piccole cavità di neoformazione fra le pisoliti sono stati inoltre osservati feltri di cristalli aciculari di barite ad alto rilievo, probabilmente formatisi in seguito all'azione di acque circolanti nella parte alta della sacca nei primi stadi di ambiente confinato della trasgressione miocenica.

Discussione

Lo studio da noi effettuato sulle argille localizzate nel Senoniano in facies calcarea della Piattaforma Interna, su quelle dei sovrastanti livelli argilloso-marnosi della Formazione di Trentinara (Paleocene--Eocene inferiore?) e sulle argille rosse « bauxitiche » pre-mioceniche

della medesima Piattaforma, ha rivelato profonde differenze mineralogiche. Le argille Senoniane sono rappresentate da caolinite triclina (politipo T), a cristallinità molto elevata: secondo HINCKLEY (1963) l'indice di cristallinità calcolato si è rivelato per tutti i campioni da noi esaminati di molto superiore all'unità. Ulteriori osservazioni al microscopio ottico ed elettronico non hanno fatto che confermare i risultati delle analisi diffrattometriche, con il mostrare immagini di aggregati vermicolari e tubuliformi di lamine caolinitiche a forma esagonale, perfettamente terminate, molto simili agli agglomerati cristallini rinvenuti nei « *tonstein* » dei sedimenti carboniosi (BONI et al., 1979).

Fra le caratteristiche delle argille Senoniane, oltre all'alta cristallinità (vengono infatti perfettamente risolti in diffrattometria i picchi $1\bar{1}0$, $1\bar{1}1$ e $02\bar{1}$), compaiono l'estrema durezza, l'assenza di plasticità e di superfici di scivolamento, la grana molto sottile e la frattura concoidale. Esse sembrano essere inoltre attraversate e come racchiuse da un reticolo di sostanze apparentemente organiche, che delimitano gli agglomerati più chiari ed appiattiti, nei quali i cristalli di caolinite si aggomitolano in piccole masse vermiformi (*graupen*) (SCHEERE, 1958; MERIAUX, 1972).

In base alle considerazioni esposte abbiamo avanzato l'ipotesi (BONI et al., 1979) che la caolinite in esame possa appartenere al tipo *flint-clay o tonstein* (GRIM, 1968; KELLER, 1968; 1970; 1976 a e b; LOUGHNAN, 1970; MOORE, 1964; PATTERSON & HOSTERMAN, 1962; SCHEERE, 1958; SMITH & O'BRIEN, 1965), argilla caolinitica particolarmente dura e ben cristallina, connessa spesso ai sedimenti propri delle serie carboniose. Ambienti relativamente acidi, quindi, e per lo più a bassi Eh, per quanto talvolta i *flint-clays* siano stati rinvenuti anche associati a terreni laterici o bauxitici.

Per quanto riguarda l'origine dei *flint-clays* PATTERSON & HOSTERMAN (1962), nel loro studio sulle argille refrattarie di Olive Hill (Kentucky) li considerano come il prodotto finale del dilavamento progressivo *in situ* dei sedimenti Pennsylvaniani in aree paludose acide. Tale è anche l'opinione di SMITH & O'BRIEN (1965) per i *flint-clays* del bacino dell'Illinois e di SCHEERE (1958) per i *tonstein* caolinitici delle serie carboniose Westfaliane dell'Europa occidentale.

Secondo ECKARDT e VON GAERTNER (1962) sembrerebbe che l'alterazione post-deposizionale ed il lisciviamento dovuto agli acidi umici siano gli unici responsabili delle generali caratteristiche di tali argille, mentre MOORE (1964) è della opinione che i prodotti dell'alterazione microbiologica della materia organica influenzino il grado di cristallinità della caolinite e le dimensioni dei cristalli stessi.

Il concetto alternativo, che cioè i *flint-clays* rappresentino invece essenzialmente prodotti detritici alloctoni, richiede necessariamente aree di origine soggette a condizioni climatiche caldo-umide, del tipo di quelle necessarie per la bauxitizzazione, capaci di fornire percentuali notevoli di gel colloidali idro-allumino-silicatici la cui cristallizzazione avverrebbe in aree paludose a basso pH. Secondo KELLER (1968) è appunto l'effetto di cristallizzazione da un gel a conferire al *flint-clay* le sue caratteristiche di isotropia, di grana sottile, di non fissilità, e l'orientazione casuale dei cristalli di caolinite.

Ancora SCHEERE (1958) è comunque dell'opinione che in particolari condizioni fisico-chimiche e in ambiente di acque basse tali caolini potrebbero essersi formati da sedimenti a grana fine consistenti di argille micaceo-illitiche e PATTERSON e HOSTERMAN (1962) ribadiscono che la caolinite può derivare da altri minerali argillosi preesistenti tramite la rimozione di alcali e silice.

In conclusione, i microorganismi presenti, oltre a costituire i prodotti umici dell'alterazione microbiologica, hanno probabilmente prodotto anche l'ambiente necessario, in termini di pH di controllo, per la genesi delle particelle caolinitiche. La loro cristallizzazione sarebbe comunque avvenuta in un mezzo ancora plastico, rappresentato da un gel con associata sostanza organica; la presenza di radici e di piste di organismi fossatori avrebbe inoltre prodotto locali condizioni di maggiori pressioni risultanti nella riorganizzazione delle particelle in modo tale da produrre aree vermicolari o irregolarmente cristalline (MOORE, 1964).

Per quanto riguarda più specificamente i *flint-clays* Senoniani da noi studiati, le rocce ad essi associate non solo non contengono carbone, come nella maggior parte degli affioramenti di *flint-clays* descritti in letteratura, ma sono generalmente anche povere in materiale organico. Vero è comunque, che le argille vere e proprie presentano tracce di pirite ormai trasformata in minerali ossidati di ferro e che, come già abbiamo detto, esse sono percorse da un reticolo di materiale opaco assimilabile a sostanza organica, segni entrambi che, almeno in una parte della loro storia deposizionale o diagenetica, si sono trovate in condizioni riducenti. È inoltre da aggiungere che l'ambiente di deposizione dei sedimenti calcarei localizzati nella parte più alta del Cretacico presenta, nella zona di Trentinara, caratteristiche particolari da lagunari a salmastre (SCORZIELLO e SGROSSO, 1965), a cui sono inoltre connesse fasi regressive e brevi lacune di sedimentazione. In una tale ottica è forse possibile inquadrare i nostri cosiddetti *flint-clays*, benché al momento attuale sia difficile poter dire se l'argilla depositatasi originariamente fosse già caolinite (naturalmente a grado di cristallinità più basso, come è mostrato dal residuo insolu-

bile dei calcari associati), oppure un altro tipo di fillosilicato, che sia potuto passare a *flint-clay* per perdita di cationi e riorganizzazione *diagenetica* (BONI et al., 1979).

Le argille verdi della Formazione di Trentinara, sia quelle appartenenti ai livelli a carattere prettamente argilloso che quelle costituenti la matrice delle brecciole calcaree e degli « *pseudogalets* », hanno rivelato invece una mineralogia ad illite prevalente, accompagnata solo sporadicamente da altri minerali argillosi *mixed-layer*. Ed ancora illite, senza alcuna traccia di componente caolinitica, si rinviene anche nel residuo insolubile delle calcilutiti e delle brecciole calcaree della stessa Formazione di Trentinara [1].

Sembrerebbe dunque già evidente qui una brusca differenziazione mineralogica, chiaramente corrispondente a cambiamenti di ambiente deposizionale, e forse anche a diversità di apporti, che, come già considerato dall'analisi geologico-stratigrafica, si esplicano in un intervallo relativamente breve, compreso fra il Maestrichtiano ed il Paleocene.

Per quanto riguarda poi le argille rosse « bauxitiche » pre-aquitaniane di Monte Sottano (Fig. 8) e Madonna del Granato (Capaccio), non sono risultati dal presente lavoro dei dati particolarmente differenti rispetto a quelli riscontrati per le stesse argille in zone più meridionali (BONI, 1974).

La litologia delle argille considerate è abbastanza simile a quella delle bauxiti tipiche con ooliti e pisoliti, immerse in una matrice argillosa a grana molto più sottile. Delle pisoliti, alcune sono perfettamente concentriche, altre sono soltanto dei clasti grossolanemente arrotondati, di natura senz'altro detritica, originatisi da preesistenti formazioni residuali. I minerali presenti nel sedimento in percentuali variabili sono la caolinite, stavolta a bassa cristallinità, il quarzo, l'ematite, la goethite, le argille *mixed-layer* e l'illite. Si riscontrano inoltre minori precentuali di anatasio, gibbsite e diasporo. Fra i clasti di natura detritica sono stati riconosciuti, come già nelle sacche della zona di Sapri, oltre al quarzo prevalente con inclusioni di rutilo, minuti frammenti di feldspato potassico, zircone, tormalina e sporadici clasti di metamorfiti.

Con tali argomenti sarebbe quindi da escludere, come già ipotizzato in precedenza (BONI, 1974), un'origine completamente autoctona delle argille rosse, che non vanno considerate, pertanto, come il residuo insolubile, successivamente rielaborato, delle formazioni calcaree sottostanti con i loro intercalari argillosi.

[1] Lo studio approfondito dei caratteri cristallochimici dei suddetti materiali argillosi, attualmente in corso, potrebbe comunque fornirci preziose indicazioni sulla loro origine e sulla storia diagenetica.

Conclusioni

Per quanto riguarda l'origine di tutti i tipi di argille trattate nel presente lavoro, la caolinite T dei calcari senoniani, l'illite della Formazione di Trentinara e le argille residuali pre-aquitaniane, mancano ancora oggi chiare evidenze di apporti detritici sia pure sottili, nella Piattaforma Interna prima del Langhiano (Formazione del Bifurto o Flysch dei calcari).

Fino al Miocene inferiore, infatti, la piattaforma si configura completamente isolata da altre terre emerse per mezzo di bacini relativamente profondi. Ma, come già ipotizzato in precedenza (Boni, 1974) si potrebbe comunque pensare che, almeno nell'intervallo compreso fra il Paleocene superiore e l'Aquitaniano, un collegamento con una terra emersa vi sia stato (argille rosse residuali con clasti detritici di rocce ignee e metamorfiche), una terra (coltri alloctone?), per di più dove erano probabilmente in corso processi di alterazione lateritica. Su tali basi si renderebbe pertanto necessario anticipare quanto meno al Langhiano, se non ad epoche ancora anteriori, il momento d'inizio dei primi movimenti tettonici con conseguente erosione sulla piattaforma interna, premesso che si possano interpretare in tal senso anche gli sporadici depositi di argille Senoniane o quelle più ingenti della Formazione di Trentinara.

A questo proposito, ci sembra però molto probabile che i *flint-clays* senoniani possano aver avuto originariamente la medesima mineralogia ed origine delle argille verdi di età posteriore della serie paleocenica. Infatti persistendo bene o male le condizioni di deposito marino almeno fino a tutto il Senoniano, resta difficile da comprendere un arrivo di argilla già caolinitica quando mancava nelle vicinanze ogni traccia di continente in alterazione. L'argilla sarebbe quindi giunta ad interstratificarsi ai fanghi calcarei senoniani sotto forma di illite (o addirittura di altro materiale silicatico inalterato) e le locali brevi emersioni tra il Cretacico alto ed il Paleocene le avrebbero fornito le condizioni continentali necessarie alla perdita dei cationi.

Per quanto riguarda infine le argille rosse « bauxitiche », le variabili percentuali degli apporti detritici in esse contenuti ed il lungo periodo di emersione a cui sono state soggette, hanno senz'altro contribuito a renderle di più difficile interpretazione.

Studi di più ampio respiro sulla loro distribuzione e sulla variazione delle loro caratteristiche mineralogiche e tessiturali dovrebbero comunque rivelare ancora elementi di notevole importanza paleogeografica su questo livello « *marker* » della Piattaforma Carbonatica Interna.

BIBLIOGRAFIA

BÁRDOSSY GY., BONI M., DALL'AGLIO M., D'ARGENIO B., PANTÒ GY., *Bauxites of peninsular Italy; Composition, Origin and Geotectonic Significance*, Monograph. Series on Min. Dep. N. 15 - Gebrüder Borntraeger, 61 pp. (1977).

BONI M., *Le argille rosse continentali del passaggio Paleocene-Miocene nella Piattaforma carbonatica campano-lucana*, Boll. Soc. Geol. Ital., **93**, 1059-1094 (1974).

BONI M., STANZIONE D., ZENONE F., *The Senonian flint-clays of the Internal Carbonate Platform (Southern Apennines, Italy)*, Sedimentary Geology (In press) (1979).

DE CASTRO P., *Su alcune nuove miliolidi del Senoniano del Mediterraneo*, VI Coll. Africain de Micropal. Tunis 21 mars-3 avril 1974, 19 (1974).

ECKARDT, F. J. & VON GAERTNER, H. R., *Zur Entstehung und Umbildung der Kaolin-Kohlentonsteine*, Fortschr. Geol. Rheinl. u. West., **3** (2), 623-640 (1962).

GRIM R., *Clay mineralogy*, Mc Graw Hill Book Company, 596 (1968).

HINCKLEY D. N., *Variability in « cristallinity » values among the kaolin deposits of the coastal plain of Georgia and south Carolina*, Eleventh Nat. Conf. on Clays and Clay Min., 229-235 (1963).

IPPOLITO F., D'ARGENIO B., PESCATORE T., SCANDONE P., *Structural-stratigraphic units and tectonic framework of Southern Apennines*, Squires. Geology of Italy; Geol. Soc. of Lybia, Tripoli 1975, 317-328 (1975).

KELLER W. D., *Flint-clay and flint-clay facies*, Clay and Clay Min., **16**, 113-128 (1968).

KELLER W. D., *Environmental aspects of clay minerals*, Journ. Sed. Petr., **40**, 788-813 (1970).

KELLER W. D., *Scan electron micrographs of kaolins collected from diverse environments of origin*, II, Clays and Clay Min., **24**, 114-117 (1976a).

KELLER W. D., *Scan electron micrographs of kaolins collected from diverse environments of origin*, III, *Influence of parent material on flint-clays and flint-like clays*, Clays and Clay Min., **24**, 262-264 (1976b).

LOUGHNAN F. C., *Flint-clay in the coal-barren Triassic of the Sydney basin, Australia*, Journ. Sed. Petr., **40**, 822-828 (1970).

MERIAUX E., *Les tonstein de la veine de charbon N. 10 (Balmer) à Sparwood Ridge dans le bassin de Fernie (Colombie Britannique)*, Geol. Surv. Canada, Pap. 72-1, part. B, 11-22 (1972).

MOORE L. R., *The in situ formation and development of some Kaolinite macrocrystals*, Clay Min. Bull., **5**, 338-352 (1964).

PATTERSON S. H. & HOSTERMAN J. W., *Geology of refractory clay deposits of the Haldeman and Wrigley Quadrangles, Kentucky*, U.S. Geol. Surv. Bull., 1122-F, 113 p. (1962).

SARTONI S., CRESCENTI U., *Ricerche biostratigrafiche nel Mesozoico dell'Appennino meridionale*, Giorn. Geol., **29**, 162-304 (1962).

SCHEERE J., *La petrologie des tonstein du Houllier Belge*, Belge Geol. Soc. Bull., **66**, 300-316 (1958).

SCORZIELLO R. & SGROSSO I., *Segnalazione di crostacei decapodi nel Paleocene di M. Vesole (Salerno)*, Boll. Soc. Nat. in Napoli, LXXIV, 3-5 (1965).

SELLI R., *Il Paleogene nel quadro della geologia dell'Italia meridionale*, Mem. Soc. Geol., III, Atti del Conv. sulla Geologia dell'Appennino, **3**, 737-789 (1962).

SGROSSO I., *Note biostratigrafiche sul M. Vesole (Cilento)*, Boll. Soc. Nat. in Napoli, VXXVII, 159-180 (1968).

SMITH W. H. & O'BRIEN N. R., *Middle and late Pennsylvanian Flint clays*, Journ. Sed., **35**, n. 3, 610-618 (1965).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, B. D'Argenio e P. Corradini.

Esistenza ed unicità di una soluzione generalizzata del problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di sistemi degeneri *

Nota di PASQUALE BUONOCORE (a Napoli)
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 4 novembre 1978)

RIASSUNTO. — In questo lavoro viene dimostrato un teorema di esistenza ed unicità per il problema indicato nel titolo.

SUMMARY. — In this paper we prove an existence and unicity theorem for the problem in the title.

In una precedente Nota [2] ho considerato problemi del tipo di Dirichlet in un aperto limitato e regolare Ω di R^{n+2} $(n \geq 0)$ relativi ad un operatore

$$l(x', D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \mathbf{a}^{\alpha}(x') D^{\alpha} \qquad x' \in \bar{\Omega},\ \alpha \in N_0^{n+2}$$

dove $\mathbf{a}^{\alpha}$ è una matrice d'ordine $2N$ i cui elementi sono funzioni reali di classe $C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$; tale operatore è fortemente ed uniformemente ellittico in un aperto $\mathcal{E}$ su $\bar{\Omega}$, e degenera in un particolare sistema quasi-ellittico nell'insieme $\mathfrak{D} = \bar{\Omega} - \mathcal{E}$.

Nell'ipotesi che sia verificata la condizione:

$$(u, -l u)_{\Omega} \geq k \| u \|_{\Omega}^2$$

per tutte le funzioni u a valori in R^{2N}, di classe $[H^2(\Omega)]^{2N} \cap [H_0^1(\Omega)]^{2N}$, ho provato l'esistenza di una soluzione debole, dotata localmente e a distanza positiva da $\overline{\partial \mathfrak{D} - \partial \Omega}$ di tutte le derivate, in senso generalizzato, che figurano nell'operatore (*soluzione quasi-regolare*).

Allo scopo di studiare l'unicità mi sono posto nell'ordine di idee di A. CANFORA [3] e di M. L. BENEVENTO - T. BRUNO - L. CASTELLANO [1], i quali a tal fine, in riferimento a problemi similari concernenti equa-

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

zioni del quarto ordine, hanno opportunamente particolarizzato la forma dell'operatore in prossimità delle zone di degenerazione.

Questo lavoro si ispira particolarmente alla su citata Nota [1] e si collega al mio precedente [2]: considero una classe di problemi, che rientrano tra quelli studiati in [2], cui mi è stato possibile estendere le tecniche usate in [1] e [2] per stabilire un teorema di esistenza ed unicità per soluzioni generalizzate; rispetto al tipo di problema considerato in [2], le limitazioni che ho imposto, oltre la forma della parte ellittica dell'operatore, riguardano sostanzialmente il problema al contorno in quanto, per le zone di degenerazione adiacenti a $\partial\,\Omega$, le quali comunque hanno in comune con $\partial\,\Omega$ una parte connessa contenuta in un iperpiano ortogonale ad un asse coordinato, è esclusa la possibilità che tale zona iperpiana sia ortogonale ad una delle due variabili di degenerazione (cfr. n. 1).

La questione è sostanzialmente ricondotta ad un problema di piccolo parametro: la soluzione è ottenuta come limite debole di una successione di soluzioni di *problemi approssimanti*; per tali funzioni è possibile stabilire, in un opportuno spazio funzionale, maggiorazioni *globali* indipendenti dal *parametro*, ciò proprio in forza della particolare forma dell'operatore intorno a $\mathfrak{D}$.

Nel n. 1 è descritto l'operatore considerato, viene posto il relativo problema al contorno in forma generalizzata ed è enunciato il teorema di esistenza ed unicità; nel n. 2 sono stabilite le formule di maggiorazione per le funzioni *approssimanti*; la dimostrazione del teorema si trova nel n. 3.

1. - **Posizione del problema ed enunciato del teorema**

Sia Ω un aperto limitato di R^{n+2} $(n \geq 0)$ con frontiera di classe C^2 e consideriamo l'operatore

$$l(x', D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \mathbf{a}^{\alpha}(x')\, D^{\alpha} \qquad x' \in \bar{\Omega},\ \alpha \in N_0^{n+2}$$

dove $\mathbf{a}^{\alpha}$ è una matrice d'ordine $2N$ i cui elementi sono funzioni reali di classe $C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$; supponiamo che risulta:

$$(1.1) \qquad (u, -l\,u)_{\Omega} \geq k \,\|u\|_{\Omega}^2 \quad [1]$$

per tutte le funzioni u a valori in R^{2N}, di classe $[H^2(\Omega)]^{2N} \cap [H_0^1(\Omega)]^{2N}$ [2].

[1] $(\ ,\ )_{\Omega}$ e $\|\cdot\|_{\Omega}$ denotano rispettivamente il prodotto scalare e la norma in $[L_2(\Omega)]^{2N}$. L'indicazione dell'insieme cui vanno estesi gli integrali mediante i quali si esprimono prodotto scalare e norma, sarà omessa quando non ci saranno possibilità di equivoci.

[2] Gli spazi funzionali che considereremo sono sempre costituiti da funzioni a valori in R^{2N}.

L'operatore $l(x', D)$ è fortemente ed uniformemente ellittico in un aperto $\mathcal{E}$ su $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\mathfrak{D} = \bar{\Omega} - \mathcal{E}$ è l'unione di un numero finito di domini disgiunti $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_s$ nei quali l'operatore $l(x', D)$ assume la forma

$$l(x', D) = \sum_{|\beta| \leqslant 2} \mathbf{a}^{\beta}(x') D_x^{\beta} + \mathfrak{L}(x'; D_{t'}, D_{t''})$$

ove

$$\mathfrak{L}(x'; D_{t'}, D_{t''}) = \mathbf{b}'(x') D_{t'} + \mathbf{b}''(x') D_{t''}$$

($x = (x_1, \ldots, x_n)$, t', t'' sono le coordinate di x', non necessariamente nell'ordine e non sempre le medesime in ogni $\mathfrak{D}_r$) e risulta:

(a) per $|\beta| = 2$,

$$\mathbf{a}^{\beta}(x') = (\delta_{ij} a_j^{\beta}(x'))_{ij}, \quad a_j^{\beta} = a_{2N-j+1}^{\beta}, \qquad i, j = 1, \ldots, 2N$$

$$a_j^{hk}(x') \xi_h \xi_k \geq C |\xi|^{2\,3}, \qquad \forall x' \in R^{n+2}, \ \forall \xi \in R^n, \ c > 0$$

$$a_j^{hk} = a_j^{kh}, \qquad h, k = 1, \ldots, n$$

(b) $$\mathbf{b}'(x') = ((-1)^j \delta_{ij} b_j'(x'))_{ij}, \qquad \mathbf{b}''(x') = (\bar{\delta}_{ij} b_j''(x'))_{ij}$$

ove si è posto:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}, \qquad \bar{\delta}_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i + j = 2N + 1 \\ 0 \text{ se } i + j \neq 2N + 1 \end{cases};$$

$$0 < b_i' = b_{2N-i+1}', \qquad 0 \neq b_i'' = b_{2N-i+1}'', \qquad i = 1, \ldots, N$$

In tali condizioni $l(x', D)$, in $\mathfrak{D}$, risulta quasi-ellittico (cfr. [2]).

Inoltre i domini $\mathfrak{D}_r$, o sono contenuti in Ω oppure hanno in comune con la frontiera $\partial\Omega$ una parte connessa contenuta in un iperpiano ortogonale all'asse t' ovvero a qualche asse x_h.

Ogni dominio $\mathfrak{D}_r$ lo indicheremo con $\mathfrak{D}_r^{(1)}$ se è contenuto in Ω oppure è tale che $\partial\Omega \cap \partial\mathfrak{D}_r$ è ortogonale a qualche asse x_h, con $\mathfrak{D}_r^{(2)}$ se $\partial\Omega \cap \partial\mathfrak{D}_r$ è ortogonale all'asse t'.

Supponiamo che ogni dominio $\mathfrak{D}_r^{(p)}$, $p = 1,2$, abbia un intorno su $\bar{\Omega}$, $\Omega_r^{(p)}$, con $\partial\Omega_r^{(p)} \cap \partial\Omega$ ancora iperpiana, tale che in esso l'operatore

[3] Qui, come nel seguito, si conviene di sommare sugli indici ripetuti in una stessa espressione monomia, al variare di essi negli insiemi indicati.

$l(x', D)$ assume la forma

$$l_{ij}(x', D)u_j = (D_{x_h}(a_j^{hk} D_{x_k} u_j) + D_{t'}(\rho^{2\mu} a_j' D_{t'} u_j) + D_{t''}(\rho^{2\mu} a_j'' D_{t''} u_j))\,\delta_{ij}$$
$$+ a_{ij}^{(h)} D_{x_h} u_j + a_{ij} u_j + \mathfrak{L}_{ij}(x'; D_{t'}, D_{t''}) u_j$$

ove ρ è la distanza del generico punto da $\mathfrak{D}_r^{(p)}$, a_j^{hk} ed $\mathfrak{L}_{ij}(x'; D_{t'}, D_{t''})$ sono del tipo descritto in (a) e (b) rispettivamente, e sono verificate inoltre le seguenti condizioni:

(c) $$\mu > 1$$

(d) $$a_j', a_j'' > 0, \quad a_j' = a_{2N-j+1}', \quad a_j'' = a_{2N-j+1}'', \quad j = 1, \ldots, N$$

Supponiamo infine che $\Sigma = \overline{\partial\mathfrak{D} - \partial\Omega}$ abbia regolarità tale che ρ risulti almeno di classe C^1.

Problema al contorno — Sia

$$\mathfrak{D}^{(p)} = \bigcup_r \mathfrak{D}_r^{(p)}, \qquad \Omega^{(p)} = \bigcup_r \Omega_r^{(p)}, \qquad p = 1, 2;$$

indichiamo con Γ l'unione di $\partial\Omega \cap \partial\mathfrak{D}^{(1)}$ e della parte di $\partial\Omega$ *adiacente* ad $\mathcal{E}$, con Γ_+' (risp. Γ_-') l'unione degli insiemi $\partial\Omega \cap \partial\mathfrak{D}_r^{(2)}$ per i quali la normale esterna a $\partial\Omega$ è equiversa (risp. controversa) all'asse t'; consideriamo il seguente problema al contorno:

(1.2)
$$\begin{cases} l\,u = f \quad in \quad \Omega \\ u_{2i-1}\big|_{\Gamma\cup\Gamma_-'} = u_{2i}\big|_{\Gamma\cup\Gamma_+'} = 0 \qquad i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

nonché, relativamente all'operatore aggiunto formale $l^*(x', D)$, il problema:

(1.2)*
$$\begin{cases} l^*\,v = g \quad in \quad \Omega \\ v_{2i-1}\big|_{\Gamma\cup\Gamma_+'} = v_{2i}\big|_{\Gamma\cup\Gamma_-'} = 0 \qquad i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

Problema in forma generalizzata — Introduciamo una forma bilineare $\mathfrak{B}[u, v]$ associata al problema (1.2)[4]:

[4] $\{\Omega - \mathfrak{D}, \Omega_r^{(1)}, \Omega_r^{(2)}\}$ è un ricoprimento aperto di Ω allora in virtù del teorema di partizione dell'unità si ha che basta assegnare la forma di $\mathfrak{B}[u, v]$ nel caso che il supporto di u è in $\Omega - \mathfrak{D}$, $\Omega_r^{(1)}$, $\Omega_r^{(2)}$ rispettivamente.

1) se u ha il supporto in $\Omega - \mathfrak{D}$ allora $\mathfrak{B}[u, v]$ ha l'espressione di una qualunque forma bilineare di Dirichlet in $[H^1(\Omega)]^{2N}$ associata ad $l(x', D)$;

2) se u ha il supporto in $\Omega_r^{(p)}$, $p = 1, 2$, si pone

$$\mathfrak{B}[u, v] = \mathrm{B}[u, v] + \mathrm{B}_0[u, v] + \mathrm{B}'[u, v]$$

ove

$$\mathrm{B}[u, v] = -(a_j^{hk} D_{x_h} v_j, D_{x_k} u_i) + (a_{ij}^{(h)} v_i, D_{x_h} u_i) + \\ + (a_{jj} v_i, u_j) + (\delta_{ij} b_j'' v_i, D_{t''} u_j)$$

$$\mathrm{B}_0[u, v] = -(a_j' \rho^{2\mu} D_{t'} v_j, D_{t'} u_j) - (a_j'' \rho^{2\mu} D_{t''} v_i, D_{t''} u_i)$$

ed inoltre per $p = 1$:

$$\mathrm{B}'[u, v] = ((-1)^j b_j' v_i, D_{t'} u_j)$$

mentre per $p = 2$:

$$\mathrm{B}'[u, v] = \begin{cases} -(b_{2j}' D_{t'} v_{2j}, u_{2j}) - (b_{2j-1}' v_{2j-1}, D_{t'} u_{2j-1}) & \text{se } \Gamma_-' \cap \Omega_r^{(2)} \neq \emptyset \\ (b_{2j}' v_{2j}, D_{t'} u_{2j}) + (b_{2j-1}' D_{t'} v_{2j-1}, u_{2j-1}) & \text{se } \Gamma_+' \cap \Omega_r^{(2)} \neq \emptyset \end{cases}$$

La forma bilineare $\mathfrak{B}[u, v]$ è definita in $\mathcal{H}_0(\Omega) \times \mathcal{H}_0^*(\Omega)$ ove $\mathcal{H}_0(\Omega)$ ed $\mathcal{H}_0^*(\Omega)$ sono i completamenti dello spazio delle funzioni di classe $C_0^\infty(\Omega)$ a valori in R^{2N}, rispetto alle norme $|||\cdot|||$ $|||\cdot|||^*$ seguenti:

$$|||\varphi||| = \|\varphi\|_\Omega + \|\varphi\|_{[H^1(\Omega-\mathfrak{D}')]^{2N}} + \sum_{h,p,r} (\|D_{x_h} \varphi\|_{\Omega_r^{(p)}} + \|D_{t''} \varphi\|_{\Omega_r^{(p)}}) \\ + \sum_{j,r,p} (\|\rho^{\lambda_1} D_{t'} \varphi_{2j-1}\|_{\Omega_r^{(p)}} + \|\rho^{\lambda_2} D_{t'} \varphi_{2j}\|_{\Omega_{(p)}^r})$$

ove

$$\mathfrak{D}' = \bigcup_{r,p} \bar{\Omega}_r^{(p)}$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} \mu \text{ se } \Omega_r^{(p)} \cap \Gamma_+' \neq 0 \\ 0 \text{ negli altri casi} \end{cases} \qquad \lambda_2 = \begin{cases} \mu \text{ se } \Omega_r^{(p)} \cap \Gamma_-' \neq 0 \\ 0 \text{ negli altri casi} \end{cases}$$

e $|||\varphi|||^*$ è definita come $|||\varphi|||$ con λ_1 e λ_2 che si scambiano.

Ebbene, diciamo che $u \in \mathcal{H}_o(\Omega)$ è una *soluzione generalizzata* del problema (1.2) se risulta:

$$(1.3) \qquad \mathcal{B}[u, v] = (v, f) \qquad \forall v \in \mathcal{H}_o^*(\Omega)$$

analogamente, diciamo che $v \in \mathcal{H}_o^*(\Omega)$ è soluzione generalizzata del problema aggiunto $(1.2)^*$ se risulta:

$$(1.3)^* \qquad \mathcal{B}[u, v] = (g, u) \qquad \forall u \in \mathcal{H}_o(\Omega)$$

Il teorema che si prova è il seguente:

TEOREMA I — *Nelle condizioni fin qui descritte per l'operatore* $l(x', D)$, *il problema* (1.2) *ha una ed una sola soluzione generalizzata.*

2. - Maggiorazioni relative al problema approssimante

Posto:

$$B_\varepsilon[u, v] = -\varepsilon(D_{x_h'} v_i, D_{x_h'} u_i) \qquad \varepsilon \in (0,1)$$

$$\mathcal{B}_\varepsilon[u, v] = \mathcal{B}[u, v] + B_\varepsilon[u, v],$$

si consideri il seguente problema:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{B}_\varepsilon[u, v] = (v, f) & \forall v \in [H_o^1(\Omega)]^{2N} \\ u \in [H_o^1(\Omega)]^{2N} \end{cases}$$

Osserviamo che $\mathcal{B}_\varepsilon[u, v]$ è fortemente ed uniformemente ellittica in $\bar{\Omega}$ e che inoltre, per la condizione (1.1), si ha:

$$(2.2) \qquad -\mathcal{B}_\varepsilon[u, u] = (u, -lu) + \varepsilon \sum_h \| D_{x_h'} u \|^2 \geq K_\varepsilon \| u \|_{[H^1(\Omega)]^{2N}} \qquad \forall u \in [C_o^\infty(\Omega)]^{2N},$$

per cui risulta

$$-\mathcal{B}_\varepsilon[u, u] \geq K_\varepsilon \| u \|_{[H^1(\Omega)]^{2N}} \qquad \forall u \in [H_o^1(\Omega)]^{2N}$$

ne segue che per ogni $f \in [L_2(\Omega)]^{2N}$ il problema (2.1) ha una ed una sola soluzione $u^{(\varepsilon)}$; tale soluzione, per le ipotesi di regolarità dei coef-

ficienti, è anzi di classe $[H^2(\Omega)]^{2N}$ e se D è un intorno su $\bar{\Omega}$ di $\mathfrak{D}$, si prova che vale la seguente limitazione:

$$\| u^{(\varepsilon)} \|_{[H^2(\Omega-D)]^{2N}} \leq K \| f \|_{\Omega} \tag{2.3}$$

con K indipendente da ε; tutto ciò si stabilisce con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte in [4] per le equazioni.

Si noti pure che per la regolarità di $u^{(\varepsilon)}$, posto

$$l_i^{(\varepsilon)} u = l_i u + \varepsilon \sum_h \delta_{ij} D^2_{x_h}, u_j$$

si ha

$$(v, l^{(\varepsilon)} u^{(\varepsilon)}) = \mathfrak{B}_\varepsilon [u^{(\varepsilon)}, v] = (v, f) \qquad \forall v \in [C_0^\infty(\Omega)]^{2N}$$

e quindi

$$l^{(\varepsilon)} u^{(\varepsilon)} = f ;$$

inoltre dalla (1.1) si ricava:

$$K \| u^{(\varepsilon)} \|^2 \leq (u^{(\varepsilon)}, - l u^{(\varepsilon)}) = - \mathfrak{B}_\varepsilon [u^{(\varepsilon)}, u^{(\varepsilon)}] = - (u^{(\varepsilon)}, f)$$

e quindi si ha:

$$\| u^{(\varepsilon)} \|_{\Omega} \leq K \| f \|_{\Omega} \tag{2.4}$$

con k indipendente da ε.

Ci proponiamo ora di stabilire alcune maggiorazioni per la funzione u negli assiemi $\Omega_r^{(p)}$, $p = 1, 2$. Porremo per comodità $u^{(\varepsilon)} = u$. Indicheremo inoltre con ζ una funzione reale di classe C^∞, uguale ad 1 in un intorno su $\bar{\Omega}$ di $\mathfrak{D}_r^{(p)}$ ed uguale a zero in $\bar{\Omega} - \Omega_r^{(p)}$.

Proviamo che vale il seguente teorema:

TEOREMA 2.I — *Sussistono le maggiorazioni*:

$$\sum_h \| D_{x_h} u \|_{\Omega_r^{(1)}} + \| D_{t'} u \|_{\Omega_r^{(1)}} + \| D_{t''} u \|_{\Omega_r^{(1)}} \leq K \| f \|_{\Omega} \tag{2.5}$$

con K indipendente da ε.

Dimostrazione. — In forza della (2.3) basta provare le (2.5) con ζu al posto di u. Per la diseguaglianza (2.4) si ha:

$$(- (-1)^i b_i' \zeta u_i, D_{t'}(\zeta u_i)) + (- \delta_{ij} b_j'' \zeta u_i, D_{t''}(\zeta u_j)) \geq - K \| f \|^2 \ ^{5}$$

[5] D'ora innanzi indichiamo con K, K' quantità indipendenti da ε, generalmente differenti da formula a formula, ciò anche nell'ambito di una stessa dimostrazione.

e quindi tenendo conto della condizione (a) ed utilizzando la disegualglianza di YOUNG, è facile vedere che risulta:

$$B\,[-\zeta u, \zeta u] + B'\,[-\zeta u, \zeta u] \geq K \sum_h \| D_{x_h}\ (\zeta u) \|^2 - \lambda \sum_h \| D_{x_h}\ (\zeta u) \|^2 - k(\lambda) \| f \|^2$$

ove λ è una quantità positiva arbitraria e $k(\lambda)$ una quantità che dipende da λ ma non da ε. Da tale limitazione segue:

$$(2.6) \qquad \sum_h \| D_{x_h} (\zeta u) \|^2 \leq K (B\,[-\zeta u, \zeta u] + B'[-\zeta u, \zeta u] + \| f \|^2)$$

Ovviamente si ha:

$$(2.7) \qquad B_\varepsilon\,[-\zeta u, \zeta u]) \geq 0\,;$$

inoltre si osservi che risulta:

$$B_o\,[-\zeta u, \zeta u] = (a_t' D_{t'} (\rho^\mu \zeta u_i), D_{t'} (\rho^\mu \zeta u_i)) + (a_i'' D_{t''} (\rho^\mu \zeta u_i), D_{t''} (\rho^\mu \zeta u_i))$$

$$- 2\mu (a_i' D_{t'} (\rho^\mu \zeta u_i), \rho^{\mu-1} \rho_{t'} \zeta u_i) - 2\mu (a_i'' D_{t''} (\rho^\mu \zeta u_i), \rho^{\mu-1} \rho_{t''} \zeta u_i)$$

$$+ \mu^2 (a_i' \rho^{\mu-1} \rho_{t'} \zeta u_i, \rho^{\mu-1} \rho_{t'} \zeta u_i) + \mu^2 (a_i'' \rho^{\mu-1} \rho_{t''} \zeta u_i, \rho^{\mu-1} \rho_{t''} \zeta u_i)$$

$$\geq K (\| D_{t'} (\rho^\mu \zeta u) \|^2 + \| D_{t''} (\rho^\mu \zeta u) \|^2)$$

$$- K' \| \zeta u \| (\| D_{t'} (\rho^\mu \zeta u) \| + \| D_{t''} (\rho^\mu \zeta u) \| + \| \zeta u \|)$$

e quindi:

$$(2.8) \quad B_o\,[-\zeta u, \zeta u] \geq K (\| D_{t'} (\rho^\mu \zeta u) \|^2 + \| D_{t''} (\rho^\mu \zeta u) \|^2) - K' \| \zeta u \|^2;$$

d'altra parte si ha:

$$\| D_{t'} (\rho^\mu \zeta u) \|^2 \geq K \| \rho^\mu D_{t'} (\zeta u) \|^2 - K' \| \zeta u \|^2$$

e similmente per $\| D_{t''} (\rho^\mu \zeta u) \|$.

Allora dalle (2.8) e (2.4) segue che

$$(2.9) \quad B_o\,[-\zeta u, \zeta u] \geq K (\| \rho^\mu D_{t'} (\zeta u) \|^2 + \| \rho^\mu D_{t''} (\zeta u) \|^2 - K' \| f \|^2)$$

Tenendo conto di quest'ultima diseguaglianza e delle (2.6) e (2.7), si perviene alla seguente:

$$(2.10)\qquad \sum_h \| D_{x_h} (\zeta u) \|^2 + \| \rho^\mu D_{t'} (\zeta u) \|^2 + \| \rho^\mu D_{t''} (\zeta u) \|^2$$

$$\leq K (\mathcal{B}_\varepsilon [-\zeta u, \zeta u] + \| f \|^2)$$

Osservato che nella differenza $\mathcal{B}_\varepsilon [-\zeta u, \zeta u] - \mathcal{B}_\varepsilon [-u, \zeta^2 u]$ la funzione ζ figura solo attraverso le sue derivate nel cui supporto sussiste la (2.3), tenendo conto che

$$\mathcal{B}_\varepsilon [-u, \zeta^2 u] = -(f, \zeta^2 u)$$

si ricava:

$$\mathcal{B}_\varepsilon [-\zeta u, \zeta u] = \mathcal{B}_\varepsilon [-u, \zeta^2 u] + (\mathcal{B}_\varepsilon [-\zeta u, \zeta u] - \mathcal{B}_\varepsilon [-u, \zeta^2 u])$$
$$\leq -(f, \zeta^2 u) + K \| f \|^2$$

Allora per la (2.4), dalla (2.10) si ha:

$$(2.11)\qquad \sum_h \| D_{x_h} (\zeta u) \| + \| \rho^\mu D_{t'} (\zeta u) \| + \| \rho^\mu D_{t''} (\zeta u \| \leq K \| f \|$$

Indichiamo con v il vettore la cui componente i-ma è $v_i = (-1)^i D_{t'} (\zeta u_i)$; tenuto conto che $a_i^{hk} = a_i^{kh}$ e che vale la (2.11) si ha:

$$((-1)^{i+1} a_i^{hk} D_{x_h} D_{t'} (\zeta u_i), D_{x_k} (\zeta u_i)) \geq -K \| f \|^2,$$

$$(a_{ij}^{(h)} D_{x_h} (\zeta u_j) + a_{ij} \zeta u_j, (-1)^j D_{t'} (\zeta u_i)) \geq -\lambda \| D_{t'} (\zeta u) \|^2 - k(\lambda) \| f \|^2,$$

$$((-1)^i \delta_{ij} b_i'' D_{t'} (\zeta u_i), D_{t''} (\zeta u_j)) \geq -\lambda \| D_{t'} (\zeta u_{2i-1}) \|^2$$
$$- \sigma \| D_{t''} (\zeta u_{2i-1}) \|^2 - k (\lambda, \sigma) \| f \|^2$$

ove λ e σ sono quantità positive arbitrarie, ed inoltre tenuto conto ancora della (2.11) risulta:

$$((-1)^{i+1} \rho^{2\mu} a_i' D_{t'}^2 (\zeta u_i), D_{t'} (\zeta u_i)) \geq -\lambda \| D_{t'} (\zeta u) \|^2 - k (\lambda) \| f \|^2,$$

$$((-1)^{i+1} \rho^{2\mu} a_i'' D_{t''} D_{t'} (\zeta u_i), D_{t''} (\zeta u_i)) \geq -\sigma \| D_{t''} \zeta u) \|^2 - k (\sigma) \| f \|^2.$$

Allora risulta:

$$(2.12)\qquad \| D_{t'} (\zeta u) \|^2 \leq K \mathcal{B}_\varepsilon [\zeta u, v] + \sigma \| D_{t''} (\zeta u) \|^2 + k (\sigma) \| f \|^2$$

D'altra parte risultando:

$$\mathcal{B}_\varepsilon [u, \zeta v] = (f, \zeta v)$$

per la limitazione (2.3) si ha:

$$\mathcal{B}_\varepsilon [\zeta u, v] = \mathcal{B}_\varepsilon [u, \zeta v] + (\mathcal{B}_\varepsilon [\zeta u, v] - \mathcal{B}_\varepsilon [u, \zeta v]) \leq$$
$$\leq (f, \zeta v) + K \| f \|^2$$

che insieme alla (2.12) implica:

$$\| D_{t'} (\zeta u) \|^2 \leq \sigma \| D_{t''} (\zeta u) \|^2 + k(\sigma) \| f \|^2 \tag{2.13}$$

Al fine di valutare $\| D_{t''} (\zeta u) \|$ si pone $v_i = \tilde{\delta}_{mi} D_{t''} (\zeta u_m)$ e con considerazioni analoghe alle precedenti si vede che vale la seguente limitazione:

$$\| D_{t''} (\zeta u) \|^2 \leq K | \mathcal{B}_\varepsilon [\zeta u, v] | + \lambda \| D_{t'} (\zeta u_{2i-1}) \|^2 + k(\lambda) \| f \|^2; \tag{2.14}$$

essendo poi

$$| \mathcal{B}_\varepsilon [\zeta u, v] | \leq | (f, \zeta v) | + K \| f \|^2,$$

ricordando la (2.13) si completa facilmente la dimostrazione delle (2.5).

Proviamo ora il

TEOREMA 2.II — *Valgono le seguenti maggiorazioni*:

$$\sum_h \| D_{x_h} u \|_{\Omega_r^{(2)}} + \| \rho^\mu D_{t'} u \|_{\Omega_r^{(2)}} + \| D_{t''} u \|_{\Omega_r^{(2)}} \leq K \| f \|_\Omega \tag{2.15}$$

uniformemente rispetto ad ε, *ed inoltre se* $\Omega_r^{(2)} \cap \Gamma_-' \neq \emptyset$ risulta

$$\| D_{t'} u_{2i-1} \|_{\Omega_r^{(2)}} \leq K \| f \|_\Omega \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.16}$$

e se $\Omega_r^{(2)} \cap \Gamma_+' \neq \emptyset$ *risulta*

$$\| D_{t'} u_{2i} \|_{\Omega_r^{(2)}} \leq K \| f \|_\Omega \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.17}$$

Dimostrazione. — Innanzitutto, ragionando come per la (2.11), si ricava:

$$\sum_h \| D_{x_h} u \|_{\Omega_r^{(2)}} + \| \rho^\mu D_{t'} u \|_{\Omega_r^{(2)}} + \| \rho^\mu D_{t''} u \|_{\Omega_r^{(2)}} \leq K \| f \|_\Omega \tag{2.18}$$

Supponiamo che $\Omega_r^{(2)} \cap \Gamma_-' \neq \emptyset$; tenendo presenti le relazioni stabilite per provare la (2.14), si vede che anche attualmente vale la (2.14) e quindi:

$$\| D_{t''}(\zeta u) \|^2 \leq \lambda \| D_{t'}(\zeta u_{2i-1}) \|^2 + k(\lambda) \| f \|^2 \tag{2.19}$$

Ora, indicato con v il vettore avente le componenti di posto dispari uguali alle corrispondenti di $- D_{t'}(\zeta u)$ e quelle di posto pari nulle, risulta:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\varepsilon [\zeta u, v] \geq K \| D_{t'}(\zeta u_{2i-1}) \|^2 - \lambda \| D_{t'}(\zeta_{2i-1}) \|^2 - k(\lambda) \| f \|^2 \\ - (\rho^{2\mu} a'_{2i-1} D_{t'}^2 (\zeta u_{2i-1}), D_{t'}(\zeta u_{2i-1})) - \varepsilon (D_{t'}^2 (\zeta u_{2i-1}, D_{t'}(\zeta u_{2i-1})) \\ - (\rho^{2\mu} a''_{2i-1} D_{t''} D_{t'}(\zeta u_{2i-1}), D_{t''}(\zeta u_{2i-1})) \end{aligned} \tag{2.20}$$

ove si è tenuto conto di alcune delle relazioni già stabilite per provare la (2.12).

D'altra parte, ricordato che $\Omega_r^{(2)} \cap \Gamma_-' \neq \emptyset$, si ha:

$$\begin{aligned} - (\rho^{2\mu} a'_{2i-1} D_{t'}^2 (\zeta u_{2i-1}), D_{t'}(\zeta u_{2i-1})) \\ = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_-'} \rho^{2\mu} a'_{2i-1} (D_{t'}(\zeta u_{2i-1}))^2 d\sigma + \frac{1}{2} (D_{t'}(\rho^{2\mu} a'_{2i-1}), (D_{t'}(\zeta u_{2i-1}))^2) \geq \\ \geq - \lambda \| D_{t'}(\zeta u_{2i-1}) \|^2 - k(\lambda) \| f \|^2 \end{aligned}$$

ed anche:

$$- \varepsilon (D_{t'}^2 (\zeta u_{2i-1}), D_{t'}(\zeta u_{2i-1})) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_-'} (D_{t'}(\zeta u_{2i-1}))^2 d\sigma \geq 0$$

Osservato poi che risulta:

$$- (\rho^{2\mu} a''_{2i-1} D_{t''} D_{t'}(\zeta u_{2i-1}), D_{t''}(\zeta u_{2i-1}) \geq - \sigma \| D_{t''}(\zeta u_{2i-1}) \|^2 - k(\sigma) \| f \|^2$$

dalla (2.20), tenuto conto della (2.19), segue:

$$\| D_{t'}(\zeta u_{2i-1}) \|^2 \leq K (\mathfrak{B}_\varepsilon [\zeta u, v] + \| f \|^2) \tag{2.21}$$

Infine risulta:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\varepsilon [\zeta u, v] - (l^{(\varepsilon)}(\zeta u), v) = - \varepsilon (D_{t'}(\zeta u_{2i-1}), D_{t'}(\zeta u_{2i-1}))_{\Gamma_-'} \\ - (\rho^{2\mu} a'_{2i-1} D_{t'}(\zeta u_{2i-1}), D_{t'}(\zeta u_{2i-1}))_{\Gamma_-'} \end{aligned}$$

perciò

$$\mathfrak{B}_\varepsilon [\zeta u, v] \leq (f, v);$$

allora dalla (2.21) consegue:

$$\| D_{l'} (\zeta u_{2i-1}) \|^2 \leq K \| f \|^2$$

da questa e dalle (2.18), (2.19) si perviene all'asserto.

Per quanto concerne il caso $\Omega_r^{(2)} \cap \Gamma_+' \neq \emptyset$ il procedimento è analogo, basta scambiare i ruoli di u_{2i-1} e u_{2i}.

3. - **Dimostrazione del teorema I**

Per i teoremi del n. 2 la famiglia $\{u^{(\varepsilon)}\}$ è limitata in $\mathcal{H}_0(\Omega)$ e quindi da essa si può estrarre una successione $\{u^{(\varepsilon_k)}\}$, con $\varepsilon_k \to 0$, debolmente convergente in $\mathcal{H}_0(\Omega)$ ad una funzione $u \in \mathcal{H}_0(\Omega)$, per la quale si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{B} [u^{(\varepsilon_k)}, v] = \mathfrak{B} [u, v] \qquad \forall v \in \mathcal{H}_0^* (\Omega) \tag{3.1}$$

D'altra parte, tenendo conto che la (2.2) sussiste per $u = u^{(\varepsilon_k)}$, si ha:

$$\varepsilon_k^{1/2} \| u^{(\varepsilon_k)} \|_{[H^1(\Omega)]^{2N}} \leq K \| f \|_\Omega$$

Per tale diseguaglianza e per la (3.1) risulta:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{B}_{\varepsilon_k} [u^{(\varepsilon_k)}, v] = \mathfrak{B} [u, v] \qquad \forall v \in \mathcal{H}_0^* (\Omega)$$

e cioè

$$\mathfrak{B} [u, v] = (v, f)_\Omega \qquad \forall v \in \mathcal{H}_0^* (\Omega)$$

Resta allora provato che u è una soluzione generalizzata del problema (1.2). Con ciò è provata anche l'esistenza di una soluzione generalizzata $v \in \mathcal{H}_0^* (\Omega)$ del problema $(1.2)^*$ e cioè tale che

$$\mathfrak{B} [u, v] = (g, u)_\Omega \qquad \forall u \in \mathcal{H}_0 (\Omega) \tag{3.2}$$

essendo g una qualunque funzione di $[L_2(\Omega)]^{2N}$.

Scrivendo la (3.2) per una soluzione generalizzata u del problema (1.2), omogeneo, si ha:

$$(u, g)_\Omega = 0 \qquad \forall\, g \in [L_2(\Omega)]^{2N}$$

quindi $u = 0$, ciò completa la dimostrazione del teorema I.

Si osservi che tenuto conto di quanto stabilito in [2], la soluzione è una soluzione *quasi-regolare* nel senso richiamato nell'introduzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. L. Benevento - T. Bruno - L. Castellano, *Esistenza ed unicità di una soluzione generalizzata del problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni*, Ricerche di Mat., Vol. XXV, pp. 81-100 (1976).

[2] P. Buonocore, *Un teorema di esistenza per i problemi del tipo di Dirichlet relativi ad una classe di sistemi degeneri*, Ricerche di Mat., Vol. XXVI, pp. 135-159 (1977).

[3] A. Canfora, *Su un problema al contorno, in uno strato, per una equazione ellittico-parabolica del quarto ordine*, Ricerche di Mat., Vol. XXIV, pp. 21-75 (1975).

[4] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. VII, pp. 648-674 (1955).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, A. Avantaggiati e C. Miranda.

Inibizione della reazione di ricostituzione dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore suino da parte dell'acido adenilico *

Nota di Rita Fiore **, Anna Maria Garzillo **,
Pietro Pucci ** e Gennaro Marino **
presentata dal socio ordinario Enzo Leone

(Adunanza del 4 novembre 1978)

Riassunto. — È stato dimostrato che il piridossale-5'-fosfato riconosce i siti leganti i nucleotidi nei numerosi sistemi enzimatici per i quali è stato impiegato come marcatore di affinità. Si può ipotizzare che i nucleotidi in genere, o eventualmente qualcuno in particolare, possano riconoscere a loro volta specificamente il sito legante il piridossale-5'-fosfato negli enzimi da questo dipendenti. È stato perciò intrapreso uno studio sull'effetto esercitato dai nucleotidi sulla reazione di ricostituzione dell'apo aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore suino. Molti dei nucleotidi provati sono risultati essere effettivamente degli inibitori di tale reazione; tra questi l'acido adenilico (AMP) risultava l'inibitore più efficace con una costante di inibizione di $37 \pm 2\ 10^{-6}$ M. Il valore così basso di questa costante suggerisce un possibile ruolo fisiologico di questa inibizione.

Summary. — Pyridoxal-P is an affinity marker for several binding nucleotides enzymes. However the oposite effect, i.e. the recognition of the pyridoxal-P binding site from nucleotides, on enzymes depending on this coenzyme, has not been reported. The effect of nucleotides on the reconstitution reaction of the cytosolic apo aspartate aminotransferase has been investigated. AMP resulted the most effective inhibitor ($K_i = 37 \pm 2\ 10^{-6}$ M). Such a strong inhibition could be related to a specific physiological role.

Introduzione

Il piridossale-5'-fosfato (PALP), il coenzima che interviene nella maggior parte delle reazioni enzimatiche a carico degli amminoacidi, può fungere da marcatore di affinità per i siti leganti i nucleotidi per un gran numero di proteine enzimatiche ([1, 2] e riferimenti ivi ci-

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.
** Istituto di Chimica Organica e Biologica dell'Università di Napoli.

tati). Numerose evidenze stanno ad indicare che tale molecola, una volta riconosciuto il sito cationico relativo all'interazione con il fosfato, reagisce con il gruppo ε-amminico di una lisina presente al sito legante con la conseguente formazione di un legame aldimminico [3]. Un effetto opposto, cioè il riconoscimento da parte di nucleotidi del sito legante il piridossale-5'-fosfato nei numerosi sistemi enzimatici da questo dipendenti, non è stato finora riportato. È stato pertanto intrapreso uno studio sull'effetto esercitato dai nucleotidi sulla reazione di ricostituzione di un tipico enzima piridossale-5'-fosfato dipendente come l'aspartato aminotransferasi (EC 2.6.1.1), certamente il più studiato di questa classe di enzimi [4]. Questo tipo di lavoro si inseriva nell'ambito di ricerche già condotte presso il nostro gruppo di ricerca e che avevano consentito di mettere a punto un semplice metodo grafico per il calcolo della costante di affinità degli inibitori per l'apoenzima [5].

Parte sperimentale

Materiali

Tutti i nucleotidi e il piridossale-5'-fosfato erano della Sigma Chem. Co. (St. Louis). Gli altri reattivi erano del tipo puro per analisi da varie fonti commerciali.

L'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore suino veniva purificata essenzialmente come descritto da Banks e Coll. [6] con la modifica introdotta da Petrilli e Coll. [7]. L'oloenzima veniva risolto con il metodo descritto da Marino e Coll. [8].

Metodi

La ricostituzione dell'apoenzima veniva effettuata a temperatura ambiente aggiungendo alla proteina in tampone Tris (idrossimetil) amminometano–HCl 0,05 M, pH 8,25, una certa quantità di piridossale-5'-fosfato sciolto nello stesso tampone in rapporto molare di circa 1:5 o 1:10.

Essendo la cinetica della reazione estremamente rapida, la reazione stessa si faceva avvenire su una spatolina ricurva di plastica che a tempi prefissati veniva immersa direttamente nella cuvetta contenente la miscela di substrati. Per effetto della diluizione (il volume della miscela di ricostituzione non superava i 50 μl contro un volume di 3 ml della miscela di substrati) si poteva assumere che la reazione

venisse bloccata e che pertanto l'attività enzimatica registrata fosse proporzionale alla quantità di oloenzima ricostituito. Le prove di ricostituzione in presenza degli inibitori venivano eseguite in modo analogo scegliendo in modo opportuno la concentrazione degli inibitori. Al fine di poter calcolare la costante di inibizione per quei prodotti che mostravano capacità inibente, veniva utilizzato il metodo già precedentemente descritto in letteratura [5]. Tale metodo si basa sull'assunzione che il processo di inibizione sia reversibile, mentre quello di ricostituzione sia essenzialmente irreversibile. Esso consiste nel riportare in grafico il rapporto della velocità di ricostituzione in assenza e in presenza dell'inibitore, secondo la relazione

$$\frac{v}{v_i} = 1 + \frac{I}{K_i}$$

La determinazione dell'attività enzimatica dell'aspartato amminotransferasi veniva eseguita con il metodo di BANKS e Coll. [6]. Le attività enzimatiche venivano eseguite con uno spettrofotometro Perkin-Elmer mod. 550 collegato con un registratore Servogor S 56.

RISULTATI

La figura 1 mostra l'andamento della reazione di ricostituzione dell'apo aspartato amminotransferasi in assenza ed in presenza di

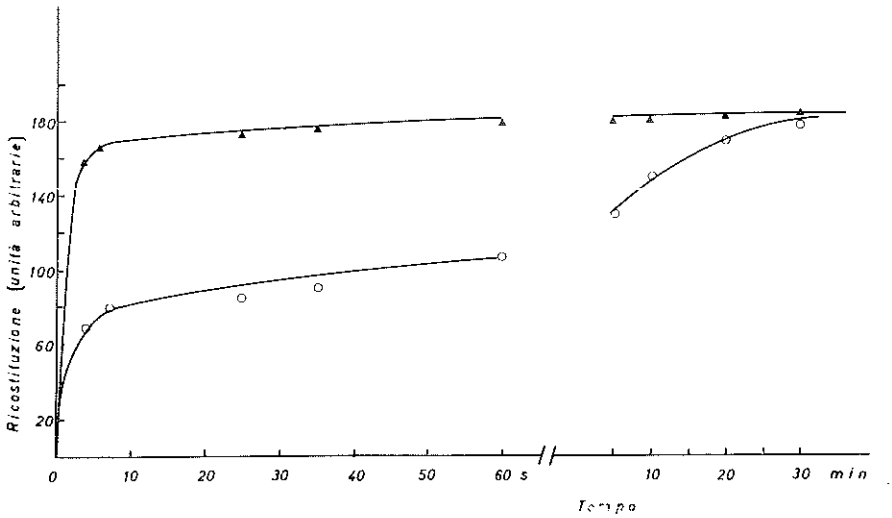


FIG. 1. - Curve di ricostituzione dell'apo-aspartato aminotransferasi in assenza (▲) ed in presenza (○) di AMP. Il rapporto molare apoenzima - PALP era 1:60, quello apoenzima - AMP 1:10.

AMP. Appare evidente come in presenza di AMP la reazione di ricostituzione dell'aspartato amminotransferasi venga inibita. Tale inibizione risulta reversibile, in quanto essa viene rimossa nel tempo, come si può notare dall'andamento del grafico di fig. 1. Nelle condizioni sperimentali riportate in figura (rapporto apoenzima-PALP 1:60), non è però possibile ottenere indicazioni sulla velocità iniziale di ricostituzione, infatti come si può vedere dalla figura, già dopo 4

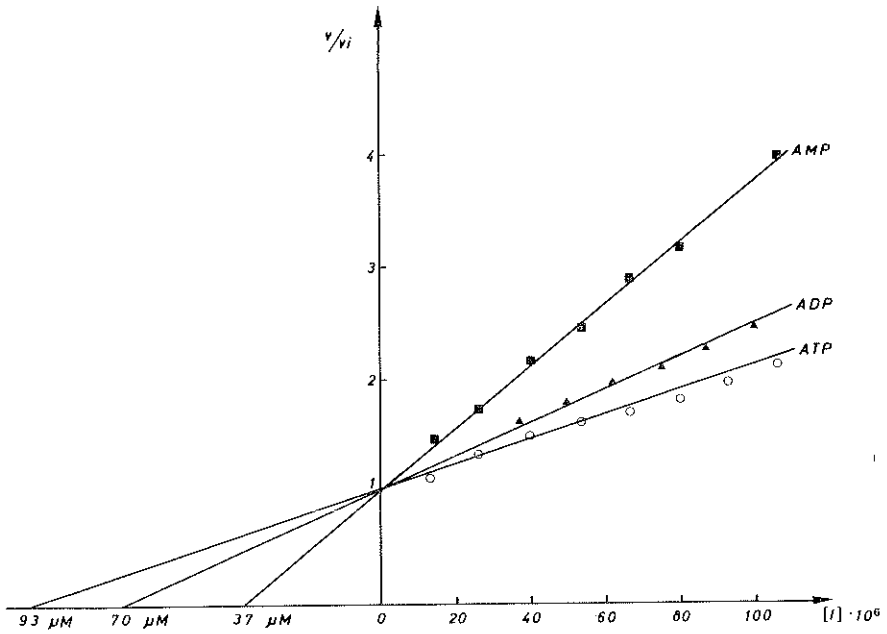


FIG. 2. - Determinazione delle costanti di inibizione per l'AMP, l'ADP e l'ATP.

sec l'apoenzima è ricostituito per l'80 %. Al fine quindi di poter applicare la relazione per il calcolo della costante di inibizione K_i, è stato necessario abbassare il rapporto apoenzima-PALP a 1:5, e scegliere un tempo di 4 sec per il quale la cinetica di ricostituzione è ancora di primo ordine. La fig. 2 mostra un tipico grafico ottenuto in queste condizioni con i tre nucleotidi adenilici, AMP, ADP, e ATP.

