SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLIV — ANNO CXVI

(gennaio - dicembre 1977)



GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1978

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLIV — ANNO CXVI

(gennaio - dicembre 1977)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1978

Ricordo di Francesco Scarsella

Il giorno 23 novembre 1977 decedeva a Roma il prof. Francesco Scarsella che dal 4/VI/1960 aveva fatto parte della nostra Accademia, prima come socio corrispondente, poi, dal 31/VI/1961, come ordinario della classe di Scienze Naturali. Dal 1973 era socio ordinario non residente. Era stato presidente dell'Accademia nel 1972.

Noi tutti abbiamo conosciuto in Francesco Scarsella un ottimo collega, modesto, riservato, di poche parole, ma forse non tutti sanno che Egli è stato un eccellente e illustre geologo rilevatore, di competenza universalmente riconosciuta e indiscussa nella geologia dell'Appennino centro/meridionale, che conosceva come pochi per averlo tutto percorso a piedi.

Nato a Rapallo (Genova) nel 1899, si era laureato in Scienze Naturali presso l'Università di Genova dove era stato allievo di quel grande e originale, ma anche solitario geologo che fu Gaetano Rovereto. Era stato per alcuni anni assistente presso l'Istituto di Geologia dell'Università di Perugia diretto da Paolo Principi, quindi era passato nei ranghi dell'Ufficio Geologico e qui aveva compiuto la maggior parte della sua carriera scientifica. I suoi lavori di rilevamento riguardano sopratutto l'Appennino umbro/marchigiano e l'Appennino lucano e a Lui si deve la bibliografia geologica della Lucania (in collaborazione con B. Radina). È autore di numerose « tavolette » accompagnate dalle relative « note illustrative ».

Scarsella lasciò poi l'Ufficio Geologico per la carriera universitaria alla quale gli davano pieno diritto la mole del lavoro compiuto e i risultati conseguiti e divenne professore di Geologia nell'Università di Bari. Di qui, per la sua non comune competenza nella geologia dell'Appennino meridionale, fu chiamato a Napoli nel 1959 come il più degno successore di Geremia D'Erasmo. La sua opera, quale direttore dell'Istituto di Geologia dell'Università di Napoli, fu quanto mai efficace. Lo sviluppo preso dal corso di laurea in Scienze Geologiche imponeva che la struttura del glorioso istituto si adeguasse alle nuove necessità e che in conseguenza fosse dato grande impulso al rilevamento e, subordinatamente, anche allo studio dei problemi di geologia applicata. La paleontologia invece — in cui D'Erasmo era eccelso e Scarsella, da buon naturalista, era competentissimo — di-

ventava una branca autonoma con cattedre e cattedratici suoi propri. L'efficacia dell'azione di Scarsella come maestro è documentata dal fatto che vari suoi allievi, alcuni dei quali peraltro erano stati già iniziati agli studi geologici da G. D'Erasmo e da A. Lazzari, hanno raggiunto la cattedra universitaria e tra questi il nostro consocio D'Argenio, cosicché si può a buon diritto parlare di una scuola geologica napoletana, la quale ha molto contribuito e contribuisce allo studio dell'Appennino secondo le più recenti vedute.

E a questo proposito ricordo che Scarsella, pur mantenendosi sempre aggiornatissimo e aperto ad ogni nuova concezione, preferiva però — da quell'autentico ligure che era — contribuire allo sviluppo della scienza fornendo documenti concreti, piuttosto che elaborando nuove ed ardite teorie ed è su questo principio che appunto si è sviluppata la sua attività di ricerca.

Diciamo perciò che Francesco Scarsella ha non solo illustrato la geologia italiana e in particolare ha molto contribuito allo studio della geologia dell'Appennino, ma ha pure onorato la cattedra e, di riflesso, la nostra Accademia di cui, per molti anni, è stato socio solerte e attivo.

ANTONIO SCHERILLO

Breve Storia e Prospettive Future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli

Nota del socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 7 gennaio 1977)

RIASSUNTO. — Breve storia dell'organizzazione degli studi di matematica a Napoli negli ultimi due secoli. Prospettive per il futuro.

SUMMARY. — Brief history of the organization of the mathematical studies in Naples during the last two centuries. Prospects for the future.

A oltre trent'anni dalla fondazione dell'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli il ricordo di quei tempi si va facendo sempre più nebuloso e coloro che non li hanno vissuti hanno solo una vaga idea delle circostanze in cui nacque e si sviluppò la vita dell'Istituto attuale. Mi è sembrato perciò opportuno di metter giù una breve nota sull'argomento basata più che altro sui miei ricordi personali, premettendo qualche notizia sugli antefatti e cioè sulla storia delle istituzioni matematiche a Napoli nel periodo precedente a partire all'incirca da due secoli fa. Per questa premessa non potevo però basarmi sui ricordi personali se non per il periodo posteriore al 1927, anno della mia immatricolazione come studente, dovendo per gli anni precedenti rifarmi alla documentazione esistente. Non essendo uno storico di professione non avevo nè la voglia nè soprattutto la capacità di compulsare gli archivi, per cui mi sono limitato all'esame delle fonti più facilmente consultabili e cioè, in primo luogo, gli Annuari dell'Università di Napoli e poi alcune memorie sull'argomento, riguardanti più che altro l'800. Pertanto il resoconto che ho potuto mettere insieme sul passato più remoto è alquanto sommario e certamente non privo di imprecisioni. Esso è comunque assai più lungo di quanto mi ero proposto e dovrebbe essere sufficiente a dare un'idea del quadro in cui è sorto nel 1944 l'attuale Istituto di Matematica.

Si tenga anche presente che questo mio scritto non è una storia critica dei risultati scientifici ottenuti dalla scuola matematica napoletana. Esso è soltanto, per usare una parola ottocentesca, una storia degli « stabilimenti » attraverso i quali questa scuola ha operato e degli uomini che le hanno dato vita [1].

Nell'esaminare poi le prospettive future della vita dell'Istituto mi sono lasciato andare a qualche considerazione generale sui problemi attuali dell'Università.

1. - LE ORIGINI. — Entrando in argomento ricordiamo che l'interesse per la matematica era già vivo a Napoli nella seconda metà del settecento ma che solo per opera di Nicolò Fergola ha inizio un'attività costruttiva che prende il suo posto nella storia della matematica. Prima di lui si ricordano solo i nomi di alcuni insegnanti i cui contributi scientifici furono estremamente modesti.

N. Fergola, nato a Napoli nel 1753, fu un uomo piuttosto singolare: incline alla vita ascetica, fu strettamente vegetariano e divise il suo tempo fra lo studio della matematica e le pratiche religiose. Non entrava nei musei perché la vista dei nudi marmorei lo turbava e viveva piuttosto isolato per non correre il rischio di udire un linguaggio men che corretto.

Come matematico fu in sostanza un autodidatta e ciò spiega il suo grande interesse più per i maestri dell'antichità che per gli indirizzi moderni che ai suoi tempi fiorivano soprattutto in Francia. Ai metodi analitici preferiva di gran lunga quelli sintetici e i problemi che lo appassionavano erano per esempio del tipo:

1) Costruire una circonferenza tangente ad altre tre.

2) Costruire un quadrilatero inscritto in una circonferenza i cui lati prolungati passino per quattro punti assegnati,

e altri sulle sezioni coniche che traevano la loro origine dalle opere di Apollonio e di Pappo.

[1] Varie notizie biografiche su questi uomini si possono trovare nella memoria [10] di F. G. TRICOMI, nella quale sono riportate anche le indicazioni relative alle commemorazioni e ai necrologi di ciascuno. Questa memoria si riferisce ai matematici che hanno insegnato dopo il 1860 e che sono morti entro il 1960. Per il periodo precedente vedi la monografia [3] di F. AMODEO. Per i seguenti matematici non inclusi in [10] diamo a fianco di ciascuno l'indicazione della rivista dove si possono trovare notizie biografiche o, in mancanza, alcuni dati anagrafici. ANTONIO SIGNORINI [Rend. Acc. Naz. Lincei, 36 (1964) 729-739 e Atti Acc. Sc., Torino, 98 (1963/64) 1252-1260]. VITTORIO NOBILE [Celebrazioni Lincee n. 37 (1970) e Atti Acc. Pontaniana, 17 (1967/68) 501-507]. SALVATORE CHERUBINO [Boll. U.M.I. s. IV v. 5 (1971) e La Ricerca, 23 (1972)]. GIULIO ANDREOLI, nato a Napoli il 1°-1-1892, laureato nel 1915, professore di ruolo a Catania dal 1925 al 1932 e a Napoli dal 1932 al 1967, morto il 12-7-1969. ANTONIO COLUCCI, nato a Napoli il 18-8-1896, laureato nel 1922, professore di ruolo all'Accademia Aeronautica dal 1942, morto il 14-7-1966. NICOLÒ SPAMPINATO, nato ad Adrano il 28-3-1892, laureato a Catania nel 1919, professore di ruolo a Catania dal 1928 al 1938 e a Napoli dal 1938 al 1967, morto il il 22-8-1971.

Cercava però di trattare questi problemi sulla base di pochi principi fondamentali, da lui detti porismi, facendo così acquistare alla geometria che lo interessava una relativa generalità.

Nel 1771 aprì uno studio privato che ebbe un grande successo e simultaneamente fu chiamato a insegnare filosofia nel Liceo del Salvatore dove spiegava i Principi matematici della filosofia naturale di I. Newton. Nel 1789 passò, nello stesso Liceo, alla cattedra di Matematica analitica e Fisica matematica. Nel 1800 fu poi chiamato a insegnare Analisi sublime e Arte auristica all'Università ma nel 1801 si ritirò per riprendere l'insegnamento nel 1806 e lasciarlo nuovamente nel 1812. Morì nel 1822. Assolutamente disinteressato e schivo di ogni distinzione onorifica passò incolume fra i rivolgimenti di quegli anni, onorato indistintamente da giacobini e reazionari, napoleonici e borbonici.

Sulla sua opera scientifica sono stati dati i giudizi più disparati, dall'esaltazione al dispregio, per i quali rimandiamo agli scritti di G. Loria [5, 6], E. Pascal [7], F. Amodeo [3]. Trascorsi altri cinquanta anni da queste polemiche si può oggi dire che tutti quei giudizi contengono una parte di verità.

N. Fergola fu indubbiamente un uomo di singolare ingegno, ma la scelta della sua problematica fu alquanto infelice e arretrata rispetto ai tempi. Essa però appare ben naturale in un autodidatta vissuto in un ambiente permeato di spirito classico e nel quale le ricerche scientifiche suscitavano un interesse, peraltro dilettantesco, soltanto in alcuni salotti aristocratici.

Inoltre tale scelta era la sola che poteva far breccia in quell'ambiente e aprire agli studi di matematica uno spazio più ampio nella vita culturale napoletana.

In tempi normali sarebbe stato compito dei suoi allievi di dare uno sviluppo più moderno alle loro ricerche, ma i tempi non erano maturi. Dopo la riforma universitaria di Carlo III del 1735 e quella di Ferdinando IV del 1777 altre ne seguirono ad ogni cambiamento di regime e, dopo quelle illuminate del periodo napoleonico, quella del 1821 fu particolarmente retriva, per cui ogni spirito di innovazione poteva dar luogo a sospetto di sovversivismo. L'atmosfera era dunque tale che la tentazione di curare più il proprio particolare che il progresso della scienza era particolarmente forte. E, come sempre avviene in circostanze del genere, alcuni credevano in buona fede di compiere il proprio dovere restando fedeli a indirizzi ormai superati.

D'altra parte gli allievi del Fergola, dei quali i più noti furono Annibale Giordano, Felice Giannattasio, Giuseppe Scorza, Vincenzo

Flauti e Francesco Bruno [2], erano uomini non privi di ingegno ma intellettualmente, e alcuni anche moralmente, di statura assai inferiore a quella del maestro, per cui non è da meravigliarsi se la scuola del Fergola, dopo un breve periodo di fulgore, decadde e finì per perdere qualsiasi importanza scientifica, pur restando però per lunghi anni un gruppo di potere.

Comunque la situazione a Napoli per quanto riguarda l'insegnamento della Matematica fino al 1860 era la seguente:

Le cattedre di matematica, che erano state due con la riforma del 1735 (Geometria e « Astronomia e Nautica »), costituiscono una Facoltà autonoma solo nel 1777 con la riforma di Ferdinando IV. Tale Facoltà disponeva delle quattro cattedre di Matematica analitica, Matematica sintetica, Meccanica e « Astronomia e Calendario » e di altre due denominate « Geografia e Nautica » e « Architettura civile e Geometria pratica ». Con la riforma di Giuseppe Bonaparte del 1806 le cattedre divennero sei: Matematica semplice, Matematica trascendentale, Geometria analitica e descrittiva, Meccanica, Astronomia, « Logica e Metafisica ». Con la riforma di Murat del 1811 fu costituita una Facoltà di Matematica e Fisica su undici cattedre di cui solo quattro (Matematica analitica, Matematica sintetica, Meccanica e Astronomia) per la Matematica e le altre sette di indirizzo naturalistico.

Col ritorno dei Borboni nel 1816 fu conservata la Facoltà di Matematica e Fisica, ma il numero delle cattedre di matematica salì a sei: Geometria piana e solida, Analisi elementare, Matematica sublime sintetica, Analisi sublime, Meccanica, Astronomia. Questo ordinamento rimase inalterato fino al 1850 anno in cui fu ricostituita la Facoltà di Matematica con sette cattedre: Geometria con esposizione dei metodi antichi e moderni, Algebra, Calcolo infinitesimale, Applicazione dell'algebra alla Geometria, Meccanica razionale, « Meccanica applicata e Geometria descrittiva », « Astronomia, Geodesia e Geografia matematica ».

Malgrado le successive riforme il livello dell'insegnamento andò però sempre più declinando per l'eccessivo attaccamento ai vecchi metodi e per lo spietato controllo a cui erano sottoposti gli studenti, indotti perciò a disertare le aule. Qualche spunto di maggiore modernità si aveva invece negli altri Istituti di livello universitario in cui si impartivano insegnamenti di matematica e cioè il Collegio Militare della Nunziatella e il Collegio di Marina, con sede a S. Lucia, che nel 1821 avevano preso il posto delle preesistenti R. Acca-

[2] Vedi [3], [5], [6], [7].

demia Militare e R. Accademia di Marina [3] e la Scuola di Applicazioni di Ponti e Strade con sede a Palazzo Gravina.

Dove però l'insegnamento matematico era vivo, operoso e improntato ai progressi più moderni era nei numerosi Studi privati fra i quali famosi quello di Francesco Paolo Tucci e Salvatore de Angelis e l'altro di Achille Sannia [4]. Si noti che in quell'epoca anche i professori dell'Università potevano tenere scuole private purché per insegnamenti diversi da quelli dei corsi pubblici e che di ciò molti approfittavano largamente.

2. - LA FACOLTÀ DI MATEMATICA DAL 1860 AL 1923. — Dopo l'unità d'Italia il Collegio di Marina fu soppresso e il Collegio Militare fu ridotto al rango di Istituto secondario. La Scuola di Applicazioni di Ponti e Strade, trasformata nel 1863 in Scuola di Applicazione per gli Ingegneri e poi nel 1904 in Scuola Superiore Politecnica, cessò nel 1871 di avere un proprio biennio propedeutico [5]. Quanto alla Facoltà di Matematica essa fu ristrutturata su undici cattedre [6] di cui diamo qui appresso l'elenco con l'indicazione dei professori che le ricoprirono:

Algebra complementare

Raffaele Rubini 1861/1886 con la supplenza di Vincenzo Ianni dal 1876
Alfredo Capelli 1886/1910
Ernesto Pascal 1910/1935

Calcolo differenziale e integrale

Nicola Trudi 1860/1884
Giuseppe Battaglini 1885/1890
Ernesto Cesaro 1890/1906
Gabriele Torelli 1907/1924

[3] Vedi [3] vol. I pp. 168-176.
[4] Vedi [3] vol. II pp. 136-150.
[5] Nel 1863 la Scuola si trasferì nel Convento di Donna Romita che, opportunamente trasformato, l'ospitò fino al 1967. Vedi [9] pp. 625-626.
[6] Per le notizie relative alla costituzione iniziale della Facoltà vedi [2], per le notizie successive [1].

Analisi Superiore

Emanuele Fergola 1860/1889
Giuseppe Battaglini 1890/1891
Ernesto Pascal 1907/1910

Astronomia

Annibale De Gasparis 1860/1889
Emanuele Fergola 1889/1909

Geodesia

Federico Schiavoni 1860/1891
Arminio Nobile 1891/1897
Giovanni De Berardinis 1898/1921

Meccanica Celeste (fino al 1876) poi *Geometria Proiettiva*

Remigio Del Grosso 1860/1876 (*Meccanica applicata fino al 1863*)
Achille Sannia 1876/1892
Domenico Montesano 1893/1912
Pasquale Del Pezzo 1912/1933

Geometria Analitica

Antonio Cua 1860/1890
Nicola Salvatore-Dino 1890/1919
Gaetano Scorza 1921/1934

Geometria Descrittiva

Ambrogio Mendia 1860/1888
Nicola Salvatore-Dino 1888/1890
Antonio Cua 1890/1899
Alfonso Del Re 1899/1921

Geometria Superiore

Giuseppe Battaglini 1860/1872
Ettore Caporali 1878/1886
Pasquale Del Pezzo 1886/1912
Domenico Montesano 1912/1930

Meccanica Razionale

Fortunato Padula 1860/1881 (*Meccanica Superiore dal 1879 al 1881*)
Dino Padeletti 1879/1892
Francesco Siacci 1892/1907
Roberto Marcolongo 1908/1935

Fisica Matematica

Michele Zanotti 1860/1874
Luigi Pinto 1884/1920
Antonio Signorini 1922/1935

Al posto di Signorini era stato precedentemente chiamato Orazio Tedone che però nel venire a Napoli fu travolto da un treno a Pisa.

La Facoltà disponeva inoltre di alcuni posti di professore straordinario, due dei quali erano destinati al Disegno Topografico e al Disegno d'Architettura. Essi furono tenuti da Luigi Raucci e Oscar Capocci. A quest'ultimo che fu promosso ordinario nel 1885 per meritata fama di singolare perizia (art. 69 della legge Casati) successe nel 1905 Leonardo Paterna Baldizzi, mentre l'insegnamento di Disegno Topografico fu poi trasformato in Disegno d'Ornato e affidato ad Arturo Tricomi padre del matematico F. G. Tricomi. Sia il Paterna Baldizzi che il Tricomi passarono poi ordinari.

Anche alcuni professori di matematica iniziarono la carriera come straordinari. Così il Sannia che in tale posizione insegnò Disegno di Geometia Descrittiva dal 1869 al 1875 e poi ancora Salvatore-Dino (1886/1888), Caporali (1878/1884), Padelletti (1879/84), Del Pezzo (1886/1890) e altri. Si tenga presente che nei primi anni si poteva essere nominati professore ordinario con decreto reale direttamente per concorso, mentre la nomina a professore straordinario aveva luogo con decreto ministeriale e poteva avvenire anche senza concorso « per compiere qualche parte degli insegnamenti generali o qualche insegnamento di perfezionamento speciale ». I professori straordinari cessavano dall'Ufficio col finire dei corsi loro affidati e non erano considerati come membri del « Corpo Universitario ». Fu solo con i R.D. del 13-5-1875 e 23-5-1875 che anche per i professori straordinari fu sancito l'obbligo del concorso e fu prevista la possibilità della promozione a ordinari (obbligo e possibilità soppressi col R.D. 4-12-1898 n. 548 e ripristinati col R.D. 12-7-1900 n. 273). Tale promozione non era comunque automatica in caso di idoneità ed era anzi subordinata alla disponibilità di posti di ruolo vacanti di professore ordinario. Restava comunque la possibilità di bandire concorsi sia per posti di ordinario che di straordinario. Col Rego-

lamento Generale Universitario dell'8-10-1876 essi entrarono a far parte dei Consigli di Facoltà e con quello del 21-8-1905 furono poi stabilite le norme per ottenere con decreto reale la stabilità nel grado, ferme restando però le limitazioni per la promozione a ordinario, che furono abolite solo dopo la prima guerra mondiale col Regolamento Generale Universitario approvato con R.D. 6-4-1924 n. 674, che instaurò la normativa attualmente vigente. Per alcuni anni (dal 1923/24 al 1930/31) alla dizione « professori ordinari e straordinari » si sostituì quella di « professori stabili e non stabili ».

L'ordine degli studi era il seguente. Al primo biennio, che comprendeva gli insegnamenti di Algebra, Calcolo, Geometria proiettiva, Geometria analitica, Geometria descrittiva, Fisica sperimentale (biennale a partire dal 1906/7) e Chimica, potevano iscriversi sia gli studenti dotati di licenza liceale sia (fino al 1923/24) quelli provenienti dall'Istituto Tecnico, sezione fisico-matematica. Il biennio si concludeva con una licenza di Matematica e Fisica che era titolo per l'ammissione al secondo biennio del corso per la Laurea in Matematica e, salvo l'obbligo di alcuni esami complementari, anche per il proseguimento degli studi per le Lauree in Chimica, Fisica e Scienze Naturali. Per conseguire la laurea però era necessario essere in possesso della licenza liceale oppure aver sostenuto presso l'Università degli esami di letteratura italiana e latina, che furono aboliti solo col Regolamento del 17-5-1905 (R.D. n. 409). La licenza di Matematica e Fisica dava anche adito, insieme con un certificato di diligenza ai corsi di Mineralogia, Geologia e Disegno, alla iscrizione al triennio della Scuola di Applicazione per gli Ingegneri.

Per alcuni anni (fino al 1894) la licenza fu anche titolo per l'ammissione agli esami di abilitazione all'insegnamento della matematica negli Istituti secondari e, successivamente, per ottenere dal Ministero della P. I. un certificato di abilitazione. Il rilascio di tali certificati fu abolito con l'art. 2 della Legge 8-4-1906, n. 141. Col Regolamento approvato in data 9-8-1910 (R.D. n. 808) la licenza fu abolita fermo restando però l'obbligo di un esame per l'ammissione al triennio della Scuola di Applicazione per gli Ingegneri.

Nel secondo biennio bisognava sostenere l'esame di Meccanica Razionale e altri quattro scelti fra Astronomia, Geodesia, Fisica Matematica, Analisi Superiore, Geometria Superiore, ecc.

Vediamo ora quale fosse il carico didattico per i professori della Facoltà. La media degli immatricolati al primo anno fra il 1886 e il 1914, anni per i quali si possono facilmente consultare le statistiche, è di 16 per la Matematica, 3 per la Fisica, 127 per l'Ingegneria, l'ultima cifra però con delle punte minime di 60/65 a cavallo del 1900 e un rialzo fino a 245 nel 1913. Il numero medio dei

licenziati dopo il primo biennio, anche questo con forti oscillazioni, è di 67 per anno, il numero dei laureati di 5 per anno.

Di fronte a queste cifre può sembrare che il numero di 11 professori fosse sufficiente. Si tenga presente però che in quel periodo il numero dei professori incaricati era limitatissimo e non superò mai le 4 unità e che solo col Regolamento Speciale dell'8 Ottobre 1876 fu prevista la possibilità di nominare qualche assistente per insegnamenti di tipo non sperimentale. Di fatto, se si prescinde dalla Geodesia che, come materia considerata sperimentale, fu sin dall'inizio privilegiata, i primi assistenti e poi coadiutori furono nominati dopo il 1880, dando la precedenza ai corsi di Geometria Proiettiva e Geometria Descrittiva. Il primo coadiutore per l'Algebra e il Calcolo fu nominato nel 1886 nella persona di Gabriele Torelli e solo da quell'epoca nell'orario delle lezioni figurarono gli Esercizi di Algebra e Calcolo.

Questa situazione doveva avere per conseguenza un forte impegno dei professori e se ne ha un sintomo nel fatto che l'orario prevedeva delle lezioni che duravano da un minimo di un'ora e mezza fino a due o tre ore. Il numero degli assistenti che nel 1883 era ancora di 3 salì fino a un massimo di 7 nel 1907.

E per valutare meglio l'opera dei docenti si aggiunga che, a partire dal 1878, in applicazione del Regolamento Speciale dell'8 Ottobre 1876, funzionò presso la Facoltà una Sezione della Scuola di Magistero che aveva lo scopo di svolgere « esercitazioni speciali dirette a rendere gli studenti non solo atti alla ricerca ed alla esposizione originale delle dottrine scientifiche, ma anche esperti dei metodi e dei limiti dell'insegnamento ». Queste esercitazioni, che più tardi col R.D. 29-11-1891 furono sostituite da conferenze rivolte esclusivamente alla preparazione all'insegnamento, erano anch'esse tenute dai professori della Facoltà ed erano integrate a partire dal 1904 da conferenze di pedagogia comuni a tutte le sezioni letterarie e scientifiche della Scuola (art. 15 del R.D. 6-12-1903, n. 549). La Scuola rilasciava, dopo la laurea, a coloro che l'avevano frequentata per due anni, un diploma che era titolo preferenziale, a parità di altre condizioni, nei concorsi a cattedre negli Istituti secondari.

Quanto abbiamo detto dà una chiara idea dell'opera richiesta ai membri della Facoltà. Ma chi erano questi uomini?

Quelli nominati nel 1860/61 provenivano in parte dalla preesistente Facoltà di Matematica (Cua, De Gasparis, Mendia, Trudi, Zannotti), altri dai Collegi Militare e di Marina (Del Grosso, E. Fergola [7],

[7] E. Fergola discendeva da un cugino di N. Fergola. Furono anche nipoti di N. Fergola l'astronomo Gabriele Fergola e il geodeta Francesco Fergola vissuti nel periodo borbonico.

Padula, Rubini) o dall'Ufficio Topografico (Schiavoni). Il Battaglini proveniva invece dall'insegnamento privato, ma tre anni prima era risultato ingiustamente soccombente in un concorso vinto dal Cua. In queste nomine non mancarono considerazioni politiche, ma le persone di indiscussa competenza e probità come il Trudi e il De Gasparis furono conservate al loro posto anche se di tendenze filoborboniche.

Questi uomini erano certamente quanto di meglio fosse disponibile a Napoli in quegli anni anche se essi, fatta eccezione per il Battaglini, non erano della stessa statura di altri celebri matematici che in quel tempo insegnavano in altre sedi, quali ad esempio Beltrami, Betti, Brioschi, Casorati, Cremona, Dini. Essi svolsero però un ottimo lavoro riuscendo a sprovincializzare la matematica napoletana portandola allo stesso livello delle sedi più importanti. Per dare un'idea dei risultati raggiunti si tenga presente che fra il 1863 e il 1887 si laurearono a Napoli oltre a Gabriele Torelli, Giovanni De Berardinis, Pasquale Del Pezzo, Alfonso Del Re ed Ernesto Pascal che raggiunsero la cattedra nello stesso Ateneo, anche Rubino Nicodemi e Udalrigo Masoni che furono professori della Scuola di Applicazione per gli Ingegneri. A questi vanno aggiunti anche i nomi di Angelo Armenante (Roma), Vincenzo Mollame (Catania), Nicodemo Jadanza (Torino), Giuseppe Jung (Milano Politecnico) Salvatore Ortu Carboni (Genova Scuola Superiore di Commercio) e Giulio Pittarelli (Roma) che furono professori di ruolo nelle sedi a fianco indicate. Di scuola napoletana fu anche Enrico d'Ovidio (Torino) allievo dello studio privato del Sannia a cui la Facoltà conferì la laurea senza esami nel 1869.

In tutto 14 cattedratici su circa 100 laureati di quegli anni. Molti altri acquistarono poi rinomanza come Presidi di Istituti secondari o come Liberi Docenti (vedi [8]). Fra questi ci piace di ricordare il nome di Federico Amodeo che fu un distinto cultore di Storia delle Matematiche.

Fu anche in questo periodo che iniziò la pubblicazione del « Giornale di Matematiche per gli studenti delle Università italiane », fondato nel 1863 dal Battaglini. Nei primi volumi esso era davvero concepito come una palestra per gli studenti. Conteneva numerosi problemi proposti e risolti, discussioni, relazioni di corsi universitari, rassegne bibliografiche e critiche, sunti di lezioni ecc. Fu solo quindici o venti anni dopo che la pubblicazione di note e memorie originali cominciò a prevalere e il giornale assunse questo nuovo carattere definitivamente nel 1894 quando col vol. 32 il Capelli ne assunse la direzione, dando il via a una nuova serie col titolo di « Giornale di Matematiche di Battaglini ».

In questo stesso periodo l'insegnamento ufficiale era fiancheggiato da quello pareggiato tenuto da un folto stuolo di liberi docenti (15 nel 1884). Ma l'insegnamento privato andò man mano declinando per effetto dei controlli sulla iscrizione ai corsi e sulla corresponsione dei compensi imposti dalla nuova legislazione [8].

Fino al 1886 il carattere della Facoltà rimase quasi inalterato, salvo il provvisorio trasferimento a Roma del Battaglini (1871/1885), sostituito assai degnamente da Ettore Caporali, e la chiamata di Padelletti al posto di Padula. Col 1886 comincia però una profonda trasformazione della Facoltà della quale i fatti più salenti furono le chiamate di Alfredo Capelli (1886), Pasquale Del Pezzo (1886), Ernesto Cesaro (1890), Francesco Siacci (1892). Erano questi degli uomini di eccezionale valore, per cui la Facoltà divenne un fulgido centro di sapere. Il Capelli era soprattutto un algebrista, il Del Pezzo un geometra acuto e penetrante, il Cesaro era famoso per le sue ricerche di aritmetica asintotica e di geometria intrinseca, il Siacci era un profondo cultore di balistica e di meccanica analitica. Paradossalmente però costoro brillarono più di luce propria che come maestri, tanto che il fenomeno del proselitismo scientifico si ridusse di molto. Infatti fra i laureati del periodo che va dal 1890 al 1910 si possono ricordare solo i nomi di Vittorio Nobile, figlio di Arminio a sua volta figlio di Antonio che diresse fino al 1863 l'Osservatorio di Capodimonte, di Gustavo Sannia figlio di Achille, di Salvatore Cherubino, che raggiunsero la cattedra universitaria e quello di Generoso Gallucci valoroso insegnante di liceo e libero docente di geometria, assai noto per la sua profonda cultura filosofica.

Che qualcosa non andasse per il verso giusto fu avvertito, credo, anche allora perché Capelli promosse fra il 1905 e il 1906 l'istituzione di un Seminario Matematico avente lo scopo di avviare i giovani alla ricerca attraverso lezioni complementari, conferenze ecc. Il seminario, approvato con R.D. 19-7-1906 era già funzionante nel 1908/9 e di esso Capelli fu il primo direttore. Tenne però la direzione per poco più di un anno perché morì nel Gennaio del 1910. A lui erano premorti nel 1906 Cesaro, annegato in mare nel vano tentativo di salvare il figlio in pericolo, e nel 1907 il Siacci, per cui si può datare dalla morte di Capelli l'inizio di una nuova fase della vita della Facoltà, nella quale le figure predominanti furono E. Pascal, G. Torelli, R. Marcolongo e D. Montesano. Costoro, anche se non erano della statura dei loro predecessori, furono pur sempre dei matematici eminenti, che cercarono di realizzare con grande entusiasmo i progetti di Capelli, approfittando anche del fatto che il

[8] Vedi in proposito [3] II pp. 323-325.

trasferimento del Rettorato alla nuova sede in Corso Umberto I aveva reso disponibili molti locali al secondo piano del vecchio edificio universitario. Così fu inaugurata nel 1910 una sala di studio per il Seminario Matematico intitolata a Battaglini e si costituì una Biblioteca per il Seminario con le donazioni degli eredi di Siacci, Sannia e Capelli [9]. Inoltre ogni cattedra fu dotata nel 1912 di un proprio Gabinetto con una sala di studio per il direttore e gli assistenti e una biblioteca specializzata [10].

Tutto ciò costituiva un passo avanti notevole nell'organizzazione degli studi di matematica perché fino ad allora la Facoltà non aveva mai disposto di locali propri e il materiale librario utilizzabile era solo quello della Biblioteca Universitaria [11].

Il Pascal nel 1910 assunse anche, col vol. 48, la direzione della terza serie del Giornale di Matematiche di Battaglini.

Purtroppo questo fervore di rinnovamento non produsse grandi frutti perché ogni iniziativa venne troncata sul nascere dallo scoppio della guerra europea. Ricorderemo tuttavia che fra il 1910 e il 1922 si laurearono Giulio Andreoli e Francesco Tricomi, che raggiunsero la cattedra nel 1925, e Mario Pascal e Antonio Colucci che divennero professori di ruolo dell'Accademia Aeronautica. A un altro figlio del Pascal, Alberto, morto in guerra e che già da studente aveva svolto notevole attività nel campo della Storia delle Matematiche, fu conferita, dopo la guerra, la laurea alla memoria.

3. La Matematica in Facoltà di Scienze dal 1923 al 1943. — Benché la legge Casati prevedesse fin dal 1859 l'esistenza di un'unica Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, a Napoli la Facoltà di Scienze Matematiche rimase a lungo separata da quella di Scienze Naturali, che comprendeva anche la Fisica. Ciò perché la Legge Imbriani del 16-2-1861 aveva confermato la situazione creata dalla Legge borbonica del 6-3-1850. Fu solo con l'anno accademico 1923/24 che si pose fine a questa situazione anomala costituendo anche a Napoli la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. A quel momento le 11 cattedre di insegnamenti matematici si si erano ridotte a 9 perché due posti di ruolo erano stati utilizzati per la promozione a ordinari dei professori di disegno. Anche il De

[9] Vedi [1] 1914/15 pp. 108-109. Per il regolamento del Seminario vedi [1] 1912/13 p. 119.

[10] Vedi [4] p. 116.

[11] Per l'epoca tale materiale era peraltro abbastanza consistente. Nel 1907 la Biblioteca Universitaria disponeva di 35 periodici italiani e stranieri come risulta da [1]. Questo materiale è tuttora disponibile presso detta Biblioteca, ma le collezioni sono interrotte da molti anni.

Berardinis collocato a riposo nel 1921 non fu sostituito e quindi la Matematica entrò a far parte della nuova Facoltà con soli 8 posti di ruolo, che nel ventennio successivo furono così utilizzati:

Algebra Complementare - Analisi algebrica

Ernesto Pascal 1910/1935
Gabriele Mammana 1936/1942

Calcolo infinitesimale - Analisi infinitesimale

Gabriele Torelli 1907/1924
Mauro Picone 1925/1932
Giulio Andreoli 1932/1943

Geometria proiettiva - Teoria dei Gruppi (1934/36) - Analisi Superiore (1936/43)

Pasquale Del Pezzo 1912/1933
Renato Caccioppoli 1934/43

Geometria Analitica (e Proiettiva dal 1938/39)

Gaetano Scorza 1921/1934
Nicolò Spampinato 1938/1961

Geometria Descrittiva

Gustavo Sannia 1924/1930

Geometria Superiore - Astronomia (dal 1935)

Domenico Montesano 1893/1930
Vittorio Nobile 1935/1950 [12]

[12] Il Prof. Nobile fu nominato nel 1935, ma era già stato ternato dieci anni prima senza poter essere nominato. Nel 1931 la Facoltà ne aveva richiesto la nomina senza concorso per alta fama di singolare perizia (vedi l'art. 81 del T.U. delle Leggi sull'Istruzione Superiore approvato con R.D. 31-8-1933 n. 1592). La proposta non ebbe seguito ma il Ministero dispose il comando presso la Facoltà del Prof. Nobile allora insegnante nell'Istituto Tecnico Industriale.

Meccanica Razionale

Roberto Marcolongo 1908/1935
Antonio Signorini 1935/1938
Giandomenico Mattioli 1939/1946

Fisica Matematica

Antonio Signorini 1922/1935
Umberto Crudeli 1936/1944

Nello stesso torno di tempo il numero dei professori incaricati oscillò fra 6 e 8 e il numero degli assistenti fu di 7.

Il carico didattico fu un po' maggiore di quello del periodo precedente perché alla laurea in Matematica si aggiunse a partire dal 1923/24 quella in Matematica e Fisica nel cui ordine degli studi figuravano al 3° e 4° anno gli esami di Analisi Superiore, Matematiche complementari, Fisica teorica e Fisica Superiore, oltre a tre esami complementari e nel primo biennio due esami di Esercizi di Fisica. La laurea in Matematica che divenne nel 1935/36 Laurea in Scienze Matematiche, e i primi laureati con questo titolo si ebbero nel 1938/39, conservò fin verso la fine di questo periodo un ordine degli studi di poco modificato dall'istituzione dei due nuovi corsi di Introduzione all'Analisi Superiore e Introduzione alla Geometria Superiore, ciò che col simultaneo trasferimento della Meccanica Razionale dal secondo al primo biennio portava a sei il numero degli insegnamenti del 3° e 4° anno.

Si dové anche provvedere al corso di Matematica per Chimici e Naturalisti che, introdotto dal Regolamento Universitario Speciale approvato con R.D. 17-5-1906 n. 109 col nome di Corso Speciale di Matematica e modificato nel titolo dal Regolamento successivo approvato con R.D. 9-8-1910 n. 808, era stato fino allora di pertinenza della Facoltà di Scienze Naturali. Nel 1936/37 tale insegnamento prese il nome di Istituzioni di Matematiche e con R.D. 24-10-1941 n. 1375 divenne biennale per i corsi di laurea in Chimica e Chimica Industriale e fu affiancato per gli stessi corsi di laurea dall'insegnamento biennale di Esercitazioni di Matematiche.

Il Biennio Propedeutico d'Ingegneria restò di pertinenza della Facoltà di Scienze anche quando, per effetto della Legge 13-6-1935 n. 1100, la Scuola Superiore Politecnica fu assorbita dall'Università col nome di Facoltà di Ingegneria.

Successivamente furono arrecate altre modifiche all'ordinamento degli studi con i RR.DD. 28-11-1935 n. 2044, 7-5-1936 n. 882 e 30-9-1938

n. 1652. Fra l'altro, oltre alle modifiche del corso di Matematica per Chimici e Naturalisti di cui si è già detto, vi è da segnalare l'abolizione dei corsi di Introduzione all'Analisi Superiore e alla Geometria Superiore e dell'esame di licenza al termine del Biennio Propedeutico d'Ingegneria.

Il numero complessivo degli immatricolati nei due corsi di laurea era in media di una diecina all'anno. Assai più elevato invece, per il riflusso di una parte degli allievi ingegneri, il numero dei laureati che andò aumentando fino a 30/40. Il numero degli immatricolati in Ingegneria che fu di circa 180 fino al 1930 e andò poi man mano aumentando.

Soppressa la Scuola di Magistero, anche il Seminario Matematico cessò praticamente ogni attività, ma, ciò malgrado, gli studi di matematica ebbero nella prima metà di questo periodo un momento di grande fulgore dovuto alla presenza simultanea di tre maestri di eccezionale valore quali furono Gaetano Scorza, Antonio Signorini e Mauro Picone.

Gaetano Scorza e Antonio Signorini portarono nell'insegnamento una ventata di novità e di modernismo sorretta da un'esposizione assai chiara e stilisticamente perfetta. Il primo, che ebbe per allievi Nicolò Spampinato a Catania e Salvatore Cherubino a Napoli, era soprattutto un algebrista. Famoso il suo libro « Corpi numerici e Algebre ». Il secondo si era interessato di vari rami della meccanica ma nel periodo della sua permanenza a Napoli si occupò dapprima di problemi di Scienza delle Costruzioni, per dare poi inizio alle sue fondamentali ricerche sulle deformazioni elastiche finite. Ebbe anche lui molti allievi, ma dopo il suo trasferimento a Roma. Fra questi Carlo Tolotti che a distanza di anni gli successe sulla cattedra di Meccanica Razionale a Napoli.

Mauro Picone fu come gli altri due un grande innovatore nell'insegnamento, dotato di un entusiasmo e di un dinamismo veramente straordinari, che riusciva a trasmettere in chi gli era vicino. In pochi anni egli raccolse intorno a sè un gruppo di giovanissimi: Renato Caccioppoli, Gianfranco Cimmino, Giuseppe Scorza figlio di Gaetano e Carlo Miranda che, insieme con Gabriele Mammana che era stato a Catania il suo primo allievo, costituirono il primo nucleo della sua celebre scuola. Questi giovani, che giunsero alla cattedra in brevissimo tempo fra il 1931 e il 1938, lavorarono soprattutto nel campo delle ricerche sulle equazioni funzionali e il Caccioppoli e lo Scorza anche in quello della teoria delle funzioni. Ad essi si unì anche Antonio Colucci di poco più anziano e il rumeno Demetrio Mangeron, più tardi professore al Politecnico di Iaşi. Centro dell'attività del Picone era l'Istituto di Calcolo per l'Analisi Numerica da lui fondato

nel 1927 con fondi elargiti dal Banco di Napoli e più tardi dal C.N.R., che visse per cinque anni in perfetta simbiosi col Gabinetto di Calcolo infinitesimale. In questo Istituto egli compì le prime esperienze di calcolo numerico, dopo quelle del tempo di guerra, e addestrò un gruppo di valenti calcolatori che nel 1932 lo seguirono a Roma con C. Miranda quando egli si trasferì alla cattedra di Analisi Superiore di quella Università e diede vita presso il C.N.R. all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, assurto quasi subito a grande importanza per la vita matematica italiana.

Dopo la partenza di Picone la situazione andò però gravemente deteriorandosi perché per motivi politici l'atmosfera della Facoltà divenne irrespirabile.

Poco dopo Gaetano Scorza, che oltretutto era stato duramente colpito negli affetti familiari dalla morte della moglie e del figlio minore Dino professore a Bari, preferì trasferirsi a Roma, seguito dopo qualche anno dal Signorini.

Con la morte di Sannia e Montesano e col collocamento a riposo di Del Pezzo, Marcolongo e Pascal, la composizione del gruppo matematico della Facoltà cambiò completamente. Per i motivi accennati l'attività scientifica venne a cessare quasi del tutto. A ciò concorse anche il fatto che uno dei nuovi professori era giunto a Napoli in età avanzata, dopo aver dato il meglio di sè nella prima gioventù, altri furono nominati alla vigilia della guerra e non ebbero neppure il tempo di ambientarsi, un altro infine, il Mammana, si trasferì per tre anni (1939/42) in Brasile e morì poco dopo il suo ritorno. L'unico a svolgere un'attività scientifica di grande rilievo fu il Caccioppoli sia con le sue ricerche personali sulle equazioni ellittiche e l'analisi funzionale sia prestando la sua guida ai giovani che erano stati con lui alla scuola di Picone, per i quali egli divenne, dopo Picone, un secondo maestro. L'attività di Caccioppoli era però in quel periodo avulsa dalla vita dell'Università. Per incontrarsi con lui bisognava recarsi alla sua casa al Viale Calascione 16 o anche altrove, ma difficilmente presso il Gabinetto di Analisi Superiore. Ricordo per esempio che per alcune ricerche sugli ovaloidi, che lui ed io portammo avanti parallelamente fra il 1938 e il 1939, ci incontrammo spesso in una casa di salute in cui egli si era ricoverato, simulando inesistenti disturbi nervosi, per sottrarsi alle persecuzioni politiche e poliziesche. E quella memoria sugli ovaloidi la pubblicò nelle Commentationes Pontificiae Academiae Scientiarum perché non volle aver contatti con la scienza ufficiale di quel tempo.

Segnaliamo ancora che in quel periodo si laurearono Federico Cafiero e Savino Coronato, di cui parleremo nel prossimo paragrafo, e inoltre il filosofo Paolo Filiasi Carcano (Roma Magistero) il mate-

matico Angelo Fadini (Napoli Architettura), l'ingegnere Francesco Mazzarella (Palermo Ingegneria) e l'economista Italo Cutolo (Napoli Istituto Orientale) che divennero più tardi professori di ruolo nella sede per ciascuno a fianco indicata.

Nel 1940 lo scoppio della guerra interruppe ogni ulteriore parvenza di attività scientifica. Quanto all'attività didattica si continuò certamente a far lezione fra un bombardamento e l'altro ma gli esami, come del resto in tutta Italia, divennero una mera formalità.

Anche il Giornale di Battaglini, in concomitanza con la morte di Pascal avvenuta agli inizi del 1940, sospese le pubblicazioni.

4. - L'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze. — Quando, dopo l'occupazione alleata, si volle riprendere l'attività universitaria e cioè all'inizio dell'anni 1943/44 la situazione era disperata. I locali erano stati occupati dalla U.S.A. Military Police e dei professori una metà erano rimasti bloccati oltre la linea del fronte. I presenti a Napoli erano Caccioppoli, Nobile e Miranda (chiamato per le Istituzioni di Matematica poco prima dell'occupazione). Andreoli, pur presente a Napoli, era stato sospeso dall'insegnamento per motivi politici. Per il conferimento di incarichi o supplenze si poteva fare assegnamento sulle libere docenti Maria Del Re e Maria Miglio e, in misura più limitata, su Antonio Colucci e Mario Pascal professori di ruolo all'Accademia Aeronautica. Molti di noi si assunsero l'onere di tenere tre o quattro corsi e le lezioni si tennero con una certa regolarità dall'inizio del 1944 nelle aule dell'Istituto di Fisica Sperimentale rimasto libero dall'occupazione. Il peso delle esercitazioni ricadde interamente su M. Del Re assistente di Geometria, su Don Savino Coronato assistente di Analisi e su Federico Cafiero assistente volontario di Istituzioni di Matematiche. La situazione rimase la stessa, salvo per quanto riguarda i locali, nel 1944/45 e non migliorò di molto al termine della guerra perché Crudeli, che era stato trasferito a Napoli dal Ministero senza sentire il parere della Facoltà, ritornò alla sua antica sede di Messina e Mattioli fu tragicamente assassinato nel Marzo 1946, pochi mesi dopo il suo rientro in sede, da un disertore delle forze alleate.

Quando ai locali, allo sgombero delle truppe alleate, poco dopo la liberazione di Roma, ci si trovò di fronte a una situazione disastrosa perché i mobili dei Gabinetti e della sala Battaglini erano semidistrutti insieme con alcune aule e i libri delle varie biblioteche erano ammucchiati per terra in uno stanzone, allora privo di pavimento, che trent'anni prima era stato l'aula dell'Istituto di Fisica Sperimentale. Distrutti anche gli inventari e gli schedari e quanto avrebbe potuto servire a mettere ordine nel materiale rimasto.

La Facoltà prese allora una decisione coraggiosa e cioè di ricominciare tutto da capo, abolendo i Gabinetti e valendosi del materiale rimasto per dar vita a un Istituto di Matematica con Biblioteca unica. Ed ecco il testo della deliberazione presa nella seduta del 28-9-1944:

FACOLTÀ DI SCIENZE
Verbale della seduta del 28-9-44

La seduta ha luogo nei locali dell'Istituto di Fisica alle ore 10; sono presenti i Proff. Carrelli (Preside), Bakunin, Caccioppoli, Giordani, Nobile, D'Erasmo, Imbò, Miranda, Beretta (Segretario).

... Omissis ...

Si passa quindi a discutere il comma seguente dell'Ordine del del Giorno riguardante i locali degli Istituti di Matematica; dopo ampia discussione viene approvato quanto segue:

Allo scopo di riorganizzare più rapidamente e più economicamente i locali adibiti alle Cattedre di Matematica, la Facoltà delibera la fusione degli attuali Istituti di Analisi algebrica, Analisi infinitesimale, Analisi superiore, Geometria analitica, Geometria descrittiva, Geometria superiore, Meccanica Razionale, Fisica matematica e del Seminario Matematico in un unico Istituto di Matematica. In vista del carattere parzialmente sperimentale della loro attività rimarranno invece indipendenti l'Istituto di Geodesia e quello di Astronomia.

Tale fusione, con la quale si verrà a realizzare anche a Napoli un'organizzazione degli studi di matematica simile a quella vigente in quasi tutte le Università italiane e straniere, presenta i seguenti vantaggi:

a) una migliore utilizzazione dei fondi a disposizione delle Cattedre di Matematica, i quali, anzicché disperdersi in otto dotazioni irrisorie, saranno riuniti in un'unica dotazione, permettendo così di realizzare un'economia non indifferente nelle piccole spese;

b) la possibilità di creare un'unica biblioteca evitando così l'acquisto di inutili doppioni e permettendo anzi, mediante l'alienazione eventuale dei molti doppioni che risulteranno, la creazione di un fondo di riserva che potrà servire a ricostruire almeno in parte le collezioni di libri e riviste rimaste incomplete a causa della guerra;

c) la possibilità di un'utilizzazione più razionale dei vari locali, che permetterà la creazione di nuove aule, di cui si ha assoluto ed urgente bisogno.

Per quanto riguarda le modalità di funzionamento dell'Istituto la Facoltà stabilisce che esso venga retto da un direttore che verrà eletto ogni due anni dalla Facoltà e nominato con decreto rettorale.

Il direttore si occuperà della direzione della biblioteca e di tutto ciò che si riferisce all'amministrazione dell'Istituto restando invece la responsabilità dell'attività scientifico-didattica e della sorveglianza del personale assistente di esclusiva competenza dei singoli docenti.

La Facoltà esprime infine il voto che all'Istituto venga adibito un segretario bibliotecario e almeno un inserviente.

... Omissis ...

Può oggi sembrare che la motivazione sia una raccolta di banalità e di luoghi comuni. Ma chi ha conosciuto quei tempi sa che questo giudizio sarebbe ingiusto. Si trattò invero di dar vita al primo istituto policattedra della Facoltà: un vero e proprio colpo di mano reso possibile dalle particolari circostanze del momento e che rompeva decisamente con un passato che, dopo aver conosciuto momenti di vero fulgore, era giunto ormai a una fase di completa involuzione.

Il Gabinetto di Geodesia e Astronomia, rimasto allora autonomo, fu assorbito nell'Istituto di Matematica solo più tardi nel 1951 dopo il collocamento a riposo del Prof. V. Nobile [13].

Dopo che il Senato Accademico ebbe approvata la proposta della Facoltà, questa provvide con deliberazione del 24-1-45 a proporre al Rettore il mio nome per la nomina a direttore. La nomina, dopo l'approvazione anche da parte del Consiglio d'Amministrazione, mi fu comunicata con lettera del 21-4-1945.

Ed ecco in sintesi il lavoro svolto da allora ad oggi sia dall'Istituto che per iniziativa della Facoltà.

Aule e sale di studio. — Non sono riuscito a ricostruire quale fosse la disponibilità di aule nei tempi più lontani. Ricordo però che nel 1927, quando io cominciavo i miei studi universtari, la disponibilità per i corsi di matematica era di quattro aule e tre aulette di circa quindici posti per seminari o corsi del secondo biennio. Tre delle aule erano quelle contraddistinte attualmente dai numeri 1, 2, 3 e cioè le due (nn. 1, 2) prospicienti la cupola del Gesù Vecchio e l'altra (n. 3) prospiciente il Vico Orilia. La quarta aveva ingresso dal cortile del Salvatore. Delle tre aulette una era inserita nell'allora Gabinetto di Geometria Proiettiva, divenuto poi Istituto di Analisi Superiore, e si diceva che il rivestimento in legno delle pareti fosse un residuo del refettorio del Convitto del Salvatore. Le altre due si trovavano nel grande corridoio ovest ai lati del finestrone prospi-

[13] I pochi apparecchi ancora funzionanti furono trasferiti alla stessa data all'Istituto di Fisica Terrestre.

ciente il tetto del Museo di Mineralogia. Delle tre aule al secondo piano la n. 2 era stata attrezzata proprio in quegli anni e anche l'aula n. 3 non era molto antica.

La Facoltà disponeva anche di due aule di disegno: una era attigua all'aula con ingresso dal Cortile del Salvatore, per il Disegno di Architettura e l'altra al terzo piano del vecchio edificio affacciava sul cortile delle statue più o meno al disotto dell'orologio. Verso la fine degli anni trenta le due aule di disegno e l'aula con ingresso dal Cortile del Salvatore passarono ad altri istituti e si provvide ad attrezzare una nuova sede per l'Istituto di Disegno sopraelevando i locali del vecchio Istituto di Fisica Sperimentale siti al secondo piano fra la Via Paladino e il Cortile delle Statue.

Dopo l'occupazione l'aula 2 e le due aulette del corridoio erano rimaste prive di banchi. Molto deteriorate le altre. Si decise di rinunziare alle due aulette, ormai troppo piccole, e di rabberciare le altre, ponendo mano nello stesso tempo all'attrezzatura nel grande corridoio di quattro nuove aule, tre (le nn. 4, 5, 6) prospicienti la via Mezzocannone, una (la n. 7) prospiciente il Cortile delle statue. L'aula 6 che era stata lo studio di Marcolongo fu intitolata al suo nome.

Per ricavare i locali necessari si restrinsero le sale di studio dei professori al lato sud dell'edificio prospiciente il Cortile del Salvatore, utilizzando anche le due aulette soppresse e una stanza attigua alla Sala Battaglini che era stata sede del Seminario Matematico. La Sala Battaglini fu dotata di un'antisala in quella che era una volta la stanza dei bidelli e questa fu spostata nel locale attiguo. Nel corridoio grande oltre alle nuove aule e alla Sala Battaglini rimase solo il Gabinetto di Geodesia. Naturalmente sia gli studi dei professori che la Sala Battaglini furono attrezzati all'inizio con materiale di fortuna e ci vollero poi molti anni per dotare questi locali di mobili decorosi, macchine da scrivere, stufe, ecc. Col tempo si rifecero anche i banchi delle aule nn. 1 e 2, cambiando l'orientamento della prima che in origine aveva la cattedra posta di fronte alla finestra. Un'altra aula (la n. 8) fu ricavata dai locali del Gabinetto di Geodesia dopo che questo fu assorbito dall'Istituto di Matematica e un'altra sala dello stesso Gabinetto fu attrezzata a studio e data poi in uso nel 1969 alla Presidenza della Facoltà. Più tardi tre studi prospicienti via Mezzocannone furono attrezzati in alcuni locali ceduti dall'Istituto di Antropologia.

In tempi più recenti, fra il 1968 e il 1969, dopo il trasferimento della Facoltà d'Ingegneria alla nuova sede, l'Istituto poté disporre dei locali dell'Istituto di Disegno dove furono attrezzate due nuove aule (le nn. 9 e 10) nonché alcuni studi e di due aule (le nn. 11 e 12) site all'ultimo piano del Vecchio Politecnico a via Mezzocannone 16.

Si cercò anche, dopo il 1971, di aumentare lo spazio disponibile creando nei corridoi cinque boxes, in uno dei quali fu sistemato il servizio ciclostile e fotoriproduzione, mentre, degli altri, due divennero sedi di associazioni studentesche e due sale di studio per docenti.

Biblioteca. — Tutto il materiale librario di proprietà dei Gabinetti e del Seminario Matematico fu raccolto nei locali del vecchio Istituto di Fisica Sperimentale prospicienti da un lato sulla via Paladino e dall'altro sul Cortile delle Statue. Per la scaffalatura si utilizzarono i resti degli armadi dei Gabinetti e della Sala Battaglini rabberciati alla meglio con l'aiuto di qualche falegname a giornata. La sistemazione dei libri richiese però un vero e proprio lavoro di facchinaggio, per il quale fu utilizzato un « carruocciolo » con le rotelle di legno del tipo di quelli con cui gli scugnizzi solevano un tempo giocare nelle strade in discesa. Ancora più penoso il lavoro di classificazione del materiale librario, incredibilmente polveroso dopo mesi di abbandono, e la redazione manoscritta di uno « stato di consistenza » del materiale librario e non librario, reso necessario dalla distruzione dei vecchi inventari [14].

Si tenga presente che in quel tempo l'Istituto disponeva soltanto di due bidelli piuttosto anziani, completamente assorbiti dalla sorveglianza delle aule, e che mancava completamente di personale amministrativo e di macchine da scrivere funzionanti.

Malgrado ciò il lavoro fu condotto in porto rapidamente. Se ciò fu possibile attuare in un clima di serena solidarietà lo si deve alla validissima collaborazione di Don Savino Coronato. di Federico Cafiero e di un gruppo di giovanissimi, laureatisi fra il 1944 e il 1945, che fecero poi tutti una brillante carriera: Guido Stampacchia, Donato Greco, Carlo Ciliberto e Francesco Stoppelli.

Dopo la sistemazione della Biblioteca si pose poi mano al riordinamento della miscellanea, costituita riunendo quelle del Seminario Matematico e dei vari Gabinetti, alle quali si aggiunse più tardi quella lasciata in eredità da Renato Caccioppoli. Tale miscellanea, dotata di un catalogo sommario con i soli nomi degli autori, fu allogata inizialmente in due sale attigue all'aula n. 2, che avevano ospitato una volta l'Istituto di Calcolo per l'Analisi Numerica del Picone, e poi nel corridoio sud per far posto al ciclostile e a un ufficio.

Più tardi, quando si cominciò a disporre di un segretario, si compilò un Catalogo per autori dei libri dell'Istituto che è rimasto in funzione per molti anni, durante i quali il materiale librario andò sempre aumentando sia per effetto degli acquisti resi possibili da

[14] Tale stato di consistenza reca la data convenzionale del 31-10-1944. In effetti esso fu redatto nel 1945.

una certa disponibilità di fondi sia per l'assorbimento della biblioteca del Gabinetto di Geodesia sia infine per le donazioni degli eredi Marcolongo [15] e Caccioppoli. Ciò rese necessario l'acquisto di sempre nuovi scaffali, ma a un certo punto si presentò come inderogabile la necessità di trasformare completamente la parte più vecchia della scaffalatura esistente, trasformandola in una moderna scaffalatura metallica. Per questo si prese occasione dai lavori murari resi necessari dall'installazione delle aule nn. 9 e 10 soprastanti la biblioteca. Il lavoro prese parecchio tempo e ciò provocò una crisi nel servizio della biblioteca, perché il vecchio catalogo per lo spostamento dei libri divenne inutilizzabile. Si dovette perciò fra il 1968 e il 1971 por mano a un nuovo catalogo per autori, a cui questa volta si affiancarono anche un catalogo topografico e vari cataloghi speciali. Per riassumere l'opera svolta diremo che la Biblioteca che all'atto della sua costituzione disponeva di circa 5000 volumi e di 53 collezioni di riviste, oltre a 32 spezzoni di riviste interrotte, può ora contare, a parte i fondi di magazzino, su circa 15.000 volumi e 350 collezioni di riviste in gran parte complete. Essa risulta così una delle più fornite fra le biblioteche similari italiane.

Mensilmente le opere date in lettura sono circa 400 e quelle prese in prestito 300. Le sale di lettura sono utilizzate dagli studenti anche come sale di studio nelle quali essi si recano con libri propri. Fra i libri dati in lettura non sono da computare quelli utilizzati dai docenti, i quali dispongono di sale di lettura riservate dove la consultazione avviene senza alcuna formalità e per la quale non si dispone quindi di dati statistici.

Personale non docente. — All'atto della sua costituzione l'Istituto disponeva, come si è detto, di due bidelli e non aveva personale amministrativo. La situazione è andata poi man mano migliorando e ora lavorano nell'Istituto 7 amministrativi, 3 tecnici e 12 ausiliari. Il lavoro da svolgere è però enorme. Amministrativi e tecnici devono infatti provvedere ai seguenti servizi, alcuni dei quali richiederebbero da soli l'opera di tre o quattro persone: 1) Biblioteca, 2) Amministrazione, 3) Dattilografia e Archivio, 4) Ciclostile e riproduzione fotostatica, 5) Segreteria didattica, 6) Centralino telefonico.

Le aule sono distribuite in tre sedi diverse (2° e 3° piano di via Mezzocannone 8 e ultimo piano in via Mezzocannone 16) e devono restare aperte dalle 8 alle 20, per cui il personale ausiliario deve alternarsi con turni di lavoro opportunamente predisposti.

[15] I volumi delle collezioni di atti accademici che costituirono la donazione Marcolongo sono inventariati con i numeri da 56 a 70.

Gli aumenti di numero del personale hanno spesso gravato, almeno in certi periodi, sui fondi a disposizione dell'Istituto.

Personale docente. — All'inizio di questo periodo i posti di ruolo di professore si ridussero da 8 a 6 per il ritorno di Crudeli alla sede di origine e per il passaggio di Andreoli, dopo la riammissione in servizio, alla Facoltà di Architettura. Questo numero, salvo una non breve parentesi [16], rimase immutato fino al 1961 e i posti furono così utilizzati [17]:

Analisi Matematica [18]

Carlo Miranda 1943/44...
Renato Caccioppoli 1943/1959
Federico Cafiero 1959/60...

Geometria

Nicolò Spampinato 1938/1961
Guido Zappa 1946/53
Alfredo Franchetta 1953/54...

[16] Tale parentesi ebbe inizio col collocamento fuori ruolo del Prof. Nobile nel 1947 giacché la sua cattedra con deliberazione del 28-11-1947 fu destinata alla Fisica Teorica. Il Prof. Nobile continuò fino al collocamento a riposo a tenere un corso di Astronomia stellare che la Facoltà dichiarò equivalente all'Astronomia e poi si provvide all'Astronomia con un incarico. Fortunatamente però col D.P.R. 11-1-1956 n. 6 la Facoltà potè disporre di un posto di ruolo in più vincolato alla cattedra di Astronomia. Lo stesso decreto sanciva che al professore di astronomia sono devolute le funzioni di direttore dell'Osservatorio di Capodimonte. Si ripristinava così una tradizione interrotta col collocamento a riposo di E. Fergola e la parentesi era chiusa. Ricordiamo anche che, prima del Fergola, era stato direttore dell'Osservatorio A. De Gasparis (1864/1889) anche lui membro della Facoltà e che invece dopo il Fergola si sono succeduti alla direzione dell'Osservatorio: Azeglio Bemporad (1912/1938), Luigi Carnera (1938/1947) e Attilio Colacevich (1948/1953), tutti eminenti astronomi che però non facevano parte della Facoltà.

[17] L'utilizzazione descritta qui di seguito dei primi sei posti di ruolo disponibili fu preceduta da qualche tentativo andato a vuoto. In data 8-7-1944 la Facoltà propose il trasferimento del Prof. A. Colucci dalla cattedra di Analisi Matematica dell'Accademia Aeronautica a quella di Istituzioni di Matematiche, ma il Consiglio Superiore della P. I. eccepì che i concorsi per l'Accademia e quelli per le cattedre universitarie si svolgono con modalità differenti e la cosa non ebbe seguito. Successivamente in data 19-6-46 la Facoltà deliberò la chiamata per trasferimento del Prof. G. Scorza Dragoni ordinario di Analisi Matematica a Padova alla cattedra di Geometria Analitica, Proiettiva e Descrittiva, ma il Prof. Scorza rinunciò in un secondo momento al trasferimento.

[18] Per indicare gli insegnamenti adottiamo la terminologia del D.P.R. 26-7-1960 n. 1692.

Meccanica Razionale

Carlo Tolotti 1946/47...

Astronomia

Vittorio Nobile 1935/1950
Massimo Cimino 1956/57
Tito Nicolini 1957/69

Dopo il collocamento fuori ruolo del Prof. T. Nicolini la cattedra di Astronomia, ricoperta dal Prof. Mario Rigutti, non fa più parte dell'Istituto di Matematica perché l'Astronomia è ora considerata appartenente al gruppo delle discipline fisiche.

Dopo il collocamento fuori ruolo del Prof. Nicolò Spampinato il relativo posto di ruolo fu ricoperto dal Prof. Donato Greco per i seguenti insegnamenti:

Matematiche Complementari 1961/62
Istituzioni di Analisi Superiore 1962/67
Analisi Matematica 1967/70

Furono poi assegnati alla Facoltà quattro nuovi posti di ruolo per le discipline matematiche così utilizzati:

Meccanica Superiore - Istituzioni di Fisica Matematica (1968/71)

Francesco Stoppelli 1961/1967
Luigi Salvadori 1968/1971

Algebra Mario Curzio 1963/64...
Geometria Giuseppe Tallini 1969/1973
Analisi Matematica Paolo de Lucia 1972/73...

e altre quattro di raddoppiamento dei seguenti insegnamenti:

Analisi Matematica Carlo Ciliberto 1967/68...
Geometria Vittorio Dalla Volta 1962/63...
Algebra Gianfranco Panella 1970/71...
Meccanica Razionale Salvatore Rionero 1970/71...

Di tutte queste cattedre all'inizio del 1973 ne risultavano scoperte tre per il trasferimento a Roma di G. Tallini ed L. Salvadori e per il passaggio alla Facoltà d'Ingegneria di D. Greco [19]. A queste,

[19] In data 25-11-1972 la Facoltà chiamò alla cattedra rimasta scoperta dopo il trasferimento del Prof. Greco in Facoltà d'Ingegneria il Prof. Antonio Avantaggiati, ordinario di Analisi Matematica a Bari, ma questi in un secondo momento rinunciò al trasferimento.

in applicazione del D.L. 1-10-1973 n. 580 sulle misure urgenti per l'Università convertito in legge il 30-11-1973, se ne aggiunsero altre cinque e per tutte e otto la Facoltà chiese l'apertura del concorso. Durante il 1975/76 si è potuto così provvedere alle seguenti nuove nomine:

Algebra Gabriella Corsi Tani
Analisi Matematica Albino Canfora
Geometria Sandro Buoncristiano, Carlo Traverso
Meccanica Razionale Antonio Romano
Istituzioni di Matematiche Maria Laura Benevento Calabrese, Laura Castellani, Maria Grazia Cazzani Nieri

Il Prof. Traverso si è poi trasferito a Pisa col 1°-11-1976.

Infine nel 1970/71 furono nominati, in seguito a concorso, due professori aggregati:

Geometria Pasquale Mastrogiacomo
Calcolo Numerico e Programmazione Renato Vinciguerra,

dei quali il primo si trasferì a Bari nel 1973/74 essendo risultato vincitore di un concorso a cattedra, mentre l'altro fu promosso professore straordinario per effetto dei già citati provvedimenti urgenti, in base ai quali il ruolo dei professori aggregati, istituito con la Legge 25-7-1966, n. 585, veniva soppresso. In totale dunque i posti di ruolo per insegnamenti di matematica in Facoltà di Scienze sono 19, di cui 18 coperti.

Per quanto riguarda le altre categorie di docenti ricorderemo che il numero degli incarichi di insegnamento che era di 8 fra il 1943 e il 1950 è andato man mano aumentando salendo a 14 nel 1961, a 24 nel 1965 e raggiungendo i 40 nel 1974/75. Questo numero è però destinato a diminuire in corrispondenza dell'aumento di quello dei professori di ruolo. L'aumento stesso è dovuto, da un lato al maggior numero di insegnamenti del secondo biennio previsto dal nuovo ordinamento didattico in vigore dal 1961, dall'altro alla possibilità di sdoppiare i corsi troppo affollati. Comunque dei 40 incarichi predetti solo 26 riguardavano i corsi di laurea in matematica e fisica e 14 gli altri corsi di laurea (Chimica, Scienze Biologiche, Scienze Geologiche, Scienze Naturali).

Anche il numero degli assistenti che era di 6 nel 1943 e ancora di 8 nel 1958/59 è poi aumentato a 20 nel 1965 e a 51 (di cui 5 in soprannumero) nel 1975. A questi si devono aggiungere, sempre con riferimento al 1975, i contrattisti in numero di 14, gli assegnisti in numero di 11 e gli addetti alle esercitazioni in numero di 8. Hanno collaborato all'attività didattica anche alcuni borsisti del C.N.R.

Si noterà che l'aumento del numero degli assistenti di ruolo è stato più lento di quello delle altre categorie. A ciò si è posto riparo ricorrendo all'opera di personale precario e cioè, dapprima, ad assistenti straordinari, categoria questa prevista dalla Legge 24 Giugno 1950, n. 465 e in parte riassorbita in applicazione della Legge 26-1-1962, n. 17 in quella degli assistenti di ruolo con concorsi riservati, e poi agli assistenti volontari retribuiti e agli addetti alle esercitazioni, a carico del bilancio universitario o di quello dell'Istituto, previsti dalle Leggi 18-3-1958, n. 349 e 26-1-1962, n. 16. Dei primi contrattisti e assegnisti, categorie queste istituite dalla Legge sulle misure urgenti, si è potuto disporre solo dall'anno accademico 1974/75.

La retribuzione di questo personale precario è gravata in buona parte sui fondi dell'Istituto.

Attività didattica. — L'ordine degli studi per le lauree in Scienze Matematiche e in Matematica e Fisica rimase pressocché inalterato, fino al 1960/61 anno in cui, col D.P. 26-7-1960 pubblicato nella G.U. del 18-1-1961, la seconda fu abolita e la prima, suddivisa in più indirizzi, tornò a prendere il nome di Laurea in Matematica. L'ordine degli studi per quest'ultima si trova negli Annuari e nelle Guide dello studente di questi anni e quindi non ne parleremo. Ricorderemo solo che fra il 1969 e il 1970 con le Leggi 11-12-1969, n. 910 e 30-11-1970, n. 924 sono entrate in vigore le norme sulla liberalizzazione dei piani di studio, che hanno consentito una assai maggiore libertà agli studenti. Questi hanno ora la possibilità di una larga scelta fra piani diversi, entro limiti però che la Facoltà, per evitare abusi, ha preventivamente fissati in linea di massima.

Per quanto concerne il carico didattico vi fu da fronteggiare all'inizio l'ondata del ritorno dei reduci dalla guerra. La Facoltà vi riuscì mediante l'istituzione per varie materie di 4 corsi semestrali per reduci, che ebbero luogo fra il 1945 e il 1947. Parallelamente però, per garentire in qualche modo la serietà dell'esame di laurea, la Facoltà deliberò, in data 6-6-1944, di farlo precedere, a partire dall'anno accademico 1944/45, da un colloquio di cultura generale. Questa prova fu poi abolita a decorrere dall'anno accademico 1969/70.

Passata l'ondata dei reduci cominciò un progressivo aumento degli studenti ordinari. Tanto per dare un'idea si tenga presente che nel 1958/59 gli immatricolati furono:

Laurea in	Scienze Matematiche	58
»	Matematica e Fisica	123
»	Fisica	86
»	Ingegneria	551

I laureati nell'anno 1959/60 furono 102 complessivamente fra le due lauree. In quel tempo il raddoppiamento dei corsi non era ancora consentito e quindi il lavoro era intensissimo. Alcuni di noi che avevamo i corsi più affollati dovevamo ripetere la lezione due volte, a causa della limitata capienza delle aule, e gli assistenti avevano un carico di 9 o anche 12 ore settimanali di esercitazioni. Anche l'assistenza ai laureandi era assai impegnativa. Lo svolgimento degli esami richiedeva poi cinque mesi di lavoro ogni anno, con sedute che si protraevano anche sette od otto ore al giorno.

La situazione migliorò un poco con la Legge 24-7-1962 n. 1073, che apriva la via al raddoppiamento dei posti di ruolo per le cattedre dei corsi più affollati, e con la successiva Legge 24-2-1967 n. 62, ma l'ammissione all'Università dei diplomati degli Istituti Tecnici finì per provocare il caos. Invero la Legge 21-7-1961 n. 685, modificata poi dalla Legge 25-7-1966 n. 602, prevedeva che fino al 1964/65 tale ammissione, a un numero limitato di posti, avvenisse per concorso, ma che fosse libera dal 1965/66, sempre però con la restrizione che un dato tipo di diploma dava adito all'iscrizione a certi corsi di laurea ma non ad altri. La legge 11-12-1969 n. 910 abolì anche questa restrizione. Già però nel 1965-66, mentre i laureati erano 108, gli immatricolati furono:

Laurea in Matematica	672
Laurea in Fisica	180
Laurea in Ingegneria	1.758

I docenti di matematica della Facoltà di Scienze chiesero allora di essere esonerati dall'insegnamento agli allievi ingegneri, ciò che si ottenne a partire dall'anno accademico 1969/70. In questi ultimi anni però vi è stato prima un aumento degli iscritti ai corsi di Scienze Geologiche e Scienze Naturali e poi una flessione per detti corsi e il boom del corso di laurea in Scienze Biologiche. Ed ecco le cifre per gli immatricolati e laureati degli anni 1973/74 e 1974/75:

	1973-74	1974-75
Laurea in Matematica	690	621
» Fisica	204	156
» Chimica e Ch. Industriale	165	129
» Scienze Biologiche	1.751	1.824
» Scienze Geologiche	236	161
» Scienze Naturali	233	179
Laureati in Matematica	250	356

Fortunatamente la Legge sul raddoppiamento delle cattedre estesa per analogia al raddoppiamento degli incarichi ha permesso di fronteggiare alla meno peggio la situazione.

Segnaliamo infine che fra il 1955 e il 1958 l'Istituto organizzò per i neolaureati dei Corsi di preparazione professionale all'insegnamento della Matematica, che ebbero un certo successo ma che poi cessarono per difetto di finanziamenti. A tali corsi collaborò anche il Prof. Modesto Dedò dell'Accademia Aeronautica,

Dal 1974/75 si tengono anche corsi per lavoratori.

Attività di ricerca. — In questi anni l'attività di ricerca è stata intensissima e si è prevalentemente rivolta per l'Analisi alla Teoria della misura e dell'integrazione, al Calcolo delle Variazioni e alla Teoria delle equazioni a derivate parziali, per l'Algebra alla Teoria dei gruppi, per la Geometria alla Geometria algebrica e differenziale, per la Fisica Matematica alla Meccanica dei sistemi continui, alla Teoria della stabilità e alla Relatività, per il Calcolo numerico allo studio di vari metodi di approssimazione.

Hanno ottenuto la cattedra universitaria per la sede a fianco indicata i seguenti collaboratori dell'Istituto:

Algebra Rodolfo Permuti (Trieste), Mario Curzio (Napoli)

Analisi Matematica Guido Stampacchia (Pisa Scuola Normale Superiore), Federico Cafiero (Napoli), Donato Greco (Napoli Ingegneria), Carlo Ciliberto (Napoli), Antonio Zitarosa (Napoli Istituto Navale), Antonio Avantaggiati (Bari), Renato Fiorenza (Napoli Ingegneria), Mario Troisi (Salerno), Paolo de Lucia (Napoli), Albino Canfora (Napoli), Silvano Matarasso (Salerno), Teresa Bruno (Napoli Ingegneria), Nicola Fedele (Napoli Ingegneria), Roberto Infantino (Bari Ingegneria)

Calcolo Numerico e Programmazione Renato Vinciguerra (Napoli)

Geometria Pasquale Mastrogiacomo (Bari), Francesco Zirilli (Accademia Aeronautica)

Istituzioni di Matematiche Maria Laura Benevento Calabrese (Napoli), Laura Castellano (Napoli)

Matematica Generale Luigi Albano (Bari Economia e Commercio)

Meccanica Razionale Francesco Stoppelli (Napoli Ingegneria), Luigi Salvadori (Roma), Salvatore Rionero (Napoli), Antonio Romano (Napoli).

Hanno inoltre avuto contatti più o meno fugaci con l'Istituto, prima di arrivare alla cattedra, gli analisti Emilio Gagliardo (Pavia), Franco Guglielmino (Catania), Giorgio Letta (Pisa), Giuseppe Arnese (Bari), gli algebristi Giovanni Zacher (Padova), Federico Bartolozzi (Palermo), Franco Napolitani (Palermo), e il fisico teorico Eduardo Caianiello (Salerno).

Si sono anche laureati in Scienze Matematiche a Napoli i matematici Gaetano Caricato (Roma), Alessandro Di Lorenzo (Napoli Economia e Commercio), Francesco De Blasi (Firenze Architettura), Otello Mancino (Catania), i fisici Flavio Porreca (Napoli Ingegneria), Francesco Lauria e Bruno Preziosi (Napoli), gli ingegneri Elio Giangreco e Tullio Renzulli (Napoli Ingegneria) e Guido Branca (Cosenza Ingegneria).

Una delle prime cure dell'Istituto fu di ridar vita al Giornale di Matematiche di Battaglini con una IV serie affidata alla direzione di R. Caccioppoli e C. Miranda. Purtroppo l'accordo con la casa editrice durò solo quattro anni dal 1947/48 al 1950/51 durante i quali vennero pubblicati 34 articoli di autori napoletani e 14 di matematici di altre sedi [20], dopo di che si decise di dar vita a una nuova rivista « Ricerche di Matematica » che dirigo dal lontano 1952 con la collaborazione di un Comitato di Redazione composto da tutti i professori di ruolo dell'Istituto e da professori di altre Facoltà. All'atto della fondazione questo comitato era composto da Caccioppoli, Spampinato, Tolotti e Zappa. Questa rivista è ora arrivata al 25° volume e si è assicurata una posizione di prestigio anche in campo internazionale. Essa ha finora pubblicato 374 note e memorie di cui 223 di di matematici napoletani, 118 di altri matematici italiani, 33 di matematici stranieri.

L'Istituto dispone anche di una serie di « Relazioni », stampate in offset, che è arrivata al n. 59.

Molti altri lavori dei matematici napoletani hanno trovato posto in varie riviste, specialmente negli Annali di Matematica pura e applicata, nei Rendiconti dei Lincei, dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, del Circolo Matematico di Palermo e in « Le Matematiche » di Catania.

L'Istituto si è anche giovato largamente della collaborazione del C.N.R. che, oltre a contribuire finanziariamente da anni alla stampa della rivista, ci ha permesso, attraverso il 3° Gruppo di Istituti matematici di cui il nostro fa parte, di organizzare conferenze di professori italiani di altre sedi o di stranieri. Una collaborazione diretta col Comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R. si è avuta anche attraverso i Gruppi e i Contratti di ricerca e con l'organizzazione di cicli di lezioni affidati a visiting professors straneri.

Ricordiamo infine che dall'11 al 16 Settembre 1959 l'Istituto organizzò il VI Congresso nazionale dell'Unione Matematica Italiana, che ebbe un notevole successo dovuto sia al numero degli intervenuti

[20] Una 5ª serie composta di 13 volumi ebbe vita fra il 1951/52 e il 1965/67 sotto la direzione di G. Andreoli e A. Natucci ai quali si affiancò più tardi M. Manarini. Il programma consisteva in un certo senso in un ritorno all'antico.

(259 di cui 74 stranieri) sia al largo senso di ospitalità dimostrato in quella occasione dalle autorità cittadine. Purtroppo il congresso si aprì pochi mesi dopo il tragico suicidio di Renato Caccioppoli che con la sua opera generosa e geniale aveva dato il massimo impulso all'attività scientifica dell'Istituto. Per ricordare e onorare la sua memoria l'Unione Matematica Italiana pubblicò quattro anni dopo le sue opere in due volumi ed ha accettato di amministrare la Fondazione del Premio Caccioppoli istituito con una donazione del fratello Ugo. Questo premio è stato assegnato finora ai più valenti fra i giovani matematici italiani.

Da parte sua la Facoltà il 15-3-1971 deliberò di intitolare l'Istituto al suo nome. La deliberazione divenne esecutiva con l'anno accademico 1971/72.

Direzione dell'Istituto. — Benché la deliberazione della Facoltà del 28-9-1944 prevedesse la rielezione del direttore ogni biennio io fui tacitamente confermato senza formalità per diversi anni, durante i quali non ho mai mancato di sottoporre ogni anno ai colleghi un conto consuntivo e un bilancio preventivo dell'Istituto e di consultarmi con loro per le questioni di maggiore importanza. Era però una collaborazione informale nel senso che non vi era un vero e proprio consiglio direttivo dell'Istituto e non venivano redatti verbali delle riunioni. Un consiglio direttivo si andò però costituendo de facto man mano che il numero dei professori di ruolo andò aumentando. D'altra parte nel 1963 una modifica dello Statuto dell'Università, che io stesso avevo promosso come preside della Facoltà, aveva esteso a tutti gli Istituti della Facoltà le norme per la nomina dei direttori degli Istituti stabilite nel 1944 per l'Istituto di Matematica. Si convenne perciò di dare attuazione a questa norma cambiando di due anni in due anni il direttore secondo l'ordine di anzianità, salvo che per motivi di salute o per speciali impegni di lavoro qualcuno non chiedesse di essere esonerato. In applicazione di questo accordo il mio periodo di direzione ebbe termine col 31 ottobre 1963 e da allora si sono succeduti alla direzione: A. Franchetta (1963/65), V. Dalla Volta (1965/67), D. Greco (1967/69), M. Curzio (1969/71), P. Mastrogiacomo (1971/73), G. Panella (1973/75).

Durante questi anni il Consiglio di Istituto, composto dai profes sori di ruolo, andò assumendo man mano sempre maggiori poteri e ad esso si contrappose in un secondo momento un Consiglio degli assistenti e borsisti, autoqualificatisi « docenti subalterni ». Dopo alcune polemiche non prive di qualche asprezza si giunse alla fine del 1973 a costituire un'Assemblea che riuniva tutti i docenti dell'Istituto dai borsisti ai professori di ruolo. Questa approvò un « Regolamento di funzionamento degli organi dell'Istituto di Matematica »,

in cui si attribuì fra l'altro alla stessa Assemblea il compito di designare alla Facoltà uno o più nomi per la scelta del direttore e di discutere e approvare i bilanci dell'Istituto, nonché l'organizzazione didattica e scientifica, senza porre beninteso limitazioni alla libertà di insegnamento e di ricerca. Il Regolamento prevedeva altresì che il compito di rendere esecutive le deliberazioni dell'Assemblea e di gestire e organizzare i servizi generali dell'Istituto fosse demandato a un Comitato Esecutivo di quindici membri, rinnovabile ogni anno, presieduto dal Direttore dell'Istituto.

Due anni dopo, al termine della direzione Panella, si è fatto un passo in avanti stabilendo che « il Comitato Esecutivo svolge collegialmente i compiti che le vigenti disposizioni di legge attribuiscono al direttore ». Quest'ultima decisione fu presa dopo lunghe polemiche e discussioni al termine delle quali fu designato direttore per il 1975/76 il Prof. P. de Lucia, scelta questa confermata dalla Facoltà. In pari tempo il Comitato Esecutivo fu allargato fino a comprendere 22 membri. Per il 1976/77 è stato nuovamente designato come direttore il Prof. de Lucia ed è stato rinnovato il Comitato Esecutivo, ma già fioriscono nuove polemiche e dimissioni.

Aggiungerò ancora che fin dal 1967 si riconobbe l'opportunità di affiancare al Direttore dell'Istituto un altro professore di ruolo col compito di sovraintendere alla direzione della Biblioteca. Questa decisione, anche se non formalizzata, è stata però praticamente realizzata affidando tale compito prima al Prof. Ciliberto e poi a partire dal 1969/70 al sottoscritto. Il compito principale di Ciliberto e mio è stato di curare l'ampliamento della Biblioteca e di ricostituirne i cataloghi.

Col 31-10-1976 ho chiesto di essere esonerato da tale incarico, lasciando al mio posto una commissione composta dai Prof. A. Romano, S. Rao, C. Sbordone, R. Tortora, che già aveva con me collaborato nel 1975/76.

Altre commissioni sono state costituite in seno al Comitato Esecutivo per sovraintendere ai vari settori dell'Istituto: Amministrazione, Personale, Attrezzature, Stampa, ecc.

5. - PROSPETTIVE FUTURE. — La direzione collegiale dell'Istituto vorrebbe in qualche modo anticipare la costituzione del Dipartimento di Matematica. E su questa questione sarà opportuno qualche chiarimento.

Oltre all'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze vi sono nell'Università altri tre Istituti di Matematica. Quello della Facoltà di Economia e Commercio con 2 professori di ruolo, 2 incaricati, 8 assistenti e circa 2000 studenti. Quello della facoltà di Architettura

con due professori di ruolo, 10 professori incaricati, 8 assistenti e circa 1600 studenti. In Facoltà di Ingegneria gli insegnamenti di matematica sono ripartiti fra i due Istituti di Matematica e Meccanica Razionale con un complesso di 7 professori di ruolo, 25 incaricati e 28 assistenti e contrattisti. Gli studenti sono circa 4000. Infine in Facoltà Agraria vi è un insegnamento di matematica con 1 professore incaricato, 1 assistente e 500 studenti.

Se le future norme sui dipartimenti dovessero essere applicate in senso stretto si verrebbe a costituire un organismo che riunirebbe ai circa 1700 studenti del corso di laurea in matematica e ai 2500 di altri corsi di laurea della Facoltà di Scienze, che seguono corsi di discipline matematiche, più di 8000 studenti di altre Facoltà.

Non vi è dubbio che un tale organismo sarebbe ingovernabile ed è dunque da pensare che si istituiranno tanti Dipartimenti diversi per quante sono le diverse Facoltà, attribuendo a ciascuno una denominazione propria: Matematica, Matematica applicata, Matematica economica, ecc. Perciò il futuro Dipartimento di Matematica non sarà cosa molto diversa dall'attuale Istituto di Matematica. Diverso sarà solo il tipo di amministrazione e diversa la competenza a giudicare su questioni che sono ora di spettanza della Facoltà, quali ad esempio le chiamate dei professori ed altre del genere.

I problemi da risolvere rimarranno però sostanzialmente gli stessi e sarà bene esaminarne brevemente gli aspetti più rilevanti.

Finanziamento. — All'atto della sua fondazione l'Istituto disponeva di una dotazione annua di L. 24.000 risultante dalla somma delle dotazioni dei preesistenti Gabinetti. Nel giro di una diecina d'anni la comprensione delle autorità accademiche risolse il problema portando le disponibilità finanziarie a un livello sufficiente alla vita dell'Istituto. L'amministrazione centrale provvide inoltre direttamente alle spese necessarie per attrezzare le nuove aule e la Sala Battaglini ed ha adegnato man mano la dotazione, fino a qualche anno fa, al valore della moneta.

Inoltre, a partire dagli anni sessanta, l'Istituto ha anche potuto disporre di contributi sul fondo per le attrezzature didattiche e scientifiche e ciò sia attraverso le ripartizioni fatte dagli organi accademici sia, assai più di recente, per diretta erogazione ministeriale.

Infine alle spese di manutenzione delle aule e di remunerazione del personale docente e non docente assunto dall'Istituto per le necessità delle esercitazioni e, in parte, alle spese per la Biblioteca si è potuto far fronte con i contributi di laboratorio e biblioteca versati dagli studenti. Tali contributi sono stati contenuti entro limiti molto modesti e non sono mai stati aumentati da moltissimi anni (si è anzi

rinunziato una diecina di anni fa al contributo per la tesi di laurea), ma il loro ammontare complessivo è stato a suo tempo abbastanza rilevante dato l'eccezionale numero degli studenti. Ora quest'ultima voce si va sempre più riducendo per l'aumentato numero delle esenzioni e gli altri contributi non hanno più avuto aumenti da alcuni anni, per cui l'aumento del costo dei servizi e del prezzo dei libri e di ogni altro materiale ha creato una grave situazione di crisi.

Tale crisi investe pure la rivista benché questa disponga del provento degli abbonamenti e di alcuni contributi specifici da parte del C.N.R. e dell'Ente Carta e Cellulosa e costituisca nel bilancio dell'Istituto una partita attiva consentendo di ottenere circa 130 riviste per mezzo di cambi.

Il problema finanziario non è peraltro specifico dell'Istituto di Matematica, ma comune a tutti gli Istituti universitari, per cui la sua soluzione dovrà essere trovata in provvedimenti di carattere generale. Creare i Dipartimenti senza dotarli di un adeguato finanziamento sarebbe un atto di pura follia.

Personale docente e non docente. — Per quanto riguarda il personale amministrativo, tecnico e ausiliario la situazione non è grave, essendo solo necessario l'aumento di qualche unità di tutti e tre i ruoli. Anche per i professori ordinari e incaricati la situazione è abbastanza buona. Certo bisognerà assicurare una carriera agli attuali incaricati stabilizzati e a molti degli incaricati che, pur non avendo questa qualifica, prestano servizio già da alcuni anni. Il numero globale degli insegnanti non è però lontano dall'essere sufficiente.

Dove invece si manifestano gravi carenze è nel ruolo degli assistenti e assimilati. Con l'attuale legislazione il ruolo degli assistenti è ad esaurimento e poiché gran parte di essi sono professori incaricati, dopo la sistemazione di questi ultimi, di assistenti ne resteranno ben pochi.

Lo svolgimento delle esercitazioni, che per la laurea in matematica sono di fondamentale importanza, graverà alla fine sui pochi assistenti rimasti e sui contrattisti e assegnisti. In queste ultime due categorie vi sono ottimi elementi, ma si tratta di personale che, per giustificati motivi, è scontento e in perpetua agitazione. Essi infatti sono mal retribuiti e non hanno prospettive sicure di carriera.

Si noti infine che allo stato attuale non sono possibili nuove assunzioni di nessun tipo se non tramite le borse di studio del C.N.R., che durano in genere due anni. È questa una situazione molto grave a cui è da augurarsi che si ponga presto rimedio se non si vuole disperdere un prezioso patrimonio intellettuale e inaridire le fonti

di ogni progresso scientifico. Bisognerebbe assicurare a tutti gli attuali precari una carriera tranquilla conservando i più dotati per il servizio nelle Università e utilizzando gli altri, che sono pur sempre fra i migliori laureati degli ultimi anni, per compiti diversi ma non meno importanti. Infine è necessario far sì che nel servizio universitario sia garentito un continuo rinnovo mediante l'afflusso di nuove leve. E soprattutto, dopo aver sistemato i precari attuali, non si torni a creare una nuova categoria di personale di questo tipo come purtroppo si sta facendo da circa trenta anni.

Anche questo discorso, peraltro, va ben al di là dei problemi dell'Istituto di Matematica e richiede per la soluzione provvedimenti di carattere generale.

Attività didattica. — L'ordine degli studi per la Laurea in Matematica è ben lungi dall'essere perfetto, anche in considerazione della necessità di preparare laureati idonei all'insegnamento della matematica e osservazioni scientifiche nella Scuola Media. E a questo proposito vi sarebbe molto da rivedere anche negli ordinamenti degli altri corsi di laurea che aprono la via a questo insegnamento. Ma anche questo è un problema di carattere generale sul quale non possiamo qui soffermarci.

Vogliamo solo perciò esaminare se, fermo restando l'attuale ordine degli studi per la laurea in matematica, non si possa far qualcosa per rialzare il tono dell'insegnamento.

Per questo, checché se ne dica, ritengo che almeno in matematica la lezione cattedratica sia insostituibile. Le esercitazioni invece dovrebbero avere sempre più il carattere di seminari, differenziandosi completamente dalle lezioni. Esse dovrebbero essere rivolte a piccoli gruppi di studenti e richiedere a questi una partecipazione attiva. Bisognerebbe trovare anche il modo di sanare le lacune nella preparazione elementare dovute alla provenienza degli studenti da scuole secondarie dei tipi più diversi.

Per far questo però bisognerebbe disporre di un numero di aule molto superiore a quello attuale, appena sufficiente per un insegnamento di tipo tradizionale. Riservandoci di ritornare in seguito su questo punto, vi è inoltre da osservare che, non potendosi aumentare a dismisura il personale a disposizione perché verrebbero a mancare a un certo punto gli elementi idonei, bisognerebbe richiedere al personale precario un maggiore impegno didattico, ciò che si potrà fare solo quando a tale personale sarà stata data una soddisfacente sistemazione. Ecco quindi che la soluzione di un problema che potrebbe essere affrontato in sede locale viene a essere condizionata da quella del problema di carattere generale a cui si è più sopra accennato.

Vi è poi il problema della riforma dell'esame di laurea. Ma è anche questo un problema di carattere generale la cui discussione non può trovare posto in questo articolo.

Sede dell'Istituto. — L'attuale sede dell'Istituto è assolutamente insufficiente sotto molti aspetti. Le aule potrebbero anche bastare per un insegnamento di tipo tradizionale, ma occorrerebbero molte aule in più di piccola capienza per realizzare la trasformazione del tipo di insegnamento a cui si è in precedenza accennato. Anche più grave è la carenza delle sale di studio che attualmente sono solo una ventina, con quaranta posti, per più di cento docenti. Mancano del tutto le sale di studio per studenti distinte dalle sale di lettura della biblioteca e queste ultime sono di limitata capienza. Anche i locali destinati alla conservazione dei libri sono pieni, sì da rendere indispensabile un ampliamento. Quando sarà possibile realizzare i progetti per la nuova sede della Facoltà di Scienze, il nuovo Istituto di Matematica dovrà essere costruito con larghezza di mezzi e di idee, per poter disporre di uno spazio almeno doppio dell'attuale.

Come soluzione di ripiego si era pensato anni fa al raddoppio di certe Facoltà, fra le quali quella di Scienze, allo scopo di creare per il futuro il nucleo di una nuova Università cittadina (vedi la Relazione della Commissione per i problemi dell'edilizia universitaria nominata dal Corpo Accademico nella seduta del 20-11-1965). In questo caso le dimensioni del nuovo Istituto potrebbero essere assai minori, ma bisognerebbe creare ex novo un'altra biblioteca, cosa questa non facile da realizzare. E un problema analogo, anzi assai più grave, si presenterebbe per l'attrezzatura degli istituti sperimentali.

Un'altra soluzione di ripiego potrebbe consistere nel trovare una nuova sede per i soli istituti biologici, lasciando così spazio libero all'Istituto di Matematica per ampliarsi nei locali sovrastanti che verrebbero resi disponibili.

Se si tiene presente che il primo progetto per un nuovo Istituto di Matematica, da realizzarsi sui suoli dell'Orto Botanico, risale al 1888 [21], la cosa più importante è ora, secondo me, di porre termine alle discussioni, iniziate quindici anni fa quando si cominciò a parlare di una nuova sede nella zona dei colli Aminei, e di entrare nella fase esecutiva.

Centro di Calcolo. — Anni orsono venne costituito un Centro di Calcolo elettronico della Facoltà di Scienze, installato prima presso

[21] Vedi in [1] 1888/89 la convenzione fra il Ministero della P. I. e le Provincie continentali meridionali.

l'Istituto Chimico e poi in alcuni locali del vecchio Politecnico, alla cui attività vari membri dell'Istituto dettero un contributo notevole. Con la recente creazione, in un padiglione della Mostra d'Oltremare, del Centro di Calcolo Interfacoltà il precedente Centro di Calcolo, dotato di un terminale che lo collega con l'altro, è stato assorbito dall'Istituto di Matematica che potrà valersene per l'addestramento didattico degli studenti e per i suoi propri scopi di ricerca scientifica. Si pongono qui vari problemi amministrativi e di personale che dovranno essere attentamente vagliati e risolti.

Ricerca scientifica. — Nei tempi trascorsi dell'autoritarismo universitario i rapporti fra professori e assistenti erano improntati, almeno in linea di principio, a un severo codice morale. Impegno del docente alla formazione scientifica dei discepoli, da lui prescelti per la missione fiduciaria di assistenti, rispetto, devozione e impegno nel lavoro da parte di questi ultimi.

Molti dicono che i docenti cercavano nella carriera dei propri discepoli un'affermazione del proprio prestigio personale. E ciò può anche essere vero, ma è anche vero che nel comune lavoro venivano spesso a stabilirsi fra docenti e discepoli dei rapporti di stima e affetto reciproci, che avevano un peso non indifferente nel determinare certi atteggiamenti di strenua difesa di questa o di quella scuola. E il discepolo, una volta divenuto a sua volta docente, metteva un punto d'onore nel continuare le tradizioni della scuola da cui proveniva.

Un'altra accusa che ora è di moda è quella, rivolta agli assistenti vecchio stile, di essere dei carrieristi. È facile rispondere che non si fa ricerca scientifica se non si è sorretti da capacità e passione. Se poi a queste qualità si aggiunge un pizzico di ambizione, tanto meglio, perché l'umanità non può essere fatta di soli apostoli.

Naturalmente nel dipingere a tinte così rosee la vita universitaria di un tempo intendo riferirmi ai suoi momenti migliori, ai più nobili dei suoi « baroni », ai più valenti e fedeli dei suoi « vassalli ». Che ci siano poi state in ogni tempo delle deviazioni e che il sistema sia andato man mano degenerando non starò certo a negarlo. Se però si pone mente al progresso scientifico dell'Italia nei suoi quasi 120 anni di vita unitaria, bisogna riconoscere che il sistema ha in sostanza funzionato. Ciò soprattutto per quelle discipline, come la matematica, lontane da ogni interesse professionale e da ogni preconcetto ideologico. Invero nei cinquant'anni decorsi dalla mia iscrizione all'Università non ricordo che ci siano stati, nella nostra disciplina, concorsi veramente scandalosi. E se qualcuno di tanto in tanto ha subito dei torti, questi sono stati sempre riparati nei concorsi successivi.

Ora però siamo passati da un'università di élites a un'università di massa. In conseguenza quei tempi sono passati e fra professori e assistenti non vi è più alcun legame di dipendenza gerarchica. Gli assistenti sono liberi da qualsiasi controllo salvo la dipendenza del tutto formale dal Consiglio di Facoltà. Essi hanno cioè ottenuta quella assoluta indipendenza che molti hanno lungamente sognato.

Le cose però non sembrano andare per il verso giusto perché, se alcuni ex-baroni continuano a indirizzare i giovani alla ricerca, seguendo una sorta di vocazione spirituale, altri liberi da ogni responsabilità diretta preferiscono pensare a sè stessi. E quanto ai giovanissimi solo pochi sono in grando di far da sè, mentre avviene che molti appaiono come degli sbandati perché al loro precariato economico e di carriera si unisce un precariato scientifico.