Altri nucleotidi 5' fosfati disponibili, UMP, GMP e CMP, risultano essere inibitori molto meno efficaci (fig. 3). Per l'UMP è stato possibile calcolare una $K_i = 117 \pm 3$ μM; per gli altri non è stato possibile ottenere valori determinabili con accuratezza, essi sono comunque nell'ordine di grandezza di 1 mM.

La figura 3 mostra in paragone anche le curve di inibizione tra AMP e il suo isomero 3'AMP; la costante di inibizione calcolabile

per questo risulta essere intorno a 1,15 mM. L'insieme dei valori delle K_i è riportato nella tabella.

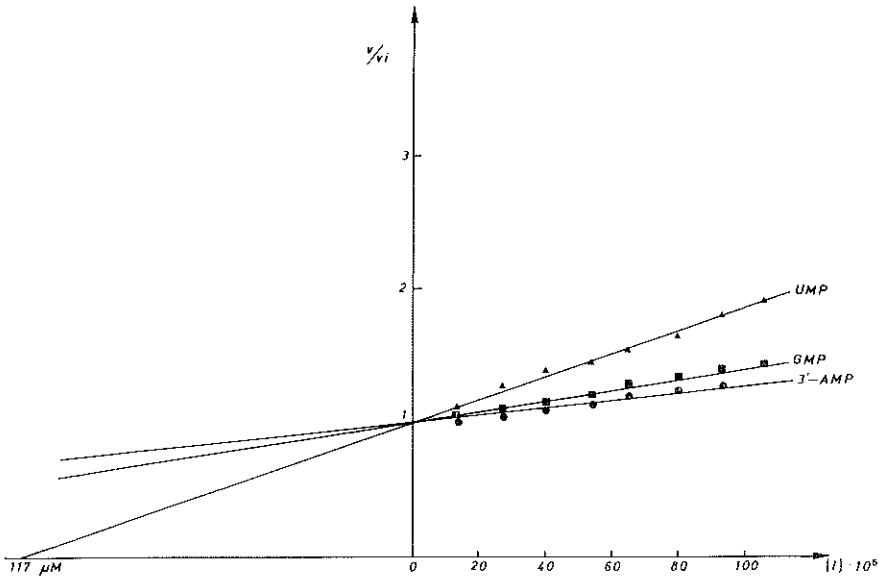


FIG. 3. - Determinazione delle costanti di inibizione per l'UMP, il GMP.

TABELLA

Valori della K_i *di vari nucleotidi, media di almeno cinque esperimenti, determinati come descritto nella parte sperimentale*

Inibitori	K_i M × 10^{-6}
AMP	37 ± 2
ADP	70 ± 4
ATP	93 ± 2
UMP	117 ± 3
3'-AMP	1150 ± 80
GMP	> 1000
CMP	> 1000

DISCUSSIONE

I risultati sopra riportati verificano in parte, almeno per quanto riguarda l'aspartato amminotransferasi citoplasmatica, l'ipotesi di lavoro riportata nella introduzione. Risulta infatti evidente che i nucleotidi adenilici, presentando valori della costante di inibizione compresa fra 0,04 e 0,09 mM, sono degli energici inibitori della ricosti-

tuzione dell'aspartato apoamminotransferasi. Perché la somma delle loro concentrazioni nella porzione citoplasmatica cellulare è dell'ordine di grandezza millimolare, è possibile pensare che tale inibizione possa avere un significato fisiologico, per esempio livellando l'attività della aspartato amminotransferasi citoplasmatica, enzima chiave nel meccanismo dello « shuttle » del malato.

È interessante osservare che recentemente è stato suggerito che la quantità di acido α-ammino butirrico nel sistema nervoso possa essere regolata mediante un meccanismo di inibizione della ricostituzione delle glutammato decarbossilasi da parte del pool dell'adenilato [10].

Dal punto di vista strutturale è ragionevole spiegarsi il diverso potere di inibizione dei nucleotidi adenilici in dipendenza dell'aumento delle unità di fosfato che esterificano l'ossidrile 5' di ribosio. Si può pensare infatti, che l'AMP da una parte possiede un gruppo per riconoscere il sito di attacco del fosfato e dall'altro, il nucleo della adenosina potrebbe inserirsi nella cavità idrofobica [11] che è stato supposto contenere la parte piridinica del coenzima; l'allungamento della catena con unità di ortofosfato, aumentando il grado di libertà della porzione adenilica, diminuirebbe la popolazione di molecole nella conformazione adatta per realizzare la interazione. La notevole affinità dei nucleotidi adenilici potrebbe inoltre essere dovuta alla presenza del gruppo amminico in posizione 4 che mima il gruppo amminico in posizione 4 della piridossamina fosfato. È importante sottolineare che l'isomero 3'AMP è un inibitore molto meno efficace dell'isomero 5'. In questo isomero la posizione della porzione adenilica è molto più rigida rispetto al fosfato e ciò renderebbe più difficile sia l'interazione con il sito cationico, sia con quello idrofobico.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Rippa, L. Spanto e S. Pontremoli, *Arch. Biochem. Biophys.*, **118**, 48 (1967).
[2] M. J. Wimmer, T. Mo, D. L. Sawyers e J. H. Harrison, *J. Biol. Chem.*, **250**, 710 (1975)
[3] G. Colombo e F. Marcus, *Biochemistry*, **14**, 3085 (1974).
[4] A. E. Braunstein in *The Enzymes*, pag. 379, vol. **9**, *Acad. Press*, New York (1973).
[5] L. Gianfreda, G. Marino, R. Palescandolo e V. Scardi, *Mol. Cell. Biochem.*, **4**, 125 (1974).
[6] B. E. C. Banks, S. Downan, A. G. Lawrence e C. A. Vernon, *Eur. J. Biochem.*, **5**, 528 (1968).
[7] P. Petrilli, G. Sannia e G. Marino, *J. Chromatog.*, **135**, 511 (1977).
[8] G. Marino, A. M. Greco, R. Zito e V. Scardi, *Biochem. J.*, **99**, 589 (1966).
[9] R. M. C. Dawdson, *Data for Biochemical Research*, 2nd Ed., pag. 543, Oxford Univ. Press, Oxford (1969).
[10] L. P. Miller, J. R. Walters, D. L. Martin, *Nature*, **266**, 847 (1977).
[11] P. Fasella e C. Turano, *Vitamins and Hormones*, **28**, 157 (1970).

Ricerche sul differenziamento sessuale nei *Cefalopodi*

II. Azione del progesterone e del D.S.D. sulla gonade giovanile di *Sepia officinalis*

Nota di MARIO GRASSO *
presentata dal socio corrispondente GIOVANNI CHIEFFI

(Adunanza del 4 novembre 1978)

RIASSUNTO. — Embrioni di *Sepia officinalis* al XIV stadio di Naef divisi in due gruppi ricevevano in soluzione oleosa nel sacco vitellino, il primo gruppo 40 μg di progesterone, il secondo gruppo 50 μg di DSD. L'esame istologico delle gonadi al decimo giorno di vita post-embrionale, confrontato con quelli dei controlli ha messo in evidenza che tali ormoni steroidi dei Vertebrati non modificano la struttura della gonade maschile, ma agiscono sull'ovario anticipando l'entrata in meiosi degli ovogoni.

SUMMARY. — Embryos of *Sepia officinalis* (Naef's XIV stage) were divided in two lots and injected, within the yolk sac, the first lot with 40 μg of progesterone in oil and the second lot with 50 μg of dimetilstilbelstrolodipropionate (DSD) in oil. Histological study of the gonads on the tenth days of post-embryonic life, compared with controls, showed that these steroid hormones do not modify the structure of the testis, but operate on the ovary anticipating the onset of meiosis.

INTRODUZIONE

Questa ricerca fa parte di una serie di indagini da me iniziate alcuni anni or sono al fine di apportare il mio modesto contributo sul problema del differenziamento sessuale nei Cefalopodi Dibranchiati.

I primi studi embriogenetici su tale argomento risalgono agli inizi di questo secolo con indagini morfogenetiche eseguite da FAUSSEK [1], TEICHMANN [2] e DISTASO [3]. Successivamente il problema fu ripreso da MONTALENTI e VITAGLIANO [4], [5] che utilizzando le tavole normali dello sviluppo di NAEF [6] stabilirono in *Sepia officinalis* che il sesso dell'embrione è distinguibile solo al XVIII stadio quando nelle femmine compaiono le ghiandole nidamentali e che il

* Istituto di Zoologia dell'Università di Napoli.

differenziamento della gonade è successivo alla schiusa delle uova e precisamente tra il quarto ed il decimo giorno per le femmine, verso il secondo mese di vita per i maschi .

Ricerche più recenti di BOYCOTT e YOUNG [7] e di WELLS e WELLS [8] sul genere *Octopus* hanno potuto dimostrare che la maturazione della gonade in ambedue i sessi, è legata all'attività neuroendocrina delle ghiandole ottiche; agli stessi risultati sono giunti DURCHON e RICHARD [9] che in *Sepia officinalis*, mediante l'impiego di culture organotipiche hanno messo in evidenza l'impossibilità degli ovociti di raggiungere la vitellogenesi se nelle culture non era presente anche la ghiandola ottica funzionante.

Io stesso [10] alcuni anni fa ho voluto sperimentare l'azione del testosterone sulla gonade embrionale di *Sepia officinalis*, mettendo in evidenza che l'ormone androgeno dei Vertebrati non modifica la struttura del testicolo, ma agisce sull'ovario bloccando l'ovogenesi nella fase di passaggio fra il primo e il secondo periodo d'accrescimento ovocitario. L'idea di saggiare gli effetti degli ormoni steroidi dei Vertebrati sui Molluschi non è nuova; AUBRY [11] ha ottenuto risultati apprezzabili sperimentandoli sulla gonade ermafrodita di alcuni Gasteropodi Polmonati. D'altro canto LUPO DI PRISCO e Coll. [12] nell'Opistobranco *Aplysia depilans* e TESHIMA e Coll. [13] nel Lamellibranco *Tapes philippinarum* hanno dimostrato che il colesterolo può essere ulteriormente metabolizzato fino ad arrivare a composti steroidi non molto diversi da quelli noti per i Vertebrati.

È in base a questi ultimi risultati che l'attuale ricerca s'inserisce in questa linea di sperimentazione allo scopo di continuare, questa volta saggiando l'azione di altri ormoni o sostanze ormonosimili diversi dal testosterone sempre sulla gonade embrionale di *Sepia officinalis*.

MATERIALE E TECNICA

Il materiale su cui è stata condotta la presente ricerca consiste di tre gruppi di uova di *Sepia officinalis* che al XIV stadio di Naef ricevevano nel sacco vitellino, mediante microsiringa, il primo gruppo 0,02 ml di olio d'oliva contenente 40 μg di progesterone; il secondo gruppo 0,02 ml di olio d'oliva contenente 50 μg di DSD (dimetilstilbelstrolodiproprionato); il terzo gruppo, che doveva servire da controllo, la stessa quantità di solo olio d'oliva.

Le uova così trattate sono state poste in vaschette separate, tenute alla temperatura costante di 24 °C e gli animali schiusi sono stati allevati fino al decimo giorno di vita postembrionale nutrendoli

con forme larvali di *Artemia salina*. A questa data le seppioline sono state fissate in Bouin, incluse in paraffina e dopo il taglio al microtomo colorate con emallume-eosina.

Risultati e conclusioni

L'esame dei preparati istologici ottenuti da tutti e tre i gruppi in esperimento ha fornito i seguenti risultati:

a) In tutti i gruppi, l'aspetto microscopico a piccolo ingrandimento della gonade di *Sepia officinalis* permette di evidenziare immediatamente gli esemplari maschili da quelli femminili indipendentemente dalla presenza o meno delle ghiandole nidamentali. Infatti, la gonade maschile risulta più piccola della femminile e nelle sezioni trasversali assume una forma a semiluna evidenziando elementi germinali che permangono allo stadio di spermatogoni; la sua massa centrale connettivale manda pochi prolungamenti tra i goni e si presenta poco vascolarizzata (Fig. 1).

La gonade femminile, al contrario, si nota più grande e risulta cuoriforme; la sua massa centrale connettivale è più vascolarizzata e penetra più profondamente nella massa degli elementi germinali femminili (Fig. 2). Questi ultimi si trovano per la maggior parte allo stadio di ovociti di I ordine in primo periodo d'accrescimento. Frammisti a questi si possono osservare altri ovociti (in numero variabile a seconda che si tratti di animali trattati o no) all'inizio del secondo periodo di accrescimento (stadio previtellogenetico) che si possono definire col nome di auxociti. Gli ovogoni in riposo od in mitosi sono sempre molto scarsi.

b) Per quanto riguarda gli animali trattati con DSD e con progesterone, c'è da notare che di 96 esemplari trattati, sopravvissuti fino al decimo giorno, 47 erano femmine e 49 maschi, il che permette di affermare che il trattamento stesso non induce una mortalità differenziale fra maschi e femmine e non altera il normale rapporto sessi di 1 : 1.

c) L'esame istologico degli animali trattati ha messo in evidenza che sia il progesterone che il DSD non hanno alcun effetto sulla gonade maschile; i testicoli, infatti, si mostrano nella loro struttura identici quelli dei controlli.

La gonade femminile, al contrario, risente in modo evidente dell'azione sia del progesterone che del DSD. Infatti, mentre nei controlli il numero degli auxociti non superava in media la decina (6,6) per ovario, negli esemplari trattati con progesterone questi salivano in media ad una ventina (16,2) per ovario (Fig. 3-4), per arrivare

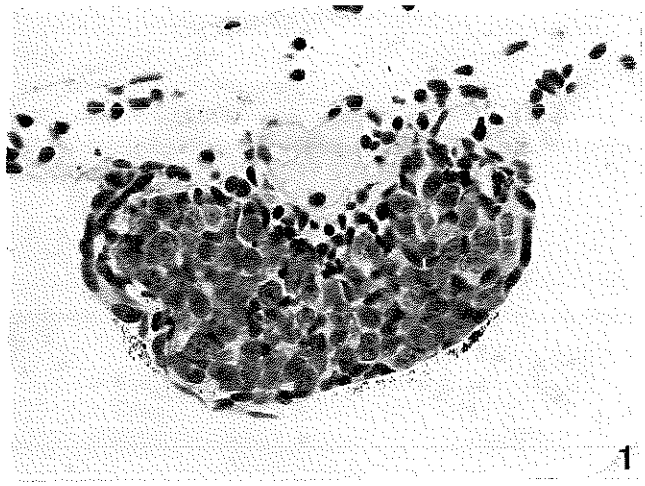


FIG. 1. - Testicolo di un esemplare di controllo, le cui cellule germinali sono allo stadio di spermatogoni. 350 x

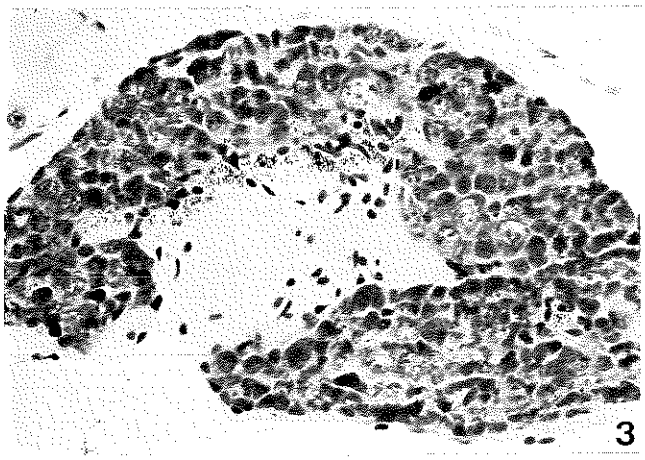
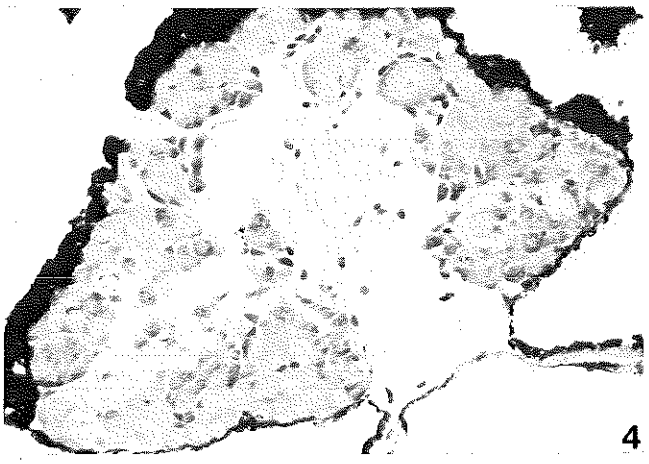


FIG. 3-4. - Ovari di esemplari trattati con progesterone. Si notano numerosi oviciti che hanno raggiunto l'auxocitosi. 350 x

FIG. 5-6. - Ovari di esemplari trattati con DSD. Si nota che gli ovociti che hanno raggiunto l'auxocitosi sono in numero maggiore. 150 x e 350 x.

FIG. 2. - Ovario di un esemplare di controllo con ovociti in stadi sinaptici alcuni dei quali hanno raggiunto l'auxocitosi; al centro ricca vascolarizzazione. 350 x



addirittura in media ad una trentina (25,5) per ovario negli animali trattati con DSD (Fig. 5-6). Infine, è stato messo in evidenza che tali auxociti presenti nelle gonadi degli animali trattati sono in media più voluminosi di quelli presenti nei controlli e che le ghiandole nidamentali non sembrano risentire affatto del trattamento ormonale.

Dai risultati così ottenuti si può concludere che, in armonia con quanto è stato riferito nella mia precedente indagine [10], gli ormoni steroidi sessuali dei Vertebrati, (alle dosi da me adoperate) non sono in grado di modificare il differenziamento sessuale maschile o femminile, della gonade nell'embrione di *Sepia officinalis*, ma soltanto di interferire con i processi di maturazione delle cellule germinali in essa contenute. Come il testosterone blocca nelle femmine i processi di ovogenesi, senza accelerare nel maschio quelli di spermatogenesi, così il progesterone e più ancora il DSD anticipano l'entrata in meiosi degli ovogoni, senza avere alcun effetto sulla gonade maschile. Sempre da questi risultati, almeno allo stato attuale delle nostre conoscenze sull'argomento, si può affermare che l'azione degli ormoni steroidi da me adoperati abbiano dato l'impressione di avere soltanto un'azione farmacologica che non influisce sulla fisiologia riproduttiva di questi Molluschi, ma che assomiglia a quella che gli stessi ormoni esplicano sulla gametogenesi di giovani gonadi di alcuni Anfibi.

BIBLIOGRAFIA

[1] FAUSSEK V., *Untersuchungen über die Entwicklung der Cephalopoden*, Mitth. a.d. Zool. Stat. zu Neapel, **14**, pp. 83-237 (1900).

[2] TEICHMANN E., *Die frühe Entwicklung der Cephalopoden*, Verh. deutsch. Zool. Gesell, **13**, pp. 42-52 (1903).

[3] DISTASO A., *Studi sull'embrione di Seppia*, Zool. Jb. Anat., **26**, pp. 565-650 (1908).

[4] MONTALENTI G. e VITAGLIANO G., *Osservazioni sul differenziamento dei sessi negli embrioni di* Sepia officinalis, Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim., **19**, pp. 80-81 (1944).

[5] MONTALENTI G. e VITAGLIANO G., *Ricerche sul differenziamento dei sessi negli embrioni di* Sepia officinalis, Pubbl. Staz. Zool. Napoli, **20**, pp. 1-18 (1946).

[6] NAEF A., *Die Cephalopoden*, Monogr. n. 35 della Fauna e Flora del Golfo di Napoli, parte I, vol. II.

[7] BOYCOTT B. B. e YOUNG J. Z., *The sub-pedunculate body and nerve and other organs associated with the optic tract of Cephalopods*, Zool. Jb. Anat., **77**, pp. 76-104 (1959).

[8] WELLS M. J. e WELLS J., *Hormonal control of sexual maturity in* Octopus, J. Exper. Biol., **36**, pp. 1-33 (1959).

[9] DURCHON M. e RICHARD A., *Étude en culture organotypique du rôle endocrine de la glande optique dans la maturation ovarienne chez* Sepia officinalis L. (*Mollusque Cephalopode*), C. R. Acad. Sci. Paris, **264**, pp. 1497-1500 (1967).

[10] GRASSO M. e DI GRANDE F., *Ricerche sul differenziamento sessuale nei cefalopodi. I. Azione del testosterone sulla gonade giovanile di* Sepia officinalis, Boll. Zool., **37**, pp. 193-197 (1970).

[11] AUBRY R., *Etude de l'hermaphroditisme et de l'action pharmacodynamique des hormones de Vertebrés chez les Gastéropodes Pulmonés,* Arch. Anat. Micr. Morph. Exp., **50**, pp. 521-602 (1961).

[12] LUPO DI PRISCO C., DESSY F., TOMMASUCCI M. e BASILE C., *Biosynthesis of cholesterol and steroid hormones in gonads and hepatopancreas of* Aplysia depilans, VI Congrs. Europ. D'Endocrin. Comp., 2-7 août 1971 Montepellier n. 129.

[13] TESHIMA S. J., KANAZAWA A. e ANDO T., *AC 26-Sterol in the clam,* Tapes Philippinarum, Comp. Bioch. Physiol., **41**, pp. 121-127 (1972).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Chieffi, B. De Lerma e V. Leone.

Alcuni contributi alla teoria degli spazi di Orlicz-Sobolev

Nota di GIULIANA PALMIERI (Bari)
presentata dal socio corrispondente ANTONIO AVANTAGGIATI

(Adunanza del 4 novembre 1978)

SUMMARY. — In this paper a necessary and sufficient condition for the complementary function to satisfy Δ_2-condition has been extended to general Young functions. Theorems are proved about the traces of functions belonging to Orlicz type spaces. By means of such theorems and some counterexamples the hypoteses introduced in a previous paper (by the same author) have been motivated. Finally an Hardy type inequality has been proved.

In una precedente nota, prendendo spunto da un lavoro di M. T. LACROIX, [4], e da alcuni lavori di J. L. LIONS, [5] e [6], abbiamo introdotto e studiato degli spazi di traccia del tipo di Orlicz, indicati con $T^k_{\nu,L_M(\Omega)}$ e $T^k_{\nu,E_M(\Omega)}$.

Abbiamo poi, in analogia a quanto fatto da E. GAGLIARDO in [1] e da J. L. LIONS in [6], introdotto degli spazi intermedi mediante norme di Orlicz di rapporti incrementali, $\tilde{T}^k_{\nu,L_M(\Omega)}$ e $\tilde{T}^k_{\nu,E_M(\Omega)}$, ed abbiamo provato che, sotto opportune ipotesi per M, ν, Ω, essi coincidono con i precedenti.

Le ipotesi fatte su M nella definizione degli spazi di traccia e nei teoremi sono automaticamente verificate per $M(t) = |t|^p/p$, $p > 1$, ed i risultati ottenuti coincidono in tal caso con quelli classici, ma le limitazioni introdotte sono solo condizioni sufficienti.

In questa nota ci proponiamo di illustrare e giustificare, principalmente con controesempi, le ipotesi che, in [7], intervengono nella definizione degli spazi di traccia e negli enunciati di alcuni teoremi, nonché nella seguente diseguaglianza del tipo di Hardy,

$$\left\| x^{\nu-1} \int_0^x f(s)\, ds \right\|_{M,(0,+\infty)} \leq \text{cost} \, \| x^\nu f \|_{M,(0,+\infty)}$$

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

che abbiamo utilizzato in un teorema di immersione. Proviamo inoltre un'altra diseguaglianza del tipo di Hardy, cioè

$$\left\| x^{\nu-1} \int_x^{+\infty} f(s)\, d\, s \right\|_{\mathrm{M},(0,+\infty)} \leq \mathrm{cost} \, \| x^{\nu} f \|_{\mathrm{M},(0,+\infty)}$$

che utilizzeremo in un prossimo lavoro.

Preliminarmente dimostriamo che una condizione necessaria e sufficiente affinché la complementare di una funzione di Young soddisfi la Δ_2-condizione, nota per funzioni di Young di classe C^1, vale in generale.

Richiameremo di volta in volta brevemente le definizioni e gli enunciati a cui ci riferiremo.

Utilizzeremo in seguito il seguente

TEOREMA 1. — *Se* M *ed* N *sono due funzioni di Young complementari, p e q le relative derivate destre, condizione necessaria e sufficiente affinché sia*

$$(1) \qquad \frac{t\, q(t)}{\mathrm{N}(t)} \leq \alpha \qquad \forall\, t > t_0 \geq 0 \qquad [\alpha > 1]$$

è che sia

$$(2) \qquad \frac{t\, p(t)}{\mathrm{M}(t)} \geq \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \alpha' \qquad \forall\, t > q(t_0) \geq 0$$

N.B. - Se p e q sono continue il risultato è già noto, vedi [3].

Dim. — Supponiamo che valga (1); dall'identità $\mathrm{N}(t) = t\, q(t) - \mathrm{M}(q(t))$, sostituendo nella disequazione (1), segue:

$$\frac{t\, q(t)}{\mathrm{M}(q(t))} \geq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \qquad \forall\, t > t_0\,,$$

ma $p(q(t)) \geq t$, quindi se $r = q(t)$

$$\frac{p(r)\, r}{\mathrm{M}(r)} \geq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \qquad \forall\, r \in q(]\, t_0, +\infty[)\,.$$

Se $r > q(t_0)$ e $r \notin q(]\, t_0, +\infty[)$ esiste $\bar{t}$ tale che $q(\bar{t}^-) \leq r \leq q(\bar{t})$;

per definizione di funzione complementare $p(r) = \sup_{q(t) \leqslant r} t$, quindi

$$p(r) = \bar{t} \quad \text{per} \quad q(\bar{t}^-) \leq r \leq q(\bar{t}).$$

Poniamo $q(\bar{t}^-) = r_1$, $q(\bar{t}) = r_2$; dalla relazione precedente segue che:

$$M(r) = \mathrm{M}(r_1) + p(r_1)(r - r_1) \quad \forall\, r \in [r_1, r_2]$$

e quindi, $\forall\, r \in [r_1, r_2]$,

$$\frac{r\,p(r)}{\mathrm{M}(r)} = \frac{r\,p(r)}{\mathrm{M}(r_1) + p(r_1)(r - r_1)} \geq \frac{r_2 p(r_1)}{\mathrm{M}(r_1) + p(r_1)(r_2 - r_1)} \geq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Ne segue la (2).

Supponiamo ora che sia verificata la (2); utilizzando come sopra l'identità $\mathrm{M}(t) = t\,p(t) - \mathrm{N}(p(t))$, otteniamo:

$$\frac{t\,p(t)}{\mathrm{N}(p(t))} \leq \alpha \qquad \forall\, t > q(t_0).$$

Sia $t = q(r) > q(t_0)$, poniamo $t_\varepsilon = q(r) - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ tale che $t_\varepsilon > q(t_0)$: per la definizione di funzione complementare $p(q(r) - \varepsilon) < r$ $\forall\, \varepsilon > 0$, inoltre la funzione $\mathrm{N}(t)/t$ è strettamente crescente per $t > 0$, allora:

$$\alpha \geq \frac{[q(r) - \varepsilon]\, p(q(r) - \varepsilon)}{\mathrm{N}(p(q(r) - \varepsilon))} > \frac{[q(r) - \varepsilon]\, r}{\mathrm{N}(r)}.$$

Per l'arbitrarietà di ε ne segue la (2).

Osserviamo che se è verificata la (1) allora:

(3) $$\mathrm{N}(r\,t) \leq r^{\alpha}\,\mathrm{N}(t) \qquad \forall\, r > 1,\ \forall\, t > t_0$$

e se è verificata la (2) si ha:

(4) $$\mathrm{M}(r\,t) \geq r^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}\,\mathrm{M}(t) \qquad \forall\, r > 1,\ \forall\, t > q(t_0).$$

N.B. - Diremo che una funzione di Young N verifica la (1) con costante α per indicare che $\sup_{t \geqslant t_0} \frac{t\,q(t)}{\mathrm{N}(t)} = \alpha < +\infty$
Analogo modo di dire useremo per la (2).

Questa proposizione dà una condizione necessaria e sufficiente affinché la complementare $\mathrm{N}\,[= \bar{\mathrm{M}}]$ di una funzione di Young M ve-

rifichi la Δ_2-condizione, cioè affinché esistano due costanti positive K e t_o tali che

$$N(2t) \leq K N(t) \qquad \forall t > t_o . \tag{5}$$

Infatti, come è noto, vedi [3], condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione di Young N verifichi la Δ_2-condizione è che valga la (1).

Ricordiamo che se la (5) è verificata con $t_o = 0$ si dice che N soddisfa la Δ_2-condizione globale.

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $Q =]0,1[\times \Omega$, ν un numero reale, K un intero non negativo, indichiamo con $W^{k+1}_{\nu,L_M(Q)}$ o $W^{k+1}_{\nu,E_M(Q)}$ gli spazi anisotropi formati dalle funzioni f definite su Q, ivi misurabili e tali che $t^\nu D_x^\gamma f(t,x)$, $t^\nu D_x^{\gamma'} D_t f(t,x)$ appartengano, rispettivamente, ad $L_M(Q)$ o $E_M(Q)$, $\forall \gamma \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\gamma| \leq k+1$ e $\forall \gamma' \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\gamma'| \leq k$, dove D_x e D_t indicano derivate nel senso delle distribuzioni. Tali spazi, muniti della norma:

$$\| f \|_{W^{k+1}_{\nu,L_M(Q)}} = \max \{ \sum_{|\gamma| \leq k+1} \| t^\nu D_x^\gamma f \|_{M,Q} , \sum_{|\gamma'| \leq k} \| t^\nu D_x^{\gamma'} D_t f \|_{M,Q} \}$$

sono di Banach.

Osserviamo che se $M(t) = |t|^p/p$, $p > 1$, allora

$$W^{k+1}_{\nu,L_M(Q)} = \{ f : t^\nu f \in L^p(0,1; W^{k+1,p}(\Omega)), t^\nu D_t f \in L^p(0,1; W^{k,p}(\Omega)) \}$$

Gli spazi di traccia $T^k_{\nu,L_M(\Omega)}$ o $T^k_{\nu,E_M(\Omega)}$ sono definiti a partire da $W^{k+1}_{\nu,L_M(Q)}$ o $W^{k+1}_{\nu,E_M(Q)}$ come gli spazi formati da tutte le tracce su Ω delle funzioni ad essi appartenenti. La richiesta spontanea è che tali spazi siano contenuti, rispettivamente, in $W^k L_M(\Omega)$ o $W^k E_M(\Omega)$; questo è sempre vero se $\nu \leq 0$ ed è vero se la funzione di Young $N = \bar{M}$ verifica la (1) con costante α, $t_o = 0$ ed è $\nu < 1/\alpha$.

Se $M(t) = |t|^p/p$, $p > 1$, allora è $\alpha = q$, $t_o = 0$ e l'ipotesi $\nu < 1/q = 1 - 1/p$ è quella abituale.

Non è vero in generale che, se $\nu > 0$, da $f \in W^{k+1}_{\nu,L_M(Q)}$ o $f \in W^{k+1}_{\nu,E_M(Q)}$, posto $u(x) = f(0,x)$, segua $u \in W^k L_M(Q)$ o $u \in W^k E_M(Q)$, vale infatti il seguente:

TEOREMA 2. — *Se* $M(t) \leq c\, t^\beta \; \forall t > t_o \; [\beta > 1]$ *e* $\nu > 1 - 1/\beta$ *o in generale se* $\nu \geq 1$, *esistono funzioni appartenenti a* $W^{k+1}_{\nu,E_M(Q)}$ *tali che* $u(x) = f(0,x)$ *non appartenga a* $W^k E_M(\Omega)$ *nè a* $W^k L_M(\Omega)$.

Dim. — Sia $u \in C_0^{k+1}(\Omega)$ tale che $|D_x^\gamma u| \leq 1 \ \forall \gamma \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\gamma| \leq k+1$ e poniamo $f(t,x) = u(x) \log t$; si ha $f \in W^{k+1}_{\nu, E_M(Q)}$ se $\nu > 1 - 1/\beta$, infatti $|t^\nu D_x^\gamma f| \leq 1/(\nu e) |D_x^\gamma u| \leq 1/(\nu e)$ inoltre mis $(\text{supp } u) < +\infty$, quindi $t^\nu D_x^\gamma f \in E_M(Q) \ \forall \gamma \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\gamma| \leq k+1$. Poiché $|t^\nu D_t D_x^{\gamma'} f| = |t^{\nu-1} D_x^{\gamma'} u| \leq t^{\nu-1} \ \forall \gamma' \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\gamma'| \leq k$, se $\nu \geq 1$ allora $|t^\nu D_t D_x^{\gamma'} f| \leq 1$; se $\nu < 1$, posto $\delta = (t_0/\lambda)^{1/\nu - 1}$, $\forall \lambda > 0$, si ha:

$$\int_0^1 dt \int_\Omega M(\lambda t^\nu D_t D_x^{\gamma'} f)\, dx \leq \int_0^1 dt \int_{\text{supp } u} M(\lambda t^{\nu-1})\, dx \leq$$

$$\leq \text{mis}(\text{supp } u) \left\{ \int_0^\delta C \lambda^\beta t^{(\nu-1)\beta}\, dt + \int_\delta^1 M(\delta^{\nu-1})\, dt \right\} < +\infty$$

se $\nu > 1 - 1/\beta$, quindi anche $t^\nu D_t D_x^{\gamma'} f \in E_M(Q) \ \forall \gamma' \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\gamma'| \leq k$, mentre chiaramente $f(0,x)$ non è definita.

Osserviamo che l'ipotesi su M fatta in questa proposizione è sicuramente verificata se M soddisfa la (1) con costante β.

COROLLARIO 3. — *Posto* $\bar\beta = \inf\{\beta : \overline{\lim_{t \to +\infty}} M(t) t^{-\beta} < +\infty\}$ *se* $\nu > 1 - 1/\bar\beta$ *allora l'insieme delle tracce su* Ω *delle funzioni appartenenti a* $W^{k+1}_{\nu, E_M(Q)}$ *non è contenuto in* $W^k E_M(\Omega)$ *nè in* $W^k L_M(\Omega)$.

In particolare perciò se $M(t) = |t|^p \log(1 + |t|)$, $p \geq 1$, l'insieme delle tracce su Ω delle funzioni appartenenti a $W^{k+1}_{\nu, L_M(Q)}$ $[= W^{k+1}_{\nu, E_M(Q)}]$ è contenuto in $W^k L_M(\Omega)$ se $\nu < 1 - 1/p$ [se $\nu \leq 0$ per $p = 1$], mentre se $\nu > 1 - 1/p$ [se $\nu > 0$ per $p = 1$] non è contenuto in $W^k L_M(\Omega)$. Non sappiamo dire niente per $\nu = 1 - 1/p$ se $p \neq 1$.

Abbiamo dimostrato, in [7], che

$$W^{k+1} L_M(\Omega) \hookrightarrow T^k_{\nu, L_M(\Omega)} \quad \text{e} \quad W^{k+1} E_M(\Omega) \hookrightarrow T^k_{\nu, E_M(\Omega)}$$

se $\nu \geq 0$ ed anche se M verifica la (1) con costante β per $t_0 = 0$ e $-1/\beta < \nu \leq 0$. Se $M(t) = |t|^p/p$, $p > 1$, allora è $\beta = p$ e l'ipotesi $\nu > -1/p$ è quella abituale.

La restrizione fatta su M per $\nu < 0$ dipende dal fatto che se M cresce «velocemente» e ν è «abbastanza piccolo» da $f \in W^1_{\nu, L_M(Q)}$ segue $u(x) = f(0,x) = 0$ q.o. in Ω, quindi l'unica funzione di $W^{k+1} L_M(\Omega)$

o $W^{k+1} E_M(\Omega)$ appartenente a $T^k_{\nu,E_M(\Omega)}$ è la funzione nulla. Più precisamente vale il seguente

TEOREMA 4. — *Se* $M(t) \geq C\, t^{\alpha'}$ $[\alpha' > 1]$ $\forall\, t > t_o$ *e* $\nu \leq -1/\alpha'$, *o in generale se* $\nu \leq -1$, *allora la traccia su* Ω *di ogni funzione appartenente a* $W^1_{\nu,L_M(Q)}$ *è q.o. nulla.*

Dim. — Procediamo per assurdo. Sia $f \in W^1_{\nu,L_M(Q)}$ e $f(0,x) \neq 0$ in un insieme di misura positiva, allora per qualche $\sigma > 0$ $|f(0,x)| > \sigma$ $\forall\, x \in \Omega_1 \subset \Omega$ con $\mathrm{mis}(\Omega_1) > 0$.

Dato che $f \in W^1_{\nu,L_M(Q)}$ e $\nu < 0$ allora $f \in C^o(0,1; L_M(\Omega))$, (vedi [7]), quindi per il teorema di Egoroff-Severini esiste $\delta > 0$ tale che $|f(t,x)| > \sigma/2$ per $(0 <) t < \delta$ e $\forall\, x \in \Omega_2 \subset \Omega_1$ con $\mathrm{mis}(\Omega_2) > 0$.

Ne segue che $\forall\, \lambda > 0$, posto $\delta' = \min\{\delta, (2\,t_o)/(\sigma\,\lambda)^{1/\nu}\}$

$$\int_o^1 d\,t \int_\Omega M(\lambda\, t^\nu f(t,x))\, d\,x > \int_o^{\delta'} d\,t \int_{\Omega_2} M(\lambda\, t^\nu\, \sigma/2)\, d\,x \geq$$

$$\geq C \left(\frac{\lambda\,\sigma}{2}\right)^{\alpha'} \int_o^{\delta'} t^{\nu\alpha'}\, d\,t \int_{\Omega_2} d\,x = +\infty \qquad \text{per } \nu \leq -1/\alpha';$$

in generale $M(\lambda\, t^\nu\, \sigma/2) \geq t^\nu\, M(\lambda\,\sigma/2)$ e quindi

$$\int_o^1 d\,t \int_\Omega M(\lambda\, t^\nu f(t,x))\, d\,x = +\infty \quad \text{per} \quad \nu \leq -1,$$

in entrambi i casi abbiamo ottenuto un risultato che contraddice l'ipotesi $f \in W^1_{\nu,L_M(Q)}$. Dovrà perciò essere $f(0,x) = 0$ q.o.

Osserviamo che l'ipotesi fatta nel teorema precedente su M è sicuramente soddisfatta se M verifica la (2).

COROLLARIO 5. — *Posto* $\bar\alpha = \sup\{\alpha' : \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, M(t)\, t^{-\alpha'} > 0\}$, *se* $\nu < -1/\bar\alpha$ $[\nu < 0$ *se è* $\bar\alpha = +\infty]$ *allora la traccia su* Ω *di una funzione appartenente a* $W^k_{\nu,L_M(Q)}$ *è q.o. nulla.*

Indichiamo con $\tilde T^k_{\nu,L_M(\Omega)}$ o $\tilde T^k_{\nu,E_M(\Omega)}$ gli spazi formati dalle funzioni u appartenenti a $W^k L_M(\Omega)$ o $W^k E_M(\Omega)$ tali che $\forall\, \gamma \in \mathbb{N}^n$, $|\gamma| = k$,

detta χ_Ω la funzione caratteristica di Ω, $\Delta^\gamma_{i,\nu} = t^{\nu-1}[D^\gamma u(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - D^\gamma u(x_1, \ldots, x_n)]\chi_\Omega(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n)$ appartengano, rispettivamente, ad $L_M(Q)$ o $E_M(Q)$ per $i = 1, \ldots, n$. Tali spazi muniti della norma

$$\| u \|_{\bar{T}^k_{\nu, L_M(\Omega)}} = \| u \|_{W^k L_M(\Omega)} + \sum_{|\gamma|=k} \sum_{i=1}^{n} \| \Delta^\gamma_{i,\nu} u \|_{M,Q}$$

sono di Banach.

Se Ω è un aperto [limitato] con frontiera dotata della $C^{k,1}$-regolarità uniforme [di classe $C^{k,1}$], $N = \bar{M}$ verifica la (1) con costante α per $t_0 = 0$ ed è $0 \leq \nu < 1/\alpha$, oppure se M verifica la (1) con costante β per $t_0 = 0$ ed è $-1/\beta < \nu < 0$, allora

$$\bar{T}^k_{\nu, L_M(\Omega)} = T^k_{\nu, L_M(\Omega)}, \quad \bar{T}^k_{\nu, E_M(\Omega)} = T^k_{\nu, E_M(\Omega)}. \tag{6}$$

Per dimostrare questo risultato ci siamo valsi della seguente diseguaglianza del tipo di Hardy, vedi [7]: sia f definita e misurabile in $]0, a[$, $a \in]0, +\infty]$, tale che $x^\nu f \in L_M(0, a)$ e sia $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds$; se $N = \bar{M}$ verifica la (1) con costante α per $t_0 = 0$, allora

$$\| x^\nu g \|^*_{M,(0,a)} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha\nu} \| x^\nu f \|^*_{M,(0,a)} \qquad \forall \nu < 1/\alpha \tag{7}$$

dove con $\| \cdot \|^*_M$ abbiamo indicato la norma di Orlicz.

Se $\nu < 0$ il risultato vale in generale pur di sostituire $\alpha/(1 - \alpha\nu)$ con $-1/\nu$.

Se $M(t) = |t|^p/p$, $p > 1$, allora $\alpha = p/(p-1)$ e la (7) diventa la classica disuguaglianza di Hardy, vedi [2].

Una disuguglianza di questo tipo non vale in generale se $\nu \geq 0$. Vediamolo con un esempio.

ESEMPIO 1:

Siano $M(t) = |t| \log(1 + |t|)$, $a = e^{-1}$, $f(x) = \frac{1}{x \log^3 x}$; allora $f \in L_M(0, e^{-1})$ mentre se è $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds$, $g \notin L_M(0, e^{-1})$. Osserviamo dapprima che M verifica la Δ_2-condizione quindi $L_M = E_M$.

$$\int_0^{e^{-1}} \mathrm{M}\,(f(x))\,dx = \int_0^{e^{-1}} -\frac{1}{x\log^3 x}\log\left(1-\frac{1}{x\log^3 x}\right)dx <$$

$$< \int_0^{e^{-1}} \left\{-\frac{\log(1+27\,e^{-3})}{x\log^3 x} + \frac{1}{x\log^2 x}\right\}dx < +\infty$$

quindi $f \in \mathrm{L_M}(0, e^{-1})$. Risulta $g(x) = \dfrac{-1}{2\,x\log^2 x}$ e

$$\int_0^{e^{-1}} \mathrm{M}\,(2\,g(x))\,dx = \int_0^{e^{-1}} \frac{1}{x\log^2 x}\log\left(1+\frac{1}{x\log^2 x}\right)dx >$$

$$> -\int_0^{e^{-1}} \frac{\log\sqrt[4]{x}}{x\log^2 x}\,dx = +\infty$$

perciò $g \notin \mathrm{L_M}(0, e^{-1})$.

Se $a < +\infty$ ed $\mathrm{N} = \bar{\mathrm{M}}$ verifica la (1), la (7) continua a valere pur di moltiplicare la costante per $a\,\mathrm{N}(t_0) + 1$, mentre se $a = +\infty$ ed $\mathrm{N} = \bar{\mathrm{M}}$ soddisfa la (1) con $t_0 > 0$ non è detto che valga una diseguaglianza del tipo (7). Vediamolo con un esempio.

ESEMPIO 2:

Siano

$$\mathrm{M}(t) = \begin{cases} -\dfrac{|t|}{\log|t|} & \text{per} \quad |t| < e^{-1} \\ e^{-1} + t^2 - e^{-2} & \text{per} \quad |t| \geq e^{-1} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \leq 0,\ x > 2 \\ x & \text{per} \quad 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{per} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

chiaramente $f \in \mathrm{L_M}(0, +\infty)$; $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(s)\,ds = \frac{1}{x}$ per $x \geq 2$, allo-

ra, posto $a = \max\{\lambda e, 2\}$, $\forall \lambda > 0$:

$$\int_0^{+\infty} M(\lambda g(x))\, dx \geq \int_a^{+\infty} M(\lambda g(x))\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda}{x \log(x/\lambda)}\, dx = +\infty$$

ne segue che $g \notin L_M(0, +\infty)$.

Abbiamo utilizzato, in [7], la diseguaglianza (7) per dimostrare che

$$(8) \qquad T_{\nu, L_M(\Omega)} \hookrightarrow \tilde{T}_{\nu, L_M(\Omega)} \quad \text{e} \quad T_{\nu, E_M(\Omega)} \hookrightarrow \tilde{T}_{\nu, E_M(\Omega)} ,$$

quindi per $\nu \geq 0$ abbiamo dovuto fare su M e ν le ipotesi restrittive che $N = \bar{M}$ verifichi la (1) per $t_0 = 0$ con costante α e che sia $\nu < 1/\alpha$. Naturalmente, per $\nu \geq 0$, le stesse ipotesi su M e ν sono state necessarie per ottenere le (6). Tali ipotesi non sono solamente dovute alla tecnica di dimostrazione, infatti si può vedere che le (8), e quindi le (6), non valgono in generale.

ESEMPIO 3:

Siano

$$M(t) = |t| \log(1 + |t|), \quad \Omega =]0,\ e^{-3}[,$$

$$Q =]0, e^{-3}[\times]0, e^{-3}[\quad \text{ed} \quad f(t, x) = \frac{1}{(x^2 + t^2)^{1/2} \log^3 (x^2 + t^2)^{1/2}} .$$

Si ha:

$$\int_Q M(f(t, x))\, dt\, dx \leq \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}e^{-3}} -\frac{1}{\log^3 \rho} \log\left(1 - \frac{1}{\rho \log^3 \rho}\right) d\rho < +\infty ,$$

$$f_x = -x \frac{\log (x^2 + t^2)^{1/2} + 3}{(x^2 + t^2)^{3/2} \log^4 (x^2 + t^2)^{1/2}} , \quad f_t = -t \frac{\log (x^2 + t^2)^{1/2} + 3}{(x^2 + t^2)^{3/2} \log^4 (x^2 + t^2)^{1/2}} .$$

Indichiamo con $S_1(0, e^{-3})$ la parte di cerchio di centro 0 e raggio e^{-3} contenuta nel primo quadrante del piano (t, x):

$$\int_Q M(f_x(t, x))\, dt\, dx = \int_{S_1(0, e^{-3})} M(f_x(t, x))\, dt\, dx + \int_{Q \setminus S_1(0, e^{-3})} M(f_x(t, x))\, dt\, dx$$

ma $f_x \in C^0(Q\backslash S_1) \cap L^\infty(Q\backslash S_1)$ quindi

$$\int_{Q\backslash S_1(0,e^{-3})} M(f_x(t,x))\, d\,t\, d\,x < +\infty .$$

Resta da valutare

$$I = \int_{S_1(0,e^{-3})} M(f_x(t,x))\, d\,t\, d\,x =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\,\vartheta \int_0^{e^{-3}} \left\{ -\cos\vartheta \frac{\log\rho + 3}{\rho \log^4 \rho} \log\left(1 - \frac{\cos\vartheta(\log\rho + 3)}{\rho^2 \log^4 \rho}\right)\right\} d\,\rho$$

ma

$$\log\left(1 - \frac{\cos\vartheta(\log\rho + 3)}{\rho^2 \log^4 \rho}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{\rho^2 \log^2 \rho}\right) <$$

$$< \log(1 + 9\,e^{-6}) - \log\rho^2$$

allora

$$I < \int_0^{\pi/2} d\,\vartheta \int_0^{e^{-3}} -\cos\vartheta \frac{\log\rho + 3}{\rho \log^4 \rho} \{\log(1 + 9\,e^{-6}) - 2\,\log\rho\}\, d\,\rho < +\infty$$

quindi $f_x \in L_M(Q)$ e chiaramente $f_t \in L_M(Q)$.

Concludendo $f \in W^1 L_M(Q)$ *e* $u(x) = f(0,x) = \dfrac{1}{x \log^3 x}$ appartiene a $T_{o,L_M(0,e^{-3})}$.

Vediamo ora che $u \notin \tilde{T}_{o,L_M(0,e^{-3})}$.

Applicando il teorema di Lagrange e tenendo presente che $x, t > 0$ e $x + t < e^{-3}$, si ha

$$\frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{(x+t)\log^3(x+t)} - \frac{1}{x \log^3 x}\right\} >$$

$$> -\frac{\log(x+t) + 3}{(x+t)^2 \log^4(x+t)} > 0$$

ne segue

$$\log\left(1 + \left|\frac{u(x+t) - u(x)}{t}\right|\right) >$$

$$> \log((x+t)^2 \log^4(x+t) - \log(x+t) - 3) - \log(x+t)^{1/4}$$

e quindi

$$\int_Q \mathrm{M}\left(\frac{u(x+t)-u(x)}{t}\right)\chi_{(0,e^{-3})}(x+t)\,dt\,dx \geq$$

$$\geq \int_Q \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{(x+t)\log^3(x+t)} - \frac{1}{x\log^3 x}\right\}\{\log((x+t)^2\log^4(x+t) -$$

$$-\log(x+t)-3) - \log(x+t)^{1/4}\}\chi_{(0,e^{-3})}(x+t)\,dt\,dx\,.$$

Consideriamo innanzitutto

$$I_1 = \int_Q - \left\{\frac{1}{(x+t)\log^3(x+t)} - \frac{1}{x\log^3 x}\right\}\frac{\log(x+t)}{t}\chi_{(0,e^{-3})}(x+t)dtdx$$

per $(x+t) < e^{-3}$ si ha:

$$\frac{(x+t)\log^3(x+t) - x\log^3 x}{t} < \log^2(x+t)\,[\log(x+t)+3],$$

quindi

$$\frac{(x+t)\log^3(x+t) - x\log^3 x}{t}\,\frac{\log(x+t)}{x(x+t)\log^3 x\log^3(x+t)} >$$

$$> \frac{\log(x+t)+3}{x(x+t)\log^3 x}$$

allora

$$I_1 > \int_Q \frac{\log(x+t)+3}{x(x+t)\log^3 x}\chi_{(0,e^{-3})}(x+t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_0^{e^{-3}} dx \int_0^{e^{-3}-x} \frac{\log(x+t)+3}{x(x+t)\log^3 x}\,dt = +\infty$$

Inoltre se è $(x+t) < e^{-4}$ allora $\log[(x+t)^2\log^4(x+t) -$ $-\log(x+t)-3] > 0$ e per $e^{-4} < (x+t) < e^{-3}$ l'integrando si mantiene limitato, concludendo

$$\int_Q \mathrm{M}\left(\frac{u(x+t)-u(x)}{t}\right)\chi_{(0,e^{-3})}(x+t)\,dt\,dx = +\infty$$

Dato che M soddisfa la Δ_2-condizione, si ottiene che

$$\frac{u(x+t)-u(x)}{t}\,\chi_{(0,e^{-3})}(x+t)$$

non appartiene ad $L_M(Q)$. Ne segue che $u \notin \bar{T}_{0,L_M(0,e^{-3})}$.

Questo esempio mostra che le (6) non valgono in generale per $\nu = 0$, se poi è $\nu > 0$ le ipotesi su M e ν sono proprio quelle che compaiono nella definizione degli spazi di traccia e che sono giustificate dal colorrario 3. È immediato vedere che le (6) non valgono in generale neppure per $\nu < 0$. Basta considerare una funzione di Young $M(t)$ che, per $t \to +\infty$, sia infinita di ordine superiore a qualsiasi potenza reale di t e supporre che mis $(\Omega) < +\infty$, allora le funzioni costanti appartengono a $\bar{T}^k_{\nu,L_M(\Omega)}$ mentre dal corollario 5 segue che l'unica funzione appartenente a $T^k_{\nu,L_M(\Omega)}$ è quella nulla.

Proviamo ora un'altra disuguaglianza del tipo di Hardy, che utilizzeremo in un prossimo lavoro.

TEOREMA 6. — *Se la funzione di Young* M *verifica la* (1) *con costante* β *per* $t_0 = 0$ *ed è* $\nu > 1 - 1/\beta$ *allora da* $x^\nu f \in L_M(0,a)$, $a \in]0, +\infty]$, *segue* $x^\nu g \in L_M(0,a)$ *dove* $g(x) = \frac{1}{x}\int_x^a f(s)\,ds$, *inoltre indicata con* $\|\cdot\|^*_M$ *la norma di Orlicz, si ha*:

$$\|x^\nu g\|^*_{M,(0,a)} \leq \frac{\beta}{\nu\beta - \beta + 1}\,\|x^\nu f\|^*_{M,(0,a)} \qquad \forall\,\nu > 1 - 1/\beta. \tag{9}$$

Se $\nu > 1$ la (9) vale per qualsiasi funzione di Young M con $1/(\nu - 1)$ in luogo di $\beta/(\nu\beta - \beta + 1)$.

Dim. — Sia $v \in L_N(0,a)$, $N = \bar{M}$, tale che $\rho(v, N) \leq 1$; per la disuguaglianza di Hölder

$$\left|\int_0^a v(x)\,x^{\nu-1}\,dx\int_x^a f(s)\,ds\right| = \left|\int_0^a f(s)\,ds\int_0^s x^{\nu-1}\,v(x)\,dx\right| = \tag{10}$$

$$= \left| \int_0^a s^\nu f(s)\, ds \int_0^1 y^{\nu-1} v(sy)\, dy \right| = \left| \int_0^1 y^{\nu-1}\, dy \int_0^a s^\nu f(s)\, v(sy)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 y^{\nu-1} \| s^\nu f \|^*_{M,(0,a)} \| v(y\cdot) \|_{N,(0,a)}\, dy .$$

Per il teorema 1 $N = \bar{M}$ verifica la (2) con costante $\beta/(\beta - 1)$ per $t_0 = 0$ e quindi

$$N(k t) \leq k^{\beta/(\beta-1)} N(t) \quad \text{se} \quad 0 < k < 1, \forall t > 0;$$

ne segue che per $\lambda = y^{1-1/\beta}$ [≤ 1 visto che $y \leq 1$]

$$\int_0^a N(\lambda v(s y))\, ds = \int_0^{ay} N(\lambda v(x)) \frac{dx}{y} \leq \int_0^a N(v(x) y^{1-1/\beta}) \frac{dx}{y} \leq 1$$

allora $\| v(y\cdot) \|_{N,(0,a)} \leq y^{-1+1/\beta}$. Da questa diseguaglianza e dalla (10) segue che, per $\nu > 1 - 1/\beta$,

$$\| x^\nu g \|^*_{M,(0,a)} = \sup_{\rho(v,N)\leq 1} \left| \int_0^a v(x)\, x^{\nu-1}\, dx \int_x^a f(s)\, ds \right| \leq \| x^\nu f \|^*_{M,(0,a)} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 y^{\nu-2+1/\beta}\, dy = \frac{\beta}{\nu\beta - \beta + 1} \| x^\nu f \|^*_{M,(0,a)}$$

In generale si può dire solo che $\| v(y\cdot) \|_{N,(0,a)} \leq y^{-1}$, pertanto solo per $\nu > 1$ siamo sicuri che

$$\| x^\nu g \|^*_{M,(0,a)} \leq \frac{1}{\nu - 1} \| x^\nu f \|^*_{M,(0,a)}$$

Se è $M(t) = |t|^p/p$, $p > 1$, allora $\beta = p$ e la (9) coincide con disuguaglianza classica, vedi [2].

Mostriamo con un esempio che in generale non vale una disuguaglianza del tipo (9) neppure per $\nu = 1$.

ESEMPIO 4:

Siano $M(t) = e^{|t|} - |t| - 1$, $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$; è facile verificare che $xf \in L_M(0,1)$, mentre $xg(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\log s}{s}\, ds = -\frac{1}{2}\log^2 x$ non appartiene ad $L_M(0,1)$; infatti $e^{\lambda 2^{-1}\log^2 x} > 1/x$ per $x < e^{-2/\lambda}$, quindi $\forall\, \lambda > 0$

$$\int_0^1 M(\lambda x g(x))\, dx = \int_0^1 \{e^{\lambda 2^{-1}\log^2 x} - \lambda 2^{-1}\log^2 x - 1\}\, dx = +\infty.$$

Le $a < +\infty$ nel teorema precedente basta fare l'ipotesi che M verifichi la (1) [la costante nella (9) dovrà essere moltiplicata per $a\,N(t_0) + 1$], mentre se $a = +\infty$ questo non è più vero; infatti se M verifica la (1) solo per $t_0 > 0$ da $xf \in L_{M,(0,+\infty)}$ non segue $f \in L^1(x, +\infty)$, $x > 0$. Vediamolo con un esempio.

ESEMPIO 5:

Sia

$$M(t) = \begin{cases} |t|\, e^{-1/|t|} & \text{per } |t| < 1 \\ e^{-1}\, t^2 & \text{per } |t| \geq 1 \end{cases}$$

chiaramente M verifica la (1) con $\beta = 2$ per $t_0 = 1$, mentre non la verifica per $t_0 = 0$. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1} & \text{per } 0 \leq x < e \\ \dfrac{1}{x \log x} & \text{per } \quad x \geq e \end{cases}$$

e scegliamo $\nu = 1$. Verifichiamo che $xf \in L_M(0, +\infty)$: osserviamo che $0 < \lambda x f(x) < 1$ se $0 < \lambda < 1$, quindi

$$\int_0^{+\infty} M(\lambda x f(x))\, dx = \int_0^e \frac{\lambda x}{e}\, e^{-e/\lambda x}\, dx + \int_e^{+\infty} \frac{\lambda}{\log x}\, e^{-\log x/\lambda}\, dx < +\infty$$

se $0 < \lambda < 1$, mentre $f \notin L^1(x, +\infty)$.

OSSERVAZIONE. Si può dimostrare che la (9) è verificata se e solo se $N = \bar{M}$ e ν sono tali che valga la (7) in L_N con $1 - \nu$ in luogo di ν.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. GAGLIARDO, *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ Padova, **27**, 284-305 (1957).
[2] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. POLYA, *Inequalities*, Univ. of Cambridge, 1952.
[3] M. A. KRASNOSEL'SKII and JA. B. RUTICKII, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1961.
[4] M. T. LACROIX, *Espaces d'interpolation et de traces des espaces de Sobolev-Orlicz d'ordre I*, C. R. Acad. Sc. Paris, t 280 (3 février 1975) A 271 - A 274.
[5] J. L. LIONS, *Sur les espaces d'interpolation; dualité*, Math. Scand., **9**, 147-177 (1961).
[6] J. L. LIONS, *Théorèms de trace e d'interpolation* (IV), Math. Ann., **151**, 42-56 (1963).
[7] G. PALMIERI, *Un approccio alla teoria degli spazi di traccia relativi agli spazi di Orlicz-Sobolev*, B.U.M.I. (5) 16-B (1979).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Avvantaggiati, G. Scorza Dragoni e C. Miranda.

Complessi pentacoordinati olefinici del Pt (II) con una etilendiammina sostituita: aspetti strutturali e stereochimici *

Nota di MICHELANGELO SCALONE **, CARLO PEDONE **
e ACHILLE PANUNZI **
presentata dal socio ordinario PAOLO CORRADINI

(Adunanza del 4 novembre 1978)

SUMMARY. — Data on the structure and stereochemistry of the five-coordinate complexes of the type $[PtCl_2\{CH_3(C_6H_5)CHN(CH_3)CH_2\}_2(\eta\text{-olefin})]$ are reported. Only one absolute configuration is achieved by the prochiral nitrogen atoms of the diamine, upon coordination. After crystallization of the complexes of prochiral olefins (propene, (E)-CN−CH=CH−CN) NMR spectra show that one enantiomeric face of these ligands is mostly or totally coordinated.