In altre parole, dopo aver posto fine a un sistema sotto molti aspetti non più accettabile, ma per altri ancora funzionante, non si è saputo sostituire ad esso nulla di valido. Vero è che molti attendono un rinnovamento dalle future strutture dipartimentali, nell'ambito delle quali si dovrebbe dar vita a una ricerca scientifica pianificata o finalizzata, approvata collegialmente da tutti i docenti. Ma questo sistema potrà andar bene per certe discipline sperimentali o tecnologiche, non certo per le discipline speculative quali la matematica.

Questo problema di porre su nuove basi la ricerca può sembrare di carattere generale ma in effetti non lo è che in parte perché le soluzioni potranno essere diverse da sede a sede e per scegliere le soluzioni migliori bisognerà tener conto delle caratteristiche intellettuali e morali delle persone destinate a realizzarle. In altre parole ai dipartimenti e ai loro organi direttivi toccherà di svolgere una azione in profondità non solo sul piano scientifico e organizzativo, ma anche sul piano umano e psicologico.

È questo un compito di estrema difficoltà da cui dipende però in modo essenziale se nel campo delle nostre discipline i prossimi decenni segneranno, nel nostro paese, un progresso o una stasi.

Conclusione. — Per concludere questo discorso vorrei formulare l'augurio che al futuro Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli arrida lo stesso successo che ha avuto quell'atto di contestazione ante litteram che fu a suo tempo la fondazione dell'Istituto di Matematica.

È questo un augurio, ma non una previsione perché prevedere oggi dal di dentro l'evolversi di certe situazioni è pressocché impossibile. E se anche io sono ormai più uno spettatore che un attore nella vita dell'Istituto, ci sono stato troppo dentro per poter dare giudizi spassionati. Certo però che allora i tempi erano diversi. En-

travamo in un periodo aperto a tutte le speranze e malgrado molte delusioni alcune di quelle speranze si sono realizzate e poi il coraggio era sorretto dalla moderazione e dal buonsenso. Oggi al contrario attraversiamo un periodo di dissacrazioni o di scetticismo e, se non manca il coraggio, la moderazione e il buonsenso scarseggiano. Tuttavia non bisogna disperare perché, se a noi vecchi è spesso connaturata una certa dose di pessimismo, forse i giovani ci dimostreranno che abbiamo torto e che il futuro ci riserva giorni migliori.

Oppure sfasceranno tutto. Quod deus avertat.

BIBLIOGRAFIA

[1] Annuari dell'Università degli studi di Napoli 1860/1975.

[2] Notizie intorno all'origine, formazione e stato presente della R. Università di Napoli per l'Esposizione Nazionale di Torino nel 1884.

[3] F. Amodeo, *Vita matematica napoletana.* I (1905), II (1924).

[4] A. Cutolo, *L'Università di Napoli.* (1933).

[5] G. Loria, *Nicola Fergola e la Scuola di Matematici che lo ebbe a duce.* Atti della R. Università di Genova (1892).

[6] G. Loria, *Pro veritate, risposta alle osservazioni del prof. Pascal.* Rivista di Matematica, **3** (1893).

[7] E. Pascal, *A proposito di un libro del prof. Gino Loria sulla Scuola Napolitana di Matematica nella prima metà del secolo.* Rivista di Matematica, **2** (1892).

[8] G. Torelli, *La Facoltà Matematica di Napoli nel periodo dal 1860 al 1875.* Atti Acc. Pontaniana, **53** (1923).

[9] F. Torraca, L. Russo e altri, *Storia dell'Università di Napoli.* Ed. Ricciardi Napoli (1924).

[10] F. G. Tricomi, *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario.* Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, S. 4ª n. 1 (1962).

Per i testi delle disposizioni legislative richiamate rimandiamo per il periodo fino al 1906 a

B. Amante, *Nuovo codice scolastico vigente.* I (1901), II (1907),

per il Regolamento del 1910 a [1] 1909/10,

per il periodo successivo a

N. Spano, *La legislazione universitaria italiana* (1947).

L. Zanobini e A. Bracci, *Codice delle leggi sulla pubblica istruzione.* III (1963).

G. Iorio, *Legislazione universitaria* (1955, 1968, 1974).

Sulla sequenza C-terminale dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino

Nota di MASSIMO ABET, EMMANUELE DE VENDITTIS,
GENNARO MARINO e GIOVANNI SANNIA
presentata dal socio ENZO LEONE

(Adunanza del 7 gennaio 1977)

RIASSUNTO. — Esperimenti di idrolisi prolungata della aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino con carbossipeptidasi A e carbossipeptidasi B consentono di ordinare, in quattro distinti gruppi, complessivamente 19 residui amminoacidici. I risultati vengono discussi riferendosi in particolare alla sequenza C-terminale del corrispondente enzima da cuore suino di cui è nota l'intera struttura primaria. Contrariamente a quanto è stato osservato per la regione N-terminale e per quella del sito attivo, viene confermato che il livello di omologia in questa regione della molecola proteica non è particolarmente elevato.

SUMMARY. — Cytosolic aspartate aminotransferase from ox heart has been extensively digested with carboxypeptidase A and carboxypeptidase B. 19 amino acid residues are ordered as four different groups. The analytical data are discussed with reference to the C-terminal sequence of the corresponding enzyme from pig heart, whose complete primary structure has been described. Whereas a high degree of homology has been already reported for the N-terminal regions and the active site peptides of the two enzymes, results presented in this paper confirm the low homology content existing at the two C-terminal regions.

INTRODUZIONE.

Le proprietà chimiche, chimico-fisiche e catalitiche dell'aspartato aminotransferasi (EC 2.6.1.1) citoplasmatica dal muscolo cardiaco bovino sono state oggetto di numerosi studi da parte del nostro gruppo di ricerca da lungo tempo [1, 2]. I risultati più significativi sono stati riportati in una rassegna sintetica di SCARDI [3]. È ora in corso presso il nostro Istituto una indagine intesa a stabilire eventuali relazioni strutturali tra l'aspartato aminotransferasi citoplasmatica bovina ed il corrispondente enzima isolato dal citoplasma del muscolo cardiaco suino. Tra le aspartato aminotransferasi quella citoplasmatica da cuore suino è infatti di gran lunga la più studiata

(si veda, ad esempio, la rassegna di BRAUNSTEIN, 4) ed inoltre recentemente due gruppi di ricerca indipendenti ne hanno descritto la struttura primaria [5, 6].

La nostra ricerca che ha come strategia quella di rivolgersi alle porzioni più significative della catena polipeptidica, è iniziata con la determinazione delle sequenze N- e C-terminali sulla proteina *in toto* [7] e di quella del peptide termolitico in cui è presente il residuo di lisina che lega il coenzima [8].

Il paragone con la sequenza dell'enzima da cuore suino ha finora mostrato una completa identità tra le due sequenze a livello del peptide al sito attivo, un notevolissimo grado di omologia a livello della regione N-terminale (una sola sostituzione conservativa su 12 residui), mentre non sembra essere particolarmente elevato il grado di omologia relativo alla regione C-terminale.

Per poter chiarire meglio questo aspetto la proteina è stata pertanto sottoposta ad una prolungata idrolisi con carbossipeptidasi A e carbossipeptidasi B. I risultati vengono riportati e discussi in questa nota.

METODI.

Preparazione dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino.

L'aspartato aminotransferasi da cuore bovino è stata purificata secondo la metodica descritta da MARINO e coll. [1] sostituendo i passaggi con allumina Cγ e con idrossiapatite con una cromatografia consecutiva su SP- e QAE-Sephadex a pH 6,3 [9].

Digestione con carbossipeptidasi A.

La digestione con carbossipeptidasi A è stata eseguita essenzialmente secondo quanto descritto da AMBLER [10].

L'enzima dopo essere stato a lungo dializzato è stato deionizzato mediante cromatografia su una resina a letto misto (Biorad AG 501 × 8). Questo trattamento preliminare permetteva di eliminare eventuali amminoacidi adsorbiti dalla molecola proteica e consentiva di ottenere dei bassi valori di « bianco ».

La proteina veniva poi denaturata (urea 8 M, TRIS-HCl 0,2 M pH 8,6, EDTA 0,02 M per 48 ore a temperatura ambiente) ed aminoetilata come descritto da COLE [11]. I reattivi vanivano allontanati per dialisi contro acqua distillata e la proteina precipitata

veniva raccolta per centrifugazione e sospesa in tampone N-etil morfolina acetato 0,2 M pH 8,6, sodio dodecil solfato 0,1 % contenente norleucina e acido α-amino-β-guanidopropionico come standard interni. Alla sospensione, mantenuta sotto agitazione a 37°C, si aggiungeva una soluzione di carbossipeptidasi A (SIGMA, ST. LOUIS) in rapporto 1 : 30 in peso con la proteina. La esopeptidasi era stata precedentemente trattata come descritto da AMBLER [10] per allontanare eventuali amminoacidi liberi presenti. Aliquote della miscela di idrolisi venivano prelevate al tempo 0 e a sei tempi diversi (0,5; 1; 2; 4; 8 e 24 ore). La reazione di idrolisi veniva interrotta per aggiunta di acido acetico glaciale fino a pH 2,2. Il precipitato veniva allontanato per centrifugazione ed il supernatante suddiviso in 3 porzioni. Due porzioni venivano utilizzate per la determinazione del contenuto in amminoacidi (analizzatore di amminoacidi Unichrom della Beckman fornito di un colorimetro mod. B), mentre la terza porzione veniva sottoposta ad una blanda idrolisi acida (HCl 2 N, 100°C, 2 ore [11]) che permetteva una idrolisi quantitativa del legame ammidico dell'asparagina e della glutammina. Dopo il trattamento acido il campione veniva portato a secco per evaporazione, sospeso in tampone citrato pH 2,2 e sottoposto all'analisi degli amminoacidi acidi e neutri. In questo modo si poteva determinare il contenuto in glutammina e asparagina come incremento delle quantità di acido glutammico e aspartico prima e dopo l'idrolisi. Il contenuto in serina e treonina veniva determinato sul campione idrolizzato. Analisi di soluzioni standard, contenenti quantità note di questi amminoacidi, trattate come descritto precedentemente, hanno dimostrato infatti che il recupero è del tutto quantitativo.

Digestione con carbossipeptidasi B.

Dopo 24 ore di idrolisi con carbossipeptidasi A viene aggiunta alla miscela carbossipeptidasi B (SIGMA ST. LOUIS), anch'essa precedentemente trattata come descritto da AMBLER [10], in rapporto 1 : 100 in peso rispetto alla proteina. Al tempo 0 e a sei tempi diversi (0,5, 1, 2, 4, 6 e 24 ore) venivano prelevate delle opportune aliquote che venivano trattate così come precedentemente descritto.

RISULTATI.

La velocità di comparsa dei primi amminoacidi liberati durante la digestione dell'aspartato aminotransferasi con carbossipeptidasi A

è mostrata in Fig. 1. Gli amminoacidi che sono rilasciati in modo predominante nei primi tempi della reazione sono, come si può vedere, treonina, valina ed alanina, che già dopo un'ora di idrolisi raggiungono valori prossimi ad 1 mole di amminoacido liberato per mole di subunità. Le quantità relative di tali amminoacidi, osservate a tutti i tempi di idrolisi, dimostrano che i residui amminoacidici

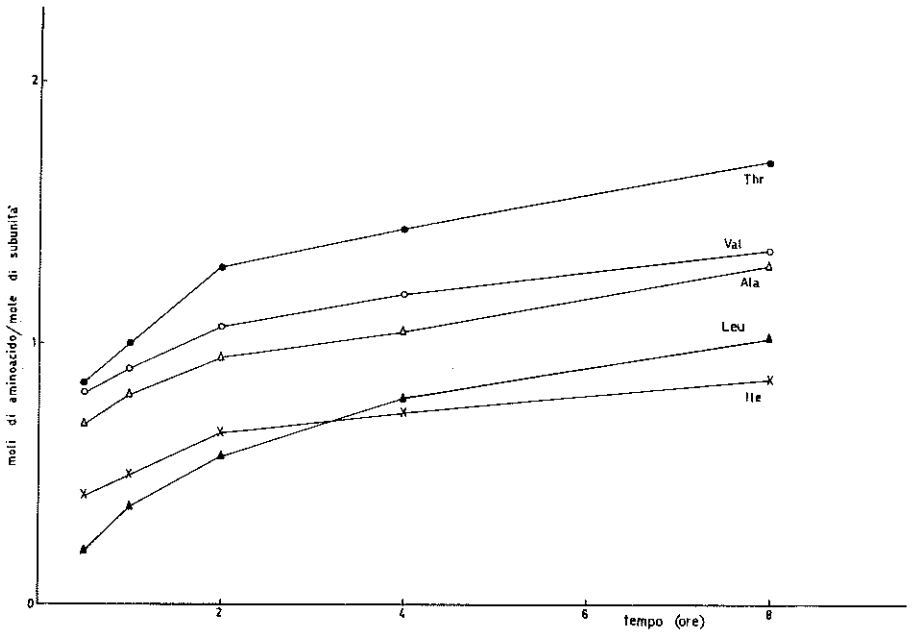


FIG. 1. - Amminoacidi rilasciati nelle prime ore d'idrolisi da parte della carbossipeptidasi A sull'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino.

sono presenti nella molecola dell'aspartato amminotransferasi nell'ordine seguente:

-Ala-Val-Thr.

Anche isoleucina e leucina sono presenti in quantità significative a tempi di idrolisi relativamente bassi, ma liberati con velocità inferiore. Le quantità relative osservate a 30 min., 1 ora e 2 ore consentono però di stabilire che la isoleucina debba precedere la leucina. L'inversione che si osserva dopo la quarta ora di idrolisi è chiaramente da attribuirsi al fatto che un secondo residuo di leucina viene ad essere esposto all'idrolisi della carbossipeptidasi A, come si può dedurre dai dati riportati in tabella 1. In definitiva, dai dati

dei primi tempi di idrolisi, si può assegnare l'ordine in sequenza ai primi 5 residui C-terminali:

-Leu-Ile-Ala-Val-Thr.

I successivi amminoacidi che si presentano all'analisi, in particolare dopo 4 ore di idrolisi, vengono liberati con velocità molto si-

TABELLA 1

Analisi quantitativa degli amminoacidi liberati in seguito al trattamento di 0.8μmoli di aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino, previamente sottoposta ad amminoetilazione, con carbossipeptidasi A e, dopo 24 ore, anche con carbossipeptidasi B. L'analisi dopo 30 ore si riferisce pertanto agli amminoacidi liberati dopo 6 ore di idrolisi in presenza di ambedue le esopeptidasi.

Amminoacido	Moli di amminoacido/mole di subunità		
	8 ore	24 ore	30 (6) ore
Ac. Aspartico	—	—	—
Ac. Glutammico	0,73	0,74	0,90
Treonina	1,69	1,97	2,10
Serina	tracce	0,54	0,90
Glicina	0,35	0,33	0,45
Alanina	1,29	1,58	2,40
Glutammina	0,16	1,12	2,30
Asparagina	0,78	1,77	2,30
Valina	1,35	1,61	1,90
Metionina	0,22	0,26	0,43
Isoleucina	0,86	0,90	1,05
Leucina	1,02	1,17	2,10
Tirosina	0,43	0,60	0,75
Fenilalanina	0,27	0,39	0,75
Lisina	—	—	0,85
Istidina	—	—	0,09
Arginina	—	—	0,91

mili e l'ordine di rilascio è inoltre complicato dalla presenza di residui la cui velocità di idrolisi è « bassa », come la serina e l'asparagina, o addirittura « molto bassa » come l'acido glutammico [10]. A ciò si aggiunge la liberazione molto netta, già dopo le prime due

ore di idrolisi, di un ulteriore residuo di treonina come è mostrato in Fig. 1. Sulla base dei risultati dell'analisi dopo 8 ore di idrolisi (tabella 1) si può assumere che ai cinque residui già ordinati debba seguire una terna di residui (Asn, Glu e Thr) non ordinabili per quanto detto sopra. Infine, come mostrato in tabella 1, dopo 24 ore di idrolisi con carbossipeptidasi A altri residui amminoacidici vengono ad essere liberati in maniera significativa e il risultato di tale analisi indica che ai residui già menzionati debbano seguire almeno i seguenti altri sei: Ala, Asn, Gln, Ser, Tyr e Val [1].

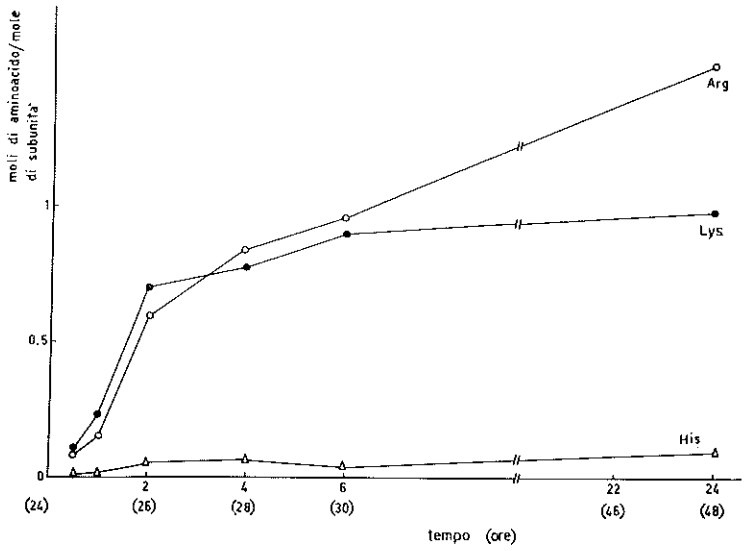


FIG. 2. - Amminoacidi basici rilasciati in seguito all'aggiunta, dopo 24 ore, di carbossipeptidasi B alla miscela di idrolisi dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino con carbossipeptidasi A. I valori in parentesi si riferiscono ai tempi complessivi di idrolisi.

Dopo 24 ore di idrolisi con carbossipeptidasi A è stata aggiunta alla miscela di reazione carbossipeptidasi B. La Fig. 2 riporta l'andamento della velocità di liberazione degli amminoacidi basici. Si può osservare che sia la lisina che l'arginina vengono liberate rapidamente raggiungendo il valore di una mole per mole di subunità dopo sei ore di idrolisi in presenza della esopeptidasi specifica. Le quantità relative liberate dopo 30 min., 1 ora e 2 ore di idrolisi sembrano indicare che il residuo di lisina preceda quello di arginina, sebbene dopo 4 ore di idrolisi si possa osservare una inversione nella

[1] Occorre notare che, in tutte le analisi, risultano completamente assenti istidina e acido aspartico, residui che sono presenti rispettivamente nelle posizioni 405 e 398 nella sequenza dell'enzima da cuore suino (si veda figura 3).

cinetica dovuta alla liberazione di un secondo residuo di arginina come si può dedurre dai risultati dopo 24 ore di idrolisi con carbossipeptidasi B. L'analisi degli amminoacidi neutri ed acidi liberati dopo complessive 30 ore di idrolisi con carbossipeptidasi A e 6 ore di idrolisi con carbossipeptidasi B mostra, come riportato nella terza colonna della tabella 1, un ulteriore incremento di glutammina, leucina e fenilalanina.

Discussione.

Sulla base dei risultati ottenuti dall'idrolisi della proteina sia con carbossipeptidasi A che con carbossipeptidasi B si può desumere che nella regione C-terminale della aspartato aminotransferasi cito-

a - (Arg, Gln, Leu, Lys, Phe) - (Ala, Asn, Gln, Ser, Tyr, Val) -

b - Gly - Leu - Thr - Thr - Lys - Asn - Leu - Asp - Tyr - Val - Ala -
395 400

a - (Asn, Glu, Thr) - Leu - Ile - Ala - Val - Thr.

b - Thr - Ser - Ile - His - Glu - Ala - Val - Thr - Lys - Ile - Gln.
405 410

Fig. 3. - Sequenza C-terminale dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino (*a*) paragonata con l'analoga sequenza del corrispondente enzima da cuore suino (*b*), il relativo allineamento è discusso nel testo.

plasmatica da cuore bovino debbono essere presenti i residui amminoacidici eventualmente ordinati come è mostrato in Fig. 3. Sono stati ordinati complessivamente 19 residui amminoacidici distinguibili in quattro gruppi diversi. Il primo relativo agli ultimi cinque residui della proteina per il quale è stato confermato l'ordine in sequenza già riportato precedentemente [7]. Un secondo gruppo di amminoacidi che vengono liberati nelle prime ore di idrolisi, ma con velocità molto simili per cui non è possibile stabilirne la sequenza. Un terzo gruppo di residui relativi ad amminoacidi liberati dopo lunghi tempi di idrolisi in quantità significative, ed, infine, un quarto gruppo di residui relativi ad amminoacidi che vengono liberati per azione specifica della carbossipeptidasi B o per azione concertata di ambedue le esopeptidasi.

L'ordine proposto non è però basato unicamente sull'analisi dei risultati dopo idrolisi enzimatiche, ma tiene conto anche della eventuale omologia che dovrebbe esistere fra le due proteine che esplicano la stessa attività, nella stessa frazione cellulare, nello stesso organo di due organismi animali non eccessivamente divergenti nella

scala filogenetica quali il bue ed il maiale. Infatti se si ipotizza che una trasversione abbia mutato il segnale (AA^{A}_{G}), relativo al residuo di lisina presente nell'enzima suino in posizione 410, in un segnale di arresto (UA^{A}_{G}), gli ultimi cinque residui dell'enzima da cuore bovino si possono allineare così come è mostrato in Fig. 3. Il residuo C-terminale di treonina dell'enzima da cuore bovino viene a corrispondere così con il residuo di treonina 409 dell'enzima da cuore di maiale. In questo caso si può osservare in ognuno dei quattro gruppi di residui l'esistenza di un certo grado di omologia con i corrispondenti segmenti peptidici presenti nella regione C-terminale dell'enzima da cuore suino.

In conclusione i risultati presentati in questo lavoro consentono di estendere il grado di conoscenza della regione C-terminale dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino e confermano che il grado di omologia, rispetto al corrispondente enzima da cuore suino, di questa regione della molecola non appare eccessivamente elevato.

Istituto di Chimica Organica e Biologica dell'Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Marino, A. M. Greco, V. Scardi & R. Zito, Biochem. J., **99**, 589 (1966).
[2] G. Marino, V. Scardi & R. Zito, Biochem. J., **99**, 595 (1966).
[3] V. Scardi in *Pyridoxal Catalysis: Enzymes and Model Systems*, pag. 179, Interscience, New York (1968).
[4] A. E. Braunstein in *The Enzymes*, pag. 379, vol. 9, Academic Press, New York (1973).
[5] Yu. A. Ovchinnikov, C. A. Egorov, N. A. Aldanova, M. Yu. Feigina, V. M. Lipkin, N. G. Abulaev, E. V. Grishin, A. P. Kiselev, N. N. Modyanov, A. E. Braunstein, O. L. Polyanovsky & V. V. Nosikov, *FEBS* Letters, **29**, 31 (1973).
[6] S. Doonan, H. J. Doonan, R. Hanford, C. A. Vernon, J. M. Walker, L. Da S. Airoldi, F. Bossa, D. Barra, M. Carloni, P. Fasella & F. Riva, Biochem. J., **149**, 497 (1975).
[7] G. Sannia, P. Petrilli & G. Marino, Biochim. Biophys. Acta, inviato per la pubblicazione.
[8] G. Sannia, M. Abet, E. De Vendittis & G. Marino, manoscritto in preparazione.
[9] P. Petrilli, G. Sannia & G. Marino, J. Chromatog., inviato per la pubblicazione.
[10] R. P. Ambler in *Methods in Enzymology*, pag. 155, vol. 11, Academic Press, New York (1967).
[11] R. D. Cole in *Methods in Enzymology*, pag. 315, vol. 11, Academic Press, New York (1967).
[12] P. E. Wilcox in *Methods in Enzymology*, pag. 63, vol. 11, Academic Press, New York (1967).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, M. Covello e R. A. Nicolaus.

Le immagini epimorfe di un M-piano

Nota di CLAUDIO BARTOLONE
presentata dal socio corrispondente GIANFRANCO PANELLA

(Adunanza del 5 febbraio 1977)

ZUSAMMENFASSUNG. — Untersucht werden die epimorphen Bilder einer nicht notwendigerweise archimedischen M-Ebene. Beschlossen wird so die Klassifikation der epimorphen Bilder einer M-Ebene, die J. ANDRÈ begonnen hat.

RIASSUNTO. — Si studiano le immagini epimorfe di un M-piano non necessariamente archimedeo. Si conclude così la classificazione delle immagini epimorfe di un M-piano iniziata da J. ANDRÈ.

J. ANDRÈ ([3], teorema 5.1) ha classificato i piani proiettivi che sono immagini epimorfe di un (x, X)-M-piano archimedeo α in un M-epimorfismo, ossia in un epimorfismo nel quale l'immagine del punto x non appartenga all'immagine della retta X. L'indagine sulle immagini epimorfe di un M-piano archimedeo in epimorfismi che non siano M-epimorfismi è stata condotta da G. PANELLA il quale, in [7], ha provato che ogni piano proiettivo immagine di un M-piano archimedeo in un epimorfismo, è anche immagine di tale piano in un M-epimorfismo.

F. BARTOLOZZI, in [5], ha studiato le immagini M-epimorfe di un M-piano (non necessariamente archimedeo). Si pone, pertanto, il problema di classificare le immagini epimorfe di un M-piano non archimedeo in epimorfismi che non siano M-epimorfismi. In questa Nota risolviamo tale problema, classificando i piani proiettivi che sono immagini epimorfe di un M-piano (non necessariamente archimedeo).

I risultati da noi ottenuti mettono in evidenza, essenzialmente, i seguenti fatti:

(I) Esistono M-piani che posseggono immagini epimorfe le quali non risultano loro immagini M-epimorfe: ossia, il risultato di G. PANELLA già menzionato non si trasporta al caso non archimedeo.

(II) Le immagini epimorfe di un M-piano che non sono sue immagini M-epimorfe sono piani proiettivi disarguesiani: ossia, un epi-

morfismo da un M-piano a un piano proiettivo non desarguesiano è, di necessità, un M-epimorfismo del piano.

1. — In questo numero richiamiamo alcuni risultati essenziali per rendere autonoma la nostra esposizione; per ulteriori informazioni, rimandiamo a G. PICKERT [8].

A). Se α è un piano proiettivo, un *omomorfismo* $\Omega : \alpha \to \alpha'$ da α al piano proiettivo α' è definito da applicazioni $\Omega_1 (\Omega_2)$ dai punti (dalle rette) di α ai punti (alle rette) di α' tali che: se p è un punto di α, R una sua retta e se risulta $p \in R$, deve essere $\Omega_1 (p) \in \Omega_2 (R)$ [1]. Quando queste applicazioni sono suriettive, iniettive o biettive, Ω si dice *epimorfismo, monomorfismo* o *isomorfismo*. Un isomorfismo dal piano proiettivo α a sè stesso (*collineazione* di α) si dice una (v, L)-*omologia* se fissa ogni retta per il punto v di α ed ogni punto della retta L. α è (v, L)-transitivo se il gruppo delle (v, L)-omologie è transitivo sopra i punti, diversi da v e non appartenenti ad L, di una (e, quindi, di ogni) retta di α passante per v e diversa da L.

H. LENZ, in [6], ha classificato i piani proiettivi mediante le possibili configurazioni formate da quelle coppie punto-retta (p, R), con $p \in R$, per cui un piano è (p, R)-transitivo.

Se α è piano proiettivo (v, L)-transitivo e $v \in L$ (allora α si dice C-*piano*), fissato in esso un riferimento (o, u, v, e) [2] con $u \in L$, è possibile dare coordinate ad α con un sistema cartesiano C [3] che ha per sostegno l'insieme dei punti, distinti da v, della retta $o \vee v$ [4]. Viceversa, a partire da un sistema cartesiano C si può costruire un C-piano $\alpha (C)$ [5].

B). Se α è un C-piano, α è piano proiettivo ordinato (si veda [8]; pag. 221 e segg.) se e solo se è ordinato [6] un sistema cartesiano che lo coordinatizza.

[1] Nel seguito, per snellire il simbolismo, scriveremo Ω in luogo di Ω_1 e Ω_2.

[2] Cioè, o, u, v, e sono punti di α di cui mai tre allineati.

[3] Le operazioni di addizione e di moltiplicazione che competono a C verificano le seguenti proprietà: C è gruppo rispetto all'addizione (con elemento neutro $\mathbf{o}$); per ogni $a \in C$ risulta $a\,\mathbf{o} = \mathbf{o}\,a = \mathbf{o}$; esiste $1 \in C$, $1 \neq \mathbf{o}$, tale che $a\,1 = 1\,a = a$ se $a \in C$; se $a, b, c \in C$ con $a \neq b$, le equazioni $-a\,x + b\,x = c$ e $x\,a - x\,b = c$ sono univocamente risolubili in C.

[4] Se a, b (R, S) sono due punti (rette) del piano proiettivo α ed è $a \neq b$ ($R \neq S$), indicheremo con $a \vee b$ ($R \wedge S$) la retta (il punto) di α congiungente a e b (intersezione di R ed S).

[5] Per migliori precisazioni di tali risultati si veda ad esempio [5]; nel seguito adotteremo il simbolismo e le notazioni ivi impiegate.

[6] Un sistema cartesiano $C = C(+, \cdot)$ si dice *ordinato* rispetto ad un ordinamento $<$ definito sul suo insieme sostegno C, se sono verificate le condizioni: 1) $C(+; <)$ è gruppo ordinato; 2) se $a, b, c, d \in C$ e $a < b$, $c < d$, allora $a\,d - a\,c < b\,d - b\,c$.

J. ANDRÈ ([1]) ha introdotto, in un piano proiettivo ordinato, il concetto di (x, Y)-semitransitività [7] e studiato ([1] e [2]) la particolare classe di C-piani ordinati individuata dalla seguente

DEFINIZIONE 1. — Il piano proiettivo ordinato α è un M-*piano* se esistono in esso tre punti non allineati o, u, v tali che:

(i) α è $(v, u \cup v)$-transitivo,

(ii) α è $(o, u \cup v)$-semitransitivo e $(v, o \cup u)$-semitransitivo,

(iii) una delle semitransitività esistenti in α per la condizione precedente è propria (ossia, non è una transitività).

J. ANDRÈ ([1], [2]) e J.C. D. S. YAQUB [12] hanno fornito le seguenti caratterizzazioni geometriche e algebriche degli M-piani. Un piano proiettivo ordinato α è un M-piano se e soltanto se esistono un suo punto x e una sua retta X, con $x \notin X$ (α allora si dirà un (x, X)-M-*piano*), tali che

(j) α è (p, R)-transitivo con $p \in R$, quando e solo quando $p \in X$ e $R = p \cup X$ [8],

(jj) α è (p, R)-semitransitivo quando $p \notin R$, $p \in X$ e $x \in R$.

Fissato un riferimento (o, u, v, e) dell'(x, X)-M-piano α, con $u = x$ e $o, v \in X$ (un tale riferimento si dice un M-*riferimento*), il sistema cartesiano ordinato $C = C(+, \circ; <)$ delle coordinate di α in tale riferimento non è un corpo e soddisfa le condizioni

$$(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c \text{ e } (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ se } a, b, c \in C \text{ e } c > \mathbf{o},$$

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c \text{ e } (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ se } a, b, c \in C \text{ e } a > \mathbf{o}$$

(un tale sistema cartesiano ordinato è chiamato da J. ANDRÈ un M-*sistema*); inoltre C si desume da un corpo ordinato $K = K(+, \cdot\ ; <)$ (univocamente determinato) e da un suo elemento positivo e diverso da 1, k, ponendo $C(+; <) = K(+; <)$ in quanto gruppi additivi ordinati,

[7] Se x è un punto e Y una retta del piano proiettivo ordinato α e se $x \notin Y$, si dice che α è (x, Y)-*semitransitivo* se esiste una retta R per x tale che esista una (x, Y)-omologia di α che trasforma p in q non appena p, q siano due punti appartenenti a $R - \{x, Y \cap R\}$ e non separati (nel senso dell'ordinamento di α) dai punti x e $Y \cap R$.

[8] Pertanto, un M-piano è un piano proiettivo di classe III nella classificazione di Lenz.

$a \circ b = a\, k\, b$ se $a, b < \mathbf{o}$ e $a \circ b = a\, b$ altrimenti ($a, b \in C$). Inversamente, assegnato un corpo ordinato K, a partire da esso e da un suo elemento positivo e diverso da 1, k, con la precedente costruzione si ottiene un M-sistema K_k [9] e il piano proiettivo $\alpha(K_k)$ costruito su di esso risulta un (x, X)-M-piano, dove $x = (\mathbf{o})$ e $X = [\mathbf{o}]$.

Due M-sistemi K_k e $K'_{k'}$ sono isomorfi se e solo se esiste un isomorfismo $\varphi : K \to K'$ dal corpo K al corpo K' che conserva l'ordinamento e tale che $\varphi(k) = k'$ ([5], lemma 2.2). Se K_k e $K'_{k'}$ sono M-sistemi ciascuno dei quali dà coordinate all'M-piano α in un suo M-riferimento, considerato l'elemento k^{-1} di K, l'M-sistema $K'_{k'}$ risulta isomorfo all'M-sistema K_k oppure all'M-sistema $K_{k^{-1}}$ [10]. Pertanto, ogni M-piano α individua un unico corpo coordinato K_α (a meno di isomorfismi che conservano l'ordinamento) ed un unico suo elemento positivo e diverso da 1, k_α, tali che, se K_k è M-sistema delle coordinate di α (in un suo M-riferimento), K_k risulta isomorfo all'uno o all'altro degli M-sistemi $K_{\alpha k_\alpha}$ e $K_{\alpha k_\alpha^{-1}}$. Nel seguito, quando sarà dato l'M-piano α, si sottintenderà assegnato anche il corpo K_α e il suo elemento k_α.

Siano $K = K(+, \cdot\,; <)$ un corpo ordinato, K^- l'insieme dei suoi elementi negativi, $d \in K^-$, $k \in K$ con $\mathbf{o} < k \neq 1$. Sia, inoltre, $f : K^- \to K^-$ la funzione definita ponendo (dove $x \in K^-$)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad d \leq x \\ (x - d)\, k + d & \text{se} \quad x < d\,. \end{cases}$$

Per quanto provato da L. PROFERA ([9], [10]), la struttura algebrica $K_{k,d} = K_{k,d}(+, \circ\,; <)$ il cui gruppo additivo sostegno coincide con il gruppo additivo sostegno $K(+\,; <)$ del corpo ordinato K (in quanto gruppo ordinato) e la cui moltiplicazione è così definita (se $x, y \in K_{k,d}$):

$$x \circ y = \begin{cases} f(x)\, y & \text{se} \quad x, y < \mathbf{o} \\ x\, y \text{ negli altri casi} \end{cases}$$

è sistema cartesiano ordinato e risulta

(R1) $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ se $\mathbf{o} < c$,

(R2) $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$ se $\mathbf{o} < a$,

(R3) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ se $\mathbf{o} < c$ [11].

[9] Ora, e nel seguito, adotteremo la scrittura K_k per indicare l'M-sistema dedotto dal corpo ordinato K e dal suo elemento k secondo quanto sopra precisato.

[10] Questo risultato è implicito nella dimostrazione del teorema 2.1 di [5].

[11] Un sistema cartesiano ordinato soddisfacente (R1), (R2) ed (R3) è detto da L. PROFERA un M_1-*sistema* ([9], definizione 2.2). L. PROFERA ha, anche, stabilito ([10],

Se (o, x, v, e) è un M-riferimento dell'(x, X)-M-piano α, scelto $u \in x \cup v$, $x \neq u \neq v$, in modo che il segmento proiettivo di estremi u e v contenente il punto $w = (o \cup e) \cap (x \cup v)$ sia contenuto in uno dei due segmenti proiettivi di estremi x e v, il sistema cartesiano ordinato delle coordinate di α nel riferimento (o, u, v, e) è un sistema cartesiano ordinato $K_{k,d}$ [12] e risulta, in tali coordinate, $x = (d)$ ([10], teorema 3). Inversamente ([10], corollario 2), se il C-piano ordinato α ammette in un suo riferimento (o, u, v, e) come sistema delle coordinate un sistema cartesiano $K_{k,d}$, α è (x, X)-M-piano se $x = (d)$ e $X = o \cup v$.

C). Ricordiamo i seguenti risultati dovuti a J. ANDRÈ [3] e L. A. SKORNJAKOV [11]. Se α è un proiettivo (v, L)-transitivo con $v \in L$, ossia un C-piano, siano $\Sigma : \alpha \to \alpha'$ un epimorfismo (non isomorfismo) dal piano proiettivo α al piano proiettivo α', (o, u, v, e) un riferimento di α associato nell'epimorfismo Σ al riferimento (o', u', v', e') di α' (ossia risulta $\Sigma(o) = o'$, $\Sigma(u) = u'$, $\Sigma(v) = v'$, $\Sigma(e) = e'$) e sia $u \in L$ [13]. In tali condizioni, il piano α' risulta $(v', u' \cup v')$-transitivo e, nei riferimenti in questione, i piani α e α' hanno come sistema di coordinate sistemi cartesiani C e C' rispettivamente. L'epimorfismo Σ definisce, per restrizione, una applicazione $\pi : C \to C' \cup \{\infty\}$ che è un posto del sistema cartesiano C secondo la seguente

DEFINIZIONE 2. — Siano $C = C(+, \cdot)$ e $C' = C'(+, \cdot)$ sistemi cartesiani. Un'applicazione suriettiva $\pi : C \to C' \cup \{\infty\}$ è un *posto di* C (*con sistema cartesiano residuo* C') se verifica le seguenti condizioni (nelle quali a, b, x, y indicano elementi di C):

(P1) $\pi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, $\pi(1) = 1$;

(P2) se $\pi(a)$, $\pi(b) \neq \infty$ è $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$ e $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$;

(P3) se $\pi(a) \neq \infty$, $\pi(b) = \infty$ è $\pi(a + b) = \pi(b + a) = \infty$;

(P4) se $\pi(a) \neq \mathbf{o}$, $\pi(b) = \infty$ è $\pi(ab) = \pi(ba) = \infty$;

lemma 3) che la classe dei C-piani ordinati ciascuno dei quali ammette come sistema di coordinate (in un opportuno riferimento) un M_1-sistema proprio (cioè non corpo), da lui denominata classe degli M_1-*piani* (*propri*), è costituita da piani proiettivi appartenenti alla classe II oppure alla classe III della classificazione di Lenz.

[12] G.PANELLA ha dimostrato in [7] (lemma 4) che il corpo ordinato K non è indipendente, in quanto corpo ordinato, dal corpo ordinato K_α associato all'M-piano α, precisando che l'M-sistema delle coordinate di α nel suo riferimento (o, x, v, e) è isomorfo all'M-sistema K_k. Pertanto esiste un isomorfismo $\varphi : K_\alpha \to K$ dal corpo K_α al corpo K che conserva l'ordinamento. Tale circostanza interverrà in modo determinante nel seguito.

[13] L'esistenza di siffatti riferimenti è immediata conseguenza della definizione di epimorfismo tra piani proiettivi.

(P5) se $\pi(x)=\infty$, $\pi(-ax+bx)\neq\infty$ è $\pi(a)=\pi(b)$;

(P6) se $\pi(a)=\infty$, $\pi(ax-ay)\neq\infty$ è $\pi(x)=\pi(y)$;

(P7) se $bx+ay=ax$, $\pi(a)=\pi(x)=\pi(bx)=\pi(ay)=\infty$ deve risultare $\pi(b)=\infty$ oppure $\pi(y)=\infty$.

Se C è un corpo (in tal caso anche C' risulta tale), le condizioni (P5), (P6), (P7) discendono dalle precedenti (P1), ..., (P4) che danno la consueta definizione di posto nel senso della teoria delle valutazioni.

Per il seguito, occorre anche ricordare che (fermi i dati che precedono la definizione 2) se $t\in u\cup v$, se $\Sigma(t)=v'$ e se $t=(d)$ $(d\in C\cup\{\infty\})$ risulta $\pi(d)=\infty$. Viceversa, se C e C' sono sistemi cartesiani, ogni posto $\pi: C\to C'\cup\{\infty\}$ definisce un epimorfismo (non isomorfismo) $\Sigma: \alpha(C)\to\alpha(C')$ dal piano proiettivo $\alpha(C)$, costruito su C, al piano proiettivo $\alpha(C')$, costruito su C', e in Σ i riferimenti $((\mathbf{o},\mathbf{o}),(\mathbf{o}),(\infty),(1,1))$ di $\alpha(C)$ e $((\mathbf{o},\mathbf{o}),(\mathbf{o}),(\infty),(1,1))$ di $\alpha(C')$ risultano associati (si veda [3], teorema 2.1). In più, se p appartiene alla retta $(o)\cup(\infty)$ di $\alpha(C)$, se risulta $p=(d)$ con $d\in C$ e se $\pi(d)=\infty$, si ha $\Sigma(p)=(\infty)$.

2. — Siano $K=K(+,\cdot;<)$ un corpo ordinato, $d,k\in K$ con $d<\mathbf{o}<k\neq 1$, $K_{k,d}=K_{k,d}(+,\circ;<)$ il sistema cartesiano ordinato desunto da K e dai suoi elementi k e d secondo quanto precisato al n. 1, B). Con tali dati, sussiste il seguente

LEMMA 1. — *Sia* $\pi: K_{k,d}\to C'\cup\{\infty\}$ *un posto del sistema cartesiano ordinato* $K_{k,d}$ *per il quale si abbia* $\pi(d)=\infty$. *Allora il sistema cartesiano* C' *è un corpo,* $\pi: K\to C'\cup\{\infty\}$ *è un posto del corpo ordinato* K *e risulta*

(i) $$\pi(x)=\infty \text{ se } x\in K \text{ e } x\leq d,$$

oppure

(ii) $$\pi(d)=\infty \text{ e } \pi(d(k-1))=\mathbf{o}.$$

Dimostrazione. — Cominceremo col provare che $C'=C'(+,\cdot)$, sistema cartesiano residuo di $K_{k,d}$ rispetto al posto π, risulta un corpo. Supponiamo che

(0) $x\circ y>\mathbf{o}$ se $\pi(x)=\pi(y)=x'\neq\mathbf{o}$ $(x,y\in K_{k,d},\ x'\in C')$ [14].

[14] Cioè, C' è π-ordinabile secondo la definizione 2.1 data da F. Bartolozzi in [5].

Allora, se si pone $\mathbf{o} <' x'$ $(x' \in C',\ x' \neq \mathbf{o})$ quando e solo quando $x \in K_{k,d}$ e $\pi(x) = x'$ hanno come conseguenza $\mathbf{o} < x$, si individua un ordinamento lineare nel sostegno del sistema cartesiano C' e $C'(+,\cdot;<')$ risulta sistema cartesiano ordinato ([5], lemma 1.1). Inoltre, se $a', b', c' \in C'$, con $\mathbf{o} <' c'$, posto $\pi(a) = a'$, $\pi(b) = b'$, $\pi(c) = c'$ $(a, b, c \in K_{k,d})$, giacché $\mathbf{o} < c$ per la definizione stessa di $<'$ (quindi $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$ per quanto richiamato al n. 1, B)), risulta $(a' + b')\, c' = (\pi(a) + \pi(b))\, \pi(c) = \pi((a + b) \circ c) = \pi(a \circ c + b \circ c) = \pi(a)\, \pi(c) + \pi(b)\, \pi(c) = a'\, c' + b'\, c'$, cioè per C' vale la (R1) del n. 1. Analogamente si provano (R2) ed (R3) e si può concludere, se C' non fosse corpo, che il piano $\alpha(C')$, costruito su C', è un piano proiettivo di classe II oppure di classe III nella classificazione di Lenz ([10], lemma 3; si veda anche [11]). Per quanto ricordato al n. 1, C), π definisce un epimorfismo (non isomorfismo) $\Sigma : \alpha(K_{k,d}) \to \alpha(C')$ dal piano proiettivo $\alpha(K_{k,d})$, costruito su $K_{k,d}$, al piano proiettivo $\alpha(C')$, costruito su C'; inoltre, per il punto x della retta $(\mathbf{o}) \cup (\infty)$ di $\alpha(K_{k,d})$ tale che $x = (d)$, si ha $\Sigma(x) = (\infty)$ poiché $\pi(d) = \infty$. Pertanto, Σ è un epimorfismo da $\alpha(K_{k,d})$ a $\alpha(C')$ tale che $\Sigma(x) \in \Sigma((\mathbf{o}, \mathbf{o}) \cup (\infty))$, cioè, Σ non è un M-epimorfismo dell'M-piano $\alpha(K_{k,d})$ (infatti, per quanto richiamato nella parte B) del numero 1, il piano $\alpha(K_{k,d})$ è un (x, X)-M-piano se $X = (\mathbf{o}, \mathbf{o}) \cup (\infty)$). Siano adesso p' un punto della retta $X' = \Sigma(X)$ di $\alpha(C')$ distinto da $x' = \Sigma(x)$ e p un punto della retta X tale che $\Sigma(p) = p'$ ([3], teorema 3.2). Poiché $\alpha(K_{k,d})$ è $(p, p \cup x)$-transitivo, $\alpha(C')$ risulta (p', X')-transitivo e, quindi, $\alpha(C')$ è un piano proiettivo di classe IV_a (oppure di classe superiore) nella classificazione di Lenz. Di conseguenza, C', in base alle considerazioni fatte in precedenza, è, di necessità, un corpo.

Supponiamo, invece, che non valga (0); allora esiste $x' \in C'$, $x' \neq \mathbf{o}$, ed esistono $x, y \in K_{k,d}$ per cui $\pi(x) = \pi(y) = x'$ e $x \circ y < \mathbf{o}$. Sotto tale ipotesi, comunque si fissi $a' \in C'$, esistono $a, b \in K_{k,d}$ per cui $\pi(a) = \pi(b) = a'$ e $a \circ b < \mathbf{o}$. Infatti, sia z' l'elemento di C' tale che $a' = x'\, z'$ e sia $z \in K_{k,d}$, $z \neq \mathbf{o}$, tale che $\pi(z) = z'$; posto $x \circ z = a$ e $y \circ z = b$, risulta $a' = \pi(x)\, \pi(z) = \pi(x \circ z) = \pi(a)$ e $a' = \pi(y)\, \pi(z) = \pi(y \circ z) = \pi(b)$; inoltre, è $a \circ b < \mathbf{o}$. Siano, adesso, $a', b', c' \in C'$; proviamo che $a'(b' + c') = a'\, b' + a'\, c'$. A tal fine, si considerino $a, b, c \in K_{k,d}$ tali che $\pi(a) = a'$, $\pi(b) = b'$, $\pi(c) = c'$; per quanto precedentemente provato, si può scegliere $a > \mathbf{o}$ e, poiché $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$, risulta $a'(b' + c') = \pi(a)\, (\pi(b) + \pi(c)) = \pi(a \circ (b + c)) = \pi(a \circ b + a \circ c) = \pi(a)\, \pi(b) + \pi(a)\, \pi(c) = a'\, b' + a'\, c'$. Analogamente si verificano le altre condizioni che caratterizzano un corpo e si prova, anche in questo caso, che C' è un corpo.

Stabiliremo, adesso, che $\pi : K \to C' \cup \{\infty\}$ è un posto del corpo K, ossia che verifica le condizioni (P1), ..., (P4) della definizione 2.

Poiché $K_{k,d}(+;<) = K(+;<)$ in quanto gruppi ordinati e $a\,b = a \circ b$ se $a, b \in K = K_{k,d}$ e se non risulta contemporaneamente $a < \mathbf{o}$ e $b < \mathbf{o}$, per ottenere quanto dovuto sono sufficienti le due verifiche che seguono.

Siano $a, b \in K$ con $a < \mathbf{o}$ e $b < \mathbf{o}$: è $\pi(a\,b) = \pi(a)\,\pi(b)$ se $\pi(a) \neq \infty \neq \pi(b)$. Infatti, osservato che, se x è elemento negativo di K, risulta $\pi(f(x)) = \pi(-x \circ (-1)) = \pi(x)$ (dove $f(x)$ ha il significato specificato nella parte B) del n. 1) e, di conseguenza, $\pi(f^{-1}(x)) = \pi(x)$, si ha $\pi(a\,b) = \pi(f^{-1}(a) \circ b) = \pi(f^{-1}(a))\,\pi(b) = \pi(a)\,\pi(b)$.

Siano $a, b \in K$ con $a < \mathbf{o}$ e $b < \mathbf{o}$: è $\pi(a\,b) = \pi(b\,a) = \infty$ se $\pi(a) \neq \mathbf{o}$ e $\pi(b) = \infty$. Infatti, se fosse $\pi(a\,b) \neq \infty$ si avrebbe $\pi(a\,b) = -\pi(-a\,b) = -\pi(a \circ (-b)) \neq \infty$, quindi $\pi(a \circ (-b)) \neq \infty$ con $\pi(a) \neq \mathbf{o}$ e $\pi(-b) = \infty$ poiché $\pi(b) = \infty$. Analogamente si prova che risulta $\pi(b\,a) = \infty$ e si conclude che π è posto del corpo K.

Per provare l'ultima delle asserzioni del lemma 1, si supponga che esista $x \in K$, $x < d$, tale che $\pi(x) \neq \infty$. Per quanto sopra osservato, dato che è $x < \mathbf{o}$, risulta $\pi(f(x)) = \pi(x)$ e, quindi, $\pi((x-d)\,k + d) = \pi(x) \neq \infty$. Da qui si ottiene $\mathbf{o} = \pi((x-d)\,k + d - x) = \pi((x-d)(k-1))$ e quindi, poiché $\pi(x-d) = \infty$, risulta $\pi(k-1) = \mathbf{o}$. Da $\pi(k) = 1$ e da $\infty \neq \pi(x) = \pi(f(x)) = \pi(x\,k - d(k-1))$ si ha, infine, $\pi(d(k-1)) = \mathbf{o}$. Il lemma così è completamente dimostrato.

Desideriamo, ora, invertire quanto stabilito con il precedente lemma 1. A tal fine passiamo a dimostrare il seguente

LEMMA 2. — *Se* $\pi : K \to K' \cup \{\infty\}$ *è un posto del corpo ordinato* K *e se risulta*

(i) $$\pi(x) = \infty \quad \textit{se } x \in K \textit{ e } x \leq d\,,$$

oppure

(ii) $$\pi(d) = \infty \quad e \quad \pi(d(k-1)) = \mathbf{o}\,,$$

allora $\pi : K_{k,d} \to K' \cup \{\infty\}$ *è un posto del sistema cartesiano ordinato* $K_{k,d}$ *ed è* $\pi(d) = \infty$.

Dimostrazione. — Dobbiamo stabilire che l'applicazione $\pi : K_{k,d} \to K' \cup \{\infty\}$ è posto di $K_{k,d}$, ossia che verifica le condizioni (P1), ..., (P7) della definizione 2. Osserviamo preliminarmente che, sia nell'ipotesi (i) che nell'ipotesi (ii), vale $\pi(f(x)) = \pi(x)$ se $x < \mathbf{o}$ in K. Infatti, ciò è evidente nel caso $d \leq x$, mentre se $x < d$ (allora anche $f(x) = (x-d)\,k + d < d$) risulta: nell'ipotesi (i), $\pi(f(x)) = \infty = \pi(x)$; nell'ipotesi (ii), $\pi(f(x)) = \pi(x\,k - d(k-1)) = \pi(x\,k) = \pi(x)$ ove si tenga conto che $\pi(k) = 1$.

Siano $a, b \in K_{k,d}$ con $a < \mathbf{o}$ e $b < \mathbf{o}$. Supponendo $\pi(a) \neq \infty \neq \pi(b)$, si ha

$$\pi(a \circ b) = \pi(f(a)\, b) = \pi(f(a))\, \pi(b) = \pi(a)\, \pi(b),$$

mentre se $\pi(a) \neq \mathbf{o}$ e $\pi(b) = \infty$ (allora anche $\pi(f(a)) \neq \mathbf{o}$ e $\pi(f(b)) = \infty$), otteniamo

$$\pi(a \circ b) = \pi(f(a)\, b) = \infty = \pi(f(b)\, a) = \pi(b \circ a).$$

Pertanto, sono valide le condizioni (P1), ..., (P4) [15].

Verifichiamo (P5): se $a, b, x \in K_{k,d}$ risulta $\pi(a) = \pi(b)$ nelle ipotesi $\pi(-a \circ x + b \circ x) \neq \infty$ e $\pi(x) = \infty$. Infatti, se $h : K \times K \to K$ è la funzione definita dalle posizioni (dove $y, z \in K$)

$$h(y, z) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y, z \text{ sono ambedue negativi} \\ y & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

possiamo scrivere $\infty \neq \pi(-a \circ x + b \circ x) = \pi(-h(a, x)\, x + h(b, x)\, x)$ ottenendo, poiché π è posto del corpo K, $\pi(h(a, x)) = \pi(h(b, x))$. Per quanto già provato è, allora, $\pi(a) = \pi(h(a, x)) = \pi(h(b, x)) = \pi(b)$ e (P5) è verificata.

Siano $a, x, y \in K_{k,d}$ e risulti $\pi(a \circ x - a \circ y) \neq \infty$ e $\pi(a) = \infty$; proveremo che $\pi(x) = \pi(y)$, ossia che vale (P6). Dobbiamo discutere i casi in cui $a < \mathbf{o}$ e non si abbia $\mathbf{o} \leq x, y$. Supponiamo dapprima che $a, x < \mathbf{o}$ e $y \geq \mathbf{o}$ (la possibilità $a, y < \mathbf{o}$ e $x \geq \mathbf{o}$ si discute analogamente); se $y = \mathbf{o}$, quindi per (P1) $\pi(y) = \mathbf{o}$, risulta $\infty \neq \pi(a \circ x) = \pi(f(a)\, x)$ e $\pi(f(a)) = \pi(a) = \infty$, da cui deriva $\pi(x) = \mathbf{o}$. Sia, allora, $y \neq \mathbf{o}$; nell'ipotesi che valga (i) e che $a < d$ (se $d \leq a < \mathbf{o}$, risulta $f(a) = a$ e quanto asserito è conseguenza del fatto che π è posto del corpo K) otteniamo $\pi(a \circ x - a \circ y) = \pi(f(a)\, x - a\, y) \neq \infty$ e, posto

$$f(a)\, x - a\, y = c,$$

quindi $\pi(c) \neq \infty$, si trova $f(a)\, x < c$ e $-a\, y < c$, ossia $c\, x^{-1} < f(a)$ e $-c\, y^{-1} < a$. Poiché $f(a) = (a - d)\, k + d < d$ e vale (i), risulta $\pi(c\, x^{-1}) = \infty = \pi(-c\, y^{-1})$ quindi $\pi(x) = \mathbf{o} = \pi(y)$. Supposta, invece,

[15] Ricordiamo, nuovamente, che $K_{k,d}(+; <) = K(+; <)$ in quanto gruppi ordinati e $x \circ y = x\, y$ se $x, y \in K_{k,d} = K$ e se x e y non sono contemporaneamente negativi. Di conseguenza, ci limiteremo, quasi sempre, ad effettuare la verifica dovuta solamente per quelle tra le (P1), ..., (P7) che si riferiscono a prodotti $x \circ y$ di elementi di $K_{k,d}$ con x e y ambedue negativi.

valida l'ipotesi (ii), poiché possiamo limitarci a supporre $a < d$ (in caso contrario, la verifica richiesta è immediata), si trova, se $m \in K$ e $f(a) = a\,m$,

$$\mathbf{o} = \pi(f(a) - a\,m) = \pi((a-d)\,k + d - a\,m) = \pi(a\,(k-m) - d\,(k-1)).$$

Ne deriva $\pi(a\,(k-m)) = \mathbf{o}$ che, poiché $\pi(a) = \infty$ e $\pi(k) = 1$, permette di asserire $\pi(m) = 1$. Pertanto $\infty \neq \pi(a \circ x - a \circ y) = \pi(f(a)\,x - a\,y) = \pi(a\,m\,x - a\,y)$ e $\pi(a) = \infty$ portano a concludere $\pi(y) = \pi(m\,x) = \pi(x)$. La (P6) va ancora verificata quando a, x, y sono elementi contemporaneamente negativi. In tal caso risulta $\infty \neq \pi(a \circ x - a \circ y) = \pi(f(a)\,x - f(a)\,y)$ e $\pi(f(a)) = \pi(a) = \infty$, ossia $\pi(x) = \pi(y)$ tenuto conto che π è posto del corpo K.

Rimane, pertanto, da stabilire che π verifica (P7). A tal fine si supponga che a, b, x, y siano elementi di $K_{k,d}$ e che risulti $\pi(a) = \pi(x) = \pi(a \circ y) = \pi(b \circ x) = \infty$ e

$$b \circ x + a \circ y = a \circ x ; \tag{I}$$

mostreremo che $\pi(y) = \infty$ oppure $\pi(b) = \infty$. Osserviamo, anzitutto, che a, x oppure a, y oppure b, x, non possono risultare unici elementi negativi poiché, in tal caso, in (I) si avrebbe un'incompatibilità di segni. Inoltre, le rimanenti possibilità che presentano al più due elementi negativi, così come le possibilità

$$b, x, y < \mathbf{o} \leq a, \quad a, x, y < \mathbf{o} \leq b, \quad a, b, x, y < \mathbf{o},$$

si risolvono immediatamente usufruendo del fatto che π è un posto del corpo K e che $\pi(f(z)) = \pi(z)$ se z è elemento negativo di K. Concludiamo, pertanto, esaminando l'eventualità $a, b, x < \mathbf{o} \leq y$ avvertendo che se $a, b, y < \mathbf{o} \leq x$ si procede alla stessa maniera. Nell'ipotesi anzidetta, (I) si scrive

$$f(b)\,x + a\,y = f(a)\,x ; \tag{II}$$

inoltre è $\mathbf{o} < y$ poiché $\pi(a \circ y) = \infty$. Supposto per assurdo $\pi(b) \neq \infty \neq \pi(y)$, si consideri l'elemento $t \in K$ tale che $f(a)\,t = a\,y$; (II) allora si scrive nella forma

$$f(b)\,x + f(a)\,t = f(a)\,x .$$

Dalla precedente eguaglianza, poiché $\pi(f(a)) = \pi(x) = \pi(f(b)\,x) = \pi(f(a)\,t) = \infty$ e π è posto del corpo K, si ottiene $\pi(t) = \infty$, giacché,

per l'ipotesi fatta, non può essere $\infty = \pi(f(b)) = \pi(b)$. Siano, adesso, c ed m elementi di K per i quali si abbia $\pi(c) \neq \infty$, $-ay < c$ e $f(a)m - ay = c$. (L'esistenza di un tale elemento c è una conseguenza dell'ipotesi fatta $\pi(b) \neq \infty \neq \pi(y)$; infatti, posto $c = -by$, da (II) otteniamo $f(b)x > f(a)x$ da cui, poiché $x < \mathbf{o}$ ed f è crescente, $b < a$, cioè $c = -by > -ay$ e $\pi(c) \neq \infty$). Constatato che $m < \mathbf{o}$, risulta $\pi(a \circ m - a \circ y) = \pi(f(a)m - ay) \neq \infty$ da cui, poiché $\pi(a) = \infty$ e, per quanto già provato, vale (P6) per $\pi : K_{k,d} \to K' \cup \{\infty\}$, si ottiene $\pi(m) = \pi(y)$. Osservato, però, che $\pi(m) = \pi(t) = \infty$ (infatti da $f(a)t = ay = f(a)m - c$, si ottiene $\pi(f(a)m - f(a)t) \neq \infty$ che, insieme a $\pi(f(a)) = \infty$, fornisce $\pi(m) = \pi(t)$) si conclude che non può essere, contemporaneamente, $\pi(y) \neq \infty$ e $\pi(b) \neq \infty$ e si prova così che $\pi : K_{d,k} \to K' \cup \{\infty\}$ è posto del sistema cartesiano $K_{k,d}$.

Riassumiamo quanto stabilito mediante i lemmi 1 e 2 enunciando il seguente

TEOREMA 1. — *Siano* K *un corpo ordinato, d e k suoi elementi tali che* $d < \mathbf{o} < k \neq 1$. *Se* $\pi : K_{k,d} \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto del sistema cartesiano* $K_{k,d}$ *e se* $\pi(d) = \infty$, *allora* $\pi : K \to C' \cup \{\infty\}$ *è posto del corpo* K *e risulta*

(j) $$\pi(x) = \infty \text{ se } x \in K \text{ e } x \leq d,$$

oppure

(jj) $$\pi(d) = \infty \text{ e } \pi(d(k-1)) = \mathbf{o}.$$

Inversamente, se $\pi : K \to K' \cup \{\infty\}$ *è posto del corpo K e vale* (j) *oppure* (jj), *allora* $\pi : K_{k,d} \to K' \cup \{\infty\}$ *è posto del sistema cartesiano* $K_{k,d}$ *e risulta* $\pi(d) = \infty$.

Osservazione 1. — Se K è corpo ordinato archimedeo, la classe di posti di K individuata dall'affermazione (j) del teorema 1 è vuota ([7], lemma 2). Pertanto, in tal caso, ritroviamo quanto stabilito da G. PANELLA in [7] (teorema 1).

Osservazione 2. — Considerato l'M-sistema K_k desunto dal corpo ordinato K e dal suo elemento k, se $\pi : K \to K' \cup \{\infty\}$ è un posto del corpo K e se risulta $\pi(d(k-1)) = \mathbf{o}$ e $\pi(d) = \infty$, poiché in tal caso $\pi(k) = 1$, $\pi : K_k \to K' \cup \{\infty\}$ è un posto dell'M-sistema K_k ([5], lemma 1.3).

3. — Siano α un (x, X)-M-piano, $\Sigma : \alpha \to \alpha'$ un epimorfismo dal piano proiettivo α al piano proiettivo α' e risulti $\Sigma(x) \in \Sigma(X)$. In tale ipotesi sussiste il seguente

LEMMA 3. — *Se non è possibile stabilire un epimorfismo* $\Pi : \alpha \to \alpha'$ *per cui si abbia* $\Pi(x) \notin \Pi(X)$, *allora* α' *è piano desarguesiano ed esistono* $\pi : K_\alpha \to K' \cup \{\infty\}$, *posto del corpo ordinato* K_α (*associato all'M-piano* α), e $d_\alpha \in K_\alpha$ *tali che*

(i) $\pi(a) = \infty$ *se* $a \in K_\alpha$ *e* $a \leq d_\alpha$,

(ii) *il corpo* K' *residuo di* K_α *rispetto al posto* π, *è il corpo delle coordinate di* α'.

Inversamente, se il corpo K_α *ammette un posto* $\pi : K_\alpha \to K' \cup \{\infty\}$ *soddisfacente* (i), *per un opportuno elemento negativo* d_α *di* K_α, *allora il piano desarguesiano, a cui fornisce coordinate il corpo* K', *è immagine epimorfa dell'*M-*piano* α.

Dimostrazione. Nelle ipotesi del lemma è possibile trovare ([7], lemma 5) due punti distinti, u e w, del piano α tali che:

(L1) $x \in u \cup w$, $\Sigma(u \cup w) \neq \Sigma(X)$,

(L2) se $v = (u \cup w) \cap X$, risulta $\Sigma(v) \neq \Sigma(u) \neq \Sigma(w) \neq \Sigma(v)$,

(L3) le coppie di punti di α, x, v e u, w, non si separano nell'ordinamento che compete al piano.

Si ponga $\Sigma(u) = u'$, $\Sigma(w) = w'$, $\Sigma(v) = \Sigma(x) = v'$; inoltre, se $o' \in X' = \Sigma(X)$ ed $o' \neq v'$, sia $o \in X$ tale che $\Sigma(o) = o'$ Osservato che è possibile scegliere u e w in modo che le coppie di punti v, w e u, x non si separano nell'ordinamento di α (infatti, se le coppie di punti v, w e u, x si separano nell'ordinamento α, allora le coppie v, u e w, x non si separano e, quindi, si può operare uno scambio tra u e w senza che, con ciò, si alterino le proprietà (L1), (L2), (L3)), si considerino e' punto di α' tale che $e' \in o' \cup w'$, $o' \neq e' \neq w'$, ed e punto della retta $o \cup w$ di α per cui si abbia $\Sigma(e) = e'$. Premesso ciò, sia C il sistema cartesiano ordinato delle coordinate di α nel suo riferimento (o, u, v, e); per quanto specificato al n. 1, B), in base alla scelta dei punti o, u, v, e, esistono un corpo ordinato $K = K(+, \cdot; <)$ e due suoi elementi k, d con $d < \mathbf{o} < k \neq 1$, per cui C è il sistema cartesiano $K_{k,d}$; inoltre, in tali coordinate, risulta $x = (d)$. Se C' è il

sistema delle coordinate di α' nel riferimento (o', u', v', e'), l'epimorfismo Σ definisce, per restrizione, un'applicazione $\pi : K_{k,d} \to C' \cup \{\infty\}$ che è un posto del sistema cartesiano $K_{k,d}$ tale che $\pi(d) = \infty$. Per il teorema 1 (si veda anche l'osservazione 2), allora, vale

(A) $\pi : K \to C' \cup \{\infty\}$ è posto al corpo K e $\pi(a) = \infty$ se $a \leq d$ in K,

oppure

(B) $\pi : K_k \to C' \cup \{\infty\}$ è posto dell'M-sistema K_k.

Se è valida (A), tenuto conto che è possibile stabilire un isomorfismo $\varphi : K_\alpha \to K$ dal corpo ordinato K_α al corpo ordinato K che conserva l'ordinamento ([7], si veda anche [12]), l'applicazione $\pi_\alpha = \pi \circ \varphi$, $\pi_\alpha : K_\alpha \to C' \cup \{\infty\}$, è un posto di K_α e risulta $\pi_\alpha(a) = \infty$ se $a \leq d'$ in K_α, dove $d' = \varphi^{-1}(d)$ $(d' < \mathbf{o})$. Se, invece, è valida (B), π definisce un epimorfismo $\Pi : \alpha(K_k) \to \alpha'$ dal piano $\alpha(K_k)$, costruito su K_k, al piano α'; inoltre, tale epimorfismo è un M-epimorfismo. Poiché l'M-sistema K_k è isomorfo all'M-sistema delle coordinate di α nel suo M-riferimento (o, x, v, e) ([7], lemma 4), esiste un isomorfismo $\Phi : \alpha \to \alpha(K_k)$ da α al piano $\alpha(K_k)$ tale che $\Phi(x) = (\mathbf{o})$ e $\Phi(X) = (\mathbf{o}, \mathbf{o}) \cup (\infty)$ ([8], pag. 37). Pertanto, l'epimorfismo $\Pi_\alpha = \Pi \circ \Phi$, $\Pi_\alpha : \alpha \to \alpha'$, risulta un M-epimorfismo.

Supponiamo, inversamente, che il corpo ordinato K_α ammetta un posto $\pi : K_\alpha \to K' \cup \{\infty\}$ per cui esista $d_\alpha \in K_\alpha$, $d_\alpha < \mathbf{o}$, tale che $\pi(a) = \infty$ se $a \in K_\alpha$ e $a \leq d_\alpha$. Considerato allora il sistema cartesiano ordinato $K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha}$, $\pi : K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha} \to K' \cup \{\infty\}$ risulta, per il teorema 1, posto di $K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha}$. Poiché tale posto definisce un epimorfismo

$$\Sigma : \alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha}) \to \alpha(K')$$

dal piano $\alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha})$, costruito su $K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha}$, al piano desarguesiano coordinatizzato dal corpo K', osservato che esiste un isomorfismo $\Phi : \alpha \to \alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha})$ da α al piano $\alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha})$ [16], l'applicazione $\Sigma_\alpha = \Sigma \circ \Phi$, $\Sigma_\alpha : \alpha \to \alpha(K')$, è un epimorfismo dal piano α al piano $\alpha(K')$.

Osservazione 3. — Se il corpo ordinato K_α è archimedeo, poiché un tale corpo non ammette alcun posto $\pi : K_\alpha \to K' \cup \{\infty\}$ soddisfacente la (i) del lemma 3, questo lemma ribadisce, in quel caso, quanto

[16] Infatti, considerati i punti di $\alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha})$ $o = (\mathbf{o}, \mathbf{o})$, $x = (d_\alpha)$, $v = (\infty)$, $e = (1, 1)$, $\alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha})$ risulta $(x, o \cup v)$-M-piano e, inoltre, l'M-sistema delle coordinate di $\alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha})$ nel suo riferimento (o, x, v, e) è isomorfo all'M-sistema $K_{\alpha k_\alpha}$. Ne deriva che il piano $\alpha(K_{\alpha k_\alpha, d_\alpha})$ è isomorfo al piano $\alpha(K_{\alpha k_\alpha})$ e, di conseguenza, al piano α.

stabilito da G. PANELLA in [7], ossia che, se il piano proiettivo α' è immagine epimorfa di α, allora esiste un M-epimorfismo $\Pi : \alpha \to \alpha'$ da α ad α'.

Siamo, ormai, in grado di classificare i piani proiettivi che sono immagini epimorfe di un M-piano. A tal fine, stabiliamo il

TEOREMA 2. — *Sia α un M-piano. Considerato* K, *corpo ordinato, e $k \in K$, con $\mathbf{o} < k \neq 1$, in modo che ciascun M-sistema che coordinatizza α risulti isomorfo all'M-sistema K_k oppure all'M-sistema $K_{k^{-1}}$, ogni piano proiettivo immagine epimorfa di α si ottiene con una delle seguenti costruzioni*:

(j) *Sia $\pi : K \to K' \cup \{\infty\}$ un posto del corpo* K *tale che $\pi(k) = 1$; il piano desarguesiano a cui fornisce coordinate il corpo* K', *residuo di* K *rispetto a π, è immagine epimorfa di α.*

(jj) *Sia $\pi : K \to K' \cup \{\infty\}$ un posto del corpo ordinato* K *tale che $\pi(k) \neq \mathbf{o}, 1, \infty$ e* K' *risulti π-ordinabile* (si veda [5], definizione 1.2); *considerato l'M-sistema $K'_{k'}$ desunto dal corpo* K', *ordinato dal π-ordinamento che gli compete, e dal suo elemento positivo e diverso da 1, $k' = \pi(k)$, l'M-piano $\alpha(K'_{k'})$, costruito su $K'_{k'}$, è immagine epimorfa di α.*

(jjj) *Sia $\pi : K \to K' \cup \{\infty\}$ un posto del corpo ordinato* K *tale che $\pi(a) = \infty$ se $a \in K$ e $a \leq d$ per un opportuno elemento negativo $d \in K$; il piano desarguesiano $\alpha(K')$, il cui corpo delle coordinate è il corpo* K' *residuo di* K *rispetto a π, è immagine epimorfa di α.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del precedente lemma 3 e del teorema 2.2. stabilito da F. BARTOLOZZI in [5].

Per concludere, desideriamo mettere in evidenza che il lemma 3 (e quindi il teorema 2) non ha carattere puramente formale. Perciò, si consideri il campo di D. HILBERT (E. ARTIN, [4], pag. 52) costruito a partire dal campo razionale $\mathbf{Q}$ e dal suo automorfismo identico. L'insieme sostegno del campo in questione ha come elementi le serie formali $f = \sum a_i t^i$ ($i \in \mathbf{Z}$, $a_i \in \mathbf{Q}$) che risultano « inferiormente troncate ». $K(+, \cdot; <)$ è corpo ordinato ove si definisca (se $f, g \in K$, $f = \sum a_i t^i$, $g = \sum b_i t^i$) : $f + g = \sum (a_i + b_i) t^i$; $fg = \sum c_i t^i$ se $c_i = \sum_{s+q=i} a_s b_q$; $f > \mathbf{o}$ se $f \neq \mathbf{o}$ e, detto n_f il minimo intero per il quale $a_{n_f} \neq \mathbf{o}$ (n_f *si dice l'ordine di f*), risulta $a_{n_f} > \mathbf{o}$ (come razionale). Si consideri l'appli-

cazione $\pi : K \to \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ definita ponendo $\pi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, $\pi(f) = a_o$ se $f = \sum a_i t^i \neq \mathbf{o}$ ha ordine non negativo, $\pi(f) = \infty$ altrimenti. Si verifica subito che π è posto di K e, inoltre, considerato l'M-piano $\alpha(K_{t+t^2})$, costruito sopra l'M-sistema K_{t+t^2} desunto dal corpo K e dal suo elemento (positivo e diverso da 1) $t + t^2$, il piano lineare sul campo razionale $\alpha(\mathbf{Q})$ risulta immagine epimorfa di $\alpha(K_{t+t^2})$ (ad esempio è $\pi(f) = \infty$ se $f \in K$ e $f \leq -t^{-1}$). Tuttavia non esiste nessun M-epimorfismo $\Pi : \alpha(K_{t+t^2}) \to \alpha(\mathbf{Q})$ da $\alpha(K_{t+t^2})$ al piano $\alpha(\mathbf{Q})$. Infatti, una tale applicazione dovrebbe indurre un posto $\pi' : K_{t+t^2} \to \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ dell'M-sistema $K_{t+t^2} = K_{t+t^2}(+, \circ; <)$ avente per corpo residuo il campo $\mathbf{Q}$; inoltre, deve essere $\pi'(t + t^2) = \pi'((-1) \circ (-1)) = \pi'(-1)\,\pi'(-1) = 1$ ove si tenga conto che $t + t^2 = (-1) \circ (-1)$ e che $\mathbf{Q}$ è un campo. Poiché $\pi'(t(1 + t)) = 1 = \pi'(1)$, risulta $\pi'(t) \neq \infty$; quindi, $(\pi'(t))^2 + \pi'(t) = \pi'(t(t + 1)) = 1$ e $\pi'(t)$ deve essere soluzione dell'equazione $x^2 + x - 1 = \mathbf{o}$. Di conseguenza, giacché la precedente equazione non ammette soluzioni razionali, non può esistere un tale posto π'. Ne deriva l'esistenza di M-piani che posseggono immagini epimorfe che non risultano M-epimorfe.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÈ, *Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen*, Arch. Math. (Basel), **13** (1962), 290-301.

[2] J. ANDRÈ, *Bermerkung zu meiner Arbeit « Über verallgemeinerte Moulton-Ebeben »*, Arch. Math. (Basel), **14** (1963), 359-360.

[3] J. ANDRÈ, *Über Homomorphismen projektiver Ebenen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **34** (1969), 98-114.

[4] E. ARTIN, *Algebra geometrica*, Feltrinelli, Milano (1968).

[5] F. BARTOLOZZI, *Le immagini M-epimorfe di un M-piano*, Ann. Mat. Pura Appl., (IV) **100** (1974), 307-325.

[6] H. LENZ, *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen*, Jber. Deutsch. Math.-Verein., **57** (1954) 20-31.

[7] G. PANELLA, *Le immagini epimorfe di un M-piano archimedeo*, Riv. Mat. Univ. Parma, (in corso di stampa).

[8] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin - Gottingen - Heidelberg - New York, (1975).

[9] L. PROFERA, *I piani di rifrazione generalizzati*, Ricerche Mat., **21** (1972), 203-226.

[10] L. PROFERA, *Sulle collineazioni dei piani di rifrazione generalizzati*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **7** (1975), 1-32.

[11] L. A. SKORNJAKOV, *Sopra gli omomorfismi di piani proiettivi e sugli T-omomorfismi di corpi ternari* (in russo), Mat. Sbornik, **43** (1957), 285-294.

[12] J. C. D. S. YAQUB, *On projective planes of class III*, Arch. Math. (Basel), **12** (1961), 146-150.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Panella, M. Curzio e A. Franchetta.

Una insolita reazione dell'acetone sulla fusicoccina

Nota di RENATO CAPASSO *, ANTONIO EVIDENTE *, MARIA LASAPONARA * e GIACOMINO RANDAZZO *

presentata dal socio ordinario LORENZO MANGONI

(Adunanza del 5 febbraio 1977)

RIASSUNTO. — Si riporta la determinazione della struttura con metodi chimici e chimico-fisici di un singolare derivato della fusicoccina ottenuto per reazione della stessa con acetone e $CuSO_4$ anidri. La struttura di questo derivato riveste un notevole interesse per gli studi di biosintesi sulla fusicoccina.

SUMMARY. — The preparation with anhydrous acetone and $CuSO_4$ of a peculiar derivative of fusicoccin is described. The structure of the derivative has been determined by chemical and physico-chemical methods. This derivative is remarkably interesting for studies on fusicoccin biosynthesis.

La fusicoccina (III) [1] è un metabolita fitotossico del *Fusicoccum amygdali* Del. Essa è il 9-α-glucosilderivato di un pentossiditerpene triciclico in cui le posizioni 3′ e 19 sono acetilate, 6′ è eterificata da un gruppo *t*-pentenilico e 16 è metilata.

L'isofusicoccina (I) e l'allofusicoccina (II) [2] sono due isomeri della fusicoccina aventi un residuo *O*-acetilico rispettivamente in posizione 4′ e 2′ anziché in 3′, ritrovati come sottoprodotti negli estratti di colture di *F. amygdali* e ottenibili anche per blando trattamento alcalino a partire dalla fusicoccina [2]. Entrambi gli isomeri, a differenza della fusicoccina, hanno un sistema α-glicole libero e pertanto risultano ossidabili con periodato sodico.

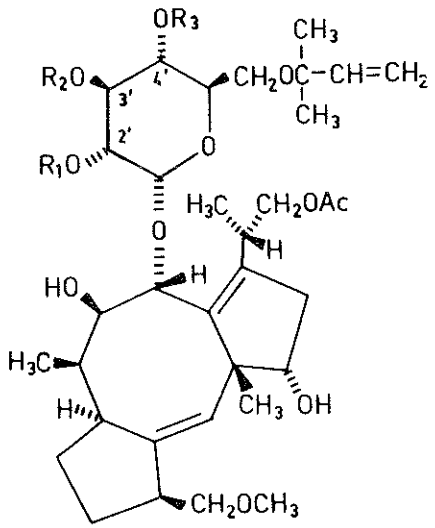
Nel corso degli studi strutturali di (I) e (II) si è tentato di prepararne i rispettivi acetonidi allo scopo di sottoporli a indagine di RMN e DRMN, prima e dopo la rimozione dei gruppi acetilici, che avrebbero potuto contribuire al chiarimento della loro struttura. I due composti, pertanto, sono stati trattati con $CuSO_4$ anidro in acetone anidro [3], ma sorprendentemente in entrambi i casi il corri-

* Istituto di Chimica Organica dell'Università di Napoli, Via Mezzocannone, 16 - 80134 Napoli.

spondente derivato (IV, V) è risultato mancante del residuo *t*-pentenilico e con il residuo isopropilidenico non già sul glucosio ma bensì sull'aglicone. Inoltre il doppio legame $\Delta^{1,2}$ era migrato a $\Delta^{2,6}$.

Un prodotto (VI) isomero ai composti (IV) e (V) si è ottenuto operando in modo analogo sulla fusicoccina.

Per deacetilazione in ambiente alcalino i tre prodotti (IV), (V) e (VI) forniscono un identico deacetil-derivato (VII), e per acetilazione in anidride acetica e piridina uno stesso pentacetil derivato (VIII).



I $R_3 = Ac$ $R_2 = R_1 = H$

II $R_1 = Ac$ $R_2 = R_3 = H$

III $R_2 = Ac$ $R_1 = R_3 = H$

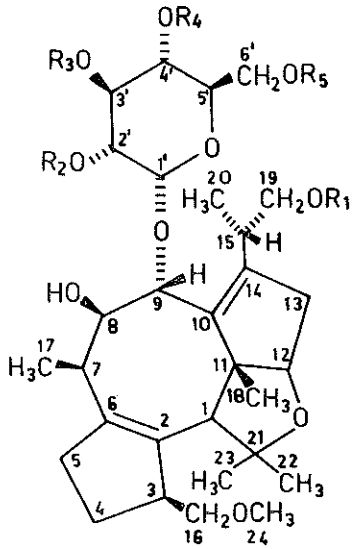
Pertanto, le indagini strutturali sono state indirizzate soprattutto sul prodotto (VI) che si ottiene con resa del 60 % a partire dalla fusicoccina (500 mgr in 100 ml di acetone e 10 gr di $CuSO_4$ anidri, 6 h a riflusso), essendo questa disponibile in molto maggiore quantità della allo- o isofusicoccina. Il prodotto (VI), cristallizzato da acetato di etile-etere di petrolio (p. 40-70° C), fonde a 181-182° C ed ha $[\alpha]_D^{25}$ + 33° (c = 0.63 in $CHCl_3$).

L'analisi elementare ha dato per $C_{34}H_{52}O_{12}$

calcolato	C	62.57 %	H	7.98 %
trovato		62.54 %		8.13 %

Lo spettro UV (in acetonitrile) presenta solo assorbimento finale e lo spettro IR mostra bande caratteristiche a 1100, 1250, 1650, 1740 e 3400 cm^{-1}.

Nella molecola sono presenti due acetili (NMR), uno dei quali sul glucosio (segnale a 205 *m/e* relativo al monoacetilglucosile) e l'altro sull'aglicone (picco a 448 *m/e*). È inoltre presente un gruppo metossilico (NMR). Il composto deacetilato rivela un M^+ a 568 *m/e*, mentre il picco relativo all'aglicone è a 406 *m/e*; non è più presente il picco a 205 *m/e*.



IV $R_1 = R_4 = COCH_3$ $R_2 = R_3 = R_5 = H$

V $R_1 = R_2 = COCH_3$ $R_3 = R_4 = R_5 = H$

VI $R_1 = R_3 = COCH_3$ $R_2 = R_4 = R_5 = H$

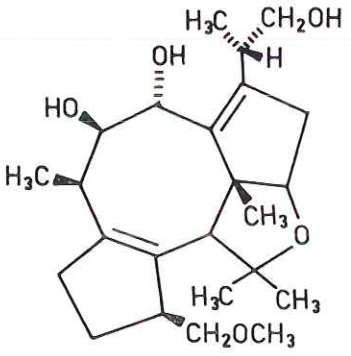
VII $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = H$

VIII $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = COCH_3$

L'acetil derivato contiene 5 acetili (NMR) ed ha un M^+ a 820 *m/e*, nonché segnali per il tetraacetil-glucosile (331, 289, 229, 169 e 109 *m/e*); il glucosio è quindi completamente acetilato, mentre sull'aglicone si trova un solo residuo acetilico.

Per ossidazione con $NaIO_4$ di (VII) e successiva β-eliminazione in alcali, è stato ottenuto l'aglicone (IX). La sua struttura è basata su dati di RMN e DMRN, relativi al carbonio ed all'idrogeno, e di spettrometria di massa.

I « chemical shifts » dei protoni sono riportati nella tabella I. In particolare risulta caratteristico un singoletto a 2,73 δ dovuto al C(1) *H*, mentre è assente il segnale dell'idrogeno olefinico a 5,38 δ presente nella fusicoccina [1]. Va osservato che, a causa dello spostamento del doppio legame, il C(7) *H* dà un m centrato a 2,83 δ, mentre nella fusicoccina e nei suoi derivati risuona a valori di 1,9-2,0 δ; sottoponendolo ad irradiazione disaccoppia sial il d a 1,07 δ, dovuto al metile secondario in C(17) H_3, sia il dd a 3,62 δ relativo al C(8) *H*. A sua volta il C(7) *H* diventa un q irradiando il dd a 3,62 δ dovuto al C(8) *H*. Questi risultati confermano l'assenza di protoni sul C(6).



IX

Infine è da notare che il C(12) *H*, presente come un dd a 4,16 δ, non subisce spostamento nell'acetilderivato (VIII) e viene disaccoppiato irradiando a 2,33-2,43 δ dove sono presenti i due protoni relativi al C(13) H_2.

La struttura (IV) è anche perfettamente compatibile con misure di risonanza magnetica nucleare di ^{13}C [4].

Lo spettro di massa di IX ha un picco ionico molecolare M^+ a 406 *m/e* in accordo con la formula $C_{24}H_{38}O_5$, e presenta il picco base a 370 *m/e* $C_{24}H_{34}O_3$ che si origina dallo ione molecolare per perdita di due molecole di acqua.

Tutti i dati raccolti indicano pertanto che la assegnazione della struttura VI è corretta. Essa mostra da una parte una nuova ed interessante reazione del sistema carbotriciclico della fusicoccina e dall'altra una sorprendente e notevole inerzia degli ossidrili (delle posizioni 4′ e 6′) del glucosio.

La formazione del prodotto (VI) riveste un notevole interesse per gli studi di biosintesi sulla fusicoccina in quanto esso permette:

a) di indagare l'unico sito previsto di radioattività sul C (6)*H* quando si somministra a colture di *F. amygdali* acido mevalonico 4R, 4T;

TABELLA I

C (1) *H*—	s	J = 2.73	
C (3) *H*—	m	2.51	
C (4) H_2—	m	1.60-1.90	
C (7) *H*—	m	2.83	
C (8) *H*—OH	dd	3.62	J = 2.5; J = 2 cps
C (9) *H*—OH	d	4.04	J = 9 cps
C (12) *H*—O—	dd	4.14	J = 2; J = 3 cps
C (13) *H*—	d	2.43	J = 5 cps
C (13) *H*—	d	2.33	J = 2 cps
C (15) *H*—	m	3.32	
C (16) H_2—O—	m	1.70-1.80	
C (17) H_3	d	1.07	J = 6 cps
C (18) H_3	s	1.01	
C (20) H_3	d	0.90	J = 6 cps
C (22) H_3	s	1.23	
C (23) H_3	s	1.23	
—O—C (24) H_3	s	3.30	

Lo spettro è stato eseguito in soluzione di $(CD_3)_2CO$
s = singoletto; d = doppietto; dd = doppio doppietto; m = multipletto

b) di utilizzare un derivato della fusicoccina privo del *t*-pentenile che, come è stato accertato [5], risulta dall'incorporazione di acido mevalonico indipendente da quella nel nucleo carbotriciclico.

Ai Proff. A. Ballio e C. G. Casinovi va la nostra gratitudine per le utili discussioni.

Si ringrazia il Sig. A. De Pascale e il Sig. C. Sepe per la collaborazione alla parte tecnica.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BALLIO, M. BRUFANI, C. G. CASINOVI, S. CERRINI, W. FEDELI, R. PELLICCIARI, B. SANTURBANO e A. VACIAGO, Experimentia, **24**, 631 (1968).
[2] A. BALLIO, C. G. CASINOVI, M. FRAMONDINO, G. GRANDOLINI, F. MENIGHINI, G. RANDAZZO e C. ROSSI, Experimentia, **28**, 126 (1972).
[3] O. TH. SCHMIDT, « Methods in Carbohydrate Chemistry », **2**, 318 (1963).
[4] C. G. CASINOVI, Comunicazione privata.
[5] K. D. BARROW, D. H. R. BARTON, SIR ERNST CHAIN, U. F. W. OHNSORGE and R. P. SHARMA, J.C.S. Perkin I, 1950 (1973).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci L. Mangoni, R. A. Nicolaus e V. Leone.

Sui sistemi, non lineari, di Cauchy-Riemann generalizzati

Nota di LORENZA DIOMEDA (a Bari) *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 5 febbraio 1977)

RIASSUNTO. — In questa nota è stata determinata una soluzione del sistema generalizzato di Cauchy-Riemann $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z_1 \dots z_n, w)$, $k \in \{1 \dots n\}$ dove le f_k sono funzioni non lineari e non olomorfe rispetto a w e soddisfano opportune ipotesi di compatibilità. Tale risultato è stato ottenuto mostrando l'equivalenza del sistema con l'equazione integrale $w(z_1 \dots z_n) = c - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\mathbf{C}} f_i \ (z_1 \dots \zeta_i \dots z_n) \ \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i}$.

SUMMARY. — In this paper, a solution has been determined for a Cauchy-Riemann generalized system $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z_1 \dots z_n, w)$, $k \in \{1 \dots n\}$, where $f_k(z_1 \dots z_n, w)$ are functions non-linear and non-holomorph in w and fulfil some suitable compatibility assumptions. This result has been got explaining the equivalence of the system with the integral-equation $w(z_1 \dots z_n) = c - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\mathbf{C}} f_i \ (z_1 \dots \zeta_i \dots z_n) \ \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i}$.

INTRODUZIONE.

In [1], L. HÖRMANDER dimostra che esiste una soluzione del sistema di Cauchy-Riemann non omogeneo del tipo:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z_1 \dots z_n) \qquad k = 1 \dots n$$

ove

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

* Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi Nazionali per la Matematica del C.N.R. (G.N.A.F.A.).

ed inoltre dà una esplicita espressione di tale funzione nel modo seguente:

$$\text{(II)} \quad w(z_1 \dots z_n) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{C}} \frac{f_k(z_1 \dots \zeta_k \dots z_n)}{\zeta_k - z_k} \, d\xi_k \, d\eta_k, \quad \zeta_k = \xi_k + i\eta_k$$

W. TUTSCHKE [2] ha esteso tale risultato ai sistemi del tipo:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) \qquad k = 1 \dots n$$

con a secondo membro una funzione $f_k(z_1 \dots z_n, w)$ dipendente in modo non lineare da w, ma olomorfa rispetto a w; egli ha precisamente dimostrato che ogni soluzione di tale sistema può essere rappresentata nella forma:

$$\text{(IV)} \qquad w(z_1 \dots z_n) = \Phi(z_1 \dots z_n) - \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{\pi^\lambda} \sum_{\substack{\nu_1 \dots \nu_\lambda = \\ 1 \dots n}} \int\int_{G_{\nu_\lambda}} \dots$$

$$\dots \int\int_{G_{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\nu_\lambda}} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\nu_2}} f_{\nu_1}(\dots) \frac{d\xi_{\nu_1} \, d\eta_{\nu_1} \dots d\xi_{\nu_\lambda} \, d\eta_{\nu_\lambda}}{(\zeta_{\nu_1} - z_{\nu_1}) \dots (\zeta_{\nu_\lambda} - z_{\nu_\lambda})}$$

ove Φ è una funzione olomorfa in $\mathbf{G}$ sottoinsieme aperto limitato di $\mathbf{C}^n$.

Nel mio precedente lavoro [3], ho provato che tutte e sole le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = a_k w + b_k \bar{w} \qquad k = 1 \dots n$$

sono soluzioni dell'equazione integrale:

$$w(z_1 \dots z_n) = c - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} \frac{a_i w + b_i \bar{w}(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)}{\zeta_i - z_i} \, d\xi_i \, d\eta_i, \; c \in \mathbf{C}$$

sotto opportune ipotesi di compatibilità dei coefficienti (a_k, b_k), $k \in \{1 \dots n\}$.

È chiaro che il sistema (V) è da un lato più generale di quello considerato dal Tutschke poiché il secondo membro è non olomorfo rispetto a w, dall'altro più particolare poiché lineare.

Mi son posto allora il problema di vedere se un risultato analogo a quello del Tutschke vale per sistemi con secondo membro non lineare e non olomorfo rispetto a w.

Con il presente lavoro tale problema è risolto sotto opportune ipotesi di compatibilità sulle f_k che sono del tipo di quelle fatte dal Tutschke ma ovviamente meno generali.

Precisamente nel n. 1 si dimostra che esiste una soluzione della equazione integrale:

$$(VI) \qquad w(z_1 \dots z_n) = c - $$

$$- \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i}, \quad c \in \mathbf{C}$$

e tale soluzione soddisfa il sistema

$$(VII) \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) \qquad k = 1 \dots n$$

e, viceversa che ogni soluzione di (VII) può essere posta sotto la forma (VI).

Le ipotesi fatte sulle f sono tali che la soluzione di (VII) risulti soluzione anche del seguente sistema:

$$\frac{\partial w}{\partial z_k} = \bar{f}_k(z_1 \dots z_n, \bar{w}(z_1 \dots z_n)) \qquad k \in \{1 \dots n\}$$

La dimostrazione pur ispirandosi a quella del Tutschke, comporta il superamento di alcune difficoltà derivanti dalla diversa natura del sistema e dalle differenti condizioni di compatibilità.

Nel n. 2 mi sono preoccupata di dare un esempio di funzioni f_k non lineari e non olomorfe rispetto a w che verifichino le ipotesi di compatibilità richieste nel n. 1.

1. Come già detto nell'introduzione ci proponiamo di dimostrare l'esistenza di una soluzione del seguente sistema:

$$(1.1) \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) \qquad \forall\ k \in \{1 \dots n\}$$

e che ogni soluzione è rappresentabile nel modo seguente:

$$(1.2) \qquad w(z_1 \dots z_n) = c -$$

$$- \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} \frac{f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n))}{\zeta_i - z_i} \, d\xi_i \, d\eta_i$$

con $c \in \mathbf{C}$.

A tale scopo consideriamo lo spazio $\mathfrak{R}$ delle funzioni w definite in $\mathbf{C}^n$ a valori in $\mathbf{C}$ taliche:

1) w è continua e limitata in $\mathbf{C}^n$

2) w è dotata di $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}_k}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial z_k}$, per ogni $k \in \{1 \dots n\}$, continue e limitate in $\mathbf{C}^n$.

$\mathfrak{R}$ munito della seguente norma

$$\| u \|_{\mathfrak{R}} = \max \left\{ \sup_{\mathbf{C}^n} |w|, \sup_{\mathbf{C}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_1} \right| \dots \sup_{\mathbf{C}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_n} \right|, \right. \tag{1.3}$$

$$\left. \sup_{\mathbf{C}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial z_1} \right| \dots \sup_{\mathbf{C}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial z_n} \right| \right\}$$

risulta uno spazio di Banach reale.

Definiamo in tale spazio un operatore integrale nel modo seguente:

DEFINIZIONE I. *Siano* $f_k(z_1 \dots z_n, w)$, $k \in \{1 \dots n\}$, *n funzioni continue in* $\mathbf{C}^{n+1}$ *con le loro derivate parziali prime e taliche posto*

$$\Omega_{f_{k,w}} = \{\overline{(z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n} \mid f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) \neq 0\} \quad \forall\, k \in \{1 \dots n\} \quad \forall\, w \in \mathfrak{R}, \tag{1.4}$$

risulta che

$$\Omega_{f_k} = \bigcup_{w \in \mathfrak{R}} \Omega_{f_{k,w}} \tag{1.5}$$

è compatto in $\mathbf{C}^n$ *per ogni* $k \in \{1 \dots n\}$.
Ha senso ora definire in $\mathfrak{R}$ *il seguente operatore integrale* T

$$\mathrm{T} : w \in \mathfrak{R} \to \mathbf{C}^{\mathbf{C}^n} \quad \textit{tale che} \quad \forall\, w \in \mathfrak{R}, \quad \forall\, (z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n$$

$$\mathrm{T}\, w(z_1 \dots z_n) = \tag{1.6}$$

$$= c - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - z_i} =$$

$$= c - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{G_i} f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - z_i}$$

con $c \in \mathbf{C}$ *e risulta*

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_{f_k} \subset \bar{G}_1 \times \ldots \times \bar{G}_n \tag{1.7}$$

con G_i *insieme aperto misurabile e limitato dello spazio* z_i.

Prima di provare alcune proprietà riguardanti l'operatore T cnunciamo due lemma cui faremo riferimento nelle dimostrazioni delle proposizioni che seguiranno [1].

(**I**). *Sia* $h(z_1 \ldots z_n)$ *una funzione appartenente a* $\mathcal{C}_0^l(\mathbf{C}^n)$, $l > 0$, *allora ha senso definire in* $\mathbf{C}^n$ *la seguente funzione*:

$$H(z_1 \ldots z_n) = \iint_{\mathbf{C}} \frac{h(z_1 \ldots \zeta_k \ldots z_n)}{\zeta_k - z_k} \, d\xi_k \, d\eta_k \tag{1.8}$$

Si ha quindi:

α) $H \in \mathcal{C}_0^l(\mathbf{C}^n)$ (*vale anche per* $l = 0$)

$$\beta) \qquad \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial h}{\partial \xi_k}(z_1 \ldots z_{k-1}, \zeta_k, z_{k+1} \ldots z_n) \frac{d\xi_k \, d\eta_k}{\zeta_k - z_k} = -\pi h(z_1 \ldots z_n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \ldots z_n) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \iint_{\mathbf{C}} \frac{h(z_1 \ldots \zeta_k \ldots z_n)}{\zeta_k - z_k} \, d\xi_k \, d\eta_k = -\pi h(z_1 \ldots z_n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_k}(z_1 \ldots z_n) = \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial h}{\partial \zeta_k}(z_1 \ldots z_{k-1}, \zeta_k, z_{k+1} \ldots z_n) \frac{d\xi_k \, d\eta_k}{\zeta_k - z_k}$$

(**II**). *Data* $h(z_1 \ldots z_n)$ *funzione continua e a supporto compatto in* $\mathbf{C}^n$, *per il modulo della funzione* $H(z_1 \ldots z_n)$ *definita da* (1.8) *si ha la seguente stima*:

$$|H(z_1 \ldots z_n)| \leq 6\pi \sup_{\mathbf{C}^n} |h| \operatorname{diam} G_k \qquad \forall (z_1 \ldots z_n) \in \mathbf{C}^n \tag{1.9}$$

supposto supp $h \subset \bar{G}_2 \times \ldots \times \bar{G}_k \times \ldots \times \bar{G}_n$ *ove ogni* G_k *è un insieme aperto limitato e misurabile dello* z_k *– spazio.*

[1] Cfr. per la dimostrazione [3] lemma (2.I) e (2.II).

Dimostriamo ora il seguente risultato:

(**III**). *L'operatore* T *definito da* (1.6) *trasforma* $\mathfrak{R}$ *in* $\mathfrak{R}$.

Dim. Infatti poiché le $f_i(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)$ sono funzioni continue con le derivate prime con Ω_{f_i} compatto, per ogni $i \, c \, \{1 \dots n\}$, risulta che, fissata $w \in \mathfrak{R}$, per lemma (**I**) ogni:

$$\iint_{\mathbf{C}} f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \, \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i}$$

è continua e a supporto compatto in $\mathbf{C}^n$ ed è dotata di derivate parziali prima continue. Quindi T w per ogni $w \in \mathfrak{R}$ è continua e limitata insieme alle sue derivate prime. Applicando ancora il lemma (**I**) è possibile dare una forma esplicita a $\dfrac{\partial \, \mathrm{T} \, w}{\partial \, \bar{z}_k}$ e a $\dfrac{\partial \, \mathrm{T} \, w}{\partial \, z_k}$, $k \in \{1 \dots n\}$:

$$(1.10) \qquad \frac{\partial \, \mathrm{T} \, w}{\partial \, \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) = \frac{1}{n} f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) -$$

$$- \frac{1}{n\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial f_i}{\partial \, \bar{z}_k}(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \, \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i}$$

$$(1.11) \qquad \frac{\partial \, \mathrm{T} \, w}{\partial \, z_k}(z_1 \dots z_n) =$$

$$= - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial f_i}{\partial \, z_k}(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \, \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i}$$

c. v. d.

Nostro scopo è di dimostrare che l'operatore T è dotato in $\mathfrak{R}$, sotto opportune ipotesi sulle f_k, di punto fisso e che tale punto fisso è soluzione di (1.1).

Consideriamo a tale scopo la seguente trasformazione di variabili:

$$(1.12) \qquad \mathrm{Z}_\nu = \chi \, z_\nu \qquad \forall \, \nu \in \{1 \dots n\}$$

con χ costante reale maggiore o uguale a 1.

Indicheremo perciò con

$$(1.13) \qquad \tilde{f}_k(\mathrm{Z}_1 \dots \mathrm{Z}_n, w(\mathrm{Z}_1 \dots \mathrm{Z}_n)) = f_k\left(\frac{\mathrm{Z}_1}{\chi} \dots \frac{\mathrm{Z}_n}{\chi}, w(\mathrm{Z}_1 \dots \mathrm{Z}_n)\right)$$

$$\forall \, (\mathrm{Z}_1 \dots \mathrm{Z}_n) \in \mathbf{C}^n$$

$$\forall \, k \in \{1 \dots n\}$$

Definiamo quindi il seguente operatore:

DEFINIZIONE II. *Siano* $f_k(z_1 \dots z_n, w)$, $k \in \{1 \dots n\}$, *n funzioni* $\mathbf{C}^{n+1}$ *con tutte le derivate parziali prime taliche gli* Ω_{f_k} *siano compatti in* $\mathbf{C}^n$. *Fissata c costante complessa, dicesi operatore corrispondente all'operatore* T *definito da* (1.6), *mediante la trasformazione* (1.12) *l'operatore* $\tilde{\mathrm{T}}$ *definito nel modo seguente*:

$$\tilde{\mathrm{T}}\, w\,(\mathrm{Z}_1 \dots \mathrm{Z}_n) = \tag{1.14}$$

$$= c - \frac{1}{\chi\, n\, \pi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\mathbf{C}} \tilde{f}_i(\mathrm{Z}_1 \dots \zeta_i \dots \mathrm{Z}_n, w(\mathrm{Z}_1 \dots \zeta_i \dots \mathrm{Z}_n)) \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i}$$

$$= c - \frac{1}{n\, \pi\, \chi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\bar{\mathrm{G}}_i} \tilde{f}_i(\mathrm{Z}_1 \dots \zeta_i \dots \mathrm{Z}_n, w(\mathrm{Z}_1 \dots \zeta_i \dots \mathrm{Z}_n)) \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i}$$

$$\forall\, w \in \mathfrak{R}$$

ove si tenga presente che

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_{\tilde{f}_k} \subset \bar{\mathrm{G}}_1 \times \dots \times \bar{\mathrm{G}}_2 \quad \text{e} \quad \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_{f_k} \subset \bar{\mathrm{G}}_1 \times \dots \times \bar{\mathrm{G}}_n$$

ove $\bar{\mathrm{G}}_i$ *è il corrispondente di* G_i *tramite* (1.12).

OSSERVAZIONE. Risulta analogamente alla proposizione (III) che $\tilde{\mathrm{T}}$ trasformata $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$.

Vogliamo dimostrare che in opportune ipotesi $\tilde{\mathrm{T}}$ risulta contrattivo in un opportuno sottospazio di $\mathfrak{R}$.

Fissata $c \in \mathbf{C}$, denotiamo con $\mathfrak{M}_c$ il sottoinsieme di $\mathfrak{R}$ così definito:

$$\mathfrak{M}_c = \{w \in \mathfrak{R} \mid \|w\|_{\mathfrak{R}} \leq |c| + \mathrm{R}_0\},\ \mathrm{R}_0 \in \mathbf{R} \tag{1.15}$$

È chiaro che $\mathfrak{M}_c$ risulta un sottoinsieme chiuso di $\mathfrak{R}$.

Vale quindi il seguente teorema:

(**IV**). *Sia* f_k JZ$_1 \dots z_n, w)$, $k \in \{1 \dots n\}$, *un n-pla di funzioni definite e continue in* $\mathbf{C}^{n+1}$ *con le loro derivate parziali prime; inoltre si abbia che ogni* f_k *verifichi la condizione che* Ω_{f_k} *sia compatto in* $\mathbf{C}^n$, *da cui scaturisce che esiste* $\mathrm{K} \in \mathbf{R}_+$ *taleche*:

$$\max \left\{ \sup_{\Omega_{f_k} \times \mathfrak{M}_c} |f_k|, \sup_{\Omega_{f_k} \times \mathfrak{M}_c} \left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_1}\right| \dots \sup_{\Omega_{f_k} \times \mathfrak{M}_c} \left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_n}\right|, \right. \tag{1.16}$$

$$\left. \dots \sup_{\Omega_{f_k} \times \mathfrak{M}_c} \left|\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\right|, \dots \sup_{\Omega_{f_k} \times \mathfrak{M}_c} \left|\frac{\partial f_k}{\partial w}\right|, \sup_{\Omega_{f_k} \times \mathfrak{M}_c} \left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar{w}}\right| \right\} \leq \mathrm{K}$$

$$\forall\, k \in \{1 \dots n\}$$

Inoltre le f_k, $k \in \{1 \dots n\}$, *soddisfano alla condizione di Lipschitz in* $\mathfrak{M}_c$ *insieme alle loro derivate parziale prime, uniformemente rispetto a* $(z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n$ *cioè esiste* $L \in \mathbf{R}_+$ *taleche:*

$$
\begin{aligned}
&| f_k (z_1 \dots z_n, w) - f_k (z_1 \dots z_n, w') | \leq L \| w - w' \| \\
&\left| \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_i} (z_1 \dots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_i} (z_1 \dots z_n, w') \right| \leq L \| w - w' \| \\
&\left| \frac{\partial f_k}{\partial z_i} (z_1 \dots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial z_i} (z_1 \dots z_n, w') \right| \leq L \| w - w' \| \\
&\left| \frac{\partial f_k}{\partial w} (z_1 \dots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial w} (z_1 \dots z_n, w') \right| \leq L \| w - w' \| \\
&\left| \frac{\partial f_k}{\partial \bar{w}} (z_1 \dots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{w}} (z_1 \dots z_n, w') \right| \leq L \| w - w' \|
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

e ciò vale per ogni $i, k \in \{1 \dots n\}$, *per ogni* $(z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n$ *e per ogni* w *e* $w' \in \mathfrak{M}_c$. *Se risulta inoltre che*

$$
K (18 + 4 R_o - \frac{6}{n} R_o) \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) < \frac{R_o}{2} \tag{1.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&(12 (2 L (R_o + | c |) + L + 2 K) - \\
&- \frac{6}{n} (2 L (R_o + | c |) + 2 K)) \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) < \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

$$
\text{con } 0 < \alpha < 1
$$

allora si ha che $\bar{T}$, *operatore corrispondente a* T *tramite la trasformazione* (1.12) *con*

$$
\chi \geq \max \left\{ 1, \frac{2 K}{n R_o}, \frac{2 L}{n \alpha} \right\} \tag{1.20}
$$

trasforma $\mathfrak{M}_c$ *in* $\mathfrak{M}_c$ *e risulta contrattivo in* $\mathfrak{M}_c$.

Dim. Proviamo dapprima che $\bar{T}$, con χ soddisfacente (1.20) trasforma $\mathfrak{M}_c$ in $\mathfrak{M}_c$. Sia $w (z_1 \dots z_n) \in \mathfrak{M}_c$ cioè secondo (1.15) è taleche

$$
\| w \| \leq | c | + R_o
$$

dimostriamo quindi:

$$
\| \bar{T} w \| \leq | c | + R_o
$$

poiché sappiamo già che $\bar{T} w$ appartiene a $\mathfrak{R}$ se $w \in \mathfrak{R}$.

Tenendo conto del lemma (**II**) valgono le seguenti disuguaglianze:

$$(1.21)\qquad |\tilde{\mathrm{T}}\, w(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n)| \leq |c| +$$

$$+ \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_{\mathbf{C}} f_i(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w(\mathrm{Z}_i \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i} \right| \leq$$

$$\leq |c| + \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} 6\,\pi \sup_{\Omega_{f_i} \times \mathfrak{M}_c} |f_i| \operatorname{diam}(\tilde{\mathrm{G}}_1 \times \ldots \times \tilde{\mathrm{G}}_n) \leq$$

$$\leq |c| + 6\,\mathrm{K} \operatorname{diam}(\mathrm{G}_1 \times \ldots \times \mathrm{G}_n)\,.$$

$$(1.22)\qquad \left| \frac{\partial\, \tilde{\mathrm{T}}\, w}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k}(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n) \right| \leq \frac{1}{n\,\chi} \left| \tilde{f}_k(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n, w(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n)) \right| +$$

$$+ \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left| \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w(\ldots)) \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\chi} \sup_{\Omega_{f_k} \times \mathfrak{M}_c} |f_k| + \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left\{ 6\,\pi \sup_{\mathbf{C}^n} \left| \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} \right| + \right.$$

$$\left. + \sup_{\mathbf{C}^n} \left(\left| \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, w} \right| \cdot \left| \frac{\partial\, w}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} \right| \right) + \sup_{\mathbf{C}^n} \left(\left| \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{w}} \right| \cdot \left| \frac{\partial\, w}{\partial\, \mathrm{Z}_k} \right| \right) \right\} \operatorname{diam}(\tilde{\mathrm{G}}_1 \times \ldots \tilde{\mathrm{G}}_n)$$

$$\leq \frac{\mathrm{K}}{n\,\chi} + 6\,\frac{(n-1)}{n}\,\mathrm{k}\,(2\,\mathrm{R}_o + 1) \operatorname{diam}(\mathrm{G}_1 \times \ldots \times \mathrm{G}_n)$$

$$(1.23)\qquad \left| \frac{\partial\, \tilde{\mathrm{T}}\, w}{\partial\, \mathrm{Z}_k}(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \mathrm{Z}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_{\mathbf{C}} \left(\frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \mathrm{Z}_k} + \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, w} \cdot \frac{\partial\, w}{\partial\, \mathrm{Z}_k} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{w}} \cdot \frac{\overline{\partial\, w}}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} \right) (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i} \right| \leq$$

$$\leq 6\,\mathrm{K}\,(1 + 2\,\mathrm{R}_o) \operatorname{diam}(\mathrm{G}_1 \times \ldots \times \mathrm{G}_n)$$

Da (1.21), (1.22) e (1.23) e dalle ipotesi (1.18) e (1.20) segue

$$\| \bar{\mathrm{T}}\, w \| \leq |\, c\,| + \frac{\mathrm{K}}{n\,\chi} \left(18 + 4\,\mathrm{R}_0 - \frac{6}{n}\,\mathrm{R}_0 \right) \operatorname{diam} (\mathrm{G}_1 \times \ldots \times \mathrm{G}_n) \leq$$

$$\leq |\, c\,| + \frac{\mathrm{R}_0}{2} + \frac{\mathrm{R}_0}{2} = |\, c\,| + \mathrm{R}_0$$

e quindi che $\bar{\mathrm{T}}\, w$ appartiene a $\mathfrak{M}_c$.

Dimostriamo ora che $\bar{\mathrm{T}}$ è contrattivo in $\mathfrak{M}_c$. Siano allora w e w' che elementi di $\mathfrak{M}_c$; risultano quindi le seguenti disuguaglianze, per la cui prova si utilizzano le ipotesi (1.16) e (1.17) e il lemma (**II**):

$$(1.24) \qquad |\, \bar{\mathrm{T}}\, w\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n) - \bar{\mathrm{T}}\, w'\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n)\,| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_{\mathbf{C}} (\tilde{f}_i\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) -\right.$$

$$\left. - \tilde{f}_i\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w'\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n))) \frac{d\,\xi_i\,d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\bar{\mathrm{G}}_i} \mathrm{L}\,|\, w\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n) - w'\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots n)\,| \frac{d\,\xi_i\,d\,\eta_i}{|\,\zeta_i - \mathrm{Z}_i\,|} \leq$$

$$\leq \frac{6\,\mathrm{L}}{n} \operatorname{diam} (\mathrm{G}_1 \times \ldots \times \mathrm{G}_n) \| w - w' \|$$

$$(1.25) \qquad \left| \frac{\partial\, \bar{\mathrm{T}}\, w}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n) - \frac{\partial\, \bar{\mathrm{T}}\, w'}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\chi}\,|\, \tilde{f}_k\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n, w\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n)) - \tilde{f}_k\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n, w'\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \mathrm{Z}_n))\,| +$$

$$+ \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left| \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w'\,(\ldots)) \frac{d\,\xi_i\,d\,\eta_i}{\zeta_i - \mathrm{Z}_i} \right| \leq \frac{1}{n\,\chi}\,\mathrm{L} \| w - w' \| +$$

$$+ \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left| \iint_{\mathbf{C}} \left\{ \left[\frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_i \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w'\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) \right] + \right.$$

$$+ \left[\frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, w} (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n, w\,(\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n)) \cdot \frac{\partial\, w}{\partial\, \bar{\mathrm{Z}}_k} (\mathrm{Z}_1 \ldots \zeta_i \ldots \mathrm{Z}_n) - \right.$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot \frac{\partial w'}{\partial \bar{Z}_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \Big] +$$

$$+ \Big[\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot \overline{\frac{\partial w}{\partial Z_k}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot$$

$$\cdot \overline{\frac{\partial w'}{\partial Z_k}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \Big] \Big\} \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i} \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\chi} L \| w - w' \| + \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \Big\{ L \| w - w' \| \cdot 6\pi \operatorname{diam} \bar{G}_i +$$

$$+ \iint_{\bar{G}_i} \Big[\Big| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(\dots)) \Big| \cdot$$

$$\cdot \Big| \frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \Big| + \Big| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \Big| \cdot$$

$$\cdot \Big| \frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) - \frac{\partial w'}{\partial \bar{Z}_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \Big| +$$

$$+ \Big| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \Big| \cdot \Big| \frac{\partial w}{\partial Z_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \Big| +$$

$$+ \Big| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \Big| \cdot$$

$$\cdot \Big| \frac{\partial w}{\partial Z_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) - \frac{\partial w'}{\partial Z_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \Big| \Big] \cdot \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{|\zeta_i - Z_i|} \Big\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\chi} L \| w - w' \| + \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \{ 6\pi L \operatorname{diam} \bar{G}_i \| w - w' \| +$$

$$+ (2L(R_0 + |c|) + 2K) \| w - w' \| \cdot 6\pi \operatorname{diam} \bar{G}_i \} \leq$$

$$\leq \Big[\frac{1}{n\chi} + 6 \frac{(n-1)}{n} (2L(R_0 + |c| +$$

$$+ L + 2K) \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) \Big] \| w - w' \|$$

$$(1.26)\qquad \left| \frac{\partial \bar{T}\, w}{\partial Z_k}(Z_1 \dots Z_n) - \frac{\partial \bar{T}\, w'}{\partial Z_k}(Z_1 \dots Z_n) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \left| \int\int_{\mathbf{C}} \left[\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right] \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - Z_i} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\tilde{G}_i} \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right| + \right.$$

$$+ \left| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right| \cdot \left| \frac{\partial w}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \right| + \right.$$

$$+ \left| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right| \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{\partial w}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) - \frac{\partial w'}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \right| +$$

$$+ \left| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right| \cdot \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \right| + \right.$$

$$+ \left| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w'(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right| \cdot \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial w'}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \right| \right\} \cdot \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - Z_i} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} (6\,\pi\,L\,\operatorname{diam} \tilde{G}_i \,\|\, w - w' \,\| +$$

$$+ 2\,(R_0 + |\,c\,|)\,L\,6\,\pi\,\operatorname{diam} \tilde{G}_i \,\|\, w - w' \,\| + 2\,K\,6\,\pi\,\operatorname{diam} \tilde{G}_i \,\|\, w - w' \,\|) \leq$$

$$\leq 6\,(L + 2\,(R_0 + |\,c\,|)\,L + 2\,K)\,\operatorname{diam}\,(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n).$$

Da (1.24), (1.25) e (1.26) e dalle ipotesi (1.18) e (1.19) segue:

$$\| \bar{T}\, w - \bar{T}\, w' \| \leq \left[\frac{6}{n} L \operatorname{diam} (G_1 \times \ldots \times G_n) + \right.$$

$$+ 6\, \frac{(n-1)}{n} (2\, L (R_0 + |c|) + L + 2K) \operatorname{diam} (G_1 \times \ldots \times G_n) +$$

$$\left. + 6(L + 2L (R_0 + |c|) + 2K) \operatorname{diam} (G_1 \times \ldots \times G_n) + \frac{L}{n\chi} \right] \cdot \| w - w' \| =$$

$$= \left[(12\, (2\, L (R_0 + |c|) + L + 2\, K) - \right.$$

$$\left. - \frac{6}{n} (2\, L (R_0 + |c|) + 2\, K)) \operatorname{diam} (G_1 \times \ldots \times G_n) + \frac{L}{n\chi} \right] \| w - w' \| \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \| w - w' \| = \alpha \| w - w' \| .$$

Risulta allora che T è contrattivo in $\mathfrak{M}_c$.

c. v. d.

Vale quindi il seguente teorema:

(**V**). *Nelle ipotesi del teorema* (**IV**) *per ogni* $c \in \mathbf{C}$ *esiste un'unica soluzione dell'equazione integrale*:

$$(1.27) \qquad w (Z_1 \ldots Z_n) = c -$$

$$- \frac{1}{\chi\, n\, \pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} f_i (Z_1 \ldots \zeta_i \ldots Z_n, w (Z_1 \ldots \zeta_i \ldots Z_n)) \, \frac{d\, \xi_i\, d\, \eta_i}{\zeta_i - Z_i}$$

e tale soluzione appartiene a $\mathfrak{M}_c$.

Dim. Basta osservare che per il teorema (**IV**) $\bar{T}$ è contrattivo in $\mathfrak{M}_c$ e quindi per il teorema del punto fisso di Banach esiste un'unico punto fisso di $\bar{T}$ cioè esiste un'unica funzione $w (Z_1 \ldots Z_n)$ appartenente a $\mathfrak{M}_c$ tale che risulti

$$w (Z_1 \ldots Z_n) = \bar{T}\, w (Z_1 \ldots Z_n) \qquad \forall\, (Z_1 \ldots Z_n) \in \mathbf{C}^n$$

e da cui risulta verificata (1.27).

Dimostriamo ora che una soluzione dell'equazione integrale (1.27) è soluzione del sistema:

$$(1.28)\quad \frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots Z_n) = \frac{1}{\chi} \bar{f}_k(Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) \quad \forall\ (Z_1 \dots Z_n) \in \mathbf{C}, \quad \forall\ k \in \{1 \dots n\}$$

Vale infatti il seguente teorema:

(VI). *Con le medesime ipotesi del teorema* **(IV)** *sia data un n-pla di funzioni* $f_k(z_1 \dots z_n, w)$, $k \in \{1 \dots n\}$, *soddisfacenti le seguenti ulteriori condizioni*:

$$(1.29)\quad \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_i}(z_1 \dots z_n, w) + \frac{\partial f_k}{\partial w}(z_1 \dots z_n, w) \cdot f_i(z_1 \dots z_n, w) +$$

$$+ \frac{\partial f_k}{\partial \bar{w}}(z_1 \dots z_n, w) f_i(z_1 \dots z_n, \bar{w}) = \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n, w) +$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial w}(z_1 \dots z_n, w) \cdot f_k(z_1 \dots z_n, w) + \frac{\partial f_i}{\partial \bar{w}}(z_1 \dots z_n, w) \cdot f_k(z_1 \dots z_n, \bar{w}).$$

$$\forall\ {}^{i}_{k} \in \{1 \dots n\}\ i \neq k$$

$$\forall\ (z_1 \dots z_n, w) \in \mathbf{C}^{n+1}$$

$$(1.30)\quad \frac{\overline{\partial f_k}}{\partial z_i}(z_1 \dots z_n, w) + \frac{\overline{\partial f_k}}{\partial \bar{w}}(z_1 \dots z_n, \bar{w}) \cdot f_i(z_1 \dots z_n, \bar{w}) +$$

$$+ \frac{\overline{\partial f_k}}{\partial w}(z_1 \dots z_n, \bar{w}) \cdot f_i(z_1 \dots z_n, w) = \frac{\partial f_i}{\partial z_k}(z_1 \dots z_n, w) +$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial w}(z_1 \dots z_n, w) \bar{f}_k(z_1 \dots z_n, \bar{w}) + \frac{\partial f_i}{\partial \bar{w}}(z_1 \dots z_n, w) \bar{f}_k(z_1 \dots z_n, w).$$

$$\forall\ {}^{i}_{k} \in \{1 \dots n\}$$

$$\forall\ (z_1 \dots z_n, w) \in \mathbf{C}^{n+1}$$

In tali potesi, per ogni $c \in \mathbf{C}$ *la soluzione* w *di* (1.27) *la cui esistenza è assicurata dal teorema* **(V)** *è soluzione del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali*:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k} = \frac{1}{\chi} \bar{f}_k(Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) \qquad \forall\ k \in \{1 \dots n\}$$

Dim. Sappiamo che la w soluzione di (1.27) appartiene a $\mathfrak{M}_c$. Risulta allora che:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots Z_n) = \frac{1}{n\chi} \tilde{f}_k (Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{1}{\chi n \pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \iint_C \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i}$$

da cui

$$(1.31) \qquad \frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots Z_n) - \frac{1}{\chi} \tilde{f}_k (Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) =$$

$$= - \frac{n-1}{n\chi} \tilde{f}_k (Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \iint_C \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i} =$$

$$= \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \iint_C \left[\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \xi_i}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right] \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i}$$

Analogamente

$$\frac{\partial w}{\partial Z_k}(Z_1 \dots Z_n) =$$

$$= - \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{i=1}^{n} \iint_C \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i}$$

da cui

$$(1.32) \qquad \overline{\frac{\partial w}{\partial Z_k}}(Z_1 \dots Z_n) - \frac{1}{\chi} \tilde{f}_k (Z_1 \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots Z_n)) =$$

$$= - \frac{n}{n\chi} \bar{\tilde{f}}_k (Z_1 \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{i=1}^{n} \overline{\iint_C \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i}} =$$

$$= \frac{1}{n\,\pi\,\chi} \sum_{i=1}^{n} \overline{\iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial\, \bar{f}_k}{\partial\, \bar{\zeta}_i} (Z_1 \ldots \zeta_i \ldots Z_n, \bar{w}(Z_1 \ldots \zeta_i \ldots Z_n)) -}$$

$$\overline{- \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, Z_k} (Z_1 \ldots \zeta_i \ldots Z_n, w(Z_1 \ldots \zeta_i \ldots Z_n)) \frac{d\,\xi_i\, d\,\eta_i}{\zeta_i - Z_i}}$$

Poniamo:

$$(1.33) \quad p_k(Z_1 \ldots Z_n) = \frac{\partial\, w}{\partial\, \bar{Z}_k}(Z_1 \ldots Z_n) - \frac{1}{\chi}\, \tilde{f}_k\, (Z_1 \ldots Z_n, w(Z_1 \ldots Z_n)) \qquad \forall\, (Z_1 \ldots Z_n) \in \mathbf{C}^n$$

$$(1.34) \quad q_k(Z_1 \ldots Z_n) = \overline{\frac{\partial\, w}{\partial\, Z_k}}(Z_1 \ldots Z_n) - \frac{1}{\chi}\, \tilde{f}_k\, (Z_1 \ldots Z_n, \bar{w}(Z_1 \ldots Z_n)) \qquad \forall\ k \in \{1 \ldots n\}$$

Ora tenendo conto che dalle ipotesi (1.29) e (1.30) derivano le seguenti uguaglianze:

$$(1.35) \quad \frac{\partial\, \tilde{f}_k}{\partial\, \bar{Z}_i}(Z_1 \ldots Z_n, w) + \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, \tilde{f}_k}{\partial\, w}(Z_1 \ldots Z_n, w) \cdot \tilde{f}_i\, (Z_1 \ldots Z_n, w)$$

$$+ \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, \tilde{f}_k}{\partial\, \bar{w}}(Z_1 \ldots Z_n, w) \cdot \tilde{f}_i(Z_1 \ldots Z_n, \bar{w}) = \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, f_k}{\partial\, z_i} \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) +$$

$$+ \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, f_k}{\partial\, w} \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) \cdot f_i \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) +$$

$$+ \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, f_k}{\partial\, \bar{w}} \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) \cdot f_i \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ \bar{w} \right) =$$

$$= \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, f_i}{\partial\, \bar{z}_k} \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) +$$

$$+ \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, f_i}{\partial\, w} \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) f_k \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) +$$

$$+ \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, f_i}{\partial\, \bar{w}} \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ w \right) \cdot f_k \left(\frac{Z_1}{\chi} \ldots \frac{Z_n}{\chi},\ \bar{w} \right) =$$

$$= \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{Z}_k}(Z_1 \ldots Z_n, w) + \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, w} \cdot (Z_1 \ldots Z_n, w) \cdot \tilde{f}_k\, (Z_1 \ldots Z_n, w) +$$

$$+ \frac{1}{\chi} \frac{\partial\, \tilde{f}_i}{\partial\, \bar{w}}(Z_1 \ldots Z_n, w) \cdot \tilde{f}_k\, (Z_1 \ldots Z_n, \bar{w})\,.$$

$$(1.36)\quad \frac{\partial \overline{\tilde{f}_k}}{\partial Z_i}(Z_1 \dots Z_n, w) + \frac{1}{\chi}\frac{\partial \overline{\tilde{f}_k}}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots Z_n, \bar{w})\,\tilde{f}_i(Z_1 \dots Z_n, \bar{w}) +$$

$$+ \frac{\partial \overline{\tilde{f}_k}}{\partial w}(Z_1 \dots Z_n, \bar{w})\,\tilde{f}_i(Z_1 \dots Z_n, w) = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k}(Z_1 \dots Z_n, w) +$$

$$+ \frac{1}{\chi}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w}(Z_1 \dots Z_n, w)\,\overline{\tilde{f}_k}(Z_1 \dots Z_n, \bar{w}) +$$

$$+ \frac{1}{\chi}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots Z_n, w) \cdot \overline{\tilde{f}_k}(Z_1 \dots Z_n, w).$$

esplicitiamo le espressioni che compaiono in (1.31) e (1.32) sotto il segno di integrale:

$$(1.37)\quad \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \zeta_i}(Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) =$$

$$= \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \zeta_i}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta_i}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta_i}(\dots \zeta_i \dots) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar{Z}_k}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \frac{\partial \overline{w}}{\partial Z_k}(\dots) =$$

$$= -\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \zeta_i}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \left(p_i(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\chi}\tilde{f}_i(Z_1 \dots Z_n, w(\dots))\right) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \bar{w}}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n))$$

$$\left(q_i(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \frac{1}{\chi}\tilde{f}_i(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n))\right) -$$

$$- \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{Z}_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \left(p_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\chi} \bar{f}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(\dots)) \right) -$$

$$- \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot$$

$$\cdot \left(q_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \frac{1}{\chi} \bar{f}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right) =$$

$$= \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) p_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) +$$

$$+ \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) q_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) p_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) q_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n),$$

ove si è tenuto conto della relazione (1.35).

Analogamente si ha:

$$(1.38) \qquad \frac{\partial \bar{\bar{f}}_k}{\partial \bar{\zeta}_i} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial Z_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) =$$

$$= \frac{\partial \bar{\bar{f}}_k}{\partial \bar{\zeta}_i} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) +$$

$$+ \frac{\partial \bar{\bar{f}}_k}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot$$

$$\cdot \left(q_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \frac{1}{\chi} \bar{f}_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(\dots)) \right) +$$

$$+ \frac{\partial \bar{\bar{f}}_k}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot$$

$$\cdot \left(p_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \frac{1}{\chi} \bar{f}_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial Z_k} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot$$

$$\cdot \left(\bar{q}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \frac{1}{\chi} \bar{\tilde{f}}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots \bar{w}(\dots)) \right) +$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot$$

$$\cdot \left(\bar{p}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \frac{1}{\chi} \bar{\tilde{f}}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \right) =$$

$$= \frac{\partial \bar{\tilde{f}}_k}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, q_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) +$$

$$+ \frac{\partial \bar{\tilde{f}}_k}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, p_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, \bar{q}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, \bar{p}_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n),$$

ove si è tenuto conto della relazione (1.36).

Quindi la (1.37) e (1.38) segue:

(1.39)
$$p_k (Z_1 \dots Z_n) =$$

$$= \frac{1}{n \pi \chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \int\int_{\mathbf{C}} \left[\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, p_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \right.$$

$$+ \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, q_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, p_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$\left. - \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \, q_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \right] \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i}$$

$$(1.40) \qquad q_k(Z_1 \dots Z_n) =$$

$$= \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\mathbf{C}} \left[\frac{\partial \bar{\bar{f}}_k}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot q_i(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \right.$$

$$+ \frac{\partial \bar{\bar{f}}_k}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, \bar{w}(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot p_i(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \bar{\bar{f}}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \bar{q}_k(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)$$

$$\left. - \frac{\partial \bar{\bar{f}}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \bar{p}_k(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \right] \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i} .$$

Risulta allora che le funzioni p_k e q_k soddisfano al sistema integro-differenziale (1.39)-(1.40), per cui come nel caso lineare [2] si può dimostrare che tale sistema ha solo la soluzione nulla.

Infatti basta osservare che si può definire in $\prod_{i=1}^{2m} \mathcal{C}(\mathbf{C}^n)$ [3] un operatore H tale che:

$$\forall (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \in \prod_{i=1}^{2m} \mathcal{C}(\mathbf{C}^n)$$

$$H(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) = (H_1(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \dots H_n(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n),$$

$$\bar{H}_1'(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \dots \bar{H}_n'(p_1 \dots, \dots q_n))$$

ove per ogni $k \in \{1 \dots n\}$ $H_k(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ assume l'espressione scritta al secondo membro di (1.39) e $\bar{H}_k'(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ ha l'espressione del secondo membro di (1.40).

Poiché $w \in \mathfrak{M}_c$ risulta che gli integrandi di (1.39) e (1.40) appartengono a $\mathcal{C}_0(\mathbf{C}^n)$ e quindi risulta che ogni $H_k(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ e $\bar{H}_k'(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ appartiene a $\mathcal{C}(\mathbf{C}^n)$ ed è a supporto compatto in $\mathbf{C}^n$ cioè limitata.

Inoltre H è un operatore additivo e omogeneo perché ogni H_k e $\bar{H}_k'$ è somma di operatori integrali che sono additivi e omogenei.

Inoltre risulta, per il lemma (**II**) e l'ipotesi (1.16):

$$|H_k(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left| \int\int_{\mathbf{C}} \left(\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial w} \right) \right. \left((Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot p_i(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) + \right.$$

[2] Cfr. [3] lemma (2.VIII).

[3] $\mathcal{C}_0^l(\mathbf{C}^n)$ indica lo spazio delle funzioni continue con le derivate parziali fino all'ordine l a supporto compatto in $\mathbf{C}^n$.

$$+ \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot q_i (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot p_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n, w(Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n)) \cdot q_k (Z_1 \dots \zeta_i \dots Z_n) \Big) \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - Z_i} \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n \pi \chi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \Big[\sup_{\bar{G}_1 \times \dots \times \bar{G}_n} \Big| \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial w} (Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) \Big| +$$

$$+ \sup_{\bar{G}_1 \times \dots \times \bar{G}_n} \Big| \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) \Big| +$$

$$+ \sup_{\bar{G}_1 \times \dots \times \bar{G}_n} \Big| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial w} (Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) \Big| +$$

$$+ \sup_{\bar{G}_1 \times \dots \times \bar{G}_n} \Big| \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \bar{w}} (Z_1 \dots Z_n, w(Z_1 \dots Z_n)) \Big| \Big]$$

$$6 \pi \operatorname{diam} (\bar{G}_1 \times \dots \times \bar{G}_n) \| (p_1 \dots q_1 \dots q_n) \|$$

$$\leq \frac{6}{n} \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) (n-1) 4 K \| (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \| =$$

$$= 24 K \frac{(n-1)}{n} \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) \| (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \| .$$

Analogamente:

$$| \tilde{H}'_k (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n | \leq 24 K \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) \| (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \|$$

Da cui:

$$\| H (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \| \leq 24 K \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) \| (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) \| .$$

Poiché H è additivo e omogeneo per l'ipotesi (1.19) [4] segue la contrattività di H e quindi che l'operatore H ammette solo la soluzione nulla.

Risulta allora dimostrato che la soluzione w dell'equazione integrale è soluzione del sistema (1.28). Osserviamo inoltre che dalla

[4] Basta infatti supporre che

$$\max \left(12 (2 L (R_0 + | c |) + L + 2 K) - \frac{6}{n} (2 L (R_0 + | c | + 2 K)) \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) , \right.$$

$$\left. 12 K \operatorname{diam} (G_1 \times \dots \times G_n) \right) < \frac{\alpha}{2}$$

dimostrazione di tale teorema scaturisce che, essendo anche tutte le $q_i, i \in \{1 \dots n\}$ identicamente nulle, la soluzione di (1.27) soddisfa inoltre il sistema seguente:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{Z}_k} = \frac{1}{\chi} \bar{f}_k (Z_1 \dots Z_n, \bar{w} (Z_1 \dots Z_n)) \qquad \forall\ k \in \{1 \dots n\}. \tag{1.41}$$

Vale ora il seguente teorema:

(**VII**). *Nelle ipotesi del teorema* (**VI**) *esiste una soluzione* $w \in \mathfrak{R}$ *dell'equazione integrale*:

$$w (z_1 \dots z_n) = c - \tag{1.42}$$

$$- \frac{1}{n \pi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\mathbf{C}} f_i (z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w (z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d \xi_i \, d \eta_i}{\zeta_i - z_i}, \quad c \in \mathbf{C}$$

e tale soluzione soddisfa inoltre al sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} (z_1 \dots z_n) = f_k (z_1 \dots z_n, w (z_1 \dots z_n)) \tag{1.43}$$

$$\forall\ k \in \{1 \dots n\} \quad \forall\ (z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n$$

Dim. Considerato $c \in C$ risulta che in corrispondenza di χ fissato soddisfacente l'ipotesi (1.20) $\tilde{T}$ è dotato di punto fisso cioè esiste $\tilde{w} (Z_1 \dots Z_n) \in \mathfrak{M}_c$ taleche

$$\tilde{T}\, \tilde{w} (Z_1 \dots Z_n) = \tilde{w} (Z_1 \dots Z_n) \qquad \forall\ (Z_1 \dots Z_n) \in \mathbf{C}^n$$

Inoltre per il teorema (**VI**) tale punto fisso soddisfa il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{Z}_k} (Z_1 \dots Z_n) = \frac{1}{\chi} \bar{f}_k (Z_1 \dots Z_n, \tilde{w} (Z_1 \dots Z_n)) \qquad \begin{matrix} \forall\ (Z_1 \dots Z_n) \in \mathbf{C}^n \\ \forall\ k \in \{1 \dots n\} \end{matrix}$$

Consideriamo allora la funzione w definita nel modo seguente:

$$w (z_1 \dots z_n) = \tilde{w} (\chi\, z_1 \dots \chi\, z_n) \qquad \forall\ (z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n \tag{1.44}$$

Tale funzione appartiene a $\mathfrak{R}$ ed inoltre controlliamo che soddisfa

il sistema (1.43):

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{z}_k}(\chi z_1 \dots \chi z_n) = \chi \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{Z}_k}(\chi z_1 \dots \chi z_n) =$$

$$= \tilde{f}_k(\chi z_1 \dots \chi z_n, \tilde{w}(\chi z_1 \dots \chi z_n)) = f_k(z_1 \dots z_n, \tilde{w}(\chi z_1 \dots \chi z_n)) =$$

$$= f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) \qquad \forall (z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n$$
$$\forall k \in \{1 \dots n\}.$$

Controlliamo inoltre che tale funzione soddisfa anche l'equazione (1.42)

$$w(z_1 \dots z_n) = \tilde{w}(\chi z_1 \dots \chi z_n) =$$

$$= c - \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} \tilde{f}_i(\chi z_1 \dots \zeta_i \dots \chi z_n, \tilde{w}(\chi z_1 \dots \zeta_i \dots \chi z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - \chi z_i} =$$

$$= c - \frac{1}{n\pi\chi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} f_i\left(z_1 \dots \frac{\zeta_i}{\chi} \dots z_n, w\left(z_1 \dots \frac{\zeta_i}{\chi} \dots z_n\right)\right) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\chi\left(\frac{\zeta_i}{\chi} - z_i\right)} =$$

$$= c - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i\, d\eta_i}{\zeta_i - z_i} \quad .$$

OSSERVAZIONE: notiamo esplicitamente che la soluzione di (1.43) data dal teorema (**VII**) gode della proprietà che anche la sua complessa coniugata soddisfa il sistema (1.43): infatti dalla dimostrazione del teorema (**VI**) scaturisce che $\tilde{w}(Z_1 \dots Z_n)$ soddisfa il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\partial \bar{\tilde{w}}}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) = \frac{1}{\chi} \tilde{f}_k(Z_1 \dots Z_n, \bar{\tilde{w}}(Z_1 \dots Z_n))$$

da cui per (1.44)

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) = \overline{\frac{\partial w}{\partial z_k}}(z_1 \dots z_n) = \overline{\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z_k}}(\chi z_1 \dots \chi z_n) =$$

$$= \chi \overline{\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z_k}}(\chi z_1 \dots \chi z_n) = \chi \frac{\partial \bar{\tilde{w}}}{\partial \bar{Z}_k}(\chi z_1 \dots \chi z_n) =$$

$$= \tilde{f}_k(\chi z_1 \dots \chi z_n, \bar{\tilde{w}}(\chi z_1 \dots \chi z_n)) = f_k(z_1 \dots z_n, \bar{w}(z_1 \dots z_n)) .$$

Vogliamo ora dimostrare il viceversa del teorema precedente:

(VIII). *Per ogni soluzione* $w \in \mathcal{R}$ *di* (1.43) *con* $f_k(z_1 \dots z_n, w)$ *un n-pla di funzioni continue con le loro derivate parziali prime in* $\mathbf{C}^{n+1}$ *e taliche* Ω_{f_k}, *per ogni* $k \in \{1 \dots n\}$ *risulti compatto in* $\mathbf{C}^n$, *esiste* $c \in \mathbf{C}$ taleche

$$w(z_1 \dots z_n) = c - \\ - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i} \\ \forall (z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n$$

Dim. Consideriamo la funzione $g(z_1 \dots z_n)$ così definita:

$$g(z_1 \dots z_n) = w(z_1 \dots z_n) + \\ + \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathbf{C}} f_i(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i} \tag{1.45}$$

g risulta continua e dotata di derivate parziali prime continue; inoltre sfruttando il lemma **(I)** e l'ipotesi che w è soluzione di (1.43) segue:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) - \frac{1}{n} f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) + \\ + \frac{1}{n\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i} = \\ = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) - \frac{1}{n} f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) + \\ + \frac{1}{n\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{\zeta}_i}(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n, w(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n)) \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i} = \\ = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n) - f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) = 0 \qquad \forall (z_1 \dots z_n) \in \mathbf{C}^n \\ \forall\, k \in \{1 \dots n\}$$

utilizzando anche la seguente identità:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n)) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_i}(z_1 \dots z_n)\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \dots z_n)\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}(f_k(z_1 \dots z_n, w(z_1 \dots z_n))).$$

Perciò g è analitica in $\mathbf{C}^n$; inoltre poiché w è limitata e ogni integrale compare nella sommatoria (1.45) appartiene a $\mathcal{C}_o^1(\mathbf{C}^n)$ risulta che g è limitata in $\mathbf{C}^n$ e quindi per il teorema di Liouville è costante in $\mathbf{C}^n$.

2. - Compitibilità delle ipotesi (1.29) e (1.30).

Vogliamo dare un esempio di funzioni f_k verificanti le ipotesi del teorema (**VI**). Consideriamo delle funzioni $a_k(z_1 \dots z_n)$ definite in $\mathbf{C}^n$ come segue:

$$a_k(z_1 \dots z_n) = \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} (z_k - d_k) \cdot \exp\left(-\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) & |z_i| < |d_i| \\ 0 & |z_i| \geq |d_i| \quad \forall\, k \in \{1 \dots n\}. \end{cases} \qquad \text{ove } (d_1 \dots d_n) \in \mathbf{C}^n$$

Risulta che $a_k \in \mathcal{C}_o^1(\mathbf{C}^n)$. Si può verificare che

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} &= \frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_k} \\ \frac{\partial a_k}{\partial z_j} &= \frac{\overline{\partial a_j}}{\partial z_k} \end{aligned} \qquad \forall\, j, k \in \{1 \dots n\} \tag{2.2}$$

Infatti

$$\frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(z_k - d_k) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) +$$

$$+ (z_k - d_k) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(\exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right)\right) =$$

$$= (z_k - d_k) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) \cdot \frac{(z_j - d_j)}{(\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2)^2}$$

$$\frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_k} = (z_j - d_j) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) \cdot \frac{(z_k - d_k)}{(\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2)^2}$$

da cui si deduce la prima delle (2.2).

$$\frac{\partial a_k}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j}(z_k - d_k) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) +$$

$$+ (z_k - d_k) \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) \frac{\partial}{\partial z_j}\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z_j}(z_k - d_k) \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) +$$

$$+ (z_k - d_k) \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) \cdot \left(\frac{\overline{z_j - d_j}}{(\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2)^2}\right)$$

$$\overline{\frac{\partial a_j}{\partial z_k}} = \overline{\frac{\partial}{\partial z_k}(z_j - d_j)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) +$$

$$+ \overline{(z_j - d_j)} \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) \frac{z_k - d_k}{(\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2)^2}$$

Se $j \neq k$:

$$\frac{\partial a_k}{\partial z_j} = (z_k - d_k) \exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) \frac{\overline{z_j - d_j}}{(\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2)^2} = \overline{\frac{\partial a_j}{\partial z_k}}$$

se $j = k$

$$\frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_j} = \left[1 + (z_j - d_j) \frac{\overline{(z_j - d_j)}}{(\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2)^2}\right]$$

$$\exp\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |z_i - d_i|^2}\right) = \overline{\frac{\partial a_j}{\partial z_j}} \quad [5]$$

[5] Nel caso lineare utilizzando tali funzioni a_k può essere dato un semplice esempio di sistema i cui coefficienti soddisfano le ipotesi di compatibilià:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_k} = a_k w + a_k \bar{w} .$$

Consideriamo allora per ogni $k\,\{1 \ldots n\}$ la seguente funzione:

$$f_k(z_1 \ldots z_n, w) = a_k(z_1 \ldots z_n)\, w^2 + a_k(z_1 \ldots z_n)\, \bar{w}^2$$

Risulta allora che tali funzioni f_k soddisfano la condizione che Ω_{f_k} è compatto; inoltre verifichiamo che esse sono lipschitziane in $\mathfrak{M}_c$ con le loro derivate parziali prime:

$$\begin{aligned}
&|f_k(z_1 \ldots z_n, w) - f_k(z_1 \ldots z_n, w')| = |a_k(z_1 \ldots z_n)\, w^2 + \\
&+ a_k(z_1 \ldots z_n)\, \bar{w}^2 - (a_k(z_1 \ldots z_n)\, w'^2 + a_k(z_1 \ldots z_n)\, \bar{w}'^2)| \leq \\
&\leq 2\,|a_k(z_1 \ldots z_n)|\,|w - w'|\,(|w| + |w'|) \leq \\
&\leq 4 \sup_{\mathbf{C}^n} |a_k(z_1 \ldots z_n)|\,(|c| + R_0)\,\|w - w'\|\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}(z_1 \ldots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}(z_1 \ldots z_n, w')\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} \cdot w^2 + \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} \cdot \bar{w}^2 - \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} \cdot \bar{w}'^2 - \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j} \cdot \bar{w}'^2\right| \leq \\
&\leq 4 \sup_{\mathbf{C}^n} \left|\frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j}\right| (|c| + R_0)\,\|w - w'\|\,.
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}(z_1 \ldots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}(z_1 \ldots z_n, w')\right| \leq 4 \sup_{\mathbf{C}^n} \left|\frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j}\right| (|c| + R_0)\,\|w - w'\|$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f_k}{\partial w}(z_1 \ldots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial w}(z_1 \ldots z_n, w')\right| = \\
&= |2\,a_k(z_1 \ldots z_n)\, w - 2\,a_k(z_1 \ldots z_n)\, w'| \leq 2 \sup_{\mathbf{C}^n} |a_k|\,\|w - w'\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f_k}{\partial \bar{w}}(z_1 \ldots z_n, w) - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{w}}(z_1 \ldots z_n, w')\right| = \\
&= |2\,a_k(z_1 \ldots z_n)\, \bar{w} - 2\,a_k(z_1 \ldots z_n)\, \bar{w}'| \leq 2 \sup_{\mathbf{C}^n} |a_k|\,\|w - w'\|\,.
\end{aligned}$$

Inoltre risulta:

$$|a_k\, w^2 + a_k\, \bar{w}^2| \leq 2 \sup_{\mathbf{C}^n} |a_k|\,(|c| + R_0)^2$$

$$\left|\frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j}\, w^2 + \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j}\, \bar{w}^2\right| \leq 2 \sup_{\mathbf{C}^n} \left|\frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_j}\right| (|c| + R_0)^2$$

$$\left|\frac{\partial a_k}{\partial z_j}\, w^2 + \frac{\partial a_k}{\partial z_j}\, \bar{w}^2\right| \leq 2 \sup_{\mathbf{C}^n} \left|\frac{\partial a_k}{\partial z_j}\right| (|c| + R_0)^2$$

$$|2\,a_k\,w| \leq 2 \sup_{\mathbf{C}^n} |a_k|(|c| + R_0)$$

$$|2\,a_k\,\bar{w}| \leq 2 \sup_{\mathbf{C}^n} |a_k|(|c| + R_0)$$

e quindi in tal caso $K = \max_{k=1\ldots n}(2\,\|a_k\|(|c| + R_0)^2)$

Si può quindi dimostrare che sono verificate le condizioni (1.29) e (1.30):

$$(2.3)\quad \frac{\partial f_k}{\partial z_i}(z_1 \ldots z_n, w) + \frac{\partial f_k}{\partial w}(z_1 \ldots z_n, w)\,f_i(z_1 \ldots z_n, w) +$$
$$+ \frac{\partial f_k}{\partial \bar{w}}(z_1 \ldots z_n, w)\cdot f_i(z_1 \ldots z_n, \bar{w}) = \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_i}\,w^2 + \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_i}\,\bar{w}^2 +$$
$$+ 2\,w\,a_k(a_i\,w^2 + a_i\,\bar{w}^2) + 2\,a_k\,\bar{w}\,(a_i\,\bar{w}^2 + a_i\,w^2)$$

$$(2.4)\quad \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_k}(z_1 \ldots z_n, w) + \frac{\partial f_i}{\partial \bar{w}}(z_1 \ldots z_n, w)\,f_k(z_1 \ldots z_n, \bar{w}) +$$
$$+ \frac{\partial f_i}{\partial w}(z_1 \ldots z_n, w)\,f_k(z_1 \ldots z_n w) = \frac{\partial a_i}{\partial \bar{z}_k}\,w^2 + \frac{\partial a_i}{\partial \bar{z}_k}\,\bar{w}^2 +$$
$$+ 2\,a_i\,\bar{w}\,(a_k\,\bar{w}^2 + a_k\,w^2) + 2\,a_i\,w\,(a_k\,w^2 + a_k\,\bar{w}^2)\,.$$

Poiché $\frac{\partial a_i}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial a_k}{\partial \bar{z}_i}$ risulta che i secondi membri di (2.3) e (2.4) sono uguali e perciò anche i primi.

Analogamente essendo

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{z}_i}(z_1 \ldots z_n, \bar{w}) + \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial w}(z_1 \ldots z_n, \bar{w})\,f_i(z_1 \ldots z_n, \bar{w}) +$$
$$+ \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{w}}(z_1 \ldots z_n, \bar{w})\,f_i(z_1 \ldots z_n, w) = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial \bar{z}_i}\,\bar{w}^2 + \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial \bar{z}_i}\,w^2 +$$
$$+ 2\,\bar{a}_k\,w\,(a_i\,\bar{w}^2 + a_i\,w^2) + 2\,\bar{a}_k\,\bar{w}\,(a_i\,w^2 + a_i\,\bar{w}^2)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_k}(z_1 \ldots z_n, w) + \frac{\partial f_i}{\partial w}(z_1 \ldots z_n, w)\,\bar{f}_k(z_1 \ldots z_n, \bar{w}) +$$
$$+ \frac{\partial f_i}{\partial \bar{w}}(z_1 \ldots z_n, w)\,\bar{f}_k(z_1 \ldots z_n, w) = \frac{\partial a_i}{\partial z_k}\,w^2 + \frac{\partial a_i}{\partial z_k}\,\bar{w}^2 +$$
$$+ 2\,a_i\,w\,(\bar{a}_k\,w^2 + \bar{a}_k\,\bar{w}^2) + 2\,a_i\,\bar{w}\,(\bar{a}_k\,\bar{w}^2 + \bar{a}_k\,w^2)$$

poiché $\frac{\partial a_i}{\partial z_k} = \frac{\partial a_k}{\partial z_i}$ si ha che le ultime due espressioni sono uguali.

Quindi considerando $(d_1 \dots d_n)$ taleche siano verificate le (1.17) e (1.18) possiamo dire che esiste una soluzione di

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_j} = a_j w^2 + a_j \bar{w}^2 \qquad j = 1 \dots n$$

ed essa ha la rappresentazione

$$w(z_1 \dots z_n) = c - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^{n} \int\int_{\mathbf{C}} (a_i w^2 + a_i \bar{w}^2)(z_1 \dots \zeta_i \dots z_n) \frac{d\xi_i \, d\eta_i}{\zeta_i - z_i} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] L. HÖRMANDER, *An introduction to Complex Analysis in several variables.* (1967).

[2] W. TUTSCHKE, *Uber die Umwandlung (auch nichtlinearerer) partieller Differential-gleichungssysteme mit mehreren Komplexen variablen in Integro-differential gleichungssysteme und deren Losung durch funktional analytische Methoden.* Math. Nach., 1975 Bd. 58 H 1-6.

[3] L. DIOMEDA, *Sulle funzioni pseudoanalitiche a più variabili complesse.* Ricerche Matematiche (in stampa).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, A. Franchetta e M. Curzio.

Un caso limite della diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz *

Nota di ANGELO ALVINO
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 5 marzo 1977)

RIASSUNTO. — Si dimostra un teorema di inclusione per la funzione $u(x)$, definita in un aperto limitato G di R^n, nulla su ∂G, quando $|Du|$ appartiene allo spazio di Lorentz $L(n, \nu)$ con $\nu \in [1, n]$. Il risultato viene confrontato con quello di TRUDINGER [8].

SUMMARY. — An imbedding theorem is given for the function $u(x)$ from an open bounded set $G \subset R^n$ with zero boundary data, when $|Du|$ is in the Lorentz space $L(n, \nu)$ with $\nu \in [1, n]$. We compare this result with TRUDINGER'S one [8].

In un recente lavoro [7] G. TALENTI ha valutato la migliore costante per la classica diseguaglianza di Sobolev

$$\| u \|_{L^q} \leq C \| Du \|_{L^p},$$

dove $u(x)$ è una funzione definita in R^n, che possiamo senz'altro supporre sufficientemente regolare e a supporto compatto, Du è il gradiente di $u(x)$, $\| Du \|_{L^p}$ la norma di $|Du|$ nello spazio $L^p(R^n)$ con $p \in [1, n[$ e $\| u \|_{L^q}$ la norma di $u(x)$ in $L^q(R^n)$ con $q = np/(n-p)$. Nella dimostrazione di tale risultato ci si vale di tecniche di simmetrizzazione, riconducendosi in tal modo ad un problema di calcolo delle variazioni unidimensionale: precisamente, facendo ricorso ai riordinamenti, si fa vedere (cfr. [7] lemma 1) che, per valutare l'estremo superiore del rapporto

$$\frac{\| u \|_{L^q}}{\| Du \|_{L^p}},$$

ci si può limitare a considerare funzioni a simmetria sferica; ricordiamo che, per riordinamento di una funzione $u(x)$, si intende una

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

funzione $u^*(x)$, non negativa, il cui insieme di livello $\{x \in \mathrm{R}^n : u^*(x) > t\}$ è, per ogni $t > 0$, una sfera con centro nell'origine la cui misura coincide con quella dell'insieme $\{x \in \mathrm{R}^n : |u(x)| > t\}$; si vede facilmente che (cfr. [7]) $u^*(x) = \sup\{t : \mu(t) > \mathrm{C}_n |x|^n\}$, essendo $\mathrm{C}_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$ la misura della sfera di R^n di raggio unitario e $\mu(t) = \mathrm{mis}\{x \in \mathrm{R}^n : |u(x)| > t\}$. Tale tecnica si è rivelata adatta, in un mio precedente lavoro [1], per trattare una diseguaglianza tipo Sobolev in spazi di Lorentz[1]

$$\| u \|_{q,v} \leq \mathrm{C}' \| \mathrm{D}\, u \|_{p,v} ,$$

essendo $\| \mathrm{D}\, u \|_{p,v}$ la norma di $|\mathrm{D}\, u|$ nello spazio di Lorentz $\mathrm{L}(p, v)$, con $p \in [1, n[$ e $v \in [1, p]$, e $\| u \|_{q,v}$ la norma di $u(x)$ in $\mathrm{L}(q, v)$ con $q = n\,p/(n - p)$; il punto centrale della dimostrazione, come già nel citato lavoro di Talenti, consiste in un risultato di simmetrizzazione, che è qui utile richiamare (cfr. [1] lemma 1):

LEMMA 1. — *Sia* $u(x) \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ *una funzione non negativa e* $u^*(x)$ *il suo riordinamento; per ogni* $p \geq 1$ *e per ogni* $v \in [1, p]$ *si ha*

$$\int_{\mathrm{R}^n} [|\mathrm{D}\, u|^*(x)]^v \, |x|^{nv/p} \, \frac{dx}{|x|^n} \geq \int_{\mathrm{R}^n} |\mathrm{D}\, u^*|^v \, |x|^{nv/p} \, \frac{dx}{|x|^n} .$$

In questa nota si completa il risultato di [1], considerando il caso limite $p = n$: tale risultato viene infine confrontato con altri già noti.

1. - NOTAZIONI E RISULTATO

Sia G un aperto di R^n di misura finita; indichiamo con G^* la sfera con centro nell'origine tale che $\mathrm{mis}\,\mathrm{G}^* = \mathrm{mis}\,\mathrm{G}$: il suo raggio è quindi $r_o = (\mathrm{mis}\,\mathrm{G}/\mathrm{C}_n)^{1/n}$. Diciamo che una funzione misurabile $u(x)$, definita in G, appartiene allo spazio $\mathrm{X}_s(\mathrm{G})$ se è finita la quantità

$$[u]_s = \sup_{\mathrm{G}^*} \frac{u^*(x)}{\left[l\,g \dfrac{r_o}{|x|} \right]^s} . \tag{1}$$

[1] Si dice che una funzione $u(x)$ appartiene allo spazio di Lorentz $\mathrm{L}(r, s)$ se la quantità

$$\| u \|_{r,s} = \mathrm{C}_n^{(s-r)/rs} \left(\int_{\mathrm{R}^n} [u^*(x) \, |x|^{n/r}]^s \frac{dx}{|x|^n} \right)^{1/s}$$

è finita; $\mathrm{L}(r, s)$ è uno spazio di Banach.

Sussiste il seguente risultato:

TEOREMA — *Sia* $u(x)$ *una funzione sufficientemente regolare, a supporto compatto contenuto in* G ; *si ha per ogni* $v \in [1, n]$

$$[u]_{1-1/v} \leq n^{-1/v} C_n^{-1/n} \| D u \|_{n,v} . \tag{2}$$

La costante che compare nella (2) *è la migliore possibile.*

Dimostrazione. — Per il lemma 1 si ha

$$\| D u \|_{n,v} \geq C_n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{v}} \left(\int_{G^*} | D u^* |^v | x |^v \frac{d x}{| x |^n} \right)^{1/v}$$

da cui

$$\| D u \|_{n,v} \geq n^{1/v} C_n^{1/n} \left(\int_0^{r_0} \left| \frac{d}{d r} - u^* (r) \right|^v r^v \frac{d r}{r} \right)^{1/v} \tag{3}$$

con ovvio significato per il simbolo $u^*(r)$. Ci proponiamo adesso di individuare uno spazio funzionale ambiente per la funzione $u^*(r)$, e quindi per $u(x)$, in forza della finitezza dell'integrale a secondo membro della (3); la tecnica che utilizzeremo ricalca quella contenuta nel n. 2 di [1]: se $z(r)$ è una funzione misurabile e sommabile in ogni intervallo $[\varepsilon, r_0]$ con $\varepsilon > 0$, sia $u(r)$ la funzione tale che $u'(r) r = z(r)$ e $u(r_0) = 0$ e indichiamo con A l'operatore che alla funzione $z(r)$ associa la funzione $u(r)$; cominciamo a studiare tale operatore nel caso in cui il suo dominio sia lo spazio $L^1([0, r_0], \nu)$, essendo ν la misura

$$\nu (E) = \int_E \frac{d r}{r} .$$

Si ha:

$$\sup | u(r) | \leq \int_0^{r_0} | u'(r) | d r \tag{4}$$

da cui si ricava che l'operatore A è lineare e continuo dallo spazio $L^1([0, r_0], \nu)$ allo spazio L^∞ e ha norma 1, dal momento che nella

(4) vale il segno di uguaglianza per funzioni $u(r)$ non crescenti. Supponiamo ora che il dominio di A sia lo spazio L^∞; si ha

$$(5) \qquad |u(r)| = \left| \int_r^{r_0} \frac{z(t)}{t}\, dt \right| \leq \sup |z(t)| \left[lg \frac{r_0}{r} \right].$$

Indichiamo con X_1 lo spazio delle funzioni $u(r)$ misurabili tali che la quantità

$$(6) \qquad \| u \|_1 = \sup \frac{|u(r)|}{\left[lg \frac{r_0}{r} \right]}$$

sia finita: si vede facilmente che la (6) è una norma rispetto alla quale X_1 è uno spazio di Banach. Dalla (5) si ricava quindi che A è un operatore continuo da L^∞ a X_1: la norma è 1 in quanto nella (5) vale il segno di uguaglianza se si prende $u(r) = lg(r_0/r)$.

Il comportamento di A quando il suo dominio è lo spazio $L^\nu([0, r_0], \nu)$ può essere individuato, a partire dai due risultati precedentemente ottenuti, usando tecniche di interpolazione. Indichiamo, per brevità con L^ν lo spazio $L^\nu([0, r_0], \nu)$; L^ν può essere ottenuto per interpolazione dagli spazi L^1 e L^∞: precisamente, utilizzando le notazioni di [3], si ha $L^\nu = [L^1, L^\infty]_{1-1/\nu}$. Per quel che riguarda lo spazio di interpolazione $[L^\infty, X_1]_s$ si sa (cfr. [3] § 13.6) che esso è contenuto nello spazio X_s delle funzioni $u(r)$ tali che risulti finita la quantità

$$(7) \qquad \| u \|_s = \sup \frac{|u(r)|}{\left[lg \frac{r_0}{r} \right]^s};$$

inoltre la (7), che è una norma rispetto alla quale X_s è uno spazio di Banach, è minore o uguale alla norma di $u(x)$ in $[L^\infty, X_1]_s$. Si ha allora (cfr. [3] § 4) che A è lineare e continuo da L^ν a $X_{1-1/\nu}$ e in più si ha

$$\| A z \|_{1-1/\nu} \leq \| z \|_{L^\nu}$$

da cui

$$(8) \qquad \sup \frac{\| u \|_{1-1/\nu}}{\left(\int_0^{r_0} | u'(r)\, r |^\nu \frac{dr}{r} \right)^{1/\nu}} \leq 1.$$

Per dimostrare che nella (8) vale il segno di uguaglianza (nei casi $\nu = 1$ e $\nu = \infty$ è stato già osservato) basta considerare le funzioni

$$(9) \qquad u_\varepsilon(r) = \begin{cases} l\,g\,\dfrac{r_0}{r} & \text{se } \varepsilon \leq r \leq r_0 \\ l\,g\,\dfrac{r_0}{\varepsilon} - \dfrac{x-\varepsilon}{\varepsilon} & \text{se } 0 \leq r \leq \varepsilon \end{cases}$$

e osservare che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\| u_\varepsilon \|_{1-1/\nu}}{\left(\int_0^{r_0} | u_\varepsilon'(r)\, r |^\nu \frac{dr}{r} \right)^{1/\nu}} = 1 .$$

Le precedenti considerazioni suggeriscono di prendere come spazio ambiente per la funzione $u(x)$, quando $| \mathrm{D}\, u | \in \mathrm{L}(n, \nu)$, lo spazio $\mathrm{X}_{1-1/\nu}(\mathrm{G})$ definito all'inizio di questo numero. Per la (3) si ha (qui è $\nu \leq n$)

$$(10) \qquad \frac{[u]_{1-1/\nu}}{\| \mathrm{D}\, u \|_{n,\nu}} \leq n^{-1/\nu}\, \mathrm{C}_n^{-1/n} \frac{\| u^* \|_{1-1/\nu}}{\left(\int_0^{r_0} \left| \frac{d}{dr} u^*(r) \right|^\nu r^\nu \frac{dr}{r} \right)^{1/\nu}}$$

e quindi, per la (8)

$$(11) \qquad \sup \frac{[u]_{1-1/\nu}}{\| \mathrm{D}\, u \|_{n,\nu}} \leq n^{-1/\nu}\, \mathrm{C}_n^{-1/n} ;$$

per dimostrare che nella (11) vale il segno di uguaglianza basta tener presente (cfr. [1] osservazione 1) che i due membri della diseguaglianza (10) coincidono quando

$$(12) \qquad u(x) = u^*(x) \quad \text{e} \quad | \mathrm{D}\, u |^*(x) = | \mathrm{D}\, u |(x)$$

e che funzioni tipo quelle definite dalla (9), da una parte, verificano le (12), dall'altra, essendo estremanti per il funzionale a secondo membro della (10), lo saranno anche per il funzionale a primo membro. Il teorema è così dimostrato.

2. - Confronto con risultati precedenti

Se $v = n$, nel qual caso lo spazio di Lorentz $L(n, n)$ coincide con lo spazio $L^n(G)$, la (2) diventa

$$[u]_{1-1/n} \leq (n C_n)^{-1/n} \| D u \|_{L^n} .$$

Sulla forma che assume la diseguaglianza di Sobolev nel caso in cui $| D u | \in L^n(G)$ esiste un'ampia letteratura: si confronti in proposito Berger [2], Stampacchia [6], Trudinger [8], Donaldson-Trudinger [4]. Tra questi il risultato più preciso è quello di Trudinger (cfr. [8] teorema 2) che ora descriviamo. Consideriamo la funzione

$$\Phi_s(t) = \exp | t |^{1/s} - 1$$

e indichiamo con L_{Φ_s} lo spazio di Orlicz definito a partire dalla N-funzione Φ_s; tale spazio si intende dotato della seguente norma

$$\| u \|_{\Phi_s} = \inf \left\{ k : \int_G \Phi_s \left(\frac{u}{k} \right) d x \leq \text{mis } G \right\} . \tag{13}$$

Il citato risultato di Trudinger asserisce che, se $| D u | \in L^n(G)$, allora $u \in L_{\Phi_s}$ con $s = 1 - 1/n$. Ci proponiamo di confrontare tale risultato con quello precedentemente ottenuto. Per fare ciò è necessario precisare la topologia da introdurre in modo naturale negli spazi $X_s(G)$. Il funzionale $[u]_s$ definito dalla (1) non è una norma, venendo a cadere la diseguaglianza triangolare che viene sostituita dalla seguente più debole proprietà

$$[u + v]_s \leq 2 ([u]_s + [v]_s) . \tag{14}$$

La topologia che si intende introdotta in $X_s(G)$ è quella che ha come base di aperti gli insiemi $\{v \in X_s(G) : [u - v]_s < \varepsilon\}$ al variare di u in $X_s(G)$ e di ε in R: ciò è possibile in quanto sussiste la (14). Si dimostra inoltre che $X_s(G)$ è metrizzabile (cfr. Mikhlin [5], p. 299). Con una tale topologia una successione $\{u_k\}$ converge ad una funzione $u \in X_s(G)$ se e solo se $[u_k - u]_s$ tende a 0.

Vogliamo dimostrare che $X_s(G)$ è incluso strettamente in L_{Φ_s} non solo insiemisticamente ma anche in senso topologico: la topologia di $X_s(G)$, cioè, è strettamente più fine di quella indotta su $X_s(G)$ dalla topologia di L_{Φ_s}. Cominciamo a dimostrare che $X_s(G) \subseteq L_{\Phi_s}$. Si ha

$$[u]_s = \inf \left\{ h : \mu(t) \leq (\text{mis } G) \exp\left(- n \left[\frac{t}{h} \right]^{1/s} \right) \right\} ; \tag{15}$$

infatti se $h > [u]_s$ è

$$u^*(x) \leq h \left[lg \frac{r_0}{|x|} \right]^s$$

da cui, per ogni $t > 0$

$$\mu(t) = \text{mis}\,\{x : u^*(x) > t\} \leq \text{mis}\left\{ x : h\left[lg \frac{r_0}{|x|} \right]^s > t \right\} =$$

$$= (\text{mis G}) \exp\left(- n \left[\frac{t}{h} \right]^{1/s} \right)$$

e, quindi, la (15).

Essendo

$$\int_G \left(\exp\left[\frac{|u|}{k} \right]^{1/s} - 1 \right) dx = \int_0^{+\infty} \mu(t)\, d \exp\left[\frac{t}{k} \right]^{1/s},$$

dalla (15) si ha

$$\int_G \left(\exp\left[\frac{|u|}{k} \right]^{1/s} - 1 \right) dx \leq \frac{\text{mis G}\; h^{\frac{1}{s}}}{n\, k^{\frac{1}{s}} - h^{\frac{1}{s}}}.$$

Ciò implica, se $k \geq \left(\frac{2}{n} \right)^s h$ e, quindi, se $k > \left(\frac{2}{n} \right)^s [u]_s$:

$$\int_G \left(\exp\left[\frac{|u|}{k} \right]^{1/s} - 1 \right) dx \leq \text{mis G}.$$

Ricordando la definizione (13) di norma in L_{ϕ_s}, si ottiene

$$\| u \|_{\phi_s} \leq \left(\frac{2}{n} \right)^s [u]_s ; \tag{16}$$

la (16) assicura l'inclusione $X_s(G) \subseteq L_{\phi_s}$. Per dimostrare che questa inclusione va intesa in senso stretto è sufficiente costruire una successione $\{u_k\}$ convergente alla funzione nulla in L_{ϕ_s} e tale che $[u_k]_s$ tenda a $+\infty$ al divergere di k. Sia $u_k(x)$ una funzione tale che

$$u_k^*(x) = \begin{cases} 1/k & \text{se } |x| \leq r_k \\ (-k|x| + k r_0) \left[lg \dfrac{r_0}{|x|} \right]^{s-1} & \text{se } r_k \leq |x| \leq r_0 \end{cases}$$

dove r_k è la più grande delle soluzioni, in $[0, r_0]$, dell'equazione in r

$$(-k r + k r_0)\left[lg\frac{r_0}{r}\right]^{s-1} = \frac{1}{k}.$$

La successione $\{u_k\}$ converge alla funzione nulla in L_{ϕ_s} in quanto vi converge uniformemente. Calcoliamo $[u_k]_s$:

$$[u_k]_s = \sup \frac{u_k^*(r)}{\left[lg\frac{r_0}{r}\right]^s} = \lim_{r\to r_0} \frac{-k r + k r_0}{lg\frac{r_0}{r}} = k$$

da cui l'asserto.

Per $s = 1 - 1/n$ il risultato ottenuto in tale nota precisa quindi quello di Trudinger precedentemente descritto. Per finire osserviamo che tale miglioramento non riguarda il grado di singolarità della $u(x)$ nei punti interni a G, in quanto il risultato di Trudinger non è migliorabile in questa direzione come osservato in [8] dallo stesso Trudinger.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Alvino, *Sulla diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz*, Boll. Un. Mat. Ital., (5) **14-A** (1977), pp. 148-156.

[2] M. S. Berger, *Orlicz spaces and nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Bull. Amer. Math., Soc., **71** (1965), pp. 898-902.

[3] A. P. Calderon, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math., **24** (1964), pp. 113-190.

[4] T. K. Donaldson - N. S. Trudinger, *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Functional Analysis, **8** (1971), pp. 52-75.

[5] S. G. Mikhlin, *The numerical performance of variational methods*, The Netherlands Wolters-Noordhoof Pub. Groningen, (1971).

[6] G. Stampacchia, *Some limit cases of L^p-estimates for solutions of second order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), pp. 505-510.

[7] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura e Appl., **110** (1976), pp. 353-372.

[8] N. S. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. of Math. and Mech., **17** (1967), pp. 473-483.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e F. Cafiero.

Eterogeneità della Ribonucleasi seminale bovina

Nota di ALBERTO DI DONATO e CIRO FORMICA
presentata dal socio ordinario ENZO LEONE

(Adunanza del 5 marzo 1977)

RIASSUNTO. — Si è studiata la presenza di sub-forme della RNAsi BS—1, una ribonucleasi isolata dal plasma seminale bovino, mediante cromatografia a scambio ionico. Sono state identificate tre sub-forme, indistinguibili per la loro mobilità elettroforetica, la composizione in ammino acidi e l'attività enzimatica.

I dati presentati indicano inoltre che l'eterogeneità della ribonucleasi seminale non è dovuta ad artefatti della purificazione.

SUMMARY. — The occurence of subforms in RNAse BS—1, a ribonuclease isolated from bovine seminal plasma, has been investigated with ion exchange chromatography. The protein was resolved into three forms, indistinguishable in their electrophoretic mobilities, amino acid compositions and enzymic activities.

Furthermore, evidence is presented that the heterogeneity of seminal ribonuclease is not due to artifacts of purification.

La Ribonucleasi seminale (RNAsi BS-1), isolata dal plasma seminale bovino [1], è una proteina basica, dimerica, con un peso molecolare di circa 29.000 dalton, le cui subunità sono identiche e collegate da due ponti disolfurici [1-4]). La RNAsi BS-1 appare omogenea dopo la preparazione quando è esaminata secondo diversi criteri di purezza quali la sedimentazione all'ultracentrifuga, la disc-elettroforesi, l'analisi di amminoacidi [1]. D'altra parte, come è già stato riportato [5], essa si risolve in più frazioni enzimaticamente attive quando è analizzata con alcuni sistemi di cromatografia a scambio ionico. In questa comunicazione si discutono i primi risultati ottenuti investigando l'entità e l'origine dell'eterogeneità della proteina in esame.

MATERIALI E METODI

Plasma seminale bovino. — Il seme di toro ottenuto dai centri di fecondazione artificiale era rapidamente centrifugato a 4°C per ri-

muovere gli spermatozoi. Il plasma era usato immediatamente o conservato a – 20°C.

RNAsi BS-1. — L'enzima è stato preparato con il metodo di D'ALESSIO *et al.* [1].

RNA da lievito. — Il prodotto fornito dalla Sigma è stato purificato secondo il metodo di SHORTMAN [6].

Cromatografia su Carbossimetil Cellulosa. — Si è impiegata la Carbossimetil Cellulosa CM-32, fornita dalla Whatman, Maidstone, Inghilterra. La cromatografia era effettuata utilizzando 18 ml di re-

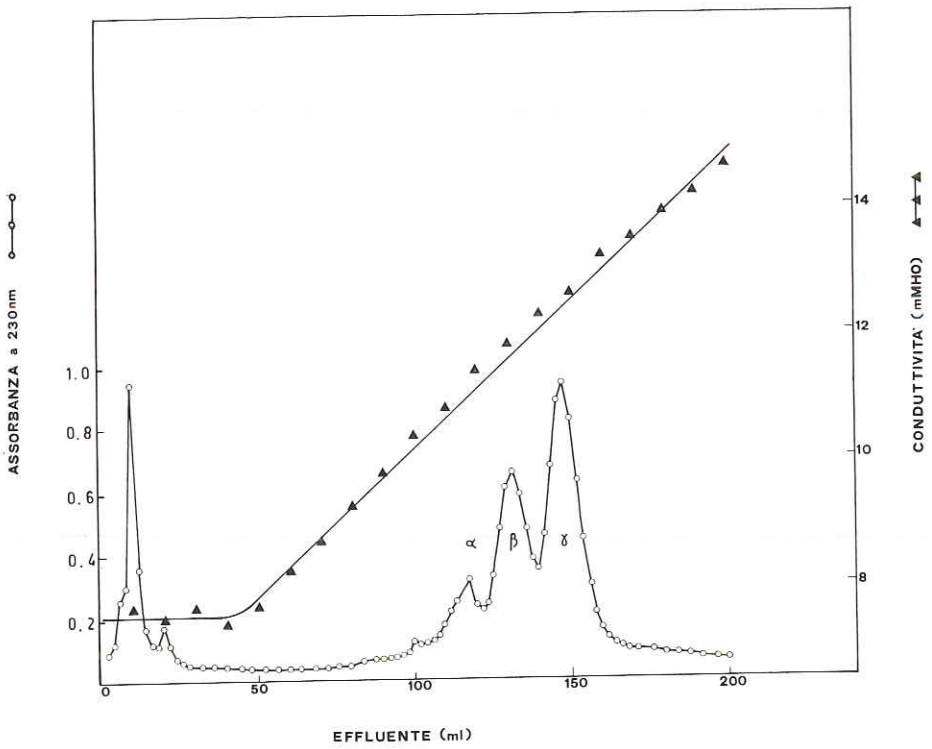


FIG. 1. - Cromatografia su carbossimetil cellulosa della ribonucleasi seminale bovina.

sina equilibrata in tampone Tris-Cl 0,1 M a pH 8,4. L'eluizione era condotta con un gradiente lineare di NaCl da 0,1 a 0,3 M con un volume totale di 200 ml. La velocità di eluizione era di 20 ml/ora e venivano raccolte frazioni di 2 ml.

Altri metodi. — Le metodiche impiegate per i controlli di purezza della proteina, per le analisi di amminoacidi, per la determinazione dell'attività enzimatica e degli zuccheri neutri e amminati, sono quelli precedentemente descritti [1].

Risultati

Vari esperimenti preliminari effettuati con diversi supporti cromatografici e diversi sistemi gradiente, sia di pH che forza ionica, hanno permesso di individuare un efficace sistema di risoluzione dell'eterogeneità della RNAsi BS-1. Tale sistema è costituito da una separazione cromatografica su carbossimetil cellulosa, sviluppata con un gradiente lineare di NaCl ed offre il vantaggio di un basso consumo di proteina, 1-2 mg, con un tempo di analisi relativamente basso, circa 10 ore.

In Figura 1 è illustrato un tipico esperimento di separazione della RNAsi BS-1 nelle sue forme componenti.

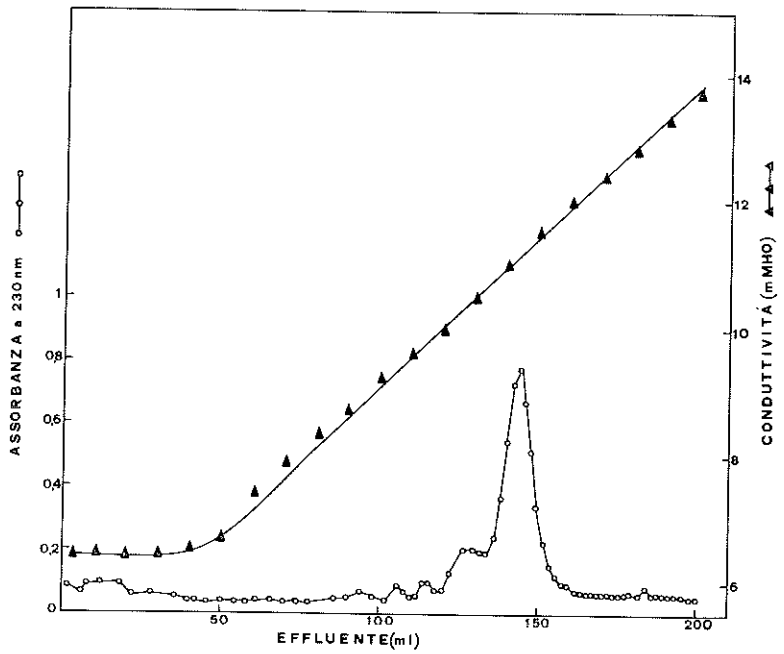


Fig. 2. - Cromatografia su carbossimetil cellulosa della sub-forma γ, isolata dal precedente esperimento.

Il risultato è la separazione della RNAsi BS-1, pura ed omogenea secondo i criteri prima descritti, in tre sub-forme denominate α, la più anionica, β e γ, la più cationica.

Il sistema cromatografico utilizzato consente quindi di ottenere preparazioni omogenee delle sub-forme della RNAsi BS-1 per analizzarne le proprietà strutturali e funzionali.

In Figura 2 è illustrata la ricromatografia su carbossimetil cellulosa della sub-forma γ isolata dal precedente esperimento. La subforma viene eluita ad un volume di eluizione identico a quello trovato per la cromatografia della proteina *in toto*.

Le singole sub-forme della RNAsi BS-1 così isolate, hanno la stessa mobilità elettroforetica su gel di poliacrilammide, una identica composizione in amminoacidi ed inoltre risultano assenti all'analisi delle tre sub-forme zuccheri neutri o amminati. Particolarmente indicativo è il risultato della determinazione dell'attività enzimatica di α, β, γ. L'attività delle 3 forme saggiata sia su RNA da lievito che su

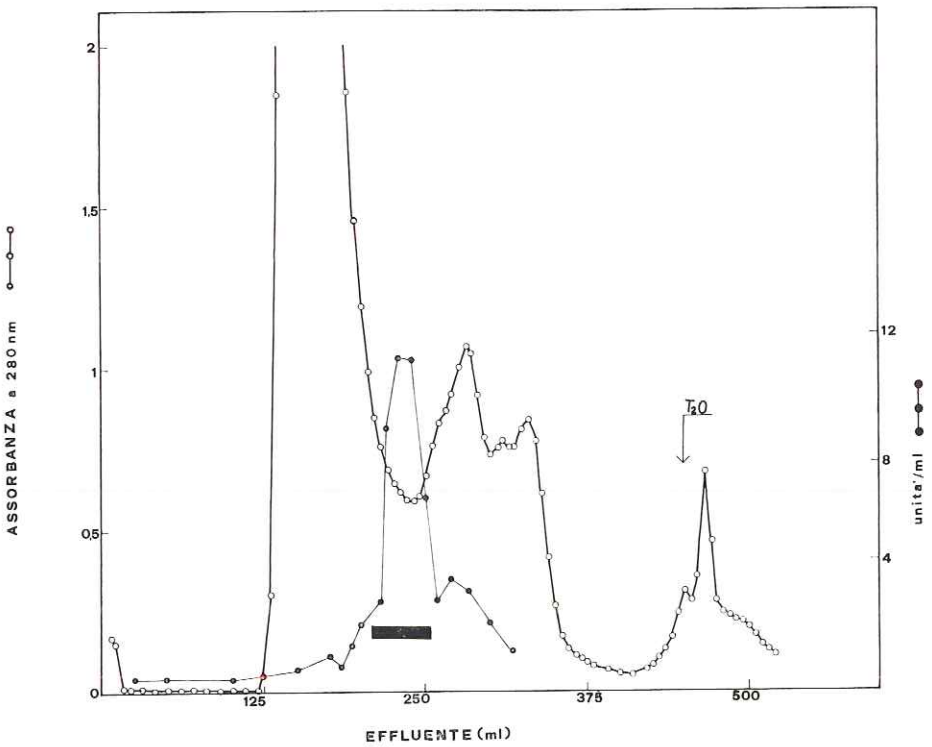


FIG. 3. - Gel filtrazione del plasma seminale bovino su Sephadex G-75. La sbarra indica le frazioni riunite e poi cromatografate su carbossimetil cellulosa.

un substrato modello, la citidina-2',3'-*P* ciclico, risulta identica. Tenendo presente l'eterogeneità e la composizione in basi del substrato macromolecolare, l'RNA, risulta quindi difficile ipotizzare una diversa specificità o una diversa modalità di azione delle 3 forme.

Un primo approccio per chiarire l'origine dell'eterogeneità dell'RNAsi BS-1 è stato quello di verificare l'importanza che il proce-

dimento di purificazione della proteina può avere nella produzione delle sub-forme; sono stati infatti riportati in letteratura vari casi di eterogeneità direttamente dipendente dallo specifico procedimento di purificazione utilizzato [7]. A tale scopo si è andati a ricercare direttamente nel plasma seminale, la fonte biologica, la eventuale presenza delle sub-forme. Un campione di 4 ml di plasma seminale bovino è stato equilibrato nel tampone di partenza del sistema cromatografico mediante gel filtrazione su colonna di Sephadex G-75 (cm 2,5 × 70); le frazioni dotate di attività ribonucleasica erano riunite come illustrato in Figura 3. Si può notare come sono state

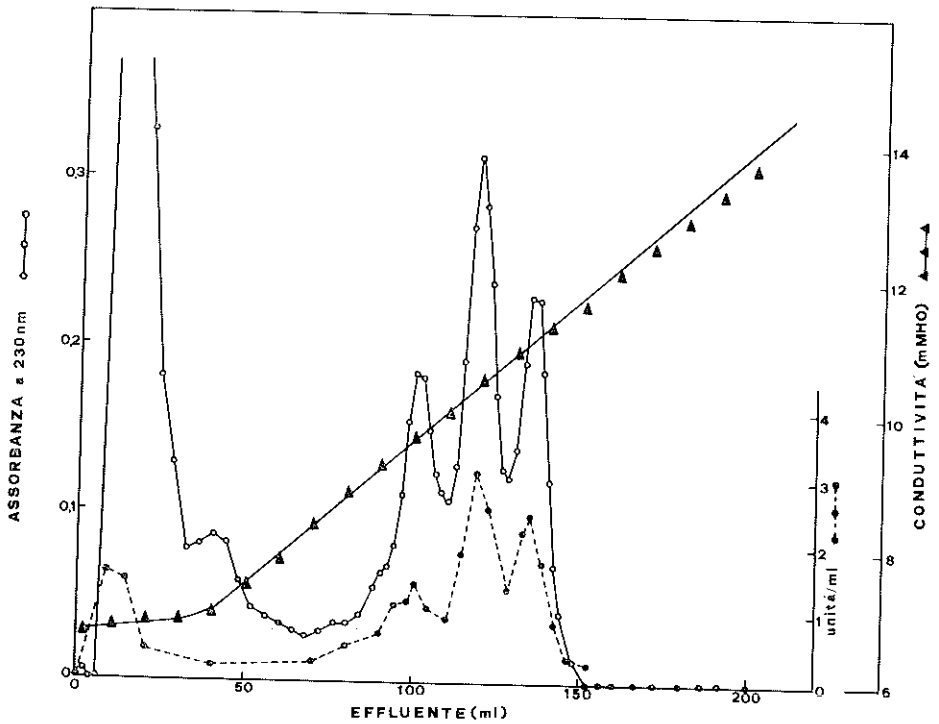


FIG. 4. - Cromatografia su carbossimetil cellulosa di un campione di plasma seminale bovino.

escluse le frazioni corrispondenti all'attività ribonucleasica ad alto peso molecolare, e le frazioni corrispondenti al componente minore ad attività RNAsica presente nel plasma (BS-2). Prima di essere adsorbito su carbossimetil cellulosa il campione era concentrato su membrana Amicon PM-10. Il risultato della cromatografia è illustrato in Figura 4.

Anche in questo caso, quando cioè la proteina non è andata incontro ad alcuno dei procedimenti impiegati per la purificazione, l'enzima risulta costituito dalle 3 sub-forme. Una differenza tuttavia è evidente tra i rapporti che si evidenziano tra le sub-forme della proteina sottoposta ai procedimenti di purificazione ed i rapporti che invece si ritrovano nella proteina analizzata dopo una semplice gel-filtrazione. In quest'ultimo caso la percentuale della sub-forma β è nettamente più alta.

Discussione

In conclusione, dai dati qui illustrati viene innanzitutto confermata l'eterogeneità della RNAsi BS-1. Il metodo cromatografico descritto risulta inoltre un eccellente sistema analitico per studiare tale eterogeneità.

Va anche sottolineata a questo punto la potenziale utilità del procedimento cromatografico descritto per una purificazione rapida e forse anche più efficiente della RNAsi dal plasma.

Per quanto riguarda le cause dell'eterogeneità i risultati ottenuti indicano che essa non può essere dovuta ad interazioni tra la proteina e lo scambiatore ionico. Una delle tre sub-forme infatti, una volta ricromatografata, ricompare immodificata ed allo stesso volume di eluizione.

I dati indicano anche che l'eterogeneità della RNAsi BS-1 non è un artefatto dei procedimenti di purificazione, ma che le subforme sono già presenti nel plasma. I diversi rapporti tra le subforme ritrovati nel plasma possono però indicare che la purificazione può portare ad una interconversione delle forme stesse, ma la validità di tale ipotesi è strettamente connessa alla soluzione del problema generale dell'origine dell'eterogeneità riscontrata nella proteina.

Tenendo presente che l'unica differenza verificata tra le sub-forme è quella di una diversa carica netta, una delle ipotesi che può essere formulata è che la causa dell'eterogeneità possa essere un processo di deammidazione parziale dei residui di glutammina ed asparagina presenti nella sequenza della RNAsi BS-1 [7]. Tale ipotesi può essere confermata analizzando con il sistema cromatografico descritto la presenza delle sub-forme direttamente sulla proteina purificata dal tessuto che è sede della sintesi e ciè le vescichette seminali e/o dal loro secreto [8]. Inoltre l'ipotesi della deammidazione potrà essere verificata mediante esperimenti di incubazione della RNAsi BS-1, o delle sue sub-forme, in varie condizioni di temperatura, di pH e di forza ionica. In tali esperimenti si potrà direttamente misurare se

c'è sviluppo di NH_3 e, simultaneamente, con analisi cromatografica, verificare l'eventuale interconversione delle forme stesse.

RINGRAZIAMENTI

Siamo grati al Dott. R. De Prisco per la preparazione della proteina impiegata in questo studio, ed al Dott. H. Suzuki per la determinazione degli zuccheri neutri.

Il lavoro è stato in parte finanziato con il contributo CNR n. CT 75.00884.04.

BIBLIOGRAFIA

[1] D'ALESSIO G., FLORIDI A., DE PRISCO R., PIGNERO A. e LEONE E., *Eur. J. Biochem.*, **26**, 153 (1972)
[2] D'ALESSIO G., PARENTE A., GUIDA C. e LEONE E., *FEBS Lett.*, **27**, 285 (1972).
[3] DI DONATO A. e D'ALESSIO G., *Biochem. Biophys. Res. Commun.*, **55**, 919 (1973).
[4] D'ALESSIO G., MALORNI M. C. e PARENTE A., *Biochemistry*, **14**, 1116 (1975).
[5] FLORIDI A. e D'ALESSIO G., *Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.*, **43**, 32 (1967).
[6] SHORTMAN K., *Biochim. Biophys. Acta*, **51**, 37 (1961).
[7] ROBINSON A. B. e RUDD C. J., *Current Topics in Cellular Regulation*, **8**, 247, (1974).
[8] FARINA B., QUESADA P., CARSANA A., PARENTE A., DE PRISCO R. e LEONE E., *Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.*, **49**, 1445 (1973).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, L. Mangoni e R. A. Nicolaus.

Proteine e *Vicia faba* *

Nota preliminare

Nota di ANTONIO DINI ** e COSIMO PIZZA *
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 5 marzo 1977)

RIASSUNTO. — È analizzata la quantità di L(−) β-(3,4-diidrossifenil)-α-alanina (L(−) DOPA), un amminoacido non essenziale, contenuta in semi di diverse varietà di *Vicia Faba Minor* allevate su terreni concimati con sali di fosforo e di potassio in diversi rapporti.

Si è osservato come le concimazioni a base di potassio aumentino generalmente il contenuto di L(−) DOPA.

SUMMARY. — The amount of L(−) DOPA, a not essential aminoacid contained in seeds of different variety of *Vicia Faba Minor*, grown in grounds manurated with phosphorus or potassium salts in different ratio, is valuated.

The L(−) DOPA content does increase generally in the manuring based on potassium salts.

La ricerca di nuove fonti di proteine di basso costo si sta sempre più sviluppando ed intensificando man mano che aumenta la popolazione della terra e diminuiscono, per diversi motivi, le fonti tradizionali di origine animale. Aumenta perciò l'interesse per alcune piante ricche di proteine utilizzabili per l'uomo e gli animali [1]. Molte proteine di origine vegetale contengono tutti gli amminoacidi essenziali [2] e non presentano pericoli di sorta a differenza delle cosiddette bioproteine sintetiche da batteri.

* Lavoro eseguito con il contributo del CNR.

** Gruppo di Biorganica - Facoltà di Farmacia - Università di Napoli, Via L. Rodinò 22 - 80138 Napoli (Italy).

[1] Già largamente diffusa sia nell'alimentazione umana che in quella animale, è la soia, pianta particolarmente ricca in proteine, specialmente nei semi. Molto interessante la *Medicago sativa* (alfalfa), utilizzata sia in passato che attualmente nell'alimentazione animale, dalla quale è stato recentemente sperimentato un metodo di estrazione delle proteine edibili (K. SARCAR, R. E. HAWART, M. KIKICHI e J. M. MC ARTUR, J. Agric. Food. Chem., **23**, 626 (1975); R. H. EDWARDS e altri, ibidem, **23**, 620 (1975)).

[2] Come è noto solo la metionina scarseggia nelle proteine delle piante. È interessante notare che nei cotiledoni della Faba si trovano apprezzabili quantità di metionina (R. LONGO, A. CASTELLANI, P. SBERZE e M. TIBOLLA, Phytochemistry, **13**, 167 (1974).

Una pianta che cresce bene dalle nostre parti ed è stata largamente utilizzata come mangime per animali è la *Vicia faba* [3].

La relativa abbondanza di proteine presenti in questa pianta ci è sembrata interessante. Abbiamo in conseguenza impostato un programma di collaborazione con l'Istituto di Agronomia generale della Facoltà di Agraria di Portici per ricercare le condizioni ottimali di allevamento di diverse varietà di *Vicia faba* con diverse concimazioni del terreno e intensità di semina. È in corso di studio infatti la possibilità di variare la quantità di amminoacidi e di proteine della pianta variando il tipo di concimazione.

La *Vicia faba minor* [4] è relativamente ricca in L(−) DOPA, un amminoacido non essenziale [5]. La quantità di L(−) DOPA presente è variabile nelle varie parti della pianta e nelle diverse fasi vegetative, ma sempre in quantità considerevolmente più elevate di ciascun amminoacido, specialmente in alcune parti della pianta (foglie, radici, baccelli verdi) [6].

Anche nei semi della *Vicia faba minor,* adoperati nell'alimentazione animale, sono presenti quantità di L(−) DOPA molto maggiori rispetto agli altri amminoacidi liberi [7]. Poiché una concimazione opportuna potrebbe aumentare la quantità di amminoacidi liberi e di proteine è desiderabile che aumentino gli amminoacidi essenziali e non quelli non proteici, in particolare la L(−) DOPA. Abbiamo analizzato perciò, secondo il metodo di Arnow, il contenuto di L(−) DOPA in semi ottenuti da piante allevate su terreni trattati con con-

[3] Entra infatti nella composizione degli erbai per alimentazione animale insieme alla veccia, il trifoglio e l'avena. Per l'elevato valore nutritivo degli steli e delle foglie, soprattutto nello stadio di piena fioritura, la *Vicia faba* rappresenta una delle migliori piante da mangime. Recentemente la *Vicia faba* è stata considerata dalla CEE fra le piante di maggior interesse per il suo contenuto proteico (Comunicazione privata del prof. F. Basso dell'Istituto di Agronomia Generale di Portici).

[4] Faba vulgaris Moench minor Beck - Vicia Faba minor systematics of Vicia Faba L. in

a) TASSINARI G., *Manuale dell'agronomo,* pag. 460 (1960), R.E.D.A., Roma.

b) *Enciclopedia Agraria Italiana,* 1960, Vol. IV, pag. 406, R.E.D.A., Roma.

[5] Questo amminoacido appartiene alla più vasta ed eterogenea famiglia dei polifenoli universalmente diffusa, e spesso presente in concentrazione sorprendentemente elevata, nel mondo vegetale. La DOPA è usata con successo nel morbo di Parkinson (DONATELLI, *Trattato di Farmacologia,* pag. 1064 e sgg.), è un elemento importante nella biogenesi di alcuni alcaloidi, dei pigmenti delle Centrosperme (L. MINALE, M. PIATTELLI, R. NICOLAUS, Phytochemistry, **4**, 593 (1965)); M. PIATTELLI, R. NICOLAUS, « The nitrogenous pigments of Centrospermae », Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., XXXII, 1965), dei pigmenti animali (R. NICOLAUS, Melanins, Hermann, Paris, 1968; DOPA and related compounds, A. R. PATEL and A. BURGER, *Progress in drug reserch,* vol. IX, ed. Birkauser Verlag - Basel und Stuttgart). Il recupero della DOPA o meglio la sua separazione dalle proteine potrebbe perciò costituire un'operazione conveniente dal punto di vista economico che può incidere sul costo delle proteine edibili.

[6] R. LONGO ed altri, citato in nota 2. C.A., **50**, 12343 - N. MORIYA, H. MORIMOTO, Y. KURATA (1955).

[7] L. E. ARNOW, J. Biol. Chem., **118**, 531 (1937).

cimi a base di sali di Potassio e Fosforo in diversi rapporti, distribuiti alla semina e utilizzati durante un intero ciclo vegetativo.

Le varietà di *Vicia faba minor* adoperate sono

— V.f.m. a seme chiaro (selezione Istituto Agronomia di Portici)
— V.f.m. a seme scuro (» » » » »)
— V.f.m. a seme scuro, varietà denominata Vesuvio

Le analisi sono state eseguite sugli estratti dei semi interi. La umidità media percentuale nei semi secchi è del 14 %, dato confortato da quanto riportato in letteratura. Si è preferito usare i semi tal quale, invece di seccarli precedentemente, in quanto, qualunque fosse il metodo di essiccamento, si osservavano notevoli diminuzioni del contenuto in L(−) DOPA dovuto alla sua ossidazione.

I grammi di L(−) DOPA rinvenuti per 100 g di semi analizzati sono riassunti nella seguente tabella; i valori riportati si riferiscono ad una media dei valori ottenuti nelle analisi effettuate per ciascun campione di semi:

	0-0 [1]	100-100 [2]	0-100 [3]	100-0 [4]
Favino chiaro	0,055	0,064	0,064	0,058
Favino scuro	0,030	0,032	0,032	0,030
Vesuvio	0,025	0,033	0,033	0,028

[1] Per 0-0 si intendono piante allevate su terreni non trattati con alcuna concimazione.
[2] 100-100 si intendono piante allevate su terreni concimati con 100 kg per ettaro di K_2SO_4 50-52 e 100 kg per ettaro di perfosfato minerale 18-20 %.
[3] 0-100 si intendono piante allevate su terreni concimati con 100 kg. per ettaro di K_2SO_4 50-52 %.
[4] 100-0 si intendono piante allevate su terreni concimati con 100 kg. per ettaro di perfosfato minerale 18-20 %.