The crystal structure of the ethylene complex has been elucidated by X-ray structural analysis.

RIASSUNTO. — Si riportano dati sulla struttura e sulla stereochimica di complessi pentacoordinati di tipo $[PtCl_2\{CH_3(C_6H_5)CHN(CH_3)CH_2\}_2(\eta\text{-olefina})]$. Per gli atomi di azoto prochirali della diammina si riscontra una sola configurazione assoluta all'atto della coordinazione. Gli spettri NMR mostrano che, dopo cristallizzazione, nei complessi di olefine prochirali (propene, (E)-CN−CH=CH−CN), è coordinata, del tutto o in buona parte, una sola faccia enantiomerica di questi leganti.

È stata risolta la struttura cristallina del complesso etilenico con analisi strutturale ai raggi X.

Il numero di coordinazione 5 è in generale da considerarsi poco frequente nell'ambito dei complessi stabili dei metalli di transizione, ed in particolare si conoscono ben pochi complessi pentacoordinati degli ioni d^8, per i quali la coordinazione quadro-planare è fortemente preferita [1].

D'altro canto un cospicuo motivo per lo studio dei complessi pentacoordinati è fornito dal fatto che sia le reazioni dei complessi

* Il presente lavoro è stato svolto con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

** Istituto di Chimica. Università di Napoli. Via Mezzocannone 4, 80134 Napoli.

planari quadrati, sia quelle dei complessi ottaedrici coinvolgono spesso intermedi pentacoordinati [2].

In relazione all'interesse che i complessi stabili del Pt(II) con olefine rivestono nello studio dell'attivazione, eventualmente catalitica, degli idrocarburi insaturi da parte di metalli di transizione [3], è di recente iniziato presso questo laboratorio uno studio di complessi pentacoordinati con olefine.

I risultati preliminari [4] hanno portato a concludere che una opportuna scelta dei leganti conduce a complessi isolabili, di η-olefine, anche quando gli altri atomi coordinati sono sostanzialmente semplici donatori σ di una coppia elettronica. In particolare è stato preparato il nuovo legante (R,R)-N,N'-Bis(1-feniletil)-N,N'-dimetil-1,2-etandiammina, (« BFDE »), il quale ha dimostrato la migliore capacità di « stabilizzare » [5] complessi del tipo $PtCl_2$(diammina)(η-olefina).

Vengono qui riportati dati strutturistici e stereochimici relativi a complessi con BFDE del tipo citato, paragonabili a quelli ben noti su analoghi sistemi quadrato planari.

Parte sperimentale

Gli spettri IR sono stati registrati con un apparecchio Perkin-Elmer 457; gli spettri NMR con un Varian Aerograph T 60 A e con un Bruker 270 MHz, usando TMS come riferimento interno. Le misure polarimetriche sono state effettuate con un polarimetro Perkin-Elmer 141 in celle da 1 dm.

Le misure di radioattività sono state effettuate con un contatore Geiger-Muller tipo SELO mod. DCI 331 con finestra sottile di mica utilizzando come supporto per sostanze solide un dischetto di 3 cm^2 di area. Tutti i solventi ed i reagenti utilizzati sono del tipo R.P. La diammina è stata preparata con il metodo descritto in letteratura [4]. La preparazione di $Pt(C_2H_4)$(diammina)Cl_2 (I) è stata eseguita con il metodo già descritto [4].

Preparazione del composto $K[PtBr_3(C_2H_4)] \cdot H_2O$

Si è preferita la seguente modifica del procedimento descritto da F. Pesa et al. [6]. In un palloncino a due colli, in acqua, si sciolgono 1.0 mmol (588 mg) di complesso $\{Pt(C_2H_4)Cl_2\}_2$, 5.0 mmol di KBr (594 mg); ad essi si aggiunge qualche goccia di soluzione concentrata di HBr. Si porta a secchezze la soluzione. Si estrae con acetone, lasciando sul fondo del palloncino un residuo bianco. Alla soluzione acetonica si aggiunge eccesso di KBr (3.0 mmol, 357 mg) e

qualche goccia di HBr. Si concentra in vuoto la soluzione. Si riprende con poca acqua e si lascia per qualche ora a 5 °C. Precipita un composto cristallino di colore giallo arancio. Esso viene sciolto in una soluzione di HBr a circa il 5 %, da cui poi si allontana la fase acquosa con una distillazione « flash » nel vuoto. Si ripete quest'ultima operazione. Il prodotto viene cristallizzato da soluzione acquosa concentrata: si ottengono 200 mg (resa 40 %). Il composto è stato identificato attraverso lo spettro IR.

Preparazione di $Pt(C_2H_4)(BFDE)Br_2$ (II)

Il complesso $K[PtBr_3(C_2H_4)]$ (1.0 mmol, 520 mg) viene sciolto nella minima quantità di metanolo e ad esso si aggiunge, a 0 °C e sotto agitazione, una quantità equivalente di diammina, goccia a goccia. Si ha immediatamente un precipitato di colore arancio cupo che precipita completamente a − 20 °C in congelatore. Si ricristallizza da benzene-esano con scarsa resa. Il prodotto presenta il punto di fusione a 110-113 °C. Il suo spettro NMR, per quanto riguarda la parte dei protoni olefinici, è riportato in tabella 1.

Preparazione della miscela $Pt(C_2H_4)(BFDE)XX'$; (X,X' = Br, Cl).

Una mmol di sale di Zeise (386 mg) viene sciolta in 20 ml di acqua insieme a 2 mmol (238 mg) di KBr. Tale soluzione, cui si è aggiunto un piccolissimo ammontare di acido trifluoroacetico, viene lasciata andare a secco in circa 24 ore alla pressione di circa 20 mm Hg in essiccatore su H_2SO_4 concentrato. Il residuo viene estratto con metanolo, filtrato e di nuovo portato a secco. Gli spettri NMR indicano che nel materiale grezzo così ottenuto v'è una miscela di almeno tre anioni di tipo $[Pt(C_2H_4)Br_{3-x}Cl_x]^-$ $x = 0 \div 3$.

Su di esso, basandosi sulla formula in cui $x = 1$, si è effettuata la reazione con la diammina in quantità equimolare secondo il metodo già descritto per (I). Il complesso pentacoordinato ottenuto è stato ricristallizzato da CH_2Cl_2/CH_3OH ed è risultato dall'esame degli spettri NMR (v. tab. 1) essere una miscela di (I), e (II) e $Pt(C_2H_4)(BFDE)BrCl$.

Ottenimento del composto Pt((E)-CN−CH=CH−CN)(BFDE)Cl_2

Il complesso Pt((E)-CN−CH=CH−CN)(BFDE)Cl_2 è stato ottenuto per scambio in condizioni analoghe a quelle già note [4] a partire da $Pt(C_2H_4)(BFDE)Cl_2$ e da (E)-CN−CH=CH−CN.

I dati NMR sono riportati in tab. 1.

Analisi: Pt(calc.) 33.04 %; Pt(trovato) 33.53 %.

TABELLA I

Dati ^1H-NMR per i complessi Pt(BFDE)(olefina)XY (a) (b)

X Y	olefina	protoni olefinici	NCH_2CH_2N	NCH	NCH_3	CH_3	C_6H_5
Cl Cl	$CH_2=CH_2$	3.70, s (71)	3.1, m; 1.9, m	4.90, q	2.63, s	1.91, d	7.3, m
Br Br	$CH_2=CH_2$	3.99, m *	3.2, m; (+)	5.08, m	2.78, s	1.96, d	7.3, m
Br Cl	$CH_2=CH_2$	3.91-3.73, m *	3.13, m; * (+)	4.99, m *	2.78, s * 2.63, s *	1.94, m *	7.3, m *
Cl Cl	$CH_3-CH=CH_2$	4.8-3.5, m $=C-CH_3$ 1.33, d (52)	3.1, m; 1.9, m	4.82, q	2.55, s	1.95, d	7.3, m
Cl Cl	(E)-CN-CH=CH-CN	4,35, s (70)	3.2, m; 1.9, m	5.15, q	2.83, s	1.93, s	7.4, m

a) Alcuni dei dati riportati in questa tabella sono già stati determinati [4]; vengono riportati per completezza. b) Gli spettri sono stati registrati in $CDCl_3$ con TMS come riferimento interno su apparecchi Varian T 60 A e Bruker WH 270 *. I chemical shifts sono dati in ppm, le costanti di accoppiamento $J_{Pt,H}$ sono riportate in parentesi. (+) Coperto dal segnale del CH_3.

Determinazione della struttura del complesso $Pt(C_2H_4)(BFDE)Cl_2$

Per cristallizzazione da CH_2Cl_2/CH_3OH sono stati ottenuti cristalli singoli del complesso adatti per l'analisi diffrattometrica. Il gruppo spaziale e le dimensioni approssimate della cella sono state ottenute dall'analisi di fotogrammi oscillanti e Weissemberg. Il cristallo scelto per l'analisi strutturale è stato centrato su un diffrattometro semiautomatico Siemens collegato con un calcolatore Digital PDP8/I, utilizzando la radiazione Kα del molibdeno ($\lambda = 0.7107$ Å). I parametri della cella unitaria sono stati raffinati con un procedimento di minimi quadrati degli angoli 2ϑ, χ e φ di dodici riflessi con alto valore di ϑ (25°). I dati cristallografici ottenuti sono riportati in tabella 2. Le intensità integrate dei picchi sono state misurate

TABELLA 2

Dati cristallografici

Complesso $Pt(C_2H_4)(BFDE)Cl_2$

formula molecolare	$C_{22}H_{32}Cl_2N_2Pt$	volume	2324 Å^3
peso molecolare	590	gruppo spaziale	$P4_32_12$
sistema	tetragonale	Z	4
a	13.016 (3) Å	densità osservata	1.70 gcm^{-3}
b	13.016 (3) Å	densità calcolata	1.69 gcm^{-3}
c	13.719 (3) Å	λ_{Mo}	0.7107 Å
$\alpha = \beta = \gamma$	90°	temperatura	294°K

eseguendo uno « scan » $\vartheta - 2\vartheta$ con un discriminatore dell'intensità degli impulsi per ridurre la radiazione di fondo e un contatore a scintillazione, usando la radiazione Kα del molibdeno filtrata con zirconio.

Un incremento dell'angolo di « scan » di 1.0° è risultato sufficiente per il campo di 2ϑ esaminato (1°-80°) con una velocità di 1 grado $\times$ minuto^{-1}. Per controllare la stabilità elettronica dell'apparato e un eventuale deterioramento del cristallo durante la raccolta dati, si è fissato un riflesso di riferimento e lo si è misurato ogni 20 riflessi. Le intensità integrate, dopo avervi sottratto il valore della radiazione di fondo, sono state corrette per gli effetti di Lorentz e di polarizzazione nel modo solito. Tutti i riflessi aventi una $I_o < 3\sigma I_o$ furono scartati e per la risoluzione della struttura sono stati usati 789 riflessi.

La presenza di 4 molecole per cella e la sintesi di Patterson erano interpretabili assumendo la presenza di un asse binario nella molecola passante per l'atomo di platino e coincidente con un asse binario cristallografico.

La struttura è stata risolta con il metodo dell'atomo pesante. Le posizioni degli atomi di platino e di cloro sono state individuate con una sintesi di Patterson e rifinite ad un valore di R = 0.30 senza tener conto degli atomi più leggeri. A questo punto, con una sintesi tridimensionale di Fourier, sono state ottenute le posizioni approssimative degli atomi più leggeri eccetto gli idrogeni. Il raffinamento dei parametri è stato eseguito con un metodo di minimi quadrati, utilizzando un calcolatore Univac 1106. I fattori di struttura sono stati corretti per lo « scattering » anomalo degli atomi di platino e di cloro. I parametri di questi due atomi sono stati raffinati con fattori termici anisotropi; fattori termici isotropi sono stati usati nel raffinamento degli altri atomi.

L'indice di accordo R finale è risultato 0.057. Nella fig. 3 sono riportati i parametri più rilevanti della molecola.

Risultati e discussioni

Aspetti stereochimici

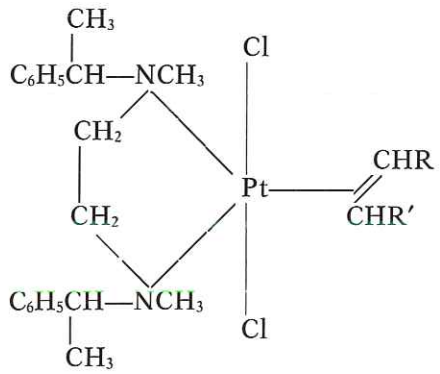


Fig. 1.

Vari aspetti della stereochimica (fig. 1) di un complesso del tipo in esame richiedono di essere chiariti. Si pongono infatti i seguenti problemi:

1) Se in soluzione e/o allo stato solido la configurazione degli atomi di azoto coordinati sia influenzata dalla presenza dei gruppi chirali (di configurazione R nel nostro caso) —$CH(C_6H_5)CH_3$.

2) Se il legante insaturo ruoti intorno al legame metallo-olefina, con velocità eventualmente paragonabile a quella riscontrata [7] per i complessi quadrati planari.

3) Se in soluzione e/o allo stato solido si abbia una configurazione preferenziale per gli atomi di carbonio $=C\begin{matrix}H\\R\end{matrix}$ coordinati al metallo.

Per quanto riguarda il primo quesito va notato che l'esame dello spettro NMR del complesso etilenico induce a concludere che in esso gli atomi di azoto si presentano in un'unica configurazione, ovvero che vi è completa induzione di asimmetria da parte del sostituente chirale. Ciò è chiaramente indicato dalla presenza di un unico segnale per N—CH_3, e dalla corrispondente semplicità dei segnali per N—CH (un quartetto) per C—CH_3 (un doppietto). Quando tali dati vengono correlati con i risultati dello studio strutturale su cristallo singolo (vide infra), si conclude agevolmente che anche in soluzione l'unica configurazione per entrambi gli atomi N è di tipo (S).

Anche sulla base degli spettri NMR degli altri complessi olefinici [4] si ritiene di poter considerare in tutti i casi finora esaminati il legante diamminico in configurazione « transoide » ovvero N(S), N'(S), (fig.2). Premesso ciò il secondo quesito non appare risolubile attraverso l'esame degli spettri NMR dei complessi nella formulazione già vista.

Infatti la configurazione « transoide » della diammina impone che un asse di simmetria binario coincide con l'asse $Pt—\begin{matrix}C\\\|\\C\end{matrix}$, e che per R=R' non siano distinguibili la situazione di « non rotazione » da quella di rotazione (in tempi rilevabili con spettroscopia NMR). Per ovviare a ciò si è proceduto alla sintesi del complesso $Pt(CH_2=CH_2)$ (BFDE) BrCl, nel quale la presenza di due diversi gruppi apicali evita quelle dell'asse binario. Lo spettro NMR del complesso (tab. 1) non è però significativo ai fini richiesti e più precisamente la presenza in esso di un multipletto complesso come segnale =C—H non prova l'assenza di rotazione nel caso esaminato.

Per quanto riguarda il terzo quesito, va ricordato che per i complessi planari quadrati contenenti una olefina prochirale ed un legante amminico chirale in posizione cis o trans, è possibile avere informazioni sulla configurazione dell'olefina dal valore della rotazione molare [8]. I dati ottici per la prima volta ottenuti per i complessi pentacoordinati e più precisamente con etilene, propilene e fumarodinitrile, indicano che questi ultimi due complessi contengono

in prevalenza, se non unicamente, l'olefina in una delle configurazioni possibili.

Infatti le attività molari dei tre complessi sono rispettivamente 560, 410 e 260 (in $CHCl_3$, c = 0.5 g/100 ml, λ = 589 nm, t = 25 °C),

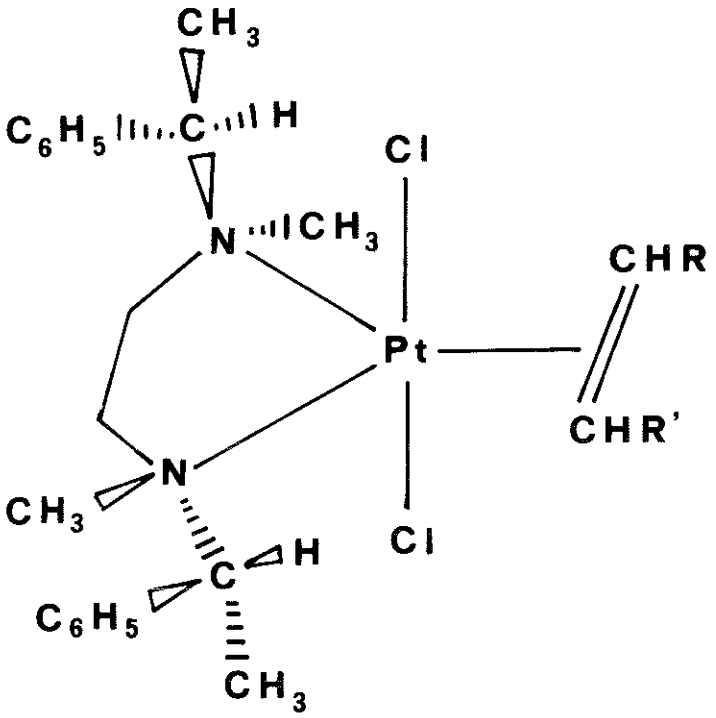


FIG. 2.

il che appunto induce a considerare presente un sostanziale contributo delle olefine chirali.

Complessi con olefine sostituite

Risulta incoraggiante il primo dato ottenuto riguardo l'isolamento del primo complesso del tipo in esame, contenente, come già ricordato, il fumarodinitrile.

Il complesso appare stabile indefinitamente allo stato solido a temperatura ambiente, e presenta anche una buona stabilità in soluzione. Ciò lascia sperare che si possano ottenere complessi almeno di altre olefine con gruppi elettron attrattori quali sostituenti, e che

la reattività di tali leganti in un semplice complesso pentacoordinato del Pt (II) possa finalmente essere studiata.

Struttura del complesso $Pt(C_2H_4)(BFDE)Cl_2$.

Il modello molecolare è riportato in fig. 3 dove sono indicate alcune delle distanze di legame più significative. Assumendo la molecola di etilene come monodentata, la geometria della sfera di coordinazione del platino corrisponde ad una bipiramide trigonale con

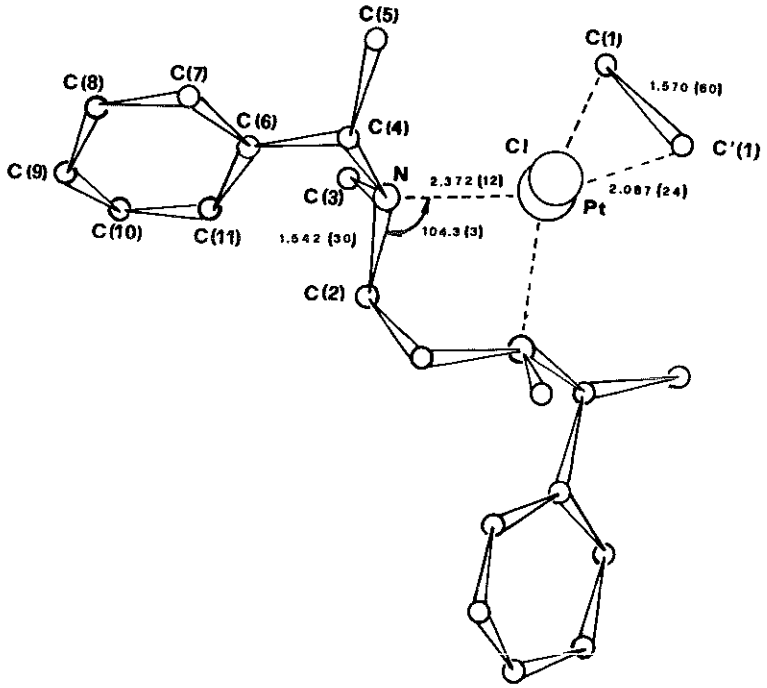


FIG. 8 - Struttura molecolare del complesso $Pt(C_2H_4)(BFDE)Cl_2$

gli atomi di cloro che occupano le posizioni assiali e la molecola di diammina due posizioni equatoriali.

Le due distanze Pt—N cristallograficamente equivalenti (2.372 (12) Å) sono significativamente più lunghe dei valori riportati in letteratura per complessi quadrati planari del Pt (II) [9] e per l'unico analogo complesso pentacoordinato [10] noto dalla letteratura.

Tale distanza è la stessa nel complesso $Pt(CH_3—CH=CH_2)(BFDE)Cl_2$ [11].

Le due distanze Pt—Cl (2.319 (5) Å) sono nei valori normali dei complessi noti in letteratura [9], come la distanza Pt—C(1) (2.087 (24) Å). La distanza C(1)—C'(1) nell'etilene è di 1.57(6) e appare superiore a quanto riportato in letteratura per complessi olefinici; è da tener presente però la larga deviazione standard associata.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. S. Wood, Progr. Inorg. Chem., **16**, 227 (1972).
[2] F. Basolo e R. G. Pearson, *Mechanism of Inorganic Reactions*, J. Wiley & Sons, ed. 1967.
[3] J. Halpern, Adv. in Chem. Ser., **70**, 19 (1968).
[4] A. de Renzi, A. Panunzi, A. Saporito e A. Vitagliano, Gazz. Chim. Ital, **107**, 549 (1977).
[5] Il termine « stabile » è inteso in questo caso non in senso necessariamente termodinamico.
[6] F. Pesa, L. Spaulding e M. Orchin, J. Coord. Chem., **4**, 225 (1975)
[7] Si vedano le citazioni in M. Herberhold, *Metal π-complexes*, Elsevier, Vol. II, parte 2, pag. 57 (1974).
[8] G. Paiaro, Organomet. Chem. Rev., A, **6**, 319 (1970).
[9] Si vedano i dati riportati in: F. R. Hartley, *The Chemistry of Platinum and Palladium*, App. Sc. Pub., (1973).
[10] L. Maresca, G. Natile, M. Calligaris, P. Delise e L. Randaccio, J.C.S. Dalton, 2386 (1976).
[11] B. Di Blasio et al., Comunicazione privata.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci P. Corradini, M. Covello e L. Mangoni.

Regolarità di certe trasformazioni integrali relative ad aperti di classe C^1

Nota di RENATA SELVAGGI e IRENE SISTO (Bari)
presentata dal socio corrispondente ANTONIO AVANTAGGIATI

(Adunanza del 4 novembre 1978)

SUMMARY. — We investigate some regularity properties for the integral transformation $f \to \int_{\partial\Omega} K(X-Q) f(Q)\, dQ$. Here Ω is a bounded domain with a boundary of class C^1 and $K(z)$ is an analytic function in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wich is odd and positively homogenous of degree $1-n$.

SOMMARIO. — Si studiano alcune proprietà di regolarità per la trasformazione integrale $f \to \int_{\partial\Omega} K(X-Q) f(Q)\, dQ$ dove Ω è un dominio limitato di classe C^1 e $K(z)$ è una funzione analitica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dispari e positivamente omogenea di grado $1-n$.

INTRODUZIONE

In [3] FABES, JODEIT e RIVIÉRE risolvono i problemi di Dirichlet e Neumann per l'equazione di Laplace in un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) attraverso la teoria classica del potenziale di semplice e doppio strato, nell'ipotesi che la frontiera $\partial\Omega$ di Ω di classe C^1 ed i dati sulla frontiera siano in $L^p(\partial\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$.

A tale scopo, essi provano, tra l'altro, per il potenziale di doppio strato

$$v f(X) = \int_{\partial\Omega} \frac{< X - Q, N_Q >}{|X - Q|^n} f(Q)\, d(Q)$$

con densità $f \in L^p(\partial\Omega)$, i seguenti risultati:

i) *Per ogni* $\alpha \in]0,1[$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che la funzione massi-*

male non tangenziale di $v f$, *cioè la funzione*

$$(1) \qquad v_\alpha^* f(X) =$$

$$= \sup \{ | v f(X) | : | X - P | < \delta, < X - P, N_p > > \alpha \cdot | X - P | \},$$

appartenga a $L^p(\partial\Omega)$ *e* $\| v_\alpha^* f \|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \cdot \| f \|_{L^p(\partial\Omega)}$;

ii) *Per quasi tutti i punti* $P \in \partial\Omega$ *si ha che*

$$v f(X) \text{ converge a } \overset{*}{\int_{\partial\Omega}} \frac{< P - Q, N_Q >}{| P - Q |^n} f(Q)\, d(Q) + \frac{1}{2} f(P)$$

non tangenzialmente, cioè per $X \to P$ *con* $X \in \Omega$ *e* $< X - Q, N_p > > \alpha \cdot | X - P |$.

D'altra parte in [5] (teor. 2.4) C. MIRANDA dimostra che se Ω è un aperto con frontiera di classe $C^{1,\lambda}$ e K è un nucleo di integrale a valor principale positivamente omogeneo di grado $1 - n$ e di classe $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, posto

$$(2) \qquad u f(X) = \int_{\partial\Omega} K(X - Q) \cdot f(Q)\, d(Q),$$

se $f \in L^p(\partial\Omega)$ per quasi tutti i punti $P \in \partial\Omega$ si ha che

$$(3) \qquad \lim_{\substack{X \to P \\ X \in \Omega}} u f(X) =$$

$$= \overset{*}{\int_{\partial\Omega}} K(P - Q) f(Q)\, dQ + f(P) \cdot \overset{*}{\int_{\pi}} K(P - Q + N_P)\, d(Q)$$

e la funzione $f \to \lim_{\substack{X \to P \\ X \in \Omega}} u f(X)$ è un'applicazione lineare e continua da $L^p(\partial\Omega)$ in sé.

Traendo lo spunto dai risultati citati, si è posto il problema di provare la validità di (3) nel caso in cui l'aperto Ω abbia frontiera di classe C^1.

Nel presente lavoro si risolve il problema suddetto dimostrando (teor. 3.1) che, se K è una funzione positivamente omogenea di grado $1 - n$, dispari ed analitica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se Ω è un aperto di classe C^1 e se $f \in L^p(\partial\Omega)$, per quasi tutti i punti $P \in \partial\Omega$ esiste il limite non tangenziale di $u f(X)$ e coincide con il secondo membro della (3).

Per far ciò si è dapprima provato (cfr. prop. 1.5) che $u f(X)$ è localmente il limite di $u_n f(X) = \int_{\partial\Omega_n} K(X-Q) f(Q)\, d(Q)$ dove $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di aperti di classe $C^{1,\lambda}$ approssimante localmente Ω.

Successivamente (prop. 3.1) si è provato che per ogni $\alpha \in]0,1[$ la funzione massimale non tangenziale $u_\alpha^* f$ di $u f$ appartiene a $L^p(\partial\Omega)$ e $\| u_\alpha^* f \|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \cdot \| f \|_{L^p(\partial\Omega)}$.

Le tecniche adoperate si ispirano a quelle usate in [3] e si fondano, come d'altra parte accade in [3], in modo essenziale su un recente lavoro di A. P. CALDERON riguardante l'integrale di Cauchy su curve di Lipschitz.

I risultati del presente lavoro trovano applicazione al caso in cui K è una qualunque derivata di ordine $2m-1$ della soluzione fondamentale di una equazione ellittica a coefficienti costanti contenente soltanto derivate di ordine $2m$ (cfr. [4]) e possono essere utilizzati per esempio per provare, in analogia con il risultato di [3], l'esistenza di una soluzione del problema di Dirichlet per l'operatore Δ^2 nell'ipotesi che $\partial\Omega$ sia di classe C^1 ed i dati su $\partial\Omega$ siano in $L^p(\partial\Omega)$. Di ciò ci occuperemo in un prossimo lavoro.

In quanto segue, denotato con Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, i punti di Ω (rispettiv. della frontiera $\partial\Omega$ di Ω) sono denotati con lettere maiuscole X, Y, ... (rispettiv. P, Q, ...).

Da ultimo si fa osservare che se Ω è di classe C^1, per ogni $\varepsilon > 0$ si può fissare un numero finito di sfere $(B(P_j, \delta_j))_{1\leq j\leq l}$, $P_j \in \partial\Omega$, tale che $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(P_j, \delta_j)$ e

$$\Omega \cap B(P_j, \delta_j) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n : t > \varphi_j(x)\} \cap B(P_j, \delta_j)$$

con $\varphi_j \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varphi_j(0) = \dfrac{\partial \varphi_j(0)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ e $\max |\nabla \varphi_j(x)| \leq \varepsilon$ dove

$$\nabla \varphi_j(x) = \left(\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_n} \right).$$

1. - RISULTATI PRELIMINARI

In quanto segue $K(z)$ è una funzione analitica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, positivamente omogenea, di grado $1-n$ e dispari. Notoriamente si ha che (cfr. lem. 3.1 di [1]):

TEOREMA 1.1. — *Esiste* $M > 0$ *ed esiste* $\vartheta \in]0,1[$ *tale che, posto, per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *con* $|x_0| < 1$

$$D_\vartheta = \{x + iy \in \mathbb{C}^n : |p\, r_k(x+iy) - p\, r_k(x_0)| < \vartheta \quad \forall\, k = 1, \ldots, n\}, \tag{1.1}$$

$K(x+iy)$ *risulti analitica e limitata da* M *in* D_ϑ.

Sussistono le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 1.1. — *Sia* $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$. *Posto, per ogni* $x \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$G^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |G_\varepsilon f(x)| \tag{1.2}$$

dove, per ogni $\varepsilon > 0$, *è*

$$G_\varepsilon f(x) = \int_{|x-z|>\varepsilon} K(x - z, \varphi(x) - \varphi(z)) f(z)\, dz, \tag{1.3}$$

esiste $m_0 > 0$ *tale che se* $m = \max |\nabla \varphi| < m_0$ *e* $1 < p < +\infty$ *l'operatore* G^* *risulti limitato su* $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ *e inoltre si abbia*

$$\| G^* f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_{p,m,n} \cdot \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{1.4}$$

con $C_{p,m,n}$ *costante dipendente solo da* p, m *ed* n.

Dim. — Se $\varepsilon > 0$, applicando il metodo della rotazione a $G_\varepsilon f(x)$, (cfr. teor. 2, pag. 89, di [6]) si ha che

$$\| G^* f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \frac{1}{2} \cdot \int_\Sigma \| T_\sigma f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\, d\sigma \tag{1.5}$$

dove

$$\Sigma = \{\sigma \in \mathbb{R}^{n-1} : |\sigma| = 1\}, \qquad T_\sigma f(t\sigma + w) =$$

$$= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|t-r|>\varepsilon} K\left(\sigma, \frac{\varphi(t\sigma + w) - \varphi(r\sigma + w)}{t - r}\right) \frac{f(r\sigma + w)}{t - r}\, dr \right|$$

e per $\sigma \in \Sigma$ ciascun $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ è univocamente scritto come $x = t\sigma + w$ con $\langle \sigma, w \rangle = 0$ e $t \in \mathbb{R}$.

Per il teor. 1.1, se $\sigma \in \Sigma$, $K(\sigma, z)$, quale funzione della variabile complessa z, risulta olomorfa per $|z| < \vartheta$. In aggiunta, per il teorema

di Cauchy, si ha

$$(1.6)\qquad \int\limits_{|t-r|>\varepsilon} K\left(\sigma, \frac{\varphi(t\sigma+w)-\varphi(r\sigma+w)}{t-r}\right)\cdot\frac{f(r\sigma+w)}{t-r}\,dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\vartheta} K(\sigma,z)\,dz \int\limits_{|t-r|>\varepsilon} \frac{f(r\sigma+w)}{\left(z-\dfrac{\varphi(t\sigma+w)-\varphi(r\sigma+w)}{t-r}\right)}\cdot\frac{1}{t-r}\,dr.$$

Da [2] (teor. 2) consegue, allora, che esiste $m_o > 0$, tale che se $m < m_o$ e $1 < p < +\infty$, risulti

$$\int\int |T_\sigma f(t\sigma+w)|^p\,dt\,dw \le C_{p,m}\int\limits_{|z|=\vartheta}\left|\frac{K(\sigma,z)}{z}\right|^p dz\cdot \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

con $C_{p,m}$ costante dipendente da p e m. Da ciò e da (1.5) consegue l'asserto.

PROPOSIZIONE 1.2. — *Sia* $\varphi \in C^1_o(\mathbb{R}^{n-1})$. *Posto, per ogni* $x \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$(1.7)\qquad I^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |I_\varepsilon f(x)|$$

dove per ogni $\varepsilon > 0$ *è*

$$(1.8)\qquad I_\varepsilon f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x-z, \varepsilon+\varphi(x)-\varphi(z))\cdot f(z)\,dz,$$

esiste $m_o > 0$ *tale che se* $m = \max|\nabla\varphi| < m_o$ *e* $1 < p < +\infty$, *l'operatore* I^* *risulti limitato in* $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ *ed inoltre si abbia*

$$(1.9)\qquad \|I^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_{p,m,n}\cdot\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

con $C_{p,m,n}$ *costante dipendente da* p, m *e* n.

Dim. — Essendo $|\nabla\varphi|$ piccolo, se $\varepsilon > 0$ e $|x-z| < \frac{\varepsilon}{2}$, risulta $\frac{\varepsilon}{2} \le |\varphi(x)-\varphi(z)+\varepsilon|$ e, quindi,

$$I^* f(x) \le \sup_{\varepsilon>0}\left\{\int\limits_{|x-z|<\frac{\varepsilon}{2}} |K(x-z,\varepsilon+\varphi(x)-\varphi(z))\cdot f(z)|\,dz +\right.$$

$$+ \int_{|x-z|>\frac{\varepsilon}{2}} | K(x - z, \varepsilon + \varphi(x) - \varphi(z)) -$$

$$- K(x - z, \varphi(x) - \varphi(z)) | \cdot | f(z) | \, dz + | G_{\frac{\varepsilon}{2}} f(x) | \Big\} \leq$$

$$\leq C \cdot M f(x) + G^* f(x)$$

dove $M f(x)$ è la funzione massimale di Hardy-Littlewood di f (cfr. [7]) la quale è limitata in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

PROPOSIZIONE 1.3. — *Siano* φ_1 *e* φ_2 *elementi di* $C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$. *Posto, per ogni* $x \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$U^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} | U_\varepsilon f(x) | \tag{1.10}$$

dove per ogni $\varepsilon > 0$, *è*

$$U_\varepsilon f(x) = \int_{|x-z|>\varepsilon} (K(x - z, \varphi_1(x) - \varphi_1(z)) - \tag{1.11}$$

$$- K(x - z, \varphi_2(x) - \varphi_2(z))) \cdot f(z) \, dz$$

e posto

$$m = \max_{i=1,2} | \nabla \varphi_i | \tag{1.12}$$

esiste $m_0 > 0$, *tale che se* $m < m_0$ *e* $1 < p < +\infty$ *l'operatore* U^* *risulti limitato in* $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ *e, inoltre, si abbia*

$$\| U^* f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_{p,m,n} \cdot \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{1.13}$$

con $C_{p,m,n}$ *costante dipendente da* p, m *e* n.

Dim. — Se $\varepsilon > 0$, applicando il metodo della rotazione a $U_\varepsilon f(x)$, si ha che

$$\| U^* f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \frac{1}{2} \int_\Sigma \| T_\sigma f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \, d\sigma \tag{1.14}$$

dove

$$T_\sigma f(t\sigma + w) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|t-r|>\varepsilon} \left(K\left(\sigma, \frac{\varphi_1(t\sigma + w) - \varphi_1(r\sigma + w)}{t - r}\right) - \right.\right. \tag{1.15}$$

$$\left.\left. - K\left(\sigma, \frac{\varphi_2(t\sigma + w) - \varphi_2(r\sigma + w)}{t - r}\right)\right) \cdot \frac{f(r\sigma + w)}{t - r} \, dr \right|$$

e per $\sigma \in \Sigma$, ciascun $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ è univocamente scritto come $x = t\sigma + w$ dove $< \sigma, w > = 0$ e $t \in \mathbb{R}$.

Per il teor. 1.1., se $m < \frac{1}{2}$ si ha che

$$T_\sigma f(t\sigma + w) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|t-r|>\varepsilon} \frac{dr}{(t-r)^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \right.$$

$$K\left(\sigma, \frac{\lambda(\varphi_1(t\sigma+w)-\varphi_1(r\sigma+w))+(1-\lambda)(\varphi_2(t\sigma+w)-\varphi_2(r\sigma+w))}{t-r}\right) \cdot$$

$$\left. \cdot f(r\sigma+w) \cdot ((\varphi_1(t\sigma+w)-\varphi_2(t\sigma+w))-(\varphi_1(r\sigma+w)-\varphi_2(r\sigma+w)))\, d\lambda \right| .$$

Da qui, posto, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \varphi_1(t\sigma + w) - \varphi_2(t\sigma + w)$, $g_\lambda(t) = \lambda \cdot \varphi_1(t\sigma + w) + (1 - \lambda) \cdot \varphi_2(t\sigma + w)$, consegue

$$T_\sigma f(t\sigma + w) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_0^1 d\lambda \int_{|z|=\vartheta} \frac{K(\sigma, z)}{z^2}\, dz \int_{|t-r|>\varepsilon} \frac{(g(t)-g(r))\cdot f(r\sigma+w)}{\left((t-r)-\dfrac{g_\lambda(t)-g_\lambda(r)}{z}\right)^2} dr \right| =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_0^1 d\lambda \int_{|z|=\vartheta} \frac{K(\sigma, z)}{z^2} \cdot H_\lambda(t, z)\, dz \right|$$

dove, se $\frac{1}{z} = u + iv$,

$$H_\lambda(t, z) = \int_{|t-r|>\varepsilon} \frac{(g(t) - g(r)) \cdot f(r\sigma + w)}{\{((t-r) - u\cdot(g_\lambda(t) - g_\lambda(r))) - iv\cdot(g_\lambda(t) - g_\lambda(r))\}^2} dr .$$

Dopo ciò, posto per ogni $r \in \mathbb{R}$, $\bar{r} = \Phi^{-1}(r) = r - u\, g_\lambda(r)$, essendo $|u| < \vartheta$ e $m < \frac{1}{2}$, Φ^{-1} risulta invertibile. Quindi, si ha

$$H_\lambda(t, z) = \int_{|\phi(\bar{t})-\phi(\bar{r})|>\varepsilon} \frac{(g\circ\Phi(\bar{t}) - g\circ\Phi(\bar{r}))\cdot\Phi'(\bar{r})\cdot f(\Phi(\bar{r})\cdot\sigma + w)}{((\bar{t} - \bar{r}) - iv\cdot(g_\lambda\circ\Phi(\bar{t}) - g_\lambda\circ\Phi(\bar{r})))^2} d\bar{r} =$$

$$= \int_{|\bar{t}-\bar{r}|>2\varepsilon} \ldots d\,\bar{r} + \int_{\substack{|\bar{t}-\bar{r}|<2\varepsilon \\ |\phi(\bar{t})-\phi(\bar{r})|>\varepsilon}} \ldots d\,\bar{r} = \mathrm{H}_\varepsilon^1(t, z) + \mathrm{H}_\varepsilon^2(t, z).$$

A causa del teor. 1 di pag. 62 di [7] si ha, intanto, che

$$|\mathrm{H}_\varepsilon^2(t, z)| \leq \mathrm{C} \max |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)| \cdot \mathrm{M} f(t \cdot s + w)$$

dove $\mathrm{M} f$ è la funzione massimale di Hardy-Littlewood di f che è limitata in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Inoltre, posto $\mathrm{Z}(s) = s - i\,v \cdot g_\lambda \circ \Phi(s)$, risulta

$$\mathrm{H}_\varepsilon^1(t, z) = \int_{|\bar{t}-\bar{r}|>2\varepsilon} \frac{g \circ \Phi(\bar{t}) - g \circ \Phi(\bar{r})}{(\mathrm{Z}(\bar{t}) - \mathrm{Z}(\bar{r}))^2} \cdot \Phi'(\bar{r}) \cdot f(\Phi(\bar{r}) \cdot \sigma + w)\, d\,\bar{r}\,.$$

Ripetendo, allora, per H_ε^1 un ragionamento analogo a quello fatto in [2] per $\mathrm{B}_\lambda(f)$ (cfr. [2]: p. 1), si ha che esiste $m_0 > 0$ tale che se $m < m_0$ risulti

$$\| \sup_{\varepsilon>0} |\mathrm{H}_\varepsilon^1(t, z)| \|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq \mathrm{C} \cdot \max |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)| \cdot \| f(\cdot\,\sigma + w) \|_{\mathbb{R}}$$

donde

$$\| \mathrm{T}_\sigma f \|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \mathrm{C} \cdot \max |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)| \cdot \| f \|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

e quindi l'asserto.

PROPOSIZIONE 1.4. — *Siano* φ_1 *e* φ_2 *elementi di* $\mathrm{C}_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$. *Posto, per ogni* $x \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\mathrm{B}^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |\mathrm{B}_\varepsilon f(x)| \tag{1.16}$$

dove, per ogni $\varepsilon > 0$ *è*

$$\mathrm{B}_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\mathrm{K}(x - z, \varepsilon + \varphi_1(x) - \varphi_1(z)) - \tag{1.17}$$

$$- \mathrm{K}(x - z, \varepsilon + \varphi_2(x) - \varphi_2(z))) \cdot f(z)\, d\,z$$

e posto

$$m = \max_{i=1,2} |\nabla \varphi_i| \tag{1.18}$$

esiste $m_0 > 0$ *tale che se* $m < m_0$ *e* $1 < p < +\infty$ *l'operatore* B^* *risulti limitato in* $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ *e, inoltre, si abbia*

$$\| B^* f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_{p,m,n} \cdot \max | \nabla (\varphi_1 - \varphi_2) | \cdot \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{1.19}$$

con $C_{p,m,n}$ *costante dipendente da* p, m *e* n.

Dim. — Tenendo conto della prop. 1.3, la dimostrazione è analoga a quella della prop. 1.2.

PROPOSIZIONE 1.5. — *Sia* $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$ *e si ponga* $m = \max | \nabla \varphi |$. *Allora, se* $m \leq m_0$ (cfr. prop. 1.1.) *e se* $f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, *con* $1 < p < +\infty$, *esiste in* $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ *e per quasi tutti gli* $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ *il*

$$\lim_{\varepsilon > 0} I_\varepsilon f(x) = b(x) \cdot f(x) + \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(x - z, \varphi(x) - \varphi(z)) f(z)\, dz \tag{1.20}$$

dove

$$b(x) = \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(z, 1 + < \nabla \varphi(x), z >)\, dz \tag{1.21}$$

e gli integrali con $*$ *sono definiti assumendo come regioni di esclusione nella* (1.20) *le sfere di* $\mathbb{R}^{n-1}$ *di centro* x *e raggio infinitesimo e nella* (1.21) *le regioni di* $\mathbb{R}^{n-1}$ *esterne alle sfere di centro l'origine e raggio divergente.*

Dim. — A causa delle prop. 1.1. e 1.2. è sufficiente provare la (1.20) per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, nell'ipotesi che $f \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$.

Si osservi, dapprima che la stessa è vera se $\varphi \in C_0^{1,\lambda}(\mathbb{R}^{n-1})$ (cfr. Teor. 2.4 di [5]).

Sia, ora, $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$, sia $(\Psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $C_0^{1,\lambda}(\mathbb{R}^{n-1})$ tale che $\| \Psi_j - \varphi \|_{C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})} \to 0$ per $j \to \infty$ e, per ogni $j \in \mathbb{N}$, sia

$$G_{j,\varepsilon} f(x) = \int_{|x-z| > \varepsilon} K(x - z, \Psi_j(x) - \Psi_j(z)) f(z)\, dz \tag{1.22}$$

e

$$G_j f(x) = \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(x - z, \Psi_j(x) - \Psi_j(z)) f(z)\, dz\,. \tag{1.23}$$

Tenendo presente le prop. 1.1. e 1.3., un ragionamento analogo a quello seguito in [3] per provare la b) del lem. 1.1 permette di riconoscere che per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ esiste il $\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon f(x) = \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(x - z, \varphi(x) - \varphi(z)) f(z)\, dz$. Invero essendo per la prop. 1.3. $(G_j f)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, posto $Gf(x) = \lim_{j \to \infty} G_j f(x)$ in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, se $\eta > 0$ risulta

$$|\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \lim_{\varepsilon \to 0}{}'' |G_\varepsilon f(x) - Gf(x)| > 0\}| \leq$$

$$\leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : \lim_{\varepsilon \to 0}{}'' |G_\varepsilon f(x) - G_{j,\varepsilon} f(x)| > \frac{\eta}{2} \right\} \right| +$$

$$+ \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : \lim |G_{j,\varepsilon} f(x) - Gf(x)| > \frac{\eta}{2} \right\} \right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{\eta^p} (\| \sup_{\varepsilon > 0} |G_\varepsilon f - G_{j,\varepsilon} f| \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \| G_j f - Gf \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}) \leq$$

$$\leq \frac{C}{\eta^p} (\max |\nabla (\varphi - \Psi_j)| \, \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \| G_j f - Gf \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})})$$

donde $|\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \lim_{\varepsilon \to 0}{}'' |G_\varepsilon f(x) - Gf(x)| > \eta\}| = 0$ e ciò implica che per quasi tutti i punti $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon f(x) = Gf(x). \tag{1.24}$$

Inoltre, essendo per il teorema della convergenza maggiorata di Lebesgue

$$\lim_{j \to \infty} \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(z, 1 + \langle \nabla \Psi_j(x), z \rangle)\, dz = \tag{1.25}$$

$$= \lim_{j \to \infty} \left\{ \int_{|z|<1} K(z, 1 + \langle \nabla \Psi_j(x), z \rangle)\, dz + \right.$$

$$\left. + \int_{|z|>1} (K(z, 1 + \langle \nabla \Psi_j(x), z \rangle) - K(z, \langle \nabla \Psi_j(x), z \rangle))\, dz \right\} =$$

$$= \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(z, 1 + \langle \nabla \varphi(x), z \rangle)\, dz$$

per (1.24) si ha

$$(1.26)\qquad \lim_{j\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x-z,\varepsilon+\Psi_j(x)-\Psi_j(z))f(z)\,dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}^{*} K(x-z,\varphi(x)-\varphi(z))f(z)\,dz + f(x)\int_{\mathbb{R}^{n-1}}^{*} K(z,1+<\nabla\varphi(x),z>)\,dz.$$

Infine, tenuto conto della prop. 1.4., ragionando come si è fatto per provare (1.24), per quasi tutti gli $x\in\mathbb{R}^{n-1}$ si ha

$$(1.27)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon f(x) = \lim_{j\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} K(x-z,\varepsilon+\Psi_j(x)-\Psi_j(z))f(z)\,dz.$$

Dopo ciò, la (1.20) consegue da (1.26) ed (1.27).

2. - Traccia nella direzione normale

Nel successivo teor. 2.1. si considera in Ω la trasformazione

$$(2.1)\qquad u(X) = \int_{\partial\Omega} K(X-Q)f(Q)\,dQ$$

e si studia la sua traccia su $\partial\Omega$ nella direzione normale, quando Ω è un aperto di classe C^1 e $f\in L^p(\partial Q)$ con $1<p<+\infty$.

Si prova preliminarmente la

Proposizione 2.1. — *Esiste* $\delta>0$ *tale che posto per ogni* $P\in\partial\Omega$

$$(2.2)\qquad u^* f(P) = \sup_{0<r<\delta} |u(P+r N_P)|,$$

l'operatore u^* *risulti limitato in* $L^p(\partial\Omega)$ *e*

$$(2.3)\qquad \|u^* f\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|f\|_{L^p(\partial\Omega)}$$

con C *dipendente solo da* p, $\partial\Omega$ *e* n.

Dim. — Si consideri un numero finito di sfere $(B(P_j,\delta_j))_{1\le j\le l}$ con $P_j\in\partial\Omega$ in modo tale che $\partial\Omega\subset\bigcup_{j=1}^{l} B(P_j,\delta_j)$, nonché

$$B(P_j,4\delta_j)\cap\Omega = B(P_j,4\delta_j)\cap\{(x,t)\in\mathbb{R}^n : t>\varphi(x)\}$$

e $|\nabla \varphi(x)| \leq m_0$ dove m_0 è la costante la cui esistenza è assicurata dalla prop. 1.1. Usando una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $(B(P_j, \delta_j))_{1 \leq j \leq l}$, si può supporre che il supporto di f sia contenuto in $B(P_j, \delta_j)$. Posto, allora, $\delta = \min_{1 \leq j \leq l} \delta_j$, se $P \notin B(P_j, 3\delta_j)$ e $r < \delta$, per ogni $Q \in B(P_j, \delta_j)$ risulta $|P + r N_p - Q| \geq \delta_j$ donde

$$u^* f(P) \leq \frac{C}{\delta_j^{n-1}} \int_{B(P_j, \delta_j) \cap \partial\Omega} |f(Q)| \, dQ \leq C \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} \cdot$$

Se, poi, è $P \in B(P_j, 3\delta_j)$, si ha che

$$u^* f(P) = \sup_{0<r<\delta} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K\left(x - z - \frac{r \nabla \varphi(x)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}}, \varphi(x) - \varphi(z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}}\right) f(z, \varphi(z)) \cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi(z)|^2} \, dz \right| \leq$$

$$\leq \sup_{0<r<\delta} \left(\int_{|x-z|<\frac{r}{2}} \left| K\left(x - z - \frac{r \nabla \varphi(x)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}}, \varphi(x) - \varphi(z) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{r}{\sqrt{1 + (\nabla \varphi(x))^2}}\right) f(z, \varphi(z)) \cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi(z)|^2} \right| dz + \right.$$

$$+ \int_{|x-z|>\frac{r}{2}} \left| K\left(x - z - \frac{r \nabla \varphi(x)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}}, \varphi(x) - \varphi(z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}}\right) - K(x - z, \varphi(x) - \varphi(z)) \right| \cdot$$

$$\cdot |f(z, \varphi(z))| \cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi(z)|^2} + \left| \int_{|x-z|>\frac{r}{2}} K(x - z, \varphi(x) - \varphi(z)) \cdot \right.$$

$$\left. \left. \cdot f(z, \varphi(z)) \cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi(z)|^2} \, dz \right| \right) \leq \sup_{0<r<\delta} (K_{1,r} f(x) + K_{2,r} f(x) +$$

$$|G_{\frac{r}{2}}(f \cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2})(x)|).$$

Ora, se $|\nabla \varphi|$ è piccolo e $|x - z| < \frac{r}{2}$, risulta $\left| \varphi(x) - \varphi(z) + \frac{r}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}} \right| \geq \frac{r}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}} - |z - x| \geq C \cdot r$ e, quindi,

$$\sup_{0<r<\delta} |K_{1,r} f(x)| \leq C \cdot \sup_{0<r<\delta} \int_{|x-z|<\frac{r}{2}} \frac{|f(z)|}{r^{n-1}} \, dz \leq C \cdot M f(x).$$

Inoltre, essendo per $\vartheta \in]0, r[$, $\left| x - z - \frac{\vartheta \nabla \varphi(x)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}} \right| \geq$ $\geq |x - z| - \frac{\vartheta |\nabla \varphi(x)|}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x)|^2}} \geq |x - z| - r |\nabla \varphi(x)| \geq |x - z| - \frac{r}{4} \geq$ $\geq |x - z| - \frac{|x - z|}{2} \geq \frac{|x - z|}{2}$, applicando il teorema del valor medio a $K_{2r} f(x)$, si ha

$$\sup_{0<r<\delta} |K_{2r} f(x)| \leq C \cdot \sup_{0<r<\delta} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{r}{(|x - z| + r)^n} |f(z)| \, dz \leq C \, M f(x).$$

Da quanto precede, tenuto conto della prop. 1.1., segue l'asserto

TEOREMA 2.1. — *Se* Ω *è un aperto di classe* C^1 *e* $f \in L^p(\partial\Omega)$ *con* $1 < p < +\infty$, *allora esiste in* $L^p(\partial\Omega)$ *e per quasi tutti i* $P \in \partial\Omega$ *il*

$$(2.4) \quad \lim_{r \to 0} u(P + r N_p) = a(P) \cdot f(P) + \overset{*}{\int_{\partial\Omega}} K(P - Q) \cdot f(Q) \, d(Q)$$

dove

$$(2.5) \quad a(P) = \overset{*}{\int_{\pi}} K(P - Q + N_P) \, dQ$$

con π *iperpiano tangente in* P *a* $\partial\Omega$ *e dove gli integrali con* $*$ *sono definiti assumendo come regioni di esclusione in* (2.4) *le porzioni di* $\partial\Omega$ *che hanno come proiezioni su* π *delle sfere di centro* P *e raggio infinitesimo ed in* (2.5) *le regioni di* π *esterne alle sfere di centro* P *e raggio divergente.*

Dim. — Per la prop. 2.1. è sufficiente provare che per quasi tutti i punti $P \in \partial\Omega$ esiste il limite (2.4). Ora, essendo Ω di classe C^1, esiste

$\delta > 0$ tale che per ogni $P \in \partial\Omega$ esista un sistema di riferimento con origine in P tale che, rispetto a questo ultimo sistema di riferimento, risulti

$$\Omega \cap B(P, \delta) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n : t > \varphi(x)\} \cap B(P, \delta) \quad \text{e} \quad |\nabla \varphi| \leq m_0$$

con $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varphi(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \varphi(0) = 0$ per $i = 1, \ldots, n-1$.

Pertanto, poiché si può supporre il supporto di f contenuto in $B(P, \delta)$, si ha

$$\lim_{r \to 0} u(P + r N_p) = \lim_{r \to 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(z, \varphi(z)) + r) f(z, \varphi(z)) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 + |\nabla \varphi(z)|^2}\, dz$$

e quindi l'asserto a causa della prop. 1.5.

3. - Traccia nella direzione non tangenziale

Nel teorema che segue si prova che esiste il limite non tangenziale di $u f(X)$ e questo coincide con il secondo membro di (2.4), fermi restando l'aperto Ω di classe C^1 e $f \in L^p(\partial\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$. Si prova preliminarmente la

Proposizione 3.1. — *Per ogni* $\alpha \in]0, 1[$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che la funzione massimale non tangenziale di* $u(X)$, *cioè*

$$u^* f(P) = \sup \{|u(X)| : X \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$|X - P| < \delta, \langle X - P, N_P \rangle > \alpha \cdot |X - P|\}$$

sia in $L^p(\partial\Omega)$ *e*

$$\|u^* f\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \cdot \|f\|_{L^p(\partial\Omega)} \tag{3.2}$$

con C *dipendente solo da* p, $\partial\Omega$ *e* n.

Dim. — Infatti, tenuto conto della prop. 1.1., con un ragionamento analogo a quello del teor. 1.3. di 2, se $f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, si prova che la

funzione

$$(3.3)\qquad \mathrm{T}f(x_0) = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{K}(x - z, t - \varphi(z))\, f(z)\, dz\right| :\right.$$

$$: (x, t) \in \mathbb{R}^n,\ t > \varphi(x),$$

$$t - \varphi(x_0) - \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0\rangle > \alpha\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x_0)|^2}\cdot$$

$$\left.\cdot\sqrt{|x - x_0|^2 + (t - \varphi(x_0))^2}\right\}$$

è in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ e, inoltre, che

$$(3.4)\qquad \|\,\mathrm{T}f(x_0)\,\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\cdot\|\,f\,\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

TEOREMA 3.1. — *Se* Ω *è un aperto di classe* C^1 *e* $f \in L^p(\partial\Omega)$ *con* $1 < p < +\infty$, *per ogni* $\alpha \in]0, 1[$ *e per quasi tutti i* $P \in \partial\Omega$ *esiste il*

$$(3.5)\qquad \lim_{\substack{X\to P\\ X\to C_P}} u(X) = a(P) f(P) + \overset{*}{\int_{\partial\Omega}} \mathrm{K}(P - Q)\, f(Q)\, d(Q)$$

dove

$$C_P = \{X \in \partial\Omega : \langle X - P, N_P\rangle > \alpha\cdot|X - P|\}$$

ed $a(P)$ *e gli integrali con* $*$ *sono definiti come nel teor.* 2.1.

Dim. — Come nella prop. 2.1. si consideri un numero finito di sfere $(B(P_j, \delta_j))_{1\leq j\leq l}$, $P_j \in \partial\Omega$, in modo tale che $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(P_j, \delta_j)$ e

$$B(P_j, 4\delta_j) \cap \Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n : t > \varphi(x)\} \cap B(P_j, 4\delta_j)$$

con $|\nabla\varphi| \leq \dfrac{\alpha}{6}$. Inoltre, se $j = 1, \ldots, l$, si può supporre che il supporto di f sia contenuto in $B(P_j, 3\delta_j)$. Dopo ciò, se $P \in \partial\Omega$, e $j = 1, \ldots, l$ è tale che $P \in B(P_j, 3\delta_j)$, e, quindi, è $P = (x_0, \varphi(x_0))$ e $X = (x, t)$, tenendo presente la prop. 3.1., basta determinare il

$$(3.6)\qquad \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,\varphi(x_0))\\ (x,t)\in B(P_j,\delta_j)\cap C_P}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{K}(x - z, t - \varphi(z))\, g(z)\, dz$$

per ogni $g \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$ o, equivalentemente, il

$$(3.7) \qquad \lim_{\substack{(\bar{x},\varepsilon)\to(0,0)\\(\bar{x},\varepsilon)\in B}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x_0 + \bar{x} - z, \varepsilon + \varphi(x_0) - \varphi(z))\, g(z)\, dz$$

dove B è il trasformato di $C_P \cap B(P_j, \delta_j)$ mediante la trasformazione $x - x_0 = \bar{x}$, $t - \varphi(x_0) = \varepsilon$.

A tale scopo si consideri una successione $(\Psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di elementi di $C_0^2(\mathbb{R}^{n-1})$ convergente a φ in $C_0^1(\mathbb{R}^{n-1})$. Posto

$$(3.8) \qquad H_j g(x_0) = \sup_{(\bar{x},\varepsilon)\in B} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (K(x_0 + \bar{x} - z, \varepsilon + \varphi(x_0) - \varphi(z)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - K(x_0 + \bar{x} - z, \varepsilon + \Psi_j(x_0) - \Psi_j(z)))\, g(z)\, dz \right| \right\}$$

con procedimento analogo a quello della precedente prop. 3.1. e tenuto conto della prop. 1.4., si prova che esiste m_0 tale che se $\sup\{\max|\nabla\varphi|, \max|\nabla\Psi_i|\} < m_0$ l'operatore H_j sia limitato in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ e

$$(3.9) \qquad \| H_j g \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \cdot \max|\nabla(\varphi - \Psi_j)| \cdot \| g \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

con C costante dipendente solo da p, $\partial\Omega$ e n. Inoltre, per j sufficientemente grande, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^n : t - \Psi_j(x_0) - \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle >$$

$$> \alpha \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x_0)|^2} \cdot \sqrt{|x - x_0|^2 + (t - \Psi_j(x_0))^2}\} \cap$$

$$\cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{|x - x_0|^2 + (t - \Psi_j(x_0))^2} < \delta\} \subset$$

$$\subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^n : t > \Psi_j(x)\}.$$

Pertanto, applicando il teor. 2.1. di [5], per j sufficientemente grande si ha che

$$(3.10) \qquad \lim_{\substack{(\bar{x},\varepsilon)\to(0,0)\\(\bar{x},\varepsilon)\in B}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x_0 + \bar{x} - z, \varepsilon + \Psi_j(x_0) - \Psi_j(z))\, g(z)\, dz =$$

$$= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,\Psi_j(x_0))\\t>\Psi_j(x)}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x - z, t - \Psi_j(z))\, g(z)\, dz =$$

$$g(x_0) \cdot \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(z, 1 + < \nabla \Psi_j(x_0), z >) \, dz +$$

$$+ \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(x_0 - z, \Psi_j(x_0) - \Psi_j(z)) \, g(z) \, dz = g(x_0) \cdot a_j(x_0) + G_j \, g(x_0).$$

D'altra parte, per la prop. 1.5., in $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ si ha che

$$\lim_{j \to \infty} (g(x_0) \cdot a_j(x_0) + G_j \, g(x_0)) =$$

$$= g(x_0) \cdot \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(z, 1 + < \nabla \varphi(x_0), z >) \, dz +$$

$$+ \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(x_0 - z, \varphi(x_0) - \varphi(z)) \, g(z) \, dz .$$

Da quanto precede, a causa di (3.9), con un ragionamento simile a quello fatto per provare la (2.3), consegue che

$$\lim_{\substack{(x,t) \to (x_0, \varphi(x_0)) \\ (x,t) \in B(P_j, \delta_j) \cap C_p}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x - z, t - \varphi(z)) \, g(z) \, dz =$$

$$= \lim_{\substack{(\bar{x}, \varepsilon) \to (0,0) \\ (\bar{x}, \varepsilon) \in B}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x_0 + \bar{x} - z, \varepsilon + \varphi(x_0) - \varphi(z)) \, g(z) \, dz =$$

$$= \lim_{j \to \infty} \lim_{\substack{(\bar{x}, \varepsilon) \to (0,0) \\ (\bar{x}, \varepsilon) \in B}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x_0 + \bar{x} - z, \varepsilon + \Psi_j(x_0) - \Psi_j(z)) \, g(z) \, dz =$$

$$= g(x_0) \cdot \overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(z, 1 + < \nabla \varphi(x_0), z >) \, dz +$$

$$\overset{*}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}} K(x_0 - z, \varphi(x_0) - \varphi(z)) \, dz .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BERS L., *Local behavior of solution of general linear elliptic equations*, *Communication on pure and applied Mathematics*, vol. 8, n. 1, February (1955).