Una prima analisi dei risultati mostra che il favino a seme chiaro è il più ricco in L(−) DOPA. Il contenuto in L(−) DOPA dei semi aumenta generalmente nelle concimazioni 100-100 mentre varia di poco o rimane invariato nelle concimazioni 100-0. Le concimazioni a base di potassio sembrano quindi favorire un aumento di L(−) DOPA nei semi.

Le analisi saranno ripetute alla fine del prossimo ciclo vegetativo, su piante allevate partendo dai semi indicati, per verificare l'andamento del contenuto in L(−) DOPA su più generazioni di *Vicia faba minor*.

PARTE SPERIMENTALE

Le misure sono state eseguite su apparecchio Unicam SP 600. La determinazione della L (−) DOPA è stata effettuata con il metodo di Arnow. Per azione dell'acido nitroso stabilizzato con molibdato di sodio si ottiene dai composti catecolici un derivato che assorbe nel visibile in ambiente alcalino selettivamente anche in presenza di tirosina.

È stato constatato da Rowbottom che è possibile ottenere risultati altamente riproducibili standardizzando la successione e i tempi di aggiunta dei reattivi [8]. Il campo ottimale di concentrazione è compreso tra 0,02 e 1 mg/ml, mentre la grandezza d'onda corrispondente al massimo di assorbimento nel caso della DOPA è 510 mμ.

Venti grammi di seme [9] prima macinati in piccolo mulino e poi sospesi in 150 ml di soluzione contenente l'1 % di acido acetico e lo 0,5 % di SO_2 sono omogeneizzati in frullatore. Si filtra con setto poroso ed il solido nuovamente omogeneizzato con altri 150 ml della soluzione acetica fi rifiltrato. La farina è lavata più volte direttamente su setto poroso con la stessa soluzione. I filtrati raccolti sono portati esattamente a 500 ml.

A 5 ml di ciascuno estratto si aggiungono sotto ghiaccio 1 ml di HCl 0,5 N, 1 ml di soluzione contenente 10 g di $NaNO_2$ e 10 g di molibdato di sodio. Si attende un minuto e si alcalinizza con 1 ml di NaOH 1 N si porta il matraccio a 10 ml e si esegue la lettura allo spettrofotometro. I valori letti sono confrontati con quelli di una soluzione standard contenente 0,050 g/1 di L(−)-3-(3,4)-diidrossifenil)-alanina.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, L. Mangoni e R. A. Nicolaus.

[8] J. ROWBOTTOM, J. Biol. Chem.

[9] I semi, già stagionati, provenienti dalla Stazione Sperimentale di Torre Lama (Salerno) della Facoltà di Agraria dell'Università di Napoli, sono adoperati senza preventivo essiccamento. Infatti, l'essiccamento in stufa a diverse temparture comporta la perdita di notevoli quantità di DOPA.

I valori percentuali riportati vanno considerati, pertanto, come relativi a seme non essiccato.

La serie piroclastica di Monte S. Angelo (Cicciano - Napoli)

Nota di MARIA ROSARIA GHIARA * e GIUSEPPE ROLANDI *
presentata dal socio emerito ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 5 marzo 1977)

RIASSUNTO. — Nel presente lavoro viene studiata una serie piroclastica costituita essenzialmente di livelli di pomici, ceneri, lapilli e paleosuoli a stratificazione molto netta rinvenuta sui versanti sud e nord della dorsale di Monte S. Angelo (Cicciano). La serie che poggia su un paleosuolo rosso-bruno attribuibile all'interstadio Wurm 1-2 è completata in alto dai prodotti di Astroni e dalle pomici bianche e grige del Somma Vesuvio.

La posizione stratigrafica dei termini della serie e l'insieme dei dati petrochimici e mineralogici dei campioni raccolti ed esaminati costituiscono per questo studio sufficiente fonte di informazioni e discreto numero di dati dalle cui analisi è stato possibile formulare una ipotesi di cristallizzazione frazionata di fasi feldspatiche nella evoluzione di fusi da trachitici a fonolitci nei Campi Flegrei s.l.

SUMMARY. — In this work has been studied a piroclastic serie composed essentially of levels of pumices, volcanic ash, lapilli and palaeosoils outcropping on the north-south slopes of S. Angelo mountin (Cicciano - Napoli). At the botton there is a red-brown palaeosoil of Würm 1-2 interstade, at top the last member of the serie there are two levels of pumices of Phlegreian Field the first one (Astroni) and Somma Vesuvius the second.

Stratigrafic, mineralogic and petrochemical data of the trachytic and trachyphonolitic pumices suggest that the evolution from trachytic to phonolitic liquid is controlled by fractionation of feldspatic phases.

LA SERIE DI MONTE S. ANGELO (versante sud).

Su un substrato di calcari e dolomie della serie mesozoica poggiano i prodotti piroclastici della serie di Monte S. Angelo i cui livelli in affioramento presentano inclinazione 25-30° immersione sud e giacitura frontale apparentemente orizzontale per il taglio normale all'immersione.

La base della serie è costituita da circa 2 metri di piroclastiti contenenti Helix sp. (non esaminate per incipiente alterazione) e crostoni travertinosi con a tetto un paleosuolo rosso-bruno di circa 2 metri attribuibile all'interstadio Wurm 1-2. Al di sopra del paleosuolo la serie di sviluppa essenzialmente con livelli di pomici, ceneri, lapilli

* Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli.

e paleosuoli a stratificazione molto netta il cui primo banco di piroclastiti dello spessore di circa 2 metri è formato da: un livello dello spessore di circa 50 cm costituito da pomici a spigoli vivi (Ø max 4 cm, nalisi 3a) e litici (Ø max 1 cm, analisi 3a'), un livello dello spessore di circa 15 cm costituito da ceneri (analisi 3b) e piccole pomici, un livello dello spessore di circa 120 cm costituito da pomici (analisi 3c) simili a quelle del livello inferiore ma con leggera alterazione verso l'alto. A tetto di questo banco si ha un paleosuolo di circa 50 cm su cui poggia un livello dello spessore di circa 30 cm costituito da pomici a spigoli vivi di dimensioni pressocché uniformi (Ø max 4 cm, analisi 5a) inframmezzate a litici (Ø max 2.5 cm) e in alto, a chiusura, un lapillo molto minuto misto a pomicette (analisi 5b). La serie continua con un paleosuolo di circa 10 cm ed un livello di pomici dello spessore di circa 85 cm in cui si nota, procedendo verso l'alto, un aumento delle dimensioni delle pomici (Ø max da 0.5 a 1.5 cm, analisi 7b) reso evidente da un livelletto intermedio di ceneri frammisto a pomicette ed un arricchimento in litici (analisi 7b'). Si ha poi un paleosuolo di circa 50 cm, un livello di ceneri viola di circa 30 cm ed ancora un paleosuolo di circa 60 cm. Segue una zona dello spessore di circa 2 metri in cui i livelli non sono più sicuramente individuabili a causa degli abbondanti rimaneggiamenti e conseguente raddoppiamento dei livelli inferiori (riaffioramento del livello 7). Si giunge così ad un livello dello spessore di circa 15 cm costituito da pomici (Ø max 4 cm, analisi 13) e grossi litici (Ø max 5 cm) cui fa seguito una cinerite a grosse scorie (Ømax 40 cm, analisi 14) in facies grigia dello spessore di circa 2 metri. Infine, separato da un paleosuolo avana è visibile un banco di materiale piroclastico grigio scuro frammisto a clasti di calcare cementato da $CaCO_3$ con chiare strutture sedimentarie. I prodotti di Astroni e le pomici bianche e grige del Somma Vesuvio completano la serie di Monte S. Angelo.

La stessa serie affiora con potenza ridotta alla base del versante nord del crinale del Monte S. Angelo e la facies gialla della cinerite a grosse scorie ne costituisce l'unica differenza *

Metodi analitici.

I campioni ridotti in polvere ed essiccati a 110° sono stati analizzati con le seguenti metodologie:

— SiO_2 per gravimetria;
— Fe″ per titolazione con $KMnO_4$;
— Ti e P per colorimetria da una soluzione perclorica;

* Gli autori ringraziano il dott. Cesare Porcelli per la segnalazione dell'affioramento in oggetto.

— Al, Fe totale, Mg, Ca, Mn, Na, K, Sr, Rb, Ba, per spettroscopia di assorbimento atomico, con spettrofotometro Perkin-Elmer mod. 303.

L'accuratezza delle analisi è stata controllata misurando G-2 e BCR-1 dell'U.S.G.S. le cui analisi e deviazioni standards (σ) sono riportate in tabella A (EATON, 1972; KATZ, 1968; SLAVIN, 1968).

TABELLA A

	G-2	σ	BCR-1	σ
SiO_2	69.00	0.1	54.23	0.1
TiO_2	0.49	0.02	2.40	0.02
Al_2O_3	15.46	0.02	13.66	0.1
Fe_2O_3	1.00	—	3.77	—
FeO	1.42	0.01	8.79	0.02
MnO	0.033	0.004	0.195	0.007
MgO	0.72	0.02	3.45	0.01
CaO	1.93	0.01	7.03	0.03
Na_2O	4.09	0.02	3.33	0.1
K_2O	4.54	0.01	1.70	0.04
P_2O_5	0.145	0.004	0.357	0.004
Fe totale come Fe_2O_3	2.65	0.04	13.44	0.1
Rb	166.1	3.6	47.4	2.3
Sr	465.8	2.5	328.6	2.2
Ba	1774.7	13.0	663.6	11.4

La frazione feldspatica è stata separata con separatore isodinamico di Franz e con diffrattometro Philips sono stati misurati i valori del 2ϑ relativi alle riflessioni ($1\bar{3}1$) (131) (220) per i plagioclasi (SMITH e YODER, 1956) e alle riflessioni ($\bar{2}01$) (060) ($\bar{2}04$) per i feldspati alcalini (WRAIGH, 1968) tab. B).

TABELLA B

Campioni	% Or	2ϑ		
		($\bar{2}01$)	(060)	($\bar{2}04$)
3a	80	21.13	41.59	50.81
3c	80	21.13	41.60	50.86
7b	82	21.14	41.60	50.82
13	60	21.30	41.63	50.92

Campioni	% An	2ϑ ($1\bar{3}1$) - 2ϑ (131)
3a	56.6	2.05
3c	56.6	2.04
5a	68.8	2.11
7b	79.0	2.12
13	89.5	2.23
14	79.9	2.17

Descrizione petrografica dei campioni.

Le pomici dei vari livelli si presentano quasi completamente vetrose a struttura molto ricca in vacuoli ma con discreto grado di cristallizzazione che consente di individuare chiaramente fenocristalli di plagioclasio, clinopirosseno, mica biotite, sanidino e magnetite.

— Il plagioclasio, costantemente zonato, è presente in fenocristalli e in pasta di fondo. I fenocristalli presentano nel campione 3a sovrapposizione di lamine di biotite e composizione del tipo labradoritico-sodico, nei campioni 5a e 7b composizione del tipo labradoritico-calcico, nei campioni 13 e 14 i microliti di pasta di fondo presentano una composizione del tipo labradoritico-calcico.

— Il cilinopirosseno è presente in fenocristalli e in pasta di fondo; i fenocristalli si presentano macroscopicamente colorati in verde e nero la cui intensità, in sezione sottile, è notevolmente attenuata così che i cristalli verdi risultano incolori e quelli neri debolmente verdi e leggermente pleocroici; i microliti in pasta di fondo si presentano debolmente verdi e leggermente pleocroici. La presenza dei due clinopirosseni è caratteristica comune a numerose vulcaniti campane (Ghiara e Lirer, 1976).

— La biotite è presente in piccole lamine ed è stabile nel liquido.

— Il sanidino è presente in quantità subordinata rispetto al plagioclasio tranne che nei campioni 13 e 14 dove i fenocristalli hanno una composizione di Or_{60} (dato diffrattometrico) con $2\,V\,\alpha = 30°$ P.A.O. + (010) cui corrisponde una composizione di Ab_{30}.

— La magnetite è presente sempre in microliti, a volte in fenocristalli.

Petrochimica.

Le pomici della serie di Monte S. Angelo presentano un contenuto medio di H_2O^+ del 4 % (tab. 1). Il alcuni casi accanto alle pomici è stato possibile campionare ossidiane (3a' e 7b') coeve con le pomici con contenuto medio di H_2O^+ del 2 % e quindi con minore grado di alterazione. Dal confronto delle pomici con le ossidiane si nota nelle prime un iniziale stato di alterazione dovuto a semplice idratazione del vetro con leggera perdita di Na e K e lieve ossidazione del ferro, la silice invece si mantiene pressoché costante.

Per valutare fino a che punto il tenore di Al si può considerare come proprio di tali rocce o come risultato di una possibile alterazione o normale idratazione, è stato calcolato per ogni campione il

TABELLA 1

Analisi chimiche e contenuti in Rb, Sr, Ba.

Campione %	3a	3a′	3b	3c	5a	5b	7b	7b′	13	14
SiO_2	57.93	58.26	57.65	57.60	56.58	57.16	56.48	56.46	57.59	58.55
TiO_2	0.30	0.30	0.30	0.44	0.38	0.41	0.39	0.59	0.29	0.39
Al_2O_3	17.72	18.52	17.79	17.79	18.80	18.10	18.40	19.16	18.62	19.75
Fe_2O_3	1.53	1.23	1.47	1.56	1.59	1.63	1.79	1.37	1.30	1.32
FeO	1.87	2.40	1.82	1.89	2.06	2.77	2.59	3.19	1.65	1.55
MnO	0.15	0.15	0.12	0.13	0.13	0.15	0.14	0.15	0.21	0.21
MgO	0.92	0.82	0.66	0.81	0.71	1.10	1.00	1.16	0.33	0.36
CaO	3.10	2.92	2.55	2.96	2.91	3.63	3.50	3.91	1.63	1.79
Na_2O	3.34	3.84	3.22	3.73	3.71	3.33	3.55	3.75	5.37	5.39
K_2O	7.48	7.94	7.78	7.63	7.47	7.42	7.53	7.56	6.89	7.00
P_2O_5	0.13	0.13	0.11	0.13	0.13	0.13	0.28	0.28	0.02	0.02
H_2O^+	4.63	2.68	5.46	4.66	4.55	3.20	4.03	1.92	5.07	3.30
	99.28	99.18	99.11	99.51	99.22	99.30	99.93	99.49	99.13	99.78
ppm										
Rb	206	197	218	199	212	193	269	232	373	325
Ba	2340	2400	1060	2260	1200	1300	1370	1660	110	100
Sr	525	577	419	530	505	614	668	716	47	40

Campioni 3a, 3c, 5a, 5b, 7b, 13: pomici. Campioni 3b: ceneri.

Campioni 3a′, 7b′: ossidiane. Campione 14: scorie.

parametro « t » del Niggli che è risultato tipico delle vulcaniti non alterate (tab. 2) (VOGEL, 1975).

I campioni di pomici presi in esame hanno subito quindi solo una leggera idratazione e certamente nessuna alterazione significativa, sono pertanto rappresentativi della serie in esame e adatti ad uno studio petrochimico.

TABELLA 2

Parametri del Niggli.

Campione	3a	3a′	3c	5a	5b	7b	7b′	13	14
Al	40.16	40.26	39.96	40.96	37.94	38.75	38.25	43.26	44.31
fm	16.19	15.73	15.55	15.11	18.90	18.32	18.83	11.92	11.44
c	12.80	11.56	12.11	11.55	15.00	13.43	14.22	6.89	7.31
alk	30.85	32.46	32.28	32.28	28.13	29.50	28.68	37.89	36.93
t	−3.49	−3.76	−4.53	−2.97	−5.19	−4.18	−4.65	−1.52	+1.00
k	0.596	0.576	0.574	5.545	0.592	0.583	0.570	0.458	0.460

TABELLA 3

Norma Rittmann.

Campione		3a	3a′	3c	5a	5b	7b	7b′	13	14
Q		3.40	—	2.00	—	2.00	0.30	—	—	—
San	Or	62	60	59	60	62	64	63	50	54
	Ab	72.89 31	76.50 35	74.00 36	69.00 36	68.00 32	72.10 31	64.00 31	77.04 46	72.00 42
	An	7	5	5	4	6	7	6	4	4
Pl	Or	8	9	9	9	9	9	8	11	10
	Ab	15.15 48	14.80 63	15.00 55	21.72 53	18.00 47	19.10 47	21.00 47	13.87 67	19.00 64
	An	44	38	36	38	44	44	45	22	26
Ne		—	0.80	—	0.85	—	—	3.00	4.48	5.00
Cpx		2.53	3.00	3.00	0.94	5.00	2.50	4.50	1.26	—
Bi		4.17	3.20	4.00	5.73	5.00	4.00	6.00	1.96	3.00
Il		0.20	0.20	0.50	0.23	0.30	0.40	0.30	0.28	—
Ap		0.23	0.30	0.14	0.28	0.24	0.50	0.23	—	—
Mt		1.12	1.20	1.00	1.22	1.40	1.10	1.10	1.41	1.00

Campioni 3a, 3a′, 3c, 5a, 5b, 7b: trachiti.

Campioni 7b′, 13, 14: trachiti con foidi.

Dai risultati delle analisi chimiche (tab. 1) sono subito evidenti composizioni abbastanza simili per le pomici dei livelli 3, 5 e 7, mentre le pomici dei livelli 13 e 14 si presentano decisamente diverse per i minori contenuti in Mg, Ca, K e P ed i maggiori contenuti in Na. Anche per Rb, Sr e Ba, la cui determinazione è stata possibile per la leggera idratazione delle pomici, si osserva una netta differenza fra i campioni dei livelli 13 e 14 e gli altri campioni della serie.

Dai dati della norma A.M.S. di Rittman (1973) (tab. 3) si osserva: la presenza, per alcuni campioni, di Q normativo forse dovuta a leggera perdita di alcali; la costante assenza di ematite indicante che non vi è stata alterazione del rapporto Fe″/Fe‴ che condiziona la formazione della molecola ferrosilitica del diopside; un discreto valore di nefelina normativa limitatamente ai campioni 7b′, 13 e 14.

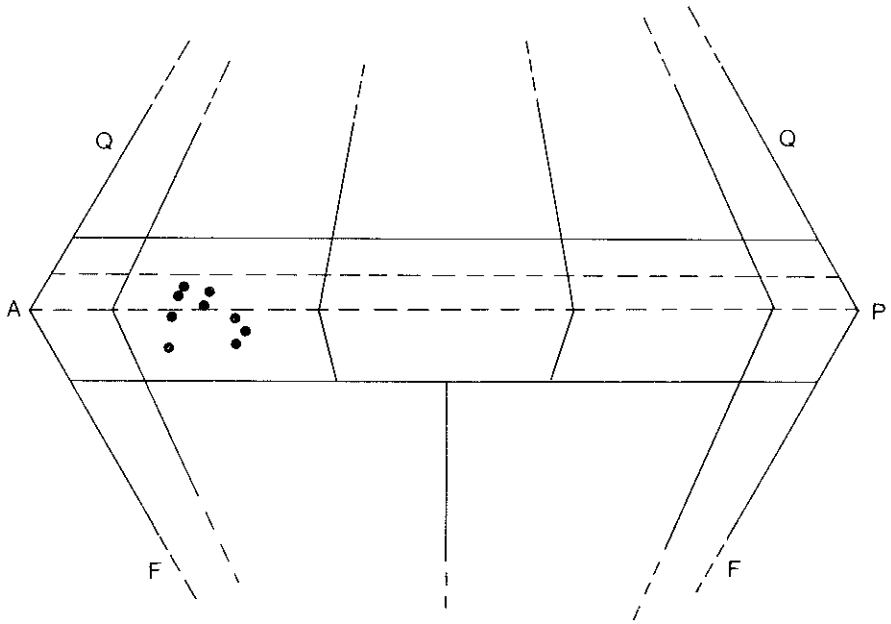


FIG. 1 - Classificazione, secondo Streckeisen, delle vulcaniti di Monte S. Angelo in base alla composizione mineralogica della norma di Rittmann.

Dalla proiezione dei campioni nel doppio triangolo di Strekeisen si rileva per le vulcaniti in esame una composizione che va da trachiti a trachiti con foidi (fig. 1).

Proiettando alcune vulcaniti dei Campi Flegrei (DI GIROLAMO e al., 1973), le ossidiane [1] 3a′ e 7b′ ed i campioni 13 e 14 nel diagramma

[1] Sono state proiettate solo le ossidiane in quanto rappresentano i termini con minore idratazione.

petrogenetico residuale (fig. 2) si nota un allineamento lungo il bordo potassico dell'avvallamento termico in direzione del punto M di minima temperatura del sistema, e una disposizione dei termini fonolitici nella zona di più basse temperature in prosecuzione della curva delle trachiti delineando così il tipico andamento evolutivo controllato dalla cristallizzazione del feldspati alcalini.

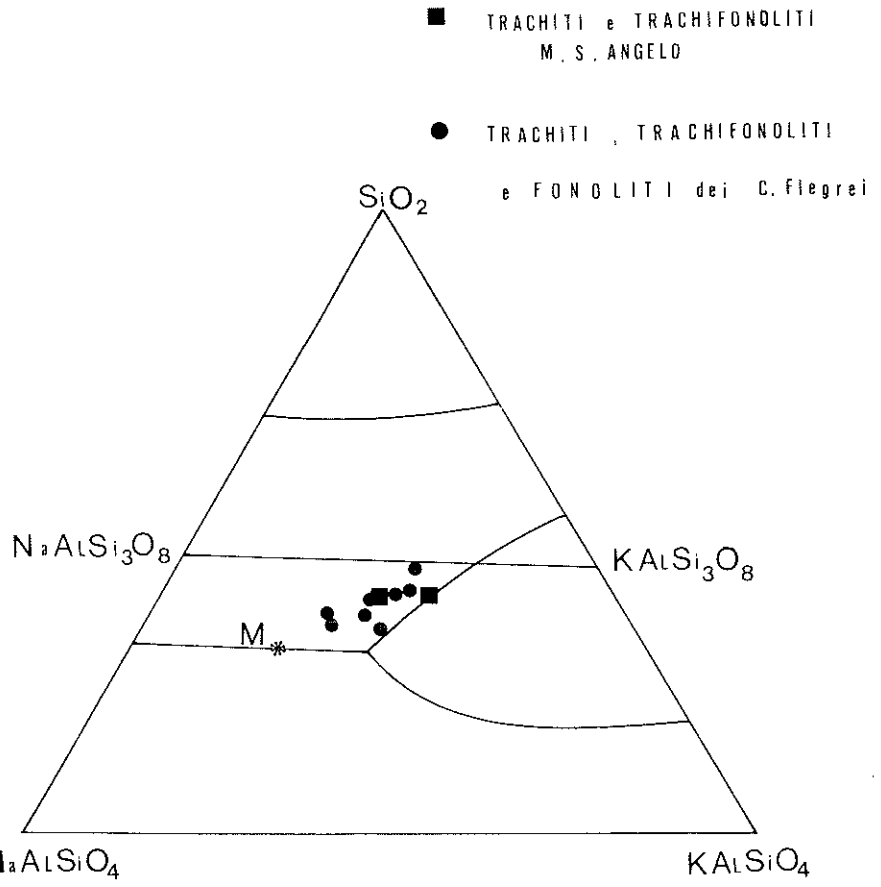


FIG. 2 - Proiezione nel sistema Q-Ne-Ks di alcune vulcaniti dei Campi Flegrei [2] e delle vulcaniti di Monte S. Angelo.

DISCUSSIONE.

Le caratteristiche di campagna ed i dati chimici-mineralogici della formazione di Monte S. Angelo, mettono in evidenza i seguenti punti:

1) una successione, dal basso verso l'alto, di trachiti e trachifonoliti;

2) una diminuzione di Mg, Ca, Fe totale, K, P, Sr e Ba ed un aumento in Al, Na e Rb. L'andamento contrastante delle tendenze evolutive di K e Rb sembra escludere un'evoluzione controllata da cristallizzazione di biotite (fig. 3);

3) un andamento evolutivo controllato prevalentemente dalla cristallizzazione di feldspati alcalini reso evidente dalle osservazioni del diagramma Q-Ne-Ks (fig. 2).

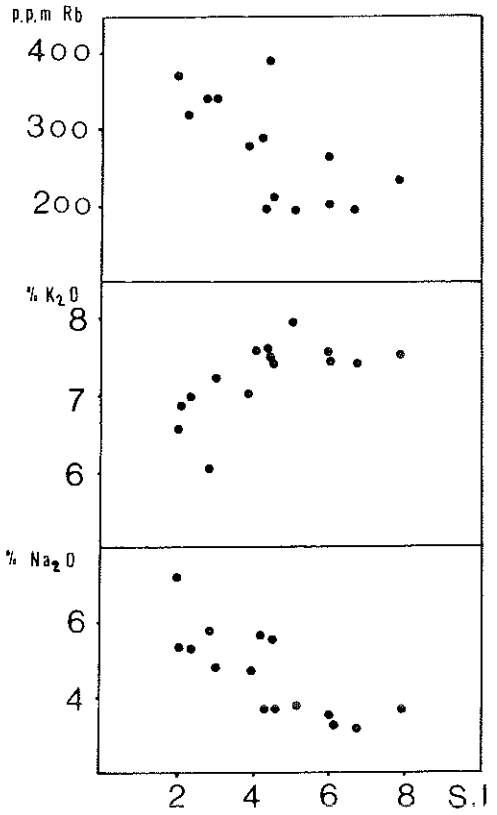


FIG. 3 - Diagramma di variazione rispetto l'Indice di Solidificazione di Rb, K_2O, Na_2O. Sono riportate le vulcaniti di Monte S. Angelo e alcune vulcaniti dei Campi Flegrei [2].

Il confronto dei prodotti della serie di Monte S. Angelo con i prodotti di alcuni distretti vulcaniti e formazioni piroclastiche campane mette in evidenza i seguenti punti:

1) una stretta analogia tra le pomici dei livelli 3, 5, 7 e le ossidiane incluse nella formazione del Tufo Giallo Napoletano (tab. 4);

2) una possibile analogia tra le pomici dei livelli 13 e 14 ed i prodotti trachi-fonolitici e fonolitici flegrei ed ischitani (tab. 4);

TABELLA 4

Contenuti medi in Mg, Ca, Na, K, Rb, Sr, Ba *e loro rapporti di alcuni distretti vulcanici e formazioni piroclastiche campane.*

Campioni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mg	0.30	0.43	0.56	0.61	0.78	0.56	0.20	0.44	0.31	0.43	0.30	0.21
Ca	1.01	1.91	1.95	2.69	2.93	2.37	1.22	1.55	1.83	1.79	1.00	0.61
Na	4.75	3.63	3.20	2.84	2.57	2.68	3.98	4.15	3.90	4.14	—	—
K	5.79	6.04	5.95	6.81	5.81	6.31	5.77	6.12	5.40	6.31	—	—
Rb	356	343	395	273	231	215	349	399	289	290	490	420
Sr	86	285	437	559	650	569	44	108	83	40	39	21
Ba	118	386	786	1496	1036	1699	105	604	295	155	37	24
Rb/K	6.1	5.7	6.6	4.0	4.0	3.4	6.0	6.5	5.4	4.6	—	—
Sr/Ca	8.5	14.9	22.4	20.8	22.2	24.0	3.6	7.0	4.5	2.2	—	—
Ba/K	2.0	6.4	13.2	21.9	17.8	27.1	1.8	9.9	5.5	2.5	—	—
Rb/Sr	4.1	1.2	0.9	0.5	0.4	0.4	7.9	3.7	3.5	7.3	12.6	20.0
Ba/Rb	0.3	1.1	2.0	5.5	4.5	7.9	0.3	1.5	1.0	0.5	0.1	0.1

1 - trachiti ischitane, media di 7 analisi (BARAZZETTI, 1971).
2 - trichiti I.C., media di 7 analisi. (DI GIDOLAMO et al., 1973).
3 - trachiti di Roccamonfina, media di 3 analisi (GHIARA et al., 1973).
4 - trachiti incluse nel Tufo giallo napoletano, media di 5 analisi (GHIARA e LIRER, 1976).
5 - trachiti del Somma vesuvio, media di 2 analisi (DI GIROLAMO et al., 1973).
6 - trachiti di M. S. Angelo, media di 7 analisi (Questo lavoro).
7 - trachi-fonoliti di Monte S. Angelo, media di 2 analisi (Questo lavoro).
8 - trachi-fonoliti del Voscone, media di 3 analisi (DI GIROLAMO et al., 1973).
9 - trachi-fonoliti di Briano e Zolli, media di 2 analisi (DI GIROLAMO et al., 1973).
10 - fonoliti di Torre Franco, 1 analisi (DI GIROLAMO et al., 1973).
11 - trachi-fonoliti ischitane, 1 analisi (BARAZZETTI, 1971).
12 - fonoliti ischitane, media di 7 analisi (BARAZZETTI, 1971).

3) un andamento continuo del diagramma Ca-Sr (fig. 4) dei prodotti trachitici- trachifonolitici- fonolitici;

4) un perfetto allineamento nel diagramma Rb-Sr-Ba (fig. 5) delle trachiti della serie di Monte S. Angelo con quelle incluse nel Tufo Giallo Napoletano, ed un inserimento delle trachifonoliti 13 e 14 nell'andamento individuato dalle trachifonoliti e fonoliti flegree ed ischitane.

Sembra pertanto probabile che l'evoluzione trachiti, trachifonoliti e fonoliti sia essenzialmente dovuta a cristallizzazione frazionata di feldspati.

Il diagramma K_2O - Na_2O - CaO (fig. 6) mostra, per i prodotti trachitici, un aumento graduale di K_2O per il frazionamento di un plagioclasio che cristallizza da un liquido con discrete quantità iniziali

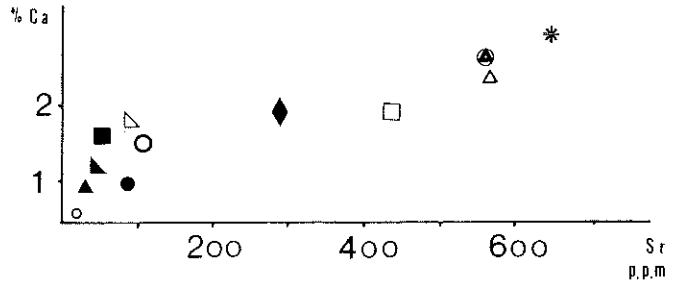


FIG. 4 - Diagramma Ca-Sr. Sono riportati i valori delle vulcaniti campane di tab. 4.

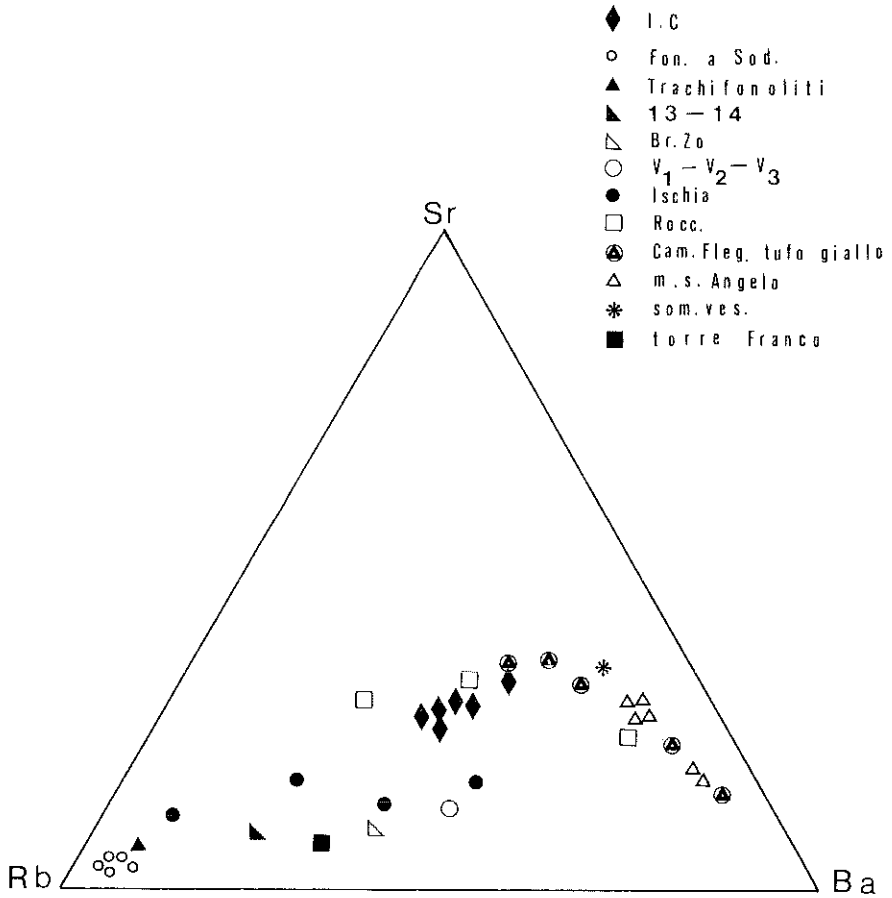


FIG. 5 - Diagramma Rb-Sr-Ba. Sono riportate le vulcaniti campane le cui medie sono riportate in tab. 4.

di calcio, seguito da una brusca deviazione in direzione del vertice Na_2O quando il liquido presumibilmente raggiunge la curva cotettica nel diagramma Ab-An-Or (fig. 7). Successive condizioni di cristallizzazione non all'equilibrio, molto probabili nelle piroclastiti, potrebbero aver favorito la formazione di un feldspato alcalino sempre più ricco in Na nei termini più evoluti. L'insieme di questi fattori favo-

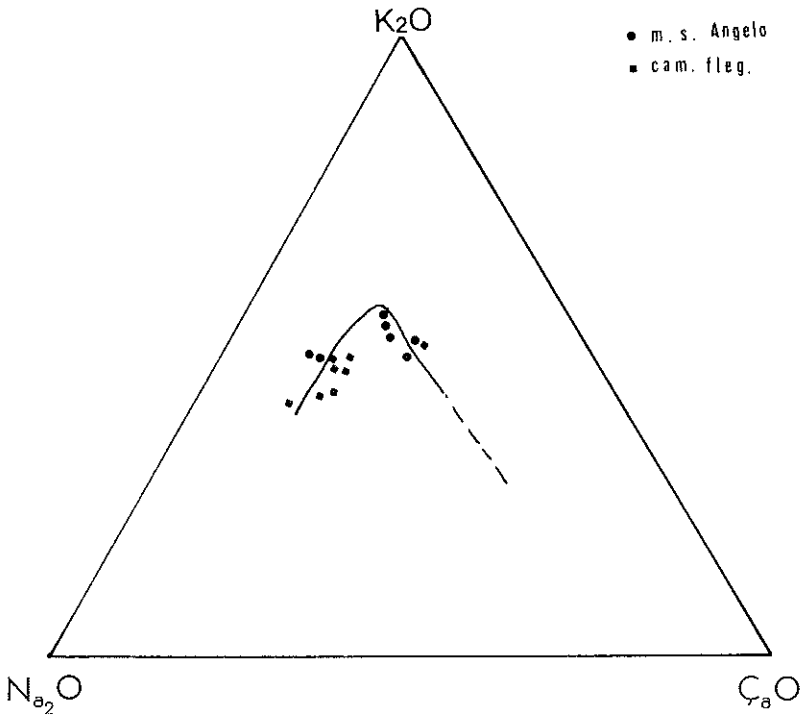


FIG. 6 - Diagramma K_2O-Na_2O-CaO, per le vulcaniti di Monte S. Angelo e dei Campi Flegrei [2, 3, 4].

rirebbe perciò nel passaggio dalle trachiti alle trachi-fonoliti la formazione di fenocristalli di plagioclasio con contenuti in An via via crescenti ma sempre subordinati ai fenocristalli di sanidino che si arricchiscono in molecola albitica (fig. 8).

Nel diagramma Ab-An-Or il feldspato medio delle trachiti cade nel campo di esistenza di un feldspato al di sopra della linea LK_sP che come proposto da TUTTLE e BOWEN (1958) delimita l'intervallo di miscibilità dei feldspati alle temperature dei fusi trachitici. I dati sperimentali di TUTTLE e BOWEN dimostrano che con la cristallizzazione all'equilibrio il plagioclasio reagisce con il liquido ed evolve com-

pletamente lasciando negli ultimi stadi della cristallizzazione un alkali feldspato e un liquido.

Dal magma trachitico in esame sarebbero stati sottratti un plagioclasio e un feldspato alcalino meno sodici rispetto al prodotto finale di cristallizzazione provocandone l'evoluzione verso tipi fonolitici. Pertanto si ha nel corso del frazionamento uno spostamento

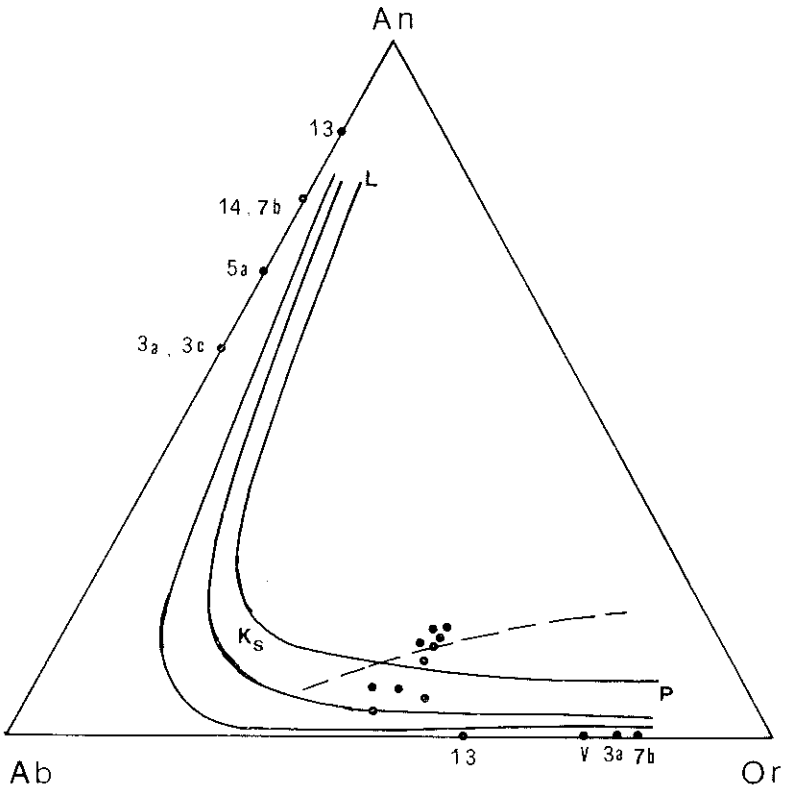


FIG. 7 - Diagramma Ab-An-Or per le vulcaniti di Monte S. Angelo e dei Campi Flegrei [2].

degli equilibri legato alla progressiva variazione della composizione del fuso (aumento della sottosaturazione) e delle condizioni chimico-fisiche ambientali. In quest'ultima fase potrebbe cristallizzare dal liquido un feldspato alcalino molto sodico con un nucelo di plagioclasio talvolta anche molto calcico, come riscontrato diverse volte in vulcaniti trachi-fonolitiche campane (DI GIROLAMO, comunicazione personale).

In conclusione il plagioclasio, sempre meno abbondante diverrebbe via via più calcico con conseguente ripartizione del sodio preferenzialmente nel feldspato alcalino e nel fuso in cui cristallizza potenzialmente nefelina.

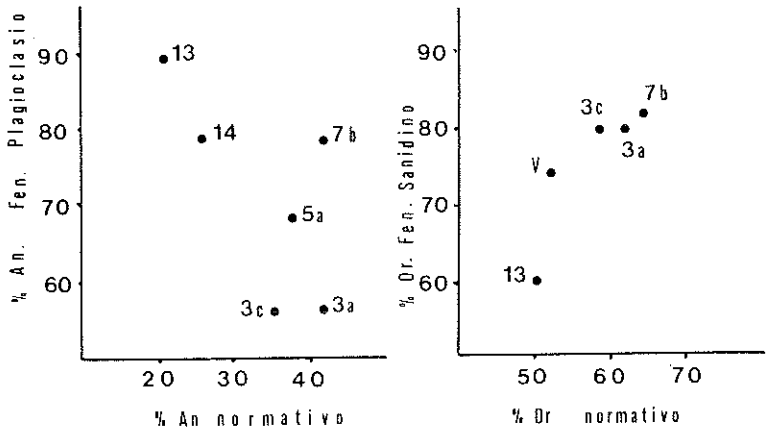


FIG. 8 - Diagramma An normativa-An fenocristalli di plagioclasio e Or normativo-Or fenocristalli di Sanidino. Sono riportati i campioni di Monte S. Angelo e il sanidino del Voscone [2].

Ulteriori studi mineralogici sulle fasi più significative dei fusi trachitici e fonolitici dovrebbero confermare il proposto meccanismo evolutivo.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci prof. A. Scherillo, prof. B. D'Argenio e prof. G. Imbò.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARAZZETTI C., *Distribuzione del Mg, Ca, Sr, Ba nelle vulcaniti dell'Isola d'Ischia.* Tesi in geofisica applicata (1971).

[2] DI GIROLAMO P., ROLANDI G. STANZIONE D., *L'eruzione di pomici a letto dell'Ignimbrite campana.* Per. Min., **42**, 439-468 (1973).

[3] DI GIROLAMO P., STANZIONE D., *Lineamenti geologici e petrologici dell'isola di Procida.* Soc. It. Min. Petr., **29**, 81-125 (1973).

[4] DI GIROLAMO P., ROLANDI G., *Vulcanismo sottomarino latitebasaltico (serie potassica) nel Canale d'Ischia.* Acc. Sc. Fis. Mat. Soc. Sc. Let. e Arti Napoli, **42**, 1-36 (1975).

[5] EASTON A. J., *Chemical analysis of silicate rocks.* British Museum Nat. History London V. 6 (1972).

[6] GHIARA M. R., LIBER L., STANZIONE D., *Contributo alla conoscenza vulcanologica e petrografica del vulcano di Roccamonfina.* Per. Min., **42**, 267-293 (1973).

[7] GHIARA M. R., LIBER L., *Mineralogy and geochemistry of the « Low Potassium series » of the Roccamonfina volcanic suite (Campania South Italy).* Bull. Volc., **40**, n. 1, in stampa (1976).

[8] KATZ A., *The direct and rapid determination of alumina and silica in silicate rocks and minerals by atomic absorption spectroscopy.* Am. Min., **53**, 283-289 (1968).

[9] RITTMANN A., *Stable mineral assemblages of igneous rocks.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1973).

[10] SLAVIN W., *Atomic absorption spectroscopy.* Interscience, New York (1968).

[11] SMITH J. R., YODER H. S. jr., *Variations in X-ray powder diffraction patterns of plagioclase feldspars.* Am. Min., **41**, 632-648 (1956).

[12] STRACKEISEN A., *Dei klassification der eruptivgesteine.* Geol Rdsch, **55** (1965).

[13] TUTTLE O. F., BOWEN N. L., *Origin of granite in the light of experimental studies in the system* $NaAlSi_3O_8$-$KAlSi_3O_8$-SiO_2-H_2O. Men. Geol. Soc. Amer., **74** (1958).

[14] VOGEL D. E., *Precambrian weathering in acid metavolcanic rocks from the superior province, Villebon township, south-central Québec.* Can. J. Earth Sci.. **12**, 2080-2085 (1975).

[15] WRIGHT T. L., *X-ray and optical study of alkali feldspar: II An X-ray method for determining the composition and structural state from measurement of* 2θ *values for three reflections.* Am. Min., **53**, 88-101 (1968).

Proprietà e struttura di vetri del sistema CaO-Al_2O_3-SiO_2 con rapporto $CaO/Al_2O_3 = 1$

Nota di ALBERTO MAROTTA *, ALBERTO BURI * e SILVANA SAIELLO *
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 5 marzo 1977)

RIASSUNTO. — Nell'ambito delle ricerche rivolte allo studio della funzione strutturale dell'Al_2O_3 nei vetri è stata eseguita una indagine sistematica su alcuni campioni vetrosi del sistema $CaO—Al_2O_3—SiO_2$ con rapporto molare CaO/Al_2O_3 costante ed uguale ad uno.

I campioni, la cui composizione può essere espressa dalla formula generale $CaO \cdot Al_2O_3 \cdot y\ SiO_2$, con y uguale a 0,1; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6 e 7, sono stati esaminati per mezzo dell'analisi termica differenziale, dell'analisi termodilatometrica e della diffrazione dei raggi X.

È stata rilevata l'assenza delle brusche variazioni di calore specifico e di coefficiente di dilatazione termica che ordinariamente si manifestano alla temperatura di transizione vetrosa e sono stati misurati valori elevati delle temperature di rammollimento, comparabili con quelle dei vetri sodio-allumina-silice, con rapporto molare Na_2O/Al_2O_3 uguale ad uno. Inoltre i campioni hanno mostrato elevate viscosità dei fusi e nessuna tendenza alla devetrificazione anche con un riscaldamento fino a 1500°C.

Tali risultati hanno permesso di attribuire ai vetri studiati strutture chiuse simili a quella della silice vetrosa; in tale struttura l'alluminio sostituirebbe isomorficamente il silicio in coordinazione 4, mentre agli ioni calcio resterebbe la sola funzione di assicurare la locale neutralità della struttura, sistemandosi nei vuoti di un reticolo tridimensionale tipo silice.

SUMMARY. — A systematic investigation on $CaO—Al_2O_3—SiO_2$ glasses with constant and equal to one CaO/Al_2O_3 molar ratio values, has been carried out as part of a general research devoted to the study of the role of Al_2O_3 in glasses.

The glass samples, whose composition may be expressed by the general formula $CaO—Al_2O_3—y\ SiO_2$, with y equal to 0.1; 0.5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, have been submitted to differential thermal, thermodilatometric and X-ray diffraction analysis.

All specimens have shown high viscosity at melting point, no sign of crystallization on heating up to 1500°C and no abrupt change in properties like heat capacity and thermal expansion at glass transition. High values of the softening points, close to those for $Na_2O—Al_2O_3—SiO_2$ glasses with molar ratio $Na_2O/Al_2O_3 = 1$, have also been detected.

This behaviour has been related to quartz-like structures with Al^{+3} ions isomorphically substituting Si^{+4} ions in four fold coordination and with Ca^{++} ions in the holes of the network to assure the local neutrality of the structure.

* Istituto di Chimica della Facoltà di Ingegneria - Università di Napoli.

Introduzione

L'allumina da sola non è capace di formare un vetro ma è noto [1] che nei silicati minerali il silicio può essere sostituito nei tetraedri isomorficamente dall'alluminio con formazione di tetraedri AlO_4, sempre che siano presenti cationi metallici, capaci di assicurare la locale neutralità della struttura. Tali cationi si sistemano nei vuoti del reticolo formato da tetraedri SiO_4 ed AlO_4, non espletando più la loro funzione di modificatori di reticolo.

È evidente che nei vetri con rapporto molare R_2O/Al_2O_3 oppure RO/Al_2O_3 uguale ad uno la struttura dovrebbe essere simile a quella della silice vetrosa. Anche se la struttura di un vetro non può essere conosciuta con certezza, vetri con rapporto $Na_2O/Al_2O_3 = 1$ hanno mostrato un'alta viscosità paragonabile a quella della silice pura [1].

Inoltre il minerale carnegieite $NaAlSiO_4$, in cui il rapporto Na_2O/Al_2O_3 è uguale ad uno, è isostrutturale [2] con una delle forme cristalline della silice: la cristobalite.

Poiché in letteratura non sono reperibili dati su vetri con rapporto CaO/Al_2O_3 uguale ad uno che dovrebbero anch'essi avere strutture simili a quella della silice, è stata intrapresa una indagine sistematica su tali vetri.

Dei risultati preliminari ottenuti si dà conto nella presente nota.

Risultati sperimentali

1) *Preparazione dei campioni.*

Sono stati approntati 9 campioni di composizioni espresse dalla formula generale $CaO \cdot Al_2O_3 \cdot y\ SiO_2$ con valori di y pari a: 0,1; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. In quel che segue ciascun campione verrà indicato con il corrispondente valore di y. Di tali campioni si riportano in tabella I le composizioni, espresse in percentuali in peso dei tre ossidi.

In figura 1 vengono indicate le posizioni dei suddetti campioni nel diagramma triangolare $CaO—Al_2O_3—SiO_2$. Per la preparazione stechiometrica delle miscele, prima della operazione di fusione, condotta a 1500°C, si è resa necessaria la determinazione della percentuale di sostanze volatili perdute a tale temperatura dagli ossidi SiO_2 e Al_2O_3 nonché dal $CaCO_3$, usati nella preparazione della miscela. Il carbonato di calcio è stato preventivamente riscaldato a 900°C per permettere la decarbonatazione totale e quindi mantenuto, come gli altri due ossidi, a 1500°C per un tempo di circa 60 minuti verificato sufficiente per la totale perdita di sostanze volatili.

Le modalità del trattamento termico sono state le seguenti:

a) Immissione in forno elettrico in crogioli di platino delle miscele, omogeneizzate in precedenza, a circa 650°C;

b) Innalzamento graduale della temperatura fino a 1500°C;

c) Mantenimento a tale temperatura dei campioni per circa 14 ore.

La gradualità dell'innalzamento di temperatura è stata dettata dalla necessità di allontanare con lentezza la CO_2 contenuta nel $CaCO_3$.

TABELLA I

Y	CaO %	Al_2O_3 %	SiO_2 %
0,1	34,19	62,15	3,66
0,5	29,82	54,21	15,97
1	25,71	46,74	27,55
2	20,16	36,65	43,19
3	16,58	30,14	53,28
4	14,08	25,59	60,33
5	12,23	22,24	65,53
6	10,81	19,66	69,53
7	9,69	17,62	72,69

Il tempo di permanenza a 1500°C è stato necessario per permettere, oltre la fusione dei campioni, una loro soddisfacente affinazione.

Alla fase di fusione è stata fatta seguire una tempra immergendo, a causa dell'alta viscosità dei fusi, i crogioli in acqua distillata a temperatura ambiente per ottenere elevate velocità di raffreddamento. Come si può rilevare dalla tabella II alcuni campioni non sono risultati fusi a 1500°C, temperatura massima raggiunta.

2) *Analisi termica differenziale.*

I campioni di vetri temprati sono stati macinati in mortaio d'agata e le polveri ottenute sono state setacciate raccogliendo la frazione compresa fra 6273 maglie/cmq (pari a 201 mesh) ed 11664 maglie/cmq (pari a 274 mesh).

Tali polveri, di dimensioni comprese tra 74μ e 53μ, sono state sottoposte ad analisi termica differenziale (DTA).

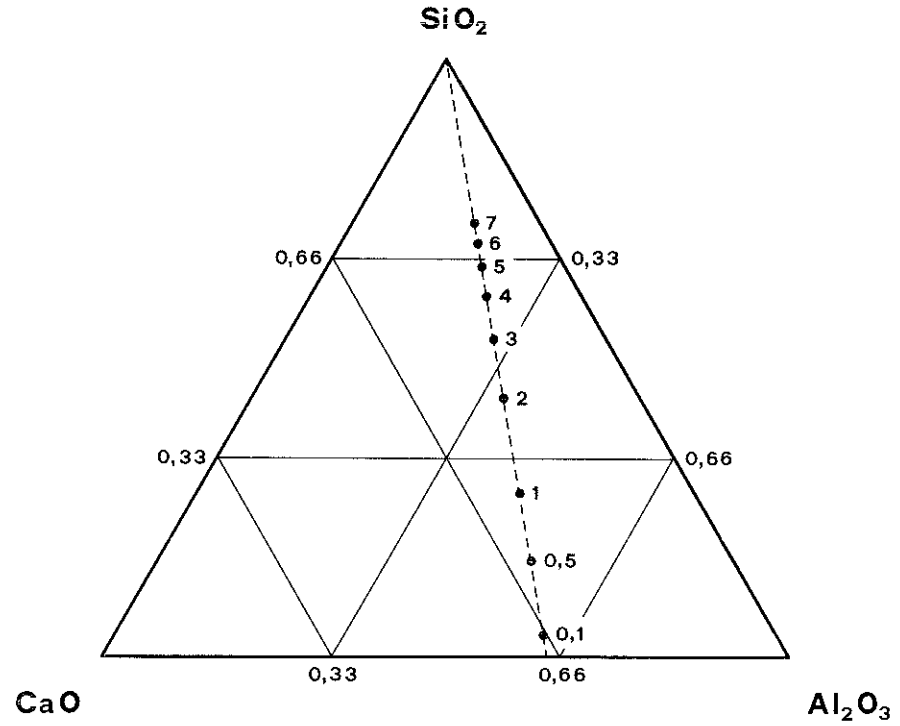


FIG. 1. - Composizione dei campioni nel diagramma di stato $CaO—Al_2O_3—SiO_2$.

È stato adoperato un apparecchio Dupont 900 con cella ad alta temperatura al fine di raggiungere la temperatura di 1600°C.

TABELLA II

Y	Caratteristiche campioni
0,1	nessuna fusione
0,5	nessuna fusione
1	nessuna fusione
2	prodotto cristallino
3	prodotto vetroso
4	prodotto vetroso
5	prodotto vetroso
6	prodotto vetroso
7	prodotto vetroso

Ogni campione del peso di mg 40 è stato riscaldato alla velocità media di 10°C al minuto, usando allumina pura come sostanza di riferimento. In figura 2 è riportata la curva termodifferenziale del campione $CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 4SiO_2$, che ben rappresenta il comportamento di tutta la serie studiata.

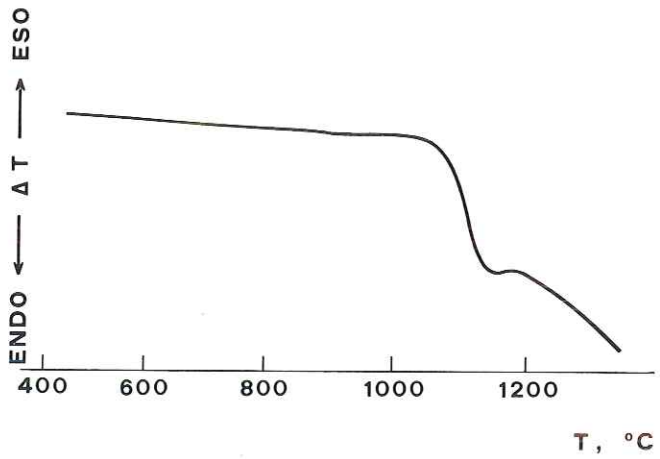


FIG. 2. - Curva termodifferenziale del vetro y = 4.

3) *Diffrazione dei raggi X.*

Per quanto riguarda la classificazione della tabella II, l'identificazione delle fasi cristalline eventualmente originate in seguito ai trattamenti termici considerati, nonché la vetrosità dei campioni stessi, sono state verificate mediante diffrazione dei raggi X utilizzando una camera di Guinier de Wolff e la radiazione Cu Kα con campioni macinati e setacciati di dimensione media 53μ. Il campione y = 2 è stato riconosciuto come anortite, come può verificarsi dalla tabella III in cui le distanze reticolari e le intensità dei riflessi del campione, desunte dal diffrattogramma X, sono confrontate con quelle dell'anortite [3].

4) *Microdurezza.*

Piccoli pezzi di ciascun campione sono stati preventivamente sgrossati e quindi lucidati con paste diamantate di 7μ e 1μ, per ottenere superfici adatte alle prove di microdurezza. Per la misura è stato usato un microdurimetro Durimet Leitz, con penetratore Vickers con punta di diamante a forma di piramide quadrata con un angolo tra

le facce $\theta = 136°$. Le misure sono state effettuate, per ottenere risultati riproducibili [4], adoperando un carico di 100 g, un tempo di messa in carico di 30 sec., ed un tempo di permanenza del carico di 10 minuti. L'apparecchio è dotato di un dispositivo micrometrico

TABELLA III

Campione y = 2	Anortite (3)
4,69 d	4,70 md
4,04 m	4,04 m
3,90 d	3,92 md
3,73 m	3,78 m
	3,75 m
3,60 mf	3,62 mf
3,44 mf	3,40 mf
	3,46 m
3,36 m	3,36 m
3,26 f	3,25 f
3,18 ff	3,20 ff
	3,17 f
3,12 mf	3,12 mf
3,03 md	3,04 md
2,95 m	2,95 m
	2,93 md
2,82 md	2,83 m
2,64 d	2,65 md
2,49 d	2,52 md

per la misura delle dimensioni trasversali dell'impronta la cui precisione limita l'errore di misura al valore di 0,5μ; tale valore rende le misure affette da un errore di circa il 3 %. La formula che fornisce i valori della microdurezza è la seguente:

$$H = \frac{2p \ \sin\theta/2}{d^2}$$

dove p e θ rappresentano rispettivamente il carico sul provino e l'angolo tra le facce del penetratore, con d è indicata la media delle dimensioni trasversali dell'impronta; per il calcolo di tale media sono state effettuate 4 impronte su ciascun campione. In tabella IV sono riportati i valori di d e quelli dei corrispondenti valori di microdurezza H_s; questi ultimi per quanto prima detto sugli errori di misura, risultano affetti da un errore del 3 %.

Si è inoltre determinata la resistenza a frattura osservando le fessurazioni che compaiono agli spigoli delle impronte al crescere

TABELLA IV

Y	d (μ)	H_s (Kg/mm²)	H_c (Kg/mm²)
3	15,99	725	782
4	14,99	825	768
5	15,94	730	756
6	15,80	743	751
7	16,11	714	745

del carico. Esaminando 12 impronte in ciascun campione le fratture compaiono nei vetri con y pari a 3; 4 e 5 per carichi superiori a 200 g, e nei vetri con y pari a 6 e 7 per carichi superiori ai 300 g.

5) *Dilatazione termica.*

A causa dell'elevata viscosità dei prodotti di fusione e quindi della impossibilità di colarli, solo per il campione y = 4 è stato possibile reperire un frammento di dimensioni sufficienti (13 mm) per l'analisi termodilatometrica.

È stato adoperato un dilatometro Netzsch mod. 402/E con una velocità di riscaldamento di 5°C/min. La relativa curva dilatometrica è riportata in figura 3.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Da questa indagine preliminare è stato possibile rilevare quanto segue:

1) Non è stato possibile preparare vetri con y minore di 2.

2) Il campione y uguale a 2, avendo la composizione stechiometrica di un composto chimico definito, l'anortite $CaAl_2Si_2O_8$, ha una così alta velocità di cristallizzazione che anche una tempra in acqua non consente di ottenere campioni vetrosi. In tabella III le distanze reticolari, ricavate dalla diffrazione dei raggi X del campione y uguale a 2, sono poste a confronto con quelle dell'anortite desunte

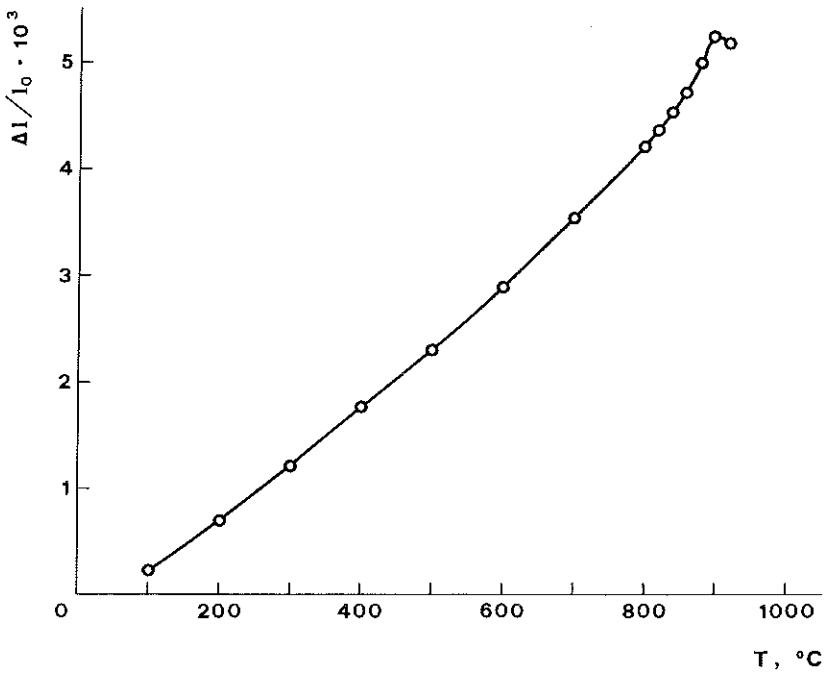


FIG. 3. - Curva termodilatometrica del vetro y = 4.

dalla scheda ASTM: dal confronto si può affermare che il campione y uguale a 2 è quasi completamente cristallizzato.

3) Tutti i campioni vetrosi hanno mostrato una viscosità così elevata da non poter essere colati.

4) I campioni con y compreso tra 3 e 7 dopo la tempra sono risultati all'analisi dei raggi X completamente amorfi. Le curve di analisi termica differenziale hanno mostrato un effetto endotermico dovuto al rammollimento a temperature conprese fra 980°C e 1025°C, molto elevate in confronto di quelle dei comuni vetri e comparabili a quelle dei vetri sodio-allumina-silice, con rapporto Na_2O/Al_2O_3 uguale ad uno [2]; non hanno invece mostrato evidenti effetti attribuibili a transizione vetrosa o a devetrificazione.

L'elevata viscosità, l'elevata temperatura di rammollimento, l'assenza di fasi cristalline anche con un riscaldamento fino a 1500°C, mostrano che i vetri da noi esaminati hanno un comportamento simile a quello dei vetri del sistema sodio-allumina-silice con rapporto Na_2O/Al_2O_3 uguale ad uno. Analogamente nei vetri in esame tutto l'alluminio dovrebbe sostituire isomorficamente, cioè in coordinazione 4, il silicio nei tetraedri SiO_4, mentre al calcio resterebbe solo la funzione di assicurare la locale neutralità della struttura, sistemandosi nei vuoti di un reticolo tridimensionale tipo silice, formato da tetraedri SiO_4 ed AlO_4.

Si realizzerebbe pertanto il seguente schema:

$$(Al^{+3})_2(O^{-2})_3 + Ca^{+2}O^{-2} = 2\,[Al^{+3}(O^{-2}/2)_4^{-4}\,(Ca^{+2}/2)^{+}]$$

Poiché in tutti i campioni di vetri preparati il rapporto CaO/Al_2O_3 è uguale ad uno, non resterebbero disponibili ioni Ca^{+2} in funzione di ioni modificatori di reticolo.

La struttura quindi dovrebbe essere simile a quella della silice vetrosa (struttura chiusa) e da ciò deriverebbero l'alta temperatura di rammollimento, l'elevata viscosità e la limitata presenza di prodotti di devetrificazione, anche dopo riscaldamento ad alta temperatura. Mancherebbero cioè le unità strutturali che consentendo mobilità al reticolo rendono possibile la devetrificazione.

Nei vetri in esame non sono state inoltre riscontrate, come si può rilevare in Figg. 2 e 3, quelle brusche variazioni di calore specifico e di coefficiente di espansione termica che si manifestono di solito alla temperatura di transizione vetrosa e che sono da attribuirsi [5] ad un trasferimento di legami tra ossigeni « a ponte » ed ossigeni « non a ponte ». Questi ultimi mancherebbero nell'ipotesi di una struttura chiusa, essendo tutti gli ioni calcio impegnati a compensare il difetto di carica nei tetraedri AlO_4.

Per quanto concerne le misure di microdurezza non è possibile dedurre da esse alcuna informazione circa la struttura dei vetri in esame.

È comunque interessante notare che i valori di microdurezza rilevati sono notevolmente più alti di quelli dei vetri ordinari ed in eccellente accordo con quelli teorici, riportati nell'ultima colonna di tabella IV, calcolati applicando l'equazione proposta da M. YAMANE e J. A. MACKENZIE [6],

$$H_c = 0{,}19\,(\alpha\, G\, K)^{1/2}$$

CONCLUSIONE

I risultati del lavoro svolto sembrano indicare che, in accordo con i dati di letteratura per i vetri del sistema Na_2O—Al_2O_3—SiO_2 con rapporto molare $Na_2O/Al_2O_3 = 1$, la struttura dei vetri del sistema CaO—Al_2O_3—SiO_2 delle composizioni esaminate è simile a quella della silice vetrosa.

In tale struttura l'alluminio sostituirebbe isomorficamente il silicio in coordinazione quattro, mentre gli ioni calcio, sistemandosi nei vuoti del reticolo, avrebbero la sola funzione di assicurare la locale neutralità della struttura.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. RAWSON, *Inorganic Glass-forming system.* Academic Press, London (1967).
[2] W. A. WEYL, E. C. MARBOE, *The constitution of glasses. A dynamic interpretation.* Intersc. Publ. Vol. II (1962).
[3] X-ray powder data file A.S.T.M. card. n. 12-301.
[4] H. MAIRLOT, Silicates Indus., **11**, 301 (1974).
[5] E. A. LACY, J. Am. Ceram Soc., **51**, 150 (1968).
[6] M. YAMANE, J. D. MACKENZIE, J. of non-cryst. solids, **15**, 153 (1974).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. Sersale, A. Scherillo e P. Corradini.

Una generalizzazione dell'operatore di Bernstein

Nota di GIUSEPPE MASTROIANNI * e MARIO ROSARIO OCCORSIO *
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 5 marzo 1977)

SUMMARY. — In this paper an operator, which generalizes the Bernstein's operator, is introduced. Some estimates for the degree of approximation are given. Numerical differentiation and numerical quadrature formulas are achieved.

RIASSUNTO. — In questo lavoro si introduce un operatore che generalizza l'operatore di Bernstein. Si ottengono migliori stime dell'approssimazione, nuove formule di derivazione e nuove formule di quadratura.

1. - INTRODUZIONE

Numerosi autori si sono occupati dell'operatore di Bernstein, sia per studiarne le proprietà, ad esempio [1-4], sia per ottenerne delle generalizzazioni [5-13].

Finora, gran parte delle generalizzazioni (fanno eccezione, ad esempio, i lavori [12, 13]) sono state condotte in modo da ottenere operatori positivi. Mediante tali operatori, si ottengono polinomi che subiscono, allo stesso modo dei polinomi di Bernstein, il fenomeno della saturazione [14], il che è una limitazione ai fini del conseguimento di una soddisfacente approssimazione.

In questo lavoro si studia un operatore che è combinazione lineare delle potenze dell'operatore di Bernstein e che, pur non essendo positivo, ha la proprietà di migliorare l'approssimazione al crescere della regolarità della funzione approssimanda.

Nel n. 2 si studiano alcune proprietà del detto operatore; nel n. 3 se ne esamina la convergenza, ottenendo dei teoremi del tipo di quelli stabiliti da Jackson [15]; nel n. 4 si presentano infine alcune applicazioni miranti ad ottenere nuove formule di derivazione e di quadratura numerica.

* Centro di Calcolo della Facoltà di Scienze - Via Mezzocannone, 16 - Napoli.

2. - L'OPERATORE $B_{m,k}$

Indicato con $C^0[0,1]$ l'insieme delle funzioni reali e continue nell'intervallo $[0,1]$ e con B_m l'operatore di Bernstein, cioè l'operatore che trasforma le funzioni di $C^0[0,1]$ nei loro polinomi di Bernstein di grado m, si definisce l'operatore $B_{m,k}$ mediante l'uguaglianza:

$$B_{m,k} = I - (I - B_m)^k \tag{2.1}$$

ove I è l'operatore identico ed m e k sono interi positivi. Il procedimento costruttivo dell'operatore (2.1) è stato indicato in [4].

Dalla (2.1) segue:

$$B_{m,k} = \sum_{i}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} B_m^i \tag{2.2}$$

ove le B_m^i sono le potenze dell'operatore B_m studiate in [6].

Dalla definizione segue, in particolare, che è:

$$B_{m,1} = B_m \quad \text{e} \quad B_{1,k} = B_1$$

Risulta inoltre:

$$B_{m,k}(f) = \sum_{1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} B_m^i(f) \qquad f \in C^0[0,1] \tag{2.3}$$

Posto poi:

$$f_{k/m} = f\left(\frac{k}{m}\right)$$

procedendo per induzione su k, dalla (2.3) si ottiene in particolare per $m = 2$:

$$\begin{aligned} B_{2,k}(f;x) = f_0 + [-(3 - 1/2^{k-1}) f_0 + (4 - 1/2^{k-2}) f_{1/2} - \\ - (1 - 1/2^{k-1}) f_1] x + (2 - 1/2^{k-1}) (f_0 - 2 f_{1/2} + f_1) x^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ove $x \in [0,1]$.

In modo analogo per $m = 3$ si ottiene:

$$\begin{aligned} B_{3,k}(f;x) = f_0 + 9/4 [(-22/9 + 1/3^k + 7^k/9^k) f_0 + \\ + (4 - 1/3^k - 3 \cdot 7^k/9^k) f_{1/3} + (-2 - 1/3^k + 3 \cdot 7^k/9^k) f_{2/3} + \\ + (4/9 + 1/3^k - 7^k/9^k) f_1] x + 9/4 [(4 - 1/3^k - 3 \cdot 7^k/9^k) f_0 + \\ + (-10 + 1/3^k + 7^k/9^{k-1}) f_{1/3} + (8 + 1/3^k - 7^k/9^{k-1}) f_{2/3} + \\ + (-2 - 1/3^k + 3 \cdot 7^k/9^k) f_1] x^2 + 9/2 (1 - 7^k/9^k) \cdot (-f_0 + \\ + 3 f_{1/3} - 3 f_{2/3} + f_1) x^3 . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Posto poi:

$$R_{m,k} = I - B_{m,k} \tag{2.6}$$

per ogni $f \in C^o[0,1]$ si ha:

$$f = B_{m,k}(f) + R_{m,k}(f) \tag{2.7}$$

Dalla (2.1) si ha subito:

$$R_{m,k}(f) = R_m^k(f)$$

ove $R_m = I - B_m = R_{m,1}$.

Rinviando al paragrafo successivo lo studio della convergenza, al divergere di m, di $B_{m,k}(f)$, ci si chiede quali delle proprietà dei polinomi di Bernstein sussistono per i polinomi $B_{m,k}(f)$.

Si osservi in primo luogo che l'operatore B_m è lineare e positivo, mentre l'operatore $B_{m,k}$, pur essendo lineare, non è in generale positivo, cioè

$$f \geq 0 \not\Rightarrow B_{m,k}(f) \geq 0$$

Ad esempio per una f non negativa e appartenente a $C^o[0,1]$ tale che

$$f_o = f_{1/2} = 0 \quad \text{e} \quad f_1 = 1$$

si ha:

$$B_{2,k}(f) = x\,[(2 - 1/2^{k-1})\,x - (1 - 1/2^{k-1})]$$

da cui segue che, $\forall\, k > 1$, $B_{2,k}(f)$ non risulta non negativa in tutto $[0,1]$. D'altra parte esistono dei sottoinsiemi di $C^o[0,1]$ in cui $B_{m,k}$ è positivo per qualche k. Invero, detto $\bar{C}^o$ l'insieme delle funzioni concave di $C^o[0,1]$, gli operatori $B_{m,2}$ e $B_{m,3}$ sono positivi in $\bar{C}^o$. Ciò segue dall'osservazione che se f è concava si ha $R_m(f;x) > 0$ [1] e dalle uguaglianze:

$$B_{m,2}(f;x) = B_m(2f - B_m(f);\ x) = B_m(f + R_m(f);\ x)$$

$$B_{m,3}(f;x) = 3\,B_m(f;x) - 3\,B_m^2(f;x) + B_m^3(f;x) =$$

$$= B_m(3\,R_m(f) + B_m^2(f);\ x)$$

[1] Invero è:

$$B_m(f;x) = \sum_o^m p_{m,i}(x)\, f\left(\frac{i}{m}\right) < f\left[\sum_o^m p_{m,i}(x)\frac{i}{m}\right] = f(x)$$

Sia poi $\overline{\overline{C}}^4$ il sottoinsieme di $C^4[0,1]$ i cui elementi sono le funzioni per cui

$$f' < 0\,,\ f'' < 0\,,\ f''' > 0\,,\ f^{(4)} > 0$$

Si ha allora che, in $\overline{\overline{C}}^4$, $R_m(f)$ è concavo e non negativo. Inoltre, con facili calcoli, si ricava che $B_{m,4}$ e $B_{m,5}$ sono operatori positivi e sussiste la diseguaglianza:

$$0 \leq R_{m,2}(f;x) \leq R_m(f;x) \qquad \text{per ogni } x\,.$$

Per quanto concerne il grado di esattezza della (2.7), posto:

$$e_k(x) = x^k \qquad (k \in N)\,,$$

sussiste la seguente

PROPOSIZIONE. — La (2.7) ha grado di esattezza 1 e si ha:

$$R_{m,k}(e_2) = \frac{e_2 - e_1}{m^k} \tag{2.9}$$

In primo luogo, tenendo presente che

$$R_m(e_0) = R_m(e_1) = 0$$

dalla (2.8) segue, per ogni k intero positivo:

$$R_{m,k}(e_0) = R_{m,k}(e_1) = 0\,.$$

Per dimostrare poi la (2.9) si procede per induzione. Invero la (2.9) è vera per $k = 1$ [2]. Supponiamo allora che la (2.9), con $k-1$ al posto di k, sia soddisfatta, cioè che sia:

$$R_{m,k-1}(e_2) = \frac{e_2 - e_1}{m^{k-1}} \tag{2.10}$$

Poiché è:

$$R_{m,k}(e_2) = R_m(R_{m,k-1}(e_2))\,,$$

dalla (2.10) segue:

$$R_{m,k}(e_2) = \frac{1}{m^{k-1}} R_m(e_2 - e_1)\,. \tag{2.11}$$

Essendo, d'altra parte, noto [2] che

$$R_m(e_2) = \frac{e_2 - e_1}{m},$$

dalla (2.11) segue immediatamente l'asserto.

Si tenga infine presente che la definizione (2.1) può essere generalizzata. Invero, per ogni numero reale positivo α, si può porre:

$$B_{m,\alpha} = I - (I - B_m)^\alpha \tag{2.12}$$

da cui

$$B_{m,\alpha} = \sum_1^\infty{}_i (-1)^{i-1} \binom{\alpha}{i} B_m^i . \tag{2.13}$$

Si possono pertanto ottenere nuove formule di approssimazione per una funzione f considerando le ridotte della serie a secondo membro della (2.13), cioè, posto

$$B_{m,\alpha,n} = \sum_1^n{}_i (-1)^{i-1} \binom{\alpha}{i} B_m^i ,$$

approssimando f con $B_{m,\alpha,n}(f)$.
Si noti che è

$$B_{m,k,k} = B_{m,k}$$

Lo studio dell'operatore $B_{m,\alpha}$ potrà essere oggetto di altro lavoro.

3. - Convergenza delle $B_{m,k}(f)$ e delle loro derivate

In questo paragrafo si danno dei criteri di convergenza, al divergere di m, delle trasformate $B_{m,k}(f)$ e delle loro derivate; inoltre si assegnano alcune stime dell'errore.

Si dimostrano dapprima alcune disuguaglianze relative alla derivata *i-ma* di $R_m(f)$ (teorema 1) e successivamente altre disuguaglianze relative alla derivata *i-ma* di $R_{m,k}(f)$ (teoremi 2-7).

Detto $C^i[0,1]$ l'insieme delle funzioni reali dotate di derivata *i-ma* continua nell'intervallo $[0,1]$, si pone:

$$N_r^s = \{r, r+1, \ldots, r+s\} \qquad r < s, \qquad r, s \in N \tag{3.1}$$

$$S_i = [0,1] \times [0, s_1] \times \ldots \times [0, s_{i-1}] \qquad i \in N$$

$$d\,S_i = \prod_1^i d\,s_i \qquad s_k \in [0,1]\,, \qquad k \in N_1^{i-1}$$

$$Q^{(i)}(f;x) = \frac{d^i}{d\,x^i}\,Q(f;x)$$

ove Q è un operatore lineare ed f una funzione reale.
Si pone inoltre:

$$\gamma_{i,m} = \begin{cases} 0 & \text{per } i < 1 \\ \sum_1^{i-1} {}_r\,(-1)^r \dfrac{\sigma_{r,i-1}}{m^{r-1}} & \text{per } i \geq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

ove $\sigma_{r,i-1}$ sono le funzioni simmetriche elementari dei primi $i-1$ numeri naturali.

Ciò premesso, si dimostra il seguente

LEMMA 1. — Per ogni coppia (i,m) di interi positivi con $i < m$ ed $m > 1$ e per ogni $f \in C^i[0,1]$ si ha:

$$R_m^{(i)}(f;x) = i\,! \int_{S_i} B_{m-i}(f^{(i)}(x) - f^{(i)}(j/m + q_{i,m});x)\,d\,S_i + \tag{3.4}$$

$$+ (i\,!/m)\,\gamma_{i,m} \int_{S_i} B_{m-i}(f^{(i)}(j/m + q_{i,m});x)\,d\,S_i$$

con

$$q_{i,m} = \frac{1}{m} \sum_1^i {}_i\,s_i$$

e dove, con notazione ormai consolidata [12], si è posto:

$$B_m(f(i/m);x) = \sum_0^m {}_i \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i} f(i/m) \tag{3.5}$$

Infatti si ha:

$$R_m^{(i)}(f;x) = f^{(i)} - B_m^{(i)}(f;x)$$

da cui, tenendo presente che è:

$$B_m^{(i)}(f;x) = i\,! \prod_{s=0}^{i-1} (1 - s/m)\,B_{m-i}\left(\left[\frac{j}{m}\,,\ \frac{j+1}{m}\,,\ldots,\ \frac{j+i}{m}\,;f\right];x\right),$$

si ha:

$$R_m^{(i)}(f;x) = f^{(i)}(x) - i! \prod_{s=0}^{i-1} (1 - s/m)\, B_{m-i}$$

$$\left(\left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}, \ldots, \frac{j+i}{m}; f \right]; x \right).$$

Esprimendo le differenze divise sotto forma integrale, segue subito l'asserto.

Si può ora dimostrare il

TEOREMA 1. — Detto $\omega(f;\delta)$ il modulo di continuità di f e posto:

$$\alpha_{m,i} = (1 + 8\, i^2/m)^{1/2} \tag{3.6}$$

sussistono le limitazioni:

$$\| R_m^{(i)}(f) \| \leq 2\,\omega\left(f^{(i)}; \frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}} \right) + \gamma_{i,m} \frac{\| f^{(i)} \|}{m}; \quad f \in C^i[0,1] \tag{3.7}$$

$$\| R_m^{(i)}(f) \| \leq \frac{\alpha_{m,i}}{\sqrt{m}}\, \omega\left(f^{(i+1)}; \frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}} \right) + \frac{i \| f^{(i+1)} \|}{2m} + \tag{3.8}$$

$$+ \gamma_{i,m} \frac{\| f^{(i)} \|}{m}; \quad f \in C^{i+1}[0,1]$$

dove la norma è quella di Tchebycheff e le costanti $\gamma_{i,m}$ sono definite dalla (3.2).

Si cominci con l'osservare che, se $f \in C^i[0,1]$, risulta:

$$B_{m-i}(f^{(i)}(x) - f^{(i)}(j/m + q_{i,m}); x) \leq 2\omega(f^{(i)}; \sqrt{B_{m-i}((x - j/m - q_{i,m})^2; x)})$$

D'altra parte poiché è:

$$B_{m-i}((x - j/m - q_{i,m})^2; x) = i^2 m^{-2} x^2 + (1 - i/m)^2 x(1-x)(m-1)^{-1} -$$
$$- 2\, x\, q_{i,m}\, i\, m^{-1} + q_{i,m}^2 < (4m)^{-1}(1 + 8\, i^2 m^{-1}) = (4m)^{-1}\, \alpha_{m,i}^2$$

segue:

$$i! \int_{S_i} B_{m-i}(f^{(i)}(x) - f^{(i)}(j/m + q_{i,m}); x)\, d\, S_i \leq 2\,\omega\left(f^{(i)}; \frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}} \right) \tag{3.9}$$

Poiché d'altra parte risulta:

$$(3.10)\qquad \frac{i\,!}{m}\,\gamma_{i,m}\int_{S_i} B_{m-i}(f^{(i)}(j/m+q_{i,m});x)\,dS_i \le m^{-1}\gamma_{i,m}\,\|f^{(i)}\|$$

dal lemma 1 e dalla (3.9) segue la (3.7).

Se poi f ha derivata $(i+1)-m\,a$ continua, si ha:

$$(3.11)\qquad f^{(i)}(x)-f^{(i)}(j/m+q_{i,m}) = f^{(i)}(x)(x-j/m-q_{i,m}) + (x-j/m-q_{i,m})\,[f^{(i+1)}(\xi_i)-f^{(i+1)}(x)]$$

ove ξ_i è un opportuno numero reale tale che:

$$|\xi_i - x| < |x - j/m - q_{i,m}|$$

Dalla (3.11) si trae

$$(3.12)\qquad \int_{S_i} B_{m-i}(f^{(i)}(x)-f^{(i)}(j/m+q_{i,m});x)\,dS_i =$$

$$= \int_{S_i} B_{m-i}((x-j/m-q_{i,m})f^{(i+1)}(x);x)\,dS_i +$$

$$+ \int_{S_i} B_{m-i}((x-j/m-q_{i,m})\,[f^{(i+1)}(\xi_i)-f^{(i+1)}(x)]\,dS_i$$

D'altra parte $\forall\,\delta>0$ si ha:

$$B_{m-i}(|x-j/m-q_{i,m}|\,|f^{(i+1)}(\xi_i)-f^{(i+1)}(x)|;x) \le$$

$$\le B_{m-i}(|x-j/m-q_{i,m}|\cdot\omega(f^{(i+1)};|\xi_i-x|);x) \le$$

$$\le \omega(f^{(i+1)};\delta)\,B_{m-i}\left(|x-j/m-q_{i,m}|\left(1+\frac{|\xi_i-x|}{\delta}\right);x\right) \le$$

$$\le \omega(f^{(i+1)};\delta)\,[B_{m-i}(|x-j/m-q_{i,m}|;x) +$$

$$+ \delta^{-1}B_{m-i}((x-j/m-q_{i,m})^2;x)] \le$$

$$\le \omega(f^{(i+1)};\delta)\,[\sqrt{B_{m-i}((x-j/m-q_{i,m})^2;x)} +$$

$$+ \delta^{-1}B_{m-i}((x-j/m-q_{i,m})^2;x)]\,.$$

e quindi, per la (3.9), si ha:

$$(3.13)\qquad B_{m-i}(|x - j/m - q_{i,m}|\,|f^{(i+1)}(\xi_i) - f^{(i+1)}(x)|; x) \leq$$

$$\leq \omega(f^{(i+1)}; \delta)\left[\sqrt{\frac{1}{4m}} + \frac{2i^2}{m^2} + \delta^{-1}\left(\frac{1}{4m} + \frac{2i^2}{m^2}\right)\right],$$

Tenendo conto della (3.6), il secondo membro della diseguaglianza diventa:

$$\frac{\omega(f^{(i+1)}; \delta)\,\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}}\left[1 + \delta^{-1}\frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}}\right]$$

e quindi, per $\delta = \dfrac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}}$, dalla (3.13) si trae:

$$(3.14)\qquad B_{m-i}(|x - j/m - q_{i,m}|\,|f^{(i+1)}(\xi_i) - f^{(i+1)}(x)|; x) \leq$$

$$\leq \omega\left(f^{(i+1)}; \frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}}\right) - \frac{\alpha_{m,i}}{\sqrt{m}}$$

Si osservi poi che è

$$(3.15)\qquad \int_{S_i} B_{m-i}((x - j/m - q_{i,m})\,f^{(i+1)}(x); x)\,d\,S_i \leq \frac{\|f^{(i+1)}\|}{2(i+1)!\,m}$$

Dalle (3.12), (3.14) e (3.15) si trae allora:

$$(3.16)\qquad \int_{S_i} B_{m,i}(f^{(i)}(x) - f^{(i)}(j/m + q_{i,m}); x)\,d\,S_i \leq$$

$$\frac{\alpha_{m,i}}{i!\sqrt{m}}\,\omega\left(f^{(i+1)}; \frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}}\right) + \frac{\|f^{(i+1)}\|}{2(i+1)!\,m}$$

Dalla (3.16) e dal lemma 1 segue allora la (3.8).

Supponendo ora che f sia dotata di derivata $(i+1) - m\,a$ lipschitziana con costante M_{i+1}, si ha:

$$(3.17)\qquad \omega\left(f^{(i+1)}; \frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}}\right) \leq M_{i+1}\frac{\alpha_{m,i}}{2\sqrt{m}}$$

Dalle (3.8) e (3.17) discende allora il seguente

COROLLARIO 1. — Se f è dotata di derivata $(i+1) - m\,a$ lipschitziana con costante di Lipschitz M_{i+1}, si ha:

$$\| R_m^{(i)}(f) \| \leq m^{-1} \left[\frac{\alpha_{m,i}^2}{2} M_{i+1} + \frac{i}{2} \| f^{(i+1)} \| + \gamma_{i,m} \| f^{(i)} \| \right] \tag{3.18}$$

ove la norma è quella di Tchebycheff e le costanti $\gamma_{m,i}$ e $\alpha_{i,m}$ sono definite dalle (3.2) e (3.6).

Sussiste inoltre la seguente disuguaglianza di facile dimostrazione:

$$\| R_m^{(i)}(f) \| \leq \frac{\alpha_{m,i}^2}{8\,m} \| f^{(i+2)} \| + \frac{i}{2\,m} \| f^{(i+1)} \| + \frac{\gamma_{i,m}}{m} \| f^{(i)} \| \tag{3.19}$$

Si noti che le (3.7), (3.8), (3.18) e (3.19) sono generalizzazioni di ben note disuguaglianze relative all'operatore di Bernstein . Infatti ponendo $i = 0$ nelle (3.7), (3.8), (3.18), (3.19), si ottengono note formule di maggiorazione dell'errore di approssimazione conseguito con l'applicazione dell'operatore B_m .

Si noti pure che, analogamente a quanto si verifica per $i = 0$, anche per $i > 0$ un aumento della regolarità della funzione non conduce ad un miglioramento dell'approssimazione:

Per quanto concerne poi la derivata $i - m\,a$ di $R_{m,k}(f)$ sussiste il seguente

TEOREMA 2. — Se $f \in C^{i+k}[0,1]$ con $i \geq 0$, $k \geq 2$, $i + k < m$, è verificata la seguente maggiorazione:

$$\| R_{m,k}^{(i)}(f) \| \leq m^{-k/2} \sum_{0}^{k}{}_{\nu} c_{k,i+\nu} \| R_m^{(i+\nu)}(f) \| \tag{3.20}$$

ove i coefficienti $c_{k,j}$, $\forall\, j \in N_i^{i+k}$, sono limitati ed indipendenti da f.

La dimostrazione è fatta per induzione su k. Si vede subito che la (3.20) è vera per $k = 2$. In tal caso, infatti, la (3.20) diventa:

$$\| R_{m,2}^{(i)}(f) \| \leq m^{-1} [c_{2,i} \| R_m^{(i)}(f) \| + c_{2,i+1} \| R_m^{(i+1)}(f) \| + c_{2,i+2} \| R_m^{(i+2)}(f) \|]$$

che è vera, perché posto:

$$c_{2,i+2} = \frac{\alpha_{m,i}^2}{8}, \quad c_{2,i+1} = \frac{i}{2}, \quad c_{2,i} = \gamma_{i,m}$$

coincide con la seguente:

$$(3.21)\quad \| R^{(i)}_{m,2}(f) \| = \| R^{(i)}_m (R_m(f)) \| \leq \frac{\alpha^2_{m,i}}{8m} \| R^{(i+2)}_m (f) \| +$$

$$+ \frac{i}{2m} \| R^{(i+1)}_m (f) \| + \frac{\gamma_{i,m}}{m} \| R^{(i)}_m (f) \|,$$

che si ottiene dalla (3.19) ponendo $R_m(f)$ in luogo di f.

Per completare la dimostrazione occorre allora mostrare che la diseguaglianza:

$$(3.22)\qquad \| R^{(i)}_{m,k-1} (f) \| \leq m^{-(k-1)/2} \sum_{\nu}^{k-1}{}_{0} c_{k-1,i+\nu} \| R^{(i+\nu)}_m (f) \|$$

implica la (3.20). A tale scopo si osservi che, posto nella (3.22) $R_m(f)$ in luogo di f, si ottiene:

$$\| R^{(i)}_{m,k-1} (R_m(f)) \| \leq m^{-(k-1)/2} \left[\sum_{\nu}^{k-2}{}_{0} c_{k-1,i+\nu} \| R^{(i+\nu)}_m (R_m(f)) \| + \right.$$

$$\left. + c_{k-1,i+k-1} \| R^{(i+k-1)}_m (R_m(f)) \| \right],$$

da cui, tenendo conto delle (3.7), (3.9) e del fatto che se esiste f' è $\omega(R_m(f); \delta) \leq \| R'_m(f) \| \delta$, con $\delta > 0$, si ha:

$$\| R^{(i)}_{m,k}(f) \| \leq m^{-\frac{(k-1)}{2}} \left[\sum_{\nu}^{k-2}{}_{0} c_{k-1,i+\nu} \left(\frac{\alpha^2_{m,i+\nu}}{8m} \| R^{(i+\nu+2)}_m (f) \| + \right. \right.$$

$$+ \frac{i+\nu}{2m} \| R^{(i+\nu+1)}_m (f) \| + \frac{\gamma_{i+\nu,m}}{m} \| R^{(i+\nu)}_m (f) \| \Big) + c_{k-1,i+k-1} \cdot$$

$$\left. \cdot \left(2\,\omega \left(R^{(i+k-1)}_m (f); \frac{\alpha_{m,i+k-1}}{2\sqrt{m}} \right) + \frac{\gamma_{i+k-1,m}}{m} \| R^{(i+k-1)}_m (f) \| \right) \right] \leq$$

$$\leq m^{-(k-1)/2} \left[c_{k-1,i}\, \gamma_{i,m} \frac{\| R^{(i)}_m (f) \|}{m} + m^{-1} (c_{k-1,i+1}\, \gamma_{i+1,m} + \right.$$

$$+ i\, c_{k-1,i}) \| R^{(i+1)}_m (f) \| + \sum_{2}^{k-1}{}_{\nu} \left(\frac{c_{k-1,i+\nu-2}}{8m} \alpha^2_{m,i+\nu-2} + \right.$$

$$+ \frac{i+\nu-1}{2m} c_{k-1,i+\nu-1} + \frac{1}{m} c_{k-1,i+\nu}\, \gamma_{1+\nu,m} \Big) \| R^{(i+\nu)}_m (f) \| +$$

$$\left. + \left(\frac{c_{k-1,i+k-2}}{8m} \alpha^2_{m,i+k-2} + \frac{1}{\sqrt{m}} c_{k-1,i+k-1}\, \alpha_{m,i+k-1} \right) \| R^{(i+k)}_m (f) \| \right]$$

Posto allora:

$$c_{k,i} = \frac{1}{\sqrt{m}}\, c_{k-1,i}\, \gamma_{i,m}$$

$$c_{k,i+1} = \frac{1}{\sqrt{m}}\,(c_{k-1,i+1}\,\gamma_{i+1,m} + i\, c_{k-1,i})$$

$$c_{k,i+\nu} = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{1}{8}\, c_{k-1,i+\nu-2}\,\alpha^2_{m,i+\nu-2} + \frac{i+\nu-1}{2}\, c_{k-1,i+\nu-1} + \right. \tag{3.23}$$

$$\left. + c_{k-1,i+\nu}\,\gamma_{i+\nu,m}\right] \qquad \forall\ \nu \in \mathrm{N}_2^{k-1}$$

$$c_{k,i+k} = \frac{1}{8\sqrt{m}}\, c_{k-1,i+k-2}\,\alpha^2_{m,i+k-2} + c_{k-1,i+k-1}\,\alpha_{m,i+k-1}$$

segue la (3.20)

Si noti che le (3.23) consentono il calcolo per ricorrenza dei coefficienti $c_{k,j}$.

Dal teorema ora dimostrato segue facilmente il seguente

TEOREMA 3. — *Se* $f \in \mathrm{C}^{i+k}[0,1]$ con $i + k < m$ si ha:

$$\| \mathrm{R}^{(i)}_{m,k}(f) \| \leq 2\, m^{-k/2}\, \omega\left(f^{(i+k)};\ \frac{\alpha_{m,i+k}}{2\sqrt{m}}\right) c_{k,i+k} + 0\,(m^{1+k/2})$$

Infatti per la (3.20) si ha:

$$\| \mathrm{R}^{(i)}_{m,k}(f) \| \leq m^{-k/2} \sum_{\nu=0}^{k-2} c_{k,i+\nu} \| \mathrm{R}^{(i+\nu)}_{m}(f) \| +$$

$$+ c_{k,i+k-1} \| \mathrm{R}^{(i+k-1)}_{m}(f) \| + c_{k,i+k} \| \mathrm{R}^{(i+k)}_{m}(f) \|$$

da cui, applicando alla sommatoria la (3.19), al secondo addendo la (3.18) ed al terzo addendo la (3.7), segue facilmente la tesi.

Analoghe a quella del teorema 3 sono le dimostrazioni, che omettiamo, dei teoremi 4 e 5.

TEOREMA 4. — Se $f \in \mathrm{C}^{i+k+1}[0,1]$ con $i + k + 1 < m$, si ha:

$$\| \mathrm{R}^{(i)}_{m,k}(f) \| \leq m^{-(k+1)/2}\, \omega\,(f^{(i+k+1)};\ \alpha_{m,i+k}/2\sqrt{m}) + 0\,(m^{1+k/2})$$

TEOREMA 5. — Se $f \in C^{i+k+2}[0,1]$ con $i + k + 2 < m$, si ha:

$$\| R^{(i)}_{m,k}(f) \| \leq m^{-(1+k/2)} B_k(f) + 0(m^{1+k/2})$$

con

$$B_k(f) = \sum_{\nu=0}^{k} c_{k,i+\nu} \left[\frac{1}{8} \alpha^2_{m,i+\nu} \| f^{(i+\nu+2)} \| + \right.$$

$$\left. + \frac{i+\nu}{2} \| f^{(i+\nu+1)} \| + \gamma_{i+\nu,m} \| f^{(i+\nu)} \| \right].$$

Sussiste pure il seguente

TEOREMA 6. — Se $f \in C^{i+2k}[0,1]$ con $i + 2k < m$ e $k \geq 2$, si ha:

$$\| R^{(i)}_{m,k}(f) \| \leq m^{-k} A_{k,i}(f) \tag{3.24}$$

ove

$$A_{k,i}(f) = \sum_{\nu=0}^{2k} c_{2k,i+\nu} \| f^{(i+\nu)} \| \tag{3.25}$$

con $c_{2k,i+\nu}$ limitate ed indipendenti da f, $\forall \nu \in N_0^{2k}$.

La dimostrazione è per induzione. Se $k = 2$, dalla (3.21), segue:

$$\| R^{(i)}_{m,2}(f) \| \leq m^{-1} \left[\frac{\alpha^2_{m,i}}{8} \| R^{(i+2)}_m(f) \| + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2} \| R^{(i+1)}_m(f) \| + \gamma_{i,m} \| R^{(i)}_m(f) \| \right]$$

da cui, applicando la (3.19), si ottiene:

$$\| R^{(i)}_{m,2}(f) \| \leq m^{-1} \left\{ \frac{\alpha^2_{m,i}}{8} \left[\frac{\alpha^2_{m,i+2}}{8m} \| f^{(i+4)} \| + \frac{i+2}{2m} \| f^{(i+3)} \| + \right. \right.$$

$$\left. + \gamma_{i+2,m} \| f^{(i+2)} \| \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{\alpha^2_{m,i+1}}{8m} \| f^{(i+3)} \| + \frac{i+1}{2m} \| f^{(i+2)} \| + \right.$$

$$\left. + \gamma_{i+1,m} \frac{\| f^{(i+1)} \|}{m} \right] + \gamma_{i,m} \left[\frac{\alpha^2_{m,i}}{8m} \| f^{(i+2)} \| + \frac{i}{2m} \| f^{(i+1)} \| + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\gamma_{i,m}}{m} \| f^{(i)} \| \right] \right\} = m^{-2} \left[\frac{\alpha^2_{m,i} \alpha^2_{m,i+2}}{64} \| f^{(i+4)} \| + \right.$$

$$+\left(\alpha_{m,i}^{2}\frac{i+2}{16}+\frac{i\,\alpha_{m,i+1}^{2}}{16}\right)\|f^{(i+3)}\|+\left(\frac{\alpha_{m,i}^{2}\gamma_{i+2,m}}{8}+\frac{i(i+1)}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_{m,i}^{2}\gamma_{i,m}}{8}\right)\|f^{(i+2)}\|+\frac{i}{2}(\gamma_{i+1,m}+\gamma_{i,m})\|f^{(i+1)}\|+\gamma_{m,i}^{2}\|f^{(i)}\|.$$

Dalle posizioni:

$$c_{4,i}=\gamma_{i,m}^{2}\qquad c_{4,i+1}=\frac{i}{2}(\gamma_{i+1,m}+\gamma_{i,m})$$

$$c_{4,i+2}=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_{m,i}^{2}\gamma_{i+2,m}}{2}+i(i+1)+\frac{\alpha_{m,i}^{2}\gamma_{i,m}}{2}\right)$$

(3.26)

$$c_{4,i+3}=\frac{1}{16}((i+2)\alpha_{m,i}^{2}+i\alpha_{m,i+1}^{2})$$

$$c_{4,i+4}=\frac{\alpha_{m,i}^{2}\alpha_{m,i+2}^{2}}{64}$$

segue che la (3.24) è vera per $k=2$.

Supponiamo ora che:

$$\|R_{m,k-1}^{(i)}(f)\|\le m^{-k+1}\sum_{\nu=0}^{2k-2}c_{2k-2,i+\nu}\|f^{(i+\nu)}\|$$

Sostituendo $R_m(f)$ ad f, si ha:

$$\|R_{m,k}^{(i)}(f)\|\le m^{-k+1}\sum_{\nu=0}^{2k-2}c_{2k-2,i+\nu}\|R_m^{(i+\nu)}(f)\|$$

Utilizzando la (3.19), posto:

$$c_{2k,i+2k-1}=\frac{1}{8}c_{2k-2,i+2k-3}\alpha_{m,i+2k-3}^{2}+\frac{(i+2k-2)}{2}c_{2k-2,i+k-2}$$

$$c_{2k,i+\nu}=\frac{1}{8}c_{2k-2,i+\nu-2}\alpha_{m,i+\nu-2}^{2}+$$

(3.27)

$$+\frac{i+\nu-1}{2}c_{2k-2,i+\nu-1}+\gamma_{i+\nu,m}c_{2k-2,i+\nu}\qquad(\forall\,\nu\in N_2^{2k-2})$$

$$c_{2k,i+1}=\frac{i}{2}c_{2k-2,i}+c_{2k-2,i+1}\gamma_{i+1,m}$$

$$c_{2k,i}=\gamma_{i,m}c_{2k-2,i}$$

con semplici calcoli, segue l'asserto.

Si noti che per $i = 0$ le (3.24) e (3.25) diventano:

$$\| R_{m,k}(f) \| \leq m^{-k} A_{k,o}(f) \qquad \forall f \in C^{2k}[0,1] \qquad 4 \leq 2k < m$$

$$A_{k,o}(f) = \sum_{o}^{2k}{}_{\nu} c_{2k,\nu} \| f^{(\nu)} \|$$

A differenza di quanto accade per $k = 1$, per $k > 1$ gli operatori $B_{m,k}$ e le loro derivate migliorano l'approssimazione se aumenta la regolarità della funzione.

Si noti che il teorema 6 sostanzialmente asserisce che se $f \in C^{2n}[0,1]$ è possibile costruire mediante i polinomi di Bernstein un polinomio di grado $m > 2n$ (usando quindi $m + 1$ campioni di f) che approssima la funzione con un errore che è infinitesimo di ordine $2n$ rispetto a $1/\sqrt{m}$; il che è ovviamente una generalizzazione del tipo di approssimazione dei polinomi di Bernstein.

Concludendo, i polinomi che si ottengono mediante $B_{m,k}$ con $k > 1$, si comportano, nei riguardi del fenomeno di saturazione, in modo diverso dai polinomi di Bernstein, giacché col crescere della regolarità della funzione consentono una migliore approssimazione, mediante opportuna scelta del numero k.

4. - Applicazioni

Le proprietà di convergenza degli operatori $B_{m,k}^{(i)}$ ottenute nel paragrafo precedente consentono l'uso di formule di derivazione numerica. Infatti, sostituendo $f^{(i)}(x_o)$ con $B_{m,k}^{(i)}(f; x_o)$, si ottiene una formula di derivazione numerica del tipo:

$$f^{(i)}(x_o) = \sum_{o}^{n}{}_{j} a_j f(x_j) + E(x_o, f, k, m, i)$$

con a_j dipendente da x_o e k, ma indipendente da f ed in cui il termine $E(x_o, f, k, m, i)$ deve intendersi, a meno del segno, l'errore della formula di derivazione numerica.

Si osservi che essendo:

$$| E(x_o, f, k, m, i) | \leq \| R_{m,k}^{(i)}(f) \|,$$

i teoremi 2, 3, 4, 5, 6 forniscono altrettante formule di maggiorazione dell'errore delle formule di derivazione numerica. A tal proposito, si osservi che, diversamente da quanto avviene per altre

fomule di derivazione numerica, una scelta dei maggioranti l'errore, mediante una opportuna determinazione di k e di m, dipende dalla regolarità della funzione.

Per $m = 2$, in particolare, si hanno formule di derivazione numerica su tre punti e precisamente, con ovvio significato dei simboli:

$$f'_0 = (2^{1-k} - 3) f_0 + (4 - 2^{2-k}) f_{1/2} + (2^{1-k} - 1) f_1$$

$$f'_{1/2} = -f_0 + f_1$$

$$f'_1 = (1 - 2^{1-k}) f_0 + (2^{2-k} - 4) f_{1/2} + (3 - 2^{1-k}) f_1$$

in cui i punti di derivazione sono quelli che intervengono nel calcolo di $B_2(f)$.

Si noti che al divergere di k, i coefficienti delle formule di derivazione ottenute tendono ai coefficienti delle corrispondenti formule lagrangiane.

Si possono poi ottenere formule di quadratura sostituendo nell'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ alla funzione integranda il polinomio $B_{m,k}(f; x)$. Invero, $\forall f \in C^0[0, 1]$, si ha:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = I_{m,k} + E_{m,k}$$

con

$$I_{m,k} = \sum_1^k{}_i (-1)^{i-1} \binom{k}{i} \int_0^1 B_m^i (f; x)\,dx \tag{4.1}$$

$$E_{m,k} = \int_0^1 R_{m,k}(f; x)\,dx \tag{4.2}$$

Poiché risulta:

$$\int_0^1 B_m(f; x)\,dx = \frac{1}{m+1} \sum_0^m{}_i f_{i/m}$$

e per $i > 1$:

$$\int_0^1 B_m^i (f; x)\,dx = \frac{1}{m+1} \sum_0^m{}_i B_m^{i-1} (f;\ j/m)$$

dalla (4.1) si ottiene:

$$(4.3) \qquad I_{m,k} = \frac{1}{m+1} \sum_{k}^{1}{}_{i} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} \sum_{0}^{m}{}_{j} B_m^{i-1}(f;\ j/m)$$

Sostituendo l'espressione di $B_m^{i-1}(f;\ j/m)$ nella (4.3) si perviene a formule di quadrature del tipo:

$$(4.4) \qquad I_{m,k} = \sum_{0}^{m}{}_{j} p_j(m, k)\, f_{j/m}$$

con $p_j(m, k)$ indipendenti da f e dipendenti solo da j, m, k.

In particolare per $m = 2$ si ottengono le formule di quadratura:

$$(4.5) \qquad I_{2,k} = \frac{1}{6} [(1 + 2^{1-k}) f_0 + (4 - 2^{2-k}) f_{1/2} + (1 + 2^{1-k}) f_1]$$

Si noti che al divergere di k il secondo membro della (4.5) tende alla formula di Cavalieri-Simpson.

Si osservi che la circostanza che la formula di Cavalieri-Simpson risulta un caso limite di quelle trovate, non significa che queste siano meno precise. A tale proposito si applichino all'integrale:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 4x^2}$$

sia la formula di Cavalieri-Simpson sia le formule $I_{2,k}$. Si vede, mediante confronto col valore vero I, che $I_{2,k}$, qualsiasi sia k, approssima I meglio del valore I_{cs}, ottenuto applicando la formula di Cavalieri-Simpson. In particolare si ottiene:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 = 0{,}553574$$

$$I_{2,2} = 0{,}550000 \qquad I_{cs} = 0{,}533333$$

Inoltre si ha:

$$(4.6) \qquad I_{m,2} = \frac{1}{m+1} [2 \sum_{0}^{m}{}_{j} f_{j/m} - \sum_{0}^{m}{}_{j} B_m(f;\ j/m)]$$

da cui in particolare:

$$I_{3,2} = \frac{1}{6}(f_0 + 2f_{1/3} + 2f_{2/3} + f_1)$$

$$I_{4,2} = \frac{1}{8}\left[\frac{79}{80}f_0 + \frac{164}{80}f_{1/4} + \frac{154}{80}f_{1/2} + \frac{164}{80}f_{3/4} + \frac{79}{80}f_1\right]$$

Si noti che alla (4.6) si può dare la forma:

$$I_{m,2} = \frac{1}{m+1}\sum_0^m{}_j f_{j/m} + \frac{1}{m+1}\sum_0^m{}_j R_m(f;\, j/m)$$

Si vuole ora dare una formula di maggiorazione dell'errore (4.2). A tale scopo si osservi che per un opportuno $\xi \in [0, 1]$ si ha:

$$R_m(f; x) = -\frac{x(1-x)}{2m} f''(\xi)$$

Pertanto essendo:

$$R_{m,k}(f; x) = R_m(R_{m,k-1}(f); x) = -\frac{x(1-x)}{2m} R''_{m,k-1}(f; \xi)$$

si ha dalla (4.2):

$$E_{m,k} = -\int_0^1 \frac{x(1-x)}{2m} R''_{m,k-1}(f; \xi)\, dx$$

Ne segue:

$$|E_{m,k}| \leq \frac{1}{12m} \| R''_{m,k-1}(f) \| \tag{4.7}$$

Dalla (4.7) e dalla (5.20) segue:

$$|E_{m,k}| \leq \frac{1}{12\, m^{1+k/2}} \sum_0^k{}_\nu c_{k,\nu+2} \| R_m^{(\nu+2)}(f) \| \tag{4.8}$$

La (4.8), mediante le (3.7), (3.8), (3.18), (3.19), consente di ottenere agevoli formule di maggiorazione dell'errore.

BIBLIOGRAFIA

[1] POPOVICIU T., *Sur l'approximation des fonctions convex d'ordre supérieur.* Mathematica, **10**, 49-50 (1935).

[2] LORENTZ G. G., *Bernstein polynomials. University Press.* Toronto (1953).

[3] STANCU D. D., *On the monotonicity of the sequence formed by first order derivatives of Bernstein polynomials.* Math. Zeitschr., **98**, 45-51 (1967).

[4] MASTROIANNI G., *Sull'approssimazione di funzioni continue mediante operatori lineari.* Liguori Napoli (1975).

[5] SCHOENBERG I. J., *On spline functions in inequalities, Proceedings of the conference held at wrigh Putt.* A.F.B. Ohio, 255-291 (1965).

[6] KELISKI R. P. and RIVLIN T. J., *Iterates of Bernstein polynomials.* Pacific J. Math., 21, **3**, 511-520 (1967).

[7] STANCU D. D., *Some Bernstein polynomials in two variables and their applications.* Soviet Math., **1**, 1025-1028 (1960).

[8] STANCU D. D., *On some polynomials of Bernstein.* Acad. Rep. Pop. Rom. Fil. Iasi St. Math., **11**, 221-223 (1960).

[9] BASKAKOV V. A., *An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **113**, 249-251 (1957).

[10] STANCU D. D., *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operator.* Rev. Roum. Math. Pures et appl. XIII, **8**, 1173-1194 (1968).

[11] GORDON W. J. and RIESENFELD R. F., *Bernstein-Bézier Methods for the Computer-Aided design of Free-Form Curves and Surfaces.* Journ. of. A.C.M., 21, **2**, 293-310 (1974).

[12] BUTZER P. L., *Linear combinating of Bernistein polynomials.* Canadian Journ. of Math., **5**, 559-567 (1953).

[13] FRENTIU M., *Combinatii liniare de polinoame Bernstein si de operatori Mirakyan.* Studia Univ. Babeş-Boliai, **1**, 63-68 (1970).

[14] DE VORE R. A., *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators.* Springer (1972).

[15] MEINARDUS G., *Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods.* Springer (1967).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, A. Franchetta e G. Panella.

Melanine biosintetiche

Nota di ANTONIO DINI * ed ESTER FINAMORE **
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 2 aprile 1977)

RIASSUNTO. — Viene descritto il comportamento all'ossidazione della L (−) tirosina, della pirocatechina e della D,L-DOPA in presenza del reattivo di Fenton, della perossidasi da rafano e del succo proveniente dalla premitura di bucce di patate. Sono inoltre riportate alcune proprietà dei prodotti ottenuti per metilazione con diazometano dei pigmenti neri risultanti dalle varie ossidazioni.

SUMMARY. — The behaviour of L (−) Tyrosine, Catechol and D,L-DOPA toward oxidation in the presence of Fenton's reagent, horse radish peroxidase and potato's peel juice is described. Some properties of the resulting black pigments after methylation with diazomethane are also reported.

Recentemente è stata ripresa la polemica sul tipo e sul numero degli enzimi che catalizzano la trasformazione della tirosina in melanina [1]. Secondo OKUN et al. [2] la melanogenesi dei mammiferi sarebbe basata su di un'azione sinergica di una dopaossidasi aerobica e di una perossidasi. Secondo gli stessi autori una emoproteina medierebbe l'ossidazione della tirosina a melanina introducendo l'ossidrile nella tirosina e la cosiddetta « tirosinasi » potrebbe agire successivamente sulla DOPA. A sostegno di ciò si ricorda che l'ossidazione della tirosina procede con formazione di H_2O_2, che si può generare o per azione di varie ossidasi o per autossidazione degli intermedi della melanogenesi [3]. Secondo SMITH et al. [4] il fatto che la perossidasi è l'enzima che converte la tirosina in DOPA non trova conferma negli esperimenti condotti facendo agire la perossidasi in presenza di H_2O sulla tirosina. Tuttavia, se si ossida la tirosina con perossidasi in presenza di acido diossifumarico ed ossigeno essa viene trasformata in DOPA.

* Gruppo di Biorganica - Facoltà di Farmacia - Università di Napoli.
** Titolare di assegno biennale di formazione didattica e scientifica.

L'introduzione dell'ossidrile nella tirosina o più in generale in un fenolo può essere realizzata con sistemi chimici come il reattivo di FENTON [5], o i complessi rameici della morfolina [6], che sembrano accostabili nel modo di agire sia alla tirosinasi che alla perossidasi [7].

Da quanto precede e dal fatto che i sostenitori delle teorie di RAPER [3] sulla melanogenesi non riferiscono sul rinvenimento di enzimi che, secondo le regole classiche dell'enzimologia, dovrebbero presiedere alle relative trasformazioni molecolari, si deve dedurre che le conoscenze attuali sulla biogenesi delle melanine sono ancora vaghe e confuse.

Ci è sembrato perciò interessante studiare il comportamento all'ossidazione sia chimica che biochimica della tirosina, della DOPA e della pirocatechina con il reattivo di Fenton, con la perossidasi di ravanello e con il succo di bucce di patate [8]. Quest'ultimo è stato scelto per disporre di una miscela atta a svolgere eventualmente tutte le attività biologiche necessarie a convertire il substrato in melanina.

Confrontando i vari processi di ossidazione riportati nella parte sperimentale, si arriva alla conclusione che solo l'ossidazione in presenza di succo di bucce di patate fornisce prodotti molto simili alle melanine naturali; negli altri casi si osservano differenze sia nelle rese, che risultano molto più basse, sia nelle proprietà dei metilderivati, che risultano in parte solubili in alcool e acetone. La melanogenesi appare diversa anche nei colori che si susseguono nelle varie fasi del processo ossidativo.

È nostro intendimento proseguire queste ricerche sia per approfondire quantitativamente il processo della melanogenesi del succo di bucce di patate sia per l'isolamento di frazioni attive specifiche in esso contenute.

PARTE SPERIMENTALE

Sono stati adoperati come reattivi: L(−) Tirosina RP C. Erba; pirocatechina RP C. Erba; 3-(3,4-Diidrossifenil)-DL-alanina B.D.H.; Diazald EGA Chemie; Perossidasi da rafano (I.II.I.7) B.D.H. (attività 60 unità Summer di purpurogallina per mg. ovvero 820 EU).

Per la determinazione colorimetrica: spettrofotometro UNICAM SP 600.

1) *Azione del reattivo di Fenton sulla tirosina, pirocatechina, DOPA.*

a) 2 g di L(−) tirosina (moli 0,011) in 4 litri di acqua deionizzata, 0,1 g di $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ (moli 0,00036) e 10 cc di H_2O_2 6 % (p/v)

(moli 0,017) sono mescolati nell'ordine a temperatura ambiente. Immediatamente appare una colorazione verde, quindi la miscela sottoposta ad una corrente continua di ossigeno, si scurisce, mentre col tempo si separa un pigmento bruno scuro. Dopo 3 giorni si raccoglie il precipitato per centrifugazione e si lava con 2 cc di HCl N, poi con HCl 0,1 N, con acqua deionizzata, con etanolo, con etere e si secca sotto vuoto su P_2O_5. Si ottengono 100 mg. di pigmento nero. Resa 5 % in peso.

Il supernatante color giallo proveniente dalla centrifugazione viene trattato con ulteriori 0,1 g. di $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ e nuovamente sottoposto per un giorno ad una corrente continua di ossigeno. Si separa altro precipitato nero. La miscela è portata a più piccolo volume per distillazione, acidificata al Rosso Congo e centrifugata. Dopo lavaggio con acqua, alcol ed etere ed essiccazione su P_2O_5 si ottengono altri 240 mg di pigmento nero. Resa complessiva: 17 % in peso.

L'esperimento è ripetuto una seconda volta utilizzando le stesse quantità di reattivi, ma effettuando la raccolta del precipitato, una sola volta e senza aggiunte intermedie di catalizzatore, dopo 3 giorni. Dopo concentrazione della miscela, acidificazione e lavaggi analoghi a quelli descritti precedentemente si ottengono 200 mg. di pigmento nero. Resa: 10 % in peso.

2) 1,10 g di Pirocatechina (0,01 moli) in 4 litri di acqua deionizzata, 0,1 g di $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ (0,00036 moli) e 10 ml. di H_2O_2 6 % (0,017 moli) sono mescolati nell'ordine a temperatura ambiente.

La soluzione diventa prima verde poi nera. Si sottopone ad una corrente di aria per 24 ore. La miscela nera ottenuta è concentrata, acidificata con HCl conc. e centrifugata. Si raccoglie un solido scuro, che dopo pochi lavaggi con acqua deionizzata tende a peptizzare, mentre trattato con HCl colora la fase liquida in giallo. Il precipitato risulta inoltre parzialmente solubile in metanolo ed in acetone.

c) 1,59 g di 3-(3-4-diidrossifenil)-DL-alanina (moli 0,008) in 3,2 litri di acqua deonizzata, 0,008 g di $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ (moli 0,0000288) e 8 ml di acqua ossigenata 6 % (moli 0,013) sono mescolati nell'ordine a temperatura ambiente. La soluzione diventa prima verde, poi gialla, quindi marrone ed infine rosso intenso. Si sottopone la soluzione ad una corrente continua di ossigeno per 24 ore e si ottiene un precipitato nero. La miscela concentrata per evaporazione è acidificata con HCl conc. e centrifugata. Il solido, sottoposto a lavaggi con acqua deionizzata, dapprima insolubile, col diminuire dell'acidità del liquido di lavaggio comincia a passare nella fase acquosa; esso risulta solubile anche in alcool ed acetone.

2) *Azione del succo di bucce di patate su L(−) tirosina, pirocatechina, DOPA.*

a) 0,8 g di L(−) tirosina, sospesi in 1 litro di acqua deionizzata sono trattati sotto agitazione con NaOH 2N fino a completa dissoluzione; quindi si riporta il pH della soluzione al valore 8,2 circa, mediante aggiunta di HCl. Alla soluzione limpida si aggiungono 40 cc di succo di bucce di patata ottenuti da circa 500 g. di patate con la buccia scura secondo il procedimento di PANIZZI [8]. La soluzione dopo poco tempo diventa rosso intenso, poi sottoposta ad una corrente continua di ossigeno si scurisce e da essa si separa un precipitato nero. Dopo 20 ore si interrompe la corrente di ossigeno, si acidifica la soluzione con acido cloridico conc. al rosso Congo e si porta all'ebollizione.

Dopo raffreddamento e decantazione si aspira il supernatante ed il residuo si raccoglie per centrifugazione. Il precipitato nero viene tenuto per 20 ore a ricadere con il doppio del suo peso di HCl conc. Si aggiunge poca acqua deionizzata e si centrifuga. Il precipitato nero è lavato quindi con acqua deionizzata fino a reazione neutra e con etanolo 3 volte: dopo essiccazione su P_2O_5 sotto vuoto, pesa 355 mg. Resa: 44,5 % in peso.

b) 0,8 g di Pirocatechina in 600 ml di acqua deionizzata, trattati con NaOH 2N fino a pH 8,13, 30 cc di succo di bucce di patate, provenienti da circa 400 g di patate con la buccia scura sono mescolati nell'ordine a temperatura ambiente. La soluzione dopo pochi minuti diventa di colore rosso intenso, poi sottoposta ad una corrente continua di ossigeno diventa nera e da essa si separa un precipitato nero. Dopo 20 ore si interrompe la corrente di ossigeno, si acidifica con HCl conc. e si porta all'ebollizione. Il precipitato, raccolto dopo decantazione e centrifugazione è tenuto a ricadere per 20 ore con il doppio del suo peso di HCl conc. Infine, il precipitato raccolto e lavato, come descritto precedentemente, con acqua e poi 3 volte con etanolo, portato a secco su P_2O_5, pesa 600 mg Resa 77,7 % in peso.

c) 0,8 g di 3-(3,4-diidrossifenil)-DL-alanina sospesi in 500 cc. di acqua deionizzata sono disciolti con l'aggiunta di NaOH 2N ed il pH è aggiustato a 8,13 con HCl dil. Alla soluzione giallina si aggiungono 40 cc. di succo di bucce di patate ottenuto da 500 g di patate scure. La soluzione rapidamente diventa rosso intenso, poi sottoposta ad una corrente continua di ossigeno si scurisce e lascia separare un solido nero. Dopo 20 ore si interrompe la corrente di ossigeno, si acidifica con HCl conc. e si porta all'ebollizione. Dopo decantazione e centrifugazione il precipitato nero raccolto è tenuto per 20 ore al-

l'ebollizione con il doppio del suo peso di HCl conc. Il pigmento nero è lavato prima con acqua deionizzata fino a reazione neutra, poi 3 volte con etanolo e pesa 582 mg. Resa: 72,7 % in peso.

3) *Azione della Perossidasi sulla L(−) tirosina, pirocatechina-DL-DOPA.*

a) 500 mg di L(−) tirosina sospesi in 2 litri di acqua deionizzata sono trattati con NaOH 2N fino a dissoluzione; quindi si aggiusta il pH al valore di 8,8 mediante aggiunta di HCl diluito. L'aggiunta di 6 mg. di perossidasi provoca dopo breve tempo la formazione di una lieve colorazione rosa persistente nel tempo anche per prolungata azione di una corrente di ossigeno (20 ore).

b) 500 mg di pirocatechina sospesi in 1 litro di acqua deionizzata, sono trattati con NaOH 2N fino a pH 8,13. Per aggiunta di 6 mg. di perossidasi la soluzione si colora in verde, poi in giallo chiaro. Si fa gorgogliare ossigeno; la soluzione in breve si scurisce diventando marrone, poi rosso scuro, poi nera. Dopo 20 ore si interrompe la corrente di ossigeno, si acidifica con HCl al Rosso Congo e si fa bollire per qualche minuto. Il precipitato nero si raccoglie per decantazione e successiva centrifugazione, quindi si tiene a ricadere per 20 ore con una quantità di HCl conc pari al doppio del suo peso. Si diluisce con poca acqua e si raccoglie per centrifugazione. Si lava prima con acqua deionizzata fino a neutralità e quindi due volte con etanolo, in cui tende a solubilizzarsi. Si raccolgono infine per essiccazione sotto vuoto 100 mg di prodotto nero. Resa: 20 % in peso.

c) 500 mg di 3-(3,4-diidrossifenil)-DL-alanina sospesi in 1 litro di acqua deionizzata, sono trattati con NaOH 2N fino a pH 8,13. Per aggiunta di 6 mg di perossidasi, la soluzione si colora in rosa chiaro; poi sottoposta ad una corrente continua di ossigeno, diventa rosa, quindi rosso mattone ed infine nera. Dopo 20 ore si interrompe la corrente di ossigeno, si acidifica con HCl al Rosso Congo e si fa bollire per qualche minuto. Dopo decantazione e centrifugazione, il precipitato nero risultante è tenuto per 20 ore a ricadere con una quantità di HCl conc. pari al doppio del suo peso. Il pigmento nero è centrifugato, lavato con acqua deionizzata, fino a reazione neutra, poi 3 volte con etanolo ed essiccato sotto vuoto: peso 350 mg. Resa: 70 % in peso.

4) *Azione del diazometano sui precipitati scuri.*

I prodotti ottenuti per trattamento della L(−) tirosina con il reattivo di Fenton, della pirocatechina, della 3-(3,4-diidrossifenil-DL-

alanina e della L(−) tirosina con succo di buccia di patata sono sospesi ciascuno in circa 20 cc. di etere e trattati con una soluzione eterea di diazometano preparato a partire dal p. tolilsolfonilmetilnitrosoamide (soluzione eterea all'1% circa) a porzioni fino a persistente colorazione gialla. L'aggiunta di diazometano è terminata quando la colorazione della fase eterea persiste per qualche ora. I precipitati neri, dopo eliminazione dell'eccesso di diazometano con acido acetico ed evaporazione dell'etere sono lavati ripetutamente con dimetilformamide. Il solvente rimane incolore durante i lavaggi dei pigmenti ottenuti per azione del succo di patata sulla L(−) tirosina e sulla DL-DOPA, mentre si colora in marrone durante i primi lavaggi negli altri casi. Tutti i precipitati sono stati lavati infine con etanolo ed essiccati sotto vuoto su P_2O_5.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Okun, L. Edelstein, N. Hamada, G. Donellan, J. Invest. Derm., **55**, 1 (1970); Biochem. J., **124**, 439 (1971); J. Invest. Derm., **64**, 364 (1975); T. J. Holstein, C. P. Stowel, W. C. Quevedo, R. M. Zarcaro, T. C. Bienieki, Yale J. Biol. Med., **46**, 560 (1973); V. J. Hearing, Arch. Biochem. Biophys., **158**, 720 (1973); J. Invest. Derm., **64**, 80 (1975).

[2] M. Okun, L. M. Edelstein, R. P. Patel, B. Donnellan, Yale J. Biol. Med., **46**, 535 (1973).

[3] R. A. Nicolaus, Melanins-Hermann, Paris, 1968.

[4] P. L. Smith, G. A. Swan, Biochem. J., **153**, 403 (1976).

[5] H. J. H. Fenton, J. Chem. Soc., **65**, 899 (1894); H. J. H. Fenton, H. Jackson, J. Chem. Soc., **75**, 1 (1899); H. Gilman, *Chimica Organica superiore*, vol. 4°, pag. 3442, P. Boringhieri ed. Torino.

Il reattivo di Fenton è costituito da perossido di idrogeno in presenza di un sale ferroso. Esso è in grado di ossidare diverse sostanze organiche, tra cui alcol, glicoli, ossiacidi, ammine, acidi carbossilici alifatici, idrocarburi aromatici, fenoli. Dall'analisi dei prodotti di reazione e dal ritrovamento nella miscela di Fenton del radicale ossidrilico libero, è stato ipotizzato un meccanismo radicalico. Lo ione ferroso reagisce con il perossido di idrogeno, cedendo un elettrone per volta in un processo a 2 stadi:

1) $Fe^{++} + HO—OH \rightarrow Fe^{+++} + \cdot OH + (:OH)^-$

2) $Fe^{++} + \cdot OH \rightarrow Fe^{+++} + (:OH)^-$

Il primo stadio, essendo relativamente molto più veloce, consente una disponibilità di radicali liberi ossidrilici in grado di eseguire una o più delle seguenti reazioni:

3) $\cdot OH + HO—OH \rightarrow HO—H + \cdot O—OH$

$\cdot O—OH + HO—OH \rightarrow O=O + H—OH + \cdot OH$

4) $RH + \cdot OH \rightarrow \cdot R + H—OH$

5) $\cdot R + \cdot OH \rightarrow R—OH$

Cioè, esso può fornire radicali organici (reaz. 4), i quali possono reagire a loro volta, consumando altro radicale, con un radicale ossidrilico libero (reaz. 5) oppure reagire con altro radicale organico libero.

6) $\cdot R + \cdot R \rightarrow R—R$

ovvero con perossido di idrogeno:

7) $\cdot R + HO—OH \rightarrow R—OH + \cdot OH$

rigenerando un radicale ossidrilico libero.

In tal modo, infatti, si spiega come dalla reazione di Fenton si ottengono aldeidi o chetoni dagli alcoli, mentre dai composi aromatici si isolano derivati del difenile e fenoli, e dai fenoli i catecoli.

[6] W. BRACKMANN, E. HAVINGA, Rec. Tra. Chim. Pays.-Bas, **74**, 937 (1955).

[7] Questi reattivi andrebbero meglio studiati, soprattutto per la preparazione della DOPA. In una prova da noi eseguita e nelle condizioni sperimentali usate si ottiene una resa in DOPA dell'1 % circa. (0.72 g di tirosina + 2,5 cc di H_2SO_4 2N + + 250 cc di acqua deionizzata + 0,03 g $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ + 9,5 cc H_2O_2 1 %; Dopa g. 0,009 determinata con il metodo di Arnow (L. E. ARNOW, J. Biol. Chem. **118**, 531 (1938)). Inoltre, H. S. RAPER (J. Biol. Chem., **26**, 2000 (1932)), facendo reagire 2 g di L-tirosina in 4 litri di acqua, 0,1 g. di $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ e 10 cc. di H_2O_2 6 %, ottiene 0,58 g. di L. Dopa con una resa di circa il 26 %.

[8] Il succo di bucce di patate è stato ottenuto con il metodo di L. PANIZZI e R. A. NICOLAUS, Gazz. Chim. It., **82**, 459 (1952).
Le bucce (2500 g circa) provenienti dalla pelatura di 10 Kg di patate ben lavate sono frullate e quindi pressate in torchio. Il residuo è pestato in mortaio e nuovamente torchiato. I liquidi provenienti dalle torchiature sono riuniti e lasciati sedimentare per una notte in frigorifero. In totale, dopo decantazione e centrifugazione, si ottengono 800 cc. di succo rosso scuro.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, V. Leone e L. Mangoni.

Su una classe di spazi di Sobolev con peso in un aperto non limitato di R^n

Nota di PATRIZIA DONATO e LUCIA MIGLIACCIO (a Salerno) *
presentata dal socio ordinario CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 2 aprile 1977)

RIASSUNTO. — In questo lavoro ci occupiamo dello studio di una classe di spazi di Sobolev con peso, denotati con $W_s^{r,p}$, per i quali proviamo teoremi di immersione compatta, di densità, di tracce. Viene inoltre dimostrata l'esistenza di un isomorfismo di $W_s^{r,p}$ sugli ordinari spazi di Sobolev $W^{r,p}$.

SUMMARY. — In this paper we introduce a class of weighted Sobolev spaces, denoted with $W_s^{r,p}$, for which we prove embedding, compact embedding, density and traces theoremes. The existence of an isomorphism of $W_s^{r,p}$ into the usual spaces $W^{r,p}$ have been also proved.

Questo lavoro è dedicato allo studio di una classe di spazi di Sobolev con peso, denotati con $W_s^{r,p}(\Omega)$ con r ed s reali, $1<p<+\infty$ e dove Ω è un aperto non limitato di R^n.

Se r è un intero ≥ 0, $W_s^{r,p}(\Omega)$ è lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\rho^s \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ per $|\alpha| \leq r$ munito della norma

$$(1) \qquad \| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \int_\Omega \rho^{sp}(x) |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dove $\rho(x)$ è una funzione di $C^0(\bar{\Omega})$ soddisfacente opportune condizioni.

Una « funzione peso » del tipo da noi considerato è per esempio $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Nel caso di r intero tali spazi sono già stati studiati (cfr. [2]) e si prova facilmente che essi sono isomorfi algebri-

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

camente e topologicamente agli ordinari spazi di Sobolev senza peso $W^{r,p}(\Omega)$ per mezzo dell'applicazione

$$u \to \rho^s u \,. \tag{2}$$

Ci siamo posti il problema di estendere la definizione degli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$ al caso di $r > 0$ non intero (e poi al caso di $r < 0$) in maniera tale che la (2) stabilisca ancora un isomorfismo di $W_s^{r,p}(\Omega)$ su $W^{r,p}(\Omega)$.

Tale scopo viene raggiunto limitando l'integrale doppio delle derivate frazionarie ad un opportuno sottoinsieme M di $\Omega \times \Omega$ collegato alla « funzione peso » $\rho(x)$.

L'esistenza del suddetto isomorfismo ci permette di estendere ai nostri spazi vari risultati noti negli spazi $W^{r,p}(\Omega)$.

Otteniamo dei teoremi di densità, di immersione continua, di immersione compatta e, per Ω opportunamente regolare, dei teoremi di tracce su $\partial\Omega$.

Otteniamo inoltre una caratterizzazione di tali spazi, nel caso r non intero, come spazi di interpolazione (col metodo delle « tracce ») tra interi consecutivi.

Nel caso $\rho(x) \sim (1 + |x|^2)^{1/2}$ proviamo che i nostri spazi, per $p = 2$, sono isomorfi topologicamente ed algebricamente agli spazi $H_s^r(\Omega)$, ottenuti estendendo al nostro caso la definizione degli spazi $H_s^r(\Omega)$ introdotti da C. PARENTI in [13]. Ciò consente di munire di una norma intrinseca gli spazi $H_s^r(\Omega)$, i quali in [13] vengono introdotti come spazi di restrizioni ad Ω di elementi di $H_s^r(R^n)$, essendo quest'ultimo spazio definito per mezzo della trasformata di Fourier.

La definizione degli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$ viene data al n. 1. In tale numero viene inoltre provato un teorema di densità.

Al n. 2 viene dimostrato il già citato teorema di isomorfismo definito dalla (2).

Al n. 3 viene caratterizzato uno spazio di moltiplicatori e vengono stabiliti alcuni teoremi di immersione continua e compatta.

Al n. 4 viene stabilito un teorema che caratterizza le tracce su $\partial\Omega$ degli elementi di $W_s^{r,p}(\Omega)$.

Ai nn. 5 e 6 si caratterizzano gli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$ e $W_s^{r,p}(\partial\Omega)$ come spazi di interpolazione.

Al n. 7 infine si prova l'isomorfismo tra gli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$ e gli spazi $H_s^r(\Omega)$ introdotti da C. PARENTI in [13].

1. Gli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$

Sia Ω un aperto di R^n e sia $\rho(x) \in C^0(\bar{\Omega})$ una funzione positiva che gode delle seguenti proprietà:

$C_1)$ $\inf_{\bar{\Omega}} \rho(x) = a_0 > 0$.

$C_2)$ Esistono due costanti positive γ_1 e γ_2 tali che

$$\gamma_1 \rho(y) \leq \rho(x) \leq \gamma_2 \rho(y) \qquad \forall\, x, y \in \bar{\Omega} : |x - y| < \rho(x) .$$

Nel seguito dovremo anche considerare le seguenti ipotesi:

esiste $\sigma(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tale che[1] $\rho \sim \sigma$ ed inoltre

$C_3)$ $\forall\, s \in R$, $\forall\, m \in N$, $\alpha \in N^n \,|\, |\alpha| \leq m$, $\exists\, c \in R_+$ tale che

$$|\partial^\alpha (\sigma(x)^s)| \leq \sigma^s(x) \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega} .$$

$C_4)$ $\exists\, c \in R_+$ tale che $\forall\, x, y \in \Omega$, $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c\,|x - y|$.

Fissiamo un $k \geq \max\{\gamma_2, 1/\gamma_1\}$ e poniamo:

$$M = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \,|\, 1/k\, \rho(y) \leq \rho(x) \leq k\, \rho(y)\} .$$

Osserviamo che

$$(x, y) \in \Omega \times \Omega \backslash M \Rightarrow |x - y| \geq \rho(x) \quad \text{e} \quad |x - y| \geq \rho(y) .$$

Porremo:

$$M_s^{\lambda,p}(\Omega) = \iint_M \rho^{sp}(x)\, \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}}\, dx\, dy .$$

Nel seguito indicheremo con p un fissato numero reale > 1.

Qualunque siano $r \in \bar{R}_+$ ed $s \in R$, indicheremo con $W_s^{r,p}(\Omega)$: lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\rho^s\, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leq r$ munito della norma

$$\| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \int_\Omega \rho^{sp}(x)\, |\partial^\alpha u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

se $r \in N_0$;

[1] Siano f e g due funzioni definite in un sottoinsieme Ω di R^n. Diremo che f è equivalente a g e scriveremo $f \sim g$ se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x) , \qquad \forall\, x \in \Omega .$$

lo spazio delle distribuzioni $u \in W_s^{k,p}(\Omega)$ e tali che:

$$M_s^{\lambda,p}(\partial^\alpha u) < +\infty \qquad \text{per} \quad |\alpha| = k,$$

munito della norma:

$$\| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{W_s^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r} M_s^{\lambda,p}(\partial^\alpha u))^{\frac{1}{p}},$$

se $r = k + \lambda$, $k \in N_o$ e $\lambda \in]0, 1[$.

Porremo:

$$L_s^p(\Omega) = W_s^{o,p}(\Omega).$$

OSSERVAZIONE 1.1. — Se ρ è una funzione costante, lo spazio $W_s^{r,p}(\Omega)$ è equivalente (algebricamente e topologicamente) all'ordinario spazio di Sobolev [2] $W^{r,p}(\Omega)$; inoltre se $\bar{\rho} \in C^o(\bar{\Omega})$ è tale che

$$\bar{\rho} \sim \rho$$

gli spazi che si ottengono con $\bar{\rho}$ al posto di ρ sono isomorfi algebricamente e topologicamente agli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$.

LEMMA 1.1. — *Siano* $\lambda \in]0, 1[$, σ *e* σ_o *due funzioni di classe* $C^o(\bar{\Omega})$ *e positive in* $\bar{\Omega}$, $\wedge$ *un sottoinsieme misurabile di* $\Omega \times \Omega$. *Se risulta*:

$$(1.1) \qquad \gamma^{-1}\sigma(y) \leq \sigma(x) \leq \gamma\sigma(y), \ |x - y| > \sigma_o(x) \quad \forall\, x, y \in \wedge,$$

[2] Se $r \in N_o$ denoteremo come al solito con $W^{r,p}(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leq r$, munito della norma

$$\| u \|_{W^{r,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq r} \| \partial^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p}$$

Se $r = k + \lambda$, $k \in N_o$, $\lambda \in]0, 1[$, denoteremo con $W^{r,p}(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ per le quali

$$\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x')|^p}{|x - x'|^{n+\lambda p}} \, dx \, dx' < +\infty,$$

munito della norma

$$\| u \|_{W^{r,p}(\Omega)} = \left(\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x')|^p}{|x - x'|^{n+\lambda p}} \, dx \, dx' \right)^{1/p}$$

Se invece risulta $r < 0$, $\Omega = R^n$, posto $1/p + 1/p' = 1$ indicheremo con $W^{r,p}(R^n)$ lo spazio duale forte di $W^{-r,p'}(R^n)$.

con γ *costante indipendente da* x *e da* y, *allora esiste* $c \in \mathrm{R}_+$ *tale che*:

$$(1.2) \qquad \int\int_{\Lambda} \sigma(x) \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} \, dx \, dy \leq c \int_{\Omega} \sigma(x) \, \sigma_o^{-\lambda p}(x) \, |u(x)|^p \, dx ,$$

per ogni u *per cui il secondo membro è finito.*

Infatti si ha per la (1.1):

$$\int\int_{\Lambda} \sigma(x) \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} \, dx \, dy \leq c_1 \int_{\Omega} \sigma(x) \, |u(x)|^p \, dx \int_{|x-y| > \sigma_o(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n+\lambda p}} ,$$

da cui segue la (1.2)

Per ogni sottoinsieme K di $\bar{\Omega}$, indicheremo con $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega, \mathrm{K})$ [risp. $\mathrm{W}^{r,p}(\Omega, \mathrm{K})$] il sottospazio di $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$ [risp. $\mathrm{W}^{r,p}(\Omega)$] costituito dalle u con supp $u \subset \mathrm{K}$.

Come ovvia conseguenza del lemma 1.1 si ha:

LEMMA 1.2. — a) *La definizione algebrica di* $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$ *non dipende dalla particolare scelta del numero* $k \geq \max\{1/\gamma_1, \gamma_2\}$ *invece, se* r *non è intero, la norma dipende da tale scelta, ma le differenti norme sono equivalenti.*

b) *Risulta*[3] $\mathrm{W}_o^{r,p}(\Omega) \sim \mathrm{W}^{r,p}(\Omega)$.

c) *Per ogni compatto* $k \subset \bar{\Omega}$ *risulta*

$$\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega, k) \sim \mathrm{W}^{r,p}(\Omega, \mathrm{k}) .$$

Passiamo ora a stabilire il seguente:

TEOREMA 1.1. — *Qualunque sia* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *e* $s \in \mathrm{R}$, $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ *è denso in* $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$.

[3] Se X e Y sono due spazi di Banach, scriveremo $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$ se i due spazi coincidono algebricamente ed inoltre esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$c_1 \| f \|_{\mathrm{X}} \leq \| f \|_{\mathrm{Y}} \leq c_2 \| f \|_{\mathrm{X}} , \quad \forall f \in \mathrm{X} .$$

Dim. Per ogni $k \in \mathrm{N}$ sia $\delta_k(x) \in \mathfrak{D}(\tilde{\Omega})$ ed inoltre soddisfacente alle condizioni:

$$b_1) \qquad \delta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad |x| \leq k \\ 0 & \text{per} \quad |x| \geq 2k \end{cases}$$

$$b_2) \qquad \forall\ \alpha \in \mathrm{N}_o^n,\ \exists\, c_\alpha \in \mathrm{R}_+ : |\partial^\alpha \delta_k(x)| \leq c_\alpha, \quad \forall\ k \in \mathrm{N}.$$

Sia ora $u \in \mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$; proviamo che $\delta_k u - u \in \mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$ ed inoltre

$$\lim_{k \to +\infty} \delta_k u = u \qquad \text{in} \qquad \mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega).$$

Sia $r = [r] + \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Il caso $r \in \mathrm{N}_o$ si deduce con ragionamenti analoghi.

Intanto, per le ipotesi poste sulle funzioni δ_k si ha:

$$\| \delta_k u - u \|^p_{\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq [r]} \int_\Omega \rho^{sp}(x) \, |\partial^\alpha [u(\delta_k - 1)]|^p \, dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = [r]} \iint_M \rho^{sp}(x) \frac{|\partial^\alpha [u(\delta_k - 1)](x) - \partial^\alpha [u(\delta_k - 1)](y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} \, dx\, dy \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq [r]} \int_\Omega \rho^{sp}(x) \, |\partial^\alpha u|^p \, dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = [r]} \sum_{\beta \leq \alpha} \left[\iint_M \rho^{sp}(x) \, |\partial^\beta \delta_k(x)|^p \frac{|\partial^{\alpha-\beta} u(x) - \partial^{\alpha-\beta} u(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} \, dx\, dy + \right.$$

$$\left. + \iint_M \rho^{sp}(x) \, |\partial^{\alpha-\beta} u(y)|^p \frac{|\partial^\beta \delta_k(x) - \partial^\beta \delta_k(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} \, dx\, dy \right] \leq c_2 \| u \|^p_{\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)}.$$

D'altra parte si ha:

$$\rho^{sp}(x) \, |\partial^\alpha [u(\delta_k - 1)]|^p \leq c_1 \sum_{\beta \leq \alpha} \rho^{sp} \, |\partial^{\alpha-\beta} u(x)|^p \in \mathrm{L}^1(\Omega);$$

$$\rho^{sp}(x) \frac{|\partial^\alpha [u(\delta_k - 1)](x) - \partial^\alpha [u(\delta_k - 1)(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} \leq$$

$$\leq c_2 \left[\varphi_\alpha(x, y) + \sum_{\beta \leq \alpha} \rho^{sp}(x) \frac{|\partial^{\alpha-\beta} u(x) - \partial^{\alpha-\beta} u(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} \right] \in \mathrm{L}^1(\mathrm{M}),$$

dove, fissato $R > 0$, si è posto:

$$\varphi_\alpha(x,y) = \begin{cases} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \rho^{sp}(x) \, | \, \partial^{\alpha-\beta} u(y) \, |^p & \forall (x,y) \in M \cap \{(x,y) \, | \, |x-y| > R\}, \\ \sum_{\beta \leqslant \alpha} \rho^{sp}(x) \dfrac{|\partial^{\alpha-\beta} u(y)|^p}{|x-y|^{n+\lambda p}} & \forall (x,y) \in M \cap \{(x,y) \, | \, |x-y| < R\}. \end{cases}$$

Pertanto, essendo lecito il passaggio al limite sotto il segno d'integrale, risulta

$$\lim_{k \to +\infty} \| \delta_k u - u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} = 0$$

Inoltre dal lemma 1.2 segue che $\delta_k u \in W^{r,p}(\Omega)$ e poiché $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ è denso in $W^{r,p}(\Omega)$ esisterà una successione $(u_n^k)_{n \in N} \subset \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ tale che

$$\lim_n \| u_n^k - \delta_k u \|_{W^{r,p}(\Omega)} = 0$$

In virtù del lemma 1.2, $\forall\, k \in N$ e $\forall\, n \in N$ avremo:

$$\| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \leq c_k \| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|_{W^{r,p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_k \| u_n^k - \delta_k u \|_{W^{r,p}(\Omega)}$$

da cui:

$$\lim_{n \to \infty} \| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} = 0 \qquad \forall\, k \in N.$$

Dunque $\forall\, k \in N$, $\exists\, n_k$ tale che:

$$\| \delta_k u_{n_k}^k - \delta_{n_k}^2 u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} < \frac{1}{k},$$

da cui, posto $\mu_k = \delta_k u_{n_k}^k$ in virtù della condibione b_2) risulta, $\forall k \in N$:

$$\| \mu_k - u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \leq \| \mu_k - \delta_k^2 u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} + \| \delta_k^2 u - \delta_k u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} +$$

$$+ \| \delta_k u - u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} < \frac{1}{k} + c \| \delta_k u - u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} + \| \delta_k u - u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} <$$

$$< \frac{1}{k} + c_1 \| \delta_k u - u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)}$$

con $c = \max_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha^p$ da cui l'asserto.

2. Un teorema di isomorfismo.

Premettiamo il seguente:

LEMMA 2.1. — *Siano* $s,\ t \in \mathbb{R},\ \lambda \in]0, 1[$. *Per ogni* $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ *si ha*:

$$\mathrm{M}_{s+t}^{\lambda,p}(u) \leq c\,(\mathrm{M}_{s}^{\lambda,p}(\rho^t u) + \| u \|^p_{\mathrm{L}^p_{s+t-\lambda}(\Omega)}), \tag{2.1}$$

dove c *è una costante indipendente da* u.

Dim. Intanto si ha:

$$\mathrm{M}_{s+t}^{\lambda,p}(u) = \int\!\!\int_{\mathrm{M}} \rho^{sp}(x)\, \frac{|\rho^t(x)\,u(x) - \rho^t(x)\,u(y)|^p}{|x-y|^{n+\lambda p}}\, dx\, dy \leq$$

$$\leq c_1 \left(\mathrm{M}_{s}^{\lambda,p}(\rho^t u) + \int\!\!\int_{\mathrm{M}} \rho^{ps}(x)\, |u(y)|^p\, \frac{|\rho^t(x) - \rho^t(y)|^p}{|x-y|^{n+\lambda p}}\, dx\, dy \right).$$

Posto:

$$\mathrm{M}_1 = \{(x, y) \in \mathrm{M} \mid |x - y| < \rho(x)\}, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{M}_2 = \{(x, y) \in \mathrm{M} \mid |x - y| > \rho(x)\}, \tag{2.3}$$

e tenuto conto della relazione:

$$|a^\tau - b^\tau| \leq |\tau|\,(a^{\tau-1} + b^{\tau-1})\,|a - b|,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \forall\, \tau \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

si ha:

$$\int\!\!\int_{\mathrm{M}_1} \rho^{sp}(x)\, |u(y)|^p\, \frac{|\rho^t(x) - \rho^t(y)|^p}{|x-y|^{n+\lambda p}}\, dx\, dy \leq$$

$$\leq c_2 \int_\Omega \rho^{(s+t-1)p}(x)\, |u(x)|^p\, dx \int_{|y-x|<\rho(x)} \frac{dx}{|x-y|^{n+\lambda p-p}} =$$

$$= c_3 \int_\Omega \rho^{(s+t-1)p}(x)\, |u(x)|^p\, dx \int_0^{\rho(x)} t^{(1-\lambda)p-1}\, dt =$$

$$= c_3 \int_\Omega \rho^{(s+t-\lambda)p}(x)\, |u(x)|^p\, dx.$$

Inoltre:

$$\iint_{M_2} \rho^{sp}(x) \mid u(y) \mid^p \frac{\mid \rho^t(x) - \rho^t(y) \mid^p}{\mid x - y \mid^{n+\lambda p}} \, dx \, dy \leq$$

$$\leq c_4 \int_\Omega \rho^{(s+t)p}(x) \mid u(x) \mid^p dx \int_{\rho(x)}^{+\infty} t^{-\lambda p - 1} \, dt = c_5 \int_\Omega \rho^{(s+t-\lambda)p}(x) \mid u(x) \mid^p dx$$

da cui l'asserto.

TEOREMA 2.1. — *Qualunque siano* $r \in \bar{R}_+$, $s, t \in R$, *l'applicazione* $\sigma_t : u \to \rho^t u$, *definita in* $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ *si prolunga per continuità in un isomorfismo (che continuiamo ad indicare con* σ_t*) algebrico e topologico di* $W_s^{r,p}(\Omega)$ *su* $W_{s-t}^{r,p}(\Omega)$.

Dim. Evidentemente, è sufficiente provare che esiste una costante c tale che:

$$\| \rho^t u \|_{W_{s-t}^{r,p}(\Omega)} \leq c \| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}). \tag{2.5}$$

Se $r \in N_o$, si ha:

$$\| \rho^t u \|_{W_{s-t}^{r,p}(\Omega)} \leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{\beta \leq \alpha} \| \rho^{s-t} \partial^{\alpha-\beta} \rho^t \partial^\beta u \|_{L^p(\Omega)},$$

da tale relazione e dalle proprietà C_3) segue la 2.5.

Se $r = k + \lambda$, $k \in N_o$ e $\lambda \in]0, 1[$, si ha, in conseguenza della (2.5) per $r = k$, del lemma 2.1 e della proprietà C_3)

$$\| \rho^t u \|^p_{W_{s-t}^{r,p}(\Omega)} = \| \rho^t u \|^p_{W_{s-t}^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} M_{s-t}^{\lambda,p}(\partial^\alpha (\rho^t u)) \leq$$

$$\leq c_2 \left(\| u \|^p_{W_s^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \left(M_{s-t}^{\lambda,p}(\rho^t \partial^\alpha u) + \sum_{\beta<\alpha} M_{s-t}^{\lambda,p}(\partial^{\alpha-\beta}(\rho^t \partial^\beta u)) \right) \right) \leq$$

$$\leq c_3 \left(\| u \|^p_{W_s^{r,p}(\Omega)} + \sum_{\beta<\alpha} M_o^{\lambda,p}(\rho^{s-t} \partial^{\alpha-\beta} \rho^t \partial^\beta u) \right).$$

D'altra parte da noti risultati sugli spazi $W^{r,p}(\Omega)$ ed ancora dalla C_3) si ha:

$$M_o^{\lambda,p}(\rho^{s-t} \partial^{\alpha-\beta} \rho^t \partial^\beta u) \leq \| \rho^{s-t} \partial^{\alpha-\beta} \rho^t \partial^\beta u \|^p_{W^{\lambda,p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_4 \| \rho^{s-t} \partial^{\alpha-\beta} \rho^t \partial^\beta u \|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c_5 \| u \|^p_{W_s^{k,p}(\Omega)}.$$

Dalle precedenti relazioni si deduce la (2.5).

Come ovvia conseguenza del teorema 2.1 e della b) del lemma 1.2 si ha:

COROLLARIO 2.1. — *Qualunque siano* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $s \in \mathrm{R}$, l'applicazione $\sigma_s : \to \rho^s$ *u definisce un isomorfismo algebrico e topologico di* $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$ *su* $\mathrm{W}^{r,p}(\Omega)$ *il cui isomorfismo inverso è* σ_{-s}.

Dal corollario 2.1 segue immediatamente che $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$ è uno spazio completo, separabile e riflessivo.

3. **Spazi di moltiplicatori e teoremi di immersione.**

Per ogni $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, indicheremo con $\mathrm{A}^r(\Omega)$:

— lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\partial^\alpha \varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ per $|\alpha| \leq r$, munito della norma:

$$\| \varphi \|_{\mathrm{A}^r(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq r} \| \partial^\alpha \varphi \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$$

se $r \in \mathrm{N}_0$;

— lo spazio delle $\varphi \in \mathrm{A}^k(\Omega)$ e tali che:

$$\Delta_{\alpha,\lambda}(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} dy < +\infty \quad \text{per} \quad |\alpha| = k$$

munito della norma:

$$\| \varphi \|_{\mathrm{A}^r(\Omega)} = \| \varphi \|_{\mathrm{A}^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \Delta_{\alpha,\lambda}(\varphi)$$

se $r = k + \lambda$, $k \in \mathrm{N}_0$ e $\lambda \in]0, 1[$.

Per ogni $\varphi \in \mathrm{A}^r(\Omega)$ porremo:

$$\mathrm{A}^r(\varphi) = \| \varphi \|_{\mathrm{A}^r(\Omega)} - \| \varphi \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}.$$

Vale il seguente lemma, la cui dimostrazione è immediata:

Lemma 3.1. — *Siano* $r, r' \in \bar{\mathrm{R}}_+$.

1) *Per* $r' < r$ *sussiste l'inclusione algebrica e topologica:*

$$\mathrm{A}^r(\Omega) \subset \mathrm{A}^{r'}(\Omega);$$

2) $A^r(\Omega)$ *è uno spazio di moltiplicatori per* $W^{r,p}(\Omega)$;

3) *se* $r = k + \lambda$, $k \in N_0$ *e* $0 < \lambda \leq 1$ *per ogni* $\varphi \in A^r(\Omega)$ *e per ogni* $u \in W^{r,p}(\Omega)$ *si ha*:

$$\| \varphi u \|_{W^{r,p}(\Omega)} \leq c \left(\sup_{x \in \Omega} | \varphi(x) | \; \| u \|_{W^{r,p}(\Omega)} + A_r(\varphi) \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \right)$$

con c *costante indipendente da* u *e da* φ .

Dal lemma 3.1 e dal corollario 2.1 si deduce in modo ovvio il seguente:

TEOREMA 3.1. — *Qualunque siano* $r \in \bar{R}_+$ *e* $s \in R$, $A^r(\Omega)$ *è uno spazio di moltiplicatori per* $W_s^{r,p}(\Omega)$. *Inoltre, se* $r = k + \lambda$ *con* $k \in N_0$ *e* $0 < \lambda \leq 1$, *per ogni* $\varphi \in A^r(\Omega)$ *e per ogni* $u \in W_s^{r,p}(\Omega)$ *si ha*:

$$\| \varphi u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \leq c \left(\sup_{x \in \Omega} | \varphi(x) | \; \| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} + A_r(\varphi) \| u \|_{W_s^{k,p}(\Omega)} \right) ,$$

dove c *è una costante indipendente da* φ *e da* u .

Proviamo il seguente:

TEOREMA 3.2. — *Qualunque siano* $r \in \bar{R}_+$ *e* $s \in R$ *si ha*:

1) *Per ogni* $\alpha \in N_0^n$ *l'applicazione* $u \to \partial^\alpha u$ *è continua da* $W_s^{r+|\alpha|,p}(\Omega)$ *in* $W_s^{r,p}(\Omega)$;

2) *Per ogni* $\tau, \eta \in \bar{R}_+$, *sussiste l'inclusione algebrica e topologica*:

$$W_{s+\eta}^{r+\tau,p}(\Omega) \subset W_s^{r,p}(\Omega) .$$

Dim. Per provare la 1), cominciamo con l'osservare che esistono delle costanti $c_{\alpha\beta}$ tali che per ogni coppia di distribuzioni f e g si ha:

$$f \cdot \partial^\alpha g = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} \, \partial^{\alpha-\beta} (\partial^\beta f \cdot g) .$$

Osserviamo inoltre che in conseguenza della proprietà c_3) si ha, qualunque siano $\alpha \in N_0^n$, $r \in \bar{R}_+$ *e* $s \in R$:

$$\rho^{-s} \, \partial^\alpha \rho^s \in A^r(\Omega) .$$

Si ha quindi [4]:

$$\| \partial^\alpha u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \sim \| \rho^s \partial^\alpha u \|_{W^{r,p}(\Omega)} \leq c_1 \sum_{\beta \leq \alpha} \| \partial^{\alpha-\beta} (\partial^\beta \rho^s \cdot u) \|_{W^{r,p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \| (\rho^{-s} \partial^\beta \rho^s) \rho^s u \|_{W^{r+|\alpha|,p}(\Omega)} \leq c_3 \| \rho^s u \|_{W^{r+|\alpha|,p}(\Omega)} \sim \| u \|_{W_s^{r+|\alpha|,p}(\Omega)} ,$$

da cui si deduce la tesi 1).

La 2) consegue ovviamente da noti risultati di immersione negli ordinari spazi di Sobolev e dal corollario 2.1.

Vogliamo ora dare un teorema di immersione compatta, al quale premettiamo il seguente lemma:

LEMMA 3.2. — *Sia* Ω *dotato della proprietà di cono* [5] *se* Ω *è limitato, della uniforme proprietà di cono se è non limitato; se* $r \in \bar{R}_+$, $s \in R$, $\tau \in R_+$ *allora per ogni* $\varepsilon \in R_+$ *esiste una costante* $c(\varepsilon)$ *tale che*:

$$\| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \| u \|_{W_s^{r+\tau,p}(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|_{L_s^p(\Omega)} ,$$

per ogni $u \in W_s^{r+\tau,p}(\Omega)$.

L'asserto è notoriamente vero per $s = 0$; da ciò e dal corollario 2.1 si deduce ovviamente la tesi anche per $s \neq 0$.

TEOREMA 3.3. — *Sia* Ω *come nel lemma* 3.2 *e sia* $\rho(x)$ *divergente all'infinito se* Ω *non è limitato. Se* $r \in \bar{R}_+$, $t, \eta \in R_+$ *e* $r + \tau \geq 1$, *allora l'immersione*

$$W_{s+\eta}^{r+\tau,p}(\Omega) \hookrightarrow W_s^{r,p}(\Omega)$$

è compatta.

[4] Se X e Y sono due spazi di Banach e $F : f \in X \to F(f) = g \in Y$, col simbolo $\| f \|_X \sim \| g \|_Y$ intenderemo che esistono due costanti positive c_1 e c_2 per le quali risulta

$$c_1 \| f \|_X \leq \| g \|_Y \leq c_2 \| f \|_X , \quad \forall f \in X .$$

[5] Diremo che Ω ha la proprietà di cono se esiste un cono finito tale che ogni $x \in \Omega$ è vertice di un cono finito C_x contenuto in Ω e congruente a C.

Diremo che Ω ha l'uniforme proprietà di cono se esiste un ricoprimento localmente finito $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ di Ω ed una corrispondente successione $\{c_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ di coni finiti, ciascuno congruente ad un qualche cono finito C tali che:

c_1) $\exists$ $M > 0$ tale che diam $\mathcal{U}_j \leq M$; $\forall j \in N$,

c_2) $\exists$ $\delta > 0$ tale che $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{U}_j \supset \Omega_\delta = \{X \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$;

c_3) $\forall j$, $\bigcup_{x \in \Omega \cap \mathcal{U}_j} (x + C_j) = Q_j \subset \Omega$;

c_4) Esiste $R \in N$ tale che l'intersezione di $R + 1$ insiemi Q_j è vuota.

Dim. Dal lemma 2.7 di [2] e dalla 2) del teorema 3.2 si deduce intanto che l'immersione $W_{s+\eta}^{r+\tau,p}(\Omega) \hookrightarrow L_s^p(\Omega)$ è compatta. Se allora $\{u_n\}_{n\in N}$ è una successione limitata in $W_{s+\eta}^{r+\tau,p}(\Omega)$ da essa si può estrarre una sottosuccessione $\{u_n'\}_{n\in N}$ convergente in $L_s^p(\Omega)$.

D'altra parte per il lemma 3.2 si ha, per ogni $\varepsilon \in R_+$:

$$\| u_n' - u_m' \|_{W_s^{r,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \| u_n' - u_m' \|_{W_{s+\eta}^{r+\tau,p}(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u_n' - u_m' \|_{L_s^p(\Omega)},$$

da cui si ricava immediatamente la convergenza della successione $\{u_n'\}_{n\in N}$ *in* $W_s^{r,p}(\Omega)$.

4. **Spazi di tracce.**

In questo numero supporremo che Ω gode della seguente proprietà:

α) è possibile ricoprire $\partial\Omega$ con una famiglia finita $(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ di sottoinsiemi aperti $\mathcal{U}_i$ di R^n in modo che per ogni $i \in \mathcal{I}$ esista un omeomorfismo $x \to y = \varphi_i(x)$ di classe $C^\infty(\bar{\mathcal{U}}_i)$ di $\bar{\mathcal{U}}_i$ sulla chiusura $\bar{B}_i$ di un aperto convesso B_i di R^n tale che:

1) $\sigma_i = \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \partial\Omega) = B_i \cap \{y \in R^n \mid y_n = 0\}$ e $\Sigma_i = \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \Omega) = B_i \cap \{y \in R^n \mid y_n > 0\}$;

2) $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ è limitato per ogni $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$;

3) $\exists\, \delta \in R_+$, tale che

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{U}_i \supset \{x \in R^n \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\};$$

4) se $(\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{in})$, $(\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in})$ denotano le componenti di φ_i e $\psi_i = \varphi_i^{-1}$ rispettivamente, allora esiste $M \in R_+$ tale che per ogni $\alpha \in N^n$ e per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ si abbia:

$$|\partial^\alpha \varphi_{ij}(x)| \leq M \qquad \forall x \in \mathcal{U}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$|\partial^\alpha \psi_{ij}(y)| \leq M \qquad \forall y \in B_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Osserviamo che la proprietà α) implica l'uniforme proprietà di cono se Ω è non limitato, la proprietà di cono se Ω è limitato. Nel seguito supporremo che Ω goda della proprietà α) e che si abbia $\rho(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Se g è una funzione definita su $\partial\Omega$ e tale che supp $g \subset \mathcal{U}_i \cap \partial\Omega$, indicheremo con $\psi_i^*(g)$ la funzione:

$$y' \in R^{n-1} \longrightarrow \begin{cases} g(\psi_i(y', 0)) & \text{se } (y', 0) \in \sigma_i \\ 0 & \text{se } (y', 0) \notin \sigma_i. \end{cases}$$

Consideriamo ora una partizione dell'unità su $\partial\Omega$ subordinata al ricoprimento $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, mediante le funzioni $\{\Theta_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ di classe $C^\infty(\partial\Omega)$ e tali che supp $\Theta_i \subset \mathcal{U}_i \cap \partial\Omega \ \forall\, i \in \mathcal{I}$.

Siano $r \in R$, $1 < p < +\infty$; denoteremo con $W^{r,p}(\partial\Omega)$ lo spazio delle funzioni g definite su $\partial\Omega$ tali che $\psi_i^*(\Theta_i g) \in W^{r,p}(R^{n-1})$ per ogni $i \in \mathcal{I}$, munito della norma

$$\| g \|_{W^{r,p}(\partial\Omega)} = \Big(\sum_{i\in\mathcal{I}} \| \psi_i^*(\Theta_i g) \|^p_{W^{r,p}(R^{n-1})}\Big)^{1/p}.$$

È facile verificare che tale definizione non dipende dalla scelta del ricoprimento $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, degli omeomorfismi φ_i e dalla partizione dell'unità $\{\Theta_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Invece la norma dipende da tali scelte, ma norme diverse risultano equivalenti.

Nel seguito, posto $\rho_0 = \rho_{|\partial\Omega}$, per ogni $r \in R$, $s \in R$, $1 < p < +\infty$, denoteremo con $W_s^{r,p}(\partial\Omega)$ lo spazio delle funzioni g definite su $\partial\Omega$ tali che $\rho_0^s g \in W^{r,p}(\partial\Omega)$ munito della norma

$$\| g \|_{W_s^{r,p}(\partial\Omega)} = \| \rho_0^s g \|_{W^{r,p}(\partial\Omega)}.$$

Indicata con ν la normale *a* $\partial\Omega$ orientata verso l'interno di Ω porremo

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{\partial\Omega}$$

e per ogni r, $1/p < r < +\infty$, indicato con r^* il più grande intero $< r - 1/p$,

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{r^*} u).$$

Sussiste il seguente teorema di tracce:

TEOREMA 4.1. — *Siano* $1 < p < +\infty$, $r \in \,]1/p, +\infty[$, $r - 1/p \in R - N$, $s \in R$. *L'applicazione* $u \to \gamma u$ *definita su* $\mathcal{D}(\bar\Omega)$, *si prolunga per continuità in un'applicazione che denotiamo ancora con* $u \to \gamma u$ *lineare e continua da* $W_s^{r,p}(\Omega)$ *su* $\prod_{j=0}^{r^*} W_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)$ *e dotata di un rilevamento lineare e continuo.*

Dim. Sia intanto $s = 0$. In tal caso l'asserto, notoriamente vero se $\Omega = R^n_+$ (cfr. [19]), si estende facilmente per carte locali al caso generale.

Sia ora $s \in R$ e sia $u \in \mathcal{D}(\bar\Omega)$. Si ha intanto per il corollario 2.1:

$$\| \gamma_0 u \|_{W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)} = \| \rho_0^s \gamma_0 u \|_{W^{r-1/p,p}(\partial\Omega)} = \tag{4.1}$$

$$= \| \gamma_0 \rho^s u \|_{W^{r-1/p,p}(\partial\Omega)} \le c_1 \| \rho^s u \|_{W^{r,p}(\Omega)} \le c_2 \| u \|_{W_s^{r,p}(\Omega)}$$

inoltre, per $1 \leq j \leq r^*$, risulta:

$$(4.2) \qquad \| \gamma_j u \|_{W_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} = \| \rho_o^s \gamma_j u \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq$$

$$\leq c_1 \left(\| \gamma_j \rho^s u \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} + \sum_{h<j} \| \gamma_{j-h} \rho^s \gamma_h u \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} \right) \leq$$

$$\leq c_2 \left(\| \rho^s u \|_{W^{r,p}(\partial\Omega)} + \sum_{h<j} \| \gamma_{j-h} \rho^s \cdot \gamma_h u \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} \right) \leq$$

$$\leq c_3 \left(\| u \|_{W_s^{r,p}(\partial\Omega)} + \sum_{h<j} \| \gamma_{j-h} \rho^s \gamma_h u \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} \right).$$

D'altra parte per le ipotesi poste sulla funzione peso $\rho(x)$ e sul dominio Ω si ha:

$$(4.3) \qquad \sum_{h<j} \| \gamma_{j-h} \rho^s \cdot \gamma_h u \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq c_4 \sum_{h<j} \| \rho_o^s \gamma^h u \|_{W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)}$$

Da (4.1), (4.2) e (4.3) segue che:

$$(4.4) \qquad \| \gamma_j u \|_{W_s^{r-j-1/p}(\partial\Omega)} \leq c \| u \|_{W_s^{r,p}(\partial\Omega)}$$

per ogni $0 \leq j \leq r^*$ e per ogni $u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega})$.

D'altra parte dal teorema 1.1. segue che la (4.4) è valida per ogni $u \in W_s^{r,p}(\Omega)$.

Assegniamo ora $(g_o, \ldots, g_{r^*}) \in \prod_{j=o}^{r^*} W_s^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)$; poiché risulta $\rho_o^s g_j \in W^{r-j-1/p,p}(\partial\Omega)$, esiste $v_j \in W^{r,p}(\Omega)$ tale che:

$$\gamma_k v_j = \begin{cases} \rho_o^s g_j & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j, \end{cases}$$

per ogni j, $k = 0, \ldots, r^*$.

D'altra parte, posto $u_j = \rho^{-s}(x) v_j(x)$, risulta, in virtù del corollario 2.1, $u_j \in W_s^{r,p}(\Omega)$ ed inoltre

$$\gamma_j u_j = g_j \text{ per ogni } j = 0, \ldots, r^*.$$

Inoltre per la proprietà α) si può determinare un $\delta \in R_+$ tale che $\forall z \in \Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$ esiste $x \in \partial\Omega$ e $t \in]0, \delta[$ per i quali risulta $z = x + \vec{n} t$ ed inoltre il punto $x + \vec{n} h t \in \Omega$ per $h = 1, \ldots, r^* + 1$, avendo indicato con $\vec{n}$ il versore della normale interna a $\partial\Omega$ in x.

Ha senso perciò porre, per ogni $z \in \Omega_\delta$:

$$u(z) = \tilde{u}(x + \vec{n}\, t) = \sum_{j=0}^{r^*} \sum_{h=1}^{r^*+1} c_{hj}\, u_j(x + \vec{n}\, h\, t)$$

con

$$\sum_{h=1}^{r^*+1} h^k\, c_{hj} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = j \\ 0 & \text{se} \quad k \neq j\,, \end{cases}$$

per $0 \leq k \leq r^*$.

D'altra parte si verifica facilmente che

$$\gamma_k u = \frac{\partial^k}{\partial t^k} \tilde{u}(x + \vec{n}\, t)_{/t=0} = \sum_{j=0}^{r^*} \gamma_k\, u_j \sum_{h=1}^{r^*+1} h^k\, c_{hj} = g_k\,,$$

per $0 \leq k \leq r^*$.

Siano ora δ_1, $\delta_2 \in R_+$ con $\delta_1 < \delta_2 < \delta$. Per la 3) della condizione α esiste una funzione $\chi(x)$ appartenente a $C^\infty(\bar{\Omega})$ e tale che:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega_{\delta_1} \\ 0 & \text{in } \Omega \backslash \Omega_{\delta_2}\,, \end{cases}$$

e

$$|\, \partial^\alpha \chi(x)\,| \leq M \qquad \forall\, 0 \leq |\,\alpha\,| \leq [r] + 1\,, \qquad \forall\, x \in \Omega\,.$$

Posto allora

$$v = \begin{cases} \chi\, u & \text{in } \Omega_\delta \\ 0 & \text{in } \Omega / \Omega_\delta\,, \end{cases}$$

risulta $v \in W_s^{r,p}(\Omega)$ e $\gamma_k v = g_k$, $0 \leq k \leq r^*$.
Ne segue ovviamente la tesi.

5. Gli spazi $W_s^{[r]+\lambda,p}(\Omega)$ come spazi di interpolazione.

Ci proponiamo ora di mostrare come per ogni $r \in R_+$, $r = [r] + \lambda$, $0 < \lambda < 1$, $W_s^{r,p}(\Omega)$ può essere considerato come spazio « intermedio » tra $W_s^{[r]+1,p}(\Omega)$ e $W_s^{[r],p}(\Omega)$. Poiché faremo riferimento agli spazi di interpolazione definiti col metodo delle tracce (cfr. [8]), ne richiamiamo brevemente la definizione.

Siano X e Y due spazi di Banach contenuti in uno stesso spazio vettoriale topologico A con immersione continua e siano $p > 1, \alpha \in R$ tali che $0 < \frac{1}{p} + \alpha < 1$.

Denoteremo con $X + Y$ lo spazio degli elementi $a \in A$ tali che $a = x + y$ con $x \in X$ e $y \in Y$ munito della norma:

$$\| a \|_{X+Y} = \inf \{ \| x \|_X + \| y \|_Y \},$$

dove l'inferiore è preso al variare di x in X e y in Y in modo che $a = x + y$.

Denoteremo inoltre con W lo spazio delle (classi di) funzioni $t \to f(t)$ definite in $]0, + \infty[$ ed a valori in $X + Y$ tali che [6]:

$$t^\alpha f(t) \in L^p(0, + \infty, X), \quad t^\alpha \frac{df}{dt} \in L^p(0, + \infty, Y),$$

dove la derivazione è fatta nel senso delle distribuzioni a valori vettoriali (cfr. [14], [15]), normalizzato ponendo:

$$\| f \|_W = \max \left\{ \| t^\alpha f \|_{L^p(0,+\infty,X)}, \left\| t^\alpha \frac{df}{dt} \right\|_{L^p(0,+\infty,Y)} \right\}.$$

Con tale norma W è uno spazio di Banach ed inoltre ha senso in $X + Y$ la traccia $f(0)$ per ogni $f \in W$. Posto $\vartheta = \frac{1}{p} + \alpha$ indicheremo con $T(p, \vartheta, X, Y)$ lo spazio descritto da $f(0)$ al variare di f in W normalizzato ponendo:

$$\| u \|_{T(p,\vartheta,X,Y)} = \inf_{u=f(0)} \| f \|_W .$$

Con tale definizione $T(p, \vartheta, X, Y)$ risulta uno spazio di interpolazione tra X e Y.

[6] Se B è uno spazio di Banach, denoteremo con $L^p(0, + \infty, B)$ lo spazio delle funzioni di potenza p-esima sommabile e a valori in B. Ricordiamo che tale spazio è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\| u \|_{L^p(0,+\infty,B)} = \left(\int_0^{+\infty} \| u(x) \|_B^p \, dx \right)^{1/p}$$

Nell'ipotesi che Ω gode della proprietà α si hanno allora i seguenti risultati:

TEOREMA 5.1. — *Siano* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $r = [r] + \lambda$, $0 < \lambda < 1$, $1 < p < +\infty$. *Allora risulta*:

$$\mathrm{W}^{r,p}(\Omega) \sim \mathrm{T}(p, 1-\lambda, \mathrm{W}^{[r]+1,p}(\Omega), \mathrm{W}^{[r],p}(\Omega)). \tag{5.1}$$

Dim. Osserviamo che nelle ipotesi poste su Ω esiste un operatore lineare e continuo P_1 da $\mathrm{L}^p(\Omega)$ in $\mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n)$ tale che se $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ risulta

$$\mathrm{P}_1 u(x) = u(x) \qquad \text{q.o. in } \Omega,$$

e se $0 < \lambda < 1$ ed $u \in \mathrm{W}^{\lambda,p}(\Omega)$ allora $\mathrm{P}_1 u \in \mathrm{W}^{\lambda,p}(\mathrm{R}^n)$ ed inoltre

$$\| \mathrm{P}_1 u \|_{W^{\lambda,p}(\mathrm{R}^n)} \leq c \| u \|_{\mathrm{W}^{\lambda,p}(\Omega)},$$

con c costante indipendente da u.

Tale risultato, vero se $\Omega = \mathrm{R}^n_+$ (cfr. [1]) si dimostra nel nostro caso ragionando « per carte locali ».

In maniera analoga dal lemma 2.1 di [10] e dal teorema 3.1 del cap. I di [8] si dimostra che esiste un operatore lineare e continuo P_2 da $\mathrm{L}^p(\Omega)$ in $\mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n)$ tale che se $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ risulta

$$\mathrm{P}_2 u(x) = u(x) \qquad \text{q.o in } \Omega,$$

e se $u \in \mathrm{T}(p, 1-\lambda, \mathrm{W}^{1,p}(\Omega), \mathrm{L}^p(\Omega))$ si ha:

$$\| \mathrm{P}_2 u \|_{\mathrm{T}(p,1-\lambda,\mathrm{W}^{1,p}(\mathrm{R}^n),\mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n))} \leq c \| u \|_{\mathrm{T}(p,1-\lambda,\mathrm{W}^{1,p}(\Omega),\mathrm{L}^p(\Omega))}$$

dove c è una costante indipendente da u.

Dall'esistenza di tali operatori e dal fatto che la (5.1) è vera per $\Omega = \mathrm{R}^n$ e $0 < r < 1$ (cfr. prop. 1.6 di [10]) si deduce con noti ragionamenti l'asserto nel caso $0 < r < 1$. Estendendo allora al nostro caso i ragionamenti tenuti in [10] per dimostrare la prop. 2.4 si ottiene la tesi.

Dal corollario 2.1, dal teorema 5.1 e dal teorema 3.1 del cap. I di [8] si deduce il seguente corollario:

COROLLARIO 5.1. — *Siano* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $r = [r] + \lambda$, $0 < \lambda < 1$, $s \in \mathrm{R}$, $1 < p < +\infty$. *Allora* $\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega)$ *è uno spazio di interpolazione tra* $\mathrm{W}_s^{[r]+1,p}(\Omega)$ *e* $\mathrm{W}_s^{[r],p}(\Omega)$ *cioè risulta*

$$\mathrm{W}_s^{r,p}(\Omega) \sim \mathrm{T}(p, 1-\lambda, \mathrm{W}_s^{[r]+1,p}(\Omega), \mathrm{W}_s^{[r],p}(\Omega)).$$

6. **Dualità ed interpolazione negli spazi** $W_s^{r,p}$.

Siano $r \in \bar{R}_+$, $s \in R$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; indicheremo con $\overset{\circ}{W}{}^{r,p}(\Omega)$ $(\overset{\circ}{W}{}_s^{r,p}(\Omega))$ le chiusure di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in $W^{r,p}(\Omega)$ $(W_s^{r,p}(\Omega))$ e porremo poi per definizione

$$W^{-r,p}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}^{r,p'}(\Omega))', \quad W_s^{-r,p}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}_{-s}^{r,p'}(\Omega))'.$$

Nel seguito supporremo $\rho(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

TEOREMA 6.1. — *L'applicazione* $u \to \rho^s u$ *è un isomorfismo algebrico e topologico di* $W_s^{-r,p}(\Omega)$ *su* $W^{-r,p}(\Omega)$ *il cui isomorfismo inverso è* $u \to \rho^{-s} u$.

Dim. Siano $u \in W_s^{-r,p}(\Omega), \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{r,p'}(\Omega)$; risulta

$$| < \rho^s u, \varphi > | = | < u, \rho^s \varphi > | \leq \| u \|_{W_s^{-r,p}(\Omega)} \| \rho^s \varphi \|_{\overset{\circ}{W}{}_{-s}^{r,p'}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c \| u \|_{W_s^{-r,p}(\Omega)} \| \varphi \|_{\overset{\circ}{W}{}^{r,p'}(\Omega)} ;$$

d'altra parte se $u \in W^{-r,p}(\Omega), \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_{-s}^{r,p'}(\Omega)$ si ha:

$$| < \rho^{-s} u, \varphi > | = | < u, \rho^{-s} \varphi > | \leq \| u \|_{W^{-r,p}(\Omega)} \| \rho^{-s} \varphi \|_{\overset{\circ}{W}{}^{r,p'}(\Omega)} \leq$$

$$\leq \| u \|_{W^{-r,p}(\Omega)} \| \varphi \|_{\overset{\circ}{W}{}_{-s}^{r,p'}(\Omega)} ,$$

da cui l'asserto.

TEOREMA 6.2. — *Siano* $r \in \bar{R}_+$, $r = [r] + \lambda$, $0 < \lambda < 1$, $p > 1$, $r - 1/p \notin N$; *allora*

$$W_s^{-r,p}(\Omega) \sim T(p, \lambda, W_s^{-[r],p}(\Omega), W_s^{-[r]-1,p}(\Omega)) \tag{6.1}$$

Dim. Intanto si ha:

$$\overset{\circ}{W}{}^{r,p}(\Omega) \sim T(p, 1 - \lambda, \overset{\circ}{W}{}^{[r]+1,p}(\Omega), \overset{\circ}{W}{}^{[r],p}(\Omega)) ; \tag{6.2}$$

infatti la (6.2), vera per $\Omega = R_+^n$, (cfr. teorema 6.1 di [11]) si dimostra nel nostro caso mediante « carte locali ».

Dalla (6.2) per dualità (cfr. teorema 8.1) del cap. I di [8]) segue:

$$W^{-r,p'}(\Omega) \sim T(p', \lambda, W^{-[r],p'}(\Omega), W^{-[r]-1,p'}(\Omega)) . \tag{6.3}$$

Dalla (6.3) e dal teorema 6.1 segue l'asserto.

Il teorema seguente, dimostrato da V. BENCI e D. FORTUNATO in [2], dà una caratterizzazione esplicita degli elementi di $W_s^{-r,p}(\Omega)$ nel caso $r \in N$.

TEOREMA 6.3. — *Siano* $r \in N$, $s \in R$, $p > 1$; *allora* $W_s^{-r,p}(\Omega)$ *coincide con lo spazio delle distribuzioni* u *su* Ω *tali che*

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \partial^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L_s^p(\Omega), \tag{6.4}$$

munito della norma

$$\| u \|_{W_s^{-r,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \inf \left(\sum_{|\alpha| \leqslant r} \| g_\alpha \|^p_{L^{p}_{s}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le possibili rappresentazioni di u *della forma* (6.4).

Daremo ora due teoremi sugli spazi $W_s^{r,p}(\partial\Omega)$.

TEOREMA 6.4. — *Siano* $r \in R$, $s \in R$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *allora*

$$W_s^{-r,p}(\partial\Omega) \sim (W_{-s}^{r,p'}(\partial\Omega))'.$$

Dim. L'asserto è una conseguenza della proposizione 2.10 di [10] e della definizione degli spazi $W_s^{r,p}(\partial\Omega)$. Notiamo che la proposizione 2.10 è stata dimostrata nel caso in cui Ω è limitato, d'altra parte la proprietà α ci permette di fare una dimostrazione analoga nel caso in cui la frontiera di Ω sia non limitata.

TEOREMA 6.5. — *Siano* $r \in Z$, $0 < \lambda < 1$, $s \in R$, $p > 1$; *allora*

$$W_s^{r+\lambda,p}(\partial\Omega) \sim T(p, 1-\lambda, W_s^{r+1,p}(\partial\Omega), W_s^{r,p}(\partial\Omega))$$

Dim. Per $s = 0$ la dim. è analoga a quella della proposizione 2.11 di [10]. Supponiamo ora $s \neq 0$ e consideriamo l'applicazione $u \to \rho_0^s u$; essa è ovviamente un isomorfismo di $W_s^{r,p}(\partial\Omega)$ su $W^{r,p}(\partial\Omega)$ dunque per il teorema 3.1 del cap. I di [8] essa è un isomorfismo di

$$T(p, 1-\lambda, W_s^{r+1,p}(\partial\Omega), W_s^{r,p}(\partial\Omega)) \text{ su } W^{r+\lambda,p}(\partial\Omega).$$

Perciò si ha che

$$u \in W_s^{r+\lambda,p}(\partial\Omega) \Leftrightarrow \rho_0^s u \in W^{r+\lambda,p}(\partial\Omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u \in T(p, 1-\lambda, W_s^{r+1,p}(\partial\Omega), W_s^{r,p}(\partial\Omega)).$$

7. Gli spazi $H_s^r(\Omega)$ e un ulteriore teorema di isomorfismo.

In questo numero indicheremo con $\rho(x)$ una funzione di $C^\infty(R^n)$ che gode delle seguenti proprietà:

β_1) esistono due costanti positive γ_1 e γ_2 tali che:

$$\gamma_1 \rho(y) \leq \rho(x) \leq \gamma_2 \rho(y) \qquad \forall\, x, y \in R^n \text{ tali che } |x - y| < \rho(x);$$

β_2) esistono c_1 e c_2 tali che:

$$c_1 (1 + |x|^2)^{1/2} \leq \rho(x) \leq c_2 (1 + |x|^2)^{1/2} \qquad \forall\, x \in R^n.$$

Osserviamo che con tali proprietà $\rho(x)$ è una « funzione peso » in R^n del tipo di quelle considerate al n. 1.

Sia ora $r \in R$ porremo:

$$\sigma^r : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$$

$$\sigma^r u = \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{r/2} \hat{u}(\xi)]$$

$$\sigma_r : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$$

$$\sigma_r u = \rho^r(x)\, u(x)$$

dove $\hat{u}(\xi)$ e $\mathcal{F}^{-1}(u)$ denontano rispettivamente la trasformata e l'antitrasformata di Fourier di u, mentre $\mathcal{S}'$ è lo spazio delle distribuzioni temperate su R^n.

Sia inoltre $s \in R$, denoteremo con $H_s^r(R^n)$ lo spazio delle distribuzioni temperate u tali che:

$$\sigma_s \sigma^r u \in L^2(R^n)$$

munito della norma:

$$\| u \|_{H_s^r(R^n)} = \| \sigma_s \sigma^r u \|_{L^2(R^n)}$$

Si verifica facilmente che $H_s^r(R^n)$ è uno spazio di Banach. Notiamo inoltre che per $s = 0$ $H_s^r(R^n)$ è l'ordinario spazio di Sobolev $H^r(R^n)$ [7],

[7] Se $r \in R$, denoteremo con $H^r(R^n)$ lo spazio delle distribuzioni temperate $u \in \mathcal{S}'$ tali che:

$$(1 + |\xi|^2)^{r/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(R^n)$$

munito della norma

$$\| u \|_{H^r(R^n)} = \| (1 + |\xi|^2)^{r/2} \hat{u}(\xi) \|_{L^2(R^n)}.$$

mentre per $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$, $H_s^r(R^n)$ coincide con lo spazio introdotto da C. PARENTI in [13].

Nel seguito, per ogni aperto Ω di R^n, indicheremo con $W_s^r(\Omega)$ gli spazi $W_s^{r,2}(\Omega)$ definiti come al n. 1 con la funzione peso $\rho(x)$ uguale alla restrizione di $\rho(x)$ ad Ω se $\Omega \neq R^n$.

TEOREMA 7.1. — *Siano* $r, s \in R$. *Allora risulta* $H_s^r(R^n) \sim W_s^r(R^n)$.

Dim. L'asserto è notoriamente vero nel $s = 0$ (cfr. il teorema 7.63 di [1]).

D'altra parte se $r \in \bar{R}_+$, per la proposizione 2.3 di [13], per l'osservazione 1.1 e per il corollario 2.1 si ha:

$$\| u \|_{H_s^r(R^n)} \sim \| (1 + |x|^2)^{s/2} \sigma^r u \|_{L^2(R^n)} \sim \| (1 + |x|^2)^{s/2} u \|_{H^r(R^n)} \sim$$

$$\sim \| (1 + |x|^2)^{s/2} u \|_{W^{r,2}(R^n)} \sim \| u \|_{W_s^r(R^n)} .$$

La proposizione 2.3 di [13] permette di completare la dimostrazione nel caso $r < 0$.

Nel seguito indicheremo con Ω un aperto di R^n che gode della proprietà α.

Siano $r, s \in R$; denoteremo con $H_s^r(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω restrizioni ad Ω degli elementi di $H_s^r(R^n)$ munito della norma

$$\| u \|_{H_s^r(\Omega)} = \inf_{v|\Omega = u} \| v \|_{H_s^r(R^n)} .$$

Con tale norma $H_s^r(\Omega)$ risulta uno spazio di Banach.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 7.2. — *Siano* $r \in \bar{R}_+$, $s \in R$; *allora risulta* $H_s^r(\Omega) \sim W_s^r(\Omega)$.

Dim. Osserviamo intanto che lo spazio $W^{r,2}(\Omega)$ coincide con l'insieme delle restrizioni ad Ω delle distribuzioni $u \in W^{r,2}(R^n)$.

Tale risultato è stato provato in [10] per un aperto Ω a frontiere limitata; d'altra parte la proprietà α ci permette di dimostrarlo con le stesse tecniche nel caso qui considerato.

In virtù del corollario 2.1 e del teorema 7.1 valgono inoltre le seguenti implicazioni:

$$u \in \mathrm{H}_s^r(\Omega) \Rightarrow \exists\, v \in \mathrm{H}_s^r(\mathrm{R}^n) \mid v_{|\Omega} = u \Rightarrow v \in \mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^s v \in \mathrm{W}^{r,2}(\mathrm{R}^n) \Rightarrow \rho^s_{|\Omega} u = (\rho^s v)_{|\Omega} \in \mathrm{W}^{r,2}(\Omega) \Rightarrow u \in \mathrm{W}_s^r(\Omega),$$

e viceversa:

$$u \in \mathrm{W}_s^r(\Omega) \Rightarrow \rho^s_{|\Omega} u \in \mathrm{W}^{r,2}(\Omega) \Rightarrow \exists\, v \in \mathrm{W}^{2,r}(\mathrm{R}^n) \text{ tale che}$$

$v_{|\Omega} = \rho^s_{|\Omega} u \Rightarrow \rho^{-s} v \in \mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}^n) \sim \mathrm{H}_s^r(\mathrm{R}^n)$ e $u = (\rho^{-s} v)_{|\Omega} \Rightarrow u \in \mathrm{H}_s^r(\Omega)$.

Da ciò segue che

$$u \in \mathrm{H}_s^r(\Omega) \text{ se e solo se } u \in \mathrm{W}_s^r(\Omega).$$

D'altra parte per il corollario 2.1 ed il teorema 7.1 si ha:

$$\| u \|_{\mathrm{H}_s^r(\Omega)} = \inf_{v_{|\Omega}=u} \| v \|_{\mathrm{H}_s^r(\mathrm{R}^n)} \sim \inf_{v_{|\Omega}=u} \| v \|_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}^n)} \sim$$

$$\sim \inf_{v_{|\Omega}=u} \| \rho^s v \|_{\mathrm{W}^{r,2}(\mathrm{R}^n)} \sim \| \rho^s u \|_{\mathrm{W}^{r,2}(\Omega)} \sim \| u \|_{\mathrm{W}_s^r(\Omega)},$$

da cui l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Adams R. A., *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York.

[2] Benci V. - Fortunato D., *Weighted Sobolev Spaces and non linear Dirichlet Problems in unbounded domains.*

[3] Favini A., *Sulle interpolazioni di certi spazi di Sobolev con peso.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 50 (1973).

[4] Fortunato D., *Una limitazione a priori di spazi di Sobolev con peso per i problemi ellittici nel semispazio,* Ricerche di mat., vol. XXV, 1976, fasc. 1°.

[5] Grisvard P., *Espaces intermediaries entre espaces de Sobolev avec poids.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **17**, pp. 255-296 (1963).

[6] Hanouzet B., *Espaces de Sobolev avec poids et interpolations.* C. R. Acad. Sci. Paris, A-B, **271**, pp.A26-A-29 (1970).

[7] Hanouzet B., *Espaces de Sobolev avec poids applications au problème de Dirichlet dans un demi espace.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **56**, pp. 227-272 (1971).

[8] Lions J. L., *Sur les espaces d'interpolation, dualité.* Mat. Scand., **9**, pp. 147-177 (1961).

[9] LIONS J. L. - MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Vol. I, Dunod, Parigi, 1968.

[10] LIONS J. L. - MAGENES E., *Problemi ai limiti non omogenei ed applicazioni.* III Ann. Scuola Norm. sup. Pisa XV, pp. 39-101 (1961).

[11] LIONS J. L. - MAGENES E., *Problemi ai limiti non omogenei e applicazioni.* IV Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa XV, pp. 311-326 (1961).

[12] MAGENES E., *Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali.* Atti del VII Congresso dell'U.M.I., Genova, 1963, pp. 134-197.

[13] PARENTI C., *Operatori pseudo-differenziali in R^n e applicazioni.* Ann. di mat. pura e appl., serie IV, t. XCIII (1972).

[14] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions à valeurs vectorielles I.* Annales Inst. Fourier t. VII (1957) pp. 1-139.

[15] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions à valeurs vectorielles II,* Annales Inst. Fourier t. VIII (1958) pp. 1-209.

[16] SLOBODETSKIJ, S. L., *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations.* Ann. mat. Soc. Transl., **57**, pp. 207-285.

[17] TRIEBEL H., *Interpolation theory for function spaces of Besov type defined in domains* (I). Math. Nachr., **57**, pp. 5185 (1973).

[18] TRIEBEL H., *Interpolation theory for function spaces of Besov type defined in domains* (II). Math. Nach., **58**, pp. 63-86 (1973).

[19] USPENSKII S. V., *Properties of W_p^r classes with a fractional derivative on differentiable manifolds.* Doklady Akad. Nauk. t. 132, pp. 60-62 (1966).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Ciliberto, C. Miranda e F. Cafiero.

Sulla reattività dei gruppi sulfidrilici nell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino

Nota di PASQUALE PETRILLI, GIOVANNI SANNIA e GENNARO MARINO
presentata dal socio ENZO LEONE

(Adunanza del 2 aprile 1977)

RIASSUNTO. — Nel'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino sono presenti cinque residui di cisteina per unità monomerica. Solo in condizioni di completa denaturazione essi sono tutti titolabili con Nbs_2. Nella proteina nativa reagisce con Nbs_2 un solo gruppo sulfidrilico; l'aggiunta dei substrati non modifica in alcun modo la reattività e l'attività enzimatica resta immutata. Trattando la proteina con NEM si può osservare che, in assenza di substrati, reagisce ancora un solo gruppo sulfidrilico con aumento dell'attività enzimatica, mentre in presenza della coppia di substrati, glutammato e α-chetoglutarato, in condizioni sincatalitiche, reagisce un ulteriore gruppo sulfidrilico con conseguente abolizione dell'attività enzimatica. Per tutte le reazioni descritte sono state determinate le relative costanti di velocità.

La reattività dei gruppi sulfidrilici dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino viene paragonata con quella dei gruppi sulfidrilici del corrispondente enzima da cuore suino.

SUMMARY. — A total of five sulphydryl groups per monomer are present in the cytosolic aspartate aminotransferase from ox heart. They became titrable with Nbs_2 only when the protein is fully denatured. In native conditions only one sulphydryl group reacts with no effect on the catalytic activity. The addition of substrates does not modify the reactivity. Again only one sulphydryl group reacts with NEM with a slight increase of the catalytic activity. When the couple of substrates, glutamate and α-ketoglutarate, is added, a further sulphydryl group reacts with NEM and the catalytic activity is almost abolished. The second-order rate constants have been determined.

The reactivity of the sulphydryl groups of cytosolic aspartate aminotransferase both from ox heart and pig heart has been compared.

INTRODUZIONE

Lo studio della reattività dei gruppi sulfidrilici dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore suino (EC 2.6.1.1) è stato

Abbreviazioni. — Nbs_2, 5,5'-ditiobis-(2-nitrobenzoato); Nbs, 5-tio-(2-nitrobenzoato); NEM, N-etilmaleimmide; SDS, dodecilsolfato di sodio.

affrontato da numerosi autori. I risultati precedenti al 1973 sono riportati nella rassegna di BRAUNSTEIN [1], tuttavia il contributo più significativo è stato dato dal gruppo di CHRISTEN i cui lavori [2, 3] hanno messo in evidenza che i cinque gruppi sulfidrilici presenti per unità monomerica di enzima hanno tutti una differente reattività. In particolare quello localizzato nella posizione 390 della sequenza amminoacidica può essere modificato solo in condizioni sincatalitiche, in presenza cioè della coppia di substrati dell'enzima: glutammato e α-chetoglutarato [2]. Questi studi sono stati successivamente estesi al corrispondente enzima isolato dalla frazione mitocondriale [4] nonché a quelli citoplasmatico e mitocondriale purificati da cuore di pollo [4, 5], osservando delle significative differenze in dipendenza della localizzazione cellulare e della specie. Uno studio analogo è stato da noi condotto sull'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino di cui ci proponiamo di chiarire le relazioni di omologia esistenti con il corrispondente enzima da cuore suino [6, 7, 8]. I risultati vengono riportati e discussi in questa nota.

PARTE SPERIMENTALE

L'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino è stata purificata come descritto da MARINO e coll. [9] sostituendo i passaggi con allumina C_γ e con idrossiapatite con una cromatografia consecutiva su SP- e QAE-Sephadex a pH 6,3 [10]. L'enzima da cuore suino è stato purificato come descritto da CHRISTEN [11] con una analoga modifica del metodo di purificazione [10]. La concentrazione delle proteine veniva determinata spettrofotometricamente a 280 nm, utilizzando per l'enzima bovino e per l'enzima suino rispettivamente $E^{1\%}_{1\,cm} = 14{,}15$ [9] e $E^{1\%}_{1\,cm} = 14{,}80$ [12]. L'attività enzimatica veniva determinata spettrofotometricamente come descritto da BANKS e coll. [13].

I gruppi sulfidrilici venivano titolati a 25° C con il reattivo di Ellman a concentrazione 1 mM in tampone fosfato 0,1 M, pH 7,6. Per l'Nbs veniva usato un coefficiente di estinzione $\varepsilon_{412} = 13600\ M^{-1}\,cm^{-1}$ [14]. L'SDS, quando era presente, veniva aggiunto alla miscela di reazione ad una concentrazione finale dello 0,4 %. La reazione con NEM avveniva in tampone Tris-HCl 50 mM, pH 7,5. La concentrazione del reattivo era 64 mM. L'eccesso di NEM veniva allontanato mediante passaggio della miscela di reazione su di una colonna di Sephadex G-25 (1 cm × 25 cm) equilibrata ed eluita con lo stesso tampone in cui avveniva la reazione.