[2] CALDERÓN A. P., *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, vol. 74, n. 4, April (1977).

[3] FABES E. B., M. JODEIT Jr., N. M. RIVIÉRE, *Potential techniques for boundary value problems on* C^1*-domains* (to appear).

[4] JOHN F., *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Intersc. tract. in Pure and Applied Math. (1955).

[5] MIRANDA C., *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*, Lincei, Memorie Sc. fis. ecc. S. VIII, vol. VII, Scz. 1,9 (1965).

[6] NERI U., *Singular integrals*, Lect. Not. in Math., 200 (1971).

[8] STEIN E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1970).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Avantaggiati, C. Miranda e G. Scorza Dragoni.

La crisi in presenza di momento flettente e taglio nelle sezioni sottili dotate di simmetria biortogonale

Nota di MICHELE BRIGANTE *
presentata dal socio ordinario VINCENZO FRANCIOSI

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

SOMMARIO. — Il problema della crisi globale di sezione per l'azione combinata di momento flettente e taglio viene affrontato rigorosamente, con riferimento a figure dotate di doppia simmetria ortogonale.

Si tracciano, con l'aiuto di un minielaboratore di dati, le frontiere dei domini elastici in M – T. Il criterio di crisi accettato è quello classico di Hencky e V. Mises; le applicazioni numeriche sono eseguite per la sezione rettangolare e per quella di « poutrelle ».

SUMMARY. — The problem of the global crisis of a section owing to the binary action of a bending moment and a shearing stress is dealt rigorously, referring to figures which are gifted with a biorthogonal symmetry.

It is possible to characterize the outlines of the elastic domains making use of a minicomputer.

Accepting Hencky's and V. Mises's classical criterion of crisis, the Author executes some numerical applications relevant to the rectangular section and to the « poutrelle ».

INTRODUZIONE

Anche se non frequentemente, accade di non poter trascurare il contributo della sollecitazione tagliante nel calcolo del momento flettente limite.

La letteratura scientifica [1] [2] [3] non è priva di trattazioni riguardanti il problema, che però — per quanto lo scrivente ha potuto rilevare — non sono ovunque rispettose del legame plastico.

Esse infatti prevedono che le zone più distanti dall'asse neutro siano soggette alla tensione di crisi di regime monoassiale, e quindi non possono contribuire all'assorbimento del taglio. Quest'ultimo

* dott. ing. Michele Brigante - Facoltà di Ingegneria - Istituto di Scienza delle Costruzioni - Università di Napoli.

quindi genera tensioni solo nella zona centrale; nel caso di una sezione rettangolare ciò si traduce nei diagrammi di fig. 1.

Ne consegue un dominio limite necessariamente approssimato che ben si adatta — come si vedrà — solo per particolari rapporti M – T, cioè solo per valori del taglio non rilevanti.

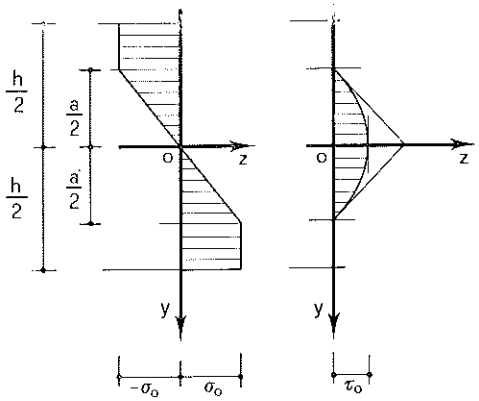


FIG. 1

Nel corso del presente lavoro — prendendo spunto da uno studio condotto [5] per il caso della sezione rettangolare — è stata rimossa l'ipotesi semplificativa prima detta e sono stati determinati in modo esatto i domini nel piano M – T per la sezione rettangolare e la sezione a doppio T. Tali domini sono stati definiti considerando il corretto diagramma delle tensioni puntuali normali e tangenziali per diversi valori M – T calcolando la tensione equivalente di crisi con il criterio di Hencky e V. Mises.

Il procedimento numerico che si propone è risultato notevolmente interessante soprattutto in considerazione del fatto che è stato eseguito con un normale minicomputer.

Le applicazioni del procedimento — pur limitato a sezioni con simmetria biortogonale ed ai materiali omogenei — hanno posto sufficientemente in evidenza i limiti di applicazione dei metodi approssimati prima citati. In particolare per il caso della sezione a doppio T si è evidenziato che — per i profilati di serie (proporzionati fondamentalmente per resistere ad azioni flettenti) — l'approssimazione solita di trascurare le τ sull'ala può ben accettarsi, mentre per profili compositi proporzionati per notevoli azioni taglianti (come ad es. le sezioni di nervature da ponte in prossimità degli appoggi) si è visto che il contributo a taglio delle stesse ali è considerevole; come pure da tenere in conto è la variabilità — lungo corde parallele ad x — della tensione normale σ, per la presenza delle τ.

Anzi in alcuni casi (e ciò in funzione del legame M – T) le tensioni normali assumono i valori massimi solo in prossimità delle fibre estreme laterali delle ali, presentando dei « picchi » che rapidamente decrescono in funzione dell'aumento delle τ (figg. 13 e 14).

1. - Studio di un tronco di trave di sezione rettangolare.

Si esamini il caso di una sezione con simmetria biortogonale, per esempio (fig. 2) un rettangolo sollecitato secondo una mediana; il materiale sia isoresistente.

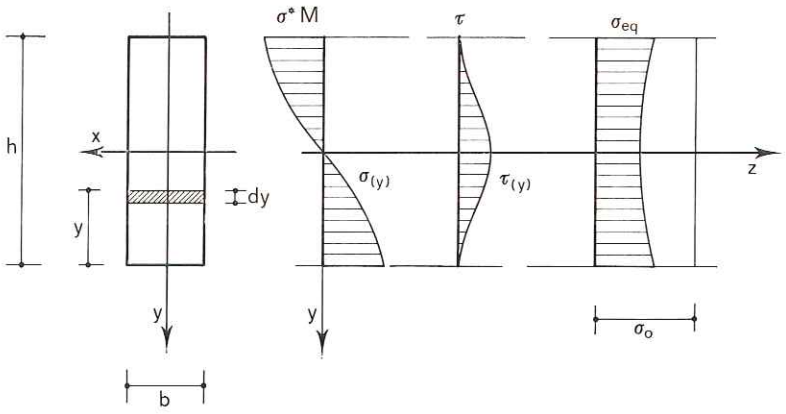


Fig. 2

Adottando come criterio di crisi puntuale quello di Hencky, vale la relazione limite tra σ e τ

$$\sigma^2 + 3\,\tau^2 = \sigma_o^2 \tag{1}$$

Fissato un determinato rapporto $k \neq 0$ tra M e T:

$$\frac{M}{T} = k, \tag{2}$$

si ponga:

$$\sigma = \sigma^* M, \tag{3}$$

ove $\sigma^*(y)$ è una legge definita a meno di un parametro, con la sola condizione di antisimmetria rispetto all'asse z.

Il parametro è ottenibile dalla condizione

$$M = 2\,b \int_{-\frac{h}{2}}^{o} \sigma\, y\, d\, y = 2\,b\,M \int_{-\frac{h}{2}}^{o} \sigma^*\, y\, d\, y$$

e quindi

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{o} \sigma^*\, y\, d\, y = \frac{1}{2\,b}$$

Assegnato M, dal diagramma $\sigma(y)$ si ricava — supponendo τ costante con x — e nel rispetto dell'equilibrio

$$\tau(y) = -\frac{1}{b} \int_{A'} \frac{\partial\, \sigma_z}{\partial\, z}\, d\, A' = -\int_{-\frac{h}{2}}^{y} \frac{\partial\, \sigma_z}{\partial\, z}\, d\, y'$$

essendo A' l'area al di sopra della corda ordinata y.

Essendo poi

$$\frac{\partial\, \sigma_z}{\partial\, z} = \sigma^* \frac{d\, M}{d\, z} = \sigma^*\, T = \sigma^* \frac{M}{k}\,,$$

ne consegue

$$\tau(y) = -\frac{M}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{y} \sigma^*(y')\, d\, y' \tag{4}$$

Ottenuto così $\tau(y)$, per ogni valore y si calcola la quantità

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\,\tau^2}\,; \tag{5}$$

ove si definisca poi

$$\psi = \frac{\sigma_o}{\sigma_{eq\ max}}$$

$$\gamma = \frac{\sigma_o}{\sigma_{eq\ min}}$$

può scriversi, in aderenza al teorema fondamentale:

$$\psi M \leq M_{ko} \leq \gamma M$$
$$\psi T \leq T_{ko} \leq \gamma T \tag{6}$$

chiamando M_{ko} e T_{ko} i valori limiti di M e T con riferimento al rapporto k scelto (fig. 3).

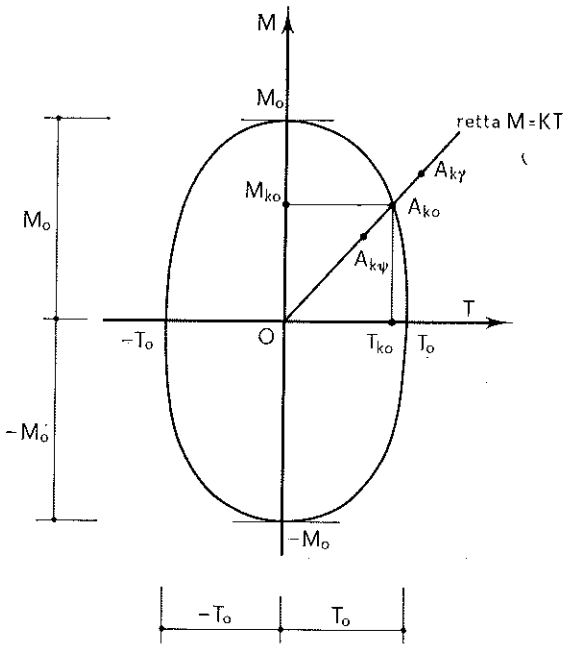


FIG. 3

L'intervallo è tanto più ristretto quando più $\sigma_{eq\,max}$ è vicina a $\sigma_{eq\,min}$, ovvero quanto più appiattito il diagramma delle σ_{eq}. Pertanto è conveniente adottare un diagramma delle σ che impegni maggiormente le zone più vicine all'asse neutro.

1.1. *Il procedimento numerico proposto.*

Per la determinazione diretta del punto A è possibile seguire un procedimento numerico. Si inizia considerando una sezione rettangolare $b \times h$.. Si suddivide (fig. 4) il segmento $\left[-\frac{h}{2}, 0\right]$ in n intervalli

di lunghezza $\Delta h = \dfrac{h}{2n}$ e siano $\sigma_1^*, \sigma_2^* \ldots \sigma_n^*$ i valori delle tensioni normali in corrispondenza degli estremi di tali intervalli.

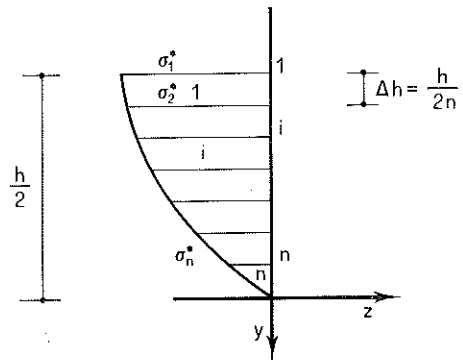


FIG. 4

Per l'intervallo *i*-esimo sarà

(a) $$\sigma_i = \mathrm{M}\,\sigma_i^*$$

(b) $$\tau_i = -\frac{\mathrm{M}}{k}\,\frac{\Delta h}{2}\sum_{j=2}^{i}(\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*)$$

(c) $$\sigma_{i\,\mathrm{eq}}^2 = \mathrm{M}^2\left\{\sigma_i^{*2} + \frac{3}{4}\left(\frac{\Delta h}{k}\right)^2\left[\sum_{j=2}^{i}(\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*)\right]^2\right\}$$

La soluzione del problema si ottiene ponendo ciascuna delle $\sigma_{i\,\mathrm{eq}} = \sigma_o$, cioè le condizioni di plasticità.

Per $i = 1$ la prima delle (c) porge:

$$\mathrm{M}^2\,\sigma_1^* = \sigma_o^2$$

e quindi

(d) $$\sigma_1^* = -\frac{\sigma_o}{\mathrm{M}}$$

Per $i = 2$, ponendo

(e) $$\alpha = \frac{3}{4}\left(\frac{\Delta h}{k}\right)^2 = \frac{3}{16}\,\frac{h^2}{k^2 n^2}$$

si ha

$$\sigma^{*2} + \alpha(\sigma_1^* + \sigma_2^*)^2 = \frac{\sigma_o^2}{M^2}$$

operando si trova

$$M\left(\frac{\sigma_2^*}{\sigma_o}\right)^2 (1+\alpha) - \left(M\frac{\sigma_2^*}{\sigma_o}\right)\cdot 2\alpha + (\alpha - 1) = 0$$

la soluzione dell'equazione in $M\dfrac{\sigma_2^*}{\sigma_o}$ porge

$$M\frac{\sigma_2^*}{\sigma_o} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 1)}}{2(1+\alpha)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

e cioè

(f) $$\sigma_2^* = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\,\frac{\sigma_o}{M}$$

Si osserva subito che la condizione $\sigma_2^* < 0$ si identifica con $\alpha < 1$ quindi per la (e)

$$n^2 > \frac{3}{16}\,\frac{h^2}{k^2};$$

di qui la necessità, per valori di k piccoli, di considerare un numero n di intervall elevato.

Per $i \geq 3$, in generale ponendo

(g) $$\frac{M}{\sigma_o}\left[\sum_{j=2}^{i-1}(\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*) + \sigma_{i-1}^*\right] = A_i\,,$$

la (c) diventa, per $\sigma_{i\,eq}^2 = \sigma_o^2$

(h) $$\left(\frac{M}{\sigma_o}\sigma_i^*\right)^2 + \alpha\left(A_i + \frac{M}{\sigma_o}\sigma_i^*\right)^2 - 1 = 0;$$

la soluzione è

(i) $$\sigma_i^* = \frac{-\alpha A_i - \sqrt{1 + \alpha(1 - A_i^2)}}{1+\alpha}\,\frac{\sigma_o}{M}$$

Se $k = \infty$ ($M = M_o, T = 0$) è $\alpha = 0$ e quindi la (i) porge ovunque

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_o}{M}$$

Per $k = 0$ ($M = 0, T = T_o$) è $\alpha = \infty$ e si troverebbe

$$\sigma_i^* = - A_i \frac{\sigma_o}{M};$$

in questo caso però è ovunque $\sigma^* = 0$ e perciò il procedimento cade in difetto.

Scrivendo la (i)

(l) $$\sigma_i^* = s_i \frac{\sigma_o}{M}$$

ove

(m) $$s_i = \frac{- \alpha A_i - \sqrt{1 + \alpha (1 - A_i^2)}}{1 + \alpha},$$

è

$$s_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_o}$$

L'espressione del momento M in funzione dei termini scritti è

$$M = - 2 b \sigma_o \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i + s_{i+1}}{2} \Delta h \left[(n - i) \Delta h + \frac{\Delta h}{2} \right] + s_n \frac{\Delta h^2}{3} \right\}$$

ed ancora

(o) $$M_{ko} = \mu M_o$$

ove

(p) $$\mu = - \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (s_i + s_{i+1}) \left(n - i + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} s_n \right]$$

Se poi si pone

(q) $$t = \frac{\tau}{\sigma_o}$$

dalla (4) si ha

$$t_{(y)} = -\frac{M}{k}\int_{-\frac{h}{2}}^{y}\frac{\sigma^{*}_{(y')}\,dy'}{\sigma_o} = -\frac{1}{k}\int_{-\frac{h}{2}}^{y}\frac{\sigma_{(y')}}{\sigma_o}\,dy' = -\frac{1}{k}\int_{-\frac{h}{2}}^{y} s_{(y')}\,dy'$$

e come sommatoria

(r) $$t_i = -\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{i-1}\frac{s_h + s_{h+1}}{2}\Delta h = -\frac{h}{4kn}\sum_{h=1}^{i-1}(s_h + s_{h+1})$$

$$(i = 2, 3, \ldots n+1)$$

In conclusione, quindi, fissato il rapporto $M/T = k$ dalle (o) si trova M_{ko}, da cui $T_{ko} = \frac{M_{ko}}{k}$; le (m) e (r) forniscono — a meno di σ_o — i diagrammi σ e τ.

Il valore T è dato da

$$T = 2b\int_{-\frac{h}{2}}^{o}\tau\,dy = 2b\,\sigma_o\int_{-\frac{h}{2}}^{o} t\,dy,$$

e cioè

$$T = 2b\,\sigma_o\left(\frac{t_2}{2}\Delta h + \sum_{i=2}^{n}\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\Delta h\right),$$

e quindi

(s) $$T_{ko} = \vartheta\, T_o$$

ove

(t) $$\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2n}\left[t_2 + \sum_{i=2}^{n}(t_i + t_{i+1})\right].$$

Per verifica deve risultare $M/T = k$.

Il procedimento numerico è stato eseguito con un minielaboratore HP 97 dotato di stampante, secondo lo schema di fig. 5.

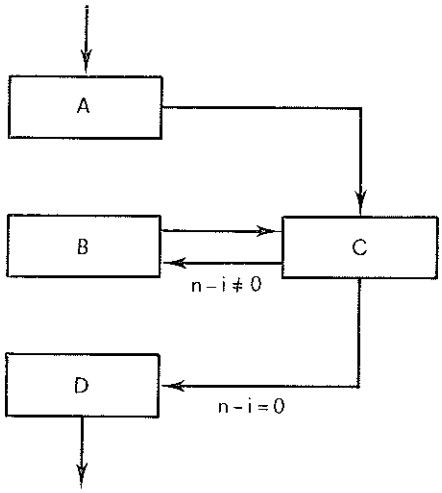


FIG. 5

Il programma si articola introducendo i valori di β ed n avendo posto:

(u) $$k = \beta h$$

(v) $$\alpha = \frac{3}{16 n^2 \beta^2}$$

e quindi

(z) $$\beta = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu}{\vartheta}$$

La prima fase A calcola α e s_2 poi rimanda alla fase C che calcola t_2 e rimanda al blocco B in cui si calcola s_3 e poi al C per il calcolo di t_3.

L'esecuzione C $\rightleftarrows$ B si itera $n - 1$ volte e si trovano i valori

$$s_i, t_i$$

Poi si passa al programma D che calcola μ e ϑ.

1.2. *Risultati numerici.*

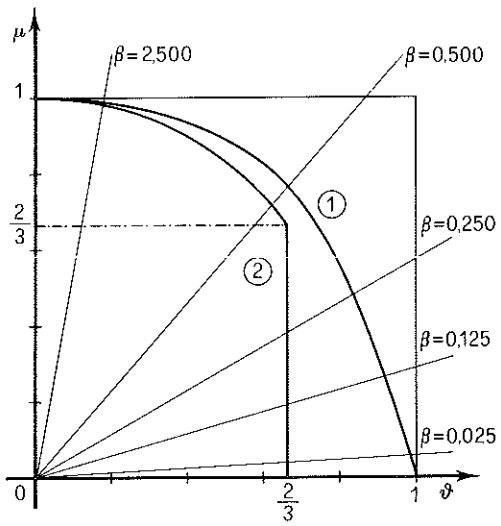
Nella tab. 1 sono riportati i valori di μ e ϑ per cinque valori di β calcolati per $n = 10$ e $n = 100$.

TABELLA I

β	0,025		0,125		0,250		0,500		2,500	
μ/ϑ	0,05774		0,28868		0,57735		1,15470		5,77350	
n	100	1000	10	100	10	100	10	100	10	100
μ	0,05617	0,05678	0,25481	0,26481	0,47534	0,48217	0,77167	0,77414	0,98673	0,09900
ϑ	0,97319	0,98345	0,88951	0,91733	0,82525	0,83514	0,66821	0,67042	0,20447	0,01748

Per il caso di $\beta = 0{,}025$ si è dovuto considerare $n = 1000$ e $n = 100$. Nella seconda riga sono risportati i valori di β calcolati attraverso la (z); i due valori μ e ϑ forniti dall'elaboratore rispettano tali rapporti.

È opportuno diagrammare i valori di μ e di ϑ ottenuti al variare di β: essi rappresentano proprio M_{ko} e T_{ko} a meno — rispettivamente — di $\dfrac{\sigma_o\, b\, h^2}{4}$ e $\tau_o\, b\, h$ (fig. 6).



① diagramma $\mu(\vartheta)$ reale

② diagramma $\mu(\vartheta)$ approssimato

FIG. 6

Nella stessa figura 6 viene riportato (curva 2) il diagramma approssimato.

La curva 1, chiusa, è la curva limite Λ della sezione ed è intersecata in un solo punto da qualsiasi semiretta uscente dall'origine. Pertanto è immediata la definizione di punto *interno* ed *esterno* al dominio limite. L'insieme dei punti interni è il dominio elastco D_e della sezione, l'nsieme di quelli esterni è il dominio plastico; la curva limite è *frontiera* comune dei due domini elastico e plastico.

La curva di fig. 6 può essere estesa ai quattro quadranti con condizioni di simmetria.

Nella fig. 7 sono disegnati i diagrammi $\mu(\beta)$ e $\vartheta(\beta)$; mentre β parte da 0 e tende ad 1, ϑ parte da 1 per $\beta = 0$ e tende a 0 per $\beta = \infty$.

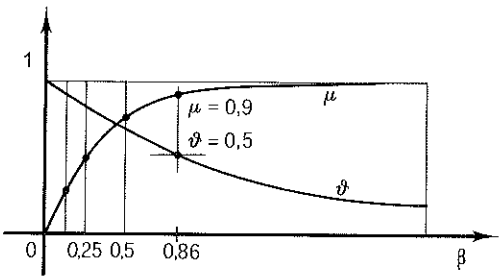


FIG. 7

È interessante osservare che per $\beta = 0{,}86$ risulta $\mu = 0{,}9$, e cioè il momento limite è decurtato del 10 %. Però deve considerarsi che il rapporto $\beta > 0{,}86$ si verifica solo per travi abbastanza alte. Infatti per una trave incastrata uniformemente caricata, in condizioni di completa plasticizzazione sotto $M_o = \pm \frac{\sigma_o b h^2}{4}$ si ha alle due estremità:

$$M = \frac{p l^2}{16}$$

$$T = \frac{p l}{2}$$

$$\frac{M}{T} = \frac{1}{8}$$

e quindi

$$\beta = \frac{M}{T h} = \frac{1}{8 h}$$

e ciò risulterà $\beta < 0{,}86$ fiinché $h > \frac{l}{6{,}88}$ e ciò è abbastanza raro.

Infine nelle figure 8 e 9 sono disegnati, a meno di σ_0, i diagrammi $\sigma(y)$ e $\tau(y)$ per $\beta = 0{,}5$ e $\beta = 2{,}5$.

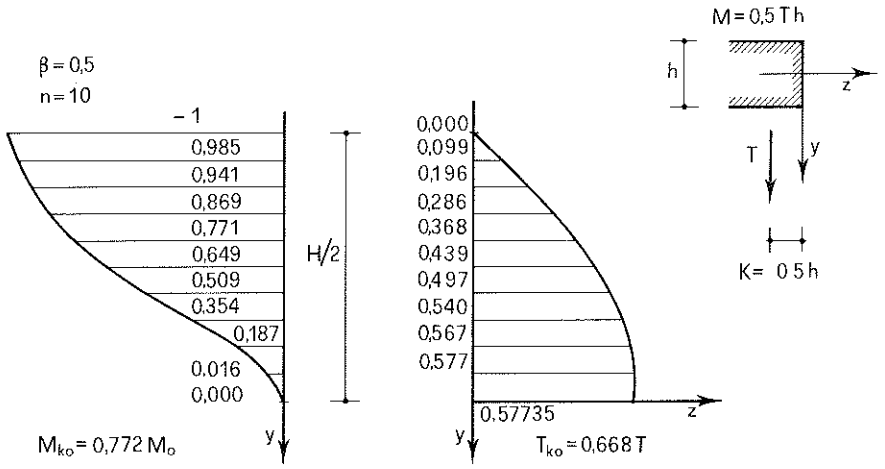


FIG. 8

Nel primo caso il diagramma delle σ non si discosta molto da quello lineare alla Navier ed il diagramma delle τ da quello para-

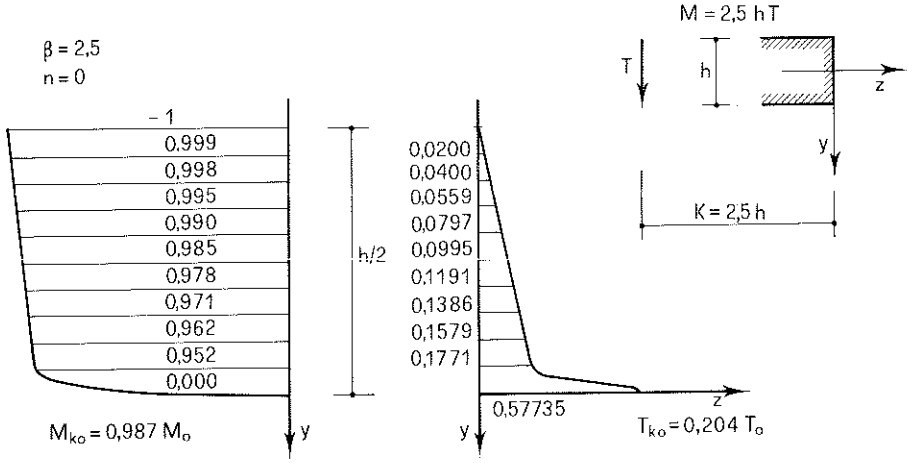


FIG. 9

bolico; nel secondo invece il diagramma σ è molto prossimo al rettangolare, mentre la sollecitazione tagliante è assorbita prevalentemente dalla zona centrale della sezione.

1.3. *La trattazione approssimata della sezione rettangolare.*

La trattazione usuale della sezione rettangolare soggetta a momento flettente e taglio si basa sulla seguente legge delle σ, per $M \neq 0$ (fig. 1):

$$y \in \left[-\frac{h}{2}, -\frac{a}{2}\right] \rightarrow \sigma = -\sigma_o$$

$$y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \rightarrow \sigma = \frac{\sigma_o \cdot 2y}{a}$$

$$y \in \left[\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right] \rightarrow \sigma = \sigma_o$$

Si osserva che si ipotizza una completa plasticizzazione da sola sollecitazione normale nel primo e terzo intervallo, mentre in quello centrale si segue la legge di Navier.

In tale ipotesi la zona centrale può ancora assorbire sollecitazioni taglianti; la τ, per ragioni di equilibrio, è quella della fase elastica ordinaria, e cioè è parabolica:

$$\tau = \tau_m \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right).$$

Ponendo $\tau_m = \tau_o$ si ha

$$T = \frac{2}{3} a\, b\, \tau_o$$

d'altro canto è pure

$$M = 2\sigma_o b \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + \frac{a}{2}\right) + \sigma_o \frac{b a^2}{6}$$

e cioè

$$M = \frac{\sigma_o b}{12}(3h^2 - a^2)$$

Eliminando a si ha

$$a^2 = \frac{9}{4} \frac{T^2}{b^2 \tau_o^2}$$

$$M = \frac{\sigma_o b}{12}\left(3h^2 - \frac{9}{4}\frac{T^2}{b^2\tau_o^2}\right) = \frac{\sigma_o b h^2}{3 \cdot 4}\left(3 - \frac{9}{4}\frac{T^2}{T_o^2}\right)$$

e cioè

$$M = M_o \left(1 - \frac{3}{4} \frac{T^2}{T_o^2}\right)$$

La legge che lega M e T è perciò

$$(*) \qquad \frac{M}{M_o} + \frac{3}{4} \frac{T^2}{T_o^2} = 1$$

questa è (fig. 10) una parabola. Per $M < 0$ la $(*)$ è sostituita dalla parabola simmetrica. Il dominio elastico D_e è perciò l'intersezione delle due parabole, e la curva limite $\wedge$ è la frontiera di D_e.

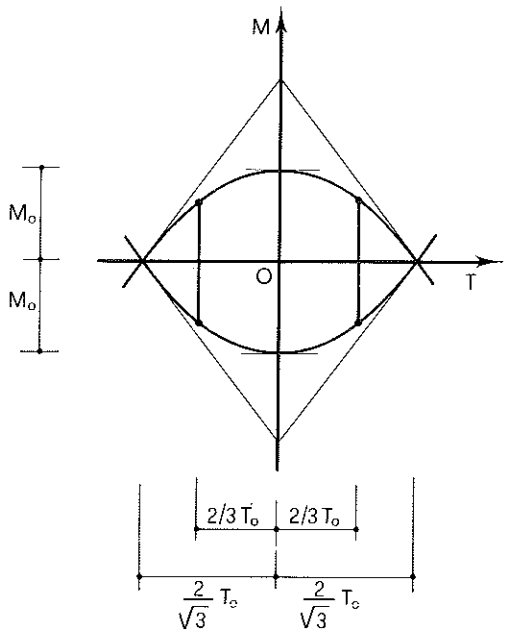


FIG. 10

All'ordinata generica $y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ si ha

$$\sigma = \sigma_o \cdot \frac{2y}{a} \qquad \tau = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)$$

e quindi

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_o^2 \left(1 - \frac{4y^2}{a^2} + 16 \frac{y^4}{a^4}\right).$$

Ponendo $2 \cdot \frac{y}{a} = x$, nell'intervallo suddetto, considerato aperto, è $x < 1$; quindi si può scrivere

$$(**) \qquad y \in \left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[\rightarrow \sigma_{eq} < \sigma_o$$

Ciò significa che il valore M(T) è tratto nel rispetto dello equilibrio, ma le corrispondenti tensioni principali definiscono, nel tratto (**), un punto interno all'ellisse di Hencky; la sezione non è quindi tutta plasticizzata, ed il valore di M(T) è calcolato in difetto.

Per $T = \frac{2}{3} T_o$, risulta dalla (*) $M = \frac{2}{3} M_o$.

Si osservi che la trattazione è basata sull'assunto che le τ devono essere equilibrate nel tratto (**) in cui le σ variano; quindi per $M < M_s \left(\text{e cioè } M < \frac{2}{3} M_o\right)$ la T è comunque pari a $\frac{2}{3} T_o$, poiché la $\tau(y)$ è comunque fornita da

$$\tau = \tau_o \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right)$$

Se ne trae che il dominio limite è l'intersezione di quello già ottenuto (fig. 10) con la striscia di piano definita dalle due disequazioni

$$-\frac{2}{3} T_o \leq T \leq \frac{2}{3} T_o$$

Nella fig. 6 è riportato, assieme alla curva reale, quella ottenuta seguendo questo procedimento approssimato.

2. - Il caso della sezione a doppio T.

L'estensione del procedimento proposto al caso della sezione a doppio T consente di definire il dominio esatto nel piano M, T. L'ipotesi da rimuovere — rispetto alla trattazione approssimata — è quella di considerare una tensione normale costante lungo una corda paralella ad x dell'ala. Si vuole cioè tener conto anche per l'ala della presenza delle τ che comportano una variazione di σ_z secondo x.

Si vedrà che tale variazione è più o meno spinta a seconda che si abbia un predominio di M su T o viceversa e pertanto la rimo-

zione dell'ipotesi suddetta risulta necessaria e significativa solo per particolari geometrie del profilato e per particolari valori del parametro β.

L'estensione al caso della sezione a doppio T può effettuarsi considerando la sezione come composta da più rettangoli, per ciascuno dei quali valgono le relazioni riportate per la sezione rettangolare $b\,x\,h$.

Nella fig. 11 si riporta un diagramma probabile delle tensioni σ e τ che rispetti la relazione fondamentale di Hencky.

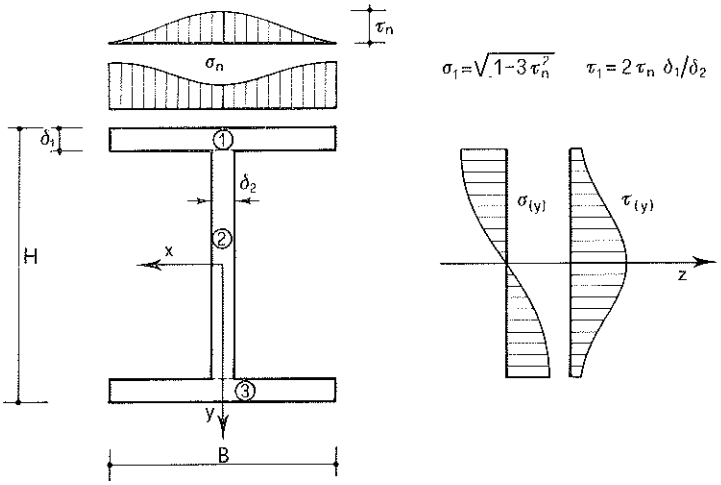


FIG. 11

Può applicarsi ripetendo per ciascuno dei rettangoli costituenti il profilato a doppio T la considerazione fatta per la sezione rettangolare con l'aggiunta però di una equazione di equilibrio che lega le τ nell'anima a quelle dell'ala.

2.1. *Il procedimento numerico applicato alla sezione a doppio* T.

Si schemitizzi la sezione come in fig. 11 dividendola nei rettangoli 1, 2 e 3.

Per il rettangolo 1 rimane completamente valido il programma che fornisce i valori s_i e t_i a meno di $\frac{\sigma_0}{M}$. L'unica accortezza è quella relativa alla scelta del parametro β (attivatore del programma) che è legato all'altezza della sezione

$$M = \beta\, T\, H$$

e dunque per un certo valore

$$\frac{M}{T} = k$$

si ha

$$\beta = \frac{k}{H}$$

e quindi se si sceglie un β relativo alla sezione globale, vi sarà β_1 per l'ala, funzione di quello globale pari a:

$$\beta_1 = \beta \frac{H}{B}$$

ove H = altezza del profilato

B = base del profilato

SEZIONE IN ESAME

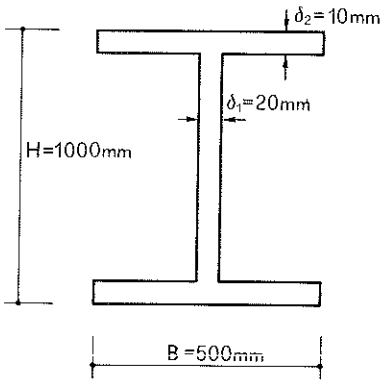


FIG. 12

Il programma 1 dunque fornisce

σ_1

τ_1

$\vdots$

σ_n

τ_n

Per l'attivazione del programma sul rettangolo 2 occorre imporre una condizione di equilibrio che fornisca i valori della σ e della τ sulla corda iniziale. Essi sono forniti dalla condizione di equilibrio

$$(2\,\tau_n\,\delta)_1 = (\tau_1\,\delta)_2$$

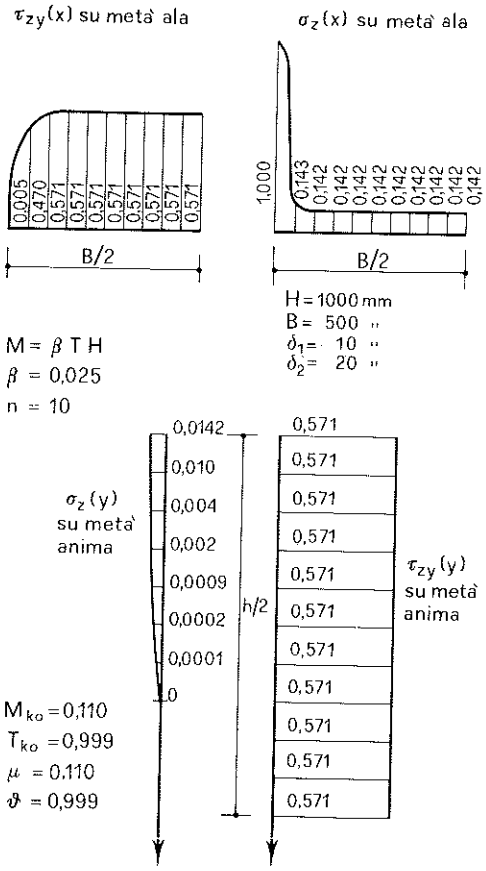


FIG. 13

e della condizione di Hencky scritta sulla prima corda del rettangolo 2

$$\sigma_1^2 + 3\,\tau_1^2 = 1$$

ponendo

$$\sigma_o = 1$$

Pertanto i successivi valori σ_i, τ_i sono forniti dalle relazioni

(a') $$\sigma_i = \mathrm{M}\,\sigma_i^*$$

(b') $$\tau_i = -\frac{\mathrm{M}}{k}\,\frac{\Delta h}{2}\sum_{j=2}^{i}(\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*)$$

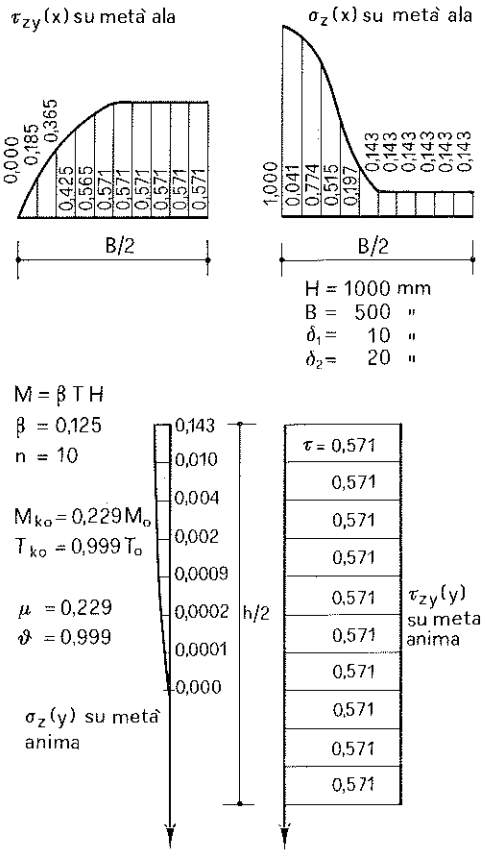


FIG. 14

e quindi

(c') $$\sigma_{i\,\mathrm{eq}}^2 = \mathrm{M}^2\left\{\sigma_i^{*2} + \frac{3}{4}\left(\frac{\Delta h}{k}\right)^2\left[\sum_{j=2}^{i}(\sigma_{j-1}^* + \sigma_j^*)\right]\right\}$$

Per il rettangolo 2 quindi, detti

$$\sigma_1^* = a$$

$$\tau_1^* = b$$

noti in quanto legati a quelle del rettangolo 1, si ha:

(d′) $$\sigma_1^* = - a \frac{\sigma_o}{M}$$

e per $i = 2$ la (c′) fornisce:

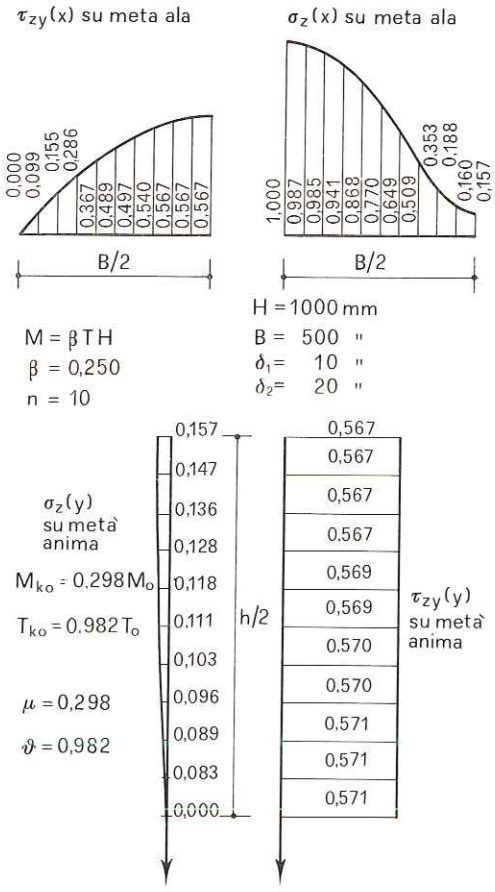


FIG. 15

posto

(e′) $$\alpha = \frac{3}{4}\left(\frac{\Delta h}{k}\right)^2 = \frac{3}{16}\,\frac{h^2}{n^2 k^2}$$

(f′) $$\sigma_2^* = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\,\frac{\sigma_o}{M}\,a$$

Per $i \geq 3$, e ponendo

$$\text{(g')} \qquad \frac{M}{\sigma_o}\left[\sum_{j=2}^{i-1}(\sigma^*_{j-1} + \sigma^*_j) + \sigma^*_{i-1}\right] = A_i$$

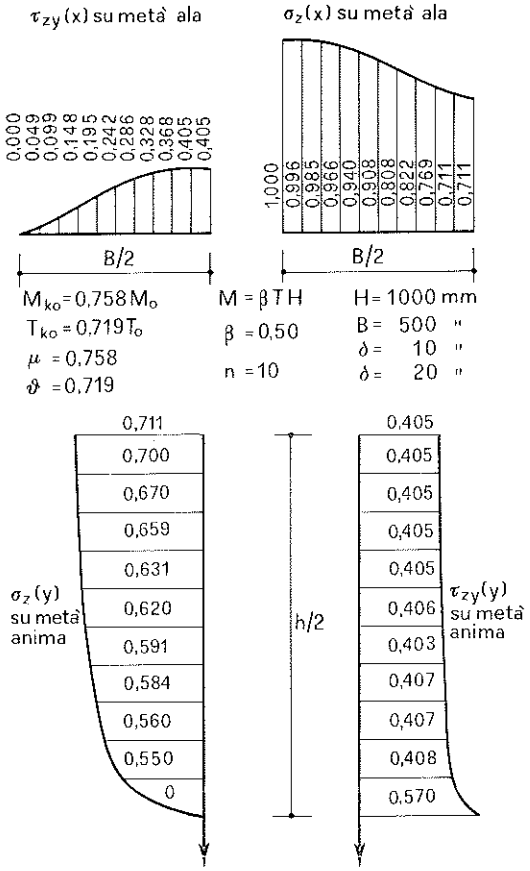


FIG. 16

si ottiene

$$\text{(h')} \qquad \sigma^*_i = \frac{-\alpha A_i - \sqrt{1 + \alpha(1 - A_i^2)}}{1 + \alpha} \cdot \frac{\sigma_o}{M} \cdot a$$

ovvero

$$\text{(i')} \qquad \sigma^*_i = s_i \frac{\sigma_o}{M}$$

ove

$$(1') \qquad s_i = \frac{-\alpha A_i - \sqrt{1 + \alpha(1 - A_i^2)}}{1 + \alpha} \cdot a$$

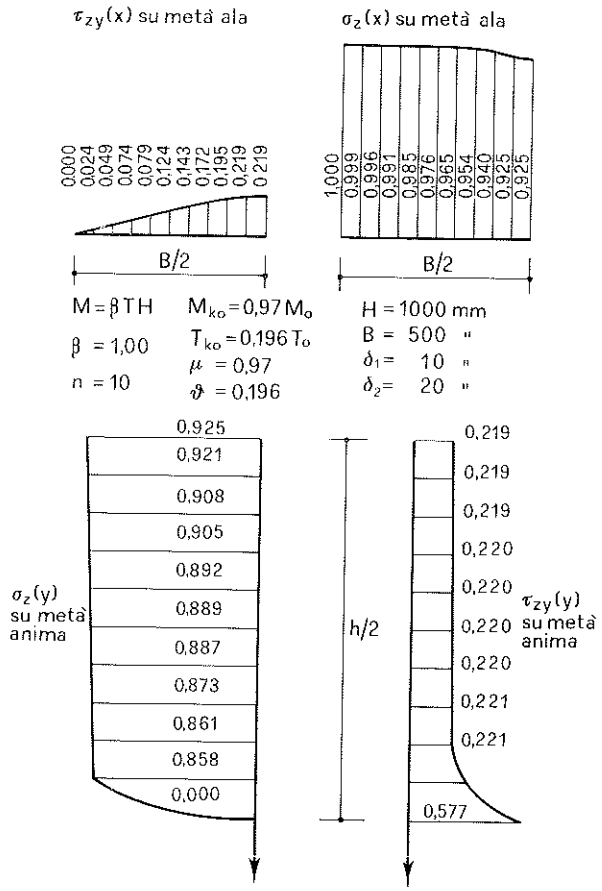


FIG. 17

Ed ancora, posto

$$t = \frac{\tau}{\sigma_o}$$

$$t_{(y)} = -\frac{M}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{y} \frac{\sigma^*(y')}{\sigma_o} \, dy' = -\frac{1}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{y} s(y') \, dy'$$

e cioè

$$t_i = -\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{i-1}\frac{s_h + s_{h+1}}{2}\Delta h = -\frac{1}{4\,k\,n}\sum_{h=1}^{i-1}(s_h + s_{h+1})$$

$$i = 1,2 \ldots n+1$$

In modo dunque perfettamente analogo al caso del rettangolo, si definiscono

$$M_{ko} = \mu\, M_o$$

$$T_{ko} = \vartheta\, T_o$$

ove M_o e T_o sono rispettivamente il momento ed il taglio limite di espressione:

$$M_o = \sigma_o\,\delta_2\frac{H^2}{4} + \sigma_o\,\delta_1\,B\,\frac{H}{2}$$

$$T_o = \tau_o\,\delta_2\,H$$

e quindi μ e ϑ rappresentano i rapporti adimensionali

$$\mu = \frac{M_{ko}}{M_o}$$

$$\vartheta = \frac{T_{ko}}{T_o}$$

Nella tab. II sono riportati i valori di μ e ϑ al variare di β. I calcoli sono stati condotti con riferimento ad un unico profilato com-

TABELLA II

β	0,025	0,125	0,250	0,50	0,75	1,00	2,50
μ/ϑ	0,110	0,499	0,294	1,05	1,782	4,549	0,879
n	10	10	10	10	10	10	10
μ	0,110	0,489	0,289	0,758	0,891	0,970	0,990
ϑ	0,999	0,999	0,982	0,719	0,500	0,196	0,091

posto con piatti (fig. 12) facendo variare il parametro β. I diagrammi delle tensioni σ e τ sull'ala e sull'anima sono riportati nelle figg. 13, 14, 15, 16 e 17.

In queste si è disegnato solo metà ala superiore e metà anima, data la simmetria biortogonale.

Dai diagrammi poi si risale ai valori M_{ko} e T_{ko} che definiscono il dominio per quel profilato.

È interessante notare come il dominio è funzione del profilato scelto e che la sua forma varia al variare di questo; in particolare ciò è evidenziato dal fatto che per valori di β crescenti si registra un valore di M costante fino ad un particolare β (β limite) risultando così al variare di M (in un certo intervallo definito da $[\beta = 0, \beta_{lim}]$) uguali valori di T. Ciò è chiarito bene dai diagrammi delle tensioni rportati nelle figg. (13...17). Si osserva infatti che per $\beta = 0{,}025$ (fig. 13) le tensioni normali sull'ala diminuiscono con una legge molto rapida, ed altrettanto rapidamente aumentano le τ che raggiungono

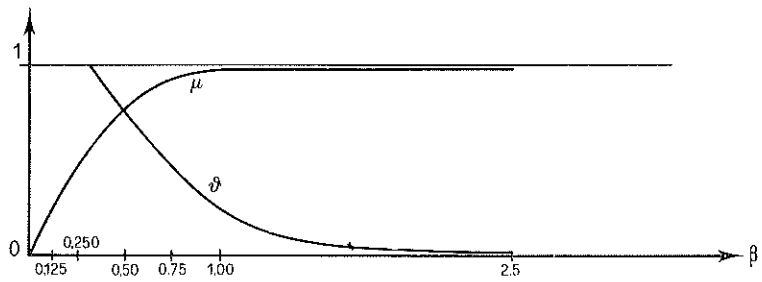


FIG. 18

il valore massimo $\tau_{max} = 0{,}571$; aumentando β ($\beta = 0{,}125$, $\beta = 0{,}250$) varia solo la legge delle σ e τ rimanendo però la $\tau_{max} = 0{,}571$. (E cioè i valori sulla prima corda del rettangolo 2 sono sempre gli stessi).

Questo succede fino ad un certo valore di β, che varia per ogni profilato, dopo del quale la distribuzione varia e quindi il dominio si stacca da quello di Rankine.

Questa corrispondenza che lega ad un valore di T più valori di M si giustifica considerando che, per valori M – T particolari, e cioè β molto basso, le ali non danno notevole contributo al taglio; il valore del taglio ammissibile dipende unicamente dalle dimensioni dell'anima e pertanto finché sulla ala non si registrano valori di σ tali da imporre una riduzione cospicua delle τ sull'anima, cioè finché il valore estremo di τ sarà $0{,}571 = \sqrt{3}\,\sigma_o$, T_{kc} sarà praticamente uguale a T_o.

È chiaro quindi che all'aumentare di M, e quindi di β, si esaspera la costanza delle σ sull'ala figg. (15-16-17) riducendosi la τ e la curva del dominio si distacca da quella alla Rankine (figg. 18 e 19).

Il distacco del dominio esatto da quello di Rankine avviene tanto più rapidamente per quanto maggiore è lo spessore dell'anima rispetto a quello dell'ala.

Infatti se si aumenta il valore dell'anima rispetto a quello dell'ala (questo funziona per travi che devono sostenere forti valori del ta-

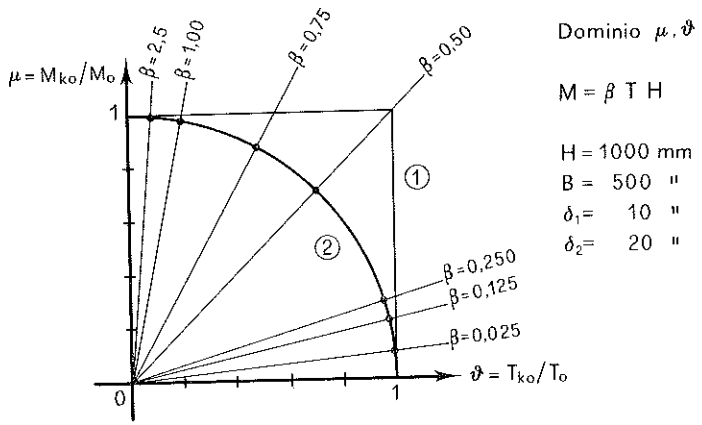


FIG. 19

glio) succede che la τ all'estremo superiore dell'anima si riduce (per rapporti $\delta_1/\delta_2 > 1$) rispetto a quella dell'ala essendo

$$\tau_{anima} = 2\,\tau_{a|o}\,\delta_1/\delta_2$$

e quindi più rapidamente si ha $T_{ko} \neq T_o$.

Per i profilati normali (serie IPE ed HE) il tratto costante con β è più ampio essendo per quest profilati $\delta_1 > \delta_2$. e cioè per questi profilati, proporzionati soprattutto per azioni flettenti, occorrono alti valori di β per trovare uno scostamento del dominio di Rankine.

BIBLIOGRAFIA

[1] HODGE P. G., *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill, New York, 1959.
[2] FRANCIOSI V., *Scienza delle Costruzioni*, vol. IV, *Calcolo a Rottura*, ed. Liguori, Napoli, 1964.
[3] MASSONET C. - SAVE M., *Calcolo a rottura delle strutture*, Zanicheli, Bologna, 1967.
[4] FRANCIOSI V., *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, ed. Liguori, Napoli, 1976.
[5] FRANCIOSI V. - MACERI F., *Il collasso plastico da meccanismi* (in corso di stampa).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Vincenzo Franciosi, Carlo Miranda e Carlo Tolotti.

Alcuni omomorfismi tra reticoli di sottogruppi

Nota di FRANCESCO de GIOVANNI (a Napoli)
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

SUMMARY. — Let G be a p-group ($p > 2$), not locally cyclic, and verifying the condition on normalizers, H a group and $\varphi : l(G) \to l(H)$ a $\vee$-complete homomorphism such that $\varphi(l(G)) = sn(H)$; then H is a p-group, locally finite and $|G| = |H|$. Besides if G is an abelian torsion-free group, H is locally nilpotent and φ is complete, also H is an abelian torsion-free group.

SOMMARIO. — Siano: G un p-gruppo ($p > 2$) non localmente ciclico è verificante la condizione dei normalizzatori, H un gruppo e $\varphi : l(G) \to l(H)$ un omomorfismo $\vee$-completo tale che $\varphi(l(G)) = sn(H)$; allora H è un p-gruppo localmente finito e $|G| = |H|$. Inoltre se G è un gruppo abeliano senza torsione, H è localmente nilpotente e φ è completo, anche H è abeliano senza torsione.

N. 1. — I sottogruppi di un gruppo G costituiscono un reticolo $l(G)$, non sempre l'insieme $sn(G)$ dei sottogruppi subnormali di G può essere strutturato come un sottoreticolo di $l(G)$.

Nel presente lavoro si considerano alcuni omomorfismi $\varphi : l(G) \to l(H)$ tali che $\varphi(l(G)) = sn(H)$; in questi casi $sn(H)$ è ovviamente sottoreticolo di $l(H)$. Se G è un p-gruppo verificante la condizione dei normalizzatori e se p è un primo > 2, supposto φ $\bigvee$-completo [1] e G non localmente ciclico, si prova (cfr. N. 2) che H è un p-gruppo localmente finito ed equipotente a G. Nel N. 3, se G è abeliano aperiodico ed H localmente nilpotente, si riconosce che la completezza di φ implica che H è abeliano senza torsione.

Nomenclatura e notazioni sono per lo più quelle usuali, in particolare si fa riferimento a [1] e [6].

[1] Sia $\varphi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ un omomorfismo di reticoli. Dicesi che φ è $\vee$-*completo* ($\wedge$-*completo*) se, e solo se, si ha $\varphi(\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} \varphi x_i$ ($\varphi(\bigwedge_{i \in I} x_i) = \bigwedge_{i \in I} \varphi x_i$) per ogni famiglia $(x_i)_{i \in I}$ di elementi di $\mathfrak{L}$; un omomorfismo allo stesso tempo $\vee$ e $\wedge$-completo chiamasi *completo*.

N. 2. — HEINEKEN [4] ha dimostrato tra l'altro che se G è un p-gruppo finito non ciclico e se $p > 2$, l'esistenza di un isomorfismo $l(G) \to sn(H)$ comporta $|G| = |H|$. Allo scopo di conseguire una generalizzazione di questo risultato, si premettono alcune proposizioni.

2.1. — *Siano: $\mathfrak{L}$ ed $\mathfrak{L}'$ reticoli dotati di massimo e di minimo, $\varphi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}'$ un epimorfismo. Se x è un atomo duale di $\mathfrak{L}$ e se $\varphi x \neq 1$, φx è un atomo duale di $\mathfrak{L}'$.*

Dimostrazione. Negando la tesi si abbia $\varphi x < y < 1$ per qualche $y \in \mathfrak{L}'$. Considerato un $x' \in \mathfrak{L}$ tale che $\varphi x' = y$, non può essere $x' \leq x$ in quanto si avrebbe $y = \varphi x' \leq \varphi x$, riesce così [2] $1 = \varphi(1) = \varphi(x \vee x') = \varphi x \vee \varphi x' = \varphi x \vee y = y < 1$, ciò che è assurdo

2.2. — *Siano: G un p-gruppo finito non ciclico, $\varphi : l(G) \to l(H)$ un omomorfismo tale che $\varphi(l(G)) = sn(H)$ ed $H \neq 1$. Allora, se $p > 2$ o se G è abeliano, si ha $|G| = |H|$.*

Dimostrazione. Per un teorema [3] di SUZUKI φ è un isomorfismo, dopo di ciò (cfr. [4]) risulta $|G| = |H|$.

Si è ora in grado di ottenere il

TEOREMA 2.3. — *Siano: G un p-gruppo verificante la condizione dei normalizzatori e non localmente ciclico, $\varphi : l(G) \to l(H)$ un omomorfismo $\vee$-completo tale che $\varphi(l(G)) = sn(H)$ ed $H \neq 1$. Allora, se $p > 2$ o se G è abeliano, H è un p-gruppo localmente finito ed $|G| = |H|$.*

Dimostrazione. L'omomorfismo φ è $\vee$-completo e perciò si trova un sottogruppo finito $A \leq G$ tale che $\varphi(A) \neq 1$, ma esiste anche un sottogruppo finito non ciclico $B \leq G$ e, tenuto conto [4] che $|A \vee B| < \infty$, $K = A \vee B$ è un sottogruppo finito e non ciclico e $\varphi(K) \neq 1$. Riesce $G = \bigvee_{X \in I} X$ con ogni X finito ed includente K, si ha pure $\varphi(X) \neq 1$ e φ subordina un omomorfismo $\psi : l(X) \to l(\varphi(X))$ con $\varphi(l(X)) = sn(\varphi(X))$, e per la 2.2 si ottiene $|X| = |\varphi(X)|$.

Da quanto precede discende facilmente che H è un p-gruppo localmente finito. Si proverà per induzione transfinita che $|G| = |H|$.

[2] Ovviamente: $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(0) = 0$.

[3] Siano: G un p-gruppo finito, $\mathfrak{L}$ un reticolo non banale, φ un epimorfismo $l(G) \to \mathfrak{L}$. Se φ non è un isomorfismo, G è ciclico o quaternionale (cfr. [7]).

[4] Un gruppo verificante la condizione dei normalizzatori è localmente nilpotente (cfr. ad es. [6]).

Il gruppo G verifica la condizione dei normalizzatori e quindi esiste una serie ascendente

$$1 = H_0 < H_1 < \ldots < H_\alpha < H_{\alpha+1} < \ldots < H_\gamma = G$$

a fattori di ordine p. Posto $K_\alpha = \varphi(H_\alpha)$, si assuma come lecito $K_\alpha \neq K_\beta$ per $\alpha \neq \beta$.

Assunto $|K_\alpha| = |H_\alpha|$, si riconoscerà che $|K_{\alpha+1}| = |H_{\alpha+1}|$. La restrizione di φ ad $l(H_{\alpha+1})$ è un omomorfismo $l(H_{\alpha+1}) \to l(K_{\alpha+1})$ tale che $\varphi(l(H_{\alpha+1})) = sn(K_{\alpha+1})$ ed inoltre (cfr. 2.1) K_α è normale massimale in $K_{\alpha+1}$, perciò, essendo H localmente nilpotente, riesce $|K_{\alpha+1}/K_\alpha| = p$ e quindi $|K_{\alpha+1}| = |H_{\alpha+1}|$. Se poi α è un ordinale limite e $|K_\beta| = |H_\beta|$ per ogni $\beta < \alpha$, $K_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ è ovviamente della stessa cardinalità di H_α.

OSSERVAZIONE. — Nel TEOREMA 2.3, se G non è abeliano, non si può prescindere dall'ipotesi $p > 2$. Esistono controesempi con G finito o non, come illustra la situazione seguente: G localmente quaternionale, H un gruppo semplice $\neq 1$, $\varphi : l(G) \to l(H)$ dove $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(K) = H$ per $K \neq 1$.

Si tratterà ora il caso dei p-gruppi localmente ciclici.

2.4. — *Sia* G *un gruppo iperabeliano con* $sn(G)$ *catena ascendente di tipo ordinale* ω. *Allora* G *è isomorfo a qualche* $Z(p^\infty)$.

Dimostrazione. Ogni sottogruppo subnormale $H < G$ è metabeliano e finito[5], inoltre G è unione insiemistica dei suddetti H. Ne segue che G è metabeliano e che quindi $G' < G$. Dopo di ciò G' è finito in quanto sottogruppo subnormale proprio di G.