RISULTATI E DISCUSSIONI

Reattività con Nbs_2. — La titolazione dei gruppi sulfidrilici dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino con il reattivo di Ellman in condizioni di completa denaturazione ha confermato quanto era già stato precedentemente osservato [15] e cioè che la proteina enzimatica è dotata di cinque residui di cisteina per unità monomerica. Occorre notare che anche il corrispondente enzima da cuore suino è dotato di cinque gruppi sulfidrilici per unità monomerica [2], mentre quello da cuore di pollo ne contiene soltanto quattro [16]. Per quanto riguarda gli enzimi mitocondriali, GEHRING e CHRISTEN [4] hanno riportato che quello di maiale contiene sette gruppi sulfidrilici mentre quello di pollo ne contiene cinque.

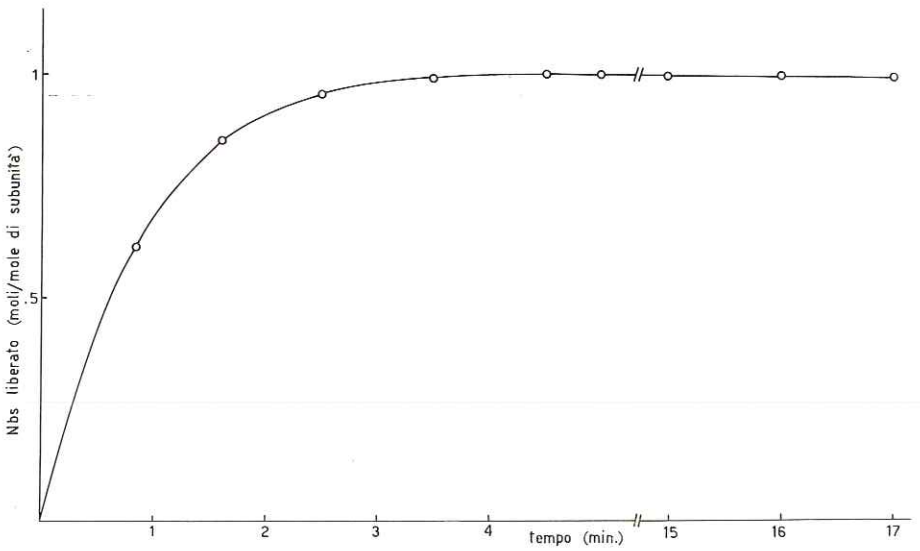


FIG. 1. - Andamento della titolazione dell'aspartato aminotransferasi con Nbs_2. La concentrazione del reattivo era 1 mM quella dell'enzima 11,3 μM. La reazione avveniva a 25° C in tampone Na-fosfato 0,1 M pH 7,6 e veniva seguita osservando la formazione di Nbs a 412 mm ($\varepsilon_{412} = 13\ 600\ M^{-1}\ cm^{-1}$).

La titolazione della proteina nativa con il reattivo di Ellman, il cui andamento nel tempo è riportato in figura 1, mostra che soltanto uno dei cinque residui sulfidrilici reagisce in queste condizioni. Si può ricavare da tale andamento una costante di velocità del secondo ordine pari a 1330 $M^{-1}\,min^{-1}$. In presenza della coppia di substrati: glutammato (70 mM) ed α-chetoglutarato (2 mM) non si

osserva alcuna variazione significativa sia per quanto riguarda il numero dei gruppi titolabili, sia per quanto riguarda la costante cinetica della reazione (1120 $M^{-1} min^{-1}$). Occorre notare che in entrambi i casi non si osserva alcuna variazione dell'attività enzimatica. In altri termini con Nbs_2 è possibile titolare un solo gruppo sulfidrilico, sia in assenza che in presenza dei substrati, e senza alcun effetto sull'attività catalitica. Nell'enzima da cuore suino, come dimostrato da CHRISTEN [2, 3] sono invece tre i residui di cisteina che in condizioni native reagiscono con Nbs_2; due di questi reagiscono con differente velocità in assenza di substrati senza alcun effetto sull'attività enzimatica mentre il terzo, quello definito sincatalitico, reagisce, a velocità ancora minore, solo in presenza della coppia di

TABELLA I

Paragone delle costanti di velocità della reazione dell'Nbs_2 *con i gruppi sulfidrilici esposti dell'aspartato aminotransferasi da cuore suino e da cuore bovino. Le condizioni sono quelle riportate in* FIG. 1.

Fonte		Gruppi sulfidrilici esposti	Costanti di velocità ($M^{-1} min^{-1}$)				
			osservate		letteratura		
maiale	3	I	> 1,7	10^3 (*)	> 1,2	10^3 (*)	(a)
					48	10^3	(b)
		II	1,04	10^3	1,2	10^3	(a)
					2,3	10^3	(b)
		III	2,1	10^{-1} (**)	4,0	10^{-1} (**)	(a)
bue	1		1,33	10^3			

(*) Non apprezzabile esattamente nelle condizioni sperimentali impiegate.
(**) Ricavata come costante di inattivazione in presenza di glutammato (70 mM) e di α-chetoglutarato (2 mM).
(a) Da BIRCHMEIER e Coll. [2].
(b) Valori ricavati da esperimenti « stopped flow » [3].

substrati e con perdita dell'attività enzimatica. Occorre notare che anche l'enzima citoplasmatico da cuore di pollo ha un solo gruppo sulfidrilico titolabile con Nbs_2, sia in presenza che in assenza dei substrati, senza alcun effetto sull'attività enzimatica [16]. Nel caso invece degli isozimi mitocondriali la reattività dell'unico gruppo sulfidrilico titolabile con Nbs_2 dipende dalla presenza dei substrati, anche se non si osserva alcun effetto sull'attività catalitica [4]. Il paragone delle costanti di velocità della reazione fra Nbs_2 ed i gruppi sulfidrilici degli enzimi citoplasmatici da cuore suino e da cuore bovino è mostrato in tabella 1. I valori osservati per l'enzima suino

sono in buon accordo con quelli riportati dagli autori svizzeri [2]. Le reattività pertanto dell'unico sulfidrile esposto all'azione dell'Nbs_2 nell'enzima bovino è da ritenersi simile a quella dei sulfidrili di tipo II dell'enzima suino.

Reattività con NEM. — I risultati risportati in figura 2 e in tabella 2 dimostrano che la NEM può reagire con due differenti gruppi sulfidrilici. La reazione con il primo avviene in assenza della coppia

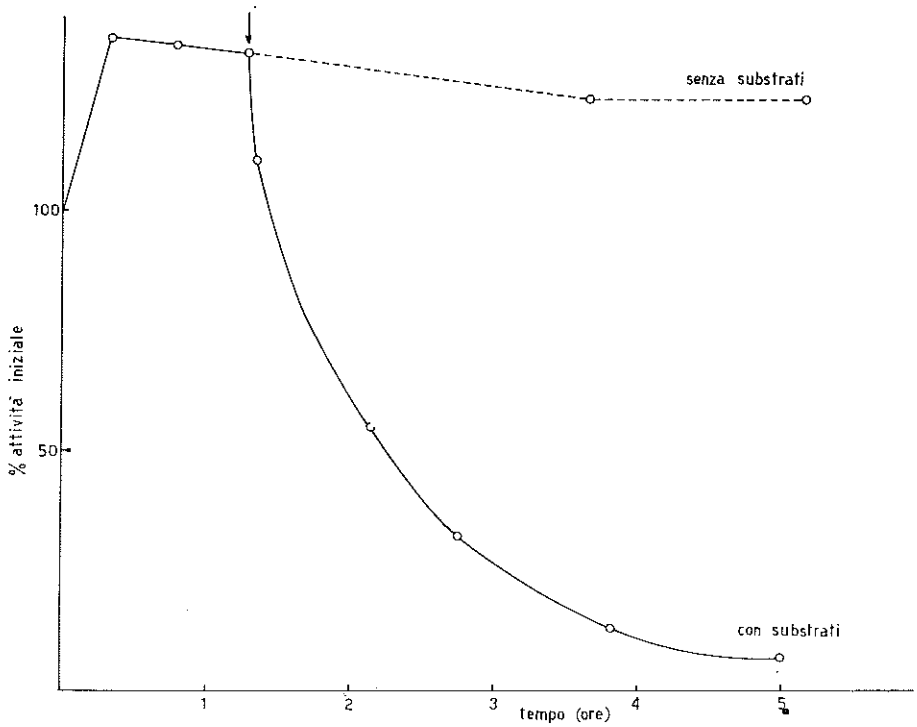


FIG. 2. - Inattivazione dell'aspartato aminotransferasi in presenza di NEM. La concentrazione del reattivo era 64 mM quella dell'enzima 50,6 μM. La reazione avveniva a 25° C in tampone Tris-HCl 50 mM pH 7,5. La freccia indica il momento in cui ad una parte della miscela di reazione sono stati aggiunti glutammato (70 mM) e α-chetoglutarato (2 mM). L'attività enzimatica veniva determinata direttamente su aliquote prelevate ai tempi indicati.

di substrati e provoca un leggero incremento della attività enzimatica. Dopo allontanamento dell'eccesso di reattivo, la proteina modificata non reagisce più con Nbs_2 in condizioni native, mentre dopo denaturazione con SDS si possono titolare i rimanenti quattro gruppi sulfidrilici per unità monomerica.

Per aggiunta della coppia di substrati alla proteina modificata mediante trattamento con NEM si può osservare la reazione di un

ulteriore gruppo sulfidrilico con perdita quasi completa dell'attività enzimatica. In queste condizioni cioè reagisce il gruppo sulfidrilico sincatalitico, come già osservato da CHRISTEN e coll. nel caso dell'enzima da cuore di maiale [2]. Occorre notare che, come riportato

TABELLA II

Reattività dell'aspartato aminotransferasi con NEM. *Le condizioni della reazione sono quelle riportate in* FIG. 2. *Su aliquote della miscela di reazione, prelevate ai tempi indicati, dopo allontanamento dell'eccesso di* NEM *per filtrazione su Sephadex* G-25, *veniva determinato il numero di sulfidrili totali mediante titolazione con* Nbs_2 *in* SDS (0,4 %).

Tempo (min.)	Attività %	—SH totali per unità monomerica	
		Valori medi osservati	Valori interi più prossimi
0	100	4.8	5
45	135	4.0	4
300 (a)	7	2.7	3
310 (b)	125	3.7	4

(a) in presenza di substrati.
(b) in assenza di substrati

in tabella 3, la costante di velocità di inattivazione per l'enzima bovino è almeno dieci volte più bassa di quella dell'enzima suino. È interessante osservare che la costante di velocità della reazione di inattivazione dell'enzima suino con Nbs_2 (tabella 1) è dieci volte più

TABELLA III

Paragone delle velocità di inattivazione dell'aspartato aminotransferasi da cuore suino e da cuore bovino da parte di NEM *in presenza della coppia di substrati nelle condizioni riportate in* FIG. 2.

Fonte	Costanti di velocità (M^{-1} min^{-1})	
	osservate	letteratura
Maiale	2,1	4,0 (a)
Bue	0,25	—

(a) BIRCHMEIER e coll. [2].

bassa di quella di inattivazione con NEM (tabella 3); si può perciò pensare che il sulfidrile sincatalitico, nel caso dell'enzima bovino, non viene messo in evidenza con Nbs_2 a causa della bassissima velocità

di reazione (per estrapolazione si può ipotizzare una costante di secondo ordine $K = 2 \times 10^{-2}\,min^{-1}\,mol^{-1}$). Nel caso dell'enzima citoplasmatico da cuore di pollo sono riportati dati contrastanti. Autori sovietici [16] affermano che l'enzima non contiene gruppi sulfidrilici sincatalitici, infatti non osservano variazioni dell'attività catalitica quando l'enzima, in presenza della coppia di substrati, viene trattato con Nbs_2 o con NEM. Gli autori svizzeri [5], d'altra parte, non osservano alcuna modifica dell'attività catalitica per trattamento con Nbs_2 tuttavia riportano una inattivazione del 62 % dopo tre ore per trattamento con un eccesso di 5000 volte di NEM rispetto all'enzima; essi concludono pertanto che anche l'enzima da cuore di pollo viene inattivato sincataliticamente. La costante di velocità di questa reazione deve perciò essere presumibilmente molto bassa, e verosimilmente, di un ordine di grandezza più basso di quella osservata per l'enzima da cuore bovino.

TABELLA IV

Paragone della reattività dei gruppi sulfidrilici in differenti aspartato aminotransferasi citoplasmatiche isolate da muscolo cardiaco di maiale, di pollo e di bue. Il numero di gruppi sulfidrilici è riferito ad una unità monomerica.

Fonte	—SH totali Nbs_2 in SDS 0,4%	—SH esposti				Riferimenti bibliografici
		senza substrati		con substrati (a)		
		Nbs_2	NEM	Nbs_2	NEM	
maiale	5	2	2	3	3	(1)
pollo	4	1	1	1	b	(5, 16)
bue	5	1	1	1	2	questa nota

(a) In presenza di 70 mM glutammato e 2 mM α-chetoglutarato.
(b) Risultati contrastanti tra i due gruppi di ricerca, per la discussione si veda il testo.

La reattività dei gruppi sulfidrilici rispetto all'Nbs_2 ed al NEM nell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino è paragonata a quella dello stesso enzima da cuore di maiale e da cuore di pollo in tabella 4. Sulla base delle considerazioni riferite sembrerebbe che l'inattivazione sincatalitica sia un fenomeno che si presenta, sebbene con differenti cinetiche, in tutte le transaminasi citoplasmatiche finora studiate. Nei due enzimi mitocondriali finora esaminati, da cuore di maiale e di pollo [4], non si osserva il fenomeno dell'inattivazione, ma la velocità di reazione dell'unico sulfidrile esposto dipende dalla presenza dei substrati; tuttavia le costanti cinetiche non differiscono significativamente tra loro.

CONCLUSIONI

Lo studio sulla reattività dei gruppi sulfidrilici dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino dimostra che dei cinque gruppi sulfidrilici presenti per unità monomerica solo uno reagisce con i reattivi Nbs_2 e NEM in assenza di substrati. In presenza della coppia dei substrati, glutammato e α-chetoglutarato, un ulteriore gruppo viene esposto; la sua reattività, però, è inferiore di almeno un ordine di grandezza rispetto a quella osservata per il sulfidrile sincatalitico presente nell'enzima da cuore di maiale, per cui nelle condizioni sperimentali usate esso viene messo in evidenza soltanto in presenza di NEM. Questo studio conferma l'ipotesi di CHRISTEN [5] circa le significative differenze che dovrebbero aversi nella struttura primaria delle aminotransferasi citoplasmatiche in contrasto con il notevole grado di omologia rilevabile negli enzimi mitocondriali che si riflette per altro in una reattività dei gruppi sulfidrilici molto simile.

Istituto di Chimica Organica e Biologica dell'Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. E. BRAUSTEIN in *The Enzymes*, pag. 379, vol. 9, Academic Press, New York (1973).
[2] W. BIRCHMEIR, K. J. WILSON & P. CHRISTEN, J. Biol. Chem. **248**, 1751 (1973).
[3] K. J. WILSON, W. BIRCHMEIR & P. CHRISTEN, Eur. J. Biochem., **41**, 471 (1974).
[4] H. GEHRING & P. CHRISTEN, Biochem. Biophys. Res. Commun., **63**, 441 (1975).
[5] H. GEHRING, K. J. WILSON & P. CHRISTEN, Biochem. Biophys. Res. Commun., **67**, 73 (1975).
[6] G. SANNIA, P. PETRILLI & G. MARINO, Bull. Mol. Biol. Med. (1977) inviato per la pubblicazione.
[7] G. SANNIA, M. ABET, E. DE VENDITTIS & G. MARINO, J. Comp. Biochem. (1977) inviato per la pubblicazione.
[8] M. ABET, E. DE VENDITTIS, G. SANNIA & G. MARINO, questo bollettino (1977) in stampa.
[9] G. MARINO, A. M. GRECO, V. SCARDI & R. ZITO, Biochem. J., **99**, 589 (1966).
[10] P. PETRILLI, G. SANNIA & G. MARINO, J. Chromatog., **135**, 511 (1977).
[11] P. CHRISTEN, comunicazione personale.
[12] M. BERGAMI, G. MARINO & V. SCARDI, Biochem. J., **110**, 471 (1968).
[13] B. E. C. BANKS, S. DOONAN, A. J. LAWRENCE & C. A. VERNON, Eur. J. Biochem., **5**, 528 (1968).
[14] G. L. ELLMAN, Arch. Biochem. Biophys., **82**, 70 (1959).
[15] G. MARINO, V. SCARDI & R. ZITO, Biochem. J., **99**, 595 (1966).
[16] V. H. KOCHIKINA & YU. M. TORCHINSKI, Biochem. Biophys. Res. Commun., **63**, 392 (1975).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, L. Mangoni e R. A. Nicolaus.

Osservazioni sugli spazi di prossimità

Nota di VITO ABATANGELO (Bari)
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza del 7 maggio 1977)

RIASSUNTO. — Si stabiliscono alcune relazioni tra topologia, prossimità e spazi uniformi; si caratterizzano inoltre gli spazi uniformi precompatti e pseudometrizzabili.

SUMMARY. — Some relationships have been established between topology, proximity and uniformity; precompact and pseudo-metrizable uniform spaces have been characterized, too.

INTRODUZIONE.

Scopo di questa nota è ritrovare alcune relazioni intercorrenti tra topologia, prossimità e spazi metrici. A tal fine si utilizza una particolare nozione di reticolo (cfr. [2])[1].

Si forniscono inoltre alcuni esempi di reticoli uno dei quali (Prop. 2.4) è strettamente legato alla « Prossimità » e si ritrova un risultato dovuto a Y. M. SMIRNOV [9] riproposto da E. M. ALFSEN e J. E. FENSTAD [1].

Infine, con la tecnica dei reticoli, si caratterizzano gli spazi uniformi precompatti e pseudo-metrizzabili mediante l'applicazione di un teorema di S. LEADER [7].

1. - DEFINIZIONE ED ESEMPI DI RETICOLO.

DEF. 1.1 — Se E è un insieme si dice reticolo su E ogni parte $\mathcal{R}$ di $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ verficante i seguenti assiomi:

R_1) $\mathcal{R} \neq \emptyset$;

R_2) $(F, G) \in \mathcal{R} \Rightarrow F \subset G$;

R_3) $(F_1, G_1) \in \mathcal{R}$, $(F_2, G_2) \in \mathcal{R} \Rightarrow (F_1 \cap F_2, G_1 \cap G_2) \in \mathcal{R}$;

R_4) $(F, G) \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists A \in \mathcal{P}(E)$, $\exists B \in \mathcal{P}(E) \ni' A \cup B = E$, $(A, G) \in \mathcal{R}$, $(B, E - F) \in \mathcal{R}$.

[1] Le parentesi [ ] si riferiscono alla bibliografia alla fine della nota.

Utilizzando noti risultati di G. AQUARO (cfr. [2]), a partire da un reticolo su un insieme E si può costruire la struttura uniforme precompatta

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{R}) = \{U \in \mathfrak{P}(E \times E) \mid \exists (F_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \text{ e } (G_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

ricovrimenti finiti di E tali che

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n : (F_k, G_k) \in \mathfrak{R} \text{ e } \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k) \subset U\} .$$

Tale struttura uniforme[2] dicesi associata ad $\mathfrak{R}$. Anche la prossimità e la topologia canonicamente dedotte da $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ si dicono associate ad $\mathfrak{R}$ e si denotano rispettivamente con i simboli $\delta(\mathfrak{R})$ e $\mathfrak{T}(\mathfrak{R})$.

PROP. 1.2 — Se $\mathfrak{R}$ è un reticolo su un insieme E, l'insieme degli intorni rispetto a $\mathfrak{T}(\mathfrak{R})$ di un arbitrario elemento x di E coincide con l'insieme

$$\mathfrak{D}(x) = \{V \in \mathfrak{P}(E) \mid \exists (F, G) \in \mathfrak{R} \ni' x \in F, G \subset V\} .$$

Dim. — Siano $V \in \mathfrak{D}(x)$ ed $(F, G) \in \mathfrak{R}$ tale che $x \in F$ e $G \subset V$; posto $U = (G \times G) \cup ((E - F) \times (E - F))$ risulta $U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{R})$, $U(x) \subset G$ e $G \subset V$; quindi V è intorno di x rispetto a $\mathfrak{T}(\mathfrak{R})$.

Viceversa, sia V intorno di x rispetto a $\mathfrak{T}(\mathfrak{R})$; esistono due ricovrimenti finiti $(F_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ e $(G_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ di E tali che, posto $U = \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k)$, risulti $\forall\, k = 1, 2, \ldots, n : (F_k, G_k) \in \mathfrak{R}$ e $U(x) \subset V$.

Poiché per almeno un indice k risulta $x \in F_k$ e $G_k \subset U(x)$, si può concludere che esiste $(F_k, G_k) \in \mathfrak{R} \ni' x \in F_k$ e $G_k \subset V$.

DEF. 1.3 — Si dice che un reticolo $\mathfrak{R}$ su un insieme E è separato (o di Hausdorff) se verifica l'assioma seguente:

R_H) $\quad \forall (x, y) \in E \times E,\ x \neq y\ \exists (F_x, G_x) \in \mathfrak{R},\ \exists (F_y, G_y) \in \mathfrak{R} \ni'$

$$\ni' x \in F_x,\ y \in F_y,\ G_x \cap G_y = \emptyset .$$

PROP. 1.4 — Se $\mathfrak{R}$ è un reticolo separato su un insieme E anche la struttura uniforme $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$, la prossimità $\delta(\mathfrak{R})$ e la topologia $\mathfrak{T}(\mathfrak{R})$ risultano separate.

[2] Il lettore interessato alle teorie degli spazi uniformi e degli spazi di prossimità può consultare [5], [6] ed [8].

Dim. — È sufficiente provare che $(x, y) \notin \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(\mathcal{R})} U$ se x ed y sono elementi distinti di E. Siano x ed y due tali elementi; per l'assioma R_H) risulta che:

$$\exists (F_x, G_x) \in \mathcal{R} \ , \ \exists (F_y, G_y) \in \mathcal{R} \ni' x \in F_x, \ y \in F_y, \ G_x \cap G_y = \emptyset \ .$$

Posto $U = (G_x \times G_x) \cup ((E - F_x) \times (E - F_x))$, risulta che $U \in \mathfrak{U}(\mathcal{R})$ e $(x, y) \notin U$.

DEF. 1.5 — Si dice che un reticolo $\mathcal{R}$ su E è complementato se verifica la proprietà seguente

R_c) $$(F, G) \in \mathcal{R} \Rightarrow (E - G, \ E - F) \in \mathcal{R} \ .$$

ESEMPIO 1. — Su un insieme E si possono definire i seguenti reticoli

$$\mathcal{R}_1 = \{(\emptyset, \emptyset), (E, E)\} \text{ ed } \mathcal{R}_2 = \{(F, G) \in \mathfrak{F}(E) \times \mathfrak{F}(E) \mid F = G\} \ .$$

Le topologie ad essi associate sono, rispettivamente, quella indiscreta e quella discreta.

ESEMPIO 2. — Se $(E, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico detti $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ gli insiemi delle parti chiuse e, rispettivamente, aperte di E le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) $(E, \mathcal{T})$ è uno spazio normale;

b) $\mathcal{R} = \{(F, G) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{G} \mid F \subset G\}$ è un reticolo su E.

Dim. a) $\Rightarrow$ b) — L'assioma R_1) è verificato perché $(E, E) \in \mathcal{R}$; gli assiomi R_2) ed R_3) conseguono banalmente dalla definizione di $\mathcal{R}$. Allo scopo di verificare l'assioma R_4), si consideri $(F, G) \in \mathcal{R}$. Dalla definizione di $\mathcal{R}$ consegue che $E - G \in \mathfrak{F}$ ed $F \cap (E - G) = \emptyset$; per a) risulta che

$$\exists U \in \mathfrak{G} \ , \ \exists V \in \mathfrak{G} \ni' F \subset U \ , \ E - G \subset V \ , \ U \cap V = \emptyset \ .$$

Posto $A = E - V$ e $B = E - U$, si ha che $(A, G) \in \mathcal{R}$, $(B, E - F) \in \mathcal{R}$ e $B \cup A = E$.

b) $\Rightarrow$ a) — Se H e K sono due chiusi disgiunti di E, si ha che $(H, E - K) \in \mathcal{R}$ e, quindi, per R_4): $\exists A \in \mathfrak{F}$, $\exists B \in \mathfrak{F} \ni' A \cup B = E$, $(A, E - K) \in \mathcal{R}$ e $(B, E - H) \in \mathcal{R}$. Dalla definizione di $\mathcal{R}$ consegue

che $(K, E - A) \in \mathfrak{R}$ e $(H, E - B) \in \mathfrak{R}$; essendo inoltre $(E - A) \cap (E - B) = \emptyset$, risultano determinati due intorni disgiunti ed aperti di H e, rispettivamente, di K.

ESEMPIO 3. — Se (E, d) è uno spazio metrico e se $z_0 \in E$ l'insieme

$$\mathfrak{R}_{z_0} = \{(F, G) \in \mathfrak{S}(E) \times \mathfrak{S}(E) \mid F \text{ chiuso e } G \text{ aperto (rispetto a } \mathfrak{T}_d);$$

$$d(F, E - G) > 0 \,;\; z_0 \in \overset{\circ}{F} \text{ oppure } z_0 \in \overset{\circ}{\overbrace{E - G}}\}$$

è un reticolo separato e complementato su E; inoltre le topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{R}_{z_0})$ e $\mathfrak{T}_d$ coincidono.

Dim.

R_c) Se $(F, G) \in \mathfrak{R}_{z_0}$ risulta, per la definizione di $\mathfrak{R}_{z_0}$, che $(E - G, E - F) \in \mathfrak{R}_{z_0}$; pertanto nel seguito si potrà analizzare solo il caso $z_0 \in \overset{\circ}{F}$.

R_1) Se $\varepsilon \in R_+^*$ risulta $(\bar{B}_\varepsilon(z_0), B_{2\varepsilon}(z_0)) \in \mathfrak{R}_{z_0}$ e, quindi, $\mathfrak{R}_{z_0} \neq \emptyset$.

R_2) Se $(F, G) \in \mathfrak{R}_{z_0}$ risulta $d(F, E - G) > 0$ da cui consegue che $F \subset G$.

R_3) Siano $(F_1, G_1) \in \mathfrak{R}_{z_0}$ e $(F_2, G_2) \in \mathfrak{R}_{z_0}$; è ovvio che $F_1 \cap F_2$ sia chiuso e $G_1 \cap G_2$ sia aperto rispetto a $\mathfrak{T}_d$, inoltre risulta $d(F_1 \cap F_2, E - (G_1 \cap G_2)) \geq \min(d(F_1, E - G_1), d(F_2, E - G_2)) > 0$; infine se $z_0 \notin \overset{\circ}{F}_1 \cap \overset{\circ}{F}_2 = \overset{\circ}{\overbrace{F_1 \cap F_2}}$ si ha che $z_0 \in \overset{\circ}{\overbrace{E - G_1}} \cup \overset{\circ}{\overbrace{E - G_2}}$ e da ciò $z_0 \in \overset{\circ}{\overbrace{E - (G_1 \cap G_2)}}$;

R_4) Siano $(F, G) \subset \mathfrak{R}_{z_0}$ e $z_0 \in \overset{\circ}{F}$, posto $\varepsilon = d(F, E - G)$, $A = \{x \in E \mid d(x, E - G) \geq (1/3) \cdot \varepsilon\}$ e $B = \{x \in E \mid d(x, F) \geq (1/3) \cdot \varepsilon\}$ risulta che A e B sono chiusi, $d(A, E - G) \geq (1/3) \cdot \varepsilon > 0$, $d(B, F) \geq (1/3) \cdot \varepsilon > 0$. Inoltre dall'essere $B_{\frac{2}{3}\varepsilon}(z_0) \subset A$ consegue che $z_0 \in \mathring{A}$ e dall'essere $E - A \subset B$ consegue che $A \cup B = E$.

R_H) Conviene distinguere due casi: 1°) $z_0 = x$ oppure $z_0 = y$; 2°) $z_0 \neq x$ e $z_0 \neq y$.

1°) Se $z_0 = y$ e $z_0 \neq x$, posto $6 \cdot \varepsilon = d(x, z_0)$ risulta che

$$(\bar{B}_\varepsilon(z_0), B_{2\varepsilon}(z_0)) \in \mathfrak{R}_{z_0}\,,\ (\bar{B}_\varepsilon(x), B_{2\varepsilon}(x)) \in \mathfrak{R}_{z_0}\,,\ B_{2\varepsilon}(x) \cap B_{2\varepsilon}(z_0) = \emptyset\,.$$

2°) Se z_o è distinto tanto da x, quanto da y si pone

$$6 \cdot \varepsilon = \min (d(x, y),\ d(z_o, x),\ d(z_o, y)).$$

Risulta che: $(\bar{B}_\varepsilon(y), B_{2\varepsilon}(y)) \in \mathcal{R}_{z_o}$, $(\bar{B}_\varepsilon(x), B_{2\varepsilon}(x)) \in \mathcal{R}_{z_o}$, $B_{2\varepsilon}(x) \cap B_{2\varepsilon}(y) = \emptyset$.

L'asserita compatibilità della distanza d con la topologia associata al reticolo $\mathcal{R}_{z_o}$ consegue banalmente dalla Prop. 1.2 precedente e da [2], § 1, Prop. 1, ma se ne potrebbe anche fornire una dimostrazione diretta.

2. - Uniformità, prossimità, reticoli

Ancora in forza di noti risultati dovuti a G. Aquaro (cfr. [2], § 2, Teor 1) si dimostra il seguente

Teorema 2.1 — Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme (separato) l'insieme

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}) = \{(F, G) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid \exists V \in \mathcal{U} \ni' V(F) \subset G\}$$

è un reticolo complementato (separato) su E.

Tale reticolo si dice generato da $\mathcal{U}$, la struttura uniforme ad esso associata si denota con $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ e si dice struttura uniforme associata ad $\mathcal{U}$.

Se $\mathcal{R}$ è un reticolo su un insieme E, si può costruire su E la struttura uniforme $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ nonché il reticolo generato da $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ che sarà denotato con $\hat{\mathcal{R}}$, anziché con $\mathcal{R}(\mathcal{U}(\mathcal{R}))$. Utilizzando risultati esposti in [2] si provano le seguenti due proposizioni:

Prop. 2.2 — Se $\mathcal{R}$ è un reticolo su un insieme E, risulta che

I) $\mathcal{R} \subset \hat{\mathcal{R}}$;

II) $\mathcal{U}(\mathcal{R}) = \mathcal{U}(\hat{\mathcal{R}})$;

III) $\hat{\hat{\mathcal{R}}} = \hat{\mathcal{R}}$ (dove $\hat{\hat{\mathcal{R}}}$ denota il reticolo generato da $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{R}})$).

Dim.

I) Sia $(F, G) \in \mathcal{R}$; posto $V = (G \times G) \cup ((E - F) \times (E - F))$, risulta che $V \in \mathcal{U}(\mathcal{R})$ e $V(F) \subset G$; quindi $(F, G) \in \hat{\mathcal{R}}$.

II) Da I) e dalla definizione di struttura uniforme associata ad un reticolo consegue che $\mathfrak{U}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{U}(\hat{\mathfrak{R}})$; l'inclusione opposta consegue da [2], § 2, Prop. 3.

III) Consegue banalmente da II).

La Prop. 2.2 prova che associando una struttura uniforme ad un reticolo da essa generato si ottiene sempre lo stesso reticolo (tranne, al più, il primo) e la stessa struttura uniforme.

PROP. 2.3 — Se $\mathfrak{R}$ è un reticolo su un insieme E, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) $\mathfrak{R} = \hat{\mathfrak{R}}$;

b) Esiste un'unica struttura uniforme precompatta su E che genera il reticolo $\mathfrak{R}$; inoltre essa è la meno fine tra quelle che generano $\mathfrak{R}$;

c) Esiste almeno una struttura uniforme su E che genera il reticolo $\mathfrak{R}$.

Dim.

a) $\Rightarrow$ b) Se $\mathfrak{R} = \hat{\mathfrak{R}}$ è ovvio che $\mathfrak{R}$, al pari di $\hat{\mathfrak{R}}$, sia generato dalla struttura uniforme precompatta $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$.

Inoltre se $\mathfrak{U}'$ è una struttura uniforme precompatta su E tale che il reticolo da essa generato coincida con $\mathfrak{R}$, da [2], § 2, Prop. 3 consegue

$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{A}(\mathfrak{U}') = \mathfrak{U}(\mathfrak{R}) .$$

Infine se $\mathfrak{U}''$ è una struttura uniforme su E tale che il reticolo da essa generato coincida con $\mathfrak{R}$, da [2], § 2, Prop 1 consegue

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{U}'') \subset \mathfrak{U}'' ;$$

perché $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}'')$ è precompatta.

b) $\Rightarrow$ c) È banalmente verificata.

c) $\Rightarrow$ a) Consegue facilmente da [2], § 2, Prop. 1 perché $\mathfrak{R}$ è il reticolo generato da $\mathfrak{U}$ e, quindi, risulta

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{U} .$$

Pertanto, si può asserire che l'insieme dei reticoli su un insieme E generati da una struttura uniforme è equipotente all'insieme delle

strutture uniformi precompatte su E, il quale a sua volta è equipotente all'insieme delle prossimità su E, come si proverà nella Prop. 2.6 (oltre che in [8], n. 7).

In tal senso risulta utile l'esempio seguente di reticolo:

PROP. 2.4 — Se (E, δ) è uno spazio di prossimità (separato) l'insieme

$$\mathcal{R}_\delta = \{(F, G) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid (E - G) \,\bar{\delta}\, F\}^3$$

è un reticolo complementato (separato) su E che si dice associato alla prossimità δ.

La dimostrazione si ottiene facilmente con l'ausilio di [8], Def. 3.1 e Teor. 3.9.

OSSERVAZIONE 2.5 — Se $(E, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme, i reticoli $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ ed $\mathcal{R}_{\delta(\mathcal{U})}$ coincidono perché

$$F \,\delta(\mathcal{U})\, (E - G) \Longleftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{U} \;\ni'\; V(F) \subset G\,;$$

da ciò consegue che il reticolo $\hat{\mathcal{R}}$ generato da un'uniformità $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ si può anche considerare generato dalla prossimità $\delta(\mathcal{U})$.

Utilizzando la Prop. 2.3 si può dimostrare facilmente la seguente:

PROP. 2.6 — Se (E, δ) è uno spazio di prossimità, esiste un'unica struttura uniforme precompatta su E compatibile con δ; inoltre essa è la meno fine tra le uniformità compatibili con δ (cioè $\delta = \delta(\mathcal{U})$).

Dim.[4] — Costruito il reticolo $\mathcal{R}_\delta$ come nella Prop. 2.4, si prova che $\mathcal{R}_\delta = \hat{\mathcal{R}}_\delta$. Per la prop. 2.2 risulta che $\mathcal{R}_\delta \subset \hat{\mathcal{R}}_\delta$. Viceversa se $(F, G) \subset \hat{\mathcal{R}}_\delta$ esistono per definizione due ricovrimenti finiti di E, $(F_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ e $(G_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, tali che posto $V = \bigcup_{k=1}^{n} (G_k \times G_k)$, risulti

$$V(F) \subset G \quad \text{e} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n\,;\; F_k \,\bar{\delta}\, (E - G_k)\,.$$

Essendo $(F_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un ricovrimento di E, non è vuoto l'insieme

$$I = \{k = 1, 2, \ldots, n \mid F \cap F_k \neq \emptyset\}\,;$$

[3] Con il simbolo $A \,\bar{\delta}\, B$ si nega $A \,\delta\, B$.

[4] Tale proposizione può essere provata anche in maniera diretta dimostrando che $\mathcal{U}(\mathcal{R}_\delta)$ è, tra le strutture uniformi compatibili con δ, quella meno fine e l'unica precompatta.

inoltre risulta:

$$F \subset \bigcup_{k\in I} F_k \text{ nonché, in forza di [8], Assioma 1.2: } \bigcup_{k\in I} F_k \,\bar{\delta}\, \bigcap_{k\in I} (E - G_k).$$

Inoltre si ha $\bigcup_{k\in I} G_k \subset G$; infatti se $x \in \bigcup_{k\in I} G_k$, esiste un $k \in I$ per il quale sia $x \in G_k$ ed $F \cap G_k \neq \emptyset$.

Considerato un arbitrario $a \in F \cap G_k$ si ha:

$$(a, x) \in G_k \times G_k,\ G_k \times G_k \subset V,\ x \in V(a),\ V(a) \subset V(F) \text{ e } V(F) \subset G$$

da cui $x \in G$.

Dunque si può asserire che:

$$F \subset \bigcup_{k\in I} F_k,\ E - G \subset E - \bigcup_{k\in I} G_k,\ \bigcup_{k\in I} F_k \,\bar{\delta}\, (E - \bigcup_{k\in I} G_k);$$

da cui consegue che $F \,\bar{\delta}\, (E - G)$, cioè $(F, G) \in \mathcal{R}_\delta$.

Applicando ora la Prop. 2.3 si ha la tesi. Al fine di conoscere la struttura uniforme di cui alla presente proposizione è sufficiente provare che $\mathcal{U}(\mathcal{R}_\delta)$ è compatibile con δ. Infatti se A e B sono parti di E applicando risultati già noti si ha che:

$$A \,\bar{\delta}\, B \Leftrightarrow (A, E - B) \in \mathcal{R}_\delta \Leftrightarrow (A, E - B) \in \hat{\mathcal{R}}_\delta \Leftrightarrow A \,\overline{\delta(\mathcal{U}(\mathcal{R}_\delta))}\, B.$$

3. - Metrizzazione

Teorema 3.1 — Se (E, δ) è uno spazio di prossimità, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a') (E, δ) è precompatto e pseudo-metrizzabile;

b') $\exists (A'_n, B'_n)_{n\in N} \in (\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E))^N$ $\ni'$ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$:

$$A \,\bar{\delta}\, B \Leftrightarrow \exists\, n \in N \ni' A \times B \subset \bigcup_{k=1}^{n} (A'_k \times B'_k);$$

c') $\exists (A_n, B_n)_{n\in N} \in (\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E))^N$ $\ni'$

1) $\forall\, n \in N : A_n \subset A_{n+1}$ e $B_n \subset B_{n+1}$;

2) $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$: $A \,\bar{\delta}\, B \Leftrightarrow \exists\, n \in N \ni' A \times B \subset A_n \times B_n$;

d') $\exists (F_n, G_n)_{n\in N} \in (\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E))^N$ $\ni'$

1) $\forall\, n \in N : F_n \subset F_{n+1}$ e $G_{n+1} \subset G_n$;

2) $\forall (F, G) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) : (F, G) \in \mathcal{R}_\delta \Leftrightarrow \exists\, n \in N \ni' F \subset F_n$ $G_n \subset G$.

Dim.

a') $\Leftrightarrow$ b') È il teorema provato da S. LEADER in [7] [5].

b') $\Rightarrow$ c') La successione richiesta da c') si ottiene ponendo

$$\forall\, n \in \mathrm{N} : \mathrm{A}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}'_k \quad \text{e} \quad \mathrm{B}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}'_k \,.$$

c') $\Rightarrow$ b') È verificata in modo banale.

c') $\Rightarrow$ d') Se $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ è la successione prevista da c'), ponendo $\forall\, n \in \mathrm{N} : \mathrm{F}_n = \mathrm{A}_n$ e $\mathrm{G}_n = \mathrm{E} - \mathrm{B}_n$ si ottiene la successione richiesta da d').

Infatti è evidente che $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ sia crescente e $(\mathrm{G}_n)_{n\in\mathrm{N}}$ sia decrescente e, se F e G sono parti di E, risulta:

$$(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \mathfrak{R}_\delta \Leftrightarrow \mathrm{F}\,\bar{\delta}\,(\mathrm{E} - \mathrm{G}) \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathrm{N}\ \ni' \mathrm{F} \times (\mathrm{E} - \mathrm{G}) \subset \mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathrm{N}\ \ni' \mathrm{F} \subset \mathrm{F}_n \quad \text{e} \quad \mathrm{G}_n \subset \mathrm{G}\,.$$

d') $\Rightarrow$ c') Si prova in modo analogo alla precedente c') $\Rightarrow$ d').

Dopo aver ricordato che se $\mathfrak{R}$ è un reticolo su un insieme E la struttura uniforme $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ è precompatta, si può enunciare la seguente

PROP. 3.2 — Se $\mathfrak{R}$ è un reticolo su un insieme E, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) $(\mathrm{E}, \mathfrak{U}(\mathfrak{R}))$ è pseudo-metrizzabile;

b) $\exists\, (\mathrm{F}'_n, \mathrm{G}'_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \hat{\mathfrak{R}}^{\mathrm{N}}\ \ni' \forall\, (\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \mathfrak{S}(\mathrm{E}) \times \mathfrak{S}(\mathrm{E})$:

$$(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \hat{\mathfrak{R}} \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathrm{N}\ \ni' \mathrm{F} \times (\mathrm{E} - \mathrm{G}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\mathrm{F}'_k \times (\mathrm{E} - \mathrm{G}'_k))\,;$$

c) $\exists\, (\mathrm{F}_n, \mathrm{G}_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \hat{\mathfrak{R}}^{\mathrm{N}}\ \ni'$

1) $\forall\, n \in \mathrm{N} : \mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_{n+1}$ e $\mathrm{G}_{n+1} \subset \mathrm{G}_n$;

2) $\forall\, (\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \mathfrak{S}(\mathrm{E}) \times \mathfrak{S}(\mathrm{E}) : (\mathrm{F}, \mathrm{G}) \in \hat{\mathfrak{R}} \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathrm{N}\ \ni' \mathrm{F} \subset \mathrm{F}_n$, $\mathrm{G}_n \subset \mathrm{G}$.

[5] In [7] l'Autore si riferisce a spazi metrici e non a spazi pseudo-metrici: ciò è dovuto al fatto che, pur senza farne esplicita menzione, Egli considera spazi di prossimità separati.

Dim. — Allorquando si consideri su E la prossimità $\delta(\mathcal{R})$, la a) coincide con la a') del teorema 3.1; pertanto è sufficiente provare che b) e c) equivalgono, rispettivamente, a b') e c') dello stesso teor. 3.1.

b') $\Rightarrow$ b) Sia $(A'_n, B'_n)_{n\in N}$ la successione prevista da b'); poiché $\forall n \in N : A'_n \times B'_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} (A'_k \times B'_k)$; risulta che $\forall n \in N : A'_n \overline{\delta(\mathcal{R})} B'_n$ e da ciò, per l'osservazione 2.5, consegue che $\forall n \in N : (A'_n, E - B'_n) \in \hat{\hat{\mathcal{R}}}$.

Posto $\forall n \in N : F'_n = A'_n$ e $G'_n = E - B'_n$; si ha che $\forall n \in N : (F'_n, G'_n) \in \hat{\hat{\mathcal{R}}}$ e, inoltre, se F e G sono parti di E risulta:

$$(F,G) \in \hat{\hat{\mathcal{R}}} \Leftrightarrow F\overline{\delta(\mathcal{R})}(E-G) \Leftrightarrow \exists n \in N \ni' F \times (E-G) \subset \bigcup_{k=1}^{n} (A'_k \times B'_k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in N \ni' F \times (E - G) \subset \bigcup_{k=1}^{n} (F'_k \times (E - G'_k)).$$

b) $\Rightarrow$ b') Sia $(F'_n, G'_n)_{n\in N}$ la successione prevista da b); posto $\forall n \in N : A'_n = F'_n$ e $B'_n = E - G'_n$; se A e B sono parti di E, risulta:

$$A \overline{\delta(\mathcal{R})} B \Leftrightarrow (A, (E-B)) \in \hat{\hat{\mathcal{R}}} \Leftrightarrow \exists n \in N \ni' A \times B \subset \bigcup_{k=1}^{n} (F'_k \times (E - G'_k)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in N \ni' A \times B \subset \bigcup_{k=1}^{n} (A'_k \times B'_k).$$

c') $\Rightarrow$ c) Sia $(A_n, B_n)_{n\in N}$ la successione prevista da c'); posto $\forall n \in N : F_n = A_n$ e $G_n = E - B_n$; risulta, evidentemente, che $\forall n \in N : A_n \overline{\delta(\mathcal{R})} B_n$; da cui, per l'Osservazione 2.5, $\forall n \in N : (F_n, G_n) \in \hat{\hat{\mathcal{R}}}$. La proprietà 1) di c) consegue dalla corrispondente proprietà 1) di c'). Al fine di provare la proprietà 2), si considerino due parti F e G di E; risulta:

$$(F, G) \in \hat{\hat{\mathcal{R}}} \Leftrightarrow F \overline{\delta(\mathcal{R})} (E - G) \Leftrightarrow \exists n \in N \ni' F \times (E - G) \subset A_n \times B_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in N \ni' F \subset A_n \text{ e } (E - G) \subset B_n \Leftrightarrow \exists n \in N \ni' F \subset A_n \text{ e}$$

$$(E - B_n) \subset G \Leftrightarrow \exists n \in N \ni' F \subset F_n \text{ e } G_n \subset G.$$

c) $\Rightarrow$ c') Sia $(F_n, G_n)_{n\in N}$ la successione prevista dalla c). Posto $\forall n \in N : A_n = F_n$ e $B_n = E - G_n$; risulta che la proprietà 1) di c')

consegue dalla corrispondente proprietà 1) di c). Inoltre se A e B sono parti di E si ha:

$$A\,\overline{\delta(\mathcal{R})}\,B \Leftrightarrow (A,(E-B)) \in \hat{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \exists\, n \in N \ni' A \subset F_n \quad e \quad G_n \subset (E-B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, n \in N \ni' A \subset A_n \;\; e \;\; B \subset B_n \Leftrightarrow \exists\, n \in N \ni' A \times B \subset A_n \times B_n\,.$$

OSSERVAZIONE 3.3 — È evidente che se la prossimità di cui al Teor. 3.1 e, rispettivamente, il reticolo di cui alla Prop. 3.2 sono separati (o di Hausdorff) la a') si può leggere

(E, δ) è precompatto e metrizzabile;

e, rispettivamente, la a) si può leggere

$(E, \mathfrak{U}(\mathcal{R}))$ è metrizzabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALFSEN E. M., FENSTAD J. E., *On the equivalence between proximity structures and totally bounded uniform structures*, Math. Scand., **7** (1959), 353-360. (Correzione: Ibid., **9** (1961), 258.

[2] AQUARO G., *Strutture uniformi di spazio precompatto*, Scuola Norm. Sup. Pisa, (3), **9** (1957), 149-181.

[3] AQUARO G., *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **47** (1959), 319-390.

[4] AQUARO G., *Spazii a struttura uniforme e topologia generale*, Boll. UMI, (4), **8**, Suppl. fasc 2 (1973), 1-48.

[5] ČECH E., *Topological Spaces*, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, 1966.

[6] KELLEY J. L., *General Topology*, Van Nostrand Co., New York, 1955.

[7] LEADER S., *On metrizable precompact proximity spaces*, Nieuw Arch. Wisk, (3), XVI (1968), 12-14.

[8] NAIMPALLY S. A., WARRACK B. D., *Proximity Spaces*, Cambridge Tracts in Math. etc., Cambridge University Press, 1970.

[9] SMIRNOV Y. M., *On proximity spaces*, Mat. Sb., **31**, (73), (1952), 543-574. (In russo; traduzione inglese: Ann. Math. Soc. Transl. Ser., **2**, 38, 5-38).

[10] WEIL A., *Sur le espaces à structure uniform et sur la topologie générale*, Actual scient. Ind., 551 (1937), Paris.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Dalla Volta, F. Cafiero e A. Franchetta.

Su di una classe di equazioni non fuchsiane nel campo reale

Nota di LOREDANA BIACINO (a Napoli) *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 7 maggio 1977)

RIASSUNTO. — Si determinano delle condizioni sufficienti affinché l'equazione:

$$L\,u = -\,u'' + \frac{a_1(x)}{x^{\alpha_1}}\,u' + \frac{a_2(x)}{x^{\alpha_2}}\,u = f$$

con a_i, f funzioni reali, $\alpha_1 \geqslant 1$, $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$, $x^{\frac{\alpha_2}{2}} f \in L^2(0,1)$, ammetta una soluzione reale u tale che:

$$x^{-\frac{\alpha_2}{2}}\,u,\ x^{-\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}}\,u',\ x^{\frac{\alpha_2}{2}}\,u'' \in L^2(0,1)$$

$$u(1) = 0\,.$$

SUMMARY. — In this paper sufficient conditions are checked for the equation:

$$L\,u = -\,u'' + \frac{a_1(x)}{x^{\alpha_1}}\,u' + \frac{a_2(x)}{x^{\alpha_2}}\,u = f$$

with a_i, f real functions, $\alpha_1 \geqslant 1$, $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$, $x^{\frac{\alpha_2}{2}} f \in L^2(0,1)$, admit a real solution u so that:

$$x^{-\frac{\alpha_2}{2}}\,u,\ x^{-\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}}\,u',\ x^{\frac{\alpha_2}{2}}\,u'' \in L^2(0,1)$$

$$u(1) = 0\,.$$

INTRODUZIONE.

Nella memoria [2] F. BUREAU determina delle condizioni affinché l'equazione non fuchsiana a coefficienti razionali:

$$(1) \qquad y'' + \left[2a + \frac{p(x)}{x}\right] y' + \left[b + \frac{b_1}{x} + \frac{q(x)}{x^2}\right] y = 0$$

* Istituto Matematico R. Caccioppoli - Napoli.

con

$$p(x) = p_0 + \frac{p_1}{x}, \quad q(x) = q_0 + \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2}$$

ed a, b, b_1, p_0, p_1, q_0, q_1, q_2 costanti, ammetta un integrale regolare in $x = 0$.

Nella presente nota ci proponiamo di studiare, nel campo reale, l'equazione, più generale di (1):

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{L}\,u = -u'' + \frac{a_1(x)}{x^{\alpha_1}}\,u' + \frac{a_2(x)}{x^{\alpha_2}}\,u = f \text{ in } [0,1]$$

con:

$$a_i(x) \in \mathrm{C}^{4-i}([0,1]),\ \alpha_1 \geq 1,\ \alpha_2 > \alpha_1 + 1\,.$$

Si conviene di intendere per « soluzione regolare » della equazione (2) una soluzione che appartenga allo spazio di Sobolev con peso:

$$\mathcal{C} = \{u : x^{-\frac{\alpha_2}{2}}\,u,\ x^{-\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}}\,u',\ x^{\frac{\alpha_2}{2}}\,u'' \in \mathrm{L}^2(0,1)\}$$

mentre si assegna il termine noto f in:

$$\mathrm{L}^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) = \{u : x^{\frac{\alpha_2}{2}}\,u \in \mathrm{L}^2(0,1)\}$$

L'equazione (2) viene accompagnata dalla condizione

$$\text{(3)} \qquad u(1) = 0\,.$$

La condizione $u(0) = 0$ appare come una « condizione naturale ».

Si dimostra che, se $a_1(0) \neq 0$ e se $a_2(x)$ è dotato di minimo positivo sufficientemente grande, il problema (2)-(3) ammette una ed una sola soluzione $u \in \mathcal{C}$, comunque si fissi f in $\mathrm{L}^2_{\frac{\alpha_2}{2}}$. Tale risultato è espresso dal teorema 4.3.

Nel n. 1 viene introdotto l'operatore L ed una sostituzione di coordinate (già usata da M. Troisi in [4]) che riveste grande importanza tecnica per il seguito.

Nel n. 2 si introducono gli spazi funzionali nel cui quadro si opera, e si stabilisce un teorema di densità.

Nel n. 3 si stabilisce un teorema di regolarizzazione, mentre nel n. 4 si ottengono i risultati finali. Per stabilire il teorema di regolarizzazione 3.1, si fa ricorso all'artificio, già usato da A. CANFORA in [3], di adoperare delle maggiorazioni ausiliarie (proposizione 3.1) relative ad equazioni i cui coefficienti sono costanti, ma contengono un « piccolo parametro » elevato ad esponenti opportuni.

1. - PRELIMINARI.

Consideriamo nell'intervallo $[0, 1]$ l'operatore differenziale lineare del secondo ordine:

$$\text{(1.1)} \qquad L\,u = -\,u'' + \frac{a_1(x)}{x^{\alpha_1}}\,u' + \frac{a_2(x)}{x^{\alpha_2}}\,u$$

dove α_1 e α_2 sono due numeri reali soddisfacenti a:

$$i_1) \quad \alpha_1 \geq 1\,,\ \alpha_2 > 1 + \alpha_1$$

e dove $a_i(x) \in C^{4-i}([0, 1])$, risultando inoltre:

$$i_2) \quad \begin{cases} a_1(0) \neq 0 \\ a_2(x) > 0 \quad \forall\, x \in [0, 1] \end{cases}$$

Poniamo $\forall\, x \in\,]0, 1]\ \rho(x) = \dfrac{x}{2}$ e, fissato arbitrariamente $x_0 \in\,]0, 1]$, consideriamo la trasformazione:

$$\text{(1.2)} \qquad x - x_0 = \rho(x_0)(\xi - x_0)$$

Poniamo poi $\rho_0 = \rho(x_0)$ ed inoltre:

$$I(x_0) = \{x \in\,]0, 1] : |x - x_0| \leq \rho_0\}$$

$$I_{\frac{1}{2}}(x_0) = \left\{x \in\,]0, 1] : |x - x_0| \leq \frac{\rho_0}{2}\right\}$$

Indichiamo con $J(x_0)$ e $J_{\frac{1}{2}}(x_0)$ i trasformati tramite la (1.2) rispettivamente di $I(x_0)$ e $I_{\frac{1}{2}}(x_0)$, ed infine con $\breve{u}(\xi)$ la trasformata della generica funzione $u(x)$ tramite la (1.2):

$$\breve{u}(\xi) = u(x_0 + \rho_0(\xi - x_0)) \equiv u(x)\,.$$

Ovviamente risulta:

$$D_{\xi}^{i}\ \breve{u}(\xi) = \rho_{o}^{i}\, D_{x}^{i}\ u(x) \tag{1.3}$$

Consideriamo ora l'equazione $L\,u = f$: adottando in $I(x_o)$ la trasformazione (1.2) e tenendo conto delle (1.3) essa si trasforma in:

$$L\,u \equiv \wedge\,\breve{u} = -\,\rho_{o}^{-2}\, D_{\xi}^{2}\,\breve{u} + B_1\,\rho_{o}^{-1-\alpha_1}\, D_{\xi}\,\breve{u} + B_2\,\rho_{o}^{-\alpha_2}\,\breve{u} = \breve{f} \tag{1.4}$$

dove si è posto:

$$B_i = \frac{\breve{a}_i}{2^{\alpha_i}} \left(\frac{\rho_o}{\breve{\rho}} \right)^{\alpha_i} \tag{1.5}$$

Poiché $\forall\,\xi \in J(x_o)$ risulta:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{\rho_o}{\breve{\rho}} \leq 2 \tag{1.6}$$

esistono delle costanti $K_{h,i}\,(h \leq 4 - i)$ tali da aversi $\forall\, x_o \in\,]0, 1]$ e $\forall\,\xi \in J(x_o)$:

$$|\, D_{\xi}^{h}\, B_i(\xi)\,| \leq K_{h,i} \tag{1.7}$$

Conviene scrivere anche l'espressione dell'aggiunto, $\wedge^{*}$, di $\wedge$:

$$\wedge^{*} v = -\,\rho_{o}^{-2}\, D_{\xi}^{2}\, v - B_1\,\rho_{o}^{-1-\alpha_1}\, D_{\xi}\, v + (B_2\,\rho_{o}^{-\alpha_2} - \rho_{o}^{-1-\alpha_1}\, D_{\xi}\, B_1)\, v \tag{1.8}$$

Ponendo

$$C_1 = -\,B_1,\quad C_2 = B_2 - \rho_{o}^{\alpha_2-1-\alpha_1}\, D_{\xi}\, B_1 \tag{1.9}$$

la (1.8) diventa:

$$\wedge^{*} v = -\,\rho_{o}^{-2}\, D_{\xi}^{2}\, v + C_1\,\rho_{o}^{-1-\alpha_1}\, D_{\xi}\, v + C_2\,\rho_{o}^{-\alpha_2}\, v \tag{1.10}$$

È ora evidente, se si tiene conto delle (1.7), che possono determinarsi delle costanti K_h tali che $\forall\, x_o \in\,]0, 1]$ e $\forall\,\xi \in J(x_o)$:

$$|\, D_{\xi}^{h}\, C_i(\xi)\,| \leq K_h \qquad h = 0, 1, 2\,. \tag{1.11}$$

Inoltre, in base a i_1), i_2), ed a (1.7), possiamo asserire che esistono

un numero reale $\sigma > 0$, che si può supporre minore o uguale a $\frac{1}{2}$, ed una costante $K > 0$ tali da aversi:

$$(1.12)\qquad \begin{cases} C_2(\xi) > 0 \\ \dfrac{1}{|C_1(\xi)|}\ ,\ \dfrac{1}{C_2(\xi)} \leq K \end{cases} \qquad \forall\, x_0 \in]0,1] \ \text{ e } \ \forall\, \xi \in J(x_0)\,.$$

2. - Alcuni spazi funzionali.

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} \| u \|_{0,I} &\equiv \| u \|_{L^2(I)} \equiv (\textstyle\int_I | u |^2 \, d x)^{1/2} \\ \| u \|_{L^2_\alpha (I)} &\equiv \| \rho^\alpha u \|_{L^2(I)} \equiv (\textstyle\int_I | \rho^\alpha u |^2 \, d x)^{1/2},\ \alpha \in R \end{aligned}$$

$L^2(I)$ denota lo spazio delle funzioni u per cui la norma (2.1) è finita.

È anche utile introdurre i seguenti spazi funzionali:

$$\mathcal{H} = \{ u \in L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) : u \in W^2(a,b)\ \forall (a,b) : 0 < a < b \leq 1 ;$$

$$u(1) = 0 ;\ L u \in L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) \}$$

$$\chi = \{ u \in L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) :\ u' \in L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}-\alpha_1}(0,1),\ u'' \in L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1);\ u(1) = 0 \}$$

$$\bar{\chi} = \{ u \in W^2(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(0,1) : u \equiv 0 \text{ in un intorno destro di } x = 0 \}$$

Evidentemente risulta $\bar{\chi} \subseteq \chi \subseteq \mathcal{H}$.

Introdotta poi in χ la norma:

$$(2.2)\qquad \| u \|^2 \equiv \| u \|^2_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} + \| u' \|^2_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}-\alpha_1}(0,1)} + \| u'' \|^2_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)}$$

si verifica che vale la seguente:

Proposizione 2.1 — $\bar{\chi}$ è denso in χ nella norma (2.2).

Dim. — $\forall\, \delta \in]0, 1]$ consideriamo una funzione φ_δ tale che:

$$(2.3) \qquad \varphi_\delta = \begin{cases} 0 \text{ se } x \leq \delta/2 \\ 1 \text{ se } x \geq \delta \end{cases} \; ; \quad 0 \leq \varphi_\delta \leq 1 \; ; \; |\, D^\alpha \varphi_\delta \,| \leq \gamma_\alpha\, \delta^{-\alpha}$$

Se $u \in \chi$ allora $u\,\varphi_\delta \in \bar{\chi}$ ed inoltre:

$$(2.4) \qquad \| u - u\,\varphi_\delta \|^2 = \int_0^\delta \rho^{\alpha_2} (u'' - D^2 (u\,\varphi_\delta))^2\, d\,x$$

$$+ \int_0^\delta \rho^{\alpha_2 - 2\alpha_1} (u' - D\,(u\,\varphi_\delta))^2\, d\,x + \int_0^\delta \rho^{-\alpha_2} (u - u\,\varphi_\delta)^2\, d\,x = I_1 + I_2 + I_3$$

Risulta:

$$(2.5) \qquad I_1 = \int_0^\delta \rho^{\alpha_2} (u'' - D^2 (u\,\varphi_\delta))^2\, d\,x$$

$$\leq K \left[\int_0^\delta (\rho^{\frac{\alpha_2}{2}}\, u'')^2\, d\,x + \int_0^\delta (\rho^{\frac{\alpha_2}{2}}\, u'\,\varphi_\delta')^2\, d\,x + \int_0^\delta (\rho^{\frac{\alpha_2}{2}}\, u\,\varphi_\delta'')^2\, d\,x \right]$$

Tenendo conto della terza delle (2.3) e di i_1), da (2.5) si ricava allora:

$$I_1 \leq K \left[\int_0^\delta (\rho^{\frac{\alpha_2}{2}}\, u'')^2\, d\,x + \int_0^\delta (\rho^{\frac{\alpha_2}{2} - \alpha_1}\, u')^2\, d\,x + \int_0^\delta (\rho^{-\frac{\alpha_2}{2}}\, u)^2\, d\,x \right];$$

e quindi, per l'appartenenza di u a χ, I_1 tende a zero al tendere a zero di δ.

Poiché in maniera analoga si ragiona per I_2 e I_3 la Proposizione 2.1 è dimostrata.

COROLLARIO. — Ogni $u \in \chi$ è continua in $[0, 1]$ e verifica la condizione $u\,(0) = 0$.

Dim. — Applichiamo in $I\,(x_0)$ la sostituzione (1.2). In base alla diseguaglianza di Ehrling, $\forall\, \varepsilon \in]0, 1]$ si ha:

$$(2.6) \qquad \| \breve{u}' \|_{0, J(x_0)} \leq K\, (\varepsilon \| \breve{u}'' \|_{0, J(x_0)} + \varepsilon^{-1} \| \breve{u} \|_{0, J(x_0)}) .$$

Effettuiamo la sostituzione inversa della (1.2); ponendo $\varepsilon = \rho_o^s$ e moltiplicando per ρ_o^t si ottiene da (2.6)

$$(2.7)\quad \rho_o^{1+t-\frac{1}{2}} \| u' \|_{0,I(x_o)} \leq K (\rho_o^{s+2+t-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_o)} + \rho_o^{-s+t-\frac{1}{2}} \| u \|_{0,I(x_o)})$$

Imponiamo che risulti:

$$1 + t = 0 ; \; s + 2 + t = \frac{\alpha_2}{2} ; \; - s + t = - \frac{\alpha_2}{2}$$

risolvendo allora il sistema nelle incognite s, t si ricava

$$(2.8)\qquad t = - 1 ; \; s = \frac{\alpha_2}{2} - 1 \geq 0$$

Da (2.7) e (2.8) si trae, grazie ai lemmi 1.1 e 1.2 di TROISI [4], che: $u' \in L^2(0, 1)$. Così si è dimostrato che se $u \in \chi$ allora $u \in W^1(0, 1)$. Di qui, dal teorema di Sobolev e dalla proposizione 2.1 segue senz'altro l'asserto.

3. - IL TEOREMA DI REGOLARIZZAZIONE.

Consideriamo, nell'intervallo $[a, b]$, l'operatore ausiliario, a coefficienti costanti dipendenti dal parametro $\varepsilon > 0$:

$$(3.1)\qquad \mathcal{A} w = - \varepsilon^{-2} w'' + c_1 \varepsilon^{-1-\alpha_1} w' + c_2 \varepsilon^{-\alpha_2} w$$

dove supponiamo $c_1 \neq 0$, $c_2 > 0$.
Per tale operatore risolviamo il problema:

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} w = \Phi \in C_o^\infty (]a, b[) \\ w(a) = w(b); \; w'(a) = w'(b) \end{cases}$$

Si vede subito che vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3.1. — La soluzione $w \in C^\infty$ del problema (3.2) verifica la limitazione:

$$(3.3)\quad \varepsilon^{-2} \| w'' \|_{L^2(a,b)} + \varepsilon^{-1-\alpha_1} \| w' \|_{L^2(a,b)} + \varepsilon^{-\alpha_2} \| w \|_{L^2(a,b)} \leq K \| \Phi \|_{L^2(a,b)}$$

con K costante assoluta.

Dim. — Ad esempio, moltiplicando per w'' ambo i membri di $\mathcal{A}\, w = \Phi$ e integrando su $[a, b]$, si ha con opportune integrazioni per parti:

$$\int_a^b \Phi\, w''\, d\,\xi = -\,\varepsilon^{-2}\,\|\, w''\,\|^2_{L^2(a,b)} - c_2\,\varepsilon^{-\alpha_2}\,\|\, w'\,\|^2_{L^2(a,b)}$$

da cui discende ovviamente:

$$\varepsilon^{-2}\,\|\, w''\,\|_{L^2(a,b)} \leq \|\, \Phi\,\|_{L^2(a,b)}\,.$$

Sia ora $x_o \in\,]0, \sigma[$, ξ il generico punto di $J_{\frac{1}{2}}(x_o)$ ed $r \in \left]\, 0, \dfrac{1}{12}\right[$ un numero da precisarsi in seguito. Indichiamo con S_r l'intervallo $]\,\xi - r, \xi + r[$ e con ζ_r una funzione di classe C^∞ tale che:

$$\zeta_r \equiv 1 \text{ in } S_{\frac{r}{3}}\,;\ \zeta_r \equiv 0 \text{ in } C\,S_{\frac{r}{3}}\,;\ 0 \leq \zeta_r \leq 1\,.$$

Poniamo poi $S = S_{\frac{1}{4}} \equiv \left]\, \xi - \dfrac{1}{4}\,, \xi + \dfrac{1}{4}\right[$.
Se, al solito, poniamo $L\, u = f$, ciò che implica $\wedge\, \check{u} = \check{f}$ si ha, evidentemente:

$$\int_S \check{u} \wedge^* v\, d\,\xi = \int_S v \wedge \check{u}\, d\,\xi = \int_S \check{f} \cdot v\, d\,\xi \quad \forall\, u \in \mathcal{H} \text{ e } \forall\, v \in C_o^\infty(S)$$

Conseguentemente, per ogni $v \in C^\infty$ e per ogni $u \in \mathcal{H}$:

$$\int_S \check{u} \wedge^* (\zeta_r\, v)\, d\,\xi = (\check{u},\, \wedge^* (\zeta_r\, v))_{S_r} = \int_S \check{f}\, \zeta_r\, v\, d\,\xi\,. \tag{3.4}$$

Dimostriamo ora il seguente:

LEMMA 3.1. — Se $x_o \in\,]0, \sigma[$ e $u \in \mathcal{H}$, allora sussiste la seguente diseguaglianza:

$$\|\, \check{u}''\,\|_{0,J_{\frac{1}{2}}(x_o)} \leq (\varepsilon\,\|\, \check{u}''\,\|_{0,J(x_o)} + \varepsilon^{-1}\,\|\, \check{u}\,\|_{0,J(x_o)} + \rho_o^2\,\|\, \check{f}\,\|_{0,J(x_o)}) \tag{3.5}$$

con K indipendente da u, da x_o e da $\varepsilon \in\,]0, 1[$.

Dim. — Sia $\Phi \in C_0^\infty(S)$ tale che, posto $u_r = \check{u}\,\zeta_r$, risulti:

$$\| u_r'' - \Phi \|_{0,S} \leq \frac{1}{3} \| u_r'' \|_{0,S_r} \tag{3.6}$$

Per tale Φ risolviamo il problema (3.2) nell'intervallo

$$[a, b] = \left[\xi - \frac{1}{4}, \xi + \frac{1}{4} \right], \text{ con } \varepsilon = \rho_0 \text{ e } c_i = C_i(\xi).$$

In base alla proposizione 3.1 esiste una soluzione $w \in C^\infty$ dell'equazione:

$$\mathcal{A}\, w = \Phi \tag{3.7}$$

verificante la limitazione:

$$\begin{aligned} &\rho_0^{-2} \| w'' \|_{L^2(S)} + \rho_0^{-1-\alpha_1} \| w' \|_{L^2(S)} + \rho_0^{-\alpha_2} \| w \|_{L^2(S)} \\ &\leq K' \| \Phi \|_{0,S} \leq K \| u_r'' \|_{0,S_r} \end{aligned} \tag{3.8}$$

essendo K, per la (1.12), indipendente da x_0 e da ξ.

Per tale w si ha $w'' \in C^\infty$, per cui, scrivendo la (3.4) con $v = w''$ e tenendo conto della (3.8), si ha:

$$| (\check{u},\ \wedge^*(\zeta_r\, w''))_{S_r} | \leq K \| \check{f} \|_{0,S_r} \rho_0^2 \| u_r'' \|_{0,S_r} \tag{3.9}$$

Risulta poi:

$$\begin{aligned} &(\check{u},\ \wedge^*(\zeta_r\, w''))_{S_r} - (\check{u}\,\zeta_r,\ \wedge^* w'')_{S_r} \\ &= (\check{u},\ -\rho_0^{-2} (\zeta_r''\, w'' + 2\,\zeta_r'\, w''') + C_1 \rho_0^{-1-\alpha_1} \zeta_r'\, w'')_{S_r} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dalla (3.10), integrando opportunamente per parti e tenendo conto di (3.8), si ricava grazie anche alla 1.11):

$$\begin{aligned} &| (\check{u},\ \wedge^*(\zeta_r\, w''))_{S_r} - (\check{u}\,\zeta_r\ \wedge^* w'')_{S_r} | \\ &\leq K\, \gamma_r \| u_r'' \|_{0,S_r} [\| \check{u} \|_{0,S_r} + \| \check{u}' \|_{0,S_r}] \end{aligned} \tag{3.11}$$

D'altro canto risulta:

$$(3.12)\qquad (u_r,\ \wedge^{*} w'')_{S_r} - (u_r'',\ \wedge^{*} w)_{S_r}$$

$$= \int_{S_r} (\rho_o^{-1-\alpha_1} w' [2 u_r' C_1' + u_r C_1''] + \rho_o^{-\alpha_2} w [2 u_r' C_2' + u_r C_2'']) d\xi$$

da cui, grazie a (3.8) ed a (1.11):

$$(3.13)\qquad |(u_r, \wedge^{*} w'')_{S_r} - (u_r'',\ \wedge^{*} w)_{S_r}|$$

$$\leq K \gamma_r \| u_r'' \|_{0,S_r} [\| \breve{u} \|_{0,S_r} + \| \breve{u}' \|_{0,S_r}]$$

Da (3.9), (3.11) e (3.13) discende:

$$(3.14)\quad |(u_r'', \wedge^{*} w)_{S_r}| \leq K\gamma_r \| u_r'' \|_{0,S_r} \cdot [\rho_o^2 \| \breve{f} \|_{0,S_r} + \| \breve{u} \|_{0,S_r} + \| \breve{u}' \|_{0,S_r}]$$

Inoltre risulta, in base a (3.6) e (3.7):

$$(3.15)\quad |(u_r'',\ \wedge^{*} w)_{S_r}| = (u_r'',\ u_r'' + \Phi - u_r'' + \wedge^{*} w - \mathcal{A} w)_{S_r}|$$

$$\geq \frac{2}{3} \| u_r'' \|_{0,S_r}^2 - |(u_r'', [\wedge^{*} - \mathcal{A}] w)_{S_r}|$$

Ricordando le espressioni di $\wedge^{*}$ e di $\mathcal{A}$ si riconosce facilmente l'esistenza di una costante K_1 tale da aversi:

$$(3.16)\qquad |(u_r'', [\wedge^{*} - \mathcal{A}] w)_{S_r}| \leq K_1 \cdot r \cdot \| u_r'' \|_{0,S_r}^2$$

Fissando allora r con la posizione $r = \min \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{3 K_1} \right\}$ segue da (3.15) e (3.16):

$$(3.17)\qquad \| u_r'' \|_{0,S_r}^2 \leq 3 |(u_r'',\ \wedge^{*} w)|$$

Da (3.14) e (3.17) ricaviamo allora, essendo ormai γ_r diventata una costante assoluta:

$$(3.18)\qquad \| u_r'' \|_{0,S_r} \leq K [\rho_o^2 \| \breve{f} \|_{0,S_r} + \| \breve{u} \|_{0,S_r} + \| \breve{u}' \|_{0,S_r}]$$

$$\leq K [\rho_o^2 \| \breve{f} \|_{0,S} + \| \breve{u} \|_{0,S} + \| \breve{u}' \|_{0,S}]$$

Ricordiamo adesso che $u_r = \breve{u}\,\zeta_r$ e $\zeta_r \equiv 1$ in $S_{\frac{r}{3}}$. Ponendo allora $R = \frac{r}{3} = \frac{1}{3}\min\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{3K_1}\right\}$, si ottiene:

$$\| \breve{u}'' \|_{0,S_R} \leq K\,[\rho_o^2 \| \breve{f} \|_{0,S} + \| \breve{u} \|_{0,S} + \| \breve{u}' \|_{0,S}] \tag{3.19}$$

Da (3.19) si deduce poi, tenendo conto della diseguaglianza di Ehrling:

$$\| \breve{u}'' \|_{0,S_R} \leq K\,[\rho_o^2 \| \breve{f} \|_{0,S} + \varepsilon \| \breve{u}'' \|_{0,S} + \varepsilon^{-1} \| \breve{u} \|_{0,S}] .$$

Tale diseguaglianza si ottiene in corrispondenza di ogni $\bar{\xi} \in J_{\frac{1}{2}}(x_o)$. Ricoprendo allora $J_{\frac{1}{2}}(x_o)$ mediante un numero finito di insiemi S_R (numero indipendente da u e da x_o) si perviene facilmente alla (3.5).

In maniera sostanzialmente analoga si dimostra poi il:

LEMMA 3.2. — Se $x_o \in]0, \sigma[$ e $u \in \mathcal{H}$ allora sussiste la diseguaglianza:

$$\| \breve{u}' \|_{0,J_{\frac{1}{2}}(x_o)} \leq K\,(\rho_o^{1+\alpha_1} \| \breve{f} \|_{0,I(x_o)} + \| \breve{u} \|_{0,I(x_o)}) \tag{3.20}$$

con K indipendente da u e da x_o.

I lemmi (3.1) e (3.2) permettono ora di dimostrare il seguente:

TEOREMA 3.1. — Se $u \in \mathcal{H}$ risulta anche $u \in \chi$ ed inoltre si ha:

$$\| u \| \leq K\,[\| u \|_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} + \| L\,u \|_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)}] \tag{3.21}$$

con K indipendente da u.

Dim. — In base al lemma (3.1), $\forall\, x_o \in]0, \sigma[$ e $\forall\, u \in \mathcal{H}$ vale la (3.5) Moltiplchiamo ambo i membri della (3.5) per $\rho_o^{\frac{\alpha_2}{2}-2}$ ed effettuiamo la sostituzione inversa della (1.2); si ottiene

$$\rho_o^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I_{\frac{1}{2}}(x_o)} \leq K\,[\varepsilon\, \rho_o^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_o)} \tag{3.22}$$

$$+ \varepsilon^{-1} \rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-2-\frac{1}{2}} \| u \|_{0,I(x_0)} + \rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| f \|_{0,I(x_0)}]$$

$$\leq K [\varepsilon \rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)} + \varepsilon^{-1} \rho_0^{-\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u \|_{0,I(x_0)} + \rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| f \|_{0,I(x_0)}]$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che per ipotesi è $\alpha_2 > 2$.

Eleviamo adesso primo e ultimo membro della (3.22) al quadrato ed integriamo su $[0, \sigma]$; avremo:

$$(3.23) \qquad \int_0^\sigma (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I_{\frac{1}{2}}(x_0)})^2 \, d\, x_0$$

$$\leq K \left[\varepsilon^2 \int_0^\sigma (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)})^2 \, d\, x_0 + \varepsilon^{-2} \int_0^\sigma (\rho_0^{-\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u \|_{0,I(x_0)})^2 \, d\, x_0 \right.$$

$$\left. + \int_0^\sigma (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| f \|_{0,I(x_0)})^2 \, d\, x_0 \right.$$

Il primo membro della (3.23) si minora in modo ovvio ricorrendo al lemma 1.1 di TROISI [4] scritto per $p = 2$ e $n = 1$:

$$(3.24) \qquad \int_0^\sigma (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I_{\frac{1}{2}}(x_0)})^2 \, d\, x_0 \geq \gamma_1 \| u'' \|^2_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,\sigma)}$$

Per quanto riguarda il primo addendo del secondo membro della (3.23), osserviamo che:

$$(3.25) \qquad \int_0^\sigma (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)})^2 \, d\, x_0 =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}\sigma} (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)})^2 \, d\, x_0 + \int_{\frac{2}{3}\sigma}^\sigma (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)})^2 \, d\, x_0$$

Per $x_0 \leq \frac{2}{3}\sigma$ risulta $I(x_0) = \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3}{2} x_0 \right] \subset [0, \sigma]$, quindi ricorrendo al lemma 1.2 di TROISI [4], scritto sempre per $p = 2$ e $n = 1$,

si ha:

$$\int_0^{\frac{2}{3}\sigma} (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)})^2 \, d x_0 \leq \gamma_2 \| u'' \|^2_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,\sigma)} \tag{3.26}$$

Inoltre:

$$\int_{\frac{2}{3}\sigma}^{\sigma} (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)})^2 \, d x_0 \tag{3.27}$$

$$\leq \int_{\frac{2}{3}\sigma}^{\sigma} (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{L^2\left(\frac{\sigma}{3}, \frac{3}{2}\sigma\right)})^2 \, d x_0 \leq K \| u'' \|_{L^2\left(\frac{\sigma}{3}, \frac{3}{2}\sigma\right)}$$

Ora in ogni intervallo $[a, b] \subset]0, 1]$ i coefficienti di L sono limitati, quindi se $a < a' < b' < b$ risulta:

$$\| u'' \|_{L^2(a'b')} \leq K_1 [\| u \|_{L^2(a,b)} + \| f \|_{L^2(a,b)}] \tag{3.28}$$

essendo K dipendente da a', b', a, b. Dalla (3.28) segue allora in modo ovvio l'esistenza di una costante K indipendente da u tale che:

$$\| u'' \|_{L^2\left(\frac{\sigma}{3}, \frac{3}{2}\sigma\right)} \leq K [\| u \|^2_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} + \| f \|^2_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)}] \tag{3.29}$$

Da (3.25), (3.26) (3.27) e (3.29) discende

$$\int_0^{\sigma} (\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}} \| u'' \|_{0,I(x_0)})^2 \, d x_0 \tag{3.30}$$

$$\leq K [\| u'' \|^2_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,\sigma)} + \| u \|^2_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} + \| f \|^2_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)}]$$

Poiché il secondo e terzo addendo del secondo membro della (3.23) si maggiorano in modo ovvio, ricorrendo al già citato lemma 1.2 di Troisi, con

$$K [\| u \|^2_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} + \| f \|^2_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)}],$$

in definitiva si ricava da (3.23), (3.24) e (3.30), fissando ε in modo

opportuno, che risulta:

$$\| u'' \|_{L^2 \left(0,\sigma\right)}^{\frac{\alpha_2}{2}} \leq K \left[\| u \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{-\frac{\alpha_2}{2}} + \| f \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{\frac{\alpha_2}{2}} \right] \tag{3.31}$$

Osserviamo ora che, poiché $u \in \mathcal{H}$, la (3.28) sussiste anche per $b' = b = 1$; conseguentemente:

$$\| u'' \|_{L^2 \left(\sigma,1\right)}^{\frac{\alpha_2}{2}} \leq K \left[\| u \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{-\frac{\alpha_2}{2}} + \| f \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{\frac{\alpha_2}{2}} \right] \tag{3.32}$$

Possiamo allora concludere da (3.31) e (3.32) che se $u \in \mathcal{H}$ allora $u'' \in L^{2}{}_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)$ ed inoltre:

$$\| u'' \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{\frac{\alpha_2}{2}} \leq K \left[\| u \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{-\frac{\alpha_2}{2}} + \| f \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{\frac{\alpha_2}{2}} \right] \tag{3.33}$$

con K indipendente da u.

Osserviamo ora che, in base al lemma 3.2, $\forall\, x_0 \in]0, \sigma[$ e $\forall\, u \in \mathcal{H}$ sussiste la relazione (3.20); moltiplichiamone ambo i membri per $\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2} - 1 - \alpha_1}$ ed effettuiamo la sostituzione inversa della (1.2). Si ottiene:

$$\begin{aligned} &\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2} - \alpha_1 - \frac{1}{2}} \| u' \|_{0,I\left(x_0\right)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \left(\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{2}} \| f \|_{0,I(x_0)} + \rho_0^{\frac{\alpha_2}{2} - 1 - \alpha_1 - \frac{1}{2}} \| u \|_{0,I(x_0)} \right) \\ &\leq K \left(\rho_0^{\frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{2}} \| f \|_{0,I(x_0)} + \rho_0^{-\frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{2}} \| u \|_{0,I(x_0)} \right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

dove si è tenuto conto che per ipotesi è $\alpha_2 > 1 + \alpha_1$.

Dalla (3.34), ripetendo ragionamenti analoghi a quelli tenuti per dedurre la (3.33) dalla (3.22) si perviene a:

$$\| u' \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{\frac{\alpha_2}{2} - \alpha_1} \leq K \left[\| u \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{-\frac{\alpha_2}{2}} + \| f \|_{L^2 \left(0,1\right)}^{\frac{\alpha_2}{2}} \right] \tag{3.35}$$

con K indpendente da u.

In maniera del tutto analoga si prova poi il seguente:

TEOREMA 3.2. — Se risulta:

$$u \in \mathcal{H}_* \equiv \{u \in L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)/u \in W^2(a,b)\ \forall\ (a,b) : 0 < a < b \leq 1\ ;\ u(1) \equiv 0;\ L^* u \in L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)\}$$

allora risulta anche: $u \in \chi$, ed inoltre si ha:

$$\| u \| \leq K \left[\| u \|_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} + \| L^* u \|_{L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} \right] \tag{3.36}$$

4. - IL TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ.

Sia $u \in \bar{\chi}$; moltplicando per u ambo i membri di $L u = f$ ed integrando su $[0, 1]$ si ottiene:

$$\| u' \|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 \frac{a_1}{x^{\alpha_1}} u' u \, dx + \int_0^1 \frac{a_2}{x^{\alpha_2}} u^2 \, dx = \int_0^1 f u \, dx \tag{4.1}$$

Ora risulta:

$$\int_0^1 \frac{a_1}{x^{\alpha_1}} u u' \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\alpha_1 a_1 - x a_1') \frac{u^2}{x^{\alpha_1 + 1}} \, dx \tag{4.2}$$

e quindi, posto $c_0 = \frac{1}{2} [\alpha_1 \cdot \max_{[0,1]} |a_1| + \max_{[0,1]} |a_1'|]$ poiché è $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$:

$$\left| \int_0^1 \frac{a_1}{x^{\alpha_1}} u u' \, dx \right| \leq c_0 \| u \|_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} \tag{4.3}$$

Se allora $\min_{[0,1]} a_2 > c_0$, discende in modo ovvio da (4.1) e (4.2) che esiste una costante assoluta K tale da aversi:

$$\| u \|_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} \leq K \| f \|_{L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)} \qquad \forall\ u \in \bar{\chi}\ .$$

Tenendo allora presenti la proposizione 2.1 e il teorema 3.1 si stabilisce immediatamente il seguente:

TEOREMA 4.1. — Nelle ipotesi i_1) e i_2), se inoltre $\min_{[0,1]} a_2 > c_0 = \frac{1}{2}[\alpha_1 \cdot \max_{[0,1]} |a_1| + \max_{[0,1]} |a_1'|]$ allora L è un operatore iniettivo e a codominio chiuso da χ in $L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)$.

È bene osservare esplicitamente che, poiché risulta:

$$(4.4) \qquad L^* v = -v'' - \frac{a_1}{x^{\alpha_1}} v' + \left(\alpha_1 \frac{a_1}{x^{\alpha_1+1}} - \frac{a_1'}{x^{\alpha_1}} + \frac{a_2}{x^{\alpha_2}}\right) v$$

considerando una $v \in \bar{\chi}$ e moltiplicando scalarmente ambo i membri di (4.2) per v si ottiene, tenendo conto anche di (4.2):

$$(4.5) \qquad \| v' \|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2} \int_0^1 (\alpha_1 a_1 - x a_1') \frac{v^2}{x^{\alpha_1+1}} dx + \int_0^1 \frac{a_2}{x^{\alpha_2}} v^2 dx = \int_0^1 L^* v \cdot v \, dx$$

Ne discende il seguente:

TEOREMA 4.2. — Nelle ipotesi i_1) e i_2), se inoltre $\min_{[0,1]} a_2 > c_0 = \frac{1}{2}[\alpha_1 \cdot \max_{[0,1]} |a_1| + \max_{[0,1]} |a_1'|]$ allora anche L^* è un operatore iniettivo e a codominio chiuso da χ in $L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)$.

È ora possibile, relativamente al problema:

$$(4.6) \qquad \begin{cases} Lu = f \\ u \in \chi \end{cases} \qquad f \in L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1),$$

dimostrare il seguente teorema di esistenza e di unicità:

TEOREMA 4.3. — Se sono soddisfatte i_1) e i_2) ed è: $\min_{[0,1]} a_2 > c_0 = \frac{1}{2}[\alpha_1 \max_{[0,1]} |a_1| + \max_{[0,1]} |a_1'|]$ allora il problema (4.6) ammette una ed una sola soluzione.

Dim. — In base ai teoremi 4.1 e 4.2 i problemi (4.6) e:

$$(4.7) \qquad \begin{cases} \mathrm{L}^* v = g \\ v \in \chi \end{cases} \qquad g \in \mathrm{L}^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)$$

ammettono, nelle ipotesi considerate, ciascuno al più una soluzione.

Detto χ' il duale di χ, l'operatore aggiunto di L è l'operatore:

$$\mathfrak{L}^* : \mathrm{L}^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) \to \chi'$$

definito dalla relazione:

$$< \mathfrak{L}^* v, u > \; = \; < v, \mathrm{L}\, u > \equiv \int_0^1 v \; \mathrm{L}\, u \; dx$$

$$\forall\, v \in \mathrm{L}^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) \text{ e } \forall\, u \in \chi$$

Poiché L è a codominio chiuso, $\mathrm{L}\, u = \mathrm{f}$ è risolubile se e solo se $< f, v > \; = \; 0 \;\; \forall\, v \in \mathrm{L}^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)$: $\mathfrak{L}^* v = 0$. In particolare quindi $\mathrm{L}u = f$ è risolubile qualunque sia $f \in \mathrm{L}^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1)$ se e solo se vale l'implicazione:

$$(4.8) \qquad \left(v \in \mathrm{L}^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) \;\text{ e }\; \int_0^1 v \; \mathrm{L}\, u \; dx = 0 \;\; \forall\, u \in \chi \right) \Rightarrow v = 0$$

Ora, per provare la (4.8), basta in effetti provare che:

$$(4.9) \qquad \left(v \in \mathrm{L}^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) \;\text{ e }\; \int_0^1 v \; \mathrm{L}\, u \; dx = 0 \;\; \forall\, u \in \chi \right)$$

$$\Rightarrow (v \in \chi \text{ e } \mathrm{L}^* v = 0)$$

in quanto per il teorema 4.2 si ha:

$$(v \in \chi,\; \mathrm{L}^* v = 0) \Rightarrow v = 0$$

Per provare la (4.9) osserviamo che con procedimenti analoghi a quelli usati per regolarizzare le soluzioni deboli delle equazioni ellit-

tiche (cfr. AGMON [1]), si dimostra la seguente implicazione:

$$(4.10)\quad \Big\{ v \in L^2_{-\frac{\alpha_2}{2}}(0,1),\ g \in L^2_{\frac{\alpha_2}{2}}(0,1) \int_0^1 v\, L u\, dx = \int_0^1 u\, g\, dx \quad \forall u \in \chi$$

$$0 < \alpha < a < b \leq \beta \leq 1 \Big\}$$

$$\Rightarrow \{ v, v', v'' \in L^2(a,b),\ L^* v = g,\ v(1) = 0$$

$$\| v \|_{L^2(a,b)} + \| v' \|_{L^2(a,b)} + \| v'' \|_{L^2(a,b)} \leq K (\| g \|_{L^2(\alpha,\beta)} + \| v \|_{L^2(\alpha,\beta)}) \}$$

dove può essere $b = \beta$ solo per $b = \beta = 1$ e dove K dipende da a, b, α, β.

Dalla (4.10), grazie al teorema 3.2, possiamo concludere che $v \in \chi$. Dopo di ciò la (4.9) è acquisita; l'asserto è così provato.

OSSERVAZIONE. — Se è soddisfatta i_2) ed inoltre:

$$\min_{[0,1]} a_2 \geq \alpha_1 \cdot \max |a_1| + \max |a_1'|$$

il teorema 4.3 si applica anche ad operatori per cui sia $\alpha_1 \geq 1$, $\alpha_2 = 1 + \alpha_1$. Infatti in tale caso da (1.9) e (1.7) si ricava ancora la (1.12).

BIBLIOGRAFIA

[1] AGMON S., *The* L_p *approach to the Dirichlet problem*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (III) vol. XIII, 405-448 (1959).

[2] BUREAU F. J., *Sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre ayant en un point singulier irrégulier une intégrale régulière*, Bollettino U.M.I. (4) 11, Suppl. fasc. 3 (1975), 148-160.

[3] CANFORA A., *Su di un'equazione ellittica con dati singolari*, Ricerche di Matematica, vol. XXIV 341-383 (1975).

[4] TROISI M., *Problemi ellittici con dati singolari*, Annali di Matematica pura e applicata, **83**, 363-407 (1969).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, F. Cafiero e C. Ciliberto.

Ricerche sull'incorporazione dei metalli in tracce nelle valve del *Mytilus galloprovincialis* *

Nota di MARIO D'AGOSTINO **, AUGUSTO BIONDI ***,
GIOVANNA MISURACA ** e GIOVANNI SANSONE ***
presentata dal socio ordinario R. A. NICOLAUS

(Adunanza del 7 maggio 1977)

RIASSUNTO. — I metalli in tracce, per quanto concerne l'incorporazione nella conchiglia del *Mytilus galloprovincialis,* si comportano in due modi diversi a seconda che i pK_{ps} dei rispettivi carbonati sono minori o maggiori del pK_{ps} del carbonato di calcio. Nel primo caso, infatti, vengono catturati dalle valve con estrema difficoltà, nel secondo, invece, vengono incorporati tanto più facilmente quanto più elevato è il pK_{ps}.

SUMMARY. — Evidence is presented showing that the extent of incorporation of trace metals into the valves of *Mytilus galloprovincialis* depends upon the pK_{sp} value of corresponding carbonates with respect to that of $CaCO_3$.

Nel quadro dei complessi fenomeni che concorrono alla formazione della conchiglia nei molluschi, uno dei problemi non ancora chiariti è quello riguardante l'incorporazione dei metalli in tracce [1]. Secondo l'opinione più diffusa [2] questi elementi possono essere incorporati nella conchiglia in varie forme: sostituendo il calcio nel reticolo del carbonato, come costituenti di fasi minerali separate, per adsorbimento sulla superficie dei cristalli o come costituenti di composti organici. L'entità dell'incorporazione viene messa in relazione con il raggio ionico degli elementi [3] e, più in generale, con fattori cristallografici (isomorfismo) [2, 4, 5, 6]). Altri fattori considerati corresponsabili sono anche quelli ambientali (temperatura e salinità dell'acqua) [7, 8, 9] e quelli fisiologici e biochimici [10].

* Lavoro eseguito con il contributo della Regione Campania.
** Istituto di Chimica Organica della Facoltà di Scienze - Università di Napoli - Via Mezzocannone 16 - 80134 Napoli.
*** Istituto di Biorganica della Facoltà di Farmacia - Università di Napoli - Via L. Rodinò 22 - 80138 Napoli.

Essendo il problema scientificamente stimolante, sono state riprese e ampliate le indagini già effettuate, per altri scopi, su campioni di *Mytilus galloprovincialis*, prelevati in zone particolarmente e variamente inquinate del Golfo di Napoli [11]. Sono state determinate le concentrazioni di alcuni elementi (Mg, Zn, Cu, Cd e Pb), sia nelle valve (C_v) che nel corpo del mollusco (C_c), mediante la tecnica dell'assorbimento atomico, su soluzioni ottenute per lisciviazione nitrica delle ceneri, secondo il metodo consigliato da MERANGER e SOMERS [12]. In tabella I sono riportati, accanto a ogni elemento, i valori medi di C_v, di C_c e del rapporto $\rho = C_v/C_c$ (coefficiente di ripartizione del metallo tra valve e corpo del mollusco). Si vede che ρ,

TABELLA I

Metallo	Concentrazione media (µg/g di sost. secca)		$\rho = C_v/C_c$
	C_v	C_c	
Mg	168	7500	0,02
Zn	4,8	158,4	0,03
Cu	8,5	9,3	0,9
Cd	4,3	2,1	2,0
Pb	50,4	18,7	2,7

praticamente nullo per magnesio e zinco, comincia a crescere sensibilmente dal rame al piombo. La tabella II mostra che i coefficienti di ripartizione dei vari metalli sono indipendenti dalle dimensioni dei rispettivi ioni. Il piombo infatti, pur avendo un raggio ionico che differisce da quello del calcio di 0,23 Å in valore assoluto, è caratterizzato da un ρ molto più grande di quelli del rame e del cadmio i cui raggi ionici differiscono da quello del calcio di soli 0,02 Å. Si nota, invece, una stretta correlazione tra i coefficienti di ripartizione dei metalli in tracce e i pK_{ps} dei corrispondenti carbonati. Anzi questi elementi si comportano in due modi diversi a seconda che i pK_{ps} dei rispettivi carbonati sono minori o maggiori del pK_{ps} del carbonato di calcio (8, 3). Nel primo caso, infatti, vengono catturati dalle valve con estrema difficoltà (si considerino i valori praticamente nulli di ρ per Mg e Zn); nel secondo, invece, vengono incorporati tanto più facilmente quanto più elevato è il pK_{ps} (si noti che ρ cresce da Cu a Pb). Riportando in grafico ρ in funzione del pK_{ps} (vedi figura) si osserva che, superato il *pK_{ps} di interdizione* (localizzabile, per estrapolazione, proprio intorno al valore previsto di

8, 3), i punti sperimentali si allineano su di una retta. I risultati ottenuti sono in accordo con la regola empirica di FAJANS [13]. Ciò vuol dire che l'incorporazione dei metalli in tracce nella conchiglia è dovuta a un vero e proprio processo di coprecipitazione. Anzi, a seconda del raggio ionico e della forma cristallina dei rispettivi carbonati, dovrebbe trattarsi di coprecipitazione di tipo « isomorfo » o di tipo « anomalo » [14]. In entrambi i casi, comunque, gli ioni inquinanti sostituirebbero gli ioni calcio nei nodi dei reticoli e sarebbero uniformemente distribuiti in tutta la parte calcarea della con-

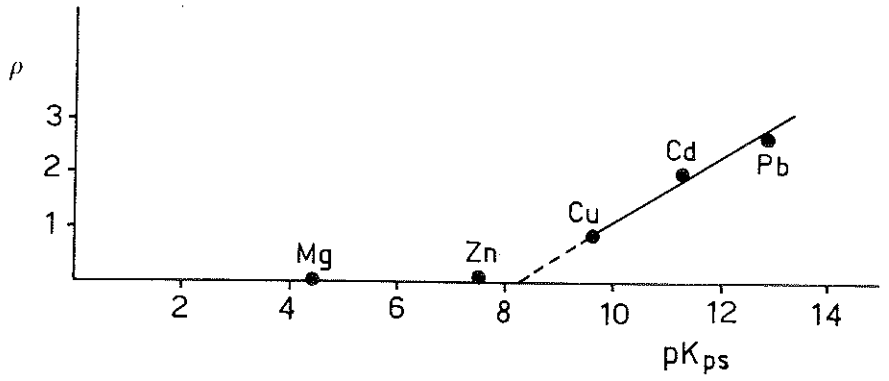


TABELLA II

Ione	Raggio ionico * (in Angstrom)	$\Delta r = \lvert r_{Ca}^{2+} - r_{M}^{2+} \rvert$ (in Angstrom)	pK_{ps} dei carbonati (a 25°C) **	$\rho = C_v/C_c$
Mg^{2+}	0,65	0,29	0,02	4,5
Zn^{2+}	0,69	0,25	0,03	7,5
Ca^{2+}	0,94	—	—	8,3
Cu^{2+}	0,92	0,02	0,9	9,6
Cd^{2+}	0,92	0,02	2,0	11,3
Pb^{2+}	1,17	0,23	2,7	12,8

* Raggi ionici secondo Goldschmidt.