Il gruppo $G/Z_G(G')$ ha ordine finito al pari di G' e, siccome ogni quoziente $\neq 1$ di G è infinito, si ottiene $G' \leq Z(G)$; in tal modo G risulta nilpotente e, poiché $sn(G)$ è una catena, si ha $G \simeq Z(p^\infty)$.

TEOREMA 2.5. — *Siano*: G *un p-gruppo localmente ciclico,* H *un gruppo iperabeliano* $\neq 1$, $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un omomorfismo* $\vee$*-completo tale che* $\varphi(l(G)) = sn(H)$. *Allora* H *è un gruppo di uno dei tipi seguenti*:

(1) *gruppo ciclico primario;*

(2) *di ordine* $q^\alpha \cdot t^\beta$ (q, t *primi*) *a sottogruppi di* SYLOW *ciclici e con* $Z_H(H') = H'$;

(3) *isomorfo a qualche* $Z(q^\infty)$.

[5] Si constata facilmente che H è finito, come discende dalla finitezza di $sn(H)$ e dall'essere H iperabeliano. Dopo di ciò (cfr. [2]), H è a sottogruppi di SYLOW ciclici e perciò metabeliano.

Dimostrazione. Il reticolo $sn(H)$ *è una catena di tipo ordinale* $\alpha \leq \omega$. Se $\alpha < \omega$, α risulta finito e quindi (cfr. [2]) G è un gruppo di uno dei tipi (1) e (2). Se $\alpha = \omega$, la 2.4 assicura che G è isomorfo a qualche $Z(q^\infty)$.

N. 3. — Siano: G un gruppo abeliano aperiodico, H un gruppo localmente nilpotente, $\varphi : l(G) \to l(H)$ un omomorfismo completo tale che $\varphi(l(G)) = sn(H)$. Si dimostrerà che anche H è abeliano senza torsione.

3.1. — *Siano*: G *un gruppo aperiodico,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un omomorfismo completo tale che* $\varphi(l(G)) = sn(H)$. *Allora* H *non possiede sottogruppi subnormali semplici* $\neq 1$.

Dimostrazione. Negando la tesi, sia $K \neq 1$ un sottogruppo semplice e subnormale di H. Considerato un $\bar{K} \leq G$ per cui $\varphi(\bar{K}) = K$, φ determina un epimorfismo completo di $l(\bar{K})$ su $\{1, K\}$; in tal modo $\bar{K} \neq 1$ è periodico [6] e si perviene a un assurdo.

3.2. — *Siano*: G *un gruppo aperiodico,* H *un* S*-gruppo risolubile,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un omomorfismo completo tale che* $\varphi(l(G)) = sn(H)$. *Allora* H *è aperiodico.*

Dimostrazione. Se H è abeliano, l'asserto segue da 3.1. Supposto H di lunghezza derivata $n > 1$, si farà induzione su n. Considerato un $K \leq G$ per cui $\varphi K = H'$, φ subordina un omomorfismo completo $l(K) \to l(H')$ e si ha $\varphi(l(K)) = sn(H')$; per l'ipotesi induttiva H' è aperiodico. Negando la tesi, esista un $x \in H$ di ordine primo. Riesce $H' < x > \in sn(H)$ ed inoltre $H' < x > = H' \times < x >$ in quanto H è un S-gruppo; ne segue $< x > \in sn(H)$ e ciò è assurdo per la 3.1.

Si è ora in grado di ottenere il

TEOREMA 3.3. — *Siano*: G *un gruppo abeliano aperiodico,* H *un gruppo localmente nilpotente,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un omomorfismo completo tale che* $\varphi(l(G)) = sn(H)$. *Allora* H *è abeliano senza torsione.*

Dimostrazione. Il reticolo $sn(H)$ è modulare tale essendo $l(G)$, sicché lo è pure $l(H)$ (cfr. [5]). I classici teoremi di IWASAWA sui gruppi modulari assicurano che H è risolubile, ma allora (cfr. 3.2) H

[6] Siano: G un gruppo aperiodico, $\mathfrak{L}$ una catena finita con $|\mathfrak{L}| > 1$. Allora non esiste alcun epimorfismo completo di $l(G)$ su $\mathfrak{L}$ (cfr. [8]).

è aperiodico. La dimostrazione si completa osservando che ogni gruppo modulare aperiodico è abeliano.

OSSERVAZIONE. — Nelle ipotesi del TEOREMA 3.3, G e H possono non essere isomorfi. Se G è il gruppo additivo razionale e se H è ciclico infinito, esiste infatti un epimorfismo completo di $l(G)$ su $l(H)$ (cfr. [8]).

Si concluderà osservando che

TEOREMA 3.4. — *Siano*: G *un gruppo abeliano libero,* $H \neq 1$ *un gruppo localmente nilpotente,* $\varphi : l(G) \to l(H)$ *un omomorfismo completo tale che* $\varphi(l(G)) = sn(H)$. *Allora* H *e* G *sono isomorfi.*

Dimostrazione. H è abeliano aperiodico (cfr. TEOR. 3.3) e, ciò osservato, si supponga in primo luogo G ciclico. Considerati un sottogruppo $K \neq 1$ di H e un $\bar{K} \leq G$ tale che $\varphi(\bar{K}) = K$, φ subordina un epimorfismo $l(G/\bar{K}) \to l(H/K)$, onde H/K è finito tale essendo $G/\bar{K}$. Per un teorema di FEDOROV [3] l'arbitrarietà di K assicura che H è ciclico. Si abbia ora $G = \underset{i \in I}{\times} G_i$ con ogni G_i ciclico infinito. Riesce [7] $\varphi(G_i) \neq 1$ e φ determina un epimorfismo completo $l(G_i) \to l(\varphi(G_i))$, per quanto sopra visto G_i e $\varphi(G_i)$ sono isomorfi, onde G è isomorfo ad $H = \underset{i \in I}{\times} \varphi(G_i)$.

[7] Siano: G un gruppo aperiodico, φ un epimorfismo completo di $l(G)$ su di un reticolo non banale. Allora da $A \leq G$ e $\varphi(A) = 0$ discende $A = 1$ (cfr. [8]).

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRKHOFF G., *Lattice theory,* Amer. Math. Soc. Providence (1967).

[2] CURZIO M., *Sul reticolo dei sottogruppi di composizione di alcuni gruppi finiti,* Boll. UMI, Serie III, Anno XII, 284-289 (1957).

[3] FEDOROV Y. G., *On infinite groups every non-trivial subgroup of which has finite index,* Uspehi Mat. Nauk., **6**, 187-189 (1951).

[4] HEINEKEN H., *Über die Charakterisierung von Gruppen durch gewisse Untergruppenverbände,* J. Reine und angew Math., **220**, 30-36 (1965).

[5] NAPOLITANI F., *Modularità e distributività nell'insieme dei sottogruppi subnormali,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **43**, 215-219 (1970).

[6] ROBINSON J. D., *Finiteness conditions and generalized soluble groups,* Part 1, 2, Ergebnisse der Math., 62-63 (1972).

[7] SUZUKI M., *On the L-homomorphisms of finite groups,* Trans. Amer. Math. Soc., **70**, 372-386 (1951).

[8] SUZUKI M., *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups,* Ergebnisse der Math., 10 (1956).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, G. Scorza-Dragoni e C. Miranda.

Sul prolungamento delle funzioni numerabilmente additive

Nota di IMMACOLATA DEL PRETE
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

RIASSUNTO. — L'autore dà una generalizzazione di un teorema di prolungamento di J. VON NEUMANN relativo a funzioni numerabilmente additive in un half-ring, sostituendo alla struttura di half-ring una struttura più generale.

SUMMARY. — The author generalizes a VON NEUMANN extension theorem for countably additive functions on an half-ring by replacing the structure of half-ring with a more general one.

Rimonta a J. VON NEUMANN un notevole teorema di prolungamento concernente le funzioni numerabilmente additive in un *half-ring* [1].

Una generalizzazione di tale teorema di prolungamento è stata data da F. CAFIERO [2] che ha sostituito alla struttura di *half-ring* una struttura più generale, quella di *famiglia generatrice di un clan* [3].

Un'altra generalizzazione del citato teorema di J. VON NEUMANN è stata data da A. C. ZAANEN [4] che ha sostituito alla struttura di *half-ring* quella più generale di *semi-ring* [5].

---

[1] Cfr. J. VON NEUMANN [6], p. 94 th 10-1-12; p. 95, th 10-1-14. Cfr. anche P. R. HALMOS [4], p. 37 (5).

Un insieme H non vuoto di parti di un insieme S chiamasi *half-ring* quando le intersezioni di coppie di insiemi di H appartengono a H e per ogni differenza propria X-Y di insiemi di H, esiste una famiglia finita crescente $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, $n > 1$, di insiemi di H, di primo elemento Y e di ultimo elemento X, tale che le differenze proprie $H_{i+1} - H_i$ appartengono a H per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

[2] Cfr. F. CAFIERO [2], p. 89, proposizione 4.

[3] Un insieme $\mathfrak{F}$ non vuoto di parti di un insieme S chiamasi *famiglia generatrice di un clan* quando l'insieme delle unioni finite di insiemi mutualmente disgiunti di $\mathfrak{F}$ è un *clan* (per la nozione di *clan*, cfr. N. DINCULEANU [3], p. 1). Si verifica facilmente che: *condizione necessaria e sufficiente perché un insieme non vuoto* $\mathfrak{F}$ *di parti di un insieme* S *sia una famiglia generatrice di un clan è che le intersezioni di coppie di insiemi di* $\mathfrak{F}$ *e le differenze proprie di insiemi di* $\mathfrak{F}$ *siano unioni finite di insiemi mutualmente disgiunti di* $\mathfrak{F}$ (cfr. F. CAFIERO, G. LETTA e A. ZITAROSA, *Misura e integrazione*, Liguori editore, in corso di stampa).

[4] Cfr. A. C. ZAANEN [8], p. 22-27.

[5] Un insieme $\mathfrak{S}$ non vuoto di parti di un insieme S chiamasi *semi-ring* quando le intersezioni di coppie di insiemi di $\mathfrak{S}$ appartengono a $\mathfrak{S}$, e le differenze proprie di insiemi di $\mathfrak{S}$ sono unioni numerabili di insiemi mutualmente disgiunti di $\mathfrak{S}$.

Poiché la suddetta proposizione di A. C. ZAANEN non è confrontabile con quella di F. CAFIERO, si pone la questione di una ulteriore generalizzazione del teorema di J. VON NEUMANN contenente le citate proposizioni di F. CAFIERO e A. C. ZAANEN.

A tale questione è appunto dedicata questa nota, nella quale si dà una generalizzazione del teorema di J. VON NEUMANN sostituendo alla struttura di *half-ring* una nuova struttura, più generale di quelle considerate da F. CAFIERO e A. C. ZAANEN, che viene chiamata *nucleo* (cfr. n. 1).

La ricerca è condotta fruendo della teoria degli insiemi misurabili (secondo CARATHÉODORY) rispetto a una misura.

1. — Un insieme non vuoto $\mathfrak{N}$ di parti di un insieme S sarà detto un *nucleo* su S quando per ogni coppia (X, Y) di insiemi di $\mathfrak{N}$ esistono una partizione di $X \cap Y$ e una di $X - Y$ con gli elementi in $\mathfrak{N}$, entrambe numerabili [6].

In proposito, utile è l'osservazione seguente:

(1.1) *Una funzione numerica* φ *non negativa, numerabilmente additiva in un nucleo* $\mathfrak{N}$, *è numerabilmente sub-additiva in senso forte* [7].

Dim. — Se X è un elemento di $\mathfrak{N}$ e $(X_n)_{n\in I}$ è un ricoprimento numerabile di X con gli elementi in $\mathfrak{N}$ [8], posto $Y_1 = X_1$ e, per ogni indice $n > 1$,

$$Y_n = X_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i ,$$

per ogni $n \in I$ esiste evidentemente una partizione numerabile (Z_k^n) di $Y_n \cap X$ con gli elementi in $\mathfrak{N}$.

Poiché risulta

$$X = \bigcup_n \bigcup_k Z_k^n ,$$

---

[6] Precisiamo esplicitamente che in questa nota chiamiamo numerabile un insieme che sia equipotente a una parte di N.

[7] Una funzione numerica φ non negativa definita in un insieme $\mathfrak{I}$ di parti di un insieme S dicesi *finitamente* (risp. *numerabilmente*) *sub-additiva* (in $\mathfrak{I}$) *in senso forte* quando, qualunque siano l'elemento X di $\mathfrak{I}$ e il ricoprimento (X_n) finito (risp. numerabile) di X con gli elementi in $\mathfrak{I}$, risulta

$$\varphi(X) \leq \sum_n \varphi(X_n).$$

[8] Qui e nel seguito supponiamo che l'insieme degli indici di un ricoprimento numerabile sia un intervallo di N di primo elemento 1.

per la numerabile additività di φ risulta

$$\varphi(X) = \sum_n \sum_k \varphi(Z_k^n);$$

essendo inoltre, per ogni $n \in I$

$$\bigcup_k Z_k^n \subseteq X_n,$$

per la super-additività di φ [9] si ha evidentemente:

$$\sum_k \varphi(Z_k^n) \leq \varphi(X_n)$$

e quindi

$$\varphi(X) \leq \sum_n \varphi(X_n)$$

Una condizione sufficiente per la misurabilità di un insieme X rispetto alla misura esterna γ_* generata da una funzione (non negativa) γ [10] è fornita dalla proposizione seguente:

(1.2) *Un insieme* X *è misurabile rispetto alla misura esterna* γ_* *generata da una funzione* γ *(non negativa) se, per ogni elemento* Y *dell'insieme di definizione* $\mathfrak{I}$ *di* γ, *esistono una partizione numera-*

---

[9] Una funzione numerica φ non negativa definita in un insieme $\mathfrak{I}$ di parti di un insieme S dicesi *super-additiva* (in $\mathfrak{I}$) quando qualunque siano l'elemento X di $\mathfrak{I}$ e la famiglia finita (X_n) di elementi di $\mathfrak{I}$ contenuti in X e mutualmente disgiunti, risulta

$$\varphi(X) \geq \sum_n \varphi(X_n).$$

Si verifica facilmente che una funzione φ non negativa numerabilmente additiva in un nucleo $\mathfrak{N}$ è *super-additiva*.

Detto infatti A un elemento di $\mathfrak{N}$ e (A_n) una famiglia finita di elementi di $\mathfrak{N}$ contenuti in A, poiché

$$A - \bigcup_n A_n = \bigcap_n (A - A_n)$$

esiste una partizione numerabile (B_m) di $A - \bigcup_n A_n$ con gli elementi in $\mathfrak{N}$.

Dalla relazione

$$A = (\bigcup_n A_n) \cup (\bigcup_m B_m),$$

in virtù della numerabile additività di φ si ha quindi

$$\varphi(A) \geq \sum_n \varphi(A_n).$$

[10] Chiamasi *misura esterna* una funzione nulla sul vuoto numerabilmente subadditiva in senso forte in una tribù ereditaria (per la nozione di tribù ereditaria, cfr. N. DINCULEANU [3], p. 64).

Se γ è una funzione numerica non negativa definita in un insieme $\mathfrak{I}$ di parti di un insieme S al quale appartenga il vuoto, nulla sul vuoto, e se $\mathfrak{S}(\mathfrak{I})$ è la più

bile (Y'_n) *di* $Y \cap X$ *e una partizione numerabile* (Y''_m) *di* $Y - X$ *con gli elementi in* $\mathfrak{I}$, *tale che*

$$\gamma(Y) \geq \sum_n \gamma(Y'_n) + \sum_m \gamma(Y''_m).$$

Dim. — Se Y è un elemento di $\mathfrak{G}(\mathfrak{I})$ [11] e ε è un numero reale positivo, esiste un ricoprimento numerabile $(\bar{Y}_n)$ di Y con gli elementi in $\mathfrak{I}$ tale che

$$\gamma_*(Y) + \varepsilon \geq \sum_n \gamma(\bar{Y}_n). \tag{1}$$

In virtù delle ipotesi fatte esistono, per ogni n, una partizione numerabile (Z'^n_h) di $\bar{Y}_n \cap X$ e una partizione numerabile (Z''^n_k) di $\bar{Y}_n - X$, entrambe con gli elementi in $\mathfrak{I}$, tali che

$$\gamma(\bar{Y}_n) \geq \sum_h \gamma(Z'^n_h) + \sum_k \gamma(Z''^n_k).$$

Poiché risulta

$$\sum_h \gamma(Z'^n_h) \geq \gamma_*(\bar{Y}_n \cap X)$$

$$\sum_k \gamma(Z''^n_k) \geq \gamma_*(\bar{Y}_n - X)$$

si ha anche

$$\sum_n \gamma(\bar{Y}_n) \geq \sum_n \gamma_*(\bar{Y}_n \cap X) + \sum_n \gamma_*(\bar{Y}_n - X).$$

Essendo

$$Y \cap X \subseteq \bigcup_n (\bar{Y}_n \cap X) \quad \text{e} \quad Y - X \subseteq \bigcup_n (\bar{Y}_n - X),$$

in virtù della sub-additività in senso forte di γ_* si ha

$$\sum_n \gamma(\bar{Y}_n) \geq \gamma_*(Y \cap X) + \gamma_*(Y - X)$$

---

piccola tribù ereditaria di parti di S contenente $\mathfrak{I}$, denotato, per ogni X di $\mathfrak{G}(\mathfrak{I})$, con $\mathfrak{F}_X$ l'insieme dei ricoprimenti numerabili di X con gli elementi in $\mathfrak{I}$, l'applicazione definita in $\mathfrak{G}(\mathfrak{I})$:

$$\gamma_* : X \to \inf_{(X_n \in \mathfrak{F}_X)} \sum_n \gamma(X_n)$$

è la più grande misura esterna in $\mathfrak{G}(\mathfrak{I})$ avente restrizione a $\mathfrak{I}$ minore o uguale a γ.

Essa dicesi misura esterna generata da γ ed è un prolungamento di γ se γ è numerabilmente sub-additiva in senso forte.

[11] Cfr. nota 10.

e quindi in virtù della (1)

$$\gamma_* (Y) \geq \gamma_* (Y \cap X) + \gamma_* (Y - X)$$

e che implica l'asserto.

Utile è anche osservare che:

(1.3) *Due misure positive in una tribù* $\mathcal{T}$ *sono* σ*-finite* [12] *e uguali se tali sono le loro restrizioni a un generatore* $\mathcal{I}$ *di* $\mathcal{T}$ *tale che, per ogni coppia di suoi elementi, esista una partizione numerabile, con elementi in* $\mathcal{I}$*, della loro intersezione.*

Dim. — Poiché il reticolo $\mathcal{R}$ generato da $\mathcal{I}$ è l'insieme costituito dal vuoto e dalle unioni finite di intersezioni finite di insiemi di $\mathcal{I}$ e d'altro canto ogni intersezione finita di insiemi di $\mathcal{I}$ ammette una partizione numerabile con gli elementi in $\mathcal{I}$, si verifica facilmente che due misure positive in $\mathcal{T}$ μ_1 e μ_2, coincidenti e σ-finite in $\mathcal{I}$, coincidono e sono σ-finite in $\mathcal{R}$.

Invero μ_1 e μ_2 sono evidentemente σ-finite anche in $\mathcal{R}$ e coincidono sulle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{I}$. Conseguentemente, essendo modulari in $\mathcal{R}$ (in quanto modulari in $\mathcal{T}$), coincidono anche sulle unioni finite di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{I}$ [13] e quindi in $\mathcal{R}$.

Poiché, in virtù della σ-finitezza di μ_1 e μ_2 in $\mathcal{R}$, la tribù generata da $\mathcal{R}$ coincide con la tribù generata dal sottoreticolo $\mathcal{R}'$ di $\mathcal{R}$ costituito dagli elementi di $\mathcal{R}$ sui quali le misure sono reali, l'asserto sarà acquisito se faremo vedere che μ_1 e μ_2 sono σ-finite e uguali sulla tribù generata da $\mathcal{R}'$.

Ora, poiché il clan $\mathcal{C}$ generato da $\mathcal{R}'$ è l'insieme delle parti di S ognuna delle quali è una unione finita di differenze proprie mutualmente disgiunte di insiemi di $\mathcal{R}'$, si ha che μ_1 e μ_2 coincidono e sono σ-finite su $\mathcal{C}$.

---

[12] Una funzione numerica α non negativa definita in un insieme $\mathcal{I}$ di parti di un insieme S dicesi σ-finita in $\mathcal{I}$ quando, qualunque sia l'insieme X di $\mathcal{I}$, esiste un ricoprimento numerabile (X_n) di X con gli elementi di $\mathcal{I}$, tale che

$$\alpha (X_n) < + \infty$$

per ogni n.

[13] Se φ è una funzione modulare in un reticolo $\mathcal{R}$, qualunque sia l'intero positivo $n \geq 2$ e l'n-pla $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ di elementi di $\mathcal{R}$ risulta

$$\sum_{I \in P'_n} \varphi \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) + \varphi \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{I \in P''_n} \varphi \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)$$

dove P'_n e P''_n denotano rispettivamente l'insieme delle parti di $\{1, \ldots, n\}$ il cui cardinale è dispari e quello delle parti non vuote di $\{1, \ldots, n\}$ il cui cardinale è pari.

Resta da dimostrare che μ_1 e μ_2 coincidono sulla tribù $\mathcal{T}$ generata da $\mathcal{C}$.

Detto $\mathcal{K}$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{T}$ su cui μ_1 e μ_2 coincidono, chiaramente si ha

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}.$$

Se A_n è una successione crescente di elementi di $\mathcal{K}$, posto

$$A = \bigcup_n A_n ,$$

si ha che

$$\mu_1(A) = \lim_n \mu_1(A_n) = \lim_n \mu_2(A_n) = \mu_2(A)$$

e quindi A appartiene a $\mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ è pertanto un insieme monotono [14] contenente $\mathcal{C}$ e quindi necessariamente

$$\mathcal{K} = \mathcal{T} \text{ [15]}.$$

La σ-finitezza di μ_1 e μ_2 consegue dalla osservazione che ogni insieme di $\mathcal{T}$ è contenuto in una unione numerabile di insiemi di $\mathcal{J}$.

2. — Denotato, per ogni insieme non vuoto $\mathcal{J}$ di parti di S con $\mathcal{S}(\mathcal{J})$ la tribù generata da $\mathcal{J}$, dimostriamo la proposizione seguente:

(2.1) *Se la funzione γ σ-finita in un insieme $\mathcal{J}$ è tale che gli insiemi di $\mathcal{J}$ siano misurabili rispetto alla misura esterna γ_* generata da γ, l'insieme $\mathfrak{M}$ dei γ_*-misurabili appartenenti a $\mathcal{S}(\mathcal{J})$ è il completamento di $\mathcal{S}(\mathcal{J})$ rispetto alla restrizione di γ_* a $\mathcal{S}(\mathcal{J})$.*

Dim. — Poiché $\mathcal{J}$ è contenuto nella tribù $\mathfrak{M}$ risulta:

$$\mathcal{S}(\mathcal{J}) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Ciò posto dimostriamo innanzitutto che per ogni $X \in \mathcal{S}(\mathcal{J})$ esiste un elemento Y di $\mathcal{S}(\mathcal{J})$ (e quindi di $\mathfrak{M}$) tale che

$$Y \supseteq X \quad \text{e} \quad \gamma_*(Y) = \gamma_*(X).$$

---

[14] Cfr. N. DINCULEANU [3], p. 9.

[15] Si osservi che la tribù generata da un clan $\mathcal{C}$ è il più piccolo insieme monotono contenente $\mathcal{C}$.

Ovviamente, per ogni $k \in \mathrm{N}$, esiste un ricoprimento (X_n^k) di X con gli elementi in $\mathfrak{I}$, tale che

$$\sum_n \gamma(\mathrm{X}_n^k) \leq \gamma_*(\mathrm{X}) + \frac{1}{k}.$$

Posto $\mathrm{X}_k = \bigcup_n \mathrm{X}_k^n$ si ha per la numerabile sub-additività di γ_*

$$\gamma_*(\mathrm{X}_k) \leq \sum_n \gamma_*(\mathrm{X}_n^k) \leq \sum_n \gamma(\mathrm{X}_n^k) \leq \gamma_*(\mathrm{X}) + \frac{1}{k}.$$

Allora l'elemento di $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$

$$\mathrm{Y} = \bigcap_k \mathrm{X}_k$$

contiene X ed è tale che

$$\gamma_*(\mathrm{X}) = \gamma_*(\mathrm{Y}).$$

Dimostriamo ora che se A è un elemento di $\mathfrak{M}$, A è del tipo

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}' \cup \mathrm{A}''$$

dove A' appartiene a $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$ e A'' è contenuto in un insieme B di $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$ tale che $\gamma_*(\mathrm{B}) = 0$.

Sia $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}$ e sia $\gamma_*(\mathrm{A}) < +\infty$. Per quanto detto esiste un elemento C di $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$ (e quindi di $\mathfrak{M}$) tale che

$$\mathrm{C} \supseteq \mathrm{A} \quad \text{e} \quad \gamma_*(\mathrm{C}) = \gamma_*(\mathrm{A});$$

ne segue che

$$\gamma_*(\mathrm{C} - \mathrm{A}) = 0.$$

Sia D un elemento di $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$ contenente $\mathrm{C} - \mathrm{A}$ e tale che

$$\gamma_*(\mathrm{D}) = \gamma_*(\mathrm{C} - \mathrm{A}) = 0$$

e sia ancora E un elemento di $\mathcal{S}(\mathfrak{I})$ contenente $\mathrm{A} \cap \mathrm{D}$ e tale che

$$\gamma_*(\mathrm{E}) = \gamma_*(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}).$$

Essendo evidentemente

$$\gamma_*(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) \leq \gamma_*(\mathrm{D}) = 0$$

si ha $\gamma_*(\mathrm{E}) = 0$.

Poiché risulta $A = (C - D) \cup (A \cap D)$ l'asserto è, nel caso in esame, dimostrato.

Sia ora $A \in \mathfrak{M}$ e $\gamma_*(A) = +\infty$. In virtù della σ-finitezza di γ e della misurabilità degli insiemi di $\mathfrak{I}$ esiste una successione $(\bar{A}_n)$ di insiemi misurabili e di misura γ_* finita la cui unione è A [16].

Allora, per ogni n, risulta

$$\bar{A}_n = A_n' \cup A_n''$$

dove A_n' è un elemento di $\mathfrak{S}(\mathfrak{I})$ e A_n'' è contenuto in un elemento B_n di $\mathfrak{S}(\mathfrak{I})$ tale che

$$\gamma_*(B_n) = 0.$$

Poiché

$$A = (\bigcup_n A_n')\cup(\bigcup_n A_n'')$$

e inoltre $\bigcup_n A_n'$ è un elemento di $\mathfrak{S}(\mathfrak{I})$ mentre $\bigcup_n A_n''$ è contenuto in $\bigcup_n B_n$ che è un elemento di $\mathfrak{S}(\mathfrak{I})$ su cui γ_* ha valore 0, l'asserto è dimostrato.

Siamo ora in grado di dimostrare la proposizione seguente

(2.2) *Se μ è una funzione σ-finita numerabilmente additiva in un nucleo $\mathfrak{N}$, la misura $\bar{\mu}$ indotta dalla misura esterna μ_* generata da μ è σ-finita e completa ed è l'unica misura che sia un prolungamento di μ sulla tribù $\mathfrak{M}$ degli elementi μ_*-misurabili di $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$. La tribù $\mathfrak{M}$ è il completamento della tribù $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$ generata da $\mathfrak{N}$ rispetto alla restrizione di μ_* e $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$.*

Dim. — Poiché μ è numerabilmente additiva in $\mathfrak{N}$, in virtù della (1.1) è anche numerabilmente sub-additiva in senso forte: ne segue che la misura esterna μ_* (generata da μ) è un prolungamento di μ.

Poiché inoltre gli elementi di $\mathfrak{N}$ sono μ_*-misurabili (soddisfano infatti alla condizione enunciata nella (1.2)) anche la misura $\bar{\mu}$ indotta dalla misura esterna μ_* è un prolungamento di μ.

Evidentemente $\bar{\mu}$ è completa ed è (cfr. 1.3)) l'unico prolungamento σ-finito di μ sulla tribù $\mathfrak{M}$ degli elementi μ_*-misurabili di $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$.

Dalla (2.1) segue infine che $\mathfrak{M}$ è il completamento di $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$ rispetto alla restrizione di μ_* a $\mathfrak{S}(\mathfrak{N})$.

---

[16] Invero l'insieme A è contenuto in una unione numerabile di insiemi di $\mathfrak{I}$, epperò anche, in virtù della σ-finitezza di γ, in una unione numerabile di insiemi di cui $\mathfrak{I}$ su cui γ è reale.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. K. BERBERIAN, *Measure and integration*, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1970.
[2] F. CAFIERO, *Sul principio esteso delle probabilità totali*, Annali dell'Università di Ferrara, ser. VII, vol. V, n. 8, 1956 (85-102).
[3] N. DINCULEANU, *Vector Measures*, Pergamou Press, Oxford 1967.
[4] P. R. HALMOS, *Measure theory*, Von-Nostrand Reinhold Company, 1950.
[5] M. E. MUNROE, *Measure and integration*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1971.
[6] J. VON NEUMANN, *Functional Operators*, vol. I; *Measures and Integrals*, Annals of Mathematics Studies n. 21, Princeton 1950.
[7] C. A. ROGERS, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.
[8] A. C. ZAANEN, *An introduction to the Theory of Integration*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1958.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, G. Scorza-Dragoni e C. Ciliberto.

Alcune osservazioni sui gruppi i cui sottogruppi massimali hanno indici primi

Nota di ANNA FRANCHETTA (a Napoli) *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

SOMMARIO. — Sia (P) la classe dei gruppi G tali che $G \in (P)$ se, e solo se, tutti i sottogruppi massimali di G hanno indice primo. In questa nota si caratterizzano i gruppi $G \in (P)$ iperfiniti o iperabeliani periodici. Si prova inoltre che ogni gruppo policiclico $G \in (P)$ è supersolubile.

SUMMARY. — Let (P) be the group class such that $G \in (P)$ if, and only if, every maximal subgroup of G has prime index. In this paper we characterize hyperfinite or periodical hyperabelian groups $G \in (P)$. Furthermore, we prove that every policyclical group $G \in (P)$ is supersoluble.

Sia (P) la classe dei gruppi G tali che $G \in (P)$ se, e solo se, tutti i sottogruppi massimali hanno indici primi. Un ben noto teorema di B. HUPPERT assicura che ogni gruppo finito $G \in (P)$ è supersolubile. Le classi dei gruppi iperciclici e dei gruppi ipociclici si presentano come le più naturali estensioni della classe dei gruppi supersolubili. Un gruppo infinito $G \in (P)$ può essere metabeliano e allo stesso tempo non ipociclico né iperciclico (cfr. N. 2.), può essere iperciclico e non ipociclico (ad esempio il gruppo $Z(p) \times Z(p^\infty)$), mentre esistono gruppi $G \notin (P)$ policiclici e ipociclici (cfr. N. 4).

Nel presente lavoro si caratterizzano i gruppi $G \in (P)$ iperfiniti o iperabeliani periodici, e si trova che ogni gruppo policiclico $G \in (P)$ è supersolubile. Si riconosce inoltre che la proprietà (P) implica l'essere ipociclico il quoziente di G rispetto al suo sottogruppo di FRATTINI $\Phi(G)$ mentre, diversamente da quanto accade nel caso finito, non suggerisce molto per quanto riguarda ipo- ed iperciclicità di G.

* Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Si avverte che nomenclatura e notazioni sono quelle usuali in teoria dei gruppi.

N. 1. - Nel seguito si farà spesso uso dei seguenti teoremi:

1.1. - (BAER, [1]) — *Un gruppo* G *è iperciclico se, e solo se, è localmente iperciclico ed ogni quoziente* $G/N \neq 1$ *possiede un sottogruppo normale* $H/N \neq 1$ *finitamente generabile.*

1.2. - (BAER, [1], p. 23) — *Per un gruppo* G *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *è iperciclico;*

(2) *i fattori principali di* G *hanno ordini primi ed ogni* $G/N \neq 1$ *possiede un sottogruppo normale* $H/N \neq 1$ *finitamente generabile e col derivato finito.*

1.3. - (P. HALL, [2]) — *Sia* G *un gruppo finitamente generabile dotato di un quoziente* G/H *nilpotente con* H *abeliano. Allora* G *è residualmente finito.*

1.4. - (K. A. HIRSCH, [3]). — *Un gruppo policiclico è residualmente finito.*

1.5. - (B. HUPPERT, [4]) — *Un gruppo finito* $G \in (P)$ *è supersolubile.*

1.6. - (K. IWASAWA, [5]) — *Un gruppo libero è residualmente p-gruppo finito (per ogni primo p).*

1.7. - (A. I. MAL'CEV, [6]) — *Un gruppo lineare finitamente generabile è residualmente finito.*

1.8. - (J. D. ROBINSON, [7], part 2) — *Sia* G *un gruppo iperabeliano a sezioni abeliane di ranghi finiti. Allora*:

(1) $G/\Phi(G)$ *è residualmente finito;*

(2) *i fattori principali di* G *sono finiti;*

(3) *i sottogruppi massimali di* G *hanno indici finiti.*

1.9. - (J. D. ROBINSON, [7], part 2) — *Siano* H *e* K *due gruppi iperabeliani residualmente finiti e a sezioni abeliane di ranghi finiti. Allora ogni estensione di* H *mediante* K *è residualmente finita e a sezioni abeliane di ranghi finiti.*

N. 2. - Si caratterizzano nella classe (P) i gruppi iperfiniti e i gruppi iperabeliani periodici. Si premettono alcune considerazioni generali sui gruppi $G \in (P)$.

2.1. — *Un gruppo residualmente finito* $G \in (P)$ *è ipociclico.*

Dim. — Basta provare che, se $1 < N \lhd G$, esiste un quoziente ciclico $N/H \neq 1$ con $H \lhd G$. Dall'essere G residualmente finito ed $N \neq 1$, segue l'esistenza di un sottogruppo $M \lhd G$, con $M \not\geq N$ e G/M finito e perciò supersolubile (cfr. 1.5.); allora esiste un $X \lhd G$, di indice primo in NM, con $M \leq X < NM$. Essendo $NM = NX$; si ha $NM/X \simeq N/N \cap X$, e $N \cap X$ è il richiesto sottogruppo H.

Osservazione — A proposito di 2.1, si noti che un gruppo ipociclico e residualmente finito può non appartenere a (P). Infatti, sia G un gruppo libero non abeliano; allora G è residualmente supersolubile finito (cfr. 1.6.) e, ragionando come nella prova di 2.1., si vede che G è ipociclico; d'altra parte, è ben noto che non tutti i sottogruppi massimali di G hanno indici primi. L'argomentazione usata mostra inoltre che un quoziente (anche finito) di un gruppo ipociclico può non essere ipociclico.

2.2. — *Sia* G *un gruppo appartenente a* (P). *Allora* $G/\Phi(G)$ *è residualmente finito.*

Dim. — Ci si riduca, come è lecito, al caso $\Phi(G) = 1$. Detto Σ l'insieme dei sottogruppi massimali di G, si ha che $1 = \bigcap_{X \in \Sigma} X = \bigcap_{X \in \Sigma} \left(\bigcap_{g \in G} X^g \right)$; siccome ogni $X \in \Sigma$ ha indice primo in G, ognuno dei sottogruppi $\bigcap_{g \in G} X^g$ è normale e di indice finito, per cui G è residualmente finito.

TEOREMA 2.3. — *Se* G *è un gruppo appartenente a* (P), $G/\Phi(G)$ *è ipociclico.*

Dim. — Segue da 2.1. e 2.2., una volta osservato che l'essere $G \in (P)$ equivale all'essere $G/\Phi(G) \in (P)$.

Come facili corollari si ottengono:

2.4. — *Se* G *è un gruppo iperciclico,* $G/\Phi(G)$ *è ipociclico.*

Dim. — Segue dal *Teor.* 2.3.

2.5. — *Sia* G *un gruppo lineare finitamente generabile. Se* $G \in (P)$, G *è ipociclico.*

Dim. — Segue da 1.7 e 2.1.

Per quanto concerne i gruppi iperfiniti, si ha:

2.6. — *Sia* G *un gruppo iperfinito e residualmente finito. Allora sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);

(2) G *è residualmente supersolubile*;

(3) G *è localmente supersolubile*;

(4) G *è iperciclico*;

(5) *i fattori principali di* G *hanno ordini primi.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2) — Se G appartiene a (P), ogni suo quoziente finito è supersolubile (cfr. 1.5.) e la (2) segue subito dalla residuale finitezza di G.

(2) $\Rightarrow$ (3) — Essendo iperfinito, G è localmente finito. Da ciò e dalla (2) segue che ogni sottogruppo finitamente generabile $H \leq G$ è finito e residualmente supersolubile. Allora H è supersolubile.

(3) $\Rightarrow$ (4) — Segue da 1.1.

(4) $\Rightarrow$ (5) — Evidente.

(5) $\Rightarrow$ (1) — Valida (5), G possiede una serie principale di composizione $G_0 = 1 < G_1 < \ldots < G_\alpha < G_{\alpha+1} < \ldots < G_\beta = G$ a fattori di ordini primi. Considerato un sottogruppo massimale $M < G$ e detto γ il minimo ordinale tale che $G_\gamma \not\leq M$, γ non è limite e quindi si ha $M \cap G_\gamma = G_{\gamma-1}$; ne segue che $(G : M) = |G_\gamma/G_{\gamma-1}|$ è un numero primo.

Si è ora in grado di provare il

TEOREMA 2.7. — *Per un gruppo iperfinito* G *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene* a (P);

(2) $G/\Phi(G)$ *è residualmente supersolubile*;

(3) $G/\Phi(G)$ *è localmente supersolubile*;

(4) $G/\Phi(G)$ *è iperciclico*;

(5) *i fattori principali di* $G/\Phi(G)$ *hanno ordini primi.*

Dim. — L'essere $G \in (P)$ comporta che $G/\Phi(G) \in (P)$ ed è residualmente finito (cfr. 2.2.); ciò prova che (1) $\Rightarrow$ (2). La dimostrazione

si completa osservando che in 2.6. le implicazioni (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) non dipendono dalla residuale finitezza.

COROLLARIO 2.8. — *Sia* G *un gruppo iperfinito e residualmente finito. Allora* G *è iperciclico se, e solo se, lo è* $G/\Phi(G)$.

Dim. — Se G è iperciclico, si ha $G \in (P)$ e quindi $G/\Phi(G)$ è iperciclico (cfr. *Teor.* 2.7.). Viceversa, dall'essere $G/\Phi(G)$ iperciclico, discende che $G \in (P)$ e per la 2.6. il gruppo G è iperciclico.

Per ciò che concerne i gruppi iperabeliani $G \in (P)$, valgono le considerazioni seguenti:

2.9. — *Sia* G *un gruppo iperabeliano a fattori principali di ordini primi. Allora si ha* $G \in (P)$.

Dim.[1] — Si considerino un sottogruppo massimale $M < G$ ed una catena ascendente $1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_\alpha < G_{\alpha+1} < \ldots < G_\beta = G$ con ogni $G_\alpha \lhd G$ e con ogni $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ abeliano. Il minimo γ tale che $G_\gamma \not\leq M$ non è un ordinale limite, per cui si ha $G = G_\gamma M$, $G_{\gamma-1} \leq$ $\leq M \cap G_\gamma \lhd G$ e $(G : M) = |G_\gamma/M \cap G_\gamma|$. Basta provare che $G_\gamma/M \cap G_\gamma$ è un fattore principale di G. Negando la tesi, esista un sottogruppo $H \lhd G$ per cui $M \cap G_\gamma < H < G_\gamma$; si ha $G_\gamma = HM \cap G_\gamma = H(M \cap G_\gamma) = H$, e ciò è assurdo.

Osservazione — A proposito di 2.9., si osservi che esiste un gruppo metabeliano $G \in (P)$ con i fattori principali non tutti di ordini primi. Sia infatti $A = Z(2^\infty) \times Z(2^\infty)$ e sia G l'estensione di A mediante l'automorfismo φ che agisce nel modo seguente:

$$(x, y)^\varphi = (xy, x).$$

Il gruppo G è ovviamente metabeliano, appartiene a (P) in quanto $\Phi(G) = A$ e quindi $G/\Phi(G)$ risulta ciclico, e i fattori principali di G non sono tutti di ordini primi perché il sottogruppo di ordine 2^2 di A è normale minimale in G. È infine evidente che G non è iperciclico né ipociclico.

2.10. — *Sia* G *un gruppo iperabeliano periodico e residualmente finito. Allora sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);

(2) G *è residualmente supersolubile*;

[1] La dimostrazione segue uno schema adoperato in [7], Part 2, pp. 136-137.

(3) G *è localmente supersolubile*;

(4) *i fattori principali di* G *hanno ordini primi.*

Dim. — Le implicazioni (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) si ottengono come nella dimostrazione di 2.6. La (3) $\Rightarrow$ (4) è ovvia per un noto teorema di Mal'cev. Da (4) segue (1) a causa di 2.9.

TEOREMA 2.11. — *Per un gruppo iperabeliano periodico* G *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);

(2) $G/\Phi(G)$ *è residualmente supersolubile*;

(3) $G/\Phi(G)$ *è localmente supersolubile*;

(4) *i fattori principali di* $G/\Phi(G)$ *hanno ordini primi.*

Dim. — Segue dal *Teor.* 2.3. e da 2.10.

COROLLARIO 2.12. — *Sia* G *un gruppo iperabeliano periodico e residualmente finito. Allora i fattori principali di* G *hanno ordini primi se, e solo se,* $G/\Phi(G)$ *è a fattori principali di ordini primi.*

Dim. — Segue da 2.10 e dal Teor. 2.11.

TEOREMA 2.13. — *Sia* G *un'estensione finitamente generabile di un gruppo abeliano mediante un gruppo nilpotente. Si ha* $G \in (P)$ *se, e solo se, i fattori principali di* G *hanno ordini primi.*

Dim. — Supposto $G \in (P)$, sia N/H un sottogruppo normale minimale di un quoziente $G/H \neq 1$. Allora $G/H \in (P)$ ed è residualmente finito (cfr. 1.3.) e quindi è ipociclico (cfr. 2.1.); ne segue che $|N/H|$ è un numero primo, il che prova che i fattori principali di G hanno ordini primi. Il viceversa segue da 2.9.

N. 3. - Si denoterà con (C) la classe dei gruppi iperabeliani a sezioni abeliane di ranghi finiti [2].

3.1. — *Un gruppo periodico* $G \in (C)$ *è iperfinito.*

Dim. — Basta provare che ogni quoziente $G/N \neq 1$ possiede un sottogruppo normale finito $H/N \neq 1$. Detta P/N una componente

[2] Una sezione abeliana Σ di un gruppo G si dice a ranghi finiti se, e solo se, sono finiti il rango lineare e tutti i p-ranghi di Σ (per ogni numero primo p).

primaria non identica di un sottogruppo normale abeliano non identico di G/N, il socle[3] $s(P/N)$ è finito.

3.2. — *Per un gruppo* $G \in (C)$ *periodico e residualmente finito, sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);
(2) G *è residualmente supersolubile*;
(3) G *è localmente supersolubile*;
(4) G *è iperciclico*;
(5) *i fattori principali di* G *hanno ordini primi.*

Dim. — Basta tener presente 3.1. e 2.6.

TEOREMA 3.3. — *Per un gruppo periodico* $G \in (C)$ *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);
(2) $G/\Phi(G)$ *è residualmente supersolubile*;
(3) $G/\Phi(G)$ *è localmente supersolubile*;
(4) $G/\Phi(G)$ *è iperciclico*;
(5) *i fattori principali di* $G/\Phi(G)$ *hanno ordini primi.*

Dim. — Segue da 1.8. e da 3.2.

Osservazione — Si noti che un gruppo localmente supersolubile $G \in (C)$ appartiene a (P), a prescindere da periodicità o da residuale finitezza. Ciò si può provare o sfruttando un noto teorema di Mal'cev che assicura che i fattori principali di G hanno ordini primi e la 2.9., o direttamente, nel modo che segue. Sia $G \in (C)$ localmente supersolubile, e sia $M < G$ un sottogruppo massimale; M ha indice finito (cfr. 1.8.) e quindi anche $H = \bigcap_{g \in G} M^g \lhd G$ ha indice finito in G. Ne segue che $G = HN$ con N finitamente generabile. Il quoziente $G/H \simeq N/H \cap N$ è supersolubile al pari di N; da ciò segue che $(G : M)$ è primo.

COROLLARIO 3.4. — *Sia* $G \in (C)$ *un gruppo periodico e residualmente finito. Allora* G *è iperciclico se, e solo se, tale è* $G/\Phi(G)$.

Dim. — Segue da 3.2. e dal Teor. 3.3.

[3] Il socle $s(G)$ di un gruppo G è il sottogruppo generato dai sottogruppi normali minimali di G.

3.5. — *Siano* $H \in (C)$ *e* $K \in (C)$ *dei gruppi periodici e residualmente finiti. Per ogni estensione* G *di* H *mediante* K *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);

(2) G *è residualmente supersolubile*;

(3) G *è localmente supersolubile*;

(4) G *è iperciclico*;

(5) *i fattori principali di* G *hanno ordini primi.*

Dim. — Segue da 1.9. e da 3.2.

Si ha ancora:

3.6. — *Per un gruppo residualmente finito* $G \in (C)$ *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);

(2) G *è ipociclico ed è supersolubile ogni quoziente finito* $G/N \neq 1$ *con* $N \geq s(G)$.

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2) — Evidente a causa di 2.1. e di 1.5.

(2) $\Rightarrow$ (1) — Valida (2) e detto H un sottogruppo normale minimale di G, per l'essere G ipociclico, H ha ordine primo. Sia ora $M < G$ un sottogruppo massimale di G e si assuma in primo luogo $M \not\geq s(G)$. Allora $G = MH$ per un conveniente H normale minimale in G e $(G : M) = |H|$ è primo. Sia invece $M \geq s(G)$ e quindi $\bigcap_{g \in G} M^g \geq s(G)$; $G/\bigcap_{g \in G} M^g$ è finito (cfr. 1.8.) e risulta supersolubile per l'ipotesi (2); allora $(G : M)$ è primo.

Si concluderà con il

TEOREMA 3.7. — *Per un gruppo* $G \in (C)$ *sono equivalenti le proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);

(2) *posto* $A = G/\Phi(G)$, A *è ipociclico e sono supersolubili tutti i quozienti finiti* $A/N \neq 1$ *tali che* $N \geq s(A)$.

Dim. — Segue da 3.6., tenendo conto del fatto che $G/\Phi(G)$ è residualmente finito e che $G \in (P)$ equivale a $G/\Phi(G) \in (P)$.

N. 4. - Si proverà in questo numero che sono supersolubili i gruppi policiclici $G \in (P)$.

TEOREMA 4.1. — *Per un gruppo policiclico* G *sono equivalenti le seguenti proposizioni*:

(1) G *appartiene a* (P);
(2) *i fattori principali di* G *hanno ordini primi*;
(3) G *è supersolubile.*

Dim. — (1) $\Rightarrow$ (2) — Valida (1), si consideri H/N normale minimale in un quoziente G/N; si ha $G/N \in (P)$ ed inoltre G/N è residualmente finito (cfr. 1.4.). Allora G/N è ipociclico (cfr. 2.1.) e H/N ha ordine primo.

(2) $\Rightarrow$ (3) — Nell'ipotesi (2) sia H/N il penultimo termine della serie derivata di un quoziente G/N non identico. Il gruppo $H/N \neq 1$ è abeliano e finitamente generabile. Dalla arbitrarietà di G/N e dalla 1.2. segue che G è iperciclico e quindi supersolubile per l'essere anche policiclico.

(3) $\Rightarrow$ (1) — Evidente.

Dopo quanto sopra, analogamente a quanto accade nel caso finito, si ha:

COROLLARIO 4.1. — *Un gruppo policiclico* G *è supersolubile se, e solo se, tale è* $G/\Phi(G)$.

Dim. — Sia $G/\Phi(G)$ supersolubile. Si ha $G/\Phi(G) \in (P)$ e perciò $G \in (P)$ e per il *Teor.* 4.1. G è supersolubile

Si concluderà notando che esistono gruppi $G \notin (P)$ simultaneamente policiclici ed ipociclici, mentre è chiaro che un gruppo policiclico $G \in (P)$ è pure ipociclico (cfr. 1.4. e 2.1.).

Esempio — Sia $A = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ con $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ infiniti, e sia φ l'automorfismo (di ordine 2^2) di A che opera nel modo seguente:

$$(x^m y^n)^\varphi = x^{-n} y^m.$$

L'olomorfo G di A rispetto a φ è ovviamente policiclico. Posto, per $n \geq 1$, $A^{2^n} = \langle a^{2^n} / a \in A \rangle$ e $H_n = \langle A^{2^n}, (xy)^{2^{n-1}} \rangle$, riesce $H_n \lhd G$

e i quozienti A/H_1, H_1/A^2, A^2/H_2, H_2/A^{2^2}, ... hanno tutti ordine 2. Si proverà che G non è supersolubile riconoscendo che un sottogruppo ciclico $B < A$ è normale in G se, e solo se, $B = 1$. Infatti, da $B = \langle x^n y^m \rangle \lhd G$ discende

$$x^{-m} y^n = (x^n y^m)^\varphi = \begin{cases} x^n y^m \\ (x^n y^m)^{-1} \end{cases}$$

da cui $m = n = 0$ e $B = 1$. Dal *Teor.* 4.1. segue poi che $G \notin (P)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAER R., *Uberauflösbare Gruppen*, Abh. Math. Scm. Univ. Hamburg, **23**, 11-28 (1959).
[2] HALL P., *On the finiteness of certain soluble groups*, Proc. London Math. Soc. **9**, 595-622 (1959).
[3] HIRSCH K. A., *On infinite soluble groups* - IV, J. London Math. Soc. **27**, 81-85 (1952).
[4] HUPPERT B. - *Normalteiler und maximale Untergruppen*, Math. Z., **60**, 409-434 (1954).
[5] IWASAWA K., *Einige Sätze über freie Gruppen*, Proc. Imp. Acad Tokio, **19**, 272-274 (1943).
[6] MAL'CEV A. I., *On the faithful rapresentation of infinite groups by matrices*, Am. Math. Soc. Translation (2) **46**, 1-18 (1965).
[7] ROBINSON J. D., *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Ergeb. der Math. **63** (1792).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, G. Scorza-Dragoni e C. Miranda.

Un semplice modello reticolare per lo studio qualitativo dell'effetto staffa sulla duttilità di un tronco plasticizzato di conglomerato armato

Nota di GIORGIO FRUNZIO *
presentata dal socio ordinario VINCENZO FRANCIOSI

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

SOMMARIO. — Lo studio trae origine dalla preoccupazione invero eccessiva che caratterizza le raccomandazioni CEB, e quindi le norme italiane, dinanzi alla possibilità del manifestarsi in concreto di tutte le cerniere previste in sede di calcolo teorico in un meccanismo di labilizzazione plastica. Poiché da più parti si è manifestata la convinzione che gran ruolo giochi il passo delle staffe nella zona di snodo, si è voluto iniziare su un modello di estrema semplicità uno studio teorico — e soltanto qualitativo, come ovvio — del fenomeno. I risultati sembrano abbastanza significativi, e comunque non indegni di attenzione.

SUMMARY. — The autor shows a study on a very simple reticular model. A theoric, only qualitative, study on ductility of concrete and related fenomena. So it has been studied the problem of stirrups with variable spacing in area of the joint. These data, also if preliminary, are discording from what raccomanded by CEB and so they can open an interesting point of study.

1. - GENESI DELLA STRUTTURA RETICOLARE.

La deformazione di rottura del conglomerato si trae dal diagramma bilineare consigliato dal C.E.B. [1], e riportato nella Fig. 1. La deformazione limite è del 3,5 ‰.

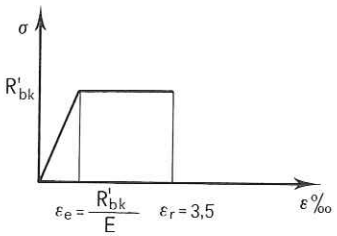


FIG. 1.

* Dott. ing. Giorgio Frunzio, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni.

Il modulo elastico si assume, sempre in aderenza alle suddette raccomandazioni, pari a:

$$E = 18.000 \sqrt{R'_{bk}} \tag{1}$$

Con riferimento allo schema strutturale rappresentato in Fig. 2, si prenda in esame la porzione di trave delimitata da due piani ortogonali all'asse, di cui il primo passante per A ed il secondo per la prima staffa successiva, e dal piano neutro. Geometricamente ne ri-

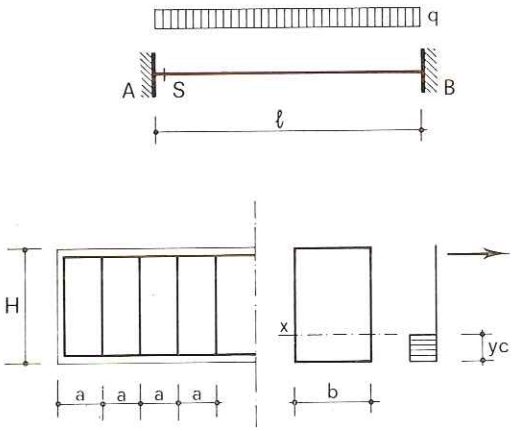


FIG. 2.

sulta un elemento di forma parallelepipeda avente una dimensione pari all'interasse tra le staffe, l'altra pari alla larghezza della sezione trasversale, ed altezza pari alla distanza dell'asse neutro dal bordo compresso (Fig. 3).

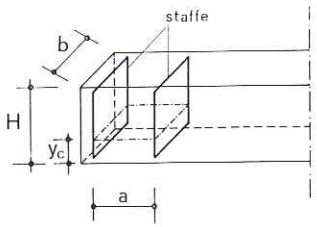


FIG. 3.

Interessa analizzare il comportamento di questo elemento supposto soggetto ad una distribuzione uniforme di forze agenti sulle facce normali all'asse di intensità crescente e tali da garantire l'equilibrio globale.

Qualora non si tenesse conto della presenza delle staffe, ne risulterebbe un regime monoassiale, per cui i valori della tensione e della deformazione limite sarebbero coincidenti con quelli ricavabili da una prova di compressione standard.

Diversa è la situazione in presenza delle staffe. In questo caso nei punti interni all'elemento si instaura un regime tensionale biassiale risultante dall'azione di contenimento laterale esercitata dalle staffe; questa azione sarà tanto più efficace quanto minore è il passo della staffatura. La soluzione del problema dell'equilibrio elasto-plastico di un siffatto elemento strutturale sarebbe conducibile con le usuali tecniche di discretizzazione (differenze finite o elementi finiti);

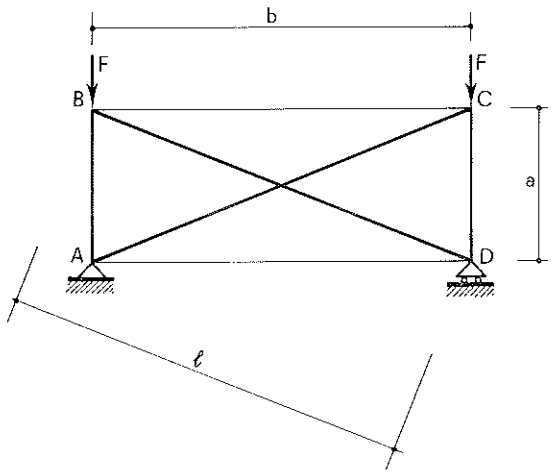


FIG. 4. - AB = CD Montante di calcestruzzo di lunghezza « *a* » pari alla distanza fra le staffe; BC = AD Staffa d'acciaio di lunghezza « *b* » pari alla larghezza della trave; AC = BD Diagonale di calcestruzzo di lunghezza « *l* ».

ma, ai fini di un valutazione di carattere qualitativo della influenza della staffatura sulle deformazioni unitarie a rottura, conviene sviluppare una prima indagine su un modello. Tale modello nasce dalla sostituzione dell'elemento continuo con un elemento discreto di tipo « traliccio reticolare » a nodi cerniera, il cui comportamento approssimi il più possibile quello dell'elemento reale.

Il più semplice tra i tralicci ipotizzabili è quello mostrato in Fig. 4. Dalla figura resta indeterminato lo spessore del modello stesso che deve rappresentare la distanza y_c dell'asse neutro dal lembo compresso, ma essendo in ogni caso lo stato di sollecitazione bidimensionale, possiamo considerare rappresentata dal modello una lastra di spessore unitario.

Ciascuna delle forze F applicate ai nodi B e C uguaglia la risultante delle tensioni sulla metà della faccia di traccia B C, e di area

$$A = 1\,b \tag{2}$$

Per quanto attiene le dimensioni trasversali delle aste, si è attribuito: alle staffe metà delle aree che effettivamente hanno; ai montanti area pari alla metà della superficie caricata:

$$A_c = \frac{1\,b}{2} \tag{3}$$

ai diagonali, infine, area variabile secondo la seguente legge:

$$A_c^* = \frac{1\,a\,e^{-a/b}}{2} \tag{4}$$

L'espressione (3) si è ottenuta in base alla considerazione che segue. Se non fossero presenti le staffe si avrebbe nei montanti una tensione di compressione pari a quella che si avrebbe su un piano normale al carico del modello reale. La presenza delle staffe genera uno stato tensionale bidimensionale, per il quale, secondo il criterio di plasticità parabolico (Stassi) si ottiene un valore della tensione di rottura in compressione maggiore di quello che si avrebbe in regime monoassiale.

Infatti l'espressione del criterio di cui sopra è ($\sigma_\zeta = 0$):

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 - \sigma_\xi\,\sigma_\eta - (\rho + 1)\,\sigma_o'(\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \rho\,\sigma_o'^2 = 0 \tag{5}$$

dove

$$\rho = \frac{\sigma_o''}{\sigma_o'}$$

con σ_o' e σ_o'' tensioni limite rispettivamente in trazione e in compressione. Per il calcestruzzo si può assumere $\rho = -10$ con questa posizione la tensione di crisi in compressione varia tra il valore:

$$\sigma_o'' = -10\,\sigma_o' \tag{6}$$

in regime monoassiale, e il valore

$$\bar{\sigma}_o = -18{,}54\,\sigma_o' \tag{7}$$

quando $\sigma_\xi = \sigma_\eta$.

Di questo risultato si è tenuto conto nell'attribuire le aree alle aste del modello, mantenendo costante l'area dei montanti e facendo variare quella dei diagonali secondo la (4), la cui definizione fa riferimento a due condizioni limite: se il passo delle staffe tende a diventare infinitamente grande, l'effetto cerchiante delle stesse diviene trascurabile e pertanto l'area dei diagonali dovrà tendere a zero; se, al contrario, il passo tra le staffe tende a zero l'area di ciascun diagonale tende alla metà dell'altezza del modello essendo l'azione di contenimento molto maggiore.

Una volta definita la geometria e i parametri meccanici del modello, nonché i carichi, si passa alla formulazione matematica del problema.

Si è utilizzato, a ciò fare, il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, operando in seconda approssimazione (degli spostamenti nelle coordinate lagrangiane).

Iniziando da considerazioni geometriche si può scrivere

$$l^2 = a^2 + b^2 \tag{8}$$

ed indicando con Δa, Δb e Δl (Fig. 5) le rispettive variazioni di lunghezza, si avrà

$$(l + \Delta l)^2 = (a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 \tag{9}$$

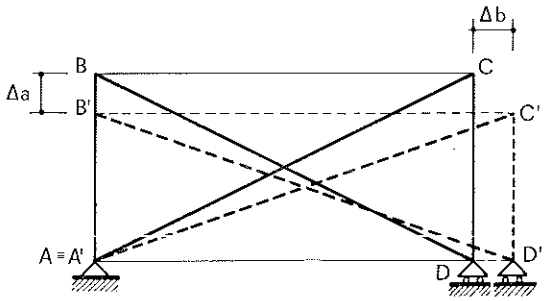


FIG. 5.

Sviluppando e trascurando le parti di ordine superiore si ha

$$\Delta l = \frac{a}{l} \Delta a + \frac{b}{l} \Delta b$$

Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale si scrive

$$C = eq \Leftrightarrow \delta_1 E_t = 0 \qquad \forall \delta c$$

dove $E_t = L + P$; L è l'energia di deformazione, che per aste soggette a sforzo normale vale

$$L = \frac{X \Delta c}{2} \tag{10}$$

con X il valore dello sforzo e Δc variazione di lunghezza dell'asta.