** Tutti i valori dei pK_{ps}, ad eccezione di quello di $ZnCO_3$, sono stati presi da E. J. MARGOLIS (*Chemical principles in calculations of ionic equilibria*, Macmillan, New York, 1966). Per il pK_{ps} del carbonato di zinco, invece, esistendo in letteratura un gran numero di dati discordanti (5,5; 7,5; 9,7; 10,7 e 10,8) è stato scelto il valore riportato da L. F. HAMILTON e S. G. SIMPSON (*Calculations of analytical chemistry*, 6ª Ediz., Mc Graw-Hill, New York, 1960) perché più aderente alla teoria. Probabilmente, però, il valore eccessivamente basso di ρ per lo zinco potrebbe anche indicare che, in un intorno piuttosto ampio del pK_{ps} di interdizione, l'entità dell'incorporazione dei metalli in tracce non è completamente indipendente dal raggio ionico.

chiglia. Essendo estremamente lento il processo di cristallizzazione e irrilevante, rispetto agli ioni calcio, la « popolazione » degli ioni inquinanti, non deve destare meraviglia il fatto che l'entità dell'incorporazione di essi nelle valve sia praticamente indipendente dal raggio ionico e dipenda esclusivamente dal prodotto di solubilità dei corrispondenti carbonati. Infatti, si può supporre che le inevitabili distorsioni causate dalla cattura di questi ioni anomali, verificandosi molto raramente, possono essere agevolmente sopportate dai reticoli cristallini.

Gli Autori ringraziano il prof. E. Vitolo, dell'Istituto Tecnico Industriale « Leonardo da Vinci » di Napoli, per l'assistenza tecnica.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. M. Wilbur, in « Chemical Zoology - VII - Mollusca » di M. Florkin e B. T. Scheer, pp. 103-141, Academic Press, New York, 1972.
[2] J. R. Dodd, J. Paleontol., **41**, 1313-1329 (1967).
[3] K. K. Turekian e R. L. Armstrong, J. Mar. Res., **18**, 133-151 (1960).
[4] H. T. Odum, Inst. Mar. Sci., **4**, 38-114 (1957).
[5] R. C. Harris, Bull. Mar. Sci., **15**, 265-273 (1965).
[6] Y. Kitano, N. Kanamori e A. Tokuyama, Amer. Zool., **9**, 681-688 (1969).
[7] J. B. Bucker e J. W. Valentine, Nature (London), **190**, 1099-1100 (1961).
[8] O. H. Pilkey e H. G. Goodell, Limnol. Oceanogr., **8**, 137-148 (1963).
[9] J. R. Dodd, Geochim. Cosmochim. Acta, **29**, 385-398 (1965).
[10] H. A. Lowenstam, in « The Earth Sciences » di T. W. Donnelly, pp. 137-195, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1963.
[11] M. D'Agostino, A. Biondi e G. Sansone, Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat., **43**, 282-286 (1976).
[12] J. C. Meranger e E. Somers, Bull. Environ. Contam. Toxicol., **3**, 360 (1968).
[13] K. Fajans e P. Beer, Ber., **46**, 3486 (1913).
[14] O. Hann, Applied Radiochemistry, p. 96, Cornell Univ. Press., Ithaca, N. Y., 1936.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, L. Mangoni e R. A. Nicolaus.

Formazione di legami ammidici mediante sintesi enzimatica

Nota di FRANCESCO DE SIMONE *, ANTONIO DINI * e ELISEO RAMUNDO *
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 7 maggio 1977)

RIASSUNTO. — Nell'ambito delle ricerche sui composti di interesse biologico, è stata presa in esame la sintesi enzimatica di nuove anilidi della L-3-nitro-N-acetiltirosina.

Tale sintesi è stata convenientemente realizzata per riscaldamento in tubo chiuso, alla temperatura di 40°C, per vari giorni, dell'amminoacido e della base con una soluzione attivata di papaina in tampone citrato a pH 5.

I prodotti sintetizzati sono stati caratterizzati mediante l'esame degli spettri IR, NMR e di massa.

SUMMARY. — In connection with our researches into compounds of biological interest, we have taken into consideration the enzymic sinthesis of the new anilides of 3-nitro-N-acetyltyrosine.

These compounds were conveniently obtained by heating at about 40°C in a closed tube for several days of the amino acid and base with a papain active solution in citrate buffer (pH 5).

The starting materials and the obtained products have been characterized by IR, NMR, mass spectra examination.

La presente nota, data la grande importanza che la sintesi dei peptidi ha avuto nello sviluppo della chimica di questa classe di composti ed è tuttora in fase di continua evoluzione, riguarda lo studio della specificità degli enzimi che hanno la proprietà di sintetizzare legami peptidici.

Le indagini sulle sintesi enzimatiche di anilidi di N-amminoacidi acilati mediante papaina ed altri enzimi proteolitici, già da tempo descritte per primo da BERGMANN e FRAENKEL-CONRAT [1] nel 1937, sono state ora estese alla formazione di legami ammidici tra l'amminoacido 3-nitro-N-acetiltirosina (nella forma L) e varie ammine aromatiche (anilina e le tre toluidine isomere).

* Istituto di Biorganica della Facoltà di Farmacia.

In accordo con quanto riportato in letteratura [1-4] gli enzimi proteolitici sono capaci sia di effettuare la sintesi come pure l'idrolisi di legami peptidici. Si è ipotizzato che l'insieme delle condizioni fisicochimiche, come il pH, le solubilità e le concentrazioni sia dei reagenti che delle anilidi risultanti, la natura del gruppo acilico bloccante, la temperatura possono determinare il predominare dell'una o dell'altra reazione e, quindi, influenzare considerevolmente l'attività enzimatica.

Nelle esperienze di cui diamo comunicazione abbiamo anzitutto sintetizzato la 3-nitrotirosina (II) secondo quanto riportato da JOHNSON e KOHMANN [5]; successivamente essa è stata acilata sull'azoto in soluzione alcalina mediante anidride acetica (III). L'acetile, infatti, come già noto [3], si è rivelato essere il gruppo più rispondente allo scopo delle nostre ricerche in quanto esso conferisce una discreta solubilità in acqua all'N-acetil-3-nitrotirosina. Inoltre i risultati sperimentali ottenuti da NIEMANN e collaboratori [6] hanno dimostrato come, saggiando l'influsso di vari N-acil gruppi sull'andamento della sintesi enzimatica, a differenza di altri N-acil gruppi, l'acetile dia ottime rese.

La realizzazione delle anilidi preparate è stata effettuata aggiungendo la soluzione enzimatica, attivata con cisteina, ai reagenti solubilizzati in un tampone citrato a pH 5 contenente EDTA per chelare possibili metalli pesanti capaci di provocare reazioni ossidative; il tutto, accuratamente tappato, viene incubato ad una temperatura di circa 40° C per tempi variabili. Il più delle volte si osserva la formazione di un precipitato dopo circa due giorni. Il prodotto precipitato viene raccolto e caratterizzato mentre il filtrato ottenuto viene poi reincubato per permettere la precipitazione della rimanente L-anilide.

Detta sintesi ha avuto esito positivo per quanto concerne la reazione tra l'amminoacido e le seguenti ammine: anilina, m- e p-toluidina; non si è avuto alcun prodotto nel caso dell'o-toluidina. Ciò può, in prima approssimazione, attribuirsi all'ingombro sterico del gruppo metile in posizione orto al gruppo amminico della 2-metilanilina.

PARTE SPERIMENTALE

I p.f. riportati sono non corretti. Gli spettri effettuati sono stati eseguiti mediante i seguenti apparecchi:

— IR, in KBr, con Grating Spectrophotometer 177 della Perkin-Elmer (Fig. 1-6).

— NMR, in DMSO, con Hitachi Perkin-Elmer, Mod. R-24.

— massa, con spettrometro AEI mod. MS 902 presso l'Istituto di Chimica Organica - Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli, con introduzione diretta delle sostanze nella sorgente e con un potenziale di ionizzazione di 70 e V.

La L-tirosina (I) è stata acquistata dalla Carlo Erba. La sua nitrazione è stata eseguita come riportato in letteratura [5].

La papaina impiegata nelle sintesi enzimatiche è stata fornita dalla DAMOR di Napoli.

Il tampone citrato a pH 5 è stato preparato come segue:

100 cc di acido citrico 0,2N (g 1,40 di acido citrico idrato in 100 cc di acqua) vengono aggiunti e mescolati con 65 ml di NaOH 0,2N. Il pH di detto tampone viene controllato mediante piaccametro Jonosis con elettrodi a vetro e calomelano alla temperatura di circa 20° C.

3-Nitro-N-acetil-L-tirosina (III).

Grammi 11,3 (moli 0,05) di 3-nitro-Nacetil-L-tirosina vengono sciolti in 150 ml di idrossido di sodio 2N. Si aggiungono 12,5 ml di anidride acetica, goccia a goccia e sotto agitazione. Successivamente si acidifica e si lascia per un giorno a temperatura ambiente.

Precipitano g 8,5 di prodotto verdastro che, raccolto alla pompa, viene cristallizzato da alcool etilico: g 7,1 (resa 53 %) di cristalli giallini di prodotto acetilato, p.f. 189-192°C.

M^+ 268; ν_{max} (KBr) 3400, 3265, 1720, 1630, 1360, 860 cm^{-1}; δ (DMSO) 1,82 (3H, s, CH_3); 2,98 (2H, m, CH_2); 4,66 (1H, m, CH); 7,5 (3H, m, aromatici); 8,19 (1, d, NH, rimosso per scambio con D_2O); 10,8 (1H, s slargato, OH, o COOH, rimosso per scambio con D_2O).

Anilide della 3-nitro-N-acetil-L-tirosina (IV)

Grammi 1,37 (moli $5{,}1 \times 10^{-3}$) di 3-nitro-Nacetil-L-tirosina vengono messi in un tubo con 7 cc di una soluzione di acetato sodico 2M, 15 cc di tampone citrato a pH 5. Inoltre si addizionano g 1,0 (moli 0,0102) di anilina distillata di fresco. Il tutto si solubilizza a freddo mediante agitazione. Successivamente si aggiunge una soluzione di 10 ml, attivata dell'enzima costituita da 180 mg di papaina sospesa precedentemente in una miscela di 10 ml di acqua e 10 ml di tampone citrato (pH 5) e filtrata dopo circa 1/2 h. L'attivazione della soluzione enzimatica viene effettuata con l'aggiunta di 110 mg di cisteina cloridrato e di 50 mg di EDTA. La miscela di reazione così ottenuta viene portata con acqua ad un volume totale di 50 ml e, accuratamente tappata, viene incubata a 40°C in bagno ad olio termostatato. Dopo circa 30 h dall'inizio della reazione si nota un intorbidamento dovuto alla formazione di un precipitato che aumenta col tempo. Trascorsi 6 giorni viene interrotta la reazione di cui sopra.

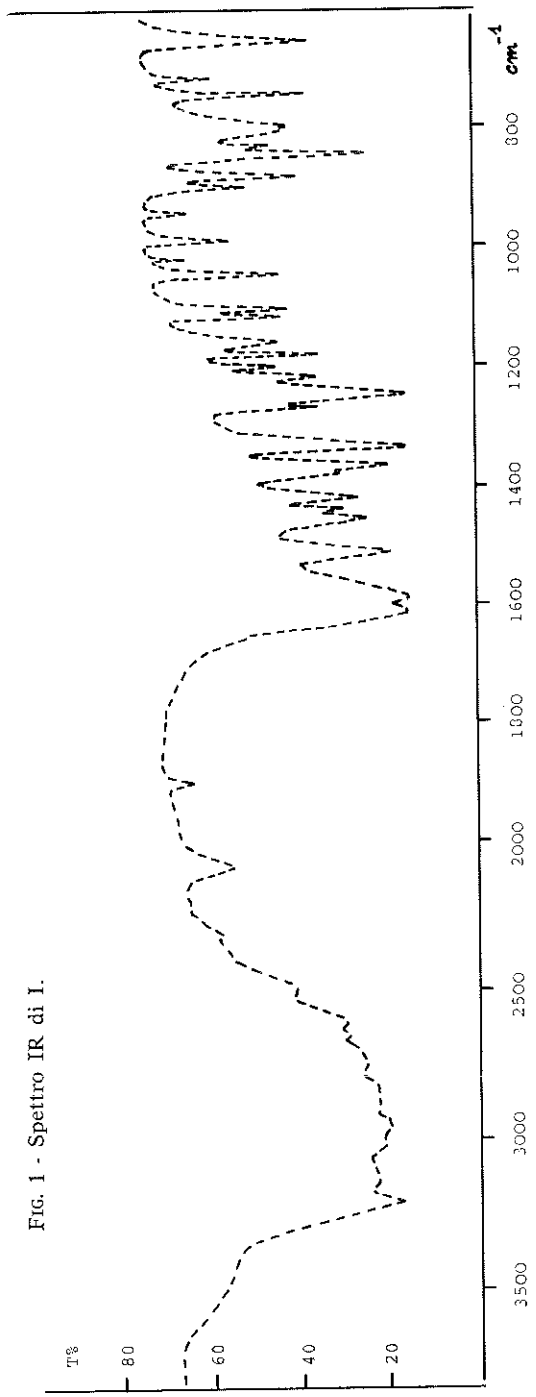


FIG. 1 - Spettro IR di I.

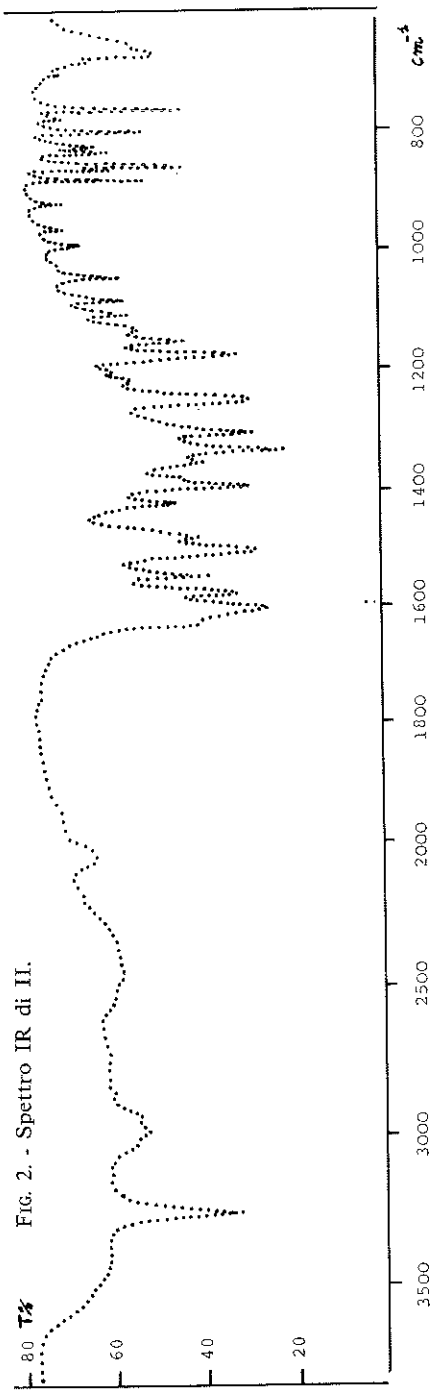


FIG. 2. - Spettro IR di II.

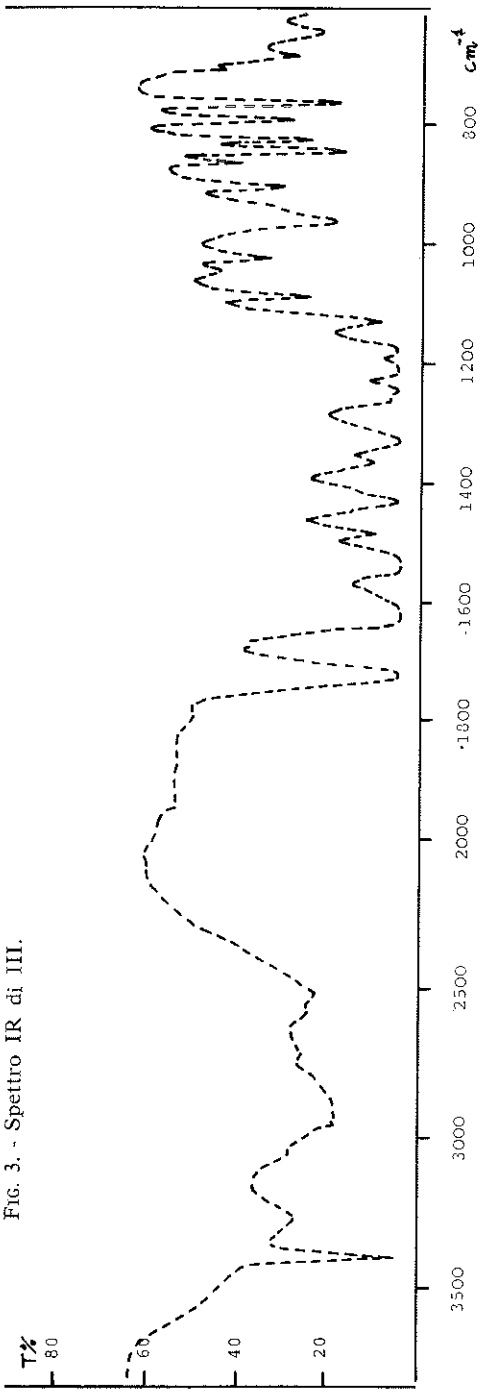


FIG. 3. - Spettro IR di III.

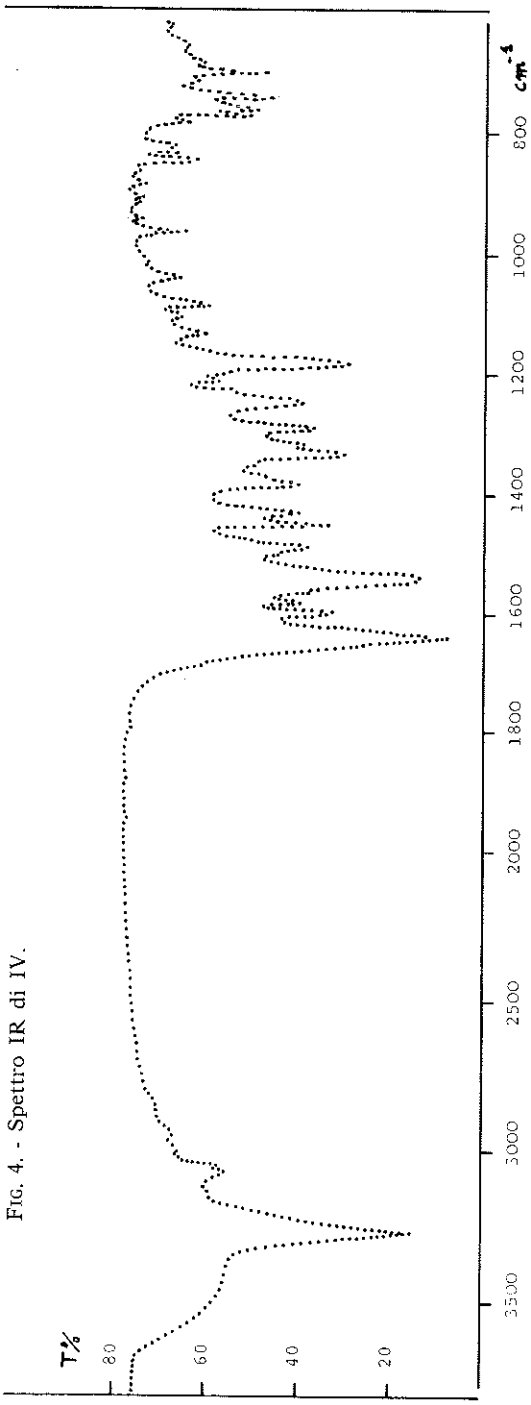


FIG. 4. - Spettro IR di IV.

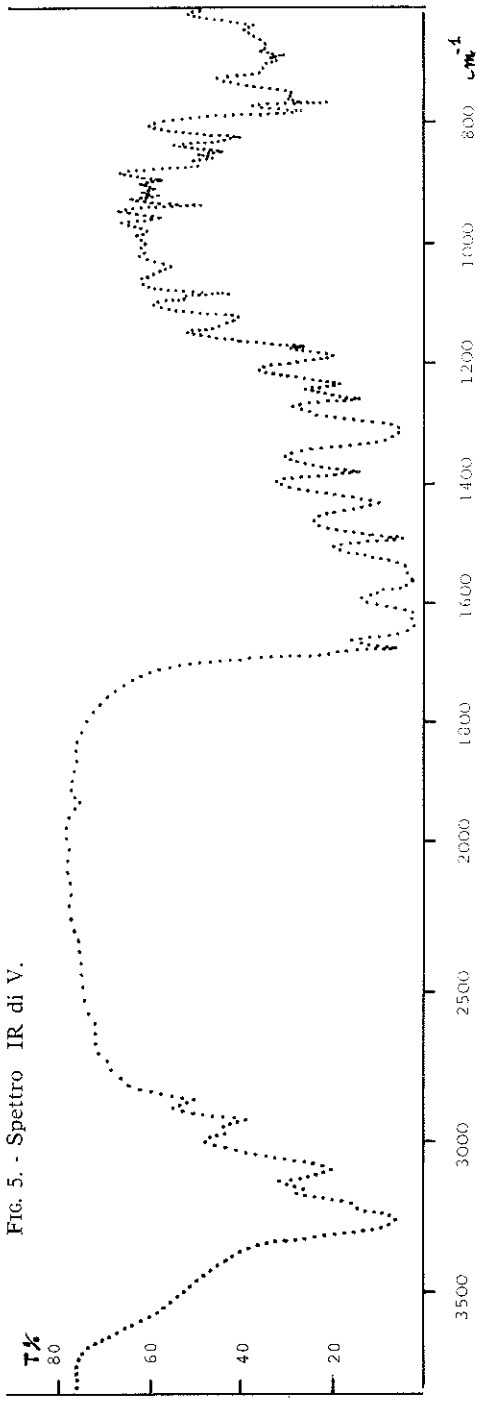


FIG. 5. - Spettro IR di V.

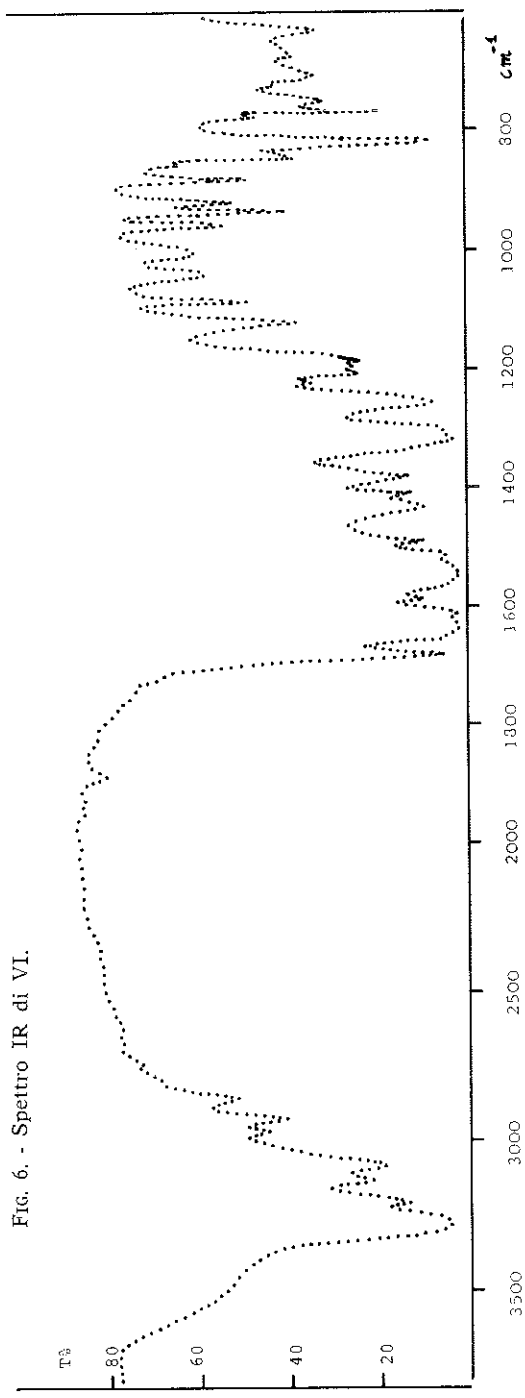


FIG. 6. - Spettro IR di VI.

Il precipitato ottenuto viene filtrato alla pompa. Si hanno g 0,020 di anilide, mentre il filtrato viene nuovamente incubato a 40°C. Dopo vari altri giorni non si nota alcun precipitato se si eccettuano prodotti nerastri dovuti a decomposizione dell'anilina. L'anilide ottenuta ha un p.f. di 213-6°C con dec., resa dell'1,2 %.

M^+ 343, m/e 313, 223 e 191; ν_{max} (KBr) 3265, 3070, 1640, 1540, 1330 e 845 cm^{-1}.

m-toluidide della 3-nitro-N-acetil-L-tirosina (V)

Grammi 1,37 (moli 0.0051) di L-amminoacido sono messi a reagire in presenza di una soluzione attivata di papaina come in precedenza riportato, con g 1,1 (moli 0,0102) di m-toluidina distillata di recente. Si osserva un intorbidamento della soluzione di reazione dopo il primo giorno, mentre interrotta la reazione dopo 96 h, si raccolgono alla pompa g 0,050 di anilide a p.f. 204-6°C con dec., resa del 3 % circa.

Un ulteriore proseguimento dei tempi di reazione sulle acque madri non dà nessun aumento della resa.

M^+ 357; ν_{max} (KBr) 3235, 3090, 1680 cm^{-1}.

p-toluidide della 3- nitro-N-acetil-L-tirosina (VI)

Grammi 1,61 (moli 0,0060) di 3-nitro-N-acetil-L-tirosina vengono messi a reagire, analogamente a quanto prima descritto, con g 1,32 (moli 0,012) di p-toluidina. Il sale iniziale tra l'amminoacido e l'ammina è poco solubile a freddo. Questo si scioglie a caldo e dopo aver riportato la soluzione il più possibile a temperatura ambiente, la si addiziona della soluzione attivata dell'enzima. Già dopo alcune ore (2-3 h) si nota un abbondante precipitato nella soluzione di reazione. Dopo esattamente 5 giorni (120 h) si interrompe la reazione ed il precipitato ottenuto per filtrazione dà 0,300 g di p-toluidide (resa 14-15 %). Come in precedenza, le acque madri vengono nuovamente messe a reagire; dopo altre 96 h, viene nuovamente interrotta la reazione ottenendosi altri 110 mg di toluidide che, così, portano la resa totale di questa preparazione al 20 % circa. Un'ulteriore continuazione dei tempi di reazione non produce alcuna altra formazione di prodotto.

M^+ 357; ν_{max} (KBr) 3240, 3080,1680 cm^{-1}.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERGMANN M., FRAENKEL-CONRAT H., J. Biol. Chem., **119**, 707 (1937).
[2] FOX S. V., PETTINGA C. W., HALVERSON J. S., WAX H., Arch. Biochem., **25**, 21 (1950).
[3] DOHERTY D. G., POPENOE E. A. jr. J. Biol. Chem. **189**, 447 (1951).
[4] GREENSTEIN J. P., In SCHMIDT C.L.A., *Chemistry of the Amino Acids and Proteins*, Charles C. Thomas, Springfield, 1945.
[5] JOHNSON T. B., KOHMANN E. F., J. Am. Chem. Soc., **37**, 1863 (1915).
[6] BENNETT E. L., NIEMANN C., J .Am. Chem. Soc., **72**, 1798 (1950).
SCHULLER W. H., NIEMANN C., ibid., **73**, 1644 (1951).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, L. Mangoni e R. A. Nicolaus.

Cefalopodi ed inquinamento marino *

Nota di ANTONIO DINI **, ETTORE NOVELLINO **, LAURA ZEULI **
e AUGUSTO BIONDI **
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 7 maggio 1977)

RIASSUNTO. — Allo scopo di ottenere informazioni sull'inquinamento marino vengono studiati i metaboliti solubili della borsa della seppia. Negli estratti acidi sono state identificate tracce di Tirosina, Dopa e cisteinildopa, mentre la Taurina ne costituisce il prodotto principale. Un prodotto violetto al quale viene dato provvisoriamente la sigla VX_t appare inoltre nel corso dell'estrazione.

SUMMARY. — In order to obtain information about marine pollution the « soluble-fraction » of sepia ink-sac was investigated. In the acidic fraction Taurine as the main product, and traces of Tyrosine, Dopa and cysteinyldopa were identified. A violet product, which appeared during the extractive process, was also observed.

I cefalopodi possono avere un certo interesse per lo studio dell'inquinamento marino perché l'inchiostro prodotto da questi animali è ricco di melanina che, come è noto, possiede in modo spiccato la proprietà di complessare i metalli e di legare diverse molecole organiche [1].

In particolare l'inchiostro della *Sepia officinalis* ci è sembrato un materiale biologico adatto allo scopo sia perché è facile trovare gli animali in abbondanza a Napoli specie in certi periodi [2] sia perché il pigmento è stato studiato sotto il profilo strutturistico e biogenetico più di quello di altri inchiostri.

Lo studio analitico è stato per ora limitato ai prodotti solubili in ambiente acido ed estraibili dalle pareti del sacco, dalla ghiandola, e dall'inchiostro [3].

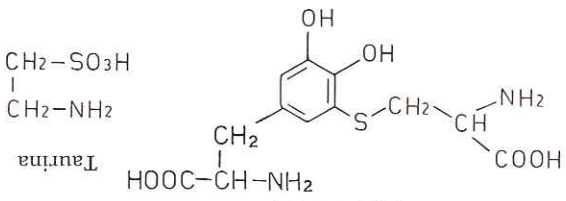
I risultati ottenuti, sia dagli estratti in HCl N sia in CH_3COOH 2N, sembrano qualitativamente eguali sia che si operi sull'inchiostro sia sulle altri parti della borsa. I risultati non variano inoltre anche se

* Lavoro eseguito con il contributo della Regione Campania.
** Gruppo di Biorganica della Facoltà di Farmacia, Università di Napoli, Stazione Zoologica, Villa Comunale, Napoli

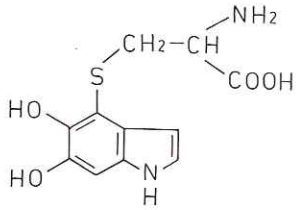
il materiale è ottenuto da animali vivi o surgelati o morti da tempo indeterminato perché acquistati sul mercato libero.

Le frazioni estratte a freddo sono state cromatografate su carta (Whatman N. 1; eluente; BuOH:ACOH:H_2O 6:2:2 v/v; rivelatore Ninidrina), su strato sottile (Merck F_{234} SiO_2; rivelatore: UV, Ninidrina) e con un analizzatore automatico di amminoacidi (Resina M72, temp. 50° Tamponi pH 3,25 e 4,25; rivelatore Ninidrina).

Si può mettere in evidenza la presenza degli amminoacidi serina, acido glutammico, prolina, glicina, alanina, metionina, leucina, isoleucina, tirosina, fenilalanina e della taurina. Questa rappresenta senz'altro il metabolita più abbondante estraibile con gli acidi. Il rapporto, ad esempio, con la tirosina, un amminoacido che gioca un ruolo preminente nella biosintesi della melanina, ed è di circa 1 : 1000.



5-S-cisteinildopa



4-S-cisteinil-5,6-diossindolo

Il rinvenimento della taurina nella borsa della seppia non è una sorpresa. La taurina si trova infatti allo stato libero nei muscoli dei molluschi [4], dei crostacei [5], dei cefalopodi [6] oltre che nei pesci, serpenti, insetti, mammiferi [7]. Come nella borsa, la taurina si trova spesso nei vari animali in alta concentrazione e ciò farebbe supporre che esplichi un ruolo importante sia come regolatore della pressione osmotica sia come precursore o metabolita di altri composti.

I metaboliti tipici della melanogenesi, come ad esempio la DOPA, sembravano essere assenti. D'altra parte questi metaboliti potevano essere « seppelliti » dalla grande quantità di taurina. Abbiamo perciò ripetuto lo studio analitico nel modo seguente:

la borsa viene dapprima separata dall'inchiostro e poi suddivisa in ghiandola e sacco. Queste due frazioni vengono omogeinizzate ed estratte con CH_3COOH 2N. La sospensione risultante viene centrifugata e per evaporazione del supernatante si ottiene un residuo solido cristallino. Tale residuo viene quindi ulteriormente purificato per cromatografia su una resina scambiatrice di ioni del tipo Dowex 50 X_2 100-200 mesh eluendo dapprima con acqua e poi con una soluzione di HCl 2N. Nella prima frazione si raccoglie la sola taurina

(riconfermata per cromatografia in miscela con un campione autentico) mentre nella seconda frazione sono presenti tutti gli altri amminoacidi. Un preliminare esame cromatografico di questa frazione su lastre analitiche di SiO_2 (eluente BuOH: AcOH: H_2O 6:2:2 v/v, rivelatore UV, Ninidrina 0,2 % in acetone, cloruro ferrico 3 % in etanolo) ha permesso di evidenziare la presenza della tirosina, della DOPA e della cisteinildopa [8].

A questo proposito va segnalato che nel caso dell'estrazione in ambiente acido col tempo le soluzioni si colorano in violetto. Le soluzioni assorbono a circa 555 mμ (media intensità) e 220 (forte intensità). Questo pigmento al quale diamo provvisoriamente la sigla VX_I che attualmente tentiamo di isolare allo stato puro, appartiene probabilmente alla classe delle tricosiderine [1].

Se ciò è vero esso si genererebbe da composti come la 5-S--cisteinildopa o 4-S-cisteinil-5,6-diossindolo attraverso i corrispondenti chinoni e successiva addizione di cisteina [1]. Una risposta a questi quesiti potrà venire dall'indagine in corso sulla struttura di VX_I e da un differente tipo di estrazione e di analisi.

Questo lavoro e i suoi risultati pensiamo possano ora essere utilizzati nell'esame comparativo da farsi su animali provenienti da zone altamente inquinate come è già stato fatto per i mitili. L'indagine deve inoltre essere allargata anche alle frazioni di metaboliti o pollutanti solubili nei solventi organici. È molto probabile che risultati molto interessanti si potranno avere dallo studio chimico della eumelanina delle borse in quanto sembra ragionevole pensare che alcuni pollutanti possano essere « copolimerizzati » nel corso del processo melanogenetico.

BIBLIOGRAFIA

[1]) R. A. Nicolaus, Melanins-Hermann, Paris 1968; K. Shimada, R. Baweja, T. Sokoloski, P. N. Patel, J. Pharm. Sci., **65**, 1057 (1976).

[2] Secondo quanto riferito dai pescatori il periodo migliore per la pesca va da Marzo a Novembre.

[3] Questa analisi può essere utilmente estesa alla biochimica del melanoma.

[4] A. Kossel, S. Edlbacher, Zeit. Physiol. Chem., **94**, 1951 (1915).

[5] Okuda, J. Coll. Agr. Univ. Tokyo, **7** 61; C. 1915 I, 1901.

[6] Fredericq, Bull. Ac. Roy. Bel. (2) XLVI, 705 Valenciennes, Fremy C., C. R. XCI 735.

[7] De Simone F., Ramundo E., Novellino E., *Sintesi e proprietà biologiche della taurina* (in corso di stampa).

[8] Il tipo e il numero di amminoacidi fin qui identificato deve considerarsi non definitivo specie per gli amminoacidi contenuti in quantità limitate. Le analisi saranno ripetute dopo un ulteriore e preventivo frazionamento preceduto da un diverso metodo estrattivo.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, L. Mangoni e R. A. Nicolaus.

Poly (Adenosine Diphosphate Ribose) Polymerase in Bull Spermatozoa *

Nota di BENEDETTA FARINA, MARIA ROSARIA FARAONE MENNELLA
e del socio ordinario VINCENZO LEONE **

(Adunanza del 7 maggio 1977)

SUMMARY. — Bull spermatozoa possess poly(ADPR)polymerase activity. Bull seminal plasma inhibits the enzyme from a number of tissues, but not from bull spermatozoa, whereas human seminal plasma shows inhibition among the enzymes assayed only towards the enzyme from pig thymus nuclei.

RIASSUNTO. — Negli spermatozoi di toro è stata messa in luce una definita attività poli(ADPR)polimerasica. Essa occorre a un livello piuttosto basso, paragonato a quello di tessuti quali fegato o timo; la sua presenza tuttavia permette di avanzare delle ipotesi sul significato della sua funzione negli spermatozoi, da mettere forse in rapporto a modifiche chimiche degli istoni di spermatozoi. Il plasma seminale di toro ha un'attività inibitrice nei riguardi di poli(ADPR)polimerasi di vari tessuti, eccetto quella di spermatozoi di toro, mentre il plasma seminale umano manifesta proprietà di inibizione solo verso l'enzima di nuclei di timo di maiale.

It has been shown that nuclei of eukariotic cells contain an enzyme which catalyzes the splitting of NAD at the nicotinamide-ribose linkage and the polymerisation of the resulting adenosine diphosphate ribose (ADPR) residue [1, 2, 3]:

$$\underset{\text{nicotinamide adenine dinucleotide}}{\text{NAD}} \longrightarrow \underset{\text{nicotinamide}}{\text{N}} + \underset{\text{adenosine diphosphate ribose}}{\text{ADPR}} \qquad [1]$$

$$n\ \text{ADPR} \longrightarrow \text{Poly (ADPR)} \qquad [2]$$

* Istituto di Chimica Organica e Biologica, Facoltà di Scienze, Università di Napoli.
** This work was done with the financial help of CNR, contract N. 76.00298.85 of Progetto Finalizzato della Biologia della Riproduzione.

It has been suggested that poly(ADPR) polymerase may be involved in the control of DNA replication [4, 5] and in the mechanism of cell differentiantion [6]. We wish to refer on the presence of this enzyme in bull spermatozoa and on the effect of seminal plasma on the enzyme activity.

Materials and methods

Nicotinamide-(U-C^{14})Adenine-Dinucleotide, 280 mCi/mmol, was a product of the Radiochemical Centre, Amersham (England). Dithiothreitol was either from Calbiochem or from Sigma. Mercaptoethanol was from Fluka; bull semen was obtained through the courtesy of Dr. A. Traballese, of Istituto Zooprofilattico, Portici. Human semen was kindly furnished by the laboratory of clinical analysis directed by Dr. M. De Luca, Napoli. Enzyme assay was based on the incorporation of radioactivity in acid-insoluble material from (C^{14}-adenine) labeled NAD. The incubation mixture consists of 91 mM Tris-HCl buffer, pH 8.4, 5 mM NaF, 10 mM dithiothreitol, up to 50 µl of enzyme, and 39 pmol of C^{14}-NAD (about 25,000 c.p.m.), in a total volume of 125 µl. Incubation is at 25°C for 5 min, and is stopped by addition of 125 µl of cold 20% trichloroacetic acid. The precipitate is collected, washed several times with 2 ml 5 % trichloroacetic acid, and counted for radioactivity in a liquid-scintillation spectrometer (Beckman mod. LS-133). A unit of enzyme activity is defined as 1 µmol NAD incorporated into acid-insoluble material in 1 min at 25°C; for convenience, activity will be expressed in this work in mU. Proteins were determined by the method of Lowry *et al.* [7].

Poly(ADPR)polymerase in Bull Spermatozoa

Two procedures have been followed for enzyme extraction. The main feature of the first procedure consists in sonication of washed sperm, while in the second one the sperm suspension is homogenised and then extracted by high ionic strength solutions.

As an example of the first procedure, details are given below of an extraction procedure starting from 12 ml of fresh bull semen. This was centrifuged at 900 *g* for 15 min, the precipitated spermatozoa were washed by resuspending in the original volume of 20 mM Tris-HCl buffer pH 7.4, containing 5 mM mercaptoethanol, and centrifuged again; a total of 3 such washings were effected. The spermatozoa were then suspended in twice the original volume of Ca-free

Krebs-Ringer phosphate buffer, pH 7.4 and the suspension was sonicated for 30 sec. at 0°C in a Branson Sonic Power apparatus, mod. S 75, operated at full power; the supernatant after centrifugation at 130,000 *g* for 60 min of the sonicated sperm suspension showed a content of enzyme of 0.84 mU, corresponding to a yield of about 36% compared to the original content of 2.32 mU in the starting sperm suspension. Specific activity of the sonicated extract was 0.03 mU per mg protein.

A protocol of enzyme extraction according to the second procedure is as follows. 4 ml of bull semen were centrifuged for 10 min at 900 *g*; the seminal plasma was discarded and the spermatozoa were washed by repeated centrifugations, after resuspending in Tris-HCl-mercaptoethanol solution, as for the sonicated sperm. After the last washing, spermatozoa were suspended in 2.5 ml of 20 mM Tris-HCl buffer, pH 7.5, containing 100 mM NaCl. Homogenization

TABLE I

Extraction of poly(ADPR)polymerase from bull spermatozoa.

			mg/ml	mU/ml	total mU	Specific activity (mU/mg)
Homogenate	ml	5.0	163	0.12	0.60	0.0007
1st 500 mM-NaCl extract	»	4.9	2.8	0.10	0.49	0.036
2nd 500 mM-NaCl extract	»	3.7	1.7	0.05	0.18	0.029

See text for details.

was then made in a Potter glass homogenizer with teflon pester for 5 min at low speed; centrifugation of the homogenate at 8,700 *g* for 15 min yielded a precipitate which was suspended in the original volume of 20 mM-Tris-HCl pH 7.5, containing 500 mM NaCl; homogenization was repeated as above, and the supernatant taken apart; finally, another homogenisation with the 20 mM Tris-HCl-500 mM NaCl solution was carried out, and the supernatant after centrifugation was similarly taken apart and examined for enzyme activity. As it appears from Table I, the first 500 mM-NaCl extract had the maximum enzyme content, which was accompanied by the highest specific activity (0.036), and yield was quite satisfactory.

A very similar value of specific activity is reached by both extraction procedures; it would however appear that the second one looks more promising of further development, since it is characterized

by a satisfactory yield of enzyme activity, at difference with the procedure of sperm sonication.

THE EFFECT OF SEMINAL PLASMA

Bull seminal plasma, if incubated with poly(ADPR)polymerase from bull spermatozoa, fails to show any effect on the enzymatic activity. If, however, bull seminal plasma is incubated along with poly(ADPR)polymerase from pig thymus nuclei, or from bull or mice

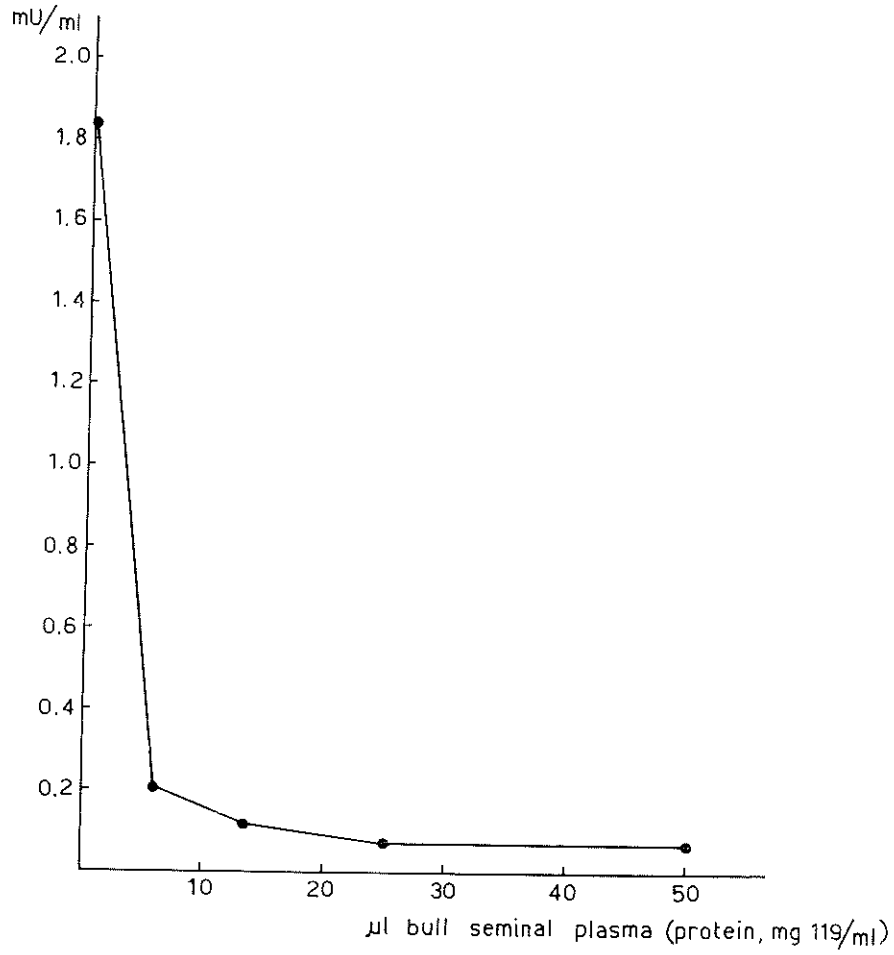


FIG.1. - Inhibition of poly(ADPR)polymerase from pig thymus nuclei by bull seminal plasma.

The incubation mixture for enzyme assay contains 370 µg of pig thymus nuclei prepared according to Tsopanakis *et al.* [8], besides the indicated amounts of dialysed bull seminal plasma.

testis, a strong inhibition is observed (Fig. 1). On the other hand, rather different results are obtained with human seminal plasma. Incubation of poly(ADPR)polymerase from bull spermatozoa with human plasma does not show any inhibitory effect, just as with bull seminal plasma; but, at difference with this last fluid, also the enzymes from bull or mice testis are not inhibited. The only inhibition occurs with the enzyme from pig thymus nuclei (Table II).

An explanation for the inhibition by seminal plasma is no easy to offer. However, before attempting to work out a possible mechanism

TABLE II

The effect of seminal plasma on poly(ADPR)polymerase activity from various sources.

	mU/ml	Inhibition %
Bull spermatozoa	0.10	—
» » plus bull seminal plasma (non dialysed)	0.10	0
» » » » » » (dialysed)	0.10	0
» » plus human seminal plasma (non dialysed)	0.10	0
» » » » » » (dialysed)	0.10	0
Bull testis	48.00	—
» » plus bull seminal plasma (non dialysed)	10.00	90
» » » » » » (dialysed)	14.90	69
» » plus human seminal plasma (non dialysed)	48.00	0
» » » » » » (dialysed)	48.00	0
Mouse testis	8.10	—
» » plus bull seminal plasma (non dialysed)	1.40	83
» » » » » » (dialysed)	1.00	88
» » plus human seminal plasma (dialysed)	8.10	0
Pig thymus nuclei	2.58	—
» » » plus bull seminal plasma (non dialysed)	0.81	69
» » » » » » » (dialysed)	0.15	94
» » » plus human seminal plasma (non dialysed)	1.10	57
» » » » » » » (dialysed)	0.85	67

Enzyme assays were performed as described under Materials and Methods; enzyme preparations were: for bull spermatozoa, 456 μg protein in 160 μl, corresponding to the 2nd 500 mM-NaCl extract of Table I; for bull testis and mouse testis, 160 μg (in 5 μl) and 850 μg (in 10 μl) respectively, of enzyme prepared by a hitherto unpublished procedure (Farina, Faraone Mennella & Leone); for pig thymus nuclei, 370 μg (in 50 μl) of nuclei prepared according to Tsopanakis *et al.* [8]. Seminal plasma additions were 25 μl corresponding to 2.5 mg protein for bull seminal plasma, and to 1.6 mg protein for human seminal plasma.

of inhibition, two features must be taken in consideration. The first is that, as it appears from Table II, the same results are obtained using either dialysed or non-dialysed plasma; an easily diffusible, low-molecular weight substance is therefore ruled out as the inhibitory factor, with the obvious implication for a protein. Secondly, parallel experiments were performed in which the enzymes from bull or mice testis, or from pig thymus nuclei were separately incubated in the presence of dialysed bull seminal plasma, which had previously been kept for 15 min in a boiling water bath; in these conditions the inhibition did not completely disappear, but it was still observed, at a level about 50% as compared with non-heated plasma. Clearly, the last experiment throws some doubts on the protein nature of the inhibitor, unless a particularly resistant structure, only partly destroyied by boiling, is assumed.

Once the above two features are considered, two hypotheses can be formulated, in our view, in order to explaining the inhibition effect. It is known that bull and human seminal plasma contain NAD-glycohydrolase, which splits NAD with the liberation of nicotinamide and ADPR (Leone & Bonaduce, 9). It has not been established yet whether the two enzymes, NAD-glycohydrolase and poly(ADPR)polymerase, are different [10] or similar [11] or identical [12]. Should they be different, the inhibition observed in our experiments could be the result of competition of the two enzymes for the same substrate, NAD; kinetic parameters do not offer much help in this regard, since a value of 1.02×10^{-4}M has been reported for bull semen NAD-glycohydrolase [13], a value which is almost identical to that of 1×10^{-4}M found for calf thymus poly(ADPR)polymerase [14]. On the other hand, another mechanism which could explain the inhibition is based on the presence of phosphodiesterases in bull seminal plasma [15, 16]; this enzyme could act by splitting the poly(ADPR) linked to the acceptor protein of the enzyme system.

While either of the above hypotheses could well be at the basis of the observed inhibition, it remains to be explained the difference in behaviour of both bull and human seminal plasma towards poly(ADPR)polymerase from various sources. Further research is needed to clarify both this seemingly irregular behaviour and the inhibiting effect which, although at a lower degree, is still shown by heat-inactivated seminal plasma.

In conclusion, a definite poly(ADPR)polymerase activity has been found associated with bull spermatozoa. The activity is rather low, as compared with tissue such as liver or thymus, altrough it cannot be excluded that a higher activity can result as a result of more efficient extraction from spermatozoa; its presence makes it possible

to advance speculations about its function in spermatozoa, possibly linked with chemical modification of sperm histones. Bull seminal plasma is endowed with the property of inhibiting poly(ADPR)polymerase from various sources, but not from bull spermatozoa, whereas human seminal plasma is only inhibitory towards the enzyme from pig thymus nuclei.

REFERENCES

[1] CHAMBON, P., WEIL, J. D., DOLY, J., STROSSER, M. T. e MANDEL, P., *Biochem. Biophys. Res. Commun.* **25**, 638-643 (1966).

[2] NISHIZUKA, Y., UEDA, K., NAKAZAWA, K. e HAYAISHI, O., *J. Biol. Chem.* **242**, 3164-3171 (1967).

[3] FUJIMURA, S. HASEGAWA, S., SHINIZU, J. e SUGIMURA, T., *Biochim. Biophys. Acta*, **145**, 247-259 (1967).

[4] BURZIO, L. e KOIDE, S. S., *Biochem. Biophys. Res. Commun.* **40**, 1013-1020 (1970).

[5] YOSHIIIARA, K. e KOIDE, S. S., *FEBS Lett.* **35**, 262-264 (1973).

[6] MANDEL, P., *J. Biochem. (Tokyo)*, **77**, II P (1975).

[7] LOWRY, O. H., ROSEBROUGH, N. J., FARR, A. L. e RANDALL, R. J., *J. Biol. Chem.* **193**, 265-275 (1951).

[8] TSOPANAKIS, C., MCLAREN, E. e SHALL, P., *Biochem. Soc. Transact.*, **4**, 774-777 (1976).

[9] LEONE, E. e BONADUCE, L., *Biochim. Biophys. Acta*, **31**, 292-293 (1959).

[10] YAMADA, M., MIWA, M. e SUGIMURA, T., *Arch. Biochem. Biophys.*, **146**, 579-586 (1971).

[11] NAKAZAWA, K., UEDA, K. HONJO, T., YOSHIHARA, K., NISHIZUKA, Y. e HAYAISHI, O., *Biochem. Biophys. Res. Commun.* **32**, 143-149 (1968).

[12] BOCK, K. W., GÄNG, V., BEER, M. P., KRONAU, R. e GRUNICKE, H., *Eur. J. Biochem.*, **4**, 357-363 (1968).

[13] YUAN, J. M. e ANDERSON, B. M., *J. Biol. Chem.*, **247**, 515-520 (1972).

[14] OKAZAKI, H., NIEDERGANG, C. e MANDEL, P., *FEBS Lett.* **62**, 255-258 (1976).

[15] LIBONATI, M., FARINA, B., e LEONE E., *Boll. Soc. It. Biol. Sper.* **38**, 1438-1441 (1962).

[16] FARINA, B., CURTI, B. e LEONE, E., *Boll. Soc. It. Biol. Sper.* **43**, 27-28 (1967).

Sugli stems in cui la corrispondenza $x\,y \to y\,x$ è una funzione

Nota di CELESTINA FERRERO COTTI
presentata dal socio corrispondente GIANFRANCO PANELLA

(Adunanza del 7 maggio 1977)

SUMMARY. — A study on near-rings N in with $x\,y = z\,t$ implies $y\,x = t\,z$, $\forall\ x, y, z, t \in$ N.

RIASSUNTO. — Si studiano gli stems N in cui $x\,y = z\,t$ implica $y\,x = t\,z$, $\forall\ x, y, z, t \in$ N.

INTRODUZIONE.

Gli stems (come del resto gli anelli) commutativi e anticommutativi hanno varie proprietà in comune che fanno pensare possa essere interessante studiare condizioni che generalizzino contemporaneamente commutatività e anticommutatività.

Studiamo qui, sotto il nome di J-stems, gli stems in cui se $x\,y = z\,t$ allora $y\,x = t\,z$, approfondendo anche il caso in cui vale una condizione un poco più forte (cfr. Definizione B).

Questo lavoro rappresenta una indagine preliminare ad una ricerca sugli stems N tali che N^2 possieda un automorfismo (antimorfismo) involutorio, ovviamente ispirata ai classici lavori sugli anelli con involuzione (cfr. ad es. [10], [11]).

Nel primo paragrafo forniamo, oltre ad esempi non banali di J-stems, condizioni che implicano la commutatività dello J-stem e, fra l'altro, una curiosa caratterizzazione dei campi. Nel secondo si caratterizzano gli J-stems il cui annullatore è massimale (Teoremi 9, 10).

Studiamo infine gli J*-stem cercando di generalizzare ad essi risultati noti per strutture più particolari.

* Istituto Matematico - Università - 43100, Parma. Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

1. - Generalità.

1. — Sia N uno stem sinistro. Un sottogruppo A è un N-*sottogruppo* di N se $NA \subseteq A$; un sottogruppo normale di B è un *ideale sinistro* di N se $NB \subseteq B$. Un sottogruppo normale C è un *ideale destro* di N se, qualunque siano $c \in C$ ed $n_1, n_2 \in N$, risulta $(n_1 + c) \cdot n_2 - n_1 \in C$. Un *ideale* di N è un sottoinsieme di N che sia *ideale destro e sinistro.*

Per $S \subseteq N$, indichiamo con S^n *il sottostem di* S generato dai prodotti $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, con $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$; poniamo, inoltre, $S^{(n)} = \{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in S\}$.

Chiamiamo *centro* di uno stem sinistro N, l'insieme $Z_N = \{x \in N, x y = y x, \forall y \in N\}$. Chiamiamo *anticentro* di N, l'insieme $A_N = \{x \in N, x y = -y x, \forall y \in N\}$.

Definizione A. — *Chiamiamo J-stem uno stem* N *in cui sia,* $\forall x, y, z, t \in N$

$$(1) \qquad x y = z t \Rightarrow y x = t z .$$

Si può osservare che la (1) equivale al fatto che la corrispondenza $j : N^{(2)} \to N^{(2)}$, costituita dalle coppie $< x y, y x >$ sia una funzione di $N^{(2)}$ in sè. Nel seguito *j starà sempre ad indicare tale funzione ed* N *uno J-stem.*

Ovviamente gli stems commutativi e quelli anticommutativi sono J-stems. I sottostems e i prodotti diretti di J-stems sono J-stems. In generale però la classe degli J-stems non è una varietà, nel senso del teorema di Birkhoff [1].

Forniamo un esempio di J-stem che non è nè commutativo nè anticommutativo e che, inoltre, possiede una immagine omomorfa che non è uno J-stem.

Esempio. — Sia $G = A \oplus B$ la somma diretta di un gruppo A ciclico di ordine p (p primo, $p > 3$) e di un gruppo B non abeliano di esponente p, di ordine sufficientemente alto. Sia b_1 un elemento di B *non* appartenente al derivato B' di B e b_2, b_3 siano elementi di B che generano gruppi distinti fra loro e dal gruppo generato da b_1, tali che inoltre $b_3 - b_2 \in B'$.

Siano poi $b_4, \ldots, b_{p-1}$ elementi di B che generino gruppi distinti fra loro e da quelli generati da b_1, b_2, b_3.

[1] Cfr. [6], pag. 170.

Sia a un generatore di A; definiamo in G un prodotto con la

$$(2) \quad < \bar{h}\, a, b > \cdot < h\, a, \bar{b} > \; = \; < 0, h((\bar{h}\, a) \cdot a) > , \bar{h}, h \in \mathrm{Z}^2; \; b, \bar{b} \in \mathrm{B}.$$

ove:

$$(3) \quad \begin{cases} (0 \cdot a) \cdot a = 0 \\ (\bar{h}\, a) \cdot a = b_h, \; 1 \leq h < p \, , \; h \equiv \bar{h} \pmod{p} \end{cases}$$

Il prodotto definito dalla (2) è associativo e distributivo a sinistra rispetto alla somma, pertanto (G, +, ·) è uno stem sinistro

Esso risulta anzi uno J-stem perché se $< \bar{h}\, a, b> \cdot <h\, a, b'> = < \bar{h}'\, a, \bar{b} > \cdot < h'\, a, \bar{b}' >$ allora $h((\bar{h}\, a) \cdot a) = h'((\bar{h}'\, a) \cdot a)$ e questo accade se e solo se $\bar{h} = \bar{h}'$ (mod p) ed $h = h'$ (mod p).

Vale pertanto la (1).

Il derivato G′ di G è un ideale di G perché contenuto in B che è l'annullatore di G. Tuttavia lo stem quoziente G/G′ non è uno J-stem. Infatti è ($\forall\ b, \bar{b}, b', \bar{b}' \in \mathrm{B}$)

$$< 2\, a, b > \cdot < a, \bar{b} > + \mathrm{G}' = < 3\, a, b' > \cdot < a, \bar{b}' > + \mathrm{G}'$$

perché $< 0, b_3 - b_2 > \in \mathrm{G}'$ mentre

$$< a, \bar{b} > \cdot < 2\, a, b > + \mathrm{G}' \neq < a, \bar{b}' > \cdot < 3\, a, b' > + \mathrm{G}'$$

perché $3((1\, a) \cdot a) - 2((1\, a) \cdot a) = 3\, b_1 - 2\, b_1 = b_1$ e $< 0, b_1 > \notin \mathrm{G}'$.

2. — Cominciamo ad individuare le prime proprietà di uno J-stem N.

OSSERVAZIONE 1. — *La funzione j è involutoria.*
Infatti $j^2(x\, y) = j(y\, x) = x\, y$ onde j^2 è l'identità su $\mathrm{N}^{(2)}$.

TEOREMA 1. — *L'insieme* $\mathrm{N}^{(2)}$ *è contenuto in* $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}}^{\cdot}$.

Possiamo infatti scrivere, se $x, y, z \in \mathrm{N}$, $j(z(x\, y)) = x\, y\, z = j((y\, z)\, x)$ e dunque $(z\, x)\, y = y(z\, x)$, $\forall\ y \in \mathrm{N}$.

Si osservi che di qui risulta immediatamente che la classe degli J-stem è contenuta nella varietà degli stems S tali che $\mathrm{S}^{(2)} \subseteq \mathrm{Z}_{\mathrm{S}}^{\cdot}$.

[2] Indichiamo, qui e nel seguito, con Z l'anello degli interi relativi.

COROLLARIO 1. — *Se x, y, z sono elementi qualunque di* N, *allora* $xyz = yzx = zxy$ *e i prodotti di quattro o più elementi di N non dipendono dall'ordine dei fattori.*

COROLLARIO 2. — *Gli idempotenti di N sono centrali.*

TEOREMA 2. — *Lo stem* N *è zero-simmetrico*[3] *e risulta* $j(0) = 0$.
Infatti $j(0 \cdot 0) = 0 \cdot 0 = 0 = j(0)$. Inoltre $j(x \cdot 0) = j(0) = 0 = 0 \cdot x$, onde $0 \cdot x = 0$, $\forall\, x \in \mathrm{N}$.

COROLLARIO 3. — *Per* $x, y, z \in$ N, *se* $xy = 0$ *è anche* $yx = 0$ *e* $xzy = 0$.
Segue dal Corollario 1 e dal Teorema 2.

TEOREMA 3. — *Se* S *è uno stem con* $\mathrm{S}^{(2)} \subseteq \mathrm{Z}_{\mathrm{S}}^{\cdot}$ *e che possiede un non divisore dello zero, allora è un anello commutativo.*

Sia a un non divisore dello zero di S ed $x, y \in \mathrm{S}$; allora $a^2x = axa$ da cui $a(ax - xa) = 0$ e dunque $ax - xa = 0$. Pertanto $yax - yxa = 0$ e $axy - ayx = 0$, da cui $a(xy - yx) = 0$, quindi $xy = yx$, $\forall\, x, y \in \mathrm{S}$. Allora in S il prodotto è commutativo. Uno stem commutativo con un non divisore dello zero è notoriamente[4] un anello.

In particolare uno J-stem con un non divisore dello zero è un anello commutativo.

3. — In virtù del Teorema 3 occorre approfondire soltanto il caso in cui tutti gli elementi di N sono divisori dello zero.

TEOREMA 4. — *Se N è privo di nilpotenti non nulli è somma sottodiretta di domini di integrità.*

Infatti se N è privo di divisori dello zero, allora (Teorema 3) è un dominio di integrità. Altrimenti, se possiede almeno un divisore dello zero, possiamo applicare il lemma 3 di [1] ed esiste pertanto in N una famiglia $\{\mathfrak{I}_k\}_{k \in \Omega}$ di ideali propri completamente primi[5] a intersezione banale. Pertanto N risulta isomorfo ad una somma sottodiretta della famiglia di stems $\{\mathrm{N}/\mathfrak{I}_k\}_{k \in \Omega}$. Inoltre tutti i quozienti $\mathrm{N}/\mathfrak{I}_k$ sono privi di divisori dello zero e risultano anelli commutativi (Teorema 3); essi sono dunque domini di integrità.

[3] È cioè $0 \cdot x = 0$, $\forall\, x \in \mathrm{N}$. Cfr. per es. [14].
[4] Cfr. per es. [8].
[5] Secondo [1] un ideale $\mathfrak{I}$ di N si dice completamente primo se $ab \in \mathfrak{I}$ implica $a \in \mathfrak{I}$ o $b \in \mathfrak{I}$.

TEOREMA 5. — *L'annullatore (destro)* $A(x) = \{y \in N,\ xy = 0\}$ *di un elemento* $x \in N$ *è un ideale di* N *e coincide con l'annullatore sinistro.*

Poiché N è zero-simmetrico, allora $A(x)$ è un ideale destro (Cfr. [9] pag. 201). Sia ora $z \in N$, $y \in A(x)$. Tenendo presente il Corollario 3 risulta $xzy = 0$ onde $zy \in A(x)$. L'ultimo punto è ancora conseguenza immediata del Corollario 3.

COROLLARIO 4. — *L'annullatore* $A(N) = \{x \in N,\ xy = yx = 0, \forall\ y \in N\}$ *è un ideale di* N.

Infatti $A(N) = \bigcap_{x \in N} A(x)$.

TEOREMA 6. — *Se* $A(N) = 0$, *allora* N *è un anello commutativo.*

Infatti allora $\forall\ x, y, z, t \in N$, risulta $xyzt = xytz$ (Corollario 1) e dunque $x(yzt - ytz) = 0$ ed $yzt - ytz \in A(N)$. Pertanto $y(zt - tz) = 0$ da cui $zt = tz$. Ne segue che N è bilatero ed $N' \subseteq A(N)$; dunque $N' = 0$.

COROLLARIO 5. — Se *il centro* Z_N^* *o l'anticentro* A_N *di* N *sono nulli allora* N *è un anello commutativo.*

OSSERVAZIONE 2. — *Se* $x, y \in N$ *ed* $a, a' \in A(N)$ *allora*

$$(x + a)(y + a') = xy;\ (a + x)(a' + y) = xy. \tag{4}$$

Infatti dalla $y(x + a) = yx$ segue $(x + a)y = xy$ (perché j è una funzione). Di qui $(x + a)(y + a') = (x + a)y = xy$. Il resto è analogo.

TEOREMA 7. — *Uno stem* N *è uno J-stem semplice*[6] *se e solo se è un campo.*

Se N è uno J-stem, allora, per $x \in N$, $A(x)$ è un ideale (Teorema 5). Nel caso semplice N è dunque privo di divisori dello zero e (Teorema 3) è un dominio di integrità privo di ideali: esso è dunque un campo. L'inverso è ovvio.

[6] Nel senso di [5] pag. 780. Si osserva che qui non è necessaria la condizione catenaria discendente sugli N-sottogruppi.

COROLLARIO 6. — *Uno stem* N *è uno J-stem semisemplice*[7] *se e solo se è somma diretta di un numero finito di campi.*

La dimostrazione è una ovvia conseguenza dei teoremi 10,11 di [5] e del precedente Teorema 7.

4. — Osserviamo che, come conseguenza immediata del Corollario 1, uno J-stem in cui la j è priva di coincidenze non nulle è uno stem di Lie[8] a *cubo nullo* privo di elementi permutabili il cui prodotto non sia nullo.

Una costruzione del tipo di EVERETT ([13]) generalizza agli J-stems un teorema di PETRICH ([13]) relativo agli anelli a cubo nullo.

TEOREMA 8. — *Siano* A, B *gruppi additivi ed* A *sia abeliano. Siano* $\bigsqcup : B \times B \to A$ *e* $\bigsqcap : B \times B \to A$ *due operazioni esterne soddisfacenti rispettivamente alle seguenti proprietà*:

I. - $0 \bigsqcup 0 = 0$

II. - $a \bigsqcup b + (a + b) \bigsqcup c = a \bigsqcup (b + c) + b \bigsqcup c$

III. - $a \bigsqcap (b + c) = a \bigsqcap b + a \bigsqcap c$

IV. - $a \bigsqcap b = a_1 \bigsqcap b_1 \Rightarrow b \bigsqcap a = b_1 \bigsqcap a_1$

Le strutture definite su $B \times A$ *con le operazioni*

V. - $< a, \alpha > + < b, \beta > = < a + b, a \bigsqcup b + \alpha + \beta >$

VI. - $< a, \alpha > \cdot < b, \beta > = < 0, a \bigsqcap b >$,

costituiscono (*al variare* A, B, $\bigsqcup$, $\bigsqcap$) *tutti e soli gli J-stems* N *con* $N^3 = 0$ *ed* N^2 *contenuto nel centro* Z_N^+ *del gruppo additivo di* N[9].

La dimostrazione della parte diretta del teorema consiste in verifiche pressoché immediate che ometteremo.

Sia N uno J-stem a cubo nullo con $N^2 \subseteq Z_N^+$; N^2 è un ideale di N (per l'Osservazione 2). Scriviamo per brevità $[n] = n + N^2$ per $n \in N$.

[7] Nel senso di [5] pag. 775.

[8] Uno stem sinistro N (non necessariamente associativo) si dice di Lie se, $\forall\, x \in N$, $x^2 = 0$ e inoltre vale l'identità di Jacobi $(x\,y)\,z + (y\,z)\,x + (z\,x)\,y = 0$.

[9] Naturalmente N non è uno zero – stem se e solo se esistono elementi $x, y \in B$ tali che $x \bigsqcap y \neq 0$.

Se $f : N/N^2 \to N$ è una funzione tale che $f([n]) \in [n]$ $(n \in N)$ ed $f(N^2) = 0$, possiamo definire le operazioni:

VII. - $[n] \sqcup [n'] = -f([n + n']) + f([n]) + f([n'])$

VIII. - $[n] \sqcap [n'] = f([n])f([n'])$.

La struttura $S = (N/N^2 \times N^2, +, \cdot)$, ove $+, \cdot$ sono definite come nelle precedenti V, VI e con $\sqcup$, $\sqcap$ definite dalle VII, VIII è uno J-stem a cubo nullo il cui quadrato è contenuto nel centro del gruppo additivo. La corrispondenza $< [n], a > \to f([n]) + a$ è un isomorfismo di S su N e questo completa la dimostrazione.

Osserviamo che l'esempio di stem del precedente n. 1 si può pensare ottenuto con l'attuale costruzione e mostra l'esistenza di operazioni non banali soddisfacenti III e IV.

2. - Sugli J-stems il cui annullatore è massimale.

5. — Prepariamoci il terreno con il

Lemma 1. — *Se* $A(N)$ *è un ideale massimale di* N, *allora* $N^{(2)} \cap A(N) = 0$ *oppure* $N^3 = 0$.

Poiché, $\forall\, x \in N, A(x)$ è un ideale di N (Teorema 5) che contiene $A(N)$, risulta $A(x) = A(N)$ oppure $A(x) = N$; più precisamente $A(x) = N$ per $x \in A(N)$ ed $A(x) = A(N)$ altrimenti. Pertanto $N^{(2)} = (N - A(N))^{(2)} \cup \{0\}$.

Ciò posto supponiamo esistano due elementi x, y di $N - A(N)$ il cui prodotto stia in $A(N)$. Allora $x\,y\,N = 0$ e $y\,N \in A(x) = A(N)$.

Ne segue che se $z, t \in N$, $y\,z\,t = 0$ e dunque $z\,t \in A(N)$.

Pertanto $N^{(2)} \subseteq A(N)$. Se invece non esistono elementi di N il cui prodotto sta in $A(N)$, ovviamente $N^{(2)} \cap A(N) = 0$.

Lemma 2. - *Se* $A(N)$ *è un ideale massimale di* N *ed* $N^3 = 0$ *è* $N' = 0$ *oppure* $N' \cap A(N) \neq 0$ [10]. *Se, inoltre,* $A(N) \subseteq N'$ *allora* $N' = N$ *ovvero* $N' = A(N)$.

Supponiamo sia $N' \cap A(N) = 0$. Allora il derivato di $A(N)^+$ è zero e dunque $A(N)^+$ è abeliano. Poiché $N^2 \subseteq A(N)$, risulta abeliano anche N^2, allora ovviamente $N' \subseteq A(N)$ e dunque $N' = 0$. Questo dimostra la prima parte dell'enunciato. Per la seconda parte basta osservare che se $A(N)^+ \subseteq N'$, allora N' è un ideale di N.

[10] Indichiamo con N' il derivato di N^+.

Infatti N' è un sottogruppo di N^+, $NN' \subseteq N^2 \subseteq A(N) \subseteq N'$; inoltre, $\forall\, x, y \in N$ e $\forall\, z \in N'$, $(x+z)y - xy \in N^2 \subseteq A(N) \subseteq N'$.

TEOREMA 9. — *Se* $A(N)$ *è un ideale massimale di* N *è* $N^{(2)} \cap A(N) = 0$ *se e solo se* $N = N^2 + A(N)$ *ove* $N^2 \cap A(N) = 0$ [11], N^2 *è un campo ed* N *è commutativo.*

Ovviamente $N/A(N)$ non ha ideali propri; inoltre non ha divisori dello zero perché se $xy + A(N) = A(N)$, con $x, y \in N - A(N)$, è $xy \in N^{(2)} \cap A(N)$ e $xy \neq 0$. Ricordando anche la osservazione che segue il teorema 1 ne segue che $N/A(N)$ è un campo.

Sia $[e] = e + A(N)$ l'unità di $N/A(N)$; ovviamente $e \notin A(N)$ e, $\forall\, x \in N$, $x = xe + a$, con $a \in A(N)$. Poiché $xe = ex$, potremo scrivere $x = xe + a$ e $x = ex + a$. Inoltre, poiché $ex = e^2 x$, $\forall\, x \in N$, e risulta identità per eN. Se poi $x = ex + a$ ed $x = y + z$ con $y \in eN$ e $z \in A(N)$, allora $ex = ey = y$ e $z = a$. Di qui subito $N = eN + A(N)$ ed $eN \cap A(N) = 0$.

Dimostriamo che $eN = N^2$. Basta mostrare che $N^2 \subseteq eN$. Ora per $\alpha \in N^2$ è $\alpha = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = x_1(e y_1 + a_1) + \ldots + x_n(e y_n + a_n)$ con $a_i \in A(N)$, $x_i, y_i \in N$, per quanto visto sopra.

Di qui $\alpha = e y_1 x_1 + \ldots + e y_n x_n = e(y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n)$. Dunque $N^2 = eN$ ed e è unità di N^2. Pertanto $N = N^2 + A(N)$ con N^2, isomorfo ed $N/A(N)$, campo. Ricordando l'Osservazione 2, risulta, per $x, y \in N$, $a, \bar{a} \in A(N)$, $xy = (ex + a)(ey + \bar{a}) = ex\, ey = ye\, xe = y e^2 x = yxe^2 = yx$, onde N è commutativo.

L'inverso è ovvio.

In base ai Lemma 1,2, restano da considerare gli J-stems con $A(N)$ ideale massimale e con $N^2 \subseteq A(N)$, ricordando che se $N' \neq 0$, $N' \cap A(N) \neq 0$. Un caso notevole permette immediatamente di costruire altre esemplificazioni non banali.

TEOREMA 10. — *Uno stem sinistro N è uno J-stem con* $A(N)$ *ideale massimo,* $N^2 \subseteq A(N)$, $N' \subseteq A(N)^+$ *se e solo se* $N^+ = N_1 + N_2$ [12] *con* $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ *e*

1. - $N_1 = \{0, x, 2x, \ldots, (p-1)x\}$ (p *primo*), $px \in N_2$,

2. - $N_2 = A(N)$ *è un ideale di* N,

[11] Per la definizione di somma complementare, indicata con $+$, cfr. per es. [2] e [9].

[12] Nel senso che il gruppo additivo N possiede due sottoinsiemi N_1, N_2 tali che $\forall\, x \in N$, possa scriversi $x = y + z$ con $y \in N_1$ e $z \in N_2$.

3. - $(x + y) \cdot z = x z$, $\forall\ x, z \in N, y \in N_2$,

4. - *se* $r x \cdot s x = t x \cdot q x$ *allora* $s x \cdot r x = q x \cdot t x$, $(r, s, t, q \in Z)$

5. - $N^{(2)} = N_1^{(2)} \subseteq N_2$ *è unione di gruppi ciclici di ordine p.*

Sia N uno J-stem con A(N) ideale massimale, $N^2 \subseteq A(N)$ ed $N' \subseteq A(N)$.

Allora N/A(N) è uno zero-anello ciclico di ordine p (p primo).

Se $x + A(N)$ è generatore di N/A(N), sia $N_1 = \{0, x, \ldots, (p-1)x\}$.

Ovviamente $N^+ = N_1 + A(N)^+$ ed $N_1 \cap A(N) = \{0\}$, $p x \in A(N)$.

I punti 2, 3, 4 sono poi conseguenza immediata del fatto che N è uno J-stem.

Inoltre $N^{(2)} = N_1^{(2)} \subseteq A(N)$ (Cfr. le (3)); gli elementi $x^2, 2x \cdot x, \ldots, (p-1)x \cdot x$ generano additivamente gruppi ciclici di ordine p perché $p x \in A(N)$ che sono zero anelli perché $N^3 = 0$.

Per l'inverso si osservi che se N è uno stem sinistro tale che $N^+ = N_1 + N_2$ con $N_1 \cap N_2 = \{0\}$) ed N_1, N_2 soddisfacenti ai punti 1, 2, allora N^+/N^2 è un gruppo di ordine p generato da $x + N_2$ e dunque N_2 è un ideale massimale, $N' \subseteq N_2$.

Inoltre, per 5, $N^2 \subseteq N_2$ e per 3 e 4, N risulta uno J-stem.

3. - Sugli J^*-stems.

6. — Si vede banalmente che ogni stem commutativo ed anticommutativo soddisfa anche alla

Definizione B. — *Chiamiamo* J^**-stem gli stems sinistri N nei quali la corrispondenza* $j^* : N^2 \to N^2$ *che manda* $\sum_1^n{}_i\ x_i y_i \to \sum_1^n{}_i\ y_i x_i$ *è un omomorfismo additivo.*

Osserviamo che ovviamente gli J^*-stems sono J-stems perché la restrizione di j^* ad $N^{(2)}$ è una funzione. *Nel seguito* N *indicherà uno* J^**-stem e* j^* *indicherà la* $\sum_1^n{}_i\ x_i y_i \to \sum_1^n{}_i\ y_i x_i$.

Osservazione 3. — *Lo stem* N *è bilatero.*

Infatti $(x + y) z = j^*(z(x + y)) = j^*(z x + z y) = x z + y z$.

Di qui si ha subito che se N è uno J^*-stem il derivato N' di N^+ è un ideale di N contenuto in A(N); inoltre N^2 è un anello commu-

tativo [13] e infine il sottostem C di N generato dagli elementi $x\,y - y\,x$, $\forall\ x, y \in N$, è uno zero-stem [14].

Si osserva inoltre che j^* è un automorfismo e un antimorfismo involutorio dell'anello N^2 (si ricordi anche il Corollario 1).

Osserviamo che lo stem costruito nell'esempio del n. 1 è uno J-stem ma non uno J^*-stem.

Forniamo qui un esempio di J^*-stem che non è nè commutativo nè anticommutativo.

Esempio. Sia $G = A \oplus B$ la somma diretta di un p-gruppo A abeliano elementare generato da a_1, a_2 e di un gruppo B *non* abeliano di esponente p, di ordine sufficientemente alto.

Siano b_1, b_2 elementi del centro di B che generino gruppi distinti.

Definiamo in G un prodotto con la:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &< h\,a_1 + k\,a_2, b > \cdot < \bar{h}\,a_1 + \bar{k}\,a_2, \bar{b} > = \\ &= < 0, h\,\bar{k}\,b_1 + k\,\bar{h}\,b_2 >,\ (h, k, \bar{h}, \bar{k} \in Z). \end{aligned}$$

Il prodotto definito da (5) è associativo e distributivo a destra e a sinistra rispetto alla somma, pertanto $N = (G, +, \cdot)$ è uno stem bilatero. Esso risulta anche uno J^*-stem perché se per

$$x_i = < h_i^1 a_1 + k_i^1 a_2,\ b_i^1 >,\ y_i = < h_i^2 a_1 + k_i^2 a_2,\ b_i^2 >,$$

$$\bar{x}_i = < h_i^3 a_1 + k_i^3 a_2,\ b_i^3 >,\ \bar{y}_i = < h_i^4 a_1 + k_i^4 a_2,\ b_i^4 >$$

risulta $\sum_1^n{}_i\ x_i\,y_i = \sum_1^n{}_i\ \bar{x}_i\,\bar{y}_i$ si può porre $< 0, t_1 b_1 + q_1 b_2 > = < 0, t_2 b_1 + + q_2 b_2 >$ ove t_1, q_1, t_2, q_2 sono opportuni e *minori di p.*

Con facili calcoli si può provare che allora $\sum_1^n{}_i\ y_i\,x_i = < 0, q_1\,b_1 + + t_1\,b_2 >$ e $\sum_1^n{}_i\ \bar{y}_i\,\bar{x}_i = < 0, q_2\,b_1 + t_2\,b_2 >$.

Poiché b_1, b_2 sono indipendenti, allora $< 0, t_1\,b_1 + q_1\,b_2 > = = < 0, t_2\,b_1 + q_2\,b_2 >$ implicano $t_1 = t_2$ e $q_1 = q_2$; ne segue che $\sum_1^n{}_i\ y_i\,x_i = \sum_1^n{}_i\ \bar{x}_i\,\bar{y}_i$ e dunque j^* è una funzione e, ovviamente, un omomorfismo additivo.

[13] Si ricordi che $N^{(2)} \subseteq Z_N$ ed ora N è bilatero.

[14] Si tratta di fatti elementari ben noti. Cfr. per es. [8] e [9].

TEOREMA 11. — *Il centro* Z_N^* *di* N *è un ideale essenziale*[15] *di* N.

Infatti la $f_a : x \to x\,a - a\,x$ è un omomorfismo additivo e $Z_N^* = \bigcap_{a \in N} \operatorname{Ker} f_a$ è un sottogruppo normale. Inoltre $N\,Z_N^* = Z_N^*\,N = Z_N^*$ perché $N^2 \subseteq Z_N^*$.

Sia I un ideale di N e sia $y \in I \cap A(N)$; allora $y \in I \cap Z_N^*$ e dunque, se $I \subseteq A(N)$, $I \cap Z_N^* = I$. Altrimenti esiste un $y \in I - A(N)$ tale che, per qualche x di N, $0 \neq xy \in I$ e $xy \in N^2 \subseteq Z_N^*$. Ne segue che $xy \in I \subseteq Z_N^*$ ed $x\,y \neq 0$.

TEOREMA 12. — Se Z_N^* *è massimale allora N è commutativo.*

Infatti N/Z_N^* è uno zero anello di ordine p. Sia $x + Z_N^*$ un suo generatore .Ogni $y \in N$ può scriversi dunque come $y = h\,x + z$ con $z \in Z_N^*$ e per $\bar{y} = k\,x + \bar{z}$ è $y\,\bar{y} = h\,k\,x^2 + h\,x\,z + k\,z\,x + z\,\bar{z} = \bar{y}\,y$ e dunque N è commutativo.

Il teorema che segue generalizza agli J^*-stems con A(N) proprio alcuni risultati di [12] (sugli anelli commutativi con unità tutti i cui deali propri sono massimali) e di [7] (sugli anelli anticommutativi).

TEOREMA 13. — *In uno* J^**stem* N *con annullatore* A(N) *proprio si equivalgono le condizioni*:

I. - A(N) *è un ideale massimale e minimale,*

II. - *N possiede almeno un ideale massimale e minimale,*

III. - *gli ideali propri di* N *sono tutti massimali.*

È immediato verificare che I → II e III → I

Mostriamo che II → I. Sia I un ideale di N massimale e minimale. Se I = A(N) tutto è dimostrato, altrimenti, poiché N è bilatero

[15] Un ideale proprio di uno stem N si dice essenziale se interseca in modo non banale ogni ideale proprio di N.

(Osservazione 3), $N = I \oplus A(N)$ perché I è minimale e massimale ed A(N) è proprio. Pertanto A(N), isomorfo a N/I, è uno stem privo di ideali e dunque è minimale.

Inoltre A(N) è massimale; infatti sia J un ideale di N e sia $A(N) \subseteq J$. Poiché I è massimale e minimale, allora $N = I \oplus J$. Ne segue che J, isomorfo ad N/I, è privo di ideali e dunque $J = A(N)$ e A(N) risulta massimale.

Mostriamo che $I \to III$. Sia A(N) massimale e minimale. Se $N^{(2)} \cap A(N) = 0$, allora $N = N^2 + A(N)$ ed N^2 è un campo (Teorema 9).

Sia $I \neq A(N)$ un ideale proprio di N. Poiché A(N) è massimale e minimale, risulta $N = I \oplus A(N)$ ove I, isomorfo ad N^2, è un campo.

Dunque $N^2 = I$ è un ideale massimale di N e quindi N possiede come ideali appunto N^2 ed A(N). La III vale anche quando N non possiede ideali propri diversi da A(N).

Se invece non è $N^{(2)} \cap A(N) = 0$ è $N^2 \subseteq A(N)$ (Lemma 1). Dimostriamo che A(N) è l'unico ideale di N. Infatti se I è un ideale proprio di N, esso non può essere contenuto nè intersecare propriamente A(N), risulta dunque $I^2 = 0$ ed $N = I \oplus A(N)$, perché A(N) è massimale e minimale. In questo caso però N risulta uno zero-stem, il che è assurdo. Anche in questo caso vale la III.

COROLLARIO 7. — *Uno stem* N *soddisfa le condizioni del Teorema* 13 *se e solo se è somma diretta di un campo e di uno zero-stem privo di ideali oppure ammette come unico ideale proprio il proprio annullatore* A(N) *ed* N/A(N) *è un campo o uno zero-anello di ordine primo.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BELL H. E., *Near-rings in which each element is a power of itself*, Bull. Austral. Math. Soc., **2**, 363-368 (1970).

[2] BELL H. E., *A commutativity theorem for near-rings*, Preprint.

[3] BELL H. E., *Certain near-rings are rings, II*, Preprint.

[4] BETSCH G., *Primitive near-rings*, Math. Z., **130**, 351-361 (1973).

[5] BLACKETT D. W., *Simple and semisimple near-rings*, Proc. Amer. Math. Soc. (vol. 4), 772-785 (1953).

[6] COHN P. M., *Universal algebra*, Harper and Row, N. Y. 1965.

[7] FERRERO COTTI C. e RIZZA G. B., *Anelli anticommutativi*, Atti Acc. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **104**, (1972-73).

[8] FERRERO G., *Sulla struttura aritmetica dei quasi-anelli finiti*, Atti Acc. Sc. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **97**, (1963).

[9] HEATHERLY H. E., *Near-rings without nilpotent elements,* Publ. Math. Debrecen, **20**, 201-205 (1973).

[10] HERSTEIN I. M., *On rings with involution,* Can. J. Math. vol. XXVI, No. 4, 794-799 (1974).

[11] LAUSKI C., *Regular elements in rings with involution,* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 195, 317-325 (1974).

[12] PERTICANI F. I., *Commutative rings in which every proper ideal is maximal,* Fund. Math., **71** (1971).

[13] PETRICH M., *Structures des demi-groups et anneaux distributifs,* Comptes Rendus Acad. Science Paris, 268 A (1969).

[14] PILZ G., *Primitive near-rings with one-sided zero.* Preprint.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci G. Panella, A. Franchetta e M. Curzio.

Analisi elettroforetica delle α-esterasi nel corso dell'ontogenesi di *Drosophila melanogaster*

Nota di GIOVANNI PARISI, ANNA RITA FRANCO e ANTONIO CRASTO *
presentata dal socio ordinario BALDASSARRE DE LERMA

(Adunanza del 7 maggio 1977)

RIASSUNTO. — Gli autori descrivono le variazioni dei tracciati elettroforetici delle α-esterasi di *Drosophila melanogaster* nel corso dell'ontogenesi. Sono state evidenziate 14 bande mostranti attività α-esterasica variamente distribuite nei vari stadi, alcune delle quali sono stadio specifiche.

SUMMARY. — This work describes the variation of α-esterase electrophoretic tracers of *Drosophila melanogaster* during ontogenesis. Fourteen bands were identified showing α-esterase activity. The distribution of these bands varied in different stages; some of them were found to be stage-specific.

Le α-esterasi sono una classe di enzimi, molto studiata nel genere Drosophila [1], per i quali si conoscono diversi isoenzimi tessuto specifici sia negli adulti di *Drosophila mulleri* e di *Drosophila aldrichi* [2] che nelle larve e nelle pupe di *Drosophila pseudoobscura* [3].

È difficile correlare la diversa distribuzione degli isoenzimi con il diverso metabolismo tissutale perché il significato funzionale delle varie esterasi di Drosophila è poco conosciuto [4]. In linea di massima le esterasi sono implicate nel metabolismo lipidico [5] e, poiché l'ontogenesi è accompagnata da variazioni di questo metabolismo e dalla ridistribuzione dei grassi [6], variazioni del quadro elettroforetico dell'enzima si devono riscontrare anche durante lo sviluppo dell'insetto.

Studi di questo genere in Drosophila non sono stati fatti ad eccezione del lavoro di JOHNSON, F. M. et al. [7] che riporta variazioni del livello dell'attività enzimatica durante l'ontogenesi di *Drosophila ananassae*.

* Laboratorio di Zoofisiologia, Istituto di Zoologia dell'Università di Napoli.

In un precedente lavoro [8] avevamo confermato questo dato e dimostrato che la metamorfosi è accompagnata da modificazioni qualitative della attività esterasica.

Lo scopo di questo lavoro è quello di precisare queste variazioni e di caratterizzare elettroforeticamente i diversi isoenzimi che compaiono durante l'ontogenesi.

Materiali e Metodi

Per le nostre ricerche sono state utilizzate *Drosophilae melanogaster*, ceppo Oregon R, allevate su un terreno di coltura standard [9] con l'aggiunta dello 0,7 % di nipagina a 25 $\pm$ 1°C e con fotoperiodo di 12 h.

L'allevamento è stato sincronizzato col metodo di Stocker e Jackson [10] e le misure sono state eseguite su larve 3° stadio, su farate pupe (60 h dopo l'impupamento), su farati adulti (90 h dopo l'impupamento), su pupari e su adulti 1° giorno dall'emergenza.

L'elettroforesi su gel di poliacrilamide è stata eseguita col metodo messo a punto da Parisi, G. et al. [11] a cui sono state apportate alcune modifiche che vengono qui precisate. Gli estratti proteici sono stati ottenuti omogenizzando a 4°C, 140 animali per ogni stadio in 2 ml di saccarosio 40 % in un potter di vetro. L'omogenato è stato centrifugato a 2000 giri per 10′ in una centrifuga Ecco mod. II B e 200 µl del sopranatante sono stati aggiunti per colonnina di gel. Le elettroforesi sono state condotte a 4°C con una corrente di 5 mA/colonnina utilizzando un'apparecchiatura Canalco mod. 300 B. La corrente è stata interrotta dopo 60′ ed i gel sono stati posti in una soluzione di acido borico 0,5 M per 40′ a circa 4°C.

La colorazione è stata eseguita lasciando i gel per 30′ in una soluzione colorante a 37°C ed al buio, rinnovandola dopo 15′. La composizione della soluzione colorante era la seguente: 100 ml di tampone Tris/HCl 0,08 M pH = 7, 0,100 mg di α-naftil acetato (Sigma) preventivamente sciolto in 5 ml di acetone e 100 mg di Fast Blue B.B. (Sigma).

Dopo la colorazione i gel sono stati lavati con acqua distillata e letti al densitometro Chromoscan della Joyce, con un filtro di sbarrametto 5.043,λ_{max} di trasmissione $>$ 580 nm, fenditura 5 $\times$ 0.3 mm, cuneo di bilanciamento 2 D, filtro di densità 3 D e camma di espansione 5.077 C.

Dai grafici così ottenuti, si è calcolato per ogni banda la velocità di migrazione relativa a quella del colorante di traccia, Rm. Questo rapporto si ripete con buona approssimazione e può essere utilizzato per caratterizzare ciascuna banda.

Risultati e discussione

I dati ottenuti sono riassunti nella tabella 1 e nei grafici densitometrici medi (fig. 1).

Tali risultati mostrano chiaramente che le α-esterasi presentano, nel corso dell'ontogenesi variazioni sia qualitative che quantitative. Globalmente sono state messe in evidenza 14 bande elettroforetiche con attività α-esterasica variamente distribuite nei vari stadi.

Tabella I

Velocità relative al colorante di traccia delle singole attività α-esterasiche

	Larve 3° stadio	Farate pupe	Farati adulti	Pupari *	Adulti 1° g d.s.
(−) a_1	0.010±0.000				
a_2					0.075±0.000
a_3			0.280±0.001		0.276±0.002
a_4		0.290±0.001			
a_5	0.310±0.001				
a_6		0.370±0.000	0.370±0.002	0.370±0.002	0.380±0.002
a_7	0.400±0.001				
a_8		0.430±0.002	0.430±0.002		
a_9	0.450±0.003				0.450±0.000
a_{10}	0.620±0.003				
a_{11}					0.690±0.003
a_{12}					0.720±0.004
a_{13}		0.770±0.005			
(+) a_{14}			0.790±0.002	0.790±0.003	

* I pupari sono stati raccolti subito dopo lo sfarfallamento.

In aggiunta alle bande già precedentemente riportate [8], siamo riusciti, nelle nuove condizioni sperimentali ad evidenziare ulteriori attività enzimatiche alcune delle quali derivanti dalla separazione di bande che in precedenza migravano insieme. Non sono state considerate le bande la cui scarsa attività, oltre a rendere dubbia la loro presenza, non le rendeva in ogni caso utili al nostro scopo di caratterizzare isoenzimi stadio specifici.

Le attività esterasiche sono state così distribuite tra i vari stadi: 5 bande nelle larve 3° stadio, 4 nelle farate pupe, 4 nei farati adulti e 6 negli adulti 1° g d.s. Precisamente, il passaggio da larve 3° stadio a farate pupe è caratterizzato dalla scomparsa di cinque bande con attività enzimatica riscontrate in tale stadio larvale (a_1, a_5, a_7 a_9 e a_{10}) e dalla comparsa di quattro nuove bande con attività enzimatica

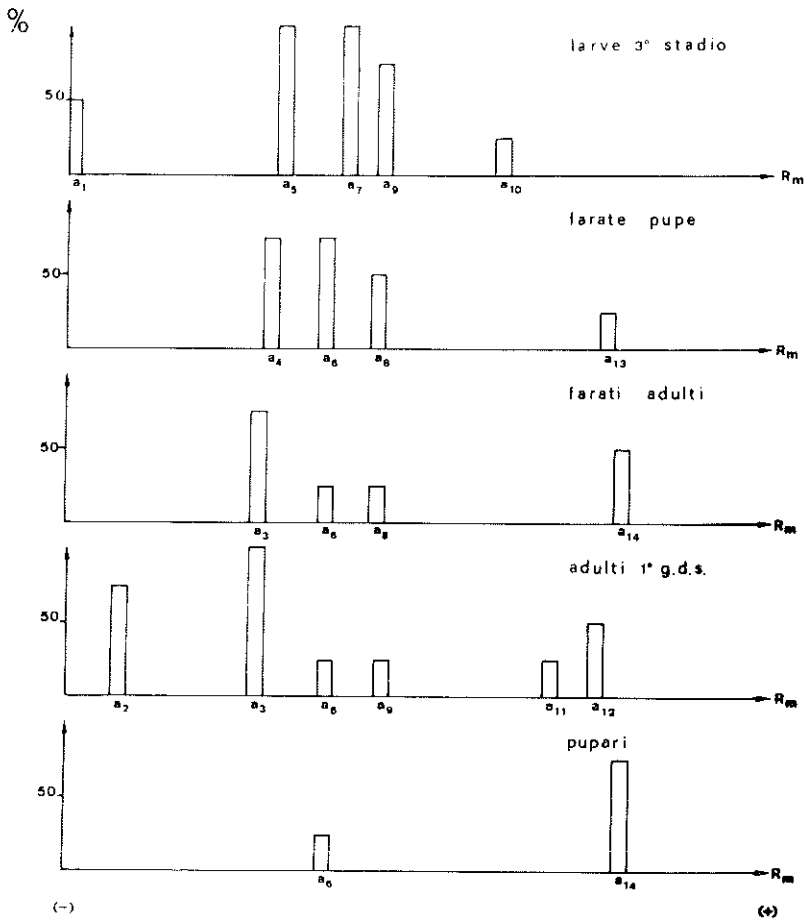


FIG. 1. - I grafici sono stati ottenuti considerando uguale a 100 l'attività della banda a_5 e paragonando le altre attività a questa.

(a_4, a_6, a_8 e a_{13}). Di tali bande, a_1, a_5, a_7, e a_{10}, sono caratteristiche del 3° stadio larvale mentre a_4 e a_{13} delle farate pupe. Per quanto riguarda poi la banda a_9, sembra che la si ritrovi negli adulti al primo giorno dopo lo sfarfallamento; la banda a_6 sia sempre presente a partire dalle farate pupe; la banda a_8 permanga soltanto nei farati adulti.

Il passaggio da farate pupe a farati adulti è caratterizzato dalla scomparsa delle bande a_4 e a_{13} e dalla comparsa delle bande a_3 e a_{14} di cui quest'ultima permane negli adulti 1° g d.s.

Infine il passaggio da farati adulti ad adulti 1° g d.s. è caratterizzato dalla scomparsa delle bande a_8 e a_{14} e dalla comparsa delle bande a_2, a_{11} e a_{12}.

Dall'esame della fig. 1 si ricava che l'attività totale decresce progressivamente nel passaggio da larve a farate pupe e da queste a farati adulti per crescere nuovamente negli adulti 1° g d.s. senza però raggiungere il livello delle larve.

L'analisi dei pupari raccolti subito dopo lo sfarfallamento mostra la presenza di due bande elettroforetiche e precisamente delle a_5 e a_{14}, già riscontrate nei farati adulti. Mentre l'attività di a_6 rimane costante, la crescita di a_{14} e la sua limitazione a questo stadio, fa pensare che sia in qualche modo coinvolta con lo sfarfallamento.

A questo punto possiamo concludere che attraverso l'analisi elettroforetica, sono evidenziabili α-esterasi stadio specifiche in *Drosophila melanogaster*. Non è però possibile l'interpretazione biologica di queste variazioni poiché esse possono essere dovute sia all'attivazione di geni stadio specifici, che a meccanismi epigenetici di controllo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Parisi G. e Franco A. R., *Proteine in « Drosophila melanogaster »*, Boll. Soc. Nat. Napoli, LXXXIV, pp. 301-346 (1975).

[2] Kambysellis M. P., Johnson F. M. e Richardson R. H., *Isozyme variability in species of the genus « Drosophila ». IV. Distribution of the esterases in the body tissues of « D. aldrichi » e « D. mulleri »* adults, Biochemical Genetics, **1**, pp. 249. 265 (1968).

[3] Pasteur N. and Kastritsis C. D., *Acid phosphatases, esterases and other proteins in organs and whole-fly homogenate during development of « Drosophila pseudoobscura »*, Dev. Biol., pp. 525-536 (1971).

[4] Johnson F. M., Richardson R. H. and Kambysellis M. P., *Isozyme variability in species of the genus « Drosophila ». III Qualitative comparison of the esterases of « D aldrichi » and « D. mulleri »*, Biochemical Genetics, **1**, pp. 239-247 (1968).

[5] Schmidt G. H., Wirth B. and Schwnkl W., *Dehydrogenasen und esterasen-activität in der hämolinphe von metamorphosestadien von Formica-arten nach polyacrylamidelektrophorese*, Insect Biochem., **6**, pp. 297-301 (1976).

[6] Steele J. E., *Hormonal control of metabolism in Insect*, Advances in Insect Physiol, **12**, pp. 276-278 (1976).

[7] Johnson F. M., *Developmental differences of alkaline phosphatase zymograms from « Drosophila melanogaster » and « Drosophila ananassae »*, Nature, **212**, pp. 843-844 (1966).

[8] Parisi G. e Franco A. R., *Analisi elettroforetica di proteine solubili durante l'ontogenesi di « Drosophila melanogaster »*, Rend. Acc. Scien. Fis. e Mat. della Soc. Naz. Scien., Let. e Arti, Napoli, XLII, pp. 480-491 (1975).

[9] KELLER E. S. and GLASSMAN E., *Phenocopies of the* ma-1 *and* ry *mutants of Drosophila melanogaster: Inibition in vivo of xanthine dehydrogenase by 4-hydroxypirazolo (3,4-d) pyrimidine*, Nature, **208**, p. 202 (1965).

[10] STOCKER, A. J. and JACKSON J., *A technique for the syncronization of « Drosophila » for developmental studies*, D.I.S., **46**, p. 147 (1971).

[11] PARISI G. e D'AMORA D., *Disco elettroforesi di proteine solubili in Drosophila melanogaster*, Boll. Soc. Nat. Napoli, LXXXII, pp. 77-83 (1973).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Baldassarre De Lerma, Vincenzo Leone e Giovanni Chieffi.

Studi concernenti le equazioni polilineari

Nota di Boris A. Bondarenko *, Kin Vinh Leug **,
Demetrio Mangeron *** e Mehmet Namik Oguztoreli ****
presentata dal socio emerito Carlo Miranda

(Adunanza del 4 giugno 1977)

Alla memoria di Mauro Picone

Riassunto. — Gli AA. espongono in ciò che segue alcuni teoremi di rappresentazione costruttiva delle soluzioni di una classe di equazioni polilineari alle derivate parziali, che s'inquadrono poi nella teoria unitaria di tali sistemi e poscia nell'ancora più vasto edificio dei sistemi differenziali di struttura composita [19]-[20].

Summary. — This paper discusses the operational representation of solutions of the polylinear equations, as for instance Eqs (1), that constitute an extension of the linear *polyharmonic* (M. Picone, [1], [2]), *polycaloric* (M. Nicolescu, [7]), and *polywave* or *polyvibrating equations* (D. Mangeron, [12]), and are strongly related with a recent set of B. A. Bondarenko [26] research work.

1. — Nell'ambito di una vastissima messe d'impareggiabili contributi dell'Analisi Matematica e delle sue applicazioni alla scienza ed alla tecnica, dell'indimenticabile Mauro Picone, il lavoro del Nostro Caro Maestro pubblicato mezzo secolo fa in cui si espongono i teoremi di media caratteristici per le soluzioni di talune equazioni alle derivate parziali [2] ha costituito e costituisce tuttora una potentissima spinta non solo per lo sviluppo, la sistemazione della terminologia adeguata e l'impetuosa diffusione degli studi sulle equazioni poliarmoniche [3]-[6], ma anche per la genesi e l'estensione delle ricerche concernenti le equazioni policaloriche dovute al

* Istituto di Matematica dell'Accademia Uzbeca di Scienze. Tashkent, U.R.S.S.
** Department of Computer Science. Concordia University, Montreal, Quebec H3G 1M8, Canada.
*** Istituto Politecnico di Iasi, Romania. Visiting Professor, Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.
**** Department of Mathematics. The University of Alberta. Edmonton, Alberta, T6G 2G1, Canada. The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada through the University of Alberta.

compianto accademico romeno M. NICOLESCU [7], perché l'introduzione a lui dovuta della ben fruttuosa nozione di *derivate totali* [8]-[11], definiti tramite l'operatore $M_m^{(n)} \equiv \partial^{mn}/\partial x_1^n \partial x_2^n \dots \partial x_m^n$, ha originato tutt'una serie di lavori devoti alle equazioni polivibranti [12]-[18] che s'inquadrono poi nel vasto insieme degli studi in corso dei sistemi differenziali di struttura composita [19]-[20].

In ciò che segue gli AA. espongono alcuni teoremi di rappresentazione costruttiva delle soluzioni di una classe di equazioni polilineari alle derivate parziali.

2. — Si consideri la seguente classe di equazioni polilineari alle derivate parziali

$$(1) \qquad K^{(n)} u(x, y) \equiv (M_\mu^{(r)} - L)^{(r)} u(x, y) = F(x, y), \; K^{(j)} = K(K^{(j-1)},$$

$$K^{(0)} = 1, \; x = (x_1, x_2, \dots, x_\mu) \in R^\mu,$$

ove $M_\mu^{(1)}$, $M_\mu^{(2)}, \dots, M_\mu^{(r)}$ sono operatori che applicati ad una funzione $u(\cdot)$ forniscono derivate totali d'ordine $1, 2, \dots, r$ di Picone, L è un operatore differenziale lineare di variabili $y = (y_1, y_2, \dots, y_\nu) \in R$ ed $F(x, y)$ è una funzione nota, per fissare le idee, continua nel dominio $\mathfrak{D} \equiv R^\mu \times R^\nu$.

Pur considerando il fatto che, nel caso in cui l'operatore L si riduce ad una funzione nota a meno di un fattore λ l'equazione (1), ove si supponga la mancanza dei parametri y, si riduce, con ovvio significato delle notazioni, all'equazione polivibrante

$$(*) \qquad (M_m^{(s)} - \lambda A(x)) u(x) = f(x),$$

per cui sono stati studiati vari problemi al contorno, tale, ad esempio,

$$(**) \qquad u(x)|_{\partial R} = 0, \; R = \{a_i \leq x_i \leq b_i, \; i = 1, 2, \dots, m\},$$

problemi degli autovalori e degli sviluppi in serie di autofunzioni corrispondenti come pure le programmazioni dei calcoli delle soluzioni alle calcolatrici elettroniche ed applicazioni alla progettazione automata delle superficie di forma qualsivoglia ed alla determinazione delle oscillazioni elettrostatiche nel plasma [21]-[24], prenderemo in esame in ciò che segue l'equazione (1) corrispondente al caso in cui $\mu = 2$. L'estensione dei risultati ottenuti qui sotto al caso in cui si scelga per μ un numero qualsivoglia di variabili x non presenta delle difficoltà sostanziali.

Rammentando che, seguendo la terminologia dovuta da S. L. SOBOLEV [25], una funzione $g(y)$ è detta, in un dominio $\Omega \in R^{\nu}$, *polilineare d'ordine* $m+1$ *rispetto all'operatore* L se $m+1$ è il più piccolo numero per cui si abbia $L^{(m+1)} g(y) = 0$ (in particolare Ω può coincidere con l'intero spazio R^{ν}), prendiamo in esame le seguenti due classi di funzioni collegati con l'operatore L e le funzioni $g(y)\{L^{(m)} g(y) \neq 0,\ L^{(m+1)} g(y) = 0\}$:

$$(2) \qquad H_{r,s,\alpha}^{m,p,1}(x, y) = \sum_{i=p-1}^{m+p-1} \binom{i}{p-1} \frac{x_1^{ri+s}\, x_2^{ri+s+\alpha}}{(ri+s)!\,(ri+s+\alpha)!} L^{(i-p+1)} g(y),$$

$$(3) \qquad H_{r,s,\alpha}^{m,p,2}(x, y) = \sum_{i=p-1}^{m+p-1} \binom{i}{p-1} \frac{x_1^{ri+s+\alpha}\, x_2^{ri+s}}{(ri+s+\alpha)!\,(ri+s)!} L^{(i-p+1)} g(y),$$

ove $p = 1, 2, \ldots, n$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, essendovi s e α indipendenti tra di loro ed n e r dati che figurano nell'equazione (1). È chiaro che le rappresentazioni (2) e (3) possono essere considerati anche per le funzioni $g(y)$ analitiche nel dominio Ω, aventi cioè l'ordine polilineare infinito, nel qual caso (2) e (3) diventono sviluppi in serie. Ha luogo il seguente

TEOREMA 1. — Le *funzioni* $H_{r,s,\alpha}^{m,p,k}(x, y)\,(k = 1, 2)$ *soddisfano, per*

$$p = 1, 2, \ldots, n,\ s = 0, 1, \ldots, r-1,\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

l'equazione polilineare

$$(M_2^{(r)} - L)^{(n)} u(x, y) = 0.$$

La dimostrazione del teorema or ora enunciato risulta dalla validità delle eguaglianze

$$(4) \qquad K\, H_{r,s,\alpha}^{m,p,k}(x, y) = H_{r,s,\alpha}^{m,p-1,k}(x, y),\ p \neq 1,$$

$$(5) \qquad K\, H_{r,s,\alpha}^{m,1,k}(x, y) = 0,$$

che si verificano direttamente eseguendo i calcoli corrispondenti.

3. — Si consideri ora una funzione $f(x_1, x_2)$ sviluppabile nel dominio $\Omega \in R^2$ in serie di potenze uniformemente convergente. Dal

fatto che una simile funzione può essere rappresentata, in Ω, sotto la forma

$$(6)\quad f(x_1, x_2) = \sum_{\alpha+2\beta=0}^{\infty} \left[a_{\beta,\alpha+\beta} \frac{x_1^{\beta} x_2^{\alpha+\beta}}{\beta!\,(\alpha+\beta)!} + a_{\alpha+\beta,\beta} \frac{x_1^{\alpha+\beta} x_2^{\beta}}{(\alpha+\beta)!\,\beta!} \right],$$

se ne deduce il seguente

TEOREMA 2. — *Se una funzione $f(x_1, x_2)$ è sviluppabile in serie uniformemente convergente* (6) *in un dominio $\Omega \in R^2$ e se $g(y)$ soddisfa le condizioni di cui sopra, la serie*

$$(7)\quad \sum_{\alpha+2\beta=0}^{\infty} [a_{\beta,\alpha+\beta} H_{r,r+\beta,\alpha}^{m,n,1}(x, y) + a_{\alpha+\beta,\beta} H_{r,r+\beta,\alpha}^{m,n,2}(x, y)]$$

è pur essa uniformemente convergente in $\Omega \in R^2$ e soddisfa l'equazione non omogenea

$$(M_2^{(r)} - L)^{(n)} u(x, y) = f(x_1, x_2)\, g(y).$$

La dimostrazione di questo teorema si fonda sull'eguaglianza (4), valida per $p \neq 1$ per ogni s e dunque anche per $s = r + \beta$ e sulle eguaglianze

$$(8)\quad K H_{r,r+\beta,\alpha}^{m,1,1}(x, y) = \frac{x_1^{\beta} x_2^{\alpha+\beta}}{\beta!\,(\alpha+\beta)!}\, g(y),$$

$$(9)\quad K H_{r,r+\beta,\alpha}^{m,1,2}(x, y) = \frac{x_1^{\alpha+\beta} x_2^{\beta}}{(\alpha+\beta)!\;\beta!}\, g(y).$$

OSSERVAZIONE 1. — L'equazione polilineare (1) può fornire, per adeguate coppie di valori dei parametri μ ed r, in corrispondenza alle formulazioni dei problemi di Darboux, Goursat-Mangeron, Cauchy-Nicolescu ed altri ancora, vari sistemi differenziali di struttura composita alquanto particolare, che assicurano l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di tali problemi « ben posti ». Per la risoluzione di tutti questi problemi possono essere utilizzate certe combinazioni lineari e persino serie di funzioni (2) e (3). Diverse particolarizzazioni di tali funzioni sono state utilzzate con successo dal primo degli AA. alla risoluzione di certi problemi di elastodinamica dei

corpi isotropi ed omogenei, come pure di quelli della propagazione del calore [26].

OSSERVAZIONE 2. — Nel caso in cui l'operatore differenziale L degenera, riducendosi ad un numero, diciamo $L \equiv \lambda$, ponendovi $g(y) \equiv 1$, si possono stabilire i legami unificatori tra le funzioni $\mathfrak{F}$ di Truesdell utilizzate nei lavori [27] concernenti l'equazione polivibrante

$$(10) \qquad K^{(n)} u(x) = (M_{\mu}^{(r)} - L)^{(n)} u(x) = F(x)$$

e le funzioni $H_{2,s,\alpha}^{1,2}(x)$ e $H_{2,s,\alpha}^{1,1}(x)$ che si deducono dalle

$$(11) \quad H_{r,s,\alpha}^{p,1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+p-1}{p-1} \lambda^i \frac{x_1^{ri+rp-r+s} x_2^{ri+rp-r+s+\alpha}}{(ri+rp-r+s)!\,(ri+rp-r+s+\alpha)!},$$

$$(12) \quad H_{r,\alpha,s}^{p,2}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+p-1}{p-1} \lambda^i \frac{x_1^{ri+rp-r+s+\alpha} x_2^{ri+rp-r+s}}{(ri+rp-r+s+\alpha)!\,(ri+rp-r+s)!},$$

ottenute dalle (2) e (3) ove l'indice i si sostituisce col $i + p - 1$ e si consideri $p = 1$.

OSSERVAZIONE 3. — In una Nota susseguente si continuerà lo studio delle equazioni polilineari inquadrandovi tuttavia alcuni risultati spettanti agli studi dei particolarissimi casi di tali equazioni sparsi parecchi anni or sono nella letteratura di specialità e rammentati nella nostra recentissima Nota [28].

BIBLIOGRAFIA

[1] PICONE M., nel volume: *Biografie e Bibliografie degli Accademici Lincei*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976, pp. 491-505.

[2] PICONE M., a) *Sulle funzioni metaarmoniche*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis. mat. e nat., (6) **5**, 90-95 (1927); b) *Teoremi di media caratteristici per le soluzioni di talune equazioni alle derivate parziali*, Rend. Circolo Mat. Palermo, **51**, 25-37 (1927); c) *Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche*, Bull. Soc. Roumaine Math., **38**, 105-112 (1936).

[3] NICOLESCO M., a) *Thèorèmes de moyenne pour les fonctions de deux variables rèelles*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (6) **11**, 960-964 (1930); b) *Extension du thèorème de Gauss aux fonctions harmoniques d'ordre p*, C. R.

Acad. Sci. Paris, **191**, 515-517 (1930); *Les fonctions polyharmoniques*, Hermann, Paris, p. 54, 1936.

[4] BONDARENKO B. A., *Poligarmoničeskie polinomy*, Izdat. « Fan », UzbekSSR, Tashkent, p. 171, 1968.

[5] SBRANA F., *Sulle funzioni metaarmoniche in n variabili*, Rend. Circolo Mat. Palermo, **53**, 428-436 (1929).

[6] GIULOTTO V., a) *Il problema di Dirichlet nel campo poliarmonico e nel caso di una distribuzione continua di massa con densità variabile sulla superficie sferica*, Rend. Ist. Lombardo, (2) **63**, 819-842 (1930); b) *Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre*, Rend. Circolo Mat. Palermo, **17**, 1-43 (1903); c) *Funzioni sferiche poliarmoniche in due variabili*, Ann. di Mat., (4) **1**, 219-240 (1924).

[7] NICOLESCU M., *Ecuaţia iterată a căldurii*, St. Cerc. Mat., **5**, 3-4, 243-332 (1954).

[8] PICONE M., *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, Ann. Sci. Univ. Jassy, S. I, **26**, 183-232 (1940) e **27**, 18-26 (1941).

[9] MANGERON D., KRIVOSHEIN L. E., *Problemi concernenti sistemi di equazioni integro-differenziali con derivate totali di Picone*, Rend. Sem. Mat. Unit. Padova, **33**, 226-266 (1963); **34**, 344-368 (1964); **35**, 341-364 (1965).

[10] MANGERON D., KRIVOSHEIN L. E., *New methods of numerical calculation of various integro-differential systems*, I, II, III, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, **9**, 1195-1221 (1964); **10**, 3-34 (1965); **11**, 733-756 (1966).

[11] KRIVOSHEIN L. E., MANGERON D., OGUZTORELI M. N. & al., *Calcolo con calcolatrici elettroniche delle funzioni speciali spettanti ai sistemi polivibranti e polivibranti generalizzati ed applicazioni*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (8) **48**, 160-169 (1970).

[12] MANGERON D., *Problèmes concernant les èquations polyvibrantes*, C. rendus Acad. Sci. Paris, **266**, 870-873; 976-979; 1050-1052; 1103-1106; 1121-1124 A (1968); **204**, 94-96; 544-547 1022-1024 (1937). Vedansi anche: Bull. Polytechn. Inst. Jassy, **2**, 89-92; 372-374 (1947); **3**, 153-155 (1948); *Ibidem*, New Series, **6**, 21-27 (1956); **7**, 39-42 (1957); Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (6) **16**, 305-310 (1932); Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli, (4) **2**, 29-30 (1932); Giorn. Mat., **71**, 89-139 (1933).

[13] FAVARD J., *Quelques thèorèmes concernant les èquations polyvibrantes dites « èquations de Mangeron »*, Bull. Inst. Polytechn. Jassy, N. S., **15**, 1-2, 17-20 (1965).

[14] BEREZANSKI JU. M., *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Amer. Mat. Soc. Transl. Monographs, Chap. IV, Addenda, p. 756, 787, 1958.

[15] OGUZTORELI M. N., a) *Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (8) **52**, 327-336, 653-659 (1972); b) *Sur le problème de Goursat pour une èquation de Mangeron d'ordre supèrieur*, Bull. Acad. R. Sci. Belgique, (5) **58**, 464-471, 577-582 (1972).

[16] EASWARAN S., *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron*. A doctoral Dissertation. Prof. M. N. Oguztoreli Sci. Adv., Department of Math., University of Alberta, 1972.

[17] OGUZTORELI M. N., LEUNG K. V., *Numerical solutions of various problems concerning polyvibrating or polyware equations of Mangeron*, Rend. Accad. Sci. Fis. e Mat., Napoli, (4) **40**, 52-57; Bull. Soc. R. Sci. Liège, **42**, 5-6, 269-275 e Bull. Acad. R. Sci. Belgique, (5) **59**, 441-447 (1973).

[18] NIELSON G. M., *A Mangeron Type Theorem for a triangular Domain*, SIAM 1976 Fall Meeting Abstracts, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, Oct. 18-20, 1976.

[19] KRIVOSHEIN L. E., MANGERON D., OGUZTORELI M. N. & al., *Systèmes differentiels possèdant la structure complexe*, Bull. Soc. R. Sci. Liège, **43**, 7-10, 512-516; Bull. Cl. Sci. Acad. R. Belgique, (5) **60**, 585-592; 387-395 (1974).

[20] KRIVOSHEIN L. E., LEUNG K. V., OGUZTORELI M. N. & al., *Problèmes concernant différentes classes d'èquations intègro-différentielles non linèaires de Mangeron*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (8) **56**, 151-156; Rend. Accad. Naz. dei XL, (4) 24-25, 3-8 (1974).

[21] BIRKHOFF G. D. GORDON W., *On the draftsman's and related equations*, J. Approx. Th., **1**, 199-208 (1968).

[22] GORDON W., *Automated Design of Free Form Surfaces*, General Motors Research Lab. Series, Warren, Mich., 1968.

[23] OGUZTORELI M. N., *Electrostatic oscillations in cold inhomogeneous plasmas with compact support*, Plasma, Physics, **18**, 1, 41-50 (1976).

[24] OGUZTORELI M. N., *Activities in a one-dimensional continuous neural network*, (in stampa).

[25] SOBOLEV S. L., *Vvedenie v teoriju kubaturnykh formul*. Izd. « Nauka », Mosca, 1974.

[26] BONDARENKO B. A., *Klass točnykh rešenii differentsial'nykh uravnenii elastodinamiki*. Nel volume: « Graničnye zadači differentsial'nykh uravnenii », Izd. « Fan », UzbekSSR, Tashkent, pp. 133-138 (1971); *Polinomial'nye rešenia sistem differentsial'nykh uravnenii elastostatiki*, Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk, **10**, 1-3-11 (1966); **13**, 1, 15-19 (1969); *Rešenia teplovogo uravnenia i ego iteratsii*, Ibidem, **18**, 5, 18-24 (1974).

[27] MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Solutions de certains systèmes polyvibrants exprimès par les fonctions « F » de Truesdell*, Bull. Acad. R. Sci. Belgique, (5) **56**, 449-452 (1970). Vedansi anche: Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », **67**, 1488-1492 (1970).

[28] BONDARENKO B. A., LEUNG K. V., MANGERON D. J., and OGUZTORELI M. N., *Operational representation of solutions of a class of polylinear equations*. Notices American Math. Soc., Febr. 1977, A-244.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e F. Cafiero.

A Research on Inhibitors of Uricase

Nota di Maria Rosaria Faraone Mennella, Barbara Nicolaus, Benedetta Farina e del socio ordinario Vincenzo Leone *

(Adunanza del 4 giugno 1977)

Summary. — The behaviour of ox kidney uricase with a number of inhibitors has been studied. There is a substantial analogy with pig liver uricase, especially for the 6-chlorouric acid inhibition, but also interesting differences have been found. PCMB and EDTA are inhibitors of the ox kidney enzyme, but not of the pig liver enzyme, suggesting the possibility that -SH groups are essential for the ox enzyme, and that in this enzyme the prosthetic group metal is more exposed, in the tertiary structure of the protein, to the chelating agents.

Riassunto. — È riferito il comportamento dell'uricasi estratta da reni bovini rispetto a vari inibitori. Vi è una sostanziale analogia con l'uricasi di fegato di maiale, specie per l'inibizione da ac. 6-clorourico, ma sono anche emerse interessanti differenze; così, PCMB e EDTA sono inibitori per l'enzima di reni bovini, e non per quello di fegato di maiale, suggerendo la possibilità che gruppi -SH siano necessari per l'attività dell'enzima bovino, e che in questo il metallo del gruppo prostetico sia più esposto, nella struttura terziaria della proteina, all'azione di reattivi chelanti.

Uricase, a copper enzyme generally found in peroxysomes, is present in a number of animal tissues and in some microrganisms. Its importance is widely recognised, as it occupies a key position in purine bases catabolism.

We have already made some researches on the purification and characterization of uricase from ox kidneys [1] with the aim of making a comparative study with the enzyme from pig liver, the main properties of which are known [2]. Among these properties it has been shown that the enzyme is reversibly inhibited by several compounds, e.g. cyanide [2, 3], and also that some reducing and chelating reagents, like ascorbate, hydroxylamine, etc., behave as powerful inhibitors, if tested in appropriate conditions. We have the-

* Istituto di Chimica Organica e Biologica, Facoltà di Scienze, Università di Napoli.

refore extended the study of some inhibitors to the ox kidney uricase; we have taken in consideration some organic and inorganic compounds, for which the effects on the liver enzyme are already known. In this note we wish to refer on the preliminary results obtained so far.

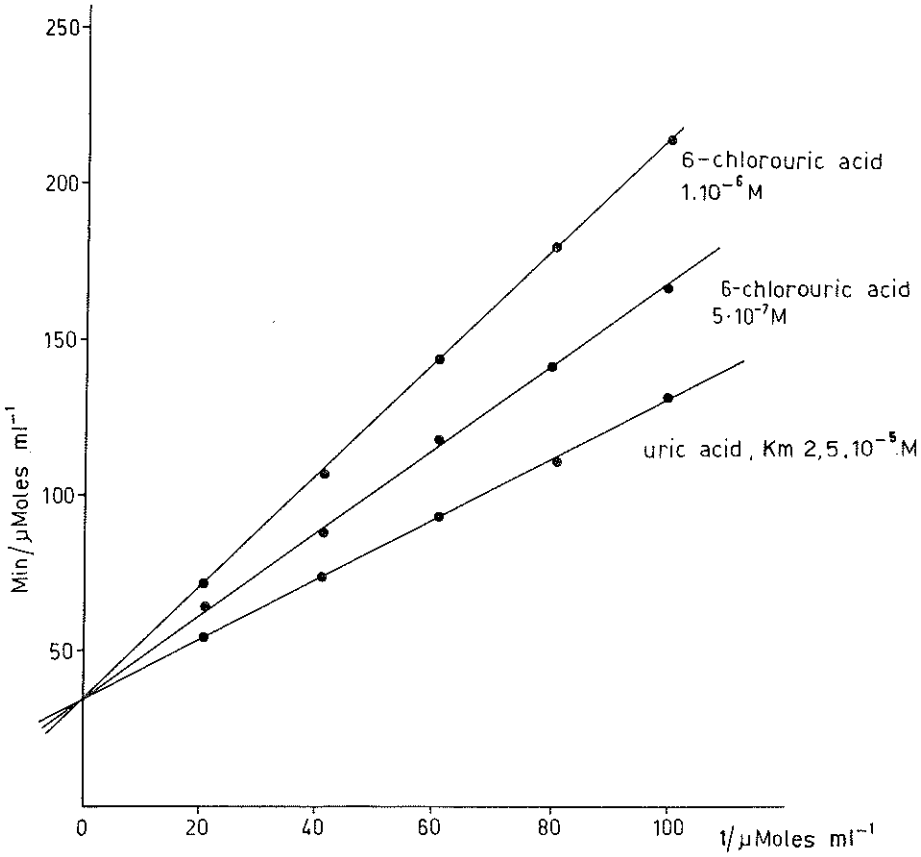


FIG. 1. - Inhibition of ox kidney uricase by 6-chlorouric acid.

MATERIALS AND METHODS

Ox kidney uricase: a preparation has been utilised, with specific activity 1.0, which had been eluted from a column of G-200 Sephadex, according to a previous procedure. Pig liver uricase, specific activity 20, was a product from Boehringer. 6-chlorouric acid was synthesised by the enzymatic procedure of Duggan & Titus [4] and purified by chromatografic techniques. Caffeine was from Merck, while theobromine and theofilline were from Boehringer. Sodium ascorbate, hydro-

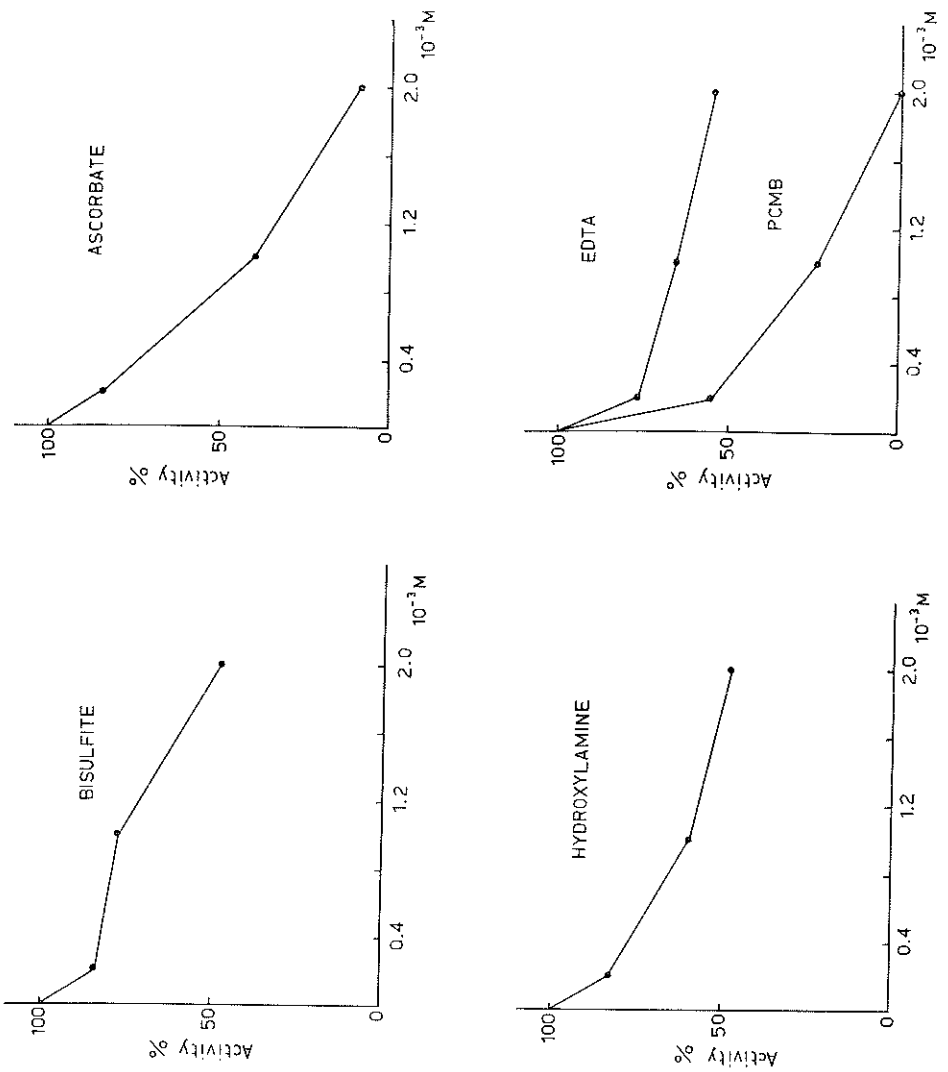


FIG. 2. - Effect of bisulfite, hydroxylamine, ascorbate, EDTA and PCMB on ox kidney uricase activity.

xylamine sulfate, sodium bisulfite, p-chloromercuribenzoate (PCMB), ethylendiamine tetracetate (EDTA), urea and guanidinium chloride were from Baker.

Enzyme activity is expressed according to Mahler *et al.* [2]; one unit is the amount of enzyme which gives a decrease in absorbance at 293 nm of 1.000 per minute at 25°C, in a final volume of 1 ml.

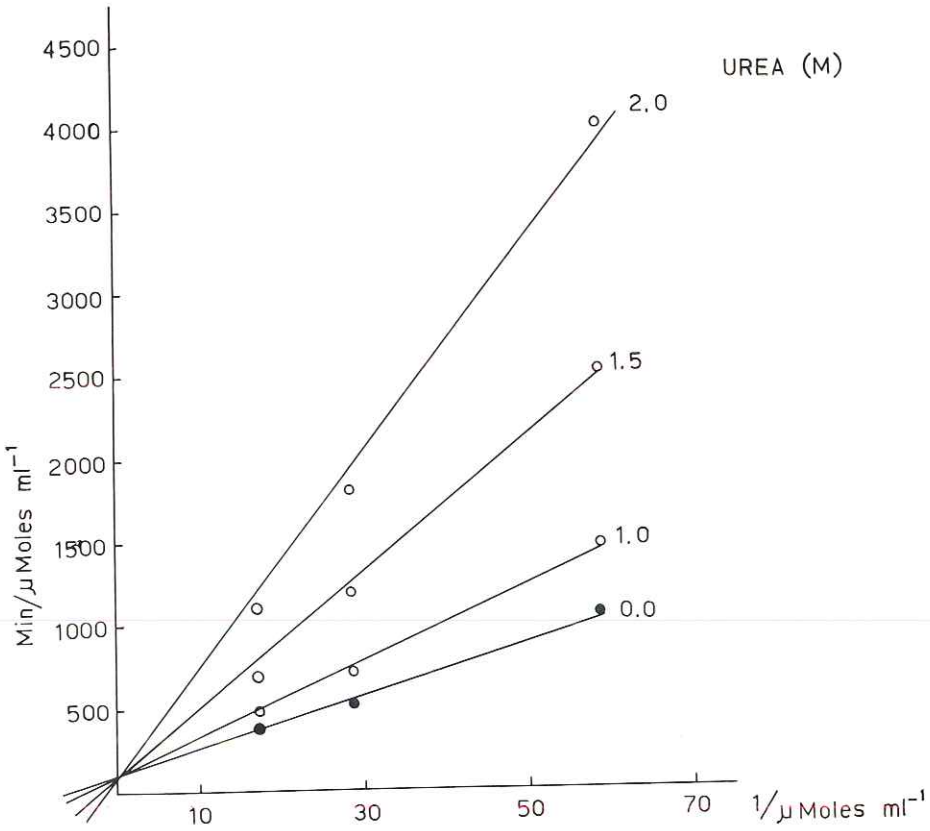


FIG. 3. - Inhibition of ox kidney uricase by urea. Composition of assay mixtures were similar to those indicated for 6-chlorouric acid inhibition; urea varied from 1.0 M to 2.0 M, in the presence of 0.1 M glycine buffer pH 8.8.

RESULTS

6-chlorouric acid, theobromine, theofilline and caffeine have been tested as possible inhibitors of ox kidney uricase, given their structural similarity with the enzyme substrate.

Experiments performed in the presence of increasing amounts of the above compounds have not shown any inhibition, except for

6-chlorouric acid. This compound was tested at final concentrations of 5×10^{-7} and 1×10^{-6} M, respectively; for each of these concentrations the substrate concentration was 0.55×10^{-5}, $0{,}55 \times 10^{-4}$ and 0.11×10^{-4} M, in the presence of enzyme (0.0067 Units/ml) and of 0.1 M borate buffer pH 8.5. From Lineweaver-Burk transformation [5] of the inhibition curves with 6-chlorouric acid it appears that the inhibition is competitive, with a very low value of K_I (2.5×10^{-8} M) (Fig. 1). These results are not very different from those reported for the pig liver enzyme ($K_I = 2.5 \times 10^{-7}$ M).

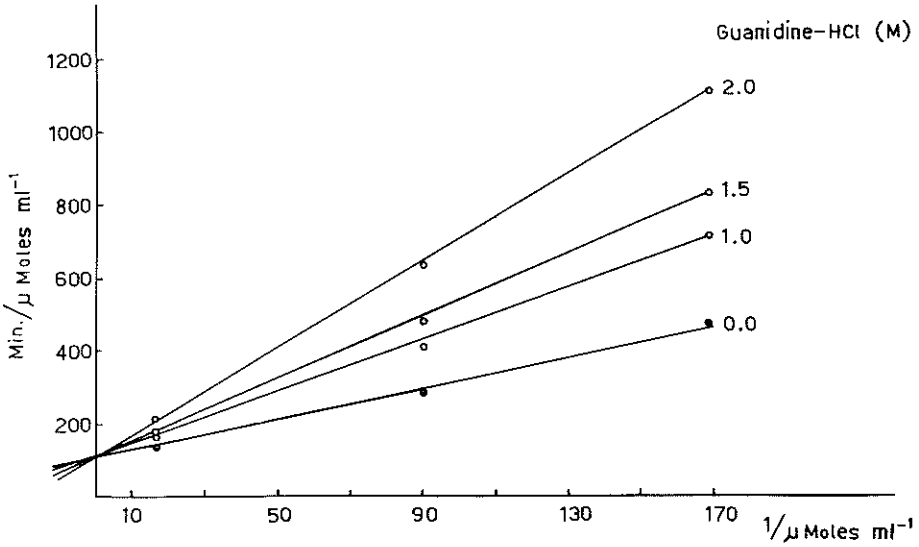


FIG. 4. - Inhibition of ox kidney uricase by guanidine hydrochloride. Compositions of mixtures were similar to those indicated for 6-chlorouric acid inhibition; guanidine-HCl varied from 1.0 to 2.0 M, in the presence of 0.1 M glycine buffer pH 8.8.

On the basis of previous observations on the liver enzyme [2], bisulfite, hydroxylamine, ascorbate, PCMB and EDTA were studied as possible inhibitors of beef kidney uricase (Fig. 2). They were added in concentrations from 2×10^{-4} to 2×10^{-3} M. The experiments were made by effecting a preincubation of the enzyme (0.018 U/ml) with each compound, in 0.01 M borate buffer pH 8.0, either at 30°C for 30 min, or at 22°C for 5 min. Uric acid (0.033×10^{-3} M) was then added and the incubation carried out according to the usual procedure (Fig. 2).

As it can be seen from Table I, there are some significative differences in the action of inhibitors on this enzyme, as compared with pig liver uricase. In fact, PCMB and EDTA are efficient inhibitors of

the ox kidney enzyme, while they have almost no effect on the pig liver enzyme. On the other hand, bisulfite, hydroxylamine and ascorbate have on both enzymes effects which, if not similar, are largely comparable. In particular, bisulfite shows a definite inhibition on ox kidney uricase; on pig liver uricase, the only available value from the literature is of 10% inhibition at 1.0×10^{-3} M, after a preincubation of 5 min at 22°C. Hydroxylamine inhibition, at 1.0×10^{-3} M, is quite

TABLE I

Uricase inhibition by some compounds.

Inhibitor	M (10^{-3})	% inhibition (ox kidney uricase)	% inhibition (pig liver uricase)
Bisulfite	0,2	16	—
	1,0	22 - 28 *	10 *
	2,0	55	—
Hydroxylamine	0,2	17	—
	1,0	40	48
	2,0	52 - 53 *	0 *
Ascorbate	0,2	16	—
	1,0	60	75
	2,0	90	—
PCMB	0,2	45 - 45 *	5 *
	1,0	76	—
	2,0	100	—
EDTA	0,2	23	—
	1,0	34	0
	2,0	45	—

The results refer to samples preincubated at 30°C for 30 min; those marked with an asterisk were preincubated at 22°C for 5 min.
The values for the pig liver enzyme are taken from the literature (Mahler *et al.*, 2).

similar for both enzymes (40 and 48%, respectively) when the preincubation of the compound with the enzyme, prior to the addition of substrate, is carried out for 30 min at 30°C; a difference which may be significative, however, emerges when preincubation is effected for 5 min at 22°C; in these conditions, at 2.0×10^{-3} M inhibitor, 53% inhibition occurs for the ox kidney enzyme, while the pig liver enzyme is not inhibited at all.

Urea and guanidine behave as competitive inhibitors with the kindney uricase, although their effect is observed at rather high concentrations (from 1 M to 2 M, Fig. 3 and 4).

Conclusions

Our previous results on the main properties of ox kidney uricase concerning optimum pH and temperature, isoelectric point, molecular weight etc., were indicative of a substantial identity of that enzyme with the pig liver enzyme. The identity appears to be confirmed, partly at least, by the inhibition experiments. In particular, it appears interesting that 6-chlorouric acid, a powerful inhibitor of the pig liver enzyme, is also active on the ox kidney enzyme at a comparable degree. Another significative result concerns the behaviour with urea and guanidine, which show an inhibiting effect only at high concentrations. This result confirms what has been reported by Pitts and Priest [6] for the liver enzyme. Since there exists no real structural affinity between the above two compounds and the enzyme substrate, this may explain why they are not efficient inhibitors of uricase, given the high concentration at which they are active; one cannot, however, disregard the results of kinetic experiments which point to a competitive nature of the inhibition.

Ox kidney uricase inhibition by PCMB points to -SH groups being involved in the enzyme activity, while the EDTA inhibition can be explained by assuming that the metal is more accessible in this enzyme than in the pig liver protein. The observation of inhibition by hydroxylamine in conditions (preincubation at 22°C for 5 min) where the pig liver enzyme is not affected at all, on the other hand, appears to involve carbonyl groups in the active center of that enzyme; this last assumption is reinforced by observing that another carbonyl reagent, bisulfite, is a more effective inhibitor for ox kidney uricase than for pig liver uricase.

A word of caution must be added to all of these hypotheses and interpretations; the ox kidney uricase with which these experiments have been performed is still far from purity, it may therefore be that the observed inhibitory effects are the result of interactions of the compounds being tested with the enzyme, present together with other proteins, possibly in an aggregated form. In order to reach a definite proof of some difference(s) existing between the two uricases a more advanced degree of purification of the ox kidney enzyme has to be reached.

REFERENCES

[1] FARINA, B. & FARAONE MENNELLA. M. R., *Boll. Soc. It. Biol. Sper.*, **49**, 1079-1084 (1973).
[2] MAHLER, H. R., BAUM, M. and HUBSCHER, G., *J. Biol. Chem.* **216**, 625-641 (1955).
[3] KEILIN, D. and HARTREE, E. F., *Proc. Roy. Soc.* (*London*), **119** 114-140 (1938).
[4] DUGGAN, D. E. and TITUS, E., *J. Biol. Chem.*, **234**, 2100-2104 (1959).
[5] LINEWEAVER, H. and BURK, D., *J. Am. Chem. Soc.*, **56**, 658-666 (1934).
[6] PITTS, O. M. and PRIEST, D. G., *Biochemistry*, **13**, 888-892 (1974).

Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli

Parte II - Modelli di forma quadrata, rettangolare e triangolare *

Nota del socio ordinario MARIO GÀLGANO

(Adunanza del 4 giugno 1977)

RIASSUNTO. — La seconda ed ultima parte di questo lavoro, concernente i tricometrogrammi da modelli di forma quadrata, rettangolare e triangolare di sezioni trasverse di capelli, dimostra anch'essa, e conferma in modo definitivo, che negli studi scientifici e nelle ricerche di Medicina Legale occorre attenersi alle sezioni istologiche dei capelli e abbandonare l'uso del tricociclòforo.

SUMMARY. — The second and last part of this study, which concerns trichometrograms from models of square, rectangular and triangular shape, drawn from transverse sections of human hair, demonstrates again and definitively confirms that, in the scientific investigations and in those of forensic medicine, it is necessary to hold on the histological sections of hair and to drop the use of trichocyclophore.

1. - INTRODUZIONE.

La seconda ed ultima parte del lavoro, qui da me presentata, ha preso lo spunto anch'essa, come la prima, della mia nota preliminare (GÀLGANO, 1975) sulle prestazioni assai limitate, che si possono ottenere con l'uso del tricociclòforo, un apparecchio ideato da S. SERGI (1936, 1940) e usato largamente in lavori antropologici ed anche in indagini di natura medico-legale, perché si riteneva di poter facilmente misurare con esso, al microscopio, gli assi di un qualunque piano trasverso di un capello, o di un pelo, e di poter costruire con le misure prese delle figure poligonali, i tricometrogrammi, i quali avrebbero rappresentato con buona approssimazione, schematicamente, la forma delle sezioni trasverse dei capelli, o dei peli.

* Ringrazio vivamente il Prof. R. VINCIGUERRA per l'incoraggiante discussione nel corso del lavoro e per la revisione critica del manoscritto.

Rimando alla prima parte del lavoro (GÀLGANO, 1976) per una più estesa esposizione circa l'uso del tricociclòforo, la costruzione dei tricometrogrammi e l'impiego dei modelli. Qui mi limiterò a ricordare solo i seguenti punti essenziali per la comprensione del testo.

Il tratto di capello da esaminare viene montato teso orizzontalmente sul tricociclòforo, il quale permette di farlo ruotare sul suo asse longitudinale di quanti gradi vogliamo.

Nell'uso corrente, mediante un microscopio munito di micrometro oculare, si cerca e si misura anzitutto l'asse minore (a. m.) vero o presunto tale del capello (in questa posizione il capello si dice « azzezato »). Si ruota quindi il capello di 30° in 30° in senso orario, e si leggono al micrometro oculare le misure a 30°, 60°, 90°, 120° e 150° dall'asse minore. Per costruire il tricometrogramma si adopera un modulo, formato da sei diametri incrociantisi a 30° fra loro, e con il ∅ a 0°-180° disposto orizzontalmente sul foglio. Poiché si suppone (di regola erroneamente) che il capello sia simmetrico rispetto all'asse di rotazione, e quindi che il presunto centro della sezione del capello corrisponda al centro del modulo, i valori misurati vengono riportati sopra i corrispondenti diametri del modulo, in modo che ciascuna metà di un valore giaccia sul raggio corrispondente. L'a. m. viene riportato sul ∅ a 0°-180° e le altre misure rispettivamente sopra i ∅∅ a 30°-210°, a 60°240°, a 90°-270°, a 120°-300° ed a 150°-330° del modulo. La figura poligonale, detta tricometrogramma, si ottiene riunendo con una linea spezzata i punti che sopra i raggi del modulo segnano gli estremi delle misure prese sul capello.

Infine, come ho per primo rilevato nella mia nota preliminare e ripetuto nella prima parte di questo lavoro, *i disegni del modello nelle varie posizioni suddette vanno guardati, come se si osservasse al microscopio, in direzione del ∅ a 0°-180° del modulo*, affinché ci si possa rendere conto di quello che si vede in realtà al microscopio, e se le misure prese sono quelle vere degli assi che si volevano conoscere, o soltanto la proiezione di assi, per di più non corrispondenti a quelli che si desiderava misurare (si vedano le figg I 1, I 5 e I 9 della Parte I). Anzi, nel caso dei triangoli qui considerati, ci renderemo conto che si prendono quasi sempre misure di lati o delle loro proiezioni, non di assi.

La Parte I è stata dedicata allo studio dei tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di forma circolare, a segmento di retta, ellittica, fusiforme o « *cis* », « *trans* », ovale bisimmetrica e reniforme.

In questa Parte II prenderò in esame i modelli di sezione trasversa di forma quadrata, rettangolare, triangolare isoscele ed equilatera, e i relativi tricometrogrammi. Per la costruzione di quest'ultimi mi sono servito delle tavole delle funzioni circolari a 5-6 deci-

mali di R. FEDERICO (1974), le quali mi sono parse sufficienti, dato che lo spessore dei capelli non raggiunte i 200 μ, e di regola è inferiore o supera non eccessivamente i 100 μ (cfr. R. MARTIN e K. SALLER, 1961). Le forme qui sopra ricordate non presentano, dal punto di vista antropologico considerato, problemi che superino le comuni cognizioni di matematica, e perciò questa volta non occorrerà trattare l'argomento anche da un punto di vista puramente matematico.

Tutti i disegni, anche della Parte II, sono stati eseguiti dall'Autore.

2. - TRICOMETROGRAMMA DEL QUADRATO E TRICOMETROGRAMMI DA MODELLI RETTANGOLARI.

Il quadrato possiede quattro assi di simmetria a due a due uguali. Gli A. M. sono le due diagonali, che dividono gli angoli retti ai quattro vertici in due metà di 45° ciascuna. Gli a. m. sono i due segmenti congiungenti i punti medi dei lati opposti, e quindi sono uguali alla lunghezza del lato. I quattro assi s'incrociano fra loro nel punto medio, formando angoli di 45° e suddividendo il quadrato in 8 triangoli rettangoli uguali, essendo l'uno sovrapponibile a tutti gli altri [1].

L'Indice centesimale del quadrato, dato dal rapporto $\frac{\text{a. m.} \times 100}{\text{A. M.}}$, è = 70,710·678·118·654·752..., ed è l'indice più alto possibile per le forme quadrilatere rettangolari, superiore a quello di qualsiasi rettangolo.

I rettangoli hanno Indici compresi tra un valore < 70,710·678... e un valore > 0. Anch'essi presentano quattro assi di simmetria; ma soltanto gli A. M., rappresentati dalle due diagonali, sono uguali fra loro. L'a. m. è il segmento congiungente i punti medi dei due lati opposti più lunghi, e quindi ha lunghezza uguale a quella dei lati minori. Il quarto asse di simmetria è il segmento congiungente i punti medi dei due lati opposti più brevi, e quindi ha lunghezza uguale a quella dei lati maggiori. I quattro assi s'incrociano nei loro punti medi, suddividendo il rettangolo in 8 triangoli rettangoli, dei quali i due del I quadrante sono uguali fra loro e uguali a quelli del III quadrante e speculari rispetto a quelli dei quadranti II e IV [2].

[1] Se però ruotiamo uno dei triangoli attorno al centro, vediamo che esso si sovrappone in modo alterno solo ad altri tre triangoli, essendo gli adiacenti in posizione opposta. Pertanto la simmetria del quadrato si potrebbe chiamare « raggiata alterna eteroassica », a differenza di quella del cerchio, la quale evidentemente è « raggiata continua omoassica ».

[2] Pertanto si potrebbe dire che i rettangoli hanno una « bisimmetria a coppie alterne », perché formata appunto da coppie di triangoli uguali nei quadranti opposti e speculari rispetto alle coppie dei quadranti adiacenti.

Ciò dipende dal fatto che i quattro assi formano al centro angoli alternatamente $>$ e $<$ di 45° e che le diagonali dividono gli angoli retti ai quattro vertici in due angoli, rispettivamente a quelli al centro, $<$ e $>$ di 45°. Quanto più basso sarà l'Indice del rettangolo, tanto minori di 45° saranno gli angoli ai vertici compresi tra le diagonali e i lati più lunghi e gli angoli al centro compresi tra le diagonali e l'asse parallelo ai lati più lunghi, mentre tanto maggiori di 45° saranno gli angoli ai vertici compresi tra le diagonali e i lati più corti e gli angoli al centro compresi fra le diagonali e l'a. m. [3].

* * *

Per comprendere meglio quanto sarà detto in séguito, ed anche per avere dei termini utili per il confronto con i rettangoli, indicherò anzitutto i dati necessari per costruire il tricometrogramma di un quadrato con gli A. M. = cm 10 e gli a. m. = cm 7,071·067·811·865·475... Essi sono i seguenti per il II Quadrante [4].

$$\rho(0°) = \rho(90°) = \frac{1}{2}\,\text{a. m.} = \text{cm } 3{,}535\cdot533\cdot905\cdot932.737...$$

$$x(0°) = y(90°) = \text{cm } 3{,}535\cdot533\cdot905\cdot932\cdot737...$$

$$y(0°) = x(90°) = 0$$

$$\rho(30°) = \rho(60°) = \text{cm } 4{,}829\cdot630$$

$$x(30°) = y(60°) = \text{cm } 4{,}182\cdot582\cdot270...$$

$$y(30°) = x(60°) = \text{cm } 2{,}414\cdot815$$

$$\rho(45°) = \frac{1}{2}\,\text{A. M.} = \text{cm } 5$$

$$x(45°) = y(45°) = \text{cm } 3{,}535\cdot533\cdot905\cdot932\cdot737...$$

Questi dati sono sufficienti, essendo il tricometrogramma un poligono regolare. La sua forma (fig. 1), somigliante a quella di una tozza croce, è « *falsamente rientrante* » in misura eguale sopra i ∅∅

[3] Tra le figure del contorno delle sezioni trasverse di capelli di LANDRA (1935-1937) denominate quadrangolari, alcune poche somigliano a forme quadrate e varie altre a forme rettangolari. Alle prime LANDRA attribuisce un Indice che varia da 92 a 99 e alle seconde un Indice che va da 72 a 87, eccetto un caso con I = 65. Da queste cifre risulta evidente che l'A. non ha tenuto conto delle diagonali, ossia degli A. M., ma soltanto delle distanze fra i lati opposti.

[4] Per semplificare, non ho posto i segni + e − ai valori delle coordinate x e y.

a 0°-180° e a 90°-270° del modulo, poiché il quadrato, sia « azzerato » che ruotato di 90° in senso orario, presenta in tutta la sua lunghezza uno dei suoi lati, corrispondenti agli a. m., all'osservatore che guarda in direzione del ∅ a 0°-180° del modulo.

Oltre a questi due a. m. di simmetria, ortogonali fra loro, il tricometrogramma possiede altri quattro assi di simmetria più lunghi dei precedenti, uguali fra loro e giacenti sopra i ∅∅ a 30°-210°, a 60°-240°, a 120°-300° e a 150°-330° del modulo.

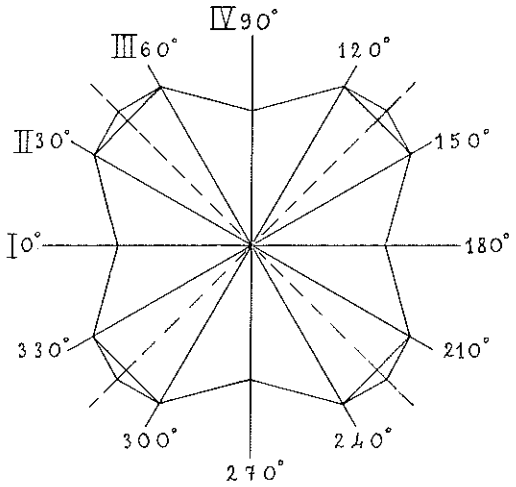


FIG. 1. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma, raffigurato a 12 e a 16 lati, del Quadrato.
I diametri tratteggiati del modulo sono quelli a 45°-225° e a 135°-315°, sopra i quali si riporta l'intera lunghezza delle diagonali, ossia dei due A. M. di simmetria del quadrato. L'intera lunghezza dei due a. m. di simmetria del quadrato si riporta sopra i diametri a 0°-180° e a 90°-270° del modulo.
Il tricometrogramma a 16 lati ha lo stesso Indice 70,710·678... del quadrato. I vertici del quadrato, sia « azzerato » che ruotato di 90° in senso orario, coincidono con i vertici del tricometrogramma sopra i raggi a 45°, 135°, 225° e 315°, mentre il punto medio dei suoi lati coincide con i vertici del tricometrogramma sopra i raggi a 0°, 90°, 180° e 270° del modulo.
Per altri chiarimenti si rimanda al testo.

Pertanto il tricometrogramma, oltre ad avere una forma tanto differente, ha una simmetria raggiata superiore e più complessa di quella del quadrato, che possiede solo due coppie di assi di simmetria. Infatti il quadrato è suddiviso dai suoi assi di simmetria in 8 triangoli rettangoli uguali. Mentre il suo tricometrogramma — tenendo per ora conto soltanto delle misure che si prendono secondo l'uso corrente ruotando il quadrato di 30° in 30° — presenta 12 lati e appare suddiviso in altrettanti triangoli. Di questi, procedendo in

senso orario a partire dal raggio 0-0°, il 1°, il 4°, il 7° e il 10° sono uguali, ma speculari rispetto al 3°, 6°, 9° e 12°, che sono uguali fra loro; i restanti, 2°, 5°, 8° e 11°, sono triangoli isosceli uguali, ma diversi dai precedenti, i quali sono scaleni (fig. 1).

Se poi aggiungiamo la misura degli A. M., le diagonali, che si può prendere quando il quadrato è ruotato in senso orario di 45° e di 135°, misura che si riporta sopra i ∅∅ a 45°-225° e a 135°-315° del modulo, il tricometrogramma presenterà 16 lati e i quattro triangoli isosceli verranno suddivisi a loro volta in due triangoli scaleni speculari fra loro e uguali ai loro opposti (fig. 1).

L'area del quadrato è = cm^2 50, mentre quella del suo tricometrogramma a 16 lati è = cm^2 59,150·645·472..., ossia circa il 118,301·290...% di quella del suo quadrato.

* * *

I rettangoli con Indice elevato dànno tricometrogrammi a 12-16 lati, somiglianti a quello del quadrato, ossia a forma di tozza croce e con due « false rientranze », una maggiore sul ∅ a 0°-180° e l'altra, minore, sul ∅ a 90°-270°. Il rettangolo con Indice = 50 ha 10 lati soltanto e una sola « falsa rientranza », quella sul ∅ a 0°-180°. Mentre i rettangoli con Indice basso dànno tricometrogrammi a 12-14 lati, simili a un 8, ossia con « falsa rientranza » molto accentuata soltanto sul ∅ a 0°-180° del modulo, il che è comprensibile, perché un rettangolo molto lungo e stretto somiglia a un segmento di retta, il quale, come è stato detto nella Parte I, dà per tricometrogramma due esagoni regolari disposti sul ∅ a 90°-270° e uniti per un vertice al centro del modulo.

Per dare un'idea più precisa dei cambiamenti di forma dei tricometrogrammi, conseguenti all'abbassamento dell'Indice dei rettangoli, basteranno gli esempi seguenti.

1° Esempio, Rettangolo con I = 63

Se poniamo i due A. M., le diagonali, = cm 10, il rettangolo dato avrà un a. m. = cm 6,3 (= alla lunghezza dei lati più corti) e un quarto asse di simmetria = cm 7,765·951·326·141·504·989... (= alla lunghezza dei lati più lunghi). Le diagonali divideranno gli angoli retti ai vertici in un angolo di 39°3′ dalla parte dei lati più lunghi e in un angolo di 50°57′ dalla parte dei lati più corti.

I dati necessari per costruire il tricometrogramma sono i seguenti per il II Quadrante.

$$\rho(0^\circ) = \frac{1}{2} \text{ a. m.} = \text{cm } 3{,}15$$

$$x(0^\circ) = 3{,}15;\ y(0^\circ) = 0$$

$$\rho(30^\circ) = \text{cm } 4{,}669{\cdot}470$$

$$x(30^\circ) = \text{cm } 4{,}043{\cdot}879{\cdot}642...$$

$$y(30^\circ) = \text{cm } 2{,}334{\cdot}735$$

$$\rho(60^\circ) = \text{cm } 4{,}937{\cdot}750$$

$$x(60^\circ) = \text{cm } 2{,}468{\cdot}875$$

$$y(60^\circ) = \text{cm } 4{,}276{\cdot}216{\cdot}937...$$

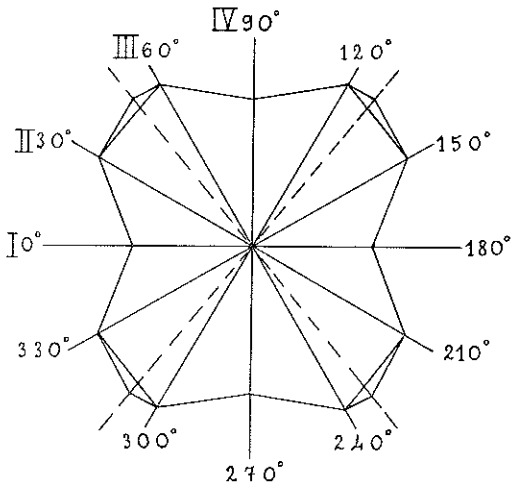


FIG. 2. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma, raffigurato a 12 e a 16 lati, del Rettangolo con I = 63.
I diametri tratteggiati del modulo sono quelli a 50°57′-230°57′ e a 129°3′-309°3′, sopra i quali si riporta l'intera lunghezza delle diagonali, ossia dei due A. M. di simmetria del rettangolo. L'intera lunghezza dell'a. m. di simmetria del rettangolo si riporta sul diametro a 0°180° del modulo. L'intera lunghezza del 4° asse di simmetria del rettangolo si riporta sul diametro a 90°-270° del modulo.
Il tricometrogramma a 16 lati ha lo stesso Indice 63 del rettangolo.
Quando il rettangolo è ruotato di 90° in senso orario, ossia si trova in posizione IV, i suoi vertici coincidono con quelli del tricometrogramma situati sopra i raggi a 50°57′, 129°3′, 230°57′ e 309°3′, mentre il punto medio dei suoi lati più brevi coincide con i vertici del tricometrogramma situati sopra i raggi a 0° e a 180°, e il punto medio dei suoi lati più lunghi coincide con i vertici del tricometrogramma situati sopra i raggi a 90° e a 270° del modulo. Per altri chiarimenti si rimanda al testo.

$$\rho(90^\circ) = \frac{1}{2} \text{ del } 4^\circ \text{ asse} = \text{cm } 3{,}882{\cdot}975{\cdot}663...$$

$$x(90^\circ) = 0;\ y(90^\circ) = 3{,}882{\cdot}975{\cdot}663...$$

$$\rho(50^\circ 57') = \frac{1}{2} \text{ A. M.} = \text{cm } 5$$

$$x(50^\circ 57') = \text{cm } 3{,}15 \left(\text{come } \frac{\text{a. m.}}{2} \text{ e come } \frac{\text{lato corto}}{2} \right)$$

$$y(50^\circ 57') = \text{cm } 3{,}882{\cdot}975{\cdot}663... \left(\text{come } \frac{\text{lato lungo}}{2} \right).$$

Il tricometrogramma (fig. 2) somiglia a quello del quadrato a forma di tozza croce; ma presenta alcuni cambiamenti, i quali permettono già di comprendere come si modificheranno i tricometrogrammi dei rettangoli con l'abbassarsi dell'Indice.

Rispetto a quello del quadrato, il tricometrogramma del rettangolo con I = 63 presenta un $x(0^\circ)$ minore e un $y(90^\circ)$ maggiore, e pertanto una « rientranza » maggiore sul $\varnothing$ a 0°-180° ed una « rientranza » minore sul $\varnothing$ a 90°-270°; inoltre i $\varnothing\varnothing$ a 50°57'-230°57' e a 129°3'-309°3', sopra i quali si riporta l'intera lunghezza dell'A. M., vengono a trovarsi più vicini al $\varnothing$ a 90°-270° del modulo (a 39°3', invece che a 45°).

Il rettangolo con I = 63 ha un'area di cm² 48,925·493·354..., mentre il suo tricometrogramma a 16 lati ha un'area di cm² 58,344·739·172..., pari a circa il 119,252·224... % di quella del suo rettangolo.

2° Esempio, Rettangolo con I = 50.

Se diamo ai due A. M., le diagonali, una lunghezza di cm 10, il rettangolo con I = 50 avrà un a. m. = cm 5 (= alla lunghezza dei lati più corti) e un quarto asse di simmetria = cm 8,660·254·037·844·386·(9) (= alla lunghezza dei lati più lunghi). Le diagonali divideranno gli angoli retti ai vertici in un angolo di 30° dalla parte dei lati più lunghi e in un angolo di 60° dalla parte dei lati più corti.

I dati necessari per costruire il suo tricometrogramma sono i seguenti per il II Quadrante.

$$\rho(0^\circ) = \frac{1}{2} \text{ a. m.} = \text{cm } 2{,}5$$

$$x(0^\circ) = \text{cm } 2{,}5;\ y(0^\circ) = 0$$

$\rho\,(30°) =$ cm 4,330·127·018·922·193·4(9) (corrispondente alla metà del lato più lungo, mentre in realtà si tratta della proiezione di una diagonale del rettangolo, posta obliquamente rispetto all'osservatore sul ∅ a 60°-240° del modulo)

$x\,(30°) =$ cm 3,75; $y\,(30°) =$ cm 2,165·063·509...

$$\rho\,(60°) = \frac{1}{2}\ \text{A. M.} = \text{cm } 5$$

$$x\,(60°) = \text{cm } 2{,}5 \left(\text{corrispondenti ad } \frac{\text{a. m.}}{2} \text{ e al } \frac{\text{lato corto}}{2}\right)$$

$$y\,(60°) = \text{cm } 4{,}330{\cdot}127{\cdot}018\ldots \left(\text{corrispondenti al } \frac{\text{lato lungo}}{2}\right)$$

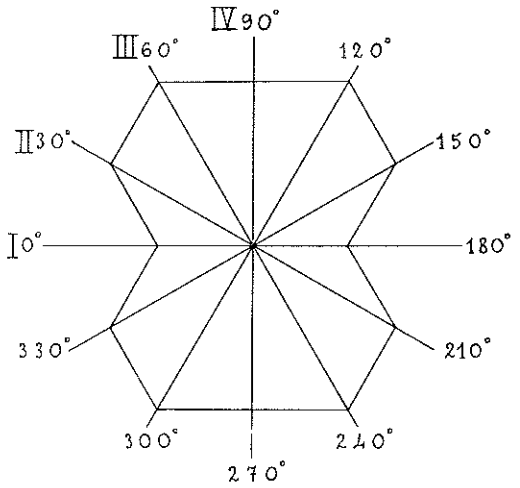


FIG. 3. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma del Rettangolo con I = 50.
Il tricometrogramma ha 10 lati soltanto, perché le diagonali, ossia i due A. M. di simmetria del rettangolo, debbono essere riportate in tutta la loro lunghezza sopra i diametri a 60°-240° e a 120°-300° del modulo, e i loro estremi sono situati allo stesso livello — rispettivamente nei Quadranti I e II e nei Quadranti III e IV — degli estremi del 4° asse di simmetria, l'intera lunghezza del quale si deve riportare sul diametro a 90°-270° del modulo, compreso fra i suddetti diametri. L'intera lunghezza dell'a. m. di simmetria del rettangolo si riporta, come al solito, sul diametro a 0°-180° del modulo. Il tricometrogramma ha lo stesso Indice 50 del rettangolo.
Quando il rettangolo è ruotato di 90° in senso orario, ossia si trova in posizione IV, i suoi vertici coincidono con quelli del tricometrogramma situati sopra i raggi a 60°, 120°, 240° e 300° del modulo, mentre il punto medio dei suoi lati più brevi coincide con i vertici del tricometrogramma situati sopra i raggi a 0° e a 180° del modulo, e il punto medio dei suoi lati più lunghi coincide con il punto medio, situato sul diametro a 90°-270°, dei lati del tricometrogramma opposti fra loro e paralleli al diametro a 0°-180° del modulo. Per altri chiarimenti si rimanda al testo.

$$\rho\,(90^{\circ}) = \frac{1}{2} \text{ del } 4^{\circ} \text{ asse} = \frac{1}{2} \text{ lato lungo} = \text{cm } 4{,}330{\cdot}127{\cdot}018...$$

$$x\,(90^{\circ}) = 0;\ y\,(90^{\circ}) = \text{cm } 4{,}330{\cdot}127{\cdot}018...$$

Il tricometrogramma (fig. 3) è naturalmente più stretto e più rientrante del precedente sul ∅ a 0°-180°, e presenta inoltre l'interessante particolarità di avere due soli lati, l'uno tra i raggi 0-60° e 0-120° e l'altro fra i raggi 0-240° e 0-300° [si noti, infatti, che $y\,(60^{\circ}) = y\,(90^{\circ}) = y\,(120^{\circ})$, a loro volta uguali a $y\,(240^{\circ})$, $y\,(270^{\circ})$ e $y\,(300^{\circ})$], opposti fra loro rispetto al centro e paralleli al ∅ a 0°-180° del modulo, e quindi di possedere in totale soltanto 10 lati.

Con l'I = 50 scompare dunque la rientranza sul ∅ a 90°-270°, la quale, massima nel tricometrogramma del quadrato, si presentava già attenuata in quello del rettangolo con I = 63. Ciò è dovuto soprattutto anche al fatto che la misura intera dei due A. M. si prende quando il rettangolo con I = 50 è ruotato in senso orario di 60° e di 120°, poiché solo in questi due casi prima l'una e poi l'altra diagonale si trova disposta sul ∅ a 90°-270° del modulo, in posizione ortogonale rispetto all'osservatore.

Si noti che i ∅∅ a 60°-240° e a 120°-300°, sopra i quali si riporta l'intera lunghezza degli A. M., vengono a trovarsi ancora più vicini al ∅ a 90°-270° del modulo (a 30°, invece che ai 39°3′ dell'esempio precedente).

Il rettangolo dato, con I = 50, ha un'area di cm² 43,301·270·189·221·934·(9), mentre il suo tricometrogramma ha un'area di cm² 53,726·587·736·527·418·749·(9), pari al 124,076·239... % di quella del suo rettangolo. La differenza tra le due aree va quindi aumentando con l'abbassarsi dell'Indice.

3° Esempio, Rettangolo con I = 25,010.

Con i due A. M., le diagonali, = cm 10, il rettangolo con I = 25,010 avrà un a. m. = cm 2,501 (= alla lunghezza dei lati più corti) e un quarto asse di simmetria = cm 9,682·200·111·544... (= alla lunghezza dei lati più lunghi). Le diagonali divideranno gli angoli retti ai vertici in un angolo di 14°29′ dalla parte dei lati più lunghi e in un angolo di 75°31′ dalla parte dei lati più corti.

I dati necessari per costruire il suo tricometrogramma sono i seguenti per il II Quadrante.

$$\rho(0^{\circ}) = \frac{1}{2} \text{ a. m.} = \text{cm } 1{,}250{\cdot}500$$

$$x\,(0^{\circ}) = \text{cm } 1{,}250{\cdot}5;\ y\,(0^{\circ}) = 0$$

$\rho\,(30^\circ) = \text{cm } 3{,}503{\cdot}500$

$x\,(30^\circ) = \text{cm } 3{,}034{\cdot}120{\cdot}002{\cdot}158{\cdot}780{\cdot}985{\cdot}44(9)$

$y\,(30^\circ) = \text{cm } 1{,}751{\cdot}750$

$\rho\,(60^\circ) = \text{cm } 4{,}817{\cdot}770$

$x\,(60^\circ) = \text{cm } 2{,}408{\cdot}885$

$y\,(60^\circ) = \text{cm } 4{,}172{\cdot}311{\cdot}209{\cdot}590{\cdot}555{\cdot}235{\cdot}693{\cdot}(9)$

$\rho\,(90^\circ) = \frac{1}{2}$ del 4° asse $= \frac{1}{2}$ lato lungo $= \text{cm } 4{,}841{\cdot}100{\cdot}055{\cdot}772\ldots$

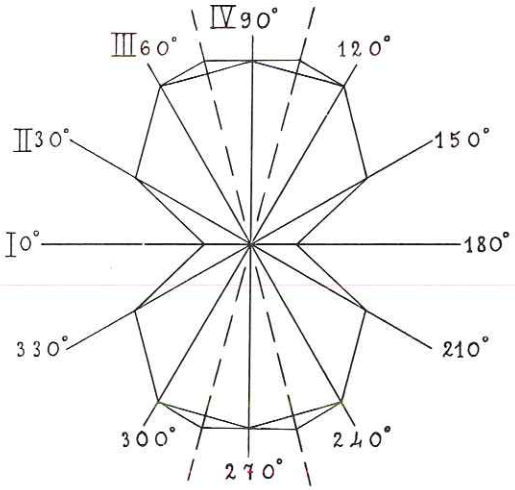


FIG. 4. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma, raffigurato a 12 e a 14 lati, del Rettangolo con I = 25,010.
I diametri tratteggiati del modulo sono quelli a 75°31′-255°31′ e a 104°29′-284°29′, sopra i quali si riporta l'intera lunghezza delle diagonali, ossia dei due A. M. di simmetria del rettangolo. L'intera lunghezza dell'a. m. di simmetria del rettangolo si riporta sul diametro a 0°-180° del modulo. L'intera lunghezza del 4° asse di simmetria del rettangolo si riporta sul diametro a 90°-270° del modulo. Il tricometrogramma a 14 lati ha lo stesso Indice 25,010 del rettangolo.
Quando il rettangolo è ruotato di 90° in senso orario, ossia si trova in posizione IV, i suoi vertici coincidono con quelli del tricometrogramma situati sopra i raggi a 75°31′, 104°29′, 255°31′ e 284°29′ del modulo, mentre il punto medio dei suoi lati più brevi coincide con i vertici del tricometrogramma sopra i raggi a 0° e a 180° del modulo, e il punto medio dei suoi lati più lunghi coincide con il punto medio, situato sul diametro a 90°-270°, dei lati del tricometrogramma opposti fra loro e paralleli al diametro a 0°-180° del modulo. Per altri chiarimenti si rimanda al testo.

$x\,(90°) = 0;\ y\,(90°) = \text{cm}\ 4{,}841{\cdot}100{\cdot}055{\cdot}772...$

$$\rho\,(75°31') = \frac{1}{2}\,\text{A. M.} = \text{cm}\ 5.$$

$$x\,(75°31') = \text{cm}\ 1{,}250{\cdot}500\left(\text{corrispondente ad}\ \frac{\text{a. m.}}{2}\ \text{e al}\ \frac{\text{lato corto}}{2}\right)$$

$$y\,(75°31') = \text{cm}\ 4{,}841{\cdot}100{\cdot}...\left(\text{corrispondente al}\ \frac{\text{lato lungo}}{2}\right)$$

Il tricometrogramma (fig. 4) è fortemente rientrante e ancor più stretto del precedente sul ∅ a 0°-180° del modulo.

Se teniamo conto, secondo l'uso corrente, soltanto delle misure prese ruotando in senso orario di 30° in 30° il modello, il tricometrogramma è sporgente sul ∅ a 90°-270° del modulo, e presenta quindi una forma dodecagona somigliante a quella di un 8, come abbiamo visto nella Parte I per i modelli di forma ellittica, a fuso o « *cis* », « *trans* », ovale bisimmetrica e reniforme con Indice adeguatamente basso.

Se però aggiungiamo l'intera lunghezza degli A. M., che si può prendere ruotando dalla posizione « azzerata » in senso orario il modello di 75°31′ e di 104°29′, il tricometrogramma diventa a 14 lati, con i due lati in più paralleli ed equidistanti rispetto al ∅ a 0°-180°, compresi tra i raggi 0-75°31′ e 0-104°29′ e tra i raggi 0-255°31′ e 0-284°29′. La distanza tra questi raggi e il ∅ a 90°-270° è di soli 14°29′.

L'area del rettangolo è $= \div$ cm² 24,215·182·478·971·544..., mentre l'area del suo tricometrogramma con 14 lati è $= \div$ cm² 46,256·131·598·423·781·860·590·440..., ossia $= \div$ 191,062·494... % della prima.

4° Esempio, Rettangolo con I = 9,0054.

Con i due A. M., le diagonali, = cm 10, il rettangolo con I = 9,0054 avrà un a. m. = cm 0,90054 (= alla lunghezza dei lati più corti) e un quarto asse di simmetria = cm 9,95936 [5] (= alla lunghezza dei lati più lunghi). Le diagonali divideranno gli angoli retti ai vertici in un angolo di 5°10′ dalla parte dei lati più lunghi e in un angolo di 84°50′ dalla parte dei lati più corti.

[5] Negli esempi precedenti ho calcolato la lunghezza del 4° asse di simmetria con l'estrazione della radice quadrata, secondo il Teorema di Pitagora; nell'esempio presente, invece, per abbreviare i calcoli, ho calcolato tale lunghezza con le Tavole di R. FEDERICO, secondo la formula A.M. cos 5°10′ = cm 10 × 0,995·936 (cfr. qui sopra per l'ampiezza dell'angolo).

I dati necessari per costruire il tricometrogramma, un poco più approssimativi che negli esempi precedenti [5], sono i seguenti per il II Quadrante.

$$\rho(0^\circ) = \frac{1}{2} \text{ a. m.} = \text{cm } 0{,}45027$$

$$x(0^\circ) = \text{cm } 0{,}45027;\ y(0^\circ) = 0$$

$$\rho(30^\circ) = \text{cm } 2{,}87977$$

$$x(30^\circ) = \text{cm } 2{,}493{\cdot}953...$$

$$y(30^\circ) = \text{cm } 1{,}439{\cdot}885$$

$$\rho(60^\circ) = \text{cm } 4{,}53764$$

$$x(60^\circ) = \text{cm } 2{,}268{\cdot}835$$

$$y(60^\circ) = \text{cm } 3{,}929{\cdot}737...$$

$$\rho(90^\circ) = \frac{1}{2} \text{ del } 4^\circ \text{ asse} = \text{cm } 4{,}97968$$

$$x(90^\circ) = \text{cm } 0;\ y(90^\circ) = \text{cm } 4{,}97968$$

$$\rho(84^\circ 50') = \frac{1}{2} \text{ A. M.} = \text{cm } 5$$

$$x(84^\circ 50') = \text{cm } 0{,}450{\cdot}270 \left(\text{corrispondente a } \frac{1}{2} \text{ a. m.} \right)$$

$$y(84^\circ 50') = \text{cm } 4{,}979{\cdot}680 \left(\text{corrispondente a } \frac{1}{2} \text{ del } 4^\circ \text{ asse} \right)$$

Il tricometrogramma si presenta ancora più stretto e con una « falsa rientranza » ancora più profonda sul ∅ a 0°-180° del modulo, rispetto all'esempio precedente. I due lati in più, equidistanti e paralleli al ∅ a 0°-180°, sono ora compresi tra i raggi 0-84°50′ e 0-95°10′ e tra i raggi 0-264°50′ e 0-275°10′, i quali distano di soli 5°10′ dal ∅ a 90°-270°.

L'area del rettangolo è $= \div$ cm^2 8,968·802..., mentre l'area del suo tricometrogramma a 14 lati è $= \div$ cm^2 37,905·779·587..., ossia circa il 422,640·385... % della prima.

5° Esempio, Rettangolo con I = 5,005·41.

Con i due A. M., le diagonali, = cm 10, il rettangolo con I = 5,005·41 avrà un a. m. = cm 0,500·541 (= alla lunghezza dei lati più corti) e un quarto asse di simmetria = cm 9,987·476 [6] (= alla lunghezza dei lati più lunghi). Le diagonali divideranno gli angoli retti ai vertici in un angolo di 2°52′9″ dalla parte dei lati più lunghi e in un angolo di 87°7′51″ dalla parte dei lati più corti.

I dati necessari per costruire il tricometrogramma sono i seguenti per il II Quadrante.

$$\rho(0^\circ) = \frac{1}{2}\text{ a. m. } = \text{cm } 0{,}250\cdot270\cdot5$$

$$x(0^\circ) = \text{cm } 0{,}250\cdot270\cdot5;\quad y(0^\circ) = 0.$$

$$\rho(30^\circ) = \text{cm } 2{,}713\cdot613$$

$$x(30^\circ) = \text{cm } 2{,}350\cdot057\cdot783\ldots$$

$$y(30^\circ) = \text{cm } 1{,}356\cdot806\cdot5$$

$$\rho(60^\circ) = \text{cm } 4{,}450\cdot025\cdot550$$

$$x(60^\circ) = \text{cm } 2{,}225\cdot012\cdot775$$

$$y(60^\circ) = \text{cm } 3{,}854\cdot852.432\ldots$$

$$\rho(90^\circ) = \frac{1}{2}\text{ del } 4^\circ \text{ asse } = \text{cm } 4{,}993\cdot738$$

$$x(90^\circ) = 0;\quad y(90^\circ) = \text{cm } 4{,}993\cdot738$$

$$\rho(87^\circ7'51'') = \frac{1}{2}\text{ A. M. } = \text{cm } 5$$

$$x(87^\circ7'51'') = \text{cm } 0{,}250\cdot270\cdot5\left(\text{ corrispondente a } \frac{1}{2}\text{ a. m.}\right)$$

$$y(87^\circ7'51'') = \text{cm } 4{,}993\cdot738\left(\text{ corrispondente a } \frac{1}{2}\text{ del } 4^\circ \text{ asse}\right).$$

[6] Si veda la nota all'esempio precedente.

Il tricometrogramma (fig. 5), rispetto all'esempio precedente, sul ∅ a 0°-180° del modulo è ancora più stretto e con una « falsa rientranza » ancora più profonda. I due lati in più, equidistanti e paralleli al ∅ a 0°-180, sono ora compresi tra i raggi 0-87°7'51" e 0-92°52'9" e tra i raggi 0-267°7'51" e 0-272°52'9", i quali distano di soli 2°,52'9", dal ∅ a 90°-270° del modulo.

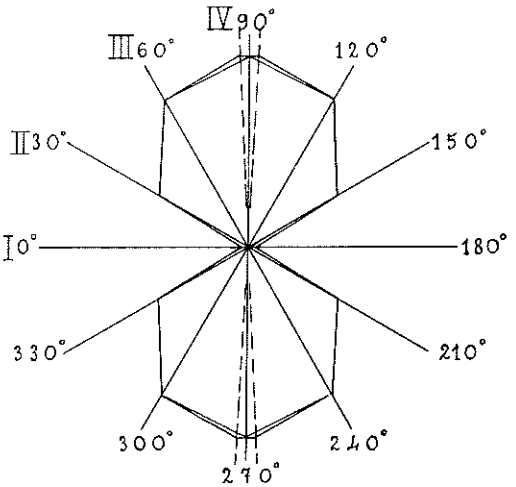


FIG. 5. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma, raffigurato a 12 e a 14 lati, del Rettangolo con I = 5,005·41.
I diametri tratteggiati del modulo sono quelli a 87°7'51"-267°7'51" e a 92°52'9"-272°52'9", sopra i quali si riporta l'intera lunghezza delle due diagonali, ossia dei due A. M. di simmetria del rettangolo. L'intera lunghezza dell'a. m. di simmetria del rettangolo si riporta sul diametro a 0°-180° del modulo. L'intera lunghezza del 4° asse di simmetria del rettangolo si riporta sul diametro a 90°-270° del modulo.
Il tricometrogramma a 14 lati ha lo stesso Indice 5,005·41 del rettangolo.
Quando il rettangolo è ruotato di 90° in senso orario, ossia si trova in posizione IV, i suoi vertici coincidono con quelli del tricometrogramma situati sopra i raggi a 87°7'51", 92°52'9", 267°7'51" e 272°52'9" del modulo, mentre il punto medio dei suoi lati più brevi coincide con i vertici del tricometrogramma sopra i raggi a 0° e a 180° del modulo, e il punto medio dei suoi lati più lunghi coincide con il punto medio, situato sul diametro a 90°-270°, dei lati del tricometrogramma opposti fra loro e paralleli al diametro a 0°-180° del modulo.
Per altri chiarimenti, si rimanda al testo.

L'area del rettangolo è $= \div$ cm² 4,999·141·224·516, mentre l'area del suo tricometrogramma a 14 lati è $= \div$ cm² 35,551·882·200·652, ossia circa il 711,159·789... % della prima.

* * *

Dagli esempi e dalle considerazioni fatte qui sopra, risulta chiaramente che i tricometrogrammi del quadrato e dei rettangoli presentano sempre forme ben diverse, per nulla somiglianti a quelle

del quadrato e dei rettangoli dai quali sono state tratte. Mentre quest'ultimi hanno solo 4 lati e 4 angoli retti, i loro tricometrogrammi, man mano che l'Indice diminuisce, passano da forme simili a una tozza croce con 12 lati (16 lati, tenendo conto anche degli A.M.) a una forma — quando l'I ha un valore = 50 — con 10 lati, vagamente somigliante a un 8, e quindi a forme con 12 lati (14 lati, tenendo conto anche degli A. M.), sempre più simili a un 8, o meglio, per essere più precisi, al tricometrogramma del segmento di retta, formato da due esagoni regolari, disposti sul ∅ a 90°-270° e uniti fra loro per un vertice al centro del modulo; inoltre in nessun caso presentano angoli retti ai vertici.

Dall'Indice massimo = 70,710·678..., che è quello del quadrato, fino a un Indice > 50 i tricometrogrammi sono caratterizzati da due « false rientranze », una sul ∅ a 0°-180°, che va crescendo, e l'altra sul ∅ a 90°-270°, che va diminuendo. Dall'Indice = 50 fino a un Indice > 0 presentano soltanto una « falsa rientranza », sempre più accentuata, quella sul ∅ a 0°-180°, e sono caratterizzati — se si tien conto degli A. M.[7] dall'avere in corrispondenza del ∅ a 90°-270° non due vertici (come ad esempio per tutte le forme esaminate nella prima parte), ma due lati opposti, equidistanti e paralleli al ∅ a 0°-180°, tanto meno lunghi, quanto più basso è l'Indice del rettangolo.

I tricometrogrammi hanno lo stesso Indice dei modelli da cui sono stati tratti, se si tien conto anche degli A. M., i quali però, come del resto nei modelli, non sono mai disposti ortogonalmente rispetto agli o all'asse minore. Se non si tien conto degli A. M., i tricometrogrammi presentano un Indice superiore a quello dei modelli, tranne nel caso del rettangolo con I = 50, perché l'intera misura dei suoi A. M. già si prende con l'usuale rotazione di 30° in 30°[7]

Occorre infine aggiungere che le aree dei tricometrogrammi sono sempre maggiori di quelle dei modelli, e il loro rapporto rispetto a queste diventa tanto più grande quanto più diminuisce l'Indice del modello considerato.

3. - Tricometrogrammi da modelli triangolari.

Le sezioni trasverse dei capelli più somiglianti a un triangolo sono, per quanto mi consta, quelle con due lati all'incirca uguali;

[7] Ciò avviene normalmente nella costruzione usuale del tricometrogramma, quando si tratta di rettangoli con I = 50, perché i loro due A. M., le diagonali, dividono gli angoli retti ai vertici in un angolo di 30° e in uno di 60°, e quindi saranno disposti sul ∅ a 90°-270° del modulo, ortogonalmente rispetto all'osservatore, dopo rotazione rispettiva del modello di 60° e di 120° in senso orario.

si veda, ad esempio, il lavoro di LANDRA, già citato, in cui le forme più simili a un triangolo isoscele presentano un Indice variabile da 59 a 77 ed oltre.

Pertanto qui mi occuperò dei triangoli di forma isoscele e di conseguenza, come caso particolare e importante di essi, del triangolo equilatero.

Nei triangoli isosceli la forma cambia moltissimo secondo l'ampiezza dell'angolo al vertice [8] (che chiamerò angolo α), il quale può variare da $> 0°$ a $< 180°$. Con angoli al vertice di ampiezza crescente da $> 0°$ a $< 60°$ e da $> 60°$ a $< 180°$ abbiamo triangoli isosceli, mentre con angolo al vertice di 60° abbiamo il triangolo equilatero, che converrà prendere in esame, perché il suo tricometrogramma, un esagono regolare, segna un netto passaggio tra le forme dei tricometrogrammi da triangoli con angolo al vertice $< 60°$, i quali si potrebbero definire alti e stretti, e le forme dei tricometrogrammi da triangoli con angolo al vertice $> 60°$, i quali si potrebbero definire bassi e larghi.

I triangoli isosceli hanno un solo asse di simmetria, la bisettrice (che chiamerò h, essendo anche l'altezza relativa alla base) dell'angolo al vertice α. È utile far notare che la bisettrice rappresenta per i triangoli isosceli il loro asse di simmetria bilaterale, perché da essa sono divisi in due triangoli rettangoli speculari fra loro. Il triangolo equilatero possiede tre h uguali fra loro, le quali, però, non s'incrociano nel loro punto medio, per cui questo triangolo ha pure simmetria bilaterale, che si potrebbe denominare triplice in confronto a quella dei triangoli isosceli, la quale è semplice.

I triangoli isosceli, in base ai loro elementi caratterizzanti (ampiezza dell'angolo α [9], la lunghezza dei lati, della base e della bisettrice o h), si possono distinguere nelle varie categorie qui sotto segnate.

1ª Categoria. — Con α da $> 0°$ a $< \div 53°7'48''$, base $< h <$ lati isosceli e Indice crescente da > 0 a $< \div 89{,}442{\cdot}719{\cdot}1$.

2ª Categoria. — Rappresentata soltanto dal triangolo con $\alpha = \div 53°7'48''$, avente base $= h <$ lati isosceli e Indice $= \div 89{,}442{\cdot}719{\cdot}1$, il quale è l'Indice Massimo possibile.

[8] Nei triangoli isosceli, com'è noto, i due lati eguali si chiamano comunemente *lati* del triangolo, mentre il terzo lato prende il nome di *base*. L'angolo opposto alla base, e quindi compreso fra i due lati eguali, si chiama *angolo al vertice;* gli altri due angoli, opposti ai lati eguali, sono detti *angoli alla base,* e sono eguali fra loro.

[9] L'ampiezza dell'angolo α potrebbe essere sostituita, ma senza vantaggio pratico, dall'ampiezza degli angoli alla base.

3ª Categoria. — Con α da $> \div 53°7'48''$ a $< 60°$, $h <$ base $<$ lati isosceli e Indice decrescente da $< \div$ 89,442·719·1 a $>$ 86,602·540·378·443·86(9).

4ª Categoria. — Con α da $> 60°$ a $< 180°$, base $>$ lati isosceli $> h$ e Indice decrescente da $<$ 86,602·540·378·443·86(9) a > 0.

Fra la 3ª e la 4ª Categoria si pone il triangolo equilatero con $\alpha = 60°$, i tre lati uguali fra loro e Indice = 86,602·540·378·433·86(9).

* * *

Per quanto riguarda i tricometrogrammi, data la grande variabilità della loro forma, sarà opportuno fare degli esempi per ciascuna delle suddette categorie. Ma è necessario premettere alcuni chiarimenti intorno agli argomenti qui di séguito indicati.

A) *Intorno all'Indice.* — Debbo far notare che l'Indice suddetto dei triangoli in questione è un indice *sui generis*, anche se è stato definito in base ai loro elementi caratterizzanti, perché soltanto l'h (le 3 h nel triangolo equilatero) è un vero asse di simmetria, e non sempre rappresenta l'a. m. del triangolo.

Ne consegue, anche in relazione alle premesse e ai dati sopra esposti per le singole categorie, che l'Indice è dato nei triangoli isosceli della 1ª Categoria dalla base $\times$ 100/lato isoscele; nei triangoli della 2ª Categoria dalla h (= base) $\times$ 100/lato isoscele; nei triangoli della 3ª Categoria e nel triangolo equilatero dalla $h \times$ 100/lato isoscele, mentre nei triangoli della 4ª Categoria è dato dalla $h \times$ 100/base.

Dai triangoli delle prime 3 Categorie, a causa del modo (che sarà spiegato in séguito) mediante il quale debbono essere « azzerati », si ottengono tricometrogrammi con indice minore di quello dei triangoli, perché essi presentano come misura minima, ossia come loro a. m. da riportare sul $\varnothing$ a 0°-180° del modulo, una misura inferiore, che non è la base, né la h, ma corrisponde all'altezza relativa a uno dei lati isosceli, mentre come A. M. presentano la misura di uno di questi ultimi. Dal triangolo equilatero e dai triangoli isosceli della 4ª Categoria si ottengono invece tricometrogrammi con indice uguale a quello dei triangoli, perché essi presentano come a. m. la h e come A. M. uno dei tre lati uguali nel caso dell'equilatero e la base nel caso degli isosceli della 4ª Categoria (cfr. la fig. 11 a con la fig. 12 a).

In definitiva, chiamerei pseudo indici quelli in cui le misure considerate come a. m. e A. M. corrispondono a misure di elementi caratterizzanti del modello (del triangolo, nel caso presente, l'angolo α, i lati, la base e la bisettrice), ma tutt'al più una sola corrisponde

ad un suo vero asse di simmetria, e chiamerei falsi indici quelli in cui almeno una delle misure considerate come assi non corrisponde ad alcuno degli elementi caratterizzanti del modello (nel caso presente, l'altezza relativa ad uno dei lati isosceli del triangolo). Riserverei il nome di veri indici soltanto a quelli in cui le misure considerate come a. m. e A. M. corrispondono a veri assi di simmetria del modello. Sotto questo profilo nessun triangolo presenta un vero Indice, poiché al più presenta come a. m. di simmetria soltanto la bisettrice, da me chiamata *h*.

B) *Intorno all'azzeramento.* — Quando al microscopio si esamina un capello montato sul tricociclòforo, si cerca anzitutto — come ho già riferito — la misura minima visibile, che poi si riporta come a. m. sul ∅ a 0°-180° del modulo, distribuendone una metà sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180°. Da questa posizione, che si dice « azzerata » si comincia poi a ruotare il capello di 30° in 30°, prendendo di volta in volta le misure che esso presenta.

I modelli dei triangoli isosceli delle prime tre Categorie si presentano « azzerati » sul modulo, all'osservatore che deve guardare in direzione del ∅ a 0°-180° di esso (come al microscopio), quando uno dei due lati uguali è parallelo al ∅ suddetto, e pertanto è visibile solo la proiezione della base o dell'altro lato isoscele, che in tal caso sono disposti obliquamente rispetto all'osservatore, in modo da presentare la stessa misura. Tale misura, che vale come a. m. per il tricometrogramma, risulta sempre inferiore alla minor lunghezza posseduta da questi triangoli fra i loro elementi lineari caratterizzanti (la base per quelli della 1ª Categoria, la *h* o asse di simmetria bilaterale per quelli della 2ª e 3ª Categoria), perché corrisponde, come ho già detto, all'altezza relativa a uno dei lati isosceli (fig. 11 a, segmento C E del triangolo B A C).

Poiché le due proiezioni suddette sono di misura eguale, solo per opportunità, allo scopo di semplificare i calcoli, i triangoli delle prime tre Categorie saranno azzerati con il vertice dell'angolo α verso l'osservatore, e quindi con la *h* disposta sopra un ∅ del modulo formante un angolo $= \frac{1}{2}\alpha$ con il ∅ a 0°-180°. Per uniformità ho pure scelto che il lato isoscele parallelo al ∅ a 0°-180° fosse situato al di sopra di questo diametro, ossia nei Quadranti II e I (fig. 11 a, triangolo B A C). Quando, dalla posizione azzerata da me scelta, il triangolo sarà ruotato in senso orario di 90°, ossia di $90° + \frac{1}{2}\alpha$ rispetto al ∅ a 0°-180°, l'osservatore potrà misurare, in tutta la sua lunghezza, uno dei suoi lati isosceli, il quale sarà allora parallelo al ∅ a 90°-270°

(fig. 11 a, lato A' B' del triangolo B' A' C'); tale misura (che è la maggiore tra gli altri elementi lineari, base e *h*, di questi triangoli), divisa in due parti uguali, si riporta sul ∅ a 90°270° del modulo, come A. M. del tricometrogramma.

A causa delle ragioni sopra esposte, dunque, per le prime tre Categorie l'Indice del tricometrogramma risulta inferiore a quello del suo triangolo.

Il triangolo equilatero e i triangoli isosceli della 4ª Categoria si presentano invece « azzerati » quando la loro *h*, la misura lineare minore da essi posseduta, è disposta sul ∅ a 90°-270° del modulo, ortogonalmente rispetto all'osservatore, il quale può quindi prenderla in tutta la sua lunghezza. Ruotati in senso orario di 90° presenteranno la massima lunghezza da loro posseduta — quella di un lato nel caso del triangolo equilatero, quella della base nel caso dei triangoli isosceli della 4ª Categoria — in posizione parallela al ∅ a 90°-270°, perciò misurabile in tutta la sua estensione (fig. 12 a).

Pertanto i tricometrogrammi dei triangoli equilatero e isosceli della 4ª Categoria avranno lo stesso Indice del triangolo, dal quale sono stati calcolati.

C) *Intorno al centramento dei modelli ed ai calcoli.* — I modelli sono stati centrati sovrapponendo il punto medio della loro *h* al centro del modulo [10]. Tuttavia, anche così centrati, tranne alcune eccezioni (cfr. qui di seguito) presentano spesso, sia azzerati che ruotati nelle varie posizioni, misure differenti al di sopra e al di sotto del ∅ a 0°-180° del modulo. In tutti questi casi è pertanto errato riportare la metà della misura complessiva sopra un raggio e l'altra metà sopra il raggio opposto dello stesso ∅ del modulo, come si usa per costruire i tricometrogrammi, e come io pure ho fatto per attenermi alla regola (cfr., ad esempio, la fig. 11 a con la fig. 11 b).

Le eccezioni sono presentate dal triangolo equilatero e dai triangoli isosceli della 4ª Categoria, e soltanto per le posizioni « azzerata » e ruotata di 90° in senso orario; in tali casi il ∅ a 0°-180° divide in due metà precise le lunghezze osservabili, che sono quelle che nel tricometrogramma figureranno rispettivamente come a. m. e come A. M. (cfr., ad esempio, la fig. 12 a con la fig. 12 b).

Per fare un solo calcolo anche quando, trattandosi di una proiezione, il ∅ a 0°-180° divideva in due parti di lunghezza diversa la misura osservabile, poiché le misure dei lati, della base e della bisettrice o *h* del triangolo e le ampiezze dei suoi angoli erano note, sono

[10] Il triangolo equilatero dà gli stessi risultati, sia sovrapponendo il punto d'incrocio delle 3 *h* al centro del modulo, sia sovrapponendo a quest'ultimo il punto medio di una delle 3 *h*.

ricorso all'uso di un triangolo rettangolo ausiliare con due vertici e un lato, la sua ipotenusa, a comune con il triangolo dato e con i cateti formati da segmenti paralleli, l'uno al ∅ a 0°-180° e l'altro al ∅ a 90°-270° del modulo. In tal modo è stato facile conoscere l'ampiezza dell'angolo compreso fra il lato a comune e il cateto parallelo al ∅ a 90°-270°, e quindi calcolare la lunghezza di questo cateto, rappresentante la misura della proiezione cercata.

* * *

Possiamo ora iniziare l'esame dei singoli esempi, con l'avvertenza che prenderò in considerazione per ultimo il triangolo della 1ª Cat. con $\alpha = \div\ 5°3'\,28''$ (esempio 14°), allo scopo sia di rendere più agevole il confronto fra il suo tricometrogramma e quello del triangolo della 4ª Cat. con $\alpha = 160°$ (esempio 13°), avendo questi due tricometrogrammi Indici quasi uguali, mentre i rispettivi triangoli stanno all'incirca agli antipodi fra loro per la forma, sia affinché riesca più chiara la comparazione immediatamente successiva tra altri esempi consimili.

1° Esempio, Triangolo della 1ª Cat. con $\alpha = 20°$.

Lati isosceli = cm 10, h = cm 9,848·074·316..., base = cm 3,4730, Indice = 34,730.

I dati per costruire il suo tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 3,4202, una metà dei quali, cm 1,7101, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta il falso a. m. del tricometrogramma.

$$x\,(0°) = x\,(180°) = \text{cm } 1{,}7101;\ y\,(0°) = y\,(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla particolare posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 7,660·46, una metà dei quali, cm 3,830·23, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x\,(30°) = x\,(210°) = \text{cm } 3{,}317·076...$$
$$y\,(30°) = y\,(210°) = \text{cm } 1{,}915·115$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 9,8481, di cui una metà, cm 4,924·05, si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60°) = x\,(240°) = \text{cm } 2{,}462·025$$
$$y\,(60°) = y\,(240°) = \text{cm } 4{,}264·372...$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x\,(90°) = x\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà,