Essendo poi:

$$X = \frac{\Delta c}{c} E A \tag{11}$$

si ottiene subito

$$L = \frac{E A}{2 c} (\Delta c)^2$$

Quindi nel modello si ha per il montante

$$L_{AB} = \frac{E_c A_c}{2 a} (\Delta a)^2$$

per la staffa

$$L_{AD} = \frac{E_t A_t}{2 b} (\Delta b)^2$$

e per il diagonale

$$L_{AC} = \frac{E_c A_c^*}{2 l} \left[\frac{a^2}{l^2} (\Delta a)^2 + \frac{b^2}{l^2} (\Delta b)^2 + 2 \frac{a b}{l^2} \Delta a \, \Delta b \right]$$

L'energia potenziale dei carichi è

$$P = - 2 F \Delta a$$

L'energia potenziale totale risulta in definitiva:

$$E = - 2 F \Delta a + \frac{E_c A_c}{a} (\Delta a)^2 + \frac{E_t A_t}{b} (\Delta b)^2 + \tag{12}$$

$$+ \frac{E_c A_c^*}{l} \left[\frac{a^2}{l^2} (\Delta a)^2 + \frac{b^2}{l^2} (\Delta b)^2 + 2 \frac{a b}{l^2} \Delta a \, \Delta b \right]$$

Annullando le derivate prime si ha, per il principio di stazionarietà, il seguente sistema lineare in Δa e Δb

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta a} = -2F + 2\frac{E_c A_c}{a}\Delta a + 2\frac{E_c A_c^* a^2}{l^3}\Delta a + 2\frac{E_c A_c^* a b}{l^3}\Delta b = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta b} = 2\frac{E_t A_t}{b}\Delta b + 2\frac{E_c A_c^* b^2}{l^3}\Delta b + 2\frac{E_c A_c^* a b}{l^3}\Delta a = 0$$

Ordinando si ottiene

$$(13)\quad \begin{aligned} \Delta a\left(\frac{E_c A_c}{a} + \frac{E_c A_c^* a^2}{l^3}\right) + \Delta b\left(\frac{E_c A_c^* a b}{l^3}\right) &= F \\ \Delta a\left(\frac{E_c A_c^* a b}{l^3}\right) + \Delta b\left(\frac{E_t A_t}{b} + \frac{E_c A_c^* b^2}{l^3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Si pone

$$(14)\quad \begin{aligned} c_{11} &= \frac{E_c A_c}{a} + \frac{E_c A_c^* a^2}{l^3} \\ c_{12} = c_{21} &= \frac{E_c A_c^* a b}{l^3} \\ c_{22} &= \frac{E_t A_t}{b} + \frac{E_c A_c^* b^2}{l^3} \end{aligned}$$

e risolvendo si ottiene

$$(15)\quad \Delta a = F\frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \qquad \Delta b = -F\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

È opportuno ricordare che, atteso il segno dato a P, si considera la F positiva se di trazione per il montante. Si ha poi

$$(16)\quad \begin{aligned} X_c &= F\frac{E_c A_c}{a}\frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \qquad X_t = -F\frac{E_t A_t}{b}\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \\ X_c^* &= F\frac{E^c A_c^*}{l^2}\frac{c_{22}a - c_{12}b}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \end{aligned}$$

Con queste espressioni si può seguire il comportametno del modello al crescere di F fino a che in uno dei tre elementi non si raggiunge il valore limite della X.

Dal calcolo numerico risulta che, per l'usuale campo di variazione del diametro delle staffe, il primo elemento che si plasticizza è il montante. In questo caso riducendo l'ampiezza della forza F (sempre crescente) del valore dello sforzo di rottura del montante per garantire l'equilibrio del nodo, possiamo continuare a seguire il comportamento plastico del conglomerato con espressioni del tutto analoghe a quelle trovate in precedenza. Ponendo $\overline{F} = F - X_o$ si ha:

$$(17) \qquad E = -2\overline{F} + \frac{E_t A_t}{2b}(\Delta b)^2 + \frac{E_c A_c^*}{2l}\left[\frac{a^2}{l^2}(\Delta a)^2 + \frac{b^2}{l^2}(\Delta b)^2 + 2\frac{ab}{l}\Delta a\,\Delta b\right]$$

Derivando ed annullando le derivate si perviene al sistema

$$(18) \qquad \begin{aligned} \Delta a\left(\frac{E_c A_c^* a^2}{l^3}\right) + \Delta b\left(\frac{E_c A_c^* ab}{l^3}\right) &= \overline{F} \\ \Delta a\left(\frac{E_c A_c^* ab}{l^3}\right) + \Delta b\left(\frac{E_t A_t}{b} + \frac{E_c A_c^* b^2}{l^3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Si può porre

$$(19) \qquad d_{11} = \frac{E_c A_c^* a^2}{l^2}; \quad d_{22} = c_{22}; \quad d_{12} = d_{21} = c_{12}$$

e quindi

$$(20) \qquad \Delta a = \overline{F}\,\frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}}; \quad \Delta b = -\overline{F}\,\frac{d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}$$

da cui

$$(21) \qquad X_t = -\overline{F}\,\frac{E_t A_t}{b}\,\frac{d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}; \quad X_c^* = \overline{F}\,\frac{E_c A_c^*}{l^2}\,\frac{d_{22}a - d_{12}b}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}$$

Si può procedere così ad incrementare la F fino a che non si plasticizza la staffa o il diagonale. Se si plasticizza il diagonale il modello

non ha più la possibilità di assorbire ulteriori incrementi di F ed in base al valore di Δa si può opportunamente ricavare la ε per il conglomerato.

2. - Diagramma di flusso del programma.

Per eseguire l'analisi del modello prima descritto si è preparato un programma scritto in linguaggio Fortran V per la soluzione incrementale dei sistemi di equazioni (13) e (18). La tavola rappresenta il diagramma di flusso del programma principale.

Si precisa che il programma è predisposto per eseguire l'analisi di numerosi casi in successione mantenendo costanti:

a) il modulo di elasticità dell'acciaio;

b) la tensione di snervamento dell'acciaio;

c) la tensione di rottura del calcestruzzo;

d) il modulo di elasticità del calcestruzzo in funzione della sua tensione di rottura.

Come dati variabili sono previsti.

a) la larghezza della trave;

b) l'area delle staffe;

c) il passo tra le staffe;

d) l'incremento tipo per la forza F;

e) il valore iniziale della forza stessa.

I passi di incremento della forza F sono stati racchiusi in sottoprogrammi per un più facile adattamento del programma all'analisi di diversi modelli; anche la stampa dei risultati avviene in questi sottoprogrammi per consentire di seguire il variare delle grandezze in gioco ad ogni incremento della forza F.

3. - Interpretazione dei risultati.

Mediante l'applicazione del programma descritto nel paragrafo precedente, si è proceduto all'analisi dei diversi casi fissando per tutti: il modulo di elasticità dell'acciaio $E_a = 2.100.000$ kg cm^{-2}; la tensione di snervamento dell'acciaio $\sigma_s = 3.800$ kg cm^{-2}; la tensione di rottura del calcestruzzo $\sigma_{oc} = 250$ kg cm^{-2}; il modulo di elasticità del conglomerato $E_c = 18.000 \sqrt{|\sigma_{oc}|}$; la larghezza della trave $b = 25$ cm; il va-

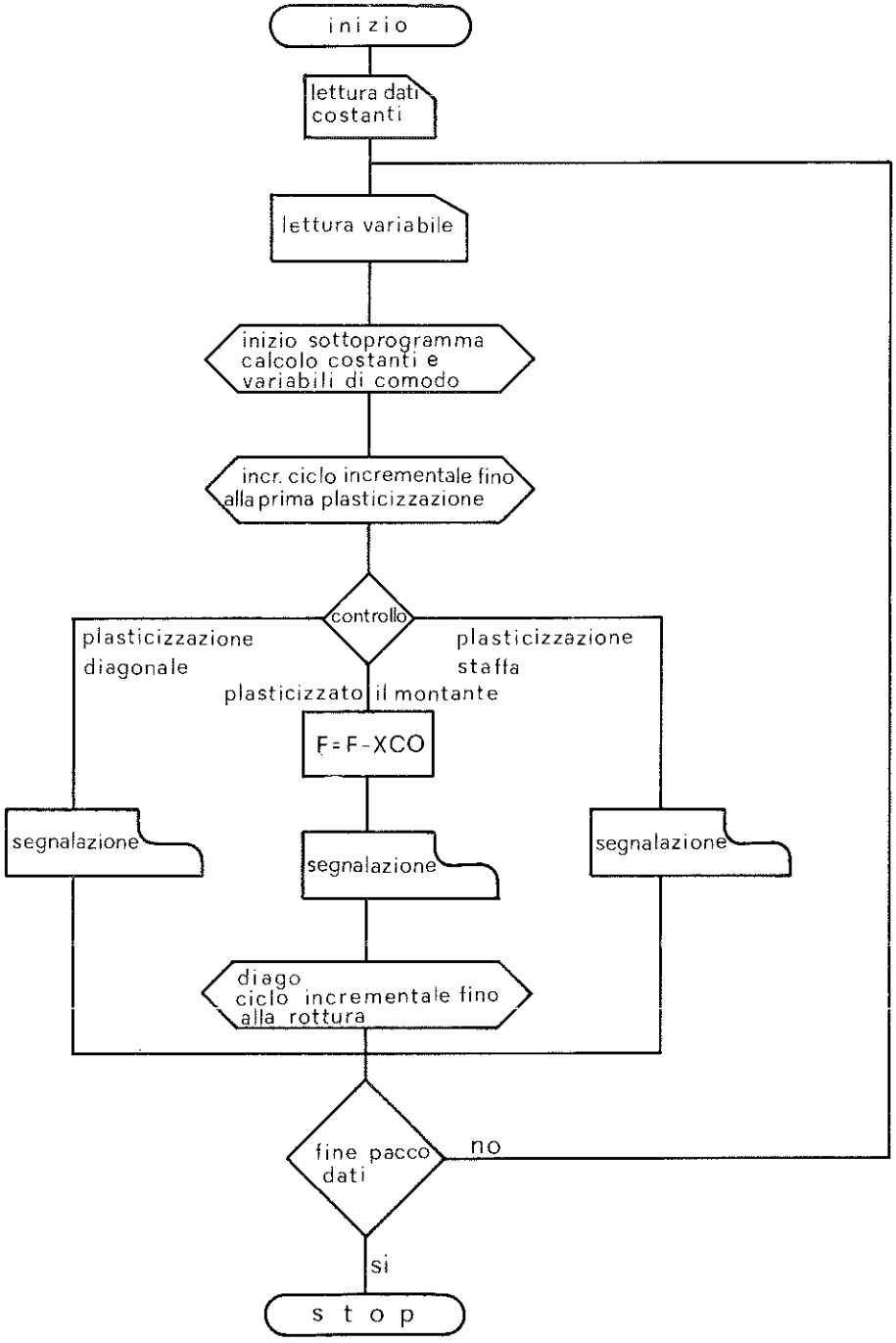

inizio
lettura dati costanti
lettura variabile
inizio sottoprogramma calcolo costanti e variabili di comodo
incr. ciclo incrementale fino alla prima plasticizzazione
controllo
plasticizzazione diagonale
plasticizzazione staffa
plasticizzato il montante
F=F-XCO
segnalazione
segnalazione
segnalazione
diago ciclo incrementale fino alla rottura
fine pacco dati
no
si
stop

TAVOLA 1.

lore iniziale della forza $F_i = 0$ kg; l'incremento tipo $F = -100$ kg. Facendo invece variare: il diametro φ delle staffe ed il relativo passo nel modo descritto nella tabella.

φ_{mm}	a/b	σ/σ_o	$\varepsilon_{cr}{}^o/_{oo}$	$\varepsilon_{cr}{}^o/_{oo}$*	φ_{mm}	a/b	σ/σ_o	$\varepsilon_{cr}{}^o/_{oo}$	$\varepsilon_{cr}{}^o/_{oo}$*
4	1,00	1,078	2,354	3,515	8	1,00	1,259	3,322	3,739
	0,75	1,059	3,923	3,527		0,75	1,212	5,483	3,925
	0,50	1,039	8,615	3,560		0,50	1,134	11,001	4,456
	0,30	1,023	24,729	3,666		0,30	1,062	25,411	6,157
	0,20	1,015	60,238	3,874		0,20	1,030	49,203	9,478
6	1,00	1,169	2,971	3,576	10	1,00	1,259	2,745	4,084
	0,75	1,127	4,712	3,635		0,75	1,212	4,361	4,538
	0,50	1,084	10,114	3,802		0,50	1,135	8,561	5,834
	0,30	1,050	29,444	4,340		0,30	1,063	19,958	9,987
	0,20	1,030	70,707	5,391		0,20	1,030	39,524	18,092

* Calcolato secondo la formula di TASSIOS e PLAINIS [9].

I risultati ottenuti hanno messo in luce che il meccanismo di rottura resta costante al variare dei diversi parametri; infatti, incremen-

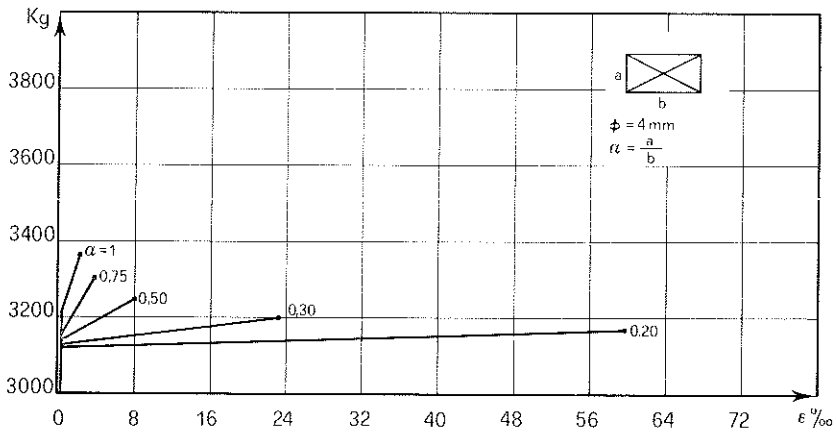


FIG. 6a.

tando la forza F, si giunge sempre alla rottura del montante e, incrementando ulteriormente il valore della forza, si perviene alla rottura o del diagonale o della staffa secondo il diametro della staffa stessa.

I risultati del calcolo sono consegnati nei diagrammi delle Figg. 6; sulle ascisse sono riportati i valori delle deformazioni e sulle ordinate i valori della forza corrispondente. L'esame dei diagrammi mostra

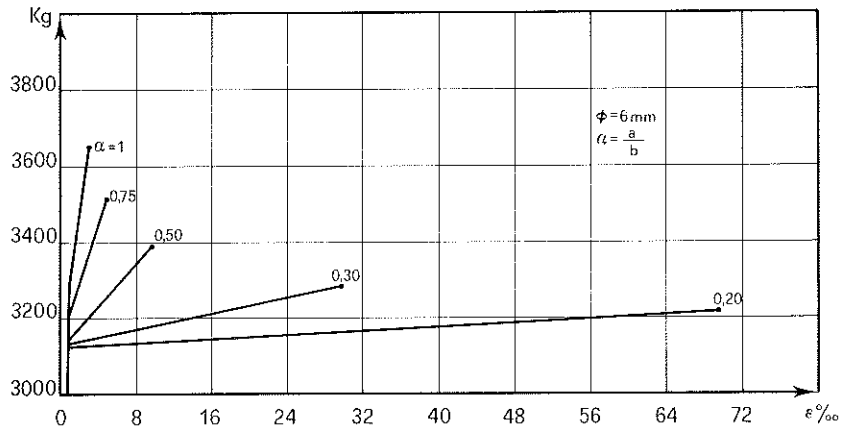


FIG. 6b.

che per un fissato valore del diametro delle staffe la ε di rottura cresce al decrescere del passo tra le staffe, variando tra un valore minore del 3,5 ‰ con passo di 25 cm e valori assai maggiori con passi minori;

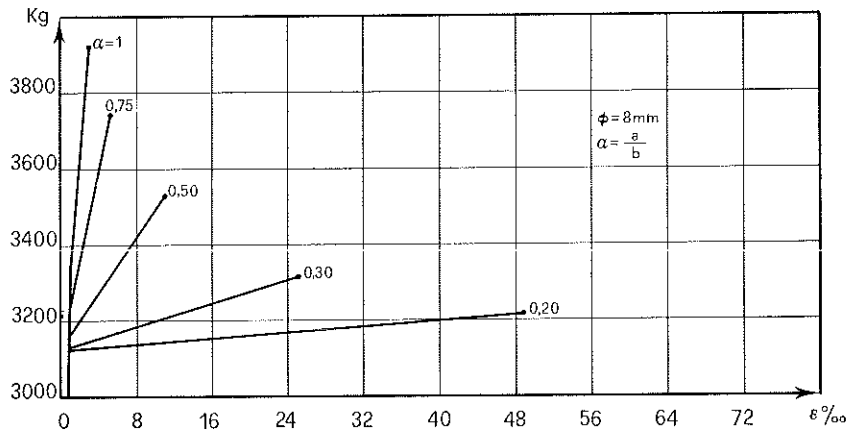


FIG. 6c.

questo risultato si riscontra per tutti i valori dei diametri presi in esame.

La successiva Fig. 7 mostra il modo di variare della ε di rottura al variare del diametro delle staffe per fissati valori del passo tra le

stesse. Emerge chiaramente come per ciascun valore del passo esista un valore del diametro per il quale la ε di rottura raggiunge un valore massimo. Da questa considerazione si può supporre, ai fini del miglioramento delle ε, che per ciascun passo tra le staffe esista un diametro per il quale si ha la massima duttilità.

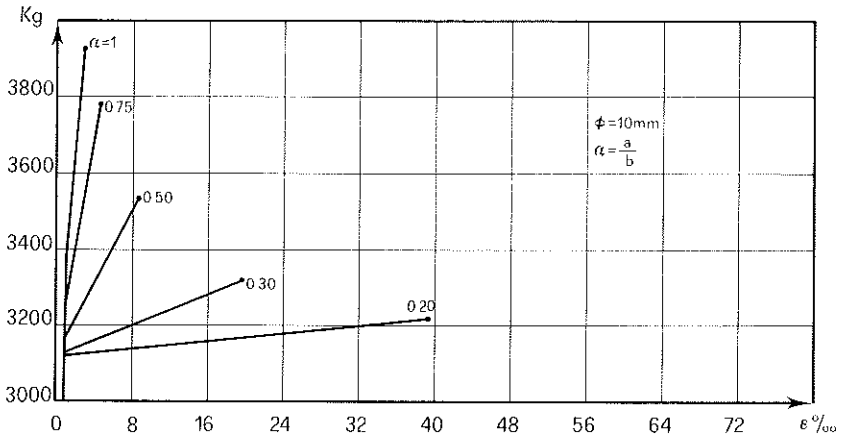


FIG. 6d.

I risultati ottenuti sono comunque confermati, almeno qualitativamente, da considerazioni di carattere sperimentale; infatti esperienze eseguite da TASSIOS e PLAINIS [9] e [10] sono riassunte nella relazione:

$$\varepsilon_{cr} = 3{,}5 + 100\,(q_v)^2$$

dove

$$q_v = \frac{V_a\,\sigma_a}{V_c\,\sigma_c}$$

Questa formula nei casi analizzati, fornisce i risultati riportati in tabella; dove per il volume del calcestruzzo si è preso un prisma a base quadrata di lato b ed altezza pari ad a (passo tra le staffe), mentre il volume dell'acciaio si è calcolato come: $4\,b\,\frac{\pi\,\varphi^2}{4}$.

Altra conferma è quella che si può avere dalle considerazioni svolte dal SARGIN [3], dove studia tutti i fattori che influenzano il diagramma σ, ε per il calcestruzzo citando anche numerosi autori che hanno proposto formule che tengono conto della staffatura nella determinazione della ε_{cr}. Si riportano qui solo le formule che si riten-

gono più interessanti ai fini del presente studio, rinviando al citato testo per maggiori dettagli.

Indicando p'' il rapporto tra volume di una staffa e il volume di calcestruzzo racchiuso tra due di esse, h_e l'altezza della trave all'in-

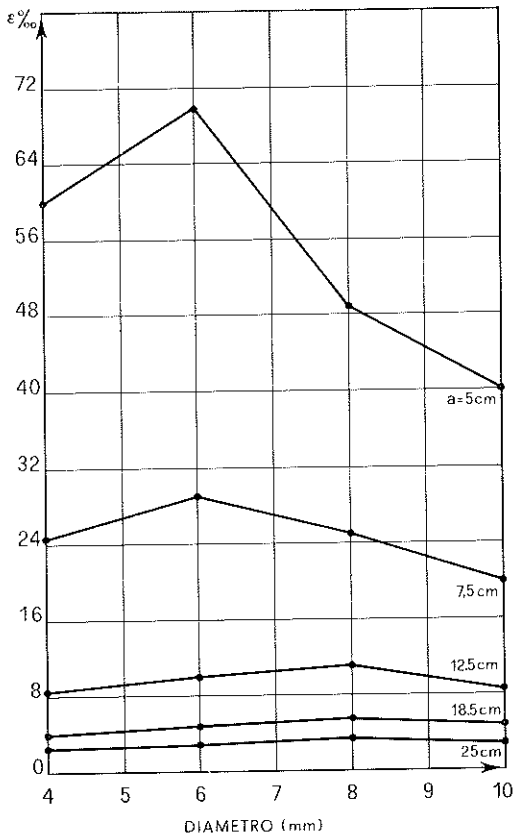


FIG. 7.

terno delle staffe e s passo delle staffe, ROY e SOZEN [4] hanno trovato sperimentalmente [5] e confermato teoricamente la seguente espressione:

$$\varepsilon_{cr} = 0{,}75\, p''\, h_e/s$$

Se k è il rapporto tra la distanza dell'asse neutro dal lembo compresso ed altezza utile, e f_c' è la resistenza cilindrica a compressione del calcestruzzo in $k\,p \cdot s\,i$, RUSCH propone [6]:

$$\varepsilon_{cr} = 0{,}15\,[1 + 1{,}5\,p'' + (0{,}7 - 0{,}1\,p'')\,/\,(k - 0{,}1\,f_c')]$$

4. - Conclusioni.

Il limite dello scorrimento plastico del calcestruzzo imposto dalle raccomandazioni CEB [1] nel 3,5 ‰ può essere considerato troppo prudente. Infatti nello studio eseguito si è visto come esista una notevole variazione della deformazione limite con il passo delle staffe, e come tale deformazione aumenti notevolmente al diminuire del passo tra le staffe.

Con questo modello estremamente semplificato non si possono certo indicare valori per la ε_{cr}, ma emerge chiaramente come questa sia molto maggiore $\varepsilon_{cr} = 3{,}5$ ‰ imposto dalla normativa attuale. Lo studio ha carattere qualitativo, ma può essere di stimolo per studi più accurati, preferibilmente sperimentali, che possano portare a definire una più equa legge di dipendenza tra ε_{cr} e staffe, come passo e come diametro.

Altra considerazione, che ci sembra abbastanza degna di sviluppo è che possa esistere per ogni passo un diametro ottimale sotto il profilo della deformazione di rottura.

BIBLIOGRAFIA

[1] Raccomandazioni CEB-FIP, 1973.

[2] Franciosi V., *Scienza delle Costruzioni*, Vol. IV, ed. Liguori, Napoli 1974.

[3] Sargin M., *Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections*, S. M. Study No. 4, Solid Mechanics Division University of Waterloo, Waterloo Ontario, Canada, 1971.

[4] Roy H. E. H., and Sozen M. A., *A Model to Simulate the Response of Concrete to Multi-Axial Loading*, Structural Research Series, No. 268, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana, 1963.

[5] Szulczynski T., and Sozen M. A., *Load-Deformation Characteristics of Reinforced Concrete Prisms with Rectilinear Transverse Reinforcement*, Structural Research Series, No. 224, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Urbana, 1961.

[6] RXsch H., *Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete*, ACI Journal, Proceedings, Vol. 57, No. 1, 1960.

[7] Baker A. L. L., and Amarakone A. M. N., *Inelastic Hyperstatic Frames Analysis*, Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Miami, Fla., 1964.

[8] Levi F., *The Work of the European Concrete Committee*, ACI Journal, Proceedings, Vol. 57, No. 9, 1961.

[9] Tassios T. P., and Plainis P., *Re-design of R.C. Buildings, Damaged by an Earthquake*, Giornate A.I.C.A.P., Venezia, 1977.

[10] Tassios T. P. and Plainis P., *Mechanical Behaviour of R.C. Elements Under Seismic Loading*, Proceedings of the RILEM Colloquium on Test and Observations on Models and Structures, Udine, 1974.

[11] GUERRIN A., *Traité de Béton Armé*, ed. Dunod, Paris, 1959.
[12] MASSONET C., e SAVE M., *Il Calcolo a Rottura delle Strutture*, Zanichelli, Bologna, 1967.
[13] TICHY M., RAKOSNIK J., *Calcul Plastique des Ossatures en Beton*, ed. Eyrolle, Paris, 1975.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Vincenzo Franciosi, Carlo Miranda e Carlo Tolotti.

Assetto strutturale dei massicci carbonatici della Campania Meridionale. Implicazioni idrogeologiche

Nota di ALBERTO INCORONATO *, GIUSEPPE NARDI **
e FRANCO ORTOLANI *
presentata dal socio corrispondente BRUNO D'ARGENIO

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

RIASSUNTO. — Viene presentato un modello idrogeologico su basi strutturali che si ritiene valido per la gran parte dell'Appennino meridionale.

In questa catena la tettogenesi miocenica ha determinato la sovrapposizione di unità stratigrafico-strutturali a diversa permeabilità; la tettonica disgiuntiva del Pliocene superiore-Quaternario ha individuato nell'ambito di queste unità una serie di blocchi. Tra questi, quelli rialzati, costituiti da rocce carbonatiche, rappresentano delle grandi idrostrutture, a loro volta divise in sub unità (es. gruppo di M. Marzano - M. Ogna e M. Alburni). In queste il deflusso delle acque sotterranee è condizionato dalla quota della soglia laterale di permeabilità o anche dalla giacitura delle unità impermeabili inferiori (es. Monti della Maddalena). In altri casi le idrostrutture sono rappresentate da pieghe anticlinaliche mioceniche. La tettonica quaternaria, l'erosione ed il sovralluvionamento hanno condizonato infine la ubicazione delle principali sorgenti (es. M. Motola, M. Cervati e M. Soprano).

ABSTRACT. — A tectonic model for the hydrogeologic pattern of Southern Italy is presented. It is assumed that the above pattern is controlled both (a) by the alternation of very permeable (mostly carbonate) and not permeable (mostly terrigenous) units in the thrust sheet pile and (b) by later normal faulting as well as by folding, which delimitate large hydrostructures. Locally, the variable position of the permeable bodies versus the morphology and the elevation dictate the location of the main springs. Several examples are given to point out the interrelations among the controlling factors.

INTRODUZIONE

Nella Campania meridionale, a sud del fiume Sele, larga parte dei rilievi sono costituiti da rocce carbonatiche che hanno notevole importanza idrogeologica ed economica per l'intera zona.

* Istituto di Geologia e Geofisica, Università di Napoli.
** Istituto di Mineralogia, Università di Napoli.

L'assetto strutturale riscontrabile dal basso verso l'alto è il seguente (PESCATORE & ORTOLANI, 1973; D'ARGENIO et alii, 1973; PESCATORE et alii, 1969; SCANDONE, 1972; ORTOLANI, 1975):

a) terreni arenacei, argillosi, marnosi, silicei e calcarei, potenti da 1000 a 2000 m, riferibili alle unità lagonegresi, poggianti tettonicamente su terreni arenacei ed argillosi, potenti alcune centinaia di metri, appartenenti alle unità derivanti dalla deformazione della piattaforma abruzzese campana;

b) terreni carbonatici (dolomie in basso e calcari in alto) ricoperti da terreni argillosi ed arenacei, potenti alcune migliaia di metri, riferibili alle unità derivanti dalla deformazione della piattaforma campano-lucana;

c) terreni argillosi, arenacei, marnosi e calcarei riferibili alle unità delle Argille varicolori ed alle unità del flysch del Cilento (spessore complessivo variabile da alcune centinaia di metri a circa 4000 metri).

Nelle zone strutturalmente depresse di quest'area si trovano in contatto stratigrafico, con discordanza angolare, depositi arenacei ed argillosi del ciclo Pliocene inferiore-medio e depositi alluvionali quaternari costituiti da ghiaie, sabbie e limi (fig. 1).

In seguito alla tettonica compressiva del Miocene inferiore, responsabile della costituzione di gran parte della catena sud appenninica, si sono avuti i seguenti sovrascorrimenti (PESCATORE & ORTOLANI, 1973):

1) unità delle Argille varicolori e del flysch del Cilento sulla Piattaforma campano-lucana;

2) unità derivanti dalla deformazione della piattaforma campano-lucana sui depositi del bacino lagonegrese;

3) terreni della parte occidentale del bacino lagonegrese su quelli della parte centrale.

La fase tettonica tortoniana ha determinato la sovrapposizione di tutte queste unità, più i depositi del bacino irpino (COCCO et alii, 1972), sulla copertura terrigena della piattaforma abruzzese-campana (ORTOLANI, 1975).

Ulteriori traslazioni sono state determinate dalla fase tettonica messiniana per cui parte di queste unità possono essere sovrascorse su depositi evaporitici (DI NOCERA et alii, 1975).

Tutti questi sovrascorrimenti hanno causato una intensa deformazione generale ed un ripiegamento dei terreni carbonatici della piattaforma campano-lucana affioranti nella parte meridionale dell'area.

In particolare alla fase tettogenetica langhiana è da attribuire la individuazione delle strutture anticlinaliche di M. Motola, M. So-

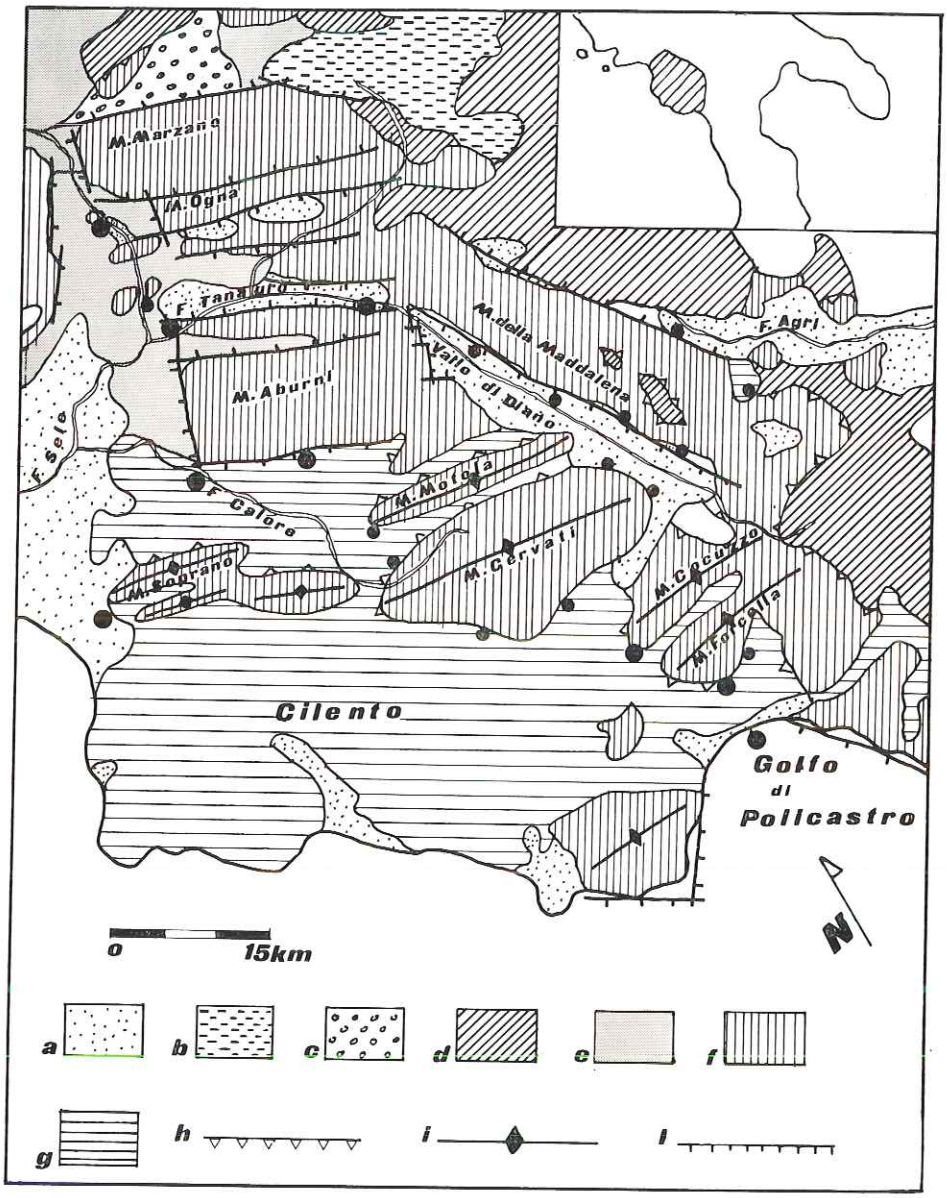


FIG. 1. - Schema strutturale della Campania meridionale.
a: depositi alluvionali quaternari.
b: depositi del ciclo Pliocene inferiore-medio.
c: unità irpine (Langhiano-Tortoniano).
d: unità lagonegresi (Trias medio-Miocene inferiore).
e: unità delle Argille varicolori (Cretacico-Miocene inferiore).
f: unità della piattaforma campano-lucana (Trias superiore-Miocene inferiore).
g: unità del flysch del Cilento (Cretacico-Miocene inferiore).
h: sovrascorrimenti langhiani.
i: anticlinali langhiane.
l: faglie dirette quaternarie.

prano, M. Sottano, M. Chianello, M. Cervati, M. Cocuzzo, M. Forcella e M. Bulgheria (Di Nocera et alii, 1976).

Questa tettonizzazione ha predisposto le vie al successivo intenso carsismo intervenuto, a più riprese, nei calcari quando nel Pliocene superiore e Quaternario la tettonica disgiuntiva ha individuato, sollevato e ruotato grandi blocchi (M. Marzano-M. Ogna, Monti Alburni, Monti della Maddalena), provocando l'erosione totale o parziale della copertura impermeabile.

La giacitura regionale, di individuazione plio-quaternaria, di tutta questa parte della catena è di tipo monoclinalico con immersione verso SW (Ortolani, 1975).

La tettonica disgiuntiva plio-quaternaria, sovraimposta a quella miocenica, ha originato depressioni interne, ora sovralluvionate (Vallo di Diano, alta val d'Agri, bassa valle del Tanagro, piani di Palomonte e S. Gregorio Magno) ed il grande graben costiero della piana del Sele, riempito, nella parte centrale, da circa 2000 m di depositi continentali quaternari prevalentemente conglomeratici (Ippolito et alii, 1973).

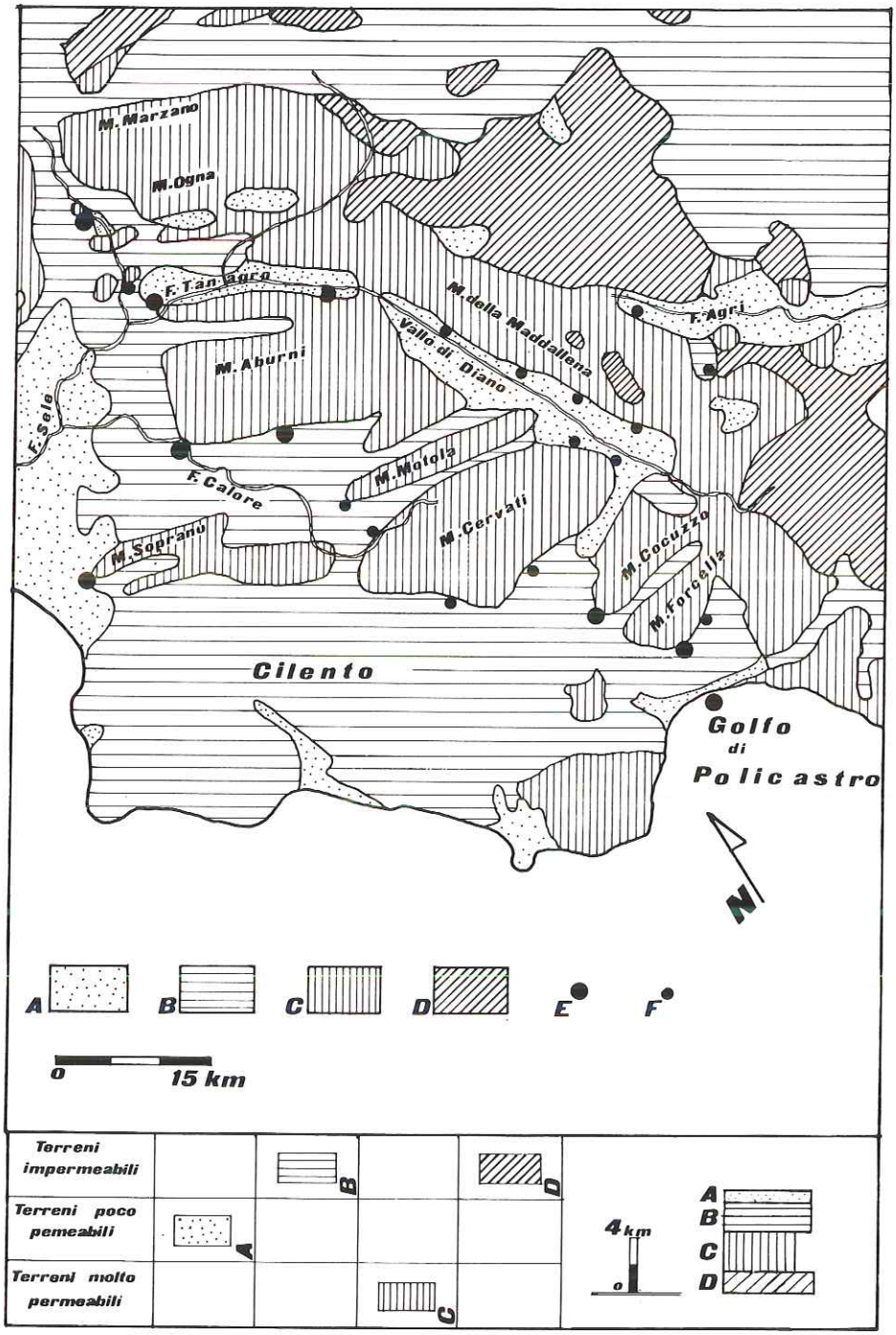
L'evoluzione tettonica ora brevemente schematizzata ha determinato l'attuale assetto idrogeologico.

In base alla permeabilità e alla posizione geometrica i vari terreni sovraindicati si possono raggruppare, dal basso verso l'alto, in quattro unità principali (fig. 2):

1) terreni impermeabili inferiori (depositi arenacei ed argillosi) della copertura miocenica delle unità derivanti dalla piattaforma

▶

Fig. 2. - Schema idrogeologico della Campania meridionale.
A: terreni a bassa permeabilità generale, costituiti da alluvioni quaternarie (ghiaie, sabbie e limi).
B: terreni impermeabili superiori, costituiti da: arenarie ed argille della copertura miocenica della piattaforma campano-lucana; argille, marne, calcari, arenarie e conglomerati delle unità delle Argille varicolori (Cret.-Mioc. inf.) e del flysch del Cilento (Cret.-Mioc. inf.); argille, arenarie e conglomerati delle unità irpine (Langhiano-Tortoniano); argille ed arenarie del Pliocene inferiore-medio.
C: Terreni molto permeabili per fratturazione e carsismo, costituiti da: dolomie e calcari della piattaforma campano-lucana (Trias sup-Mioc. inf.).
D: terreni complessivamente impermeabili inferiori, costituiti da: arenarie, argille, marne, radiolariti e calcari delle unità lagonegresi (Trias medio-Mioc. inf.); argille, arenarie e marne della copertura miocenica della piattaforma abruzzese-campana.
E: sorgenti con portata media superiore a 1 mc/sec.
F: sorgenti con portata media inferiore a 1 mc/sec.


M. Marzano
M. Ogna
F. Tanagro
M. della Maddalena
F. Agri
Valle di Diano
M. Alburni
F. Sele
F. Calore
M. Motola
M. Cervati
M. Sopriano
M. Cocuzzo
M. Forgella
Cilento
Golfo di Policastro
N
A
B
C
D
E
F
0
15 km
Terreni impermeabili
Terreni poco permeabili
Terreni molto permeabili
4 km
0

abruzzese-campana e (depositi arenacei, argillosi, marnosi, silicei e calcarei) delle unità lagonegresi;

2) terreni fortemente permeabili per fratturazione e carsismo delle unità carbonatiche individuatesi dalla piattaforma campano-lucana;

3) terreni impermeabili superiori costituiti dalle argille, marne, arenarie e conglomerati delle unità delle Argille varicolori e del fllysch del Cilento;

4) terreni a bassa permeabilità costituiti dalle alluvioni quaternarie.

Queste distinzioni hanno valore a scala regionale e permettono di delineare le principali caratteristiche dei grandi circuiti delle acque sotterranee. Nel presente schema, per semplicità, sono stati considerati unitamente ai terreni impermeabili inferiori e superiori anche quei livelli che, in realtà, per limitate aree di affioramento, presentano una discreta permeabilità (es. i « calcari con selce » delle unità lagonegresi e i conglomerati e le arenarie del flysch del Cilento).

Tettonica ed idrogeologia

I terreni carbonatici delle unità derivanti dalla deformazione della piattaforma campano-lucana costituiscono l'acquifero principale dell'area in esame. Essi a sud delle valli del Tanagro e del Calore sono stati deformati essenzialmente dalla tettonica del Miocene inferiore (strutture anticlinaliche di M. Motola, M. Soprano, M. Chianello, M. Cervati, M. Cocuzzo, M. Forcella e M. Bulgheria). A nord delle valli del Tanagro e del Calore sono invece molto marcate le strutture connesse alla tettonica disgiuntiva quaternaria che ha individuato grandi blocchi rialzati (M. Marzano-M. Ogna, Monti Alburni, Monti della Maddalena) e ribassati (Valle del Sele, bassa valle del Tanagro, Vallo di Diano e alta val d'Agri). Nelle aree ribassate strutturalmente si sono conservati i terreni impermeabili superiori ed inoltre si sono accumulati i depositi alluvionali quaternari.

I blocchi rialzati, costituiti da rocce carbonatiche e ben separati dai blocchi ribassati, con limitate aree di contatto, costituiscono delle grandi strutture idrogeologiche in cui si possono riconoscere delle sub unità idrostrutturali dovute sia alla tettonica disgiuntiva che a quella compressiva.

A sud del Vallo di Diano dove la tettonica quaternaria non ha determinato notevoli sollevamenti e dove le unità carbonatiche erano già notevolmente ripiegate, le strutture mioceniche costituiscono idrostrutture in cui gli effetti della tettonica recente, l'erosione, carsismo

e sovralluvionamento controllano la ubicazione delle sorgenti principali.

In tutte le strutture, in genere costituite da calcari in alto e dolomie alla base, tamponati dai terreni impermeabili delle unità lagonegresi e della copertura terrigena miocenica delle unità derivanti dalla deformazione della piattaforma abruzzese-campana, si ha una forte permeabilità dalla sommità alla base, sia pure con differenze qualitative e quantitative dipendenti dalla litologia, tettonizzazione e carsismo.

Le masse calcaree presentano molto spesso evidenze di uno sviluppato carsismo epigeo ed ipogeo, preferenzialmente impostato su faglie e fratture (es. Monti Alburni e M. Cervati); a volte però i fenomeni carsici superficiali sono molto limitati (M. Motola, M. Soprano e Monti della Maddalena).

È da notare che la parte dolomitica, dove affiora, presenta sempre una intensa fratturazione diffusa quasi capillarmente in tutta la roccia, che la rende notevolmente permeabile.

I calcari, oltre alla notevole fratturazione, che raramente è così spinta e capillare come nelle dolomie, presentano una buona rete di condotti carsici (in prevalenza verticali dalla superficie al livello di base, e orizzontali alle quote in cui risultano tamponati lateralmente) che garantiscono un ottimo drenaggio verso i punti di emergenza della falda.

Poiché i blocchi carbonatici si sono sollevati in più fasi, è variata nel tempo la quota di tamponamento laterale; questi eventi spiegano la presenza di vari condotti carsici ad andamento orizzontale connessi alle varie fasi di carsificazione, sospesi rispetto all'attuale livello di base della falda.

Dove l'acquifero dolomitico viene a contatto laterale con quello calcareo, il più facile drenaggio all'interno di quest'ultimo fa sì che mentre lungo l'area dolomitica, a contatto con i terreni meno permeabili sovrapposti geometricamente, si hanno più punti d'acqua con portate limitate, ai piedi della zona calcarea, allo sbocco dei condotti carsici si hanno grandi sorgenti che drenano anche l'acqua in falda nelle dolomie (es. Monti della Maddalena nell'area compresa fra Sala Consilina e Padula).

Nell'Appennino meridionale, quindi, non è valida la netta differenziazione idrogeologica tra dolomie e calcari messa in evidenza in altre situazioni stratigrafico-strutturali, pur esistendo alcune differenziazioni quantitative e qualitative per quanto riguarda ad esempio la permeabilità e l'andamento della superfice piezometrica degli acquiferi.

STRUTTURE IDROGEOLOGICHE CONTROLLATE DA DEFORMAZIONI QUATERNARIE

a) *Strutture senza i terreni impermeabili di base affioranti*

In questo gruppo vanno inquadrate quelle grandi strutture rialzate costituite nelle parti sommitali da rocce carbonatiche e individuatesi nel Quaternario. Questi blocchi sono delimitati da faglie dirette con notevoli rigetti verticali, anche superiori ai 2000 metri, in cui le strutture mioceniche non hanno grande influenza sulla circolazione delle acque sotterranee. I terreni impermeabili di base, infatti, si trovano sempre a profondità superiori a quella della soglia di permeabilità laterale dell'acquifero carbonatico; quest'ultimo quindi, è sede di una unica grande falda che viene drenata in più punti che corrispondono alle massime depressioni della soglia di permeabilità. Strutture secondarie possono aver determinato, all'interno della unità principale, la individuazione di sub unità idrogeologiche; mentre reti carsiche sospese possono controllare falde secondarie.

Il ruolo della tettonica quaternaria, sovraimposta su quella miocenica, è stato di aver sollevato grandi blocchi mettendo a contatto laterale i carbonati con i terreni impermeabili superiori prevalentemente argillosi. Le fasi più recenti inoltre hanno da una parte determinato bacini rapidamente riempiti da terreni alluvionali, e, dall'altra, nuove rapide erosioni ai margini delle strutture principali. Ciò ha provocato notevoli variazioni della ubicazione delle principali sorgenti nel Quaternario recente.

GRUPPO DI M. MARZANO - M. OGNA

È un blocco di forma quadrangolare (fig. 3), intensamente carsificato, orientato WNW-ESE, immergente verso SSW, e delimitato verso W dalla depressione della Valle del Sele e verso S dalla depressione del fiume Tanagro (ORTOLANI, 1975); allo spigolo sud orientale questa idrostruttura viene a contatto con quella dei Monti della Maddalena. Lungo il margine meridionale si hanno due faglie orientate NW-SE che determinano un gradino ribassato prima del graben della Valle del fiume Tanagro. Su questo gradino si sono impostati due bacini endoreici (Piane di Palomonte e di S. Gregorio Magno) riempiti da depositi alluvionali. L'idrostruttura è divisa in due strutture idrogeologiche secondarie da una faglia orientata WNW-ESE: l'idrostruttura settentrionale alimenta le sorgenti di Quaglietta (portata media circa 2,5 mc/sec) ubicate lungo l'alveo del fiume Sele; l'idrostruttura meridionale alimenta in parte le sorgenti dell'area

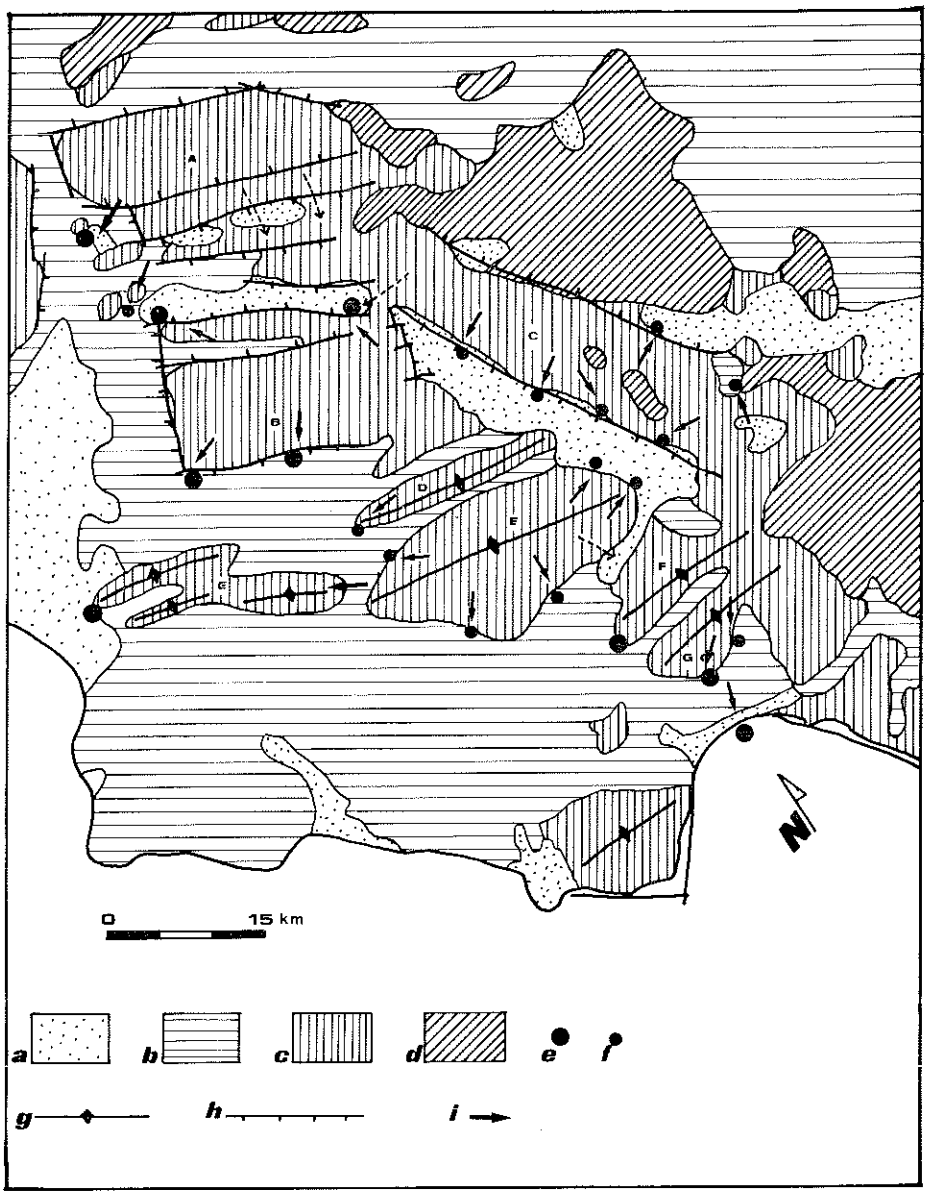


FIG. 3. - Schema delle strutture idrogeologiche della Campania meridionale.

A: gruppo di M. Marzano-M. Ogna.
B: gruppo dei Monti Albuni.
C: gruppo dei Monti della Maddalena.
D: M. Motola.
E: M. Cervati-M. Soprano.
F: M. Cocuzzo.
G: M. Forcella.
a: terreni a bassa permeabilità generale.
b: terreni generalmente impermeabili superiori.
c: terreni molto permeabili.
d: terreni generalmente impermeabili inferiori.
e: sorgenti con portata media superiore a 1 mc/sec.
f: sorgenti con portata media inferiore a 1 mc/sec.
g: assi di anticlinali mioceniche.
h: faglie dirette quaternarie.
i: direzione di flusso principale della falda di base.

di Contursi, ubicate anch'esse lungo l'alveo del fiume Sele e di portata non ben valutata. È probabile che alimenti anche durante il periodo piovoso una serie di sorgenti temporanee, lungo le profonde incisioni dei fiumi Bianco e Platano, che determinerebbero una rapida fuoriuscita delle acque. L'erosione operata dalle acque del Sele ha determinato lo spostamento da E verso W delle sorgenti termominerali; quasi certamente anche le sorgenti di Quaglietta sono di recente formazione in seguito alla cattura della falda dovuta all'erosione dei terreni impermeabili che ricoprivano i calcari.

GRUPPO DEI MONTI ALBURNI

È un horst calcareo di forma quadrangolare (fig. 3) orientato NW-SE ed immergente a SW; una faglia longitudinale orientata NW-SE passante per Sicignano degli Alburni e Petina ribassa verso il Tanagro il blocco di M. Forloso. Le forme carsiche sono sviluppatissime e ben note in letteratura (BRANCACCIO et alii, 1973). Questo gruppo è delimitato verso NE dal graben del fiume Tanagro, verso NW dal graben della Piana del Sele e, verso SW, dal graben del Fiume Calore; agli spigoli nord orientale e sud orientale viene a contatto rispettivamente con la idrostruttura dei Monti della Maddalena e con il rilievo di M. Cocuzzo delle Puglie. Rappresenta un'unica struttura che alimenta le sorgenti Auso di Ottati (portata media circa 1500 l/sec), di Castelcivita (emergenti in parte lungo l'alveo del fiume Calore e di non facile valutazione, forse 2000 l/sec), sorgenti sub-alvee (portata di alcune migliaia di l/sec) lungo lo spigolo NW dove il Tanagro incide i calcari della idrostruttura e le sorgenti di Pertosa (circa 2000 l/sec).

b) *Strutture con i terreni impermeabili di base affioranti*

Sono strutture individuate dalla tettonica quaternaria (horst), costituite quasi esclusivamente da terreni carbonatici, in cui gli effetti della tettonica miocenica influenzano in maniera determinante il deflusso delle acque sotterranee. I terreni impermeabili di base, infatti, si trovano a quota superiore a quella della soglia di permeabilità laterale.

GRUPPO DEI MONTI DELLA MADDALENA

È un horst allungato in direzione NNW-SSE delimitato da faglie dirette verso il Vallo di Diano e verso la Valle del fiume Pergola e

del fiume Agri (fig. 3). Allo spigolo sud orientale viene a contatto con altre idrostrutture tributarie della Valle del fiume Bussento. Al di sotto dei terreni carbonatici, in finestra tettonica, affiorano i terreni praticamente impermeabili delle unità lagonegresiche formano strutture anticlinali (SCANDONE, 1967), con asse coincidente all'incirca con lo spartiacque superficiale (NICOTERA & DE RISO, 1969). Lateralmente i carbonati sono tamponati dai depositi alluvionali del Vallo di Diano e dell'alta Val d'Agri e dai terreni prevalentemente argillosi miocenici e delle unità del flysch del Cilento. I terreni impermeabili di base, affioranti quasi ovunque a quote nettamente superiori a quelle della soglia di permeabilità laterale, condizionano il deflusso delle acque sotterranee: in parte verso il Vallo di Diano (complessivamente circa 2000 l/sec) ed in parte verso l'alta Val d'Agri (complessivamente 2000 l/sec). Strutture minori individuano sub unità idrogeologiche.

Lungo il margine del Vallo di Diano si hanno le due sorgenti principali ubicate nei calcari; lungo i bordi dei vasti affioramenti di dolomie si hanno invece numerose sorgenti minori. Le dolomie oltre a rifornire le sorgenti al contatto con i terreni meno permeabili, cedono acqua anche alle sorgenti ubicate nei calcari contigui.

STRUTTURE IDROGEOLOGICHE PREVALENTEMENTE CONTROLLATE DALLA TETTONICA MIOCENICA

Sono strutture individuatesi nelle unità carbonatiche durante il sovrascorrimento sulle unità lagonegresi, avvenuto nel Miocene inferiore. Si tratta di anticlinali orientate W-E, che la tettonica quaternaria, sovraimposta, non ha cancellato: sono evidenti nell'area ad W del Vallo di Diano e nell'area del fiume Noce in Basilicata. Le strutture sono abbastanza ben individuate e separate dai terreni argillosi, appartenenti alle unità delle Argille varicolori e del flysch del Cilento, conservati nelle depressioni strutturali. A volte i terreni impermeabili di base si trovano a quote superiori a quelle delle soglie di permeabilità laterali (es.: M. Cocuzzo e M. Forcella). La tettonica quaternaria, determinando a volte sollevamenti differenziati ed erosione della copertura impermeabile e, a volte, sovralluvionamenti notevoli, ha condizionato le ubicazioni delle sorgenti, provocando sensibili spostamenti dei punti di drenaggio. Le sorgenti principali sono ora ubicate in corrispondenza delle depressioni assiali, a contatto con i terreni prevalentemente argillosi sovrastanti i calcari, o con i terreni alluvionali quaternari accumulatisi nei graben recenti.

Monte Motola

È una mezza anticlinale orientata W-E delimitata verso S da una faglia diretta (fig. 3); ad E i calcari sono tamponati in parte dalle alluvioni del Vallo di Diano mentre per il resto della struttura dai terreni del flysch del Cilento e delle Argille varicolori. Il punto più depresso della soglia di permeabilità è nel bacino del fiume Calore lungo l'incisione del fiume Sammaro dove è ubicata l'unica sorgente (portata circa 600 l/sec) che drena l'intera struttura idrogeologica. Anche i terreni impermeabili inferiori si trovano sempre a quote inferiori a quella della soglia di permeabilità laterale. Parte delle acque sotterranee sono cedute anche alle alluvioni del Vallo di Diano. Probabilmente l'evoluzione recente dell'area (sovralluvionamento nel Vallo di Diano con tamponamento dell'acquifero calcareo a quote sempre più alte ed erosione attiva lungo la Valle del Sammaro con abbassamento via via maggiore della soglia di permeabilità) ha provocato lo spostamento del punto di drenaggio da E verso W.

Monte Cervati, Monte Soprano

Questa struttura idrogeologica è costituita dalle seguenti strutture anticlinaliche: M. Cervati, M. Chianello, M. Sottano e M. Soprano; orientate W-E, tamponate all'estremità occidentale ed orientale dalle alluvioni rispettivamente della Piana del Sele e del Vallo di Diano e, per il resto, dai terreni argillosi delle unità delle Argille varicolori e del flysch del Cilento (fig. 3).

I terreni carbonatici del M. Cervati sono separati, in affioramento, da quelli delle altre strutture in corrispondenza della depressione assiale del torrente Torno; essi tuttavia a piccola profondità sono in continuità fisica.

La struttura del M. Cervati, le cui forme carsiche sono molto diffuse e sviluppate, è la più ampia del gruppo e presenta due sorgenti principali, a circa 450 m s.l.m., sul versante del Vallo di Diano (portata media complessiva circa 1700 l/sec). Altre sorgenti sgorgano sul versante meridionale: una nella Valle del Mingardo a quota di circa 450 m s.l.m. (portata media circa 400 l/sec), un'altra nell'alta Valle del Bussento a quota di circa 470 m s.l.m. (portata media 500 l/sec) e una sorgente minore nella Valle del Calore, presso Laurino, a quota di circa 325 m s.l.m. (portata media circa 100 l/sec). Non mancano sorgenti minori in quota alimentate da falde sospese (sorgenti del Calore).

Poco ad E di Sanza si ha un'altra sorgente, a quota di circa 500 m s.l.m., alimentata dalla falda del M. Cervati durante il periodo di maggiore sollevamento della superficie piezometrica (dall'inizio dell'inverno all'inizio dell'estate).

La sorgente principale di tutta la struttura idrogeologica (Capodifiume) è ubicata al margine occidentale a quota di circa 15 m. s.l.m., a contatto con i terreni alluvionali della Piana del Sele (portata media di circa 3500 l/sec).

La mancanza di grosse sorgenti al bordo occidentale di M. Cervati, nelle valli del torrente Torno e del fiume Calore, nonostante che la soglia di permeabilità sia più bassa di circa 150 m rispetto al Vallo di Diano (dove sono ubicate le sorgenti principali) e la notevole portata delle sorgenti Capodifiume, ingiustificata se si considera area di alimentazione solo le strutture di M. Chianello, M. Sottano e M. Soprano, permettono di affermare che la struttura idrogeologica del M. Cervati-M.Soprano è unica.

È da notare che la sorgente di Capodifiume ha acque mineralizzate, probabilmente per il mescolamento dell'acqua di falda con acque marine fossili intrappolate nei carbonati.

Sia nella parte occidentale del M. Cervati che nel gruppo dei Monti Alburni il carsismo epigeo ed ipogeo molto sviluppato crea uno svuotamento rapido di gran parte delle acque di infiltrazione. Infatti lungo il corso del fiume Calore, nei pressi di Laurino, e del torrente Torno durante il periodo piovoso si possono osservare diversi condotti carsici attivi.

Monte Forcella, Monte Cocuzzo

La struttura di M. Forcella, orientata W-E, viene a contatto a NE con la struttura idrogeologica dei Monti della Maddalena, a N è separata dalla struttura del M. Cervati dalla depressione compresa fra Sanza ed il Vallo di Diano (fig. 3). Ad E i terreni impermeabili di base affiorano a quote superiori a quelle della soglia di permeabilità laterale tra i calcari ed i terreni impermeabili del flysch del Cilento. Lungo l'alveo del fiume Bussento, in corrispondenza della depressione assiale della struttura, è ubicata la sorgente 12 Fistole della portata di circa 2500 l/sec.

La struttura di M. Cocuzzo viene attraversata dal corso sotterraneo del fiume Bussento alle cui risorgenze è ubicata una sorgente di circa 1500 l/sec ed alcune sorgenti minori che non sono in relazione con le acque del fiume ma sono alimentate dalla struttura calcarea.

Falde sospese alimentano alcune sorgenti lungo il fiume Bussentino a monte di Casaletto Spartano. Una sorgente sottomarina, di notevole portata, nota poco al largo di Villammare, rappresenta il recapito principale di tutta l'idrostruttura.

* * *

Appare chiaro, alla fine di questa breve rassegna, che questi massicci carbonatici, per l'assetto geometrico che hanno assunto e per l'intensa tettonizzazione che li caratterizza costituiscono le più importanti riserve d'acqua dolci sotterranee dell'Italia meridionale.

Le sorgenti principali, ubicate ai piedi di questi massicci, sono oggi largamente utilizzate per uso civile, industriale ed irriguo.

La regione Campania dispone in media di circa 44 mc/sec di acque sorgive, l'area in esame di circa 24 mc/sec, più circa 3-4 mc/sec che si riversano direttamente in mare nel golfo di Policastro.

Questa abbondanza di acque sorgive ha permesso, nelle aree pianeggianti di queste zone, l'instaurarsi di una agricoltura fortemente intensiva ed avanzata.

La decisione di captare queste acque sorgive di ottima qualità per addurle nelle aree costiere limitrofe, fortemente urbanizzate, porrà dei seri problemi alla economia agricola della zona. Infatti anche se non è razionale, in genere, usare acque di simile qualità per l'irrigazione, specie in aree fortemente piovose, il non aver predisposto opere adatte alla loro sostituzione con acque di diversa provenienza (es.: bacini artificiali) porrà seri problemi allo sviluppo sia industriale che agricolo di tutta la zona.

BIBLIOGRAFIA

Brancaccio L., Civita M. & Vallario A., *Prime osservazioni sui problemi idrogeologici dell'Alburno (Campania)*, Boll. Soc. Natur., **82**, (1973).

Celico P. & Civita M., *Sulla tettonica del massiccio del Cervialto (Campania) e le implicazioni idrogeologiche ad essa connesse*, Boll. Soc. Natur. Napoli, **85**, (1976).

Civita M., De Medici G. B., De Riso R., Nicotera P. & Nota D'Elogio E., *Memoria descrittiva della carta idrogeologica della Campania nord-occidentale*, 2° Convegno Intern. Acque Sotterr., Palermo, (1973).

Cocco E., Coppola L., Cravero E., Ortolani F., Pescatore T., Russo M. & Torre M., *Le unità irpine nell'area a nord di Monte Marzano (Italia meridionale)*, Mem. Soc. Geol. Ital., **13**, (1974).

Cocco E., Cravero E., Ortolani F., Pescatore T., Russo M., Sgrosso I. & Torre M., *Les facies sedimentaires miocenes du bassim Irpinien (Italie Meridionale)*, Atti Acc. Pontan., **21** (1972).

D'Argenio B., Pescatore T. & Scandone P., *Schema geologico dell'Appennino meridionale (Campania e Lucania)*, Atti Accademia Lincei, Quad. 183, (1973).

DI NOCERA S., ORTOLANI F. & TORRE M., *Fase tettonica messiniana nell'Appennino meridionale,* Boll. Soc. Natur. Napoli, **84**, (1975).

DI NOCERA S., ORTOLANI F. & TORRE M., *La tettonica messiniana nell'evoluzione della catena appenninica,* Atti seminario « Significato geodinamico della crisi di salinità nel Miocene terminale nel Mediterraneo », Firenze 1976, (1976).

IPPOLITO F., ORTOLANI F. & RUSSO M., *Struttura marginale tirrenica dell'Appennino campano: reinterpretazione di dati di antiche ricerche di idrocarburi,* Mem. Soc. Geol. It., **12**, (1973).

NICOTERA P. & DE RISO R., *Idrogeologia del Vallo di Diano,* Mem. e Note dell'Ist. di Geol. Appl., II, Napoli, (1967).

ORTOLANI F., *Assetto strutturale dei Monti Picentini, della valle del Sele e del gruppo di Monte Marzano-Monte Ogna (Appennino meridionale). Implicazioni idrogeologiche,* Boll. Soc. Geol. It., **94**, (1975).

PESCATORE T. & ORTOLANI F., *Schema tettonico dell'Appennino campano-lucano,* Boll. Soc. Geol. It., **92**, (1973).

PESCATORE T., SGROSSO I. & TORRE M., *Lineamenti di tettonica e sedimentazione nel Miocene dell'Appennino campano-lucano,* Mem. Soc. Natur. Napoli, **76**, (1970).

SCANDONE P., *Studi di geologia lucana: la serie calcareo-silico-marnosa e i suoi rapporti con l'Appennino calcareo,* Boll. Soc. Natur. Napoli, **76**, (1967).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci B. D'Argenio, G. Imbò e A. Scherillo.

Una generalizzazione dell'operatore di Stancu

Nota di GIUSEPPE MASTROIANNI e MARIO ROSARIO OCCORSIO
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

RIASSUNTO. — Gli autori studiano le proprietà delle potenze dell'operatore di Stancu. Essi introducono poi un nuovo operatore che presenta il vantaggio di migliorare l'approssimazione al crescere della regolarità della funzione approssimanda.

Si ottengono generalizzazioni e raffinamenti di risultati già noti, nonché nuove formule di derivazione e di quadratura.

SUMMARY. — The authors study some properties of the powers of the Stancu's operator. Then they introduce a new operator connected with Stancu's operator improving the approximation with the growth of the smoothness of the function to be approximated.

Moreover some generalizations and improvements of well known results are obtained.

Numerical differentiation and numerical quadrature formulas are achieved.

1. - INTRODUZIONE.

Ad ogni funzione f definita nell'intervallo $[0, 1]$ si può associare il polinomio di Stancu $S_m^{\alpha}(f; x)$ di grado m e parametro α definito dall'uguaglianza:

$$S_m^{\alpha}(f; x) = \sum_{0}^{m} {}_i \binom{m}{i} w_{m,i}^{\alpha}(x) f(i/m) \tag{1.1}$$

con

$$w_{m,i}^{\alpha}(x) = \frac{x^{(i,-\alpha)}(1-x)^{(m-i,-\alpha)}}{1^{(m,-\alpha)}}$$

in cui $x^{(r,h)}$ è la pseudopotenza di base reale x, pseudoesponente intero non negativo r e parametro reale h, data dalla posizione:

$$x^{(r,h)} = \begin{cases} 1 \text{ per } r = 0 \\ \prod_{s=0}^{r-1} (x - s\,h) \text{ per } r > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

L'operatore definito dalla (1.1) si chiama appunto operatore di Stancu e si indica col simbolo S_m^α. Esso è un operatore positivo del tipo Bernstein. I polinomi $S_m^\alpha(f; x)$ introdotti da Stancu [1-2-3-4] sono stati studiati anche da altri autori [5].

Gli operatori introdotti da BASKAKOV [6] e da MIRAKYAN [7] possono essere ritenuti dei casi limiti dell'operatore di STANCU [1].

La maggior parte dei polinomi del tipo Bernstein, e fra questi anche i polinomi di Stancu, presentano l'inconveniente di subire il fenomeno della saturazione; si ha cioè che al crescere della regolarità della funzione da approssimare non cresce l'ordine di approssimazione della funzione approssimante.

In questo lavoro si studiano le potenze dell'operatore di Stancu ottenendo un risultato analogo a quello che KELISKY e RIVLIN [8] hanno ottenuto per le potenze dell'operatore di Bernstein.

Inoltre si introduce e si studia un operatore $S_{m,k}^\alpha$ che è combinazione lineare di potenze di S_m^α. Questo operatore, che non è sempre positivo, generalizza sia l'operatore di Stancu sia l'operatore $B_{m,k}$ studiato in [9]; presenta inoltre il vantaggio di migliorare l'approssimazione al crescere della regolarità della funzione che si approssima. Si ottiene pure una generalizzazione della uguaglianza di VORONOVSKAYA [10] ed in particolare un raffinamento di un risultato di BUTZER [11] e di uno di FRENTIU [12]. Si dimostra anche che, detto L_m l'operatore di Lagrange sui nodi $\{i/m\}\,(i = \overline{o, m})$, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} S_{m,k}^\alpha(f; x) = L_m(f; x)$$

per ogni funzione f definita in $[0, 1]$.

Si ottengono infine delle nuove formule di derivazione e di quadratura numerica.

2. - L'OPERATORE $S_{m,k}^\alpha$.

Indicati con m e k degli interi positivi e con α un reale positivo, sia $S_{m,k}^\alpha$ l'operatore definito dall'uguaglianza:

$$S_{m,k}^\alpha = I - (I - S_m^\alpha)^k \tag{2.1}$$

ove I è l'operatore identico ed S_m^α è l'operatore di Stancu definito mediante la (1.1).

Dalla (2.1) segue:

$$S^{\alpha}_{m,k} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (S^{\alpha}_{m})^{i}$$

$$S^{\alpha}_{1,k} = S^{\alpha}_{1}$$

$$S^{\alpha}_{m,1} = S^{\alpha}_{m}$$

$$S^{0}_{m,k} = B_{m,k}$$

dove $B_{m,k}$ è l'operatore studiato in [9].

Detta f una funzione definita in $[0, 1]$, si ha ovviamente:

$$S^{\alpha}_{m,k}(f; 0) = f(0)$$

$$S^{\alpha}_{m,k}(f; 1) = f(1)$$

Con facili calcoli si ottiene poi in particolare:

$$S^{\alpha}_{2,k}(f; x) = 2(1 - t^k)(f_0 - 2f_{1/2} + f_1)x^2 + \tag{2.2}$$
$$+ [(2t^k - 3)f_0 + 4(1 - t^k)f_{1/2} + (2t^k - 1)f_1]x + f_0$$

ove si è posto:

$$t = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 2} \tag{2.3}$$

Si osservi che l'operatore $S^{\alpha}_{m,k}$ è in generale non positivo, cioè

$$f(x) \geq 0 \not\Rightarrow S^{\alpha}_{m,k}(f; x) \geq 0$$

Ad esempio, per una funzione f non negativa appartenente a $C^0[0, 1]$ tale che:

$$f_0 = f_{1/2} = 0 \quad \text{ed} \quad f_1 = 1,$$

tenendo presente la (2.2), si ha:

$$S^{\alpha}_{2,k}(f; x) = 2(1 - t^k)x\left(x + \frac{2t^k - 1}{2 - 2t^k}\right)$$

e poiché è:

$$2 - 2t^k > 0 \quad \text{e} \quad -1 < 2t^k - 1 < 1$$

$S^{\alpha}_{2,k}(f; x)$ cambia segno in $[0, 1]$. Pertanto l'operatore $S^{\alpha}_{m,k}$ è in generale non positivo.

D'altra parte esistono dei sottoinsiemi di $C^0[0, 1]$ in cui $S^{\alpha}_{m,k}$ è positivo per qualche k. Invero nell'insieme delle funzioni concave di $C^0[0, 1]$ gli operatori $S^{\alpha}_{m,2}$ e $S^{\alpha}_{m,3}$ sono positivi. Infatti se f è concava, posto:

$$R^{\alpha}_{m} = I - S^{\alpha}_{m}$$

si ha:

$$R^{\alpha}_{m}(f; x) > 0 \,[1]$$

Poiché risulta pure:

$$S^{\alpha}_{m,2}(f; x) = S^{\alpha}_{m}(2f - S^{\alpha}_{m} f; x) = S^{\alpha}_{m}(f + R^{\alpha}_{m} f; x)$$

$$S^{\alpha}_{m,3}(f; x) = 3\,S^{\alpha}_{m}(f; x) - 3\,(S^{\alpha}_{m})^2(f; x) + (S^{\alpha}_{m})^3(f; x) =$$

$$= S^{\alpha}_{m}(3\,R^{\alpha}_{m} f + (S^{\alpha}_{m})^2 f; x),$$

si ha la positività degli operatori $S^{\alpha}_{m,2}$ ed $S^{\alpha}_{m,3}$.

L'operatore $S^{\alpha}_{m,k}$, come si può facilmente verificare, ha grado di esattezza 2. Inoltre, posto:

$$R^{\alpha}_{m,k} = (R^{\alpha}_{m})^k = (I - S^{\alpha}_{m})^k$$

$$e_k(x) = x^k$$

si ha in particolare:

$$R^{\alpha}_{m,k}(e_2; x) = -\left(\frac{1 + \alpha m}{1 + \alpha}\right)^k \frac{x(1 - x)}{m^k}$$

[1] Invero si ha:

$$S^{\alpha}_{m}(f; x) = \sum_{0}^{m}{}_{i} w^{\alpha}_{m,i}(x)\, f(i/m) < f\left(\sum_{0}^{m}{}_{i} w^{\alpha}_{m,i}(x)\frac{i}{m}\right) = f(x)$$

3. - CONVERGENZA, PER $k \to \infty$, DI $(S_m^{\alpha})^k(f; x)$ E DI $S_{m,k}^{\alpha}(f; x)$.

Posto, per ogni $h \in R$ ed ogni k intero positivo:

$$V_{k,h} = \begin{pmatrix} h^k & s_k^{k+1} \\ h^{k-1} & s_{k-1}^{k+1} \\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \\ h^2 & s_2^{k+1} \\ h & s_1^{k+1} \end{pmatrix}$$

dove s_i^j denotano i numeri di Stirling di seconda specie (cfr., ad es., F. SCHEID, *Numerical Analysis*, Mc Graw Hill (1968)), si definisce per ricorrenza la matrice di ordine $k+1$:

$$S_{k,h} = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad k = 0 \\ \begin{pmatrix} S_{k-1,h} & V_{k,h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{se} \quad k > 0 \end{cases}$$

con $0 \in R^k$
Posto poi:

$$X_k = (x, x^2, \ldots, x^k);\ u_k = (0, 0, \ldots, 0, 1)^T \in R^k$$

$$Y_{k,h} = \left(x, \frac{x^{(2,h)}}{1^{(2,h)}}, \ldots, \frac{x^{(k,h)}}{1^{(k,h)}}\right)$$

$$\Lambda_{k,h} = \begin{pmatrix} 1^{(1,h)} & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1^{(2,h)} \ldots\ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 1^{(k,h)} \end{pmatrix};\quad A_{k,h} = \Lambda_{k,h}\, S_{k-1,h}$$

si ottiene:

$$X_k = Y_{k,h}\, A_{k,h} \tag{3.1}$$

Inoltre si dimostra facilmente che:

$$S_m^{\alpha}(e_i; x) = Y_{i,-\alpha}\, A_{i,1/m}\, u_i \qquad (1 \le i \le m) \tag{3.2}$$

In particolare per $\alpha = 0$ e per $\alpha = -1/m$ si hanno rispettivamente:

$$S_m^0(e_i; x) = B_m(e_i; x) = X_i A_{i,1/m} u_i$$

$$S_m^{-1/m}(e_i; x) = X_i u_i = x^i$$

Da quest'ultima uguaglianza segue poi facilmente che:

$$S_m^{-1/m} = L_m$$

ove L_m è l'operatore di Lagrange sui nodi $\{i/m\}\,(i = \overline{o, m})$

Dalla (3.2), tenuto conto della (3.1), si ottiene:

$$S_m^{\alpha}(e_i; x) = X_i (A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m}) u_i \tag{3.3}$$

Dalla (3.2) si ha inoltre:

$$(x, S_m^{\alpha}(e_2; x), \ldots, S_m^{\alpha}(e_i; x)) = Y_{i,-\alpha} A_{i,1/m} \tag{3.4}$$

Posto poi:

$$\eta_i^{-\alpha}(x) = \frac{x^{(i,-\alpha)}}{1^{(i,-\alpha)}}$$

dalla (3.4) si ottiene:

$$S_m^{\alpha}(\eta_i^{-\alpha}; x) = S_m^{\alpha}((e_1, \ldots, e_i) A_{i,-\alpha}^{-1} u_i; x) =$$

$$= (x, S_m^{\alpha}(e_2; x), S_m^{\alpha}(e_3; x), \ldots, S_m^{\alpha}(e_i; x)) A_{i,-\alpha}^{-1} u_i$$

e quindi:

$$S_m^{\alpha}(\eta_i^{-\alpha}; x) = \bar{Y}_{i,-\alpha} (\bar{A}_{i,1/m} \bar{A}_{i,-\alpha}^{-1}) u_i \tag{3.5}$$

da cui segue in definitiva:

$$(S_m^{\alpha}(\eta_1^{-\alpha}; x), \ldots, S_m^{\alpha}(\eta_i^{-\alpha}; x)) = Y_{i,-\alpha} A_{i,1/m} A_{i,-\alpha}^{-1} \tag{3.6}$$

Si osservi che indicato con $a_{k,h}$ il vettore che si ottiene da $V_{k,h}$ sostituendo a s_i^j i numeri di Stirling di prima specie e posto:

$$\mathfrak{S}_{k,h} = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad k = 0 \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{k-1,h} & a_{k,h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{se} \quad k > 0 \end{cases}$$

si ha:

$$S_{k,h}^{-1} = \delta_{k,h} \tag{3.7}$$

Ovviamente la (3.7) consente un agevole calcolo della matrice $A_{k,h}^{-1}$; il che semplifica l'utilizzazione delle (3.3) e (3.5).

Si dimostra ora il seguente

LEMMA 3.I — Per ogni $k \in N$ si ha:

$$(S_m^{\alpha})^k (e_i; x) = X_i (A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m})^k u_i \tag{3.8}$$

Infatti in virtù della (3.3), la (3.8) è vera per $k = 1$. Procedendo per induzione, si supponga che sia:

$$(S_m^{\alpha})^{k-1} (e_i; x) = X_i (A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m})^{k-1} u_i$$

Posto:

$$(A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m})^{k-1} u_i = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i)^T$$

dall'ipotesi induttiva, tenendo conto delle (3.1) e (3.4), segue:

$$(S_m^{\alpha})^k (e_i; x) = S_m^{\alpha} (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_i e_i; x) =$$

$$= (S_m^{\alpha} (e_1; x), S_m^{\alpha} (e_2; x), \ldots, S_m^{\alpha} (e_i; x)) (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i)^T =$$

$$= Y_{i,-\alpha} A_{i,1/m} (A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m})^{k-1} u_i = X_i (A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m}) (A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m})^{k-1} u_i =$$

$$= X_i (A_{i,-\alpha}^{-1} A_{i,1/m})^k u_i$$

e pertanto la (3.8) è provata.

In modo analogo si potrebbe dimostrare il seguente

LEMMA 3.II — Per ogni $k \in N$ si ha:

$$(S_m^{\alpha})^k (\eta_i^{-\alpha}; x) = Y_{i,-\alpha} (A_{i,1/m} A_{i,-\alpha}^{-1})^k u_i \tag{3.9}$$

$$R_{m,k}^{\alpha} (\eta_i^{-\alpha}; x) = Y_{i,-\alpha} (I_i - A_{i,1/m} A_{i,-\alpha}^{-1})^k u_i \tag{3.10}$$

ove I_i è la matrice identica di ordine i.

Poniamo ora:

$$C_{i,1/m,-\alpha} = A_{i,1/m} A_{i,-\alpha}$$

e dimostriamo il seguente

LEMMA 3.III — Gli autovalori di $C_{i,1/m,-\alpha}$ sono:

$$1, \frac{1^{(2,1/m)}}{1^{(2,-\alpha)}}, \frac{1^{(3,1/m)}}{1^{(3,-\alpha)}}, \ldots, \frac{1^{(i,1/m)}}{1^{(i,-\alpha)}} \tag{3.11}$$

e gli elementi $c_{h,k}$ di $C_{i,1/m,-\alpha}$, per ogni h tale che $1 \leq h \leq i \leq m$, verificano la relazione:

$$\sum_{1}^{i}{}_k c_{k,h} = 1 \tag{3.12}$$

La (3.11) discende direttamente dalla definizione della matrice $A_{k,h}$.

Per quanto riguarda la (3.12), si osservi che, per $h \leq i$, si ha:

$$1 = \eta_h^{-\alpha}(1) = S_m^{\alpha}(\eta_h^{-\alpha}; 1) = (1, 1, \ldots, 1)\, C_{h,1/m,-\alpha}\, (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$= c_{1,h} + c_{2,h} + \ldots + c_{h,h}$$

e poiché, per ogni $h \leq i$, la matrice $C_{h+1,1/m,-\alpha}$ si ottiene orlando la matrice $C_{h,1/m,-\alpha}$, la (3.12) è provata.

Si osservi ancora che, per ogni α reale non negativo risulta $\forall\, h, k$ $c_{k,h} \geq 0$ e quindi:

$$\| C_{i,1/m,-\alpha} \| = 1$$

ove la norma è quella subordinata dalla norma del massimo.

Indichiamo ora con $V_{i,m,\alpha}$ la matrice che ha per colonne gli autovettori di $C_{i,1/m,-\alpha}$ normalizzati in modo che gli elementi della diagonale principale risultino uguali ad 1, e con $\Gamma_{i,1/m,-\alpha}$ la matrice diagonale che ha per elementi della diagonale principale gli autovalori (3.11). Poiché è:

$$C_{i,1/m,-\alpha}\, V_{i,m,\alpha} = V_{i,m,\alpha}\, \Gamma_{i,1/m,-\alpha}$$

le (3.9) e (3.10) diventano rispettivamente:

$$(S_m^{\alpha})^k (\eta_i^{-\alpha}; x) = Y_{i,-\alpha}\, V_{i,m,\alpha}\, \Gamma_{i,1/m,-\alpha}^{k}\, V_{i,m,-\alpha}^{-1}\, u_i \tag{3.13}$$

$$R_{m,k}^{\alpha}(\eta_i^{-\alpha}; x) = Y_{i,-\alpha}\, V_{i,m,\alpha}\, (I_i - \Gamma_{i,1/m,-\alpha})^k\, V_{i,m,-\alpha}^{-1}\, u_i \tag{3.14}$$

Per la matrice $V^{-1}_{i,m,\alpha}$ sussiste anche il seguente

LEMMA 3.IV — Gli elementi della prima riga di $V^{-1}_{i,m,\alpha}$ sono tutti uguali ad 1.

Sia invero $U_{i,m,\alpha}$ la matrice che ha per colonne gli autovettori di $C^{T}_{i,1/m,-\alpha}$ normalizzati in modo che gli elementi della diagonale principale risultino uguali ad 1. Indicato con $u^1 = (1, u_{21}, u_{31}, \ldots, u_{i1})$ il primo vettore colonna di $U_{i,m,\alpha}$ relativo all'autovalore 1, si ha:

$$C^{T}_{i,1/m,-\alpha}\, u^1 = u^1$$

Tenendo allora presente che, in virtù della (3.12) la somma degli elementi delle righe di $C^{T}_{i,1/m,-\alpha}$ è uguale ad 1, si ricava facilmente che

$$u^1 = (1, 1, \ldots, 1)^T$$

D'altra parte si può dimostrare facilmente che risulta:

$$V^{-1}_{i,m,\alpha} = U^{T}_{i,m,\alpha}$$

Ne segue facilmente l'asserto.

Si dimostra inoltre il seguente

LEMMA 3.V — Per ogni $\alpha \geq 0$, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} (S^{\alpha}_{m})^k (\eta_i^{-\alpha}; x) = x \qquad (i \leq m) \tag{3.15}$$

uniformemente rispetto ad $x \in [0, 1]$.

Infatti per la (3.11) si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \Gamma^{k}_{i,1/m,-\alpha} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\,0\ldots 0 \\ 0\,0\,0\ldots 0 \end{pmatrix}_{ixi}$$

Inoltre dalla (3.13), tenendo conto del lemma (3.IV) e dal fatto che il primo elemento della prima riga $V_{i,m,\alpha}$ è 1, segue facilmente:

$$\lim_{k\to\infty} (S^{\alpha}_{m})^k (\eta_i^{-\alpha}; x) = Y_{i,-\alpha}\, V_{i,m,\alpha} \left(\lim_{k\to\infty} \Gamma^{k}_{i,1/m,-\alpha}\right) V^{-1}_{i,m,\alpha}\, u_i =$$

$$= Y_{i,-\alpha}\, V_{i,m,\alpha}\, (1, 0, \ldots, 0)^T = Y_{i,-\alpha}\, (1, 0, \ldots, 0)^T = x$$

cioè l'asserto.

Si è ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA 3.VI — Per ogni funzione f definita in $[0,1]$ e per ogni α reale non negativo, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} (S_m^{\alpha})^k (f; x) = f(o) + [f(1) - f(o)]\, x \tag{3.16}$$

uniformemente rispetto a x.

Infatti si ha:

$$\lim_{k\to\infty} (S_m^{\alpha})^k (f; x) = f(o) + \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \Delta^i f(o)\, (S_m^{\alpha})^{k-1} (\eta_i^{-\alpha}; x)$$

Quindi per il lemma (3.V) si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} (S_m^{\alpha})^k (f; x) = f(o) + x \left[\sum_{o}^{m} {}_i \binom{m}{i} \Delta^i f(o) - f(o) \right]$$

da cui l'asserto.

Si osservi che il teorema ora dimostrato generalizza un risultato di KELISKY e RIVLIN [8] che provarono la (3.16) per i polinomi di Bernstein.

Si dimostra infine il

TEOREMA 3.VII — Per ogni funzione f definita in $[0,1]$ e per ogni α reale non negativo si ha:

$$\lim_{k\to\infty} S_{m,k}^{\alpha} (f; x) = L_m (f; x) \tag{3.17}$$

uniformemente rispetto ad $x \in [0,1]$.

Infatti dalla (3.11) segue che il raggio spettrale della matrice

$$I - C_{i,1/m,-\alpha}$$

risulta minore di 1. Quindi, indicata con 0_i la matrice nulla di ordine i, si ottiene:

$$\lim_{k} (I - C_{i,1/m,-\alpha})^k = 0_i$$

da cui segue:

$$\sum_{o}^{\infty} {}_k (I_i - C_{i,1/m,-\alpha})^k = C_{i,1/m,-\alpha}^{-1} = A_{i,-\alpha}\, A_{i,1/m}^{-1}$$

Pertanto, per la (3.10), si ha:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{k}\ \mathrm{R}_{m,k}^{\alpha}\left(\eta_i^{-\alpha};\, x\right) = \mathrm{Y}_{i,-\alpha} \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \left(\mathrm{I}_i - \mathrm{C}_{i,1/m,-\alpha}\right)^k u_i =$$

$$= \mathrm{Y}_{i,-\alpha}\, \mathrm{A}_{i,-\alpha}\, \mathrm{A}_{i,1/m}^{-1}\, u_i = \mathrm{X}_i\, \mathrm{A}_{i,1/m}^{-1}\, u_i = \mathrm{Y}_{i,1/m}\, u_i = \frac{x^{(i,1/m)}}{1^{(i,1/m)}}$$

per ogni x reale.

Si ha ora facilmente:

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{S}_{m,k}^{\alpha}(f;\, x) = \sum_{0}^{m}{}_{i} \binom{m}{i} \left[\sum_{0}^{\infty}{}_{j}\ \mathrm{R}_{m,j}\left(\eta_i^{-\alpha};\, x\right) \right] \Delta^i f\,(o) =$$

$$= \sum_{0}^{m}{}_{i} \binom{m}{i} \frac{x^{(i,1/m)}}{1^{(i,1/m)}}\, \Delta^i f\,(o) = \mathrm{L}_m(f;\, x)$$

cioè l'assunto.

In particolare, per $\alpha = 0$ la (3.17) diventa:

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{B}_{m,k}(f;\, x) = \mathrm{L}_m(f;\, x)$$

ove $\mathrm{B}_{m,k}$ è l'operatore introdotto e studiato in [9].

4. - Convergenza, per $m \to \infty$, di $\mathrm{S}_{m,k}^{\alpha}(f;\, x)$ e delle sue derivate.

In questo paragrafo supporremo che risulti:

$$0 < \alpha = \alpha_m = 0\left(m^{-2}\right)$$

È noto che in tal caso sussiste la seguente disuguaglianza [5]:

(4.1)
$$\left|\, \mathrm{D}^p\, \mathrm{R}_m^{\alpha}(f;\, x) \,\right| \leq$$

$$\leq\ p! \int_{\mathrm{T}_p} \left| \mathrm{S}_{m-p}^{\alpha}\left(\left[j/m, \ldots, \frac{j+p}{m};\, f \right] - f^{(p)}(x);\, x \right) \right| d\,\mathrm{T}_p + \gamma_{m,\alpha,p} \left\| f^{(p)} \right\|$$

ove la norma è quella uniforme e si è posto:

$$\mathrm{T}_p = [0,1] \times [0, t_1] \times \ldots \times [0, t_{p-1}] \qquad (0 \leq p \leq m)$$

$$t_k \in [0,1],\ k = \overline{1, p-1}$$

$$S^{\alpha}_{m-p}\left(\left[\frac{j}{m},\ldots,\frac{j+p}{m};f\right];x\right)=$$

$$=\sum_{o}^{m-p}{}_{j}\ w^{\alpha}_{m-p,j}\ (x)\left[\frac{j}{m}\ ,\ \frac{j+1}{m}\ ,\ldots,\ \frac{j+p}{m};f\right]$$

$$\gamma_{m,\alpha,p}=1/(1-\alpha\, m)^{p}\ -\ 1^{(p,1/m)}/(1+\overline{m-1}\,\alpha)\ldots(1+\overline{m-p}\,\alpha)$$

$$(\gamma_{m,\alpha,o}\equiv 0)$$

Se inoltre si pone:

i) $\gamma_{m,\alpha,p}=\dfrac{\nu_{m,\alpha,p}}{m-p}$

ii) $\delta_{m,\alpha,p}(x)\ =\ p!\int\limits_{T_p} S^{\alpha}_{m-p}\left((x-(i+t)/m)^2;x\right)d\,T_p\ =\ \dfrac{\beta_{m,\alpha,p}(x)}{m-p}$

ove

$$\beta_{m,\alpha,p}(x)=(1-p/m)^2\,\frac{1+\alpha(m-p)}{1+\alpha}\ x\ (1-x)\ +\ \frac{p^2}{m}(1-p/m)\,x^2\ -$$

$$-\ (1-p/m)^2\,\frac{2\,p\,s_1^{p+1}\,x}{(p+1)\,(m-p)}\ +\ (1-p/m)^2\,\frac{2\,s_2^{p+2}}{s_1^{p+2}\ (m-p)}$$

iii) $C_p=\operatorname*{Sup}_{m}\{\|\,\beta_{m,\alpha,p}\,\|/2+p\,(1-p/m)/2+\nu_{m,\alpha,p}\}$

iv) $\|f\|_o=\|f\|, \|f\|_k=\max\limits_{o\leqslant i\leqslant k}\{\|f^{(i)}\|\}\ (k>0)$

le limitazioni stabilite in [6] diventano:

$$(4.2)\quad \|\,D^p\,R^{\alpha}_m(f)\,\|\ \leq\ 2\,\omega\,(f^{(p)};\delta^{1/2}_{m,\alpha,p}(x))\ +\ \gamma_{m,\alpha,p}\,\|\,f^{(p)}\,\|\quad \forall\, f^{(p)}\in C^o\,[0,1]$$

$$(4.3)\quad \|\,D^p\,R^{\alpha}_m(f)\,\|\leq 2\,\delta^{1/2}_{m,\alpha,p}(x)\,\omega\,(f^{(p+1)};\delta^{1/2}_{m,\alpha,p}(x))\ +\ p\,\|\,f^{(p+1)}\,\|/2\,m\ +$$

$$+\ \gamma_{m,\alpha,p}\,\|\,f^{(p)}\,\|\quad \forall\, f^{(p+1)}\in C^o\,[0,1]$$

$$(4.4)\qquad \|\,D^p\,R^{\alpha}_m(f)\,\|\ \leq\ C_p\,\|\,f^{(p)}\,\|/(m-p)\quad \forall\, f^{(p+2)}\in C^o\,[0,1]$$

Da una applicazione iterata della (4.4) si ottiene:

$$(4.5)\qquad \|\,D^p\,R^{\alpha}_m(f)\,\|_k\ \leq\ \frac{\Gamma_{p+k}}{m-p}\,\|\,f^{(p)}\,\|_{k+2}$$

ove

$$\Gamma_{p+k} = \max_{0 \leq i \leq k} C_{p+i}$$

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 4.I — Se $f^{(p+2k)} \in C^0[0,1]$ $(p + 2k < n,\ p \geq 0,\ k \geq 1)$, si ha:

$$\| D^p R^{\alpha}_{m,k}(f) \| \leq \left(\frac{\Gamma_{p+2k-2}}{m-p} \right)^k \| f^{(p)} \|_{2k} \tag{4.6}$$

Per la (4.4) il teorema è vero se $k = 1$. Procedendo per induzione, si supponga vera la limitazione:

$$\| D^p R^{\alpha}_{m,k-1}(f) \| \leq \left(\frac{\Gamma_{p+2k-4}}{m-p} \right)^{k-1} \| f^{(p)} \|_{2k-2}$$

da cui sostituendo $R^{\alpha}_m(f)$ ad f, tenendo conto della (4.5), si ha:

$$\| D^p R^{\alpha}_{m,k}(f) \| \leq \left(\frac{\Gamma_{p+2k-4}}{m-p} \right)^{k-1} \| D^p R^{\alpha}_m(f) \|_{2k-2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\Gamma_{p+2k-4}}{m-p} \right)^{k-1} \frac{\Gamma_{p+2k-2}}{m-p} \| f^{(p)} \|_{2k}$$

Da quest'ultima disuguaglianza, essendo:

$$\Gamma_i \leq \Gamma_j \quad \text{se} \quad i \leq j$$

segue il teorema.

La (4.6) può considerarsi una generalizzazione di un risultato di VORONOVSKAYA [10].

Dalla (4.6) si ottiene ancora:

$$\| D^p R^{\alpha}_{m,k+1}(f) \| \leq \left(\frac{\Gamma_{p+2k-2}}{m-p} \right)^k \| D^p R^{\alpha}_m(f) \|_{2k} \tag{4.7}$$

Dalla (4.7), tenendo conto delle (4.2) e (4.3), discendono i seguenti corollari.

COROLLARIO 4.II — Se $f^{(p+2k)} \in C^0[0,1]$, si ha:

$$D^p R^{\alpha}_{m,k+1}(f; x) = 0(m^{-k}) \tag{4.8}$$

COROLLARIO 4.III — Se $f^{(p+2k+1)} \in C^0[0,1]$, si ha:

$$D^p R^{\alpha}_{m,k+1}(f;x) = 0(m^{-k-1/2}) \tag{4.9}$$

COROLLARIO 4.IV — Se $f^{(p+2k+1)} \in \mathrm{Lip}_M 1$, si ha:

$$D^p R^{\alpha}_{m,k+1}(f;x) = 0(m^{-k-1}) \tag{4.10}$$

Risulta così dimostrato il seguente

TEOREMA 4.V — Per ogni funzione $f \in C^{p+2k+j}[0,1]$, con $p \geq 0$, $k \geq 1$, $2k + j < m$, $j = 0, 1, 2$, la successione di polinomi

$$\{D^p S^{\alpha}_{m+p,k}(f;x)\}_{m \in N}$$

converge uniformemente ad $f^{(p)}(x)$. L'ordine di convergenza è dato dalle (4.8), (4.9) e (4.10).

Le relazioni (4.8), (4.9) e (4.10), nei casi in cui risulti:

i) $\alpha = p = k = 0$

ii) $\alpha = k = 0,\ p > 0$

iii) $\alpha = 0,\ p > 0,\ k > 0$

iv) $\alpha \neq 0,\ p = k = 0$

v) $\alpha \neq 0,\ p > 0,\ k = 0$

restituiscono le analoghe relazioni riportate rispettivamente in [13], [9], [1] e [5].

Uno dei vantaggi che si ha con i polinomi introdotti in questo lavoro risulta evidente dal confronto con i polinomi di Frenţiu e con quelli di Butzer.

Infatti se $f \in C^{2r}[0,1]$, per ottenere un'approssimazione dell'ordine di $(2r+1)^{-r}$ basta scegliere un polinomio di grado $2r+1$. Perché si ottenga lo stesso ordine di approssimazione col procedimento di Frenţiu, occorre invece un polinomio di grado $r(2r+1)$, mentre con quello di Butzer, occorre un polinomio di grado $2^{r-1}(2r+1)$.

5. - APPLICAZIONI.

Le proprietà di convergenza dell'operatore $D^i S^{\alpha}_{m,k}$ consentono l'introduzione di nuove formule di derivazione numerica. Invero, sostituendo $f^{(i)}(x_0)$ con $D^i S^{\alpha}_{m,k}(f;x_0)$, si ha una formula di deriva-

zione numerica del tipo:

$$f^{(i)}(x_0) = \sum_0^m a_i f(x_i) + \mathrm{E}(x_0, f, k, m, i, \alpha)$$

con a_i dipendente da x_0, k ed α, ma indipendente da f ed in cui il termine $\mathrm{E}(x_0, f, k, m, i, \alpha)$ deve intendersi, a meno del segno, come l'errore della formula di derivazione numerica.

In particolare per $m = 2$ si hanno formule di derivazione numerica su tre punti e precisamente, posto:

$$t = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 2}$$

con ovvio significato dei simboli, si ottiene:

$$\begin{aligned} f_0' &= (-3 + 2t^k) f_0 + (4 - 4t^k) f_{1/2} + (-1 + 2t^k) f_1 \\ f_{1/2}' &= -f_0 + f_1 \\ f_1' &= (1 - 2t^k) f_0 + (-4 + 4t^k) f_{1/2} + (3 - 2t^k) f_1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si noti, che al divergere di k, i coefficienti delle formule di derivazione numerica così ottenute tendono ai coefficienti delle corrispondenti formule lagrangiane e che per $\alpha = 0$ le (5.1) forniscono le formule di derivazione di cui al n. 4 di [9].

Si possono poi ottenere formule di quadratura sostituendo nell'integrale

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

alla funzione integranda il polinomio $S_{m,k}^{\alpha}(f; x)$.

In particolare per $m = 2$ si ottengono le formule di quadratura:

$$\mathrm{I}_{2,k}(\alpha) = \frac{1}{6}(1 + 2t^k) f_0 + (4 - 4t^k) f_{1/2} + (1 + 2t^k) f_1 \tag{5.2}$$

Si noti che al divergere di k il secondo membro della (5.2) tende alla formula di Cavalieri-Simpson e che per $\alpha = 0$ si ritrova la (4.5) del lavoro [9].

Si considerino, a titolo di esempio numerico, le uguaglianze:

$$\int_0^1 \cos x \; dx = \operatorname{sen} 1 = 0.84147 \tag{5.3}$$

in cui il terzo membro è calcolato con errore minore di 0.5×10^{-5}.

Applicando la formula di Cavaliere-Simpson per calcolare il primo membro della (5.3), si ottiene, con arrotondamento della quinta cifra decimale:

$$I_{cs} = 0.84177$$

mentre applicando la formula di quadratura (5.2) con $\alpha = 0.2$, $k = 10$ si ottiene con arrotondamento della quinta cifra decimale:

$$I_{2,10}(0.2) = 0.84144$$

Il risultato ottenuto è quindi più preciso di quello ottenuto con la formula di Cavalieri-Simpson. È evidente che altre scelte di α e di k portano a risultati migliori o peggiori di quelli trovati. Resta pertanto aperto il problema della « ottimizzazione » dei parametri k ed α.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. D. Stancu, *Approximation of functions by a new class of linear polinomial operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **13**, 1179-1184 (1968).

[2] D. D. Stancu, *Approximation properties of a class of linear positive operators.* Studia Univ. Babes-Bolyai, Cluj, **15**, 33-38 (1970).

[3] D. D. Stancu, *Use of probabilistic method in the theory of uniform approximation of continuous functions.* Rev. Roum. Math. Pures et appl., 14 (1969).

[4] D. D. Stancu, *On the remainder of approximation of functions by means parameter-dependent linear polynomial operator.* Studia Univ. Babes-Bolyai, Cluj, Ser. Math., Mech., vol. 16 (1971).

[5] G. Mastroianni e M. R. Occorsio, *Sulle derivate dei polinomi di Stancu.* In corso di stampa (1978).

[6] V. A. Baskakov, *An example of a sequence of linear positive operator in the spaces of continuous functions.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **113**, 249-251 (1957).

[7] G. Mirakyan, *Approximation des functions continues en moyen de polynomes de la forme...* Dkl. Akad. Nauk. SSSR, **31**, 201-205 (1941).

[8] R. P. K. Kelisky and T. J. Rivlin, *Iterates of Bernstein polynomials.* Pacific J. Math., 21, **3**, 511-520 (1967).

[9] G. Mastroianni e M. R. Occorsio, *Una generalizzazione dell'operatore di Bernstein.* Rend. Accad. Sci. Mat. Fis. Nat. Napoli (1977).

[10] F. VORONOVSKAYA, *Determination de la forme asimptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein*. Compte Rendus Acad. Sci. URSS, 79-85 (1932).

[11] P. L. BUTZER, *Linear combinating of Bernstein polynomials*. Canadian Journal of Math., **5**, 559-567 (1953).

[12] M. FRENŢIU, *Combinatii liniare de polinoame Bernstein si de operatorii Mirakyan*. Studia Univ. Babes-Bolyai seria Math. Meccanica, **1**, 65-68 (1970).

[13] T. POPOVICIU, *Sur l'approximation des fonctions convex d'ordre supérieur*. Mathematica, **10**, 49-50 (1935).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, G. Scorza-Dragoni e C. Ciliberto.

Una revisione numerica delle componenti del moto polare

Nota del socio ordinario TITO NICOLINI

(Adunaza del 2 dicembre 1978)

RIASSUNTO. — I risultati pubblicati del Servizio Internazionale delle Latitudini e del Servizio Internazionale del Moto Polare dànno le coordinate medie mensili X ed Y della polodia dal 1900.0 (o anche dal 1890.0 includendo una serie anteriore pubblicata da Albrecht e Wanach). Attualmente è anche meglio sistemata la complessa esigenza di una origine unica del sistema di coordinate; questa circostanza e la disponibilità di tanti anni di osservazioni, permette una deduzione delle principali componenti periodiche della polodia, in un sistema meglio definito ed uniforme che in passato. La deduzione è stata eseguita basandosi su due successive riduzioni dei dati originali:

1: Tutte le X ed Y anteriori al 1922.7 sono state interpolate per le epoche medie mensili standard usate da tale data in poi.

2: I successivi cambiamenti di programmi osservativi corrispondono a successivi cambiamenti dell'origine delle coordinate; per rimediare a questo inconveniente, una comune origine convenzionale (CIO, adottata nel SIL dal 1941.0) è stata adottata anche per i valori X ed Y precedenti, applicando ad essi appropriate correzioni per gli intervalli tra le date 1900.0 - 1906.0 - 1922.7 - 1935.0 - 1941.0.

Le X ed Y così rettificate sono pronte per la rideterminazione delle componenti, annua e chandleriana, del moto polare. I risultati sono dati ai n. 3, 4, tavole 1, 3 e diagrammi.

SUMMARY. — The published Results of the ILS and IPMS give the X and Y monthly coordinates of the polhody from 1900.0 (or even from 1890.0 including an earlier series by Albrecht and Wanach). At present a better undestanding of the origin of the coordinate system is also available. And so an improved analysis of the increased data, for the deduction of the main periodic components of the polhody in a more uniform system than in the past becomes possible. The task has been accomplished on the basis of two successive steps as follows:

1: All the published X and Y anterior to 1922.7 have been reduced by interpolation to the standard monthly epochs adopted after that date.

2: The changes of observing programmes in successive dates correspond to changes of origin of the coordinates; to remove this trouble, a common conventional origin (CIO, adopted in the Service since 1941.0) has been adopted also for the preceding values X and Y, applying to then proper corrections for the intervals between the dates 1900.0 - 1906.0 - 1922.7 - 1935.0 - 1941.0.

The X and Y so rectified are ready for the redetermination of the components, annual and chandlerian, of the polar motion. The results are given in n. 3, 4, tables 1, 3 and diagrams.

1. La ricerca delle componenti periodiche della polodia è stata effettuata più volte da vari autori; una volta anche dallo scrivente (*Atti Acc. Naz. Lincei, Classe Sc. Fis., Mat., Nat.*, vol. 2, fasc. 1, sez. 1, 1948) basandosi sulla analogia con la teoria dei battimenti ondosi. I risultati erano validi ed accettati, ma ora sono disponibili altre tre decadi di osservazioni e chiarimenti sulla origine del sistema di coordinate; quindi è opportuno riprendere il problema secondo i procedimenti stabiliti in detta ricerca.

I dati di partenza sono i valori medi mensili delle coordinate del polo di rotazione, X ed Y, l'origine essendo stata variata successivamente dai responsabili del Servizio Internazionale, in base alle latitudini medie delle Stazioni, risultanti negli intervalli loro affidati. Questi valori, per l'intervallo 1890-1900 sono presi da WANACH, *Die Chandlersche und die Newcombsche periode del Polbewegung*, Berlin 1919; e per gli intervalli successivi dai volumi ufficiali dei *Risultati* del Servizio:

1900-1912, Wanach, Bd V, pp. 192-194;
1912-1922.7, Wanach e Mahnkopf, Bd VI (Ergebnisse), pp. 235-6;
1922.7-1935, Kimura, Vol. VIII, pp. 170-172;
1935-1941, Carnera, Vol. IX pp. 221-224;
1941-1949, Nicolini e Fichera, Vol. X, pp. 177-178;
1949-1962, Cecchini, Vol. XI, t. 3, p. 223.

Per l'intervallo 1962-1977 devo ringraziare il Dr I. Tsubokawa Direttore generale dell'Osservatorio di Mizusawa e particolarmente la solerte cortesia del Dr. S. Yumi Direttore dell'IPMS, per la disponibilità della continuazione dei dati adottati, che sono le X ed Y classificate (IPMS, L) negli *Annual Reports* IPMS 1972 p. 163, 1974 p. 168, 1975 p. 125, 1976 e 1977 da calcoli manoscritti.

Ora tutta questa grande collezione di dati mensili X ed Y non si può considerare omogenea per l'analisi. Anzitutto le epoche medie cui corrispondono i dati mensili anteriori al 1922.7, sono sfasate rispetto alle successive (che sono le frazioni di anno 0.06, 0.14, 0.23, ...0.89, 0.98) conseguenti al radicale cambiamento del programma osservativo dovuto a Kimura. Quindi occorre ridurre tutte le X ed Y precedenti a queste ultime epoche standard. Questa riduzione è effettuata con semplici interpolazioni dalle X ed Y di Albrecht, Wanach e Mahnkopf.

Un'altra correzione è dovuta alla esigenza che tutte le coordinate siano riferite alla stessa origine. Il problema pratico è stato considerato da Cecchini (Cfr. *Risultati* citati, t. 3, p. IX), al quale appunto è dovuta la determinazione della *Origine Convenzionale In-*

ternazionale CIO (che è in un certo senso una specie di polo medio all'epoca), corrispondente alle latitudini medie delle Stazioni Internazionali durante il primo intervallo 1900-1906. Queste latitudini iniziali erano (oltre alla parte comune 39°8′):

Mizusawa	Kitab	Carloforte	Gaithersburg	Ukiah
$\varphi_o = 3''.602$	1″.850	8″.941	13″.202	12″.096

Qui le riduzioni indicate dal Cecchini sono state controllate valide, anzi si è fatta una nuova valutazione, basata sulla differenziazione delle equazioni che dànno le ΔX e ΔY dei successivi intervalli in base alle variazioni $\Delta \varphi$ delle latitudini delle Stazioni. I valori qui dedotti ed accettati da applicare alle X ed Y originarie sono i seguenti (per il 1890-1900 mancano elementi di valutazione, comunque l'origine deve essere circa identica alla CIO di Cecchini):

1900-1906	$\Delta X =$	$- 0''.01$	$\Delta Y =$	$0''.00$
1906-1922.7	»	$- 0''.01$	»	$+ 0''.03$
1922.7-1935	»	$+ 0''.04$	»	$+ 0''.10$
1935-1940	»	$+ 0''.03$	»	$+ 0''.14$

Nei volumi degli anni successivi è adottata l'origine CIO, quindi le X ed Y date restano inalterate.

2. Eseguite le dette riduzioni, si ottiene una tavola, che può ritenersi accettabilmente omogenea, di tutti i valori medi mensili X ed Y.

Ora in analogia, come detto all'inizio, con la teoria dei battimenti (spiegata nella citata memoria dell'Accademia dei Lincei), esaminati i grafici delle successive spire della polodia nei volumi citati, sono state determinate le epoche di massima e di minima ampiezza, che risultano con sufficiente evidenza:

t.M.A.	Δ	t.m.a.	Δ	t.M.A.	Δ	t.m.a.	Δ
1890.4	6.9	1894.7	5.9	1939.0	7.0	1943.0	6.0
97.3	6.7	1900.6	6.1	46.0	6.0	49.0	6.6
1904.0	6.6	06.7	6.5	52.0	6.1	55.6	6.0
10.6	6.1	13.2	5.8	58.1	6.2	61.6	5.9
16.7	6.0	19.0	8.2	64.3	7.1	67.5	7.0
22.7	9.0	27.2	8,3	71.4	6.1	74.5	
31.7	7.3	35.5	7.5	77.5			

La tavola compilata di valori X ed Y ridotti, ottenuta come detto dai dati pubblicati, non è qui riportata per brevità.

TAV. 1

Componente annuale della polodia, coordinata X. Unità 0",01.

Elementi numerici della componente annuale dedotti dalla combinazione di un preliminare doppio calcolo: dai 13 intervalli tra le epoche di massima ampiezza, e dai 12 tra le epoche di minima ampiezza.

Fraz. / Anno	.06	.14	.23	.31	.39	.48	.56	.64	.73	.81	.89	.98	Baric.
1890.4	-5.6	-9.4	-11.9	-10.5	-7.3	+1.3	+6.3	+9.1	+9.9	+7.9	+5.0	-0.6	-0.48
94.7	-4.3	-7.8	-10.0	-9.3	-6.6	-0.2	+4.5	+8.7	+8.4	+7.5	+4.2	-0.3	-0.43
97.3	-3.3	-5.7	-7.0	-6.9	-4.3	+0.2	+3.9	+7.7	+7.6	+7.1	+3.3	-0.3	+0.19
1900.6	-5.1	-6.7	-7.2	-5.9	-2.9	+1.7	+5.2	+6.2	+7.5	+5.7	+2.6	-0.9	+0.02
04.0	-7.7	-8.9	-9.3	-6.2	-2.7	+2.2	+6.9	+5.7	+5.6	+2.7	-0.3	-3.1	-1.28
06.7	-7.1	-8.3	-10.1	-6.2	-2.1	+2.8	+8.9	+8.2	+5.7	+2.8	-0.3	-3.0	-0.73
10.6	-5.2	-7.5	-9.1	-5.9	-2.2	+2.1	+7.7	+8.3	+8.2	+5.8	+3.5	-0.6	+0.42
13.2	-7.1	-10.0	-7.7	-4.8	-1.3	+3.5	+7.1	+10.3	+9.1	+6.2	+3.3	-1.7	+0.56
16.7	-6.1	-9.2	-7.0	-3.1	+0.7	+6.7	+9.2	+10.0	+10.3	+7.2	+3.9	-1.3	+1.78
19.0	-3.0	-6.3	-5.5	-2.2	+1.8	+7.7	+10.2	+10.5	+9.7	+7.3	+4.8	+0.7	+2.97
22.7	-1.2	-3.9	-5.1	-1.4	+0.9	+5.0	+9.7	+14.3	+13.4	+10.9	+7.2	+2.1	+4.33
27.2	-2.9	-5.6	-4.8	-1.8	+0.4	+4.6	+9.5	+14.5	+12.6	+9.1	+5.9	+1.4	+3.57
31.7	-5.5	-7.9	-6.3	-3.6	-0.9	+3.4	+8.6	+13.9	+13.2	+8.8	+4.9	+0.5	+2.43
35.5	-3.9	-6.2	-5.2	-3.9	-0.6	+3.8	+8.7	+12.6	+12.9	+9.0	+5.1	+1.4	+2.82
39.0	-0.6	-3.0	-2.3	-1.4	+3.2	+7.5	+11.6	+14.2	+14.2	+9.7	+5.9	+3.2	+5.19
43.0	+1.5	-1.0	-1.1	-0.3	+4.8	+9.6	+14.0	+16.6	+15.3	+11.5	+8.2	+6.6	+7.15
46.0	+1.5	+0.2	+1.2	+2.7	+6.7	+11.7	+16.6	+18.0	+14.6	+12.3	+9.3	+6.8	+8.47
49.0	+0.1	-0.3	+1.6	+4.6	+7.5	+13.0	+17.1	+20.5	+17.3	+13.8	+9.0	+3.7	+9.00
52.0	-0.9	-1.5	-1.3	+1.4	+5.3	+9.5	+13.5	+18.9	+17.7	+15.4	+8.6	+2.9	+7.46
55.6	-1.6	-2.4	-1.8	+0.1	+5.7	+10.1	+14.3	+17.0	+15.7	+13.3	+6.8	+1.8	+6.57
58.1	-3.0	-5.2	-3.5	-0.6	+4.6	+10.0	+15.5	+17.4	+16.5	+11.8	+6.7	+1.6	+5.99
61.6	-4.8	-7.2	-6.1	-2.5	+2.0	+7.2	+13.7	+15.4	+15.2	+10.8	+5.7	+0.9	+4.19
64.3	-5.3	-7.2	-7.1	-4.8	-0.1	+6.3	+12.4	+14.4	+13.8	+10.4	+4.9	-0.3	+3.12
67.5	-3.9	-5.6	-6.5	-5.1	-0.9	+5.1	+10.7	+13.9	+13.5	+11.4	+6.3	+1.3	+3.34
71.4	-1.3	-3.2	-5.2	-3.9	-0.3	+4.7	+9.7	+12.8	+12.9	+11.9	+7.5	+3.7	+4.09
74.5	0.0	-2.3	-5.2	-3.8	-0.2	+5.0	+9.4	+12.4	+12.6	+12.4	+8.2	+4.8	+4.44
77.5													

La data di M.A. 1922.7 è assunta in luogo della preferibile 1923.3 perché al 1922.7 Kimura introdusse un cambiamento radicale di programma e di orario osservativo; ed ogni cambiamento, anche minore, porta sfasamenti della polodia di difficile analisi.

TAV. 1

Componente annuale della polodia, coordinata Y. Unità 0",01.

I due calcoli sono combinati secondo consecutive medie intrallacciate eccetto per gli intervalli 1°, 10°, 11°, 26°, per i quali conviene riportare le medie dedotte dai soli interpalli 1°, 5°, 6°, 13°, tra le epoche t.M.A. del n. 2.

.06	.14	.23	.31	.39	.48	.56	.64	.73	.81	.89	.98	Baric.
−3.4	+0.4	+3.4	+4.7	+4.7	+5.9	+2.9	−0.9	−4.7	−7.7	−8.3	−7.0	−0.84
−3.2	−0.4	+2.1	+3.5	+4.2	+4.8	+3.3	+2.1	−2.2	−5.0	−6.2	−5.2	−0.18
−3.3	−1.2	+1.2	+4.2	+5.5	+5.7	+4.8	+4.7	+1.0	−2.1	−4.7	−4.7	+0.90
−4.2	−1.3	+2.1	+6.8	+8.4	+9.3	+7.2	+4.7	+1.2	−2.1	−4.8	−5.8	+1.79
−3.7	+0.3	+4.2	+8.7	+10.0	+11.3	+8.7	+3.8	+0.8	−1.7	−3.0	−3.7	+2.98
−2.4	+1.9	+5.7	+10.2	+11.2	+12.4	+9.6	+4.8	+2.5	−0.3	−1.8	−2.0	+4.32
−3.0	+0.8	+5.0	+10.5	+13.5	+14.1	+11.2	+8.7	+4.2	−0.4	−3.0	−3.7	+4.84
−5.3	0.0	+5.2	+11.0	+15.7	+15.1	+11.5	+8.4	+2.6	−2.7	−5.2	−5.4	+4.25
−5.2	−0.3	+5.5	+9.7	+12.6	+11.5	+8.3	+4.2	+0.1	−4.8	−6.3	−6.1	+2.43
−3.7	−0.7	+4.2	+7.7	+8.8	+7.8	+5.5	+2.0	−0.5	−4.7	−6.2	−5.2	+1.26
+2.7	+5.9	+11.6	+15.9	+20.4	+20.2	+18.8	+15.0	+6.9	+4.2	+3.0	+0.9	+10.45
+4.4	+8.5	+12.9	+17.3	+21.1	+21.3	+20.8	+16.2	+10.1	+6.6	+3.6	+2.7	+12.13
+5.6	+10.3	+14.7	+19.6	+21.7	+23.1	+23.2	+18.7	+13.9	+8.2	+3.9	+3.3	+13.86
+6.8	+10.6	+15.0	+19.3	+20.9	+22.5	+21.2	+17.9	+14.4	+9.7	+6.4	+5.8	+14.22
+8.7	+11.4	+14.9	+17.9	+19.4	+20.1	+17.1	+13.9	+11.1	+7.8	+5.9	+6.2	+12.89
+8.9	+10.1	+13.5	+16.1	+18.4	+19.2	+15.8	+13.6	+10.9	+6.9	+5.2	+5.8	+12.04
+10.0	+11.4	+14.8	+17.1	+18.6	+18.7	+15.9	+13.3	+10.2	+6.6	+5.7	+7.5	+12.49
+10.1	+14.0	+17.6	+19.8	+20.2	+19.9	+17.6	+13.9	+9.6	+4.9	+3.4	+5.7	+13.06
+8.1	+13.0	+16.6	+20.1	+21.9	+22.7	+20.9	+17.8	+13.7	+8.8	+5.7	+6.6	+14.64
+11.7	+15.2	+19.3	+23.6	+25.6	+25.2	+22.5	+18.2	+15.2	+12.6	+10.1	+10.8	+17.49
+15.0	+17.5	+23.1	+26.2	+28.1	+26.7	+23.8	+20.1	+17.4	+14.2	+12.7	+13.2	+19.84
+16.4	+19.1	+24.8	+27.3	+29.0	+28.2	+26.2	+22.2	+19.5	+15.7	+14.7	+15.4	+21.53
+17.3	+20.6	+26.3	+31.3	+32.8	+31.1	+29.0	+23.6	+19.9	+16.0	+14.7	+15.1	+23.15
+17.2	+20.4	+26.6	+32.7	+34.6	+33.6	+31.0	+26.7	+22.5	+17.8	+15.6	+15.0	+24.49
+18.0	+20.7	+26.4	+32.2	+34.7	+35.9	+32.4	+28.8	+24.8	+20.1	+17.4	+16.3	+25.64
+18.3	+20.8	+26.3	+32.3	+35.3	+37.4	+33.0	+29.3	+25.7	+21.0	+18.0	+16.7	+26.22

Le date rilevate sono convenienti per la ricerca del termine annuale in successivi intervalli parziali; il procedimento è spiegato nella didascalia alla Tav. 1 che riporta i risultati, e mostrato anche alla fig. 1, dove è chiara la discontinuità al 1922.7. Riportando alla fig. 2

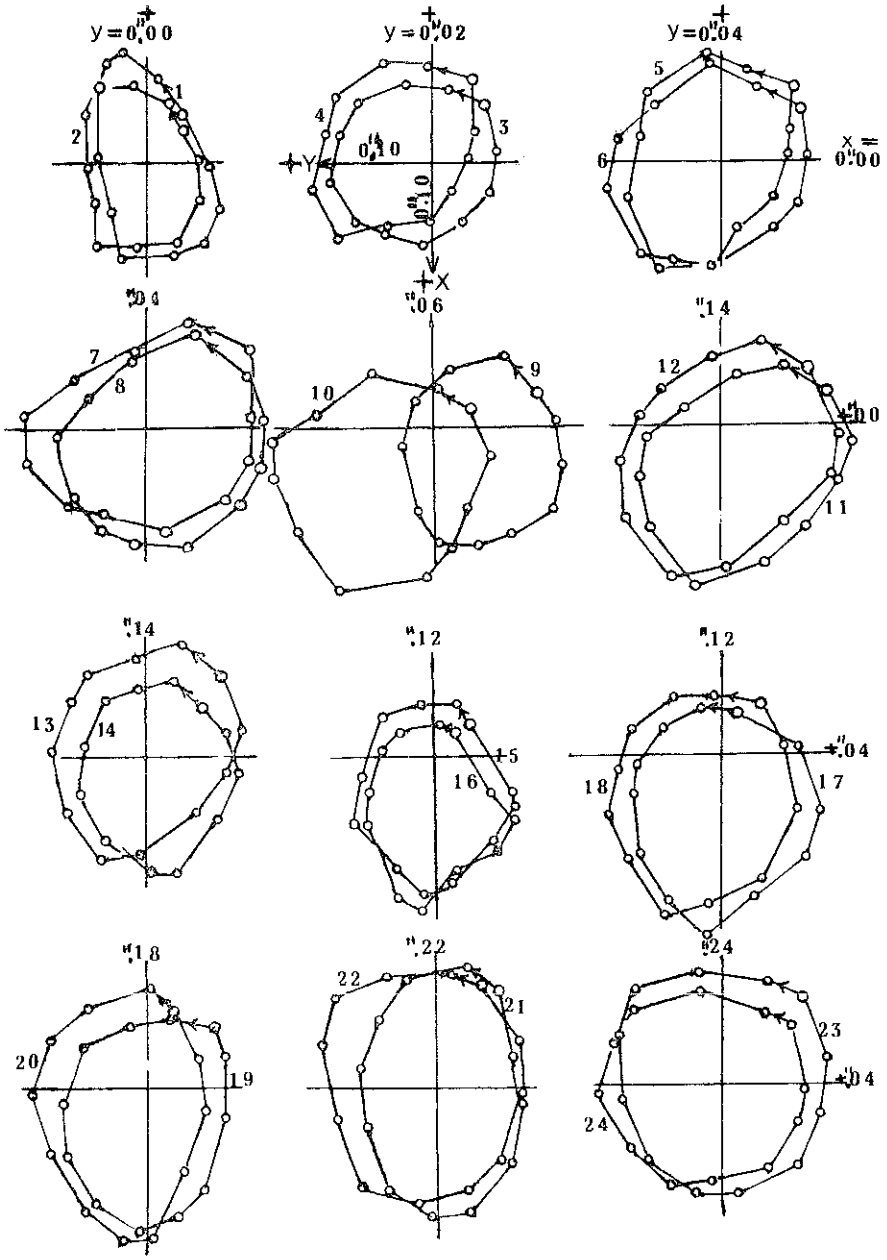


FIG. 1. - Componente annuale della polodia in 26 intervalli successivi secondo la Tav. 1, dal 1894.7 al 1974.5.

le posizioni del baricentro nei successivi intervalli, la discontinuità appare nel brusco salto tra le posizioni del 1920 e 1925. La fig. 2 può soltanto suggerire, con incertezze quantitative, l'andamento generale dello spostamento secolare del polo.

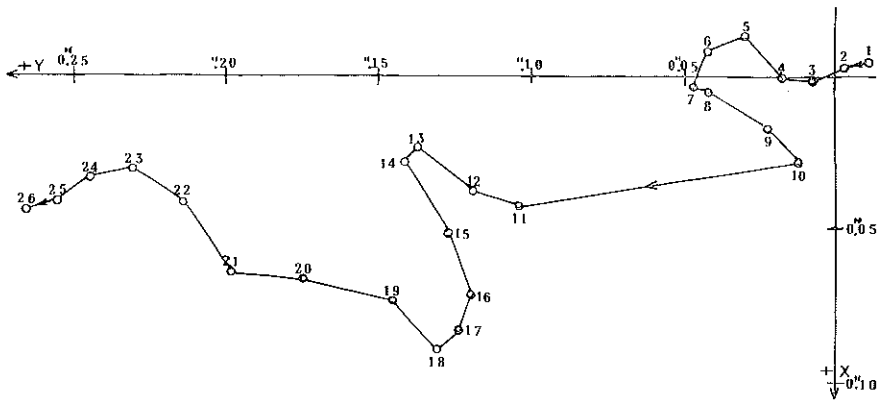


FIG. 2. - Posizioni successive del baricentro della polodia nei 26 successivi intervalli della Tav. 1; ossia spostamento progressivo del polo medio più eventuali altre cause non bene precisate. I numeri ordinali scritti sono quelli dei successivi intervalli detti.

La grossa discontinuità rilevata sembra non doversi attribuire totalmente al cambiamento di programma del 1922.7, dato che osservazioni di Greenwich (al *floating z.t.*, H. S. Jones 1939) e di Berlino (Courvosier 1930) mostrano anche notevoli anomalie nelle latitudini medie annuali nel periodo 1920-23.

Sull'argomento del moto secolare, gli astronomi di Mizusawa hanno dato notevolissimi contributi; come quelli di N. Sekiguchi (Astr. Soc. Japan, 1954; 1960), e nelle pubblicazioni di Mizusawa, T. Hattori (1946), T. Okuda e Ch. Sugawa (1964), Sh. Yumi e Y. Wako (1966). Dopo tali contributi, accurati e spinti nei particolari, il presente apparrebbe inutile; ma non del tutto, in quanto l'andamento della fig. 2 è ottenuto da baricentri di oscillazioni cicliche interferenti; questi baricentri sono quindi punti fisicamente significanti.

Come era da attendersi, la forma del ciclo annuale, non varia molto col tempo. Sottratte le X e Y ad esso relative da quelle originali disponibili, si hanno le residue X ed Y mensili della componente chandleriana, che mostra immediatamente un ciclo prossimo a 14 mesi. Quindi conviene disporre tutti questi valori residui in ordine per cicli successivi, un ciclo per riga, ed in 14 colonne o fasi, disposizione riportata alla tav. 2.

TAV. 2

Residuo chandleriano della polodia in 14 *fasi, coordinata X.* Unità 0."01.

Mese / Anno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
									-22	-16	-04	+06	+13	+16
1890.56	+17	+15	+08	-02	-09	-17	-20	-14	-14	-08	+00	+04	+11	+14
91.73	+16	+17	+16	+11	00	-07	-13	-15	-11	-05	+03	+07	+11	+13
92.98	+12	+12	+07	+04	-05	-09	-13	-19	-15	-07	+01	+09	+13	+16
94.14	+15	+14	+08	+02	-08	-16	-20	-19	-17	-10	-04	+03	+08	+10
95.31	+08	+08	+03	+02	-04	-07	-11	-12	-11	-07	-02	+03	+08	+11
96.48	+11	+12	+08	+07	-02	-06	-10	-12	-11	-10	-05	+01	+07	+09
97.73	+12	+14	+11	+08	+02	-04	-11	-13	-13	-12	-06	00	+09	+13
98.89	+12	+11	+08	+06	+01	-02	-06	-11	-14	-11	-01	+03	+04	+09
1900.14	+09	+09	+04	-02	-04	-10	-14	-16	-14	-10	00	+04	+10	+11
01.31	+15	+12	+11	+02	-02	-07	-11	-12	-10	-08	-01	+02	+11	+13
02.48	+15	+15	+11	+03	-05	-09	-13	-13	-12	-06	00	+05	+06	+10
03.64	+13	+12	+08	+06	-02	-05	-08	-10	-10	-07	-01	+04	+08	+12
04.89	+13	+13	+09	+02	-01	-08	-11	-13	-13	-08	-04	+01	+07	+12
05.98	+14	+11	+07	+03	-05	-10	-15	-18	-14	-10	-04	00	+05	+10
07.14	+12	+13	+11	+01	-05	-12	-15	-19	-19	-14	-07	+01	+12	+20
08.31	+24	+22	+18	+07	-03	-11	-19	-22	-23	-19	-05	+07	+17	+22
09.56	+24	+23	+17	+07	-05	-14	-15	-20	-20	-17	-08	+02	+14	+21
10.73	+24	+22	+19	+10	-04	-11	-14	-16	-16	-12	+02	+11	+20	+28
11.98	+23	+18	+10	+02	-10	-16	-19	-22	-19	-15	-07	00	+08	+14
13.14	+18	+18	+15	+09	+03	-08	-16	-19	-19	-17	-11	-02	+07	+15
14.31	+19	+17	+12	+05	-04	-10	-15	-17	-17	-13	-05	+02	+07	+12
15.56	+16	+14	+11	+04	-06	-10	-10	-13	-13	-09	-01	+08	+13	+16
16.81	+17	+14	+08	+05	-02	-11	-15	-14	-03	-07	-03	+02	+07	+10
17.98	+12	+11	+05	00	-07	-12	-17	-11	-09	-07	-02	+02	+08	+09
19.14	+09	+09	+03	+03	-04	-09	-13	-17	-17	-16	-08	-01	+07	+12
20.31	+13	+13	+10	+07	+03	-01	-05	-07	-11	-10	-07	-02	+05	+09
21.48	+10	+11	+09	+05	00	-03	-06	-08	-06	-03	+02	+04	+12	+14
22.73	+12	+10	+06	-01	-02	-04	-06	-08	-07	-04	-02	+02	+08	+11
23.81	+13	+13	+09	+04	+02	-02	-04	-07	-09	-07	-02	-01	+04	+06
24.98	+09	+09	+04	+04	+01	00	-01	-05	-06	-04	-03	+01	+03	+02
26.06	+07	+01	-01	-03	-06	-07	-07	-08	-05	-02	-05	+05	+05	+15
27.23	+08	+09	+06	+01	00	-02	-04	-04	-02	-01	—	00	+03	+02
28.31	+04	+03	-02	-04	-04	-07	-10	-09	-05	-01	+01	-02	+05	+09
29.39	+09	+09	+06	+02	-02	-06	-08	-08	-08	-08	00	+01	+04	+07
30.56	+10	+06	+05	+01	00	-05	-08	-08	-08	-05	-03	00	+06	+11
31.64	+09	+12	+03	+01	-02	-07	-12	-09	-04	-07	-06	-06	+04	+10
32.81	+11	+09	+07	+02	00	-04	-08	-07	-08	-08	-03	-02	+02	+04
33.98	+07	+06	+05	-03	-10	-07	-06	-06	-06	-06	00	+01	+07	+06
35.14	+10	+08	+07	+03	00	-04	-07	-08	-07	-06	-04	00	+01	+01
36.31	+03	+05	+06	+02	-03	-08	-08	-08	-07	-07	-05	00	+03	+06
37.48	+07	+06	+02	-03	-03	-04	-08	-08	-05	-03	00	-01	+01	+09
38.64	+11	+08	+03	-01	-03	-06	-06	-08	-04	-05	-05	-02	+05	+06
39.81	+08	+09	+03	-02	-05	-08	-09	-10	-05	-05	-05	+04	+05	+06
40.98	+09	+07	+07	+04	+02	-01	-03	-02	-01	+01	+05	+07	+09	+12
42.06	+17	+12	+09	+03	+01	-06	-12	-12	-12	-09	-03	+01	+08	+10
43.23	+14	+11	+10	+04	-03	-08	-12	-15	-12	-06	+01	+03	+09	+15
44.48	+18	+16	+12	+01	-12	-13	-19	-17	-15	-11	-05	+04	+10	+13
45.64	+14	+17	+13	+03	-07	-16	-20	-19	-16	-10	+01	+04	+10	+19
46.89	+23	+16	+08	-01	-09	-18	-22	-20	-15	-06	+05	+14	+20	+21
48.06	+25	+24	+18	+07	-05	-16	-19	-22	-23	-15	-06	+06	+14	+26
49.23	+25	+23	+17	+12	-01	-16	-23	-24	-22	-17	-06	+01	+15	+21
50.39	+27	+25	+21	+12	-06	-17	-23	-26	-26	-20	-03	+11	+16	+25
51.64	+27	+23	+13	+03	-07	-19	-24	-30	-17	-14	-01	+12	+19	+26
52.81	+27	+21	+15	+07	-08	-20	-26	-31	-25	-16	-08	+08	+14	+23
53.98	+22	+13	+07	-02	-10	-22	-20	-23	-20	-18	-11	+02	+09	+19
55.14	+20	+24	+14	+08	-03	-16	-23	-27	-24	-18	-06	+18	+14	+25
56.31	+22	+24	+16	+08	-05	-14	-21	-23	-21	-13	-03	+09	+15	+20
57.56	+23	+20	+10	+01	-06	-15	-18	-18	-15	-08	-03	+03	+14	+22
58.73	+22	+21	+18	+10	+03	-05	-11	-15	-12	-11	-06	+03	+12	+19
59.89	+20	+17	+10	+10	-01	-11	-17	-18	-15	-11	-04	+05	+10	+09
61.14	+13	+10	+04	-01	-07	-11	-11	-10	-10	-10	-01	+03	+07	+12
62.31	+13	+11	+08	+01	-06	-10	-14	-16	-15	-10	-03	+03	+10	+15
63.48	+19	+12	+09	00	-08	-12	-14	-15	-14	-11	-02	+03	+09	+11
64.64	+14	+13	+11	+05	-03	-06	-10	-13	-13	-12	-05	+03	+09	+13
65.89	+15	+12	+10	+03	-02	-08	-14	-16	-17	-12	-07	+02	+09	+12
67.06	+13	+14	+11	+06	+01	-03	-07	-10	-12	-11	-07	00	+04	+09
68.23	+12	+11	+10	+04	00	-05	-11	-12	-14	-11	-06	-01	+03	+09
69.39	+11	+10	+07	+02	-03	-06	-09	-11	-10	-07	00	+04	+08	+10
70.64	+12	+10	+07	+01	-02	-07	-11	-13	-12	-10	-09	-03	+04	+10
71.73	+15	+13	+11	+06	-02	-07	-11	-12	-10	-07	-01	+05	+09	+12
72.98	+13	+11	+09	+04	-01	-07	-12	-13	-11	-07	-01	+05	+10	+12
74.14	+14	+13	+09	+04	-03	-06	-07	-07	-07	-06	00	+05	+10	+13
75.39	+13	+11	+08	+04	-04	-09	-12	-11	-09	-06	+02	+06	+10	+14
1976.64	+14	+09	+08	+03	00	-06	-11	-14	-12	-07	-05	+02	+10	+15

TAV. 2

Residuo chandleriano della polodia, coordinata Y. Unità 0".01.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
								+05	+17	+23	+22	+18	+10
+02	−07	−13	−16	−19	−18	−13	−03	+08	+19	+20	+14	+06	00
−04	−07	−09	−09	(−07	−07	−05	−01	+05	+13	) +20	+18	+13	+06
−03	−09	−12	−15	−15	−11	−06	+02	+10	+16	+19	+16	+13	+06
+01	−05	−09	−14	−18	−15	−09	−04	+05	+10	+13	+14	+11	+06
−01	−07	−14	−13	−12	−09	−04	+01	+07	+10	+11	+12	+11	+10
+06	00	−07	−11	(−15	−11	−06	00	+04	+08	) +13	+11	+10	+06
+05	+02	−07	−09	−10	−08	−05	−02	+02	+07	+12	+11	+11	+07
+03	−03	−10	−14	(−13	−10	−05	00	+05	+10	) +14	+14	+10	+02
−03	−07	−11	−15	−15	−12	−10	−02	+05	+11	+09	+11	+05	+02
−05	−11	−16	−22	−19	−14	−09	−05	+02	+05	+11	+13	+12	+09
+03	−04	−07	−10	−11	−08	−02	+01	+07	+11	+16	+15	+15	+12
+07	+01	−07	−10	(−08	−07	−04	00	+05	+09	) +10	+11	+18	+05
+02	−05	−11	−15	[−15	−14	−10	−05	+03	+11	] +14	+16	+15	+10
+03	−02	−07	−10	−13	−09	−05	00	+07	+10	+12	+15	+16	+09
+01	−06	−14	−18	−20	−19	−10	−04	+04	+12	+18	+21	+19	+12
+01	−10	−16	−23	(−20	−17	−12	−05	+04	+13	) +22	+22	+17	+10
−04	−12	−18	−23	−26	−25	−17	−05	+04	+15	+21	+22	+22	+12
+01	−10	−16	−24	(−22	−16	−07	+02	+11	+19	) +23	+21	+14	+05
−01	−09	−17	−20	−18	−16	−09	+03	+08	+16	+21	+23	+20	+15
+06	−02	−13	−21	−21	−18	−14	−05	+05	+12	+17	+20	+16	+09
+03	−05	−08	−14	(−16	−14	−08	00	+07	+13	) +20	+20	+22	+08
+01	−04	−10	−16	(−19	−14	−08	−02	+04	+11	) +16	+10	+05	+01
−04	−11	−18	−21	−19	−15	−08	00	+10	+17	+17	+16	+11	+05
−01	−06	−07	−07	−04	−01	+03	+08	+10	+12	+15	+15	+15	+13
+10	+02	−05	−08	−12	−10	−07	−04	+04	+09	+13	+16	+15	+08
+01	−05	−10	−15	−15	−16	−14	−11	−04	00	+04	+03	+01	−01
−03	−05	−08	−11	(−09	−05	00	00	+02	+08	) +07	+04	00	−01
−08	−14	−11	−14	[−11	−07	−05	00	+04	+08	] +09	+06	+11	+08
+05	−01	−02	−06	−07	00	−04	−03	+01	+01	+06	+03	+07	+07
+01	−03	−11	−10	[−09	−09	−09	−07	−06	−04	] −03	+02	−01	+01
−09	−09	−06	−05	−09	−05	−01	+04	+05	+05	+11	+05	+05	00
−09	−10	−09	−07	[−07	−07	−06	−03	−02	−02	] ——	00	+01	00
−06	00	−08	−05	[−04	−03	00	+05	+07	+12	] +07	+04	+04	+04
+03	−02	−09	−12	−10	−06	−08	−03	00	+11	+09	+06	+07	+04
00	−01	−05	−06	[−06	−04	−01	+02	+06	+07	] +16	+10	+13	+09
+07	+02	−03	−05	−06	−04	00	+04	+09	+05	+07	+10	+10	+11
+04	−04	−06	−08	−07	−05	00	+02	+06	+06	+08	+06	+06	+05
00	−04	−07	−05	−05	−07	00	+05	+05	+06	+10	+04	+07	+03
−01	−05	−08	−09	−08	−06	−03	00	+03	+07	+06	+06	+05	+03
+01	−01	−03	−06	−07	−07	−07	−05	00	+06	+07	+06	+05	+05
+02	−01	−04	−06	−03	−02	−01	+03	+05	+06	+06	+06	+04	+03
+01	−01	−03	−03	−03	−05	−03	+01	+04	+06	+06	+08	+05	+03
+02	−01	−05	−05	−04	−02	−02	−01	+03	+05	+04	+02	+02	+01
−01	−03	−07	−06	[−07	−07	−04	00	+05	+07	] +07	+02	+04	+02
−03	−04	−10	−08	−10	−09	−06	−03	+05	+09	+11	+16	+12	+10
+05	−04	−04	−11	(−09	−08	−05	00	+03	+08	) +13	+08	+07	+01
−02	−10	−14	−14	−16	−11	−07	+01	+03	+11	+14	+13	+12	+02
−03	−07	−17	−19	(−16	−13	−08	−01	+06	+12	) +18	+19	+17	+05
−09	−11	−18	−20	−18	−08	−02	+06	+13	+15	+21	+21	+17	+07
+01	−10	−16	−23	−21	−17	−10	+01	+08	+18	+25	+25	+18	+12
+02	−10	−18	−22	−22	−23	−18	−03	+12	+20	+22	+26	+22	+13
+05	−06	−14	−22	(−23	−21	−12	00	+10	+19	) +31	+25	+17	+07
−08	−18	−24	−25	−26	−19	−23	+07	+18	+26	+29	+28	+23	+12
−02	−11	−25	−28	−27	−20	−12	+03	+14	+24	+24	+26	+17	+05
−01	−14	−24	−28	−24	−23	−11	00	+10	+19	+23	+30	+22	+09
00	−06	−15	−18	−22	−16	−07	+05	+14	+18	+24	+19	+19	+10
00	−11	−20	−25	(−23	−15	−07	+01	+12	+23	) +28	+26	+20	+11
−02	−10	−21	−21	−19	−12	−01	+07	+11	+18	+20	+19	+17	+14
+04	−04	−13	−17	−20	−25	−18	−05	+04	+12	+15	+22	+19	+12
+04	−08	−14	−19	(−18	−15	−10	−04	+04	+11	) +14	+13	+12	+03
−04	−07	−09	−13	−12	−09	−07	00	+01	+09	+14	+12	+08	+05
−03	−09	−12	−16	−14	−11	−03	+01	+07	+12	+16	+13	+11	+06
00	−08	−12	−15	−14	−11	−05	+02	+10	+12	+14	+13	+12	+06
+01	−04	−08	−11	(−11	−09	−05	−01	+03	+08	) +13	+15	+10	+06
+01	−05	−10	−15	−14	−13	−09	−03	+05	+10	+14	+16	+11	+07
+02	−05	−10	−13	−15	−12	−11	−07	00	+05	+09	+13	+12	+08
+01	−05	−11	−12	−12	−11	−07	−04	+02	+07	+10	+11	+12	+07
+03	−02	−05	−09	(−09	−08	−05	00	+06	+11	) +13	+12	+10	+05
00	−06	−11	−13	[−13	−11	−06	00	+05	+10	] +13	+13	+14	+10
+03	−03	−07	−11	(−14	−12	−07	−02	+02	+07	) +12	+11	+09	+04
00	−05	−09	−12	−12	−10	−07	+01	+06	+11	+15	+14	+12	+05
−02	−06	−10	−12	(−10	−07	−04	+01	+06	+09	) +13	+11	+09	+04
−02	−09	−12	−15	(−13	−08	−02	+04	+10	+12	) +14	+11	+04	−01
−06	−08	−11	−12	[−11	−08	−02	+04	+09	+13	] +15	+12	+11	+05

TAV. 3 : X

Coordinata X del termine di Chandler del moto polare, in 14 fasi, dalla Tav. 2, per intervalli per cui è chiaramente differenziato. Intervalli: 1: 1890.56-1903.64; 2: 1903.64-16.81; 3: 1916.81-22.73; 4, 5, 7 *indicati alla p. seguente.*

1:	+12.9	+12.6	+8.6	+3.7	−3.3	−8.5	−12.9	−14.2	−12.9	−8.5	−1.4	+3.7	+8.9	+11.7
2:	+18.7	+16.6	+12.4	+5.1	−3.8	−10.4	−14.3	−17.2	−16.6	−12.8	−4.6	+3.1	+10.7	+16.5
3:	+12.2	+11.6	+7.8	+4.0	−2.0	−7.2	−9.2	−11.4	−9.2	−8.6	−3.6	+1.0	+7.8	+10.8
4:	+8.5	+7.6	+4.4	+0.4	−2.1	−4.8	−6.9	−7.4	−6.2	−4.9	−2.3	−0.1	+4.0	+7.1
5:	+12.8	+10.5	+5.3	+1.5	−3.3	−7.0	−10.2	−10.7	−8.2	−5.8	−2.0	+2.8	+7.7	+10.3
6:	+23.2	+20.9	+13.8	+5.0	−6.1	−17.2	−21.7	−23.9	−20.4	−14.1	−3.7	+8.0	+14.5	+22.4
7:	+14.4	+12.4	+9.4	+3.9	−2.4	−7.4	−11.4	−12.9	−12.1	−9.3	−3.4	+2.8	+8.4	+12.2

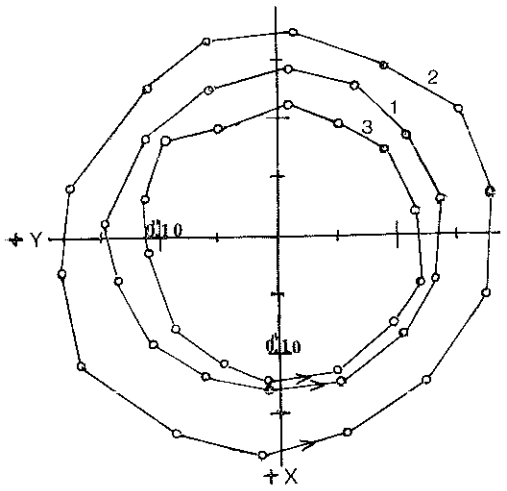


FIG. 3. - Componente di Chandler media per i primi 3 interpalli sopra scritti, dal 1890.56 al 1922.73.

I valori assunti iniziali dei successivi cicli (colonna 1) corrispondono alle successive epoche standard riportate corrispondenti ai massimi valori mensili + X, naturalmente con qualche aggiustamento locale suggerito dall'andamento e dalle evidenti approssimazioni dei dati.

TAV. 3: Y

Coordinata Y del termine di Chandler del moto polare, in 14 fasi, dalla Tav. 2, per intervalli per cui è chiaramente differenziato. Intervalli: 4: 1922.73-38.64; 5: 38.64-45.64; 6: 45.64-58.73; 7: 58.73-77.73.

1:	+0.4	-5.3	-10.4	-13.4	-14.0	-11.2	-6.7	-1.2	+5.4	+10.9	+14.4	+13.5	+10.6	+6.0
2:	+1.8	-5.8	-12.4	-17.6	-18.0	-15.4	-9.4	-1.9	+5.6	+12.8	+17.6	+18.3	+16.7	+8.7
3:	+0.6	-5.0	-9.6	-12.4	-11.8	-9.4	-5.2	-1.4	+4.4	+9.2	+11.2	+10.8	+8.4	+4.8
4:	0.0	-3.8	-6.9	-7.4	-7.1	-5.1	-3.3	00	+3.7	+5.2	+7.1	+5.6	+6.0	+4.5
5:	+0.3	-3.8	-7.2	-7.8	-8.2	-7.0	-4.5	-0.3	+3.8	+7.3	+9.3	+9.0	+7.0	+3.2
6:	-1.5	-10.4	-19.3	-22.8	-21.9	-17.5	-10.9	+1.3	+10.8	+19.3	+23.5	+24.4	+19.0	+9.5
7:	+0.1	-5.9	-10.2	-13.4	-13.2	-11.2	-6.7	-0.8	+5.0	+9.9	+13.4	+13.2	+11.0	+5.7

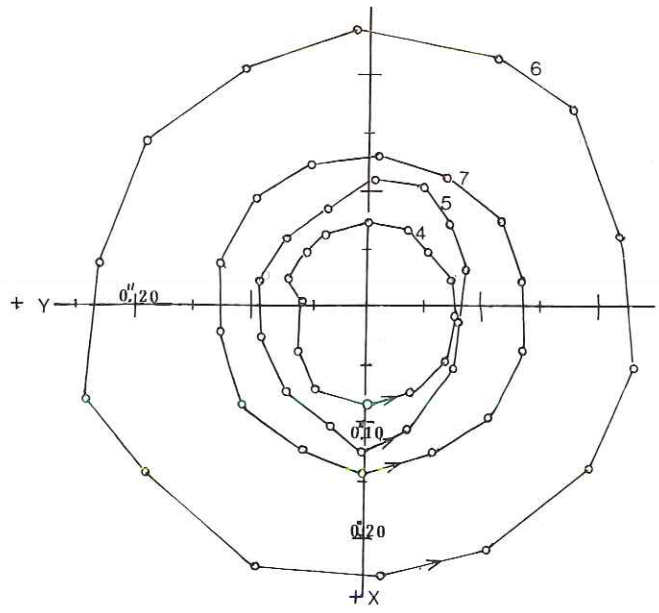


FIG. 4. - Componente di Chandler media per i 4 intervalli sopra scritti, dal 1922.73 al 1977.73.

Si hanno 13 gruppi di cicli; ma di essi, 46 sono di 14 mesi, 19 di 15 e 9 di 13. È anche evidente una indicazione sistematica: 5 di questi ultimi seguono subito la data 1922.73; quindi per avere il valore del periodo di Chandler, occorre dividere le date della tav. 2

per intervalli parziali. Si trovano convenienti 3 intervalli, in base a questa caratteristica sistematica, che fa presumere una certa regolarità entro ciascuno; inoltre si rivela la circostanza che intorno al 1919.0 la polodia della Ergebnisse citata mostra una perturbazione, quasi un arresto con una certa persistenza; ed un'altra appare dal vol. X del S.I.L. al 1942-43. Quindi sembra preferibile analizzare le date della tav. 2 per 3 intervalli come segue, applicando un metodo statistico corretto, quello della regressione rettilinea per le serie di tempo. Si ottiene il periodo P di Chandler e la sua deviazione quadratica media (m.s.d.)

1890.4-1919.0, 24 cicli, $P = 1.184 \pm 0.019$ anni
1919.0-1943.0, 21 » , » 1.152 ± 0.012 »
1943.0-1977-5, 29 » , » 1.193 ± 0.008 »

La differenza tra il 1° e il 3° valore P non è statisticamente significante, e la deviazione media resta in ogni caso minore di 0.02: la loro combinazione alla 2ª decimale dà, insieme al risultato intermedio:

1890.4-1919.0, e 1943.0-1977.5 53 cicli:

$P =$ anni $1.19 \pm 0.01 =$ giorni 435 ± 4

1919.0-1943-0, 21 cicli

$P =$ anni $1.15 \pm 0.01 =$ giorni 420 ± 4

Altri raggruppamenti dànno differenti risultati, p. es. nell'intervallo 1922-7-31.7, con 5 cicli di 13 mesi, risulterebbe circa P = anni 1.11; ma sembra ben accettabile la sintesi sopra scritta, tanto più che una ispezione immediata non mostra una relazione certa tra periodo ed ampiezza di oscillazione; eccetto per l'intervallo ristretto 1922-7-1931-7, nel quale le due quantità appaiono decisamente minime.

Valutazioni di P e sue variazioni, numericamente risultanti dai dati disponibili, sono già note fin dal tempo di Chandler; p. es. quella di Hattori nel suo contributo di Mizusawa, 1946; o quella riportata in *Trans. I.A.U.* vol. 8, p. 206. Una analisi su una successione di date, in parte le stesse della tav. 2, in base a criteri puramente statistici, fu anche data dallo scrivente in *Atti Acc. Lincei*, classe Sc. Fis., Matem. e Natur., serie 8 vol. 6, 1949; ed i risultati della alquanto pesante analisi (p. 336 degli *Atti*), come quelli della memoria dei Lincei ricordata al n. 1, sono dello stesso ordine di quelli qui ottenuti (in media anni 1.18 ed 1.14 circa). Ma il trattamento e i risultati qui ottenuti sono più certi e preferibili.

4. Determinato il ciclo medio, che è di 14.28 mesi nel complesso dei 53 cicli esterni considerati, 13.80 nei 21 intermedi, la determinazione della *forma* della traiettoria chandleriana si riduce al problema della costruzione della tav. 2, con le posizioni X e Y disposte ordinatamente per 14 fasi; disposizioni a cui conviene riportare (non trattandosi più di ricercare P) anche i cicli di 15 e di 13 mesi. Per ridurre al minimo questa nuova alternazione dei dati X e Y originali, limiteremo l'interpolazione alla adozione delle 6 semisomme consecutive dei 7 valori centrali X ed Y per tali cicli, riportando in tutti i casi inalterati nella tavola i primi 4 e gli ultimi 4. I 6 valori interpolati sono indicati (...) per i cicli di 15 mesi, [...] per quelli di 13. Si può valutare che le successioni di dati mensili così ridotte in ogni caso a 14 fasi, possono teoricamente deviare dalle date esatte delle 14 fasi, al massimo per $\pm$ 7 giorni, ed alle sole estremità dei 6 valori centrali; per le incertezze dei dati, tali deviazioni appaiono del tutto tollerabili.

Le 7 o 5 coppie di valori centrali X, Y della tavola completa senza le dette interpolazioni, possono se occorre essere facilmente ricostruite. Per questa ricostruzione, mancano solo le coppie X, Y originali per il 5° posto della tav. 2, per i 19 cicli di 15 mesi, che sono:

+ 05-08, 00-17, + 02-14, − 01-09, + 01-21, + 01-25, − 02-16, − 02-20, + 02-10, − 02-11, − 01-16, 00-23, − 01-26, + 04-19, − 01-12, − 01-09, + 01-14, − 02-11, − 01-14.

L'analisi dei valori della tav. 2, conduce immediatamente ai risultati sintetizzati nella tavola (3 X, 3 Y) e nelle figure 3 e 4.

È chiaramente confermato che la componente chandleriana della polodia presenta variazioni effettive: in periodo, e particolarmente notevoli in ampiezza.

The structure of a sapogenin from *Muscari comosum*

Nota di MICHELANGELO PARRILLI *, MATTEO ADINOLFI *,
VINCENZO DOVINOLA ** e del socio ordinario LORENZO MANGONI *

(Adunanza del 2 dicembre 1978)

RIASSUNTO. — Per metanolisi dei glicosidi del *Muscari comosum* sono stati ottenuti i composti Ib, la cui struttura è stata determinata con metodi chimici e spettrali. Essi sono risultati essere degli artefatti dell'aglicone orignale, l'eucosterolo III, ottenuto per idrolisi enzimatica.

SUMMARY. — Compounds Ib, whose structure was established by chemical and spectral methods, were obtained by methanolysis of the glycosides from *Muscari comosum*. They resulted to be artefacts of eucosterol III, the original aglycone obtained by enzymatic hydrolysis.

The bulbs of *Muscari comosum* Mill. (Liliaceae), a rather popular food in the mediterranean area, are well known for their bitter taste. This has now been shown to be due to a complex mixture of saponins. Extraction of sliced bulbs with boiling acetone gave a brown powder that, after washing with little aliquots of cool water and then of cool acetone, was dissolved in 1:2 methanol/water. The resulting solution was washed with carbon tetrachloride. Evaporation of the aqueous phase and column chromatography (cellulose, water saturated BuOH) gave a very bitter yellowish powder which has been shown to consist of at least four main compounds all migrating in a narrow of R_f (cellulose TLC, 5:1:4 BuOH/MeOH/H_2O). Relevant signals (δ 3.0-3.8) in the ^{1}H-NMR spectrum (DMSO-d_6/D_2O) of the mixture indicated a glycoside nature for the components.

Owing to the very poor results of any attempt to separate the various glycosides, they were directly converted into the corresponding aglycones by refluxing in 2.5 % methanolic HCl for 3 hr. Chro-

* Istituto di Chimica Organica e Biologica dell'Università di Napoli, Via Mezzocannone 16, 80134 Napoli, Italy.
** Present address: Istituto di Chimica, Università di Salerno, Italy.

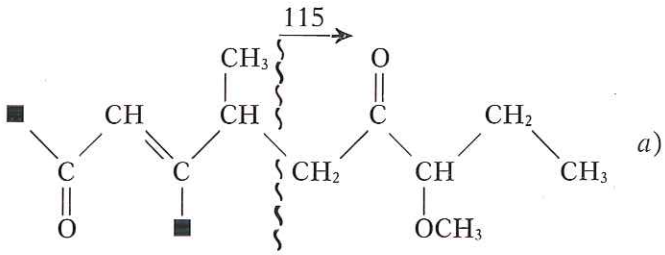
matography (silica gel, 3:2 benzene/ether) of the whole aglycone mixture thus obtained afforded a main crystalline fraction, one spot on TL silica gel plates but melting in a wide temperature range (142-155°) in spite of repeated crystallizations. It actually consisted of four diastereoisomeric dihydroxy compounds (see below). The UV (λ_{max}^{EtOH} 238 nm, $E_{1cm}^{1\%}$ 94) and the IR ($CHCl_3$, 3350, 1710-1690 cm^{-1}) spectra indicated the presence of hydroxyl and conjugate (and possibly unconjugated) keto groups.

Benzoylation (BzCl/dry Py) followed by PLC (silica gel, 4:1 hexane/ethyl acetate) gave two fractions. Their mass spectra displayed the same molecular peak and, most importantly, an identical fragmentation pattern.

The less polar fraction by crystallization from EtOH gave a pure dibenzoate m.p. 175-6°, $[\alpha]_D$ + 211° ($CHCl_3$). IR (CCl_4): 1740-1690 cm^{-1}, no hydroxyl band. UV: λ_{max}^{EtOH} 230 nm, ε = 31,000. MS: 694.38714 (base peak, M^+, calculated for $C_{44}H_{54}O_7$: 694.38703), 679 ($M^+ - 15$, CH_3), 579.31112 (calculated for $C_{38}H_{43}O_5$ ($M^+ - C_6H_{11}O_2$): 579.31102)), 435. The ^1H-NMR spectrum ($CDCl_3$) showed (2H AB q, J_{AB} = 12.5 Hz, at δ 4.68 and 1H m, $W_{1/2}$ = 21 Hz, at δ 4.92) that benzoylation had occurred at a primary and a secondary hydroxyl group; other signals were at δ 0.91 (3H, t, J = 6 Hz, $-CH_2CH_3$), 0.95 (3H, s, $-CH_3$), 1.13 (3H, s, $-CH_3$), 1.13 (3H, d, J = 6 Hz, $-CHCH_3$), 1.24 (3H, s, $-CH_3$), 1.27 (3H, s, $-CH_3$), 1.66 (2H, quintuplet, J = 6 Hz, $-OCHCH_2CH_3$), 2.75 (2H, double AB q, J_{AB} = 18 Hz, $J_{AX} = J_{BX}$ = 6 Hz, $-CH-CH_2-C=O$), 3.09 (1H, sextet, J = 6 Hz, $CH_3-CH(CH_2-)(C=C-)$), 3.36 (3H, s, $-OCH_3$), 3.53 (1H, t, J = 6 Hz, $-OC-CH(O-)(CH_2-)$), 5.54 (1H, s, $C=CH-C=O$), 7.2-8.1 (10 H, 2 × C_6H_5COO-). Chemical shifts, integration, multiplicities, extensive decoupling experiments and mass fragmentation (loss of $C_6H_{11}O_2$ = 115) suggested the partial structure *a*). ^1H-NMR examination of the solid left from evaporation of the mother liquors allowed the presence of a second diastereoisomeric dibenzoate to be inferred. The pertinent signals were indeed almost overlapping those of the dibenzoate m.p. 175-6°, whereas additional singlets at δ 3.37 and δ 5.60

were observed in the methoxyl and in the vinyl region (3 H and 1 H in all, respectively).

The more polar fraction from PLC turned out to be still a mixture of two more diastereoisomers. The ^1H-NMR spectrum showed again features (chemical shifts, relative integration, multiplicities) very close to those of the spectrum of the dibenzoate m.p. 175-6°, the main difference being the presence of two singlets (1 H in all) at δ 5.58 and δ 5.64 in the vinyl region and of two triplets (3 H in all) centered at δ 0.91 and δ 0.93 in the methyl region.



a)

Acetylation (Ac_2O/dry Py) of the aglycone mixture yielded an unseparable mixture of diacetates (^1H-NMR: AB quartet at δ 4.27 ($-CH_2-OAc$); multiplet at δ 4.59, $W_{1/2} = 21$ Hz ($-CH-OAc$). MS: M^+ 570). The UV absorption at λ_{max}^{EtOH} 245 nm, $\varepsilon = 6{,}500$, confirmed the presence of the enone, very likely a cyclopentenone [1]. On the other hand, reaction with dry acetone/$CuSO_4$ (r.t., 20 hr) gave an unserable mixture of acetonides (MS: M^+ 526) showing that the arrangment of the two hydroxyl groups is suitable for the closure of a di-O-isopropylidene ring.

Proton decoupled, noise off-resonance decoupled and single-frequency off-resonance decoupled $^{13}C-NMR$ spectra of the pure dibenzoate m.p. 175-6° allow detection of one CH_3O- (δ 58.2), four tertiary CH_3- (18.7, 22.6, 28.2, 29.4), one primary CH_3- (9.4), one secondary CH_3- (20.4), eight $-CH_2-$ (19.4, 20.4, 23.4, 24.3, 24.8, 27.8, 35.4, 43.4), one $-CH_2O-$ (65.9), two $-CH-$ (43.4, 51.7), two $-CH-O-$ (80.8, 88.6), four quaternary $-C-$ (37.6, 41.9, 51.4, 57.5), one tetrasubstituted $C=C$ (132.9, 135.3), one $-C=CH-C=O$ (129.7, 123.4, 185.0), one $C=O$ (211.0), two $-OCOC_6H_5$ groups.

[1] A. I. Scott, *Interpretation of the Ultraviolet Spectra of Natural Product*, Pergamon Press, New York, 1964, p. 55.

Having established all of the unsaturated funtionalities it is apparent that four rings must be present in the structure of the compound to account for the whole number of unsaturations implied by the molecular formula. All above spectral data strongly suggest a lanostanic or euphanic 27-nortriterpene skeleton. Chemical evidence in this respect came from oxidation in glac. AcOH (40°, 2 hr), which led to an enedione m.p. 176.5-177.5° (fom MeOH), $[\alpha]_D$ +325° ($CHCl_3$). MS: 722.34558 (M^+, calculated for $C_{44}H_{50}O_9$: 722.34545). ^1H-NMR ($CDCl_3$): δ 0.92 (3H, t, $-CH_2CH_3$), 1.13 (3H, s, $-CH_3$), 1.14 (3H, d, J = 6 Hz, $-\overset{|}{C}HCH_3$), 1.28 (3H, s, $-CH_3$), 1.32 (3H, s, $-CH_3$), 1.37 (3H, s, $-CH_3$), 3.36 (3H, s, $-OCH_3$), 3.53 (1H, t, J = 6 Hz, $-OC-\overset{CH_2-}{\overset{/}{\underset{\backslash}{CH}}}\overset{}{\underset{O-}{}}$), 4.77 (2H, AB q, $-CH_2OBz$), 5.00 (1H, m, $-CHOBz$), 5.70 (1H, s, $\overset{\backslash}{\underset{/}{C=CH-CO-}}$). The UV absorption band (λ_{max}^{EtOH} 273 nm, ε = 8,000) was diagnostic for the all-trans O=C−C=C−C=O chromophore of a 7,11-diketo-$\Delta^{8,9}$-tetracyclic triterpene [2]. Thus the signals at δ 4.27 and δ 4.59 in the ^1H-NMR spectrum of the diacetates may be regarded as the signals generally detected [3] for the 4β−CH_2OAc and the 3α−$\overset{|}{C}$HOAc protons, respectively, in the A ring of a triterpene diol acetate.

All above data are in good agreement with the structure Ia (or its euphanic counterpart) for the dibenzoate m.p. 175-6° and its accompanying stereoisomers, the difference among them (and among the corresponding aglycones Ib) lying in the configuration at the epimerizable C-20 and C-24 centers. Accordingly, hydrolysis both under acidic and alkaline conditions of the pure dibenzoate m.p. 175-176° did not give in any case a pure diol, but did lead to a mixture identical (^1H-NMR) with that resulting from the methanolysis of the original glycosides.

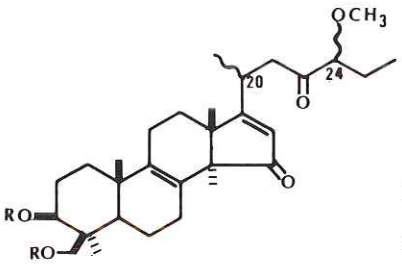
Structure Ib is closely related to that of the compound II obtained [4a] by alkaly-catelyzed retroaddition from eucosterol, a lanostane

[2] E. R. H. JONES and T. G. HALSALL ,« Tetracyclic Triterpenes », in « Fortschritte der Chemie Organischer Naturstoffe », Ed. L. Zeichmeister, Springer-Verlag, Wien, 1955, *12*, p. 44.

[3] A. Gaudemar, J. POLONSKY and E. WENKERT, *Bull. Soc. chim. France*, 407 (1964).

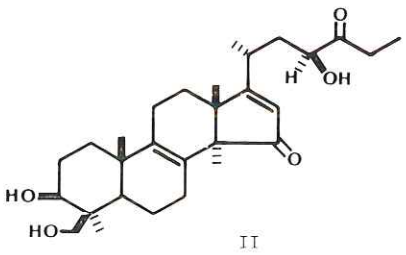
[4a] R. ZIEGLER and C. TAMM, *Helv. chim. Acta*, *59*, 1997 (1976).

27-nortriterpene to which stereostructure III has been recently assigned mainly by X-rays diffraction analysis [4a,b]. As both retroaddition to II may also be promoted by acid and more than one path leading from II to Ib may be easily imagined [5],stereoisomeric aglycones from methanolysis were suspected to be artefacts.

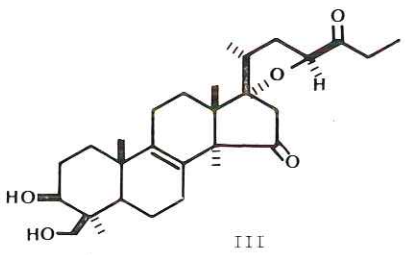


Ia R = COC_6H_5

Ib R = H



II

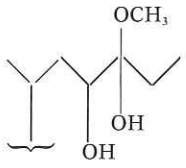


III

Indeed, enzymatic hydrolysis of the *Muscari comosum* glycosides by *Helix pomatia* digestive juice afforded a mixture of at least four authentic aglycones (silica gel TLC). One of them, isolated by PLC (silica gel, 4:1 $CHCl_3$/AcOEt) was a compound m.p. 232-3° (from EtOH), $[\alpha]_D$ + 21 ($CHCl_3$), identical in all respects (IR, MS, ^1H-NMR, $^{13}C-NMR$, UV) with eucosterol. In a control, methanolysis (under the above conditions) of the so obtained eucosterol yielded a product identical (^1H-NMR, TLC) with our diastereoisomeric diols mixture. This latter result also enables definitive attribution of structure Ib.

[4b] W. T. L. Sidwell, C. Tamm, R. Ziegler, J. Finer and J. Clardy, *J. Am. Chem. Soc.*, *97*, 3518 (1975)

[5] For instance, Ib may originate by dehydration of emiketal *b*) initially formed by acidic methanol.



b)

Structural elucidation of the other aglycones and that of the glycosides as well will be the subject of a forthcoming paper.

Acknowledgment - $^{1}H-NMR$ and $^{13}C-NMR$ spectra were performed on a Bruker WH-270 spectrometer with Fourier transform at the Centro di Metodologie Chimico-Fisiche - Università di Napoli (*I. Giudicianni*).

RELAZIONE SUI LAVORI COMPIUTI DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

durante l'anno 1978, letta nell'adunanza plenaria del 30 gennaio 1979
dal socio VINCENZO LEONE
Segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

Nel 1978 sono state presentate, nelle consuete 8 sedute ordinarie, 43 comunicazioni scientifiche, di cui la maggior parte, cioè 27, su argomenti di competenza della Sezione di Scienze Matematiche; le altre comunicazioni, nell'ambito della Sezione di Scienze Naturali, hanno riguardato argomenti di Biologia (6), di Chimica (6) e di Scienze della Terra (4). Il numero delle comunicazioni, aumentate rispetto all'anno precedente, e il loro contenuto di notevole interesse e attualità, testimoniano dell'attività dell'Accademia nel 1978.

Per le Scienze Biologiche, il socio Nicolaus ha presentato due note, una di M. D'Agostino, A. Biondi, G. Misuraca e T. De Angelis e un'altra di A. Biondi, L. Rossi, G. Sansone e U. Gallone in relazione all'incorporazione di alcuni metalli in mitili del golfo di Napoli; il socio Leone ha presentato una nota sua e di B. Farina, A. Carsana e P. Quesada sulle proprietà d'un derivato della ribonucleasi seminale, e inoltre una nota di H. Suzuki, M. Rocca, M. Valpreda, B. Nicolaus e R. De Prisco sul comportamento di alcuni enzimi seminali di toro, e una di M. Fiore, A. M. Garzillo, P. Pucci e G. Marino sulla ricostituzione della aspartato aminotransferasi di cuore suino, e sua inibizione.

Il socio Chieffi ha presentato una nota di M. Grasso sul differenziamento sessuale nei Cefalopodi.

Per le Scienze della Terra, il socio Scherillo ha presentato 3 note, una di E. Franco e G. Rolandi su una probabile bocca eruttiva nel settore N-NW del Somma Vesuvio, una di M. Ferrari e D. Stanzione sui caratteri geochimici dei travertini campani e un'altra ancora di M. Boni, D. Stanzione e F. Zenone sui depositi argillosi nella piattaforma carbonatica campano-lucana. Il socio D'Argenio ha presentato una nota di A. Incoronato, G. Nardi e F. Ortolani sull'assetto strutturale dei massicci carbonatici della Campania Meridionale.

Per le Scienze Chimiche, il socio Leone ha presentato una nota di S. Chiosi, R. Di Costanzo, O. Montagna e G. Randazzo sull'uso della cromatografia liquida ad alta pressione nelle analisi di inquinamenti cloro-organici. Il socio Sersale ha presentato una nota di V. Di Ludovico, V. Sabatelli e C. L. Valenti sull'influenza della temperatura nel comportamento idraulico del silicato tricalcico, e una nota di V. Sabatelli e G. L. Valenti sulle relazioni tra costituzione di leganti sintetici, reattività con acqua e prestazioni meccaniche. Il socio Corradini ha presentato due note, una sua e di M. Vacatello, A. Tuzi e G. Avitabile sulla simulazione col calcolatore della disposizione delle molecole di un idrocarburo a catena lunga, e un'altra di M. Scalone, C. Pedone e A. Panunzi sugli aspetti strutturali e stereochimici di complessi olefinici del Pt (II) con una etilendiammina sostituita. Infine il socio Mangoni ha presentato una nota sua e di M. Perrilli, M. Adinolfi e V. Dovinola sulla struttura di una sapogenina isolata da Muscari Comosum.

Per le Scienze Matematiche il socio Nicolini ha presentato una sua nota dal titolo « Una revisione numerica delle componenti del moto polare ». Il socio emerito Miranda ha presentato cinque note: di R. Pisani, A. Cioffi, F. Acanfora su questioni collegate al problema di Dirichlet, di R. De Dominicis sul teorema del limite centrale per campi aleatori e di V. Esposito su considerazioni relative ad una equazione ellittica del quarto ordine. Il socio Cafiero, oltre a due note dovute alla collaborazione di G. Mastroianni e M. R. Occorsio e riguardanti l'operatore di Stancu, ha presentato una nota di E. Wagner sulla convergenza nelle categorie e una Nota di I. Del Prete sulle funzioni numerabilmente additive. Il socio Ciliberto ha presentato note di M. L. De Cesare e M. R. Maddalena su una questione di analisi numerica, di P. Buonocore sul problema di Dirichlet, di M. Tucci sulla selezione continua di una applicazione plurivoca, e due note di F. Bombini concernenti la paracompattezza forte e gli spazi metrizzabili con una metrica di spazio completo. Il socio Greco ha presentato una nota di M. Biancardi e R. Toscano, dedicata alla regolarità della soluzione di una disequazione variazionale; mentre il socio Avantaggiati ha presentato due note: una, di R. Selvaggi e I. Sisto, su un problema relativo a trasformazioni integrali, e l'altra, di G. Palmieri, che fornisce contributi alla teoria degli spazi di Orlicz-Sobolev. Il socio Franchetta ha presentato due note, una di L. Di Fiore sulle sezioni iperpiane di una varietà di Grassmann ed una di Ciro Ciliberto, in cui si studiano i sistemi di corrispondenze di una curva ellittica in sé. Il socio Dalla Volta ha presentato una nota di R. A. Marinosci sulle proprietà delle applicazioni pseudoaffini tra varietà differenziabili. Il socio Curzio ha presentato tre note

che trattano problemi di teoria dei gruppi dovute, rispettivamente, a E. Strickland, ad Anna Franchetta e a F. de Giovanni; mentre una nota, di P. Misso, sui corpi con antiautomorfismo involutorio, è stata presentata dal socio Panella. Il socio Franciosi ha presentato due note: una, di M. Brigante, su proprietà delle sezioni sottili dotate di simmetria biortogonale e un'altra, di G. Frunzio, che illustra un modello adatto allo studio qualitativo dell'effetto staffa sulla duttilità di un tronco plasticizzato di conglomerato armato.

Tutti i lavori accennati sopra saranno pubblicati nel volume 45° della Serie IV dei rendiconti dell'Accademia.

Altre iniziative dell'Accademia sono consistite nel promuovere, come di tradizione, visite a luoghi di cultura e di ricerca. Così ha raccolto vivo successo la visita all'Orto Botanico dell'Università, organizzata e guidata dal consocio Aldo Merola.

È stato motivo di vivo compiacimento di tutti i Soci la nomina del consocio Antonio Carrelli a Presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei; il consocio Giovanni Chieffi è stato recentemente nominato Socio di tale Accademia.

L'Accademia ha dovuto purtroppo registrare la perdita del Socio Straniero Paolo Buchner, spentosi recentemente.

L'Accademia ha anche proceduto ad eleggere nuovi Soci per ricoprire i posti vacanti. Gianfranco Cimmino è stato eletto socio ordinario non residente, e Antonio Avantaggiati socio corrispondente, per la sezione di Scienze Matematiche. Per la stessa Sezione, il consocio Tito Nicolini, in seguito a suo trasferimento da Napoli ad altra sede, è passato dalla categoria di socio ordinario residente a quella di socio ordinario non residente, in soprannumero. Sempre per la stessa Sezione di Scienze matematiche, il socio Donato Greco è stato eletto socio ordinario residente, mentre per la Sezione di Scienze Naturali il socio Giovanni Chieffi è stato parimenti eletto socio ordinario residente.

Per l'anno 1979 il Consiglio di Classe risulta costituito come segue: Presidente Baldassarre De Lerma; Vice Presidente Gianfranco Ghiara; Tesoriere Riccardo Sersale; Segretario, Vincenzo Leone.

INDICE

SCIENZE BIOLOGICHE

M. D'AGOSTINO, A. BIONDI, G. MISURACA, T. DE ANGELIS — Influenza del raggio ionico sull'incorporazione dei metalli in tracce nelle valve del *Mytilus galloprovincialis* . . . . . pag. 79

H. SUZUKI, M. ROCCA, M. VALPREDA, B. NICOLAUS, R. DE PRISCO — Comportamento nel tempo delle attività di alcuni enzimi nucleolitici nel plasma seminale bovino . . . . . » 113

B. FARINA, A. CARSANA, P. QUESADA, E. LEONE — Main properties of the dansylated derivative of seminal ribonuclease . . . . . » 263

A. BIONDI, L. ROSSI, G. SANSONE, U. GALLONE — Individuazione di un indice di normalità in relazione al contenuto di alcuni metalli pesanti in *Mytilus Galloprovincialis* del golfo di Napoli . . . . . » 313

R. FIORE, A. M. GARZILLO, P. PUCCI, G. MARINO — Inibizione della relazione di ricostituzione dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore suino da parte dell'acido adenilico . . . . . » 353

M. GRASSO — Ricerche sul differenziamento sessuale nei *Cefalopodi* . . » 359

SCIENZE DELLA TERRA

E. FRANCO, G. ROLANDI — Segnalazione di una probabile bocca eruttiva nei dintorni di Pollena Trocchia (settore N-NW del Somma-Vesuvio) e di tufi zeolitici sovrapposti contenenti *K-Cabasite* . . . . . » 83

M. FERRERI, D. STANZIONE — Contributo alla conoscenza geochimica dei travertini campani: travertini di Paestum e della Valle del Tanagro (Salerno) » 199

M. BONI, D. STANZIONE, F. ZENONE — I depositi argillosi dal Cretacico Superiore al Miocene Inferiore nella piattaforma carbonatica Campano-Lucana: variazioni mineralogiche ed evoluzione paleoambientale . . . » 317

A. INCORONATO, G. NARDI, F. ORTOLANI — Assetto strutturale dei massicci carbonatici della Campania Meridionale. Implicazioni idrogeologiche . . » 479

SCIENZE CHIMICHE

S. CHIOSI, R. DI COSTANZO, O. MONTAGNA, G. RANDAZZO — L'uso della cromatografia liquida ad alta pressione nell'analisi degli inquinamenti cloroorganici . . . . . » 71

V. Di Ludovico, V. Sabatelli, G. L. Valenti — Comportamento di soluzioni solide di silicato tricalcico. Nota IV. Influenza della temperatura di reazione . . . . . pag. 189

V. Sabatelli, G. L. Valenti — Relazioni intercorrenti fra costituzione di leganti sintetici, reattività con acqua e prestazioni meccaniche . . . » 283

M. Vacatello, A. Tuzi, G. Avitabile, P. Corradini — Simulazione col calcolatore della disposizione delle molecole di un idrocarburo a catena lunga nel liquido; confronto delle risultanze con dati sperimentali . . . « 171

M. Scalone, C. Pedone, A. Panunzi — Complessi pentacoordinati olefinici del Pt (II) con una etilendiammina sostituita: aspetti strutturali e stereochimici . . . . . » 383

M. Parrilli, M. Adinolfi, V. Dovinola, L. Mangoni — The structure of a sapogenin from *Muscari comosum* . . . . . » 527

Scienze matematiche

C. Ciliberto — Sui sistemi di corrispondenze di una curva ellittica in sé » 5

A. Cioffi — Sul problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine, ipoellittici nella zona di degenerazione . . . . . » 23

R. Pisani — Soluzioni positive per il problema di Dirichlet per equazioni di tipo parabolico . . . . . » 43

F. Acanfora — Problema esterno di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine . . . . . » 59

P. Misso — Alcune proprietà del centro simmetrico di un corpo . . . » 105

M. Biancardi, R. Toscano — Sulla regolarità della soluzione di una disequazione variazionale . . . . . » 121

M. L. De Cesare, M. R. Maddalena — Numerical Inversion of Laplace Transform by the Generalized Cardinal Series . . . . . » 137

R. De Dominicis — I semi-invarianti ed il teorema del limite centrale per campi aleatori . . . . . » 155

E. Strickland — On a longstanding conjecture of G. A. Miller . . . » 163

L. Di Fiore D'Onofrio — Sulle varietà segate dagli iperpiani in varietà di Grassmann . . . . . » 185

R. A. Marinosci — Applicazioni pseudoaffini tra varietà differenziabili e loro proprietà . . . . . » 215

F. Bombini — Due osservazioni concernenti forte paracompattezza e numerabile paracompattezza . . . . . » 227

F. Bombini — Spazi metrizzabili con una distanza di spazio completo . » 241

V. Esposito — Una formula di maggiorazione per il gradiente delle soluzioni di un'equazione ellittica del quarto ordine . . . . . pag. 247

G. Mastroianni, M. R. Occorsio — Sulle derivate dei polinomi di Stancu . » 273

M. Tucci — Su un problema di selezione continua di un'applicazione plurivoca ad n valori non tutti distinti . . . . . » 291

E. Wagner — Convergence in category . . . . . » 303

P. Buonocore — Esistenza ed unicità di una soluzione generalizzata del problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di sistemi degeneri » 339

G. Palmieri — Alcuni contributi alla teoria degli spazi di Orlicz-Sobolev » 367

R. Selvaggi, I. Sisto — Regolarità di certe trasformazioni integrali relative ad aperti di classe C^1 . . . . . » 393

M. Brigante — La crisi in presenza di momento flettente e taglio nelle sezioni sottili dotate di simmetria biortogonale . . . . . » 411

F. de Giovanni — Alcuni omomorfismi tra reticoli di sottogruppi . . . » 437

I. Del Prete — Sul prolungamento delle funzioni numerabilmente additive » 443

A. Franchetta — Alcune osservazioni sui gruppi i cui sottogruppi massimali hanno indici primi . . . . . » 453

G. Frunzio — Un semplice modello reticolare per lo studio qualitativo dell'effetto staffa sulla duttilità di un tronco plasticizzato di conglomerato armato . . . . . » 463

G. Mastroianni, M. R. Occorsio — Una generalizzazione dell'operatore di Stancu . . . . . » 495

T. Nicolini — Una revisione numerica delle componenti del moto polare » 513

Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1978 . . . . . » 533

TERMINATO DI STAMPARE OGGI
III MAGGIO MCMLXXIX NELLE
OFFICINE GRAFICHE NAPOLETANE
« FRANCESCO GIANNINI & FIGLI »

Direttore responsabile: Prof. MICHELE FUIANO

Autorizzazione del Tribunale di Napoli, B/2315 del 14 agosto 1954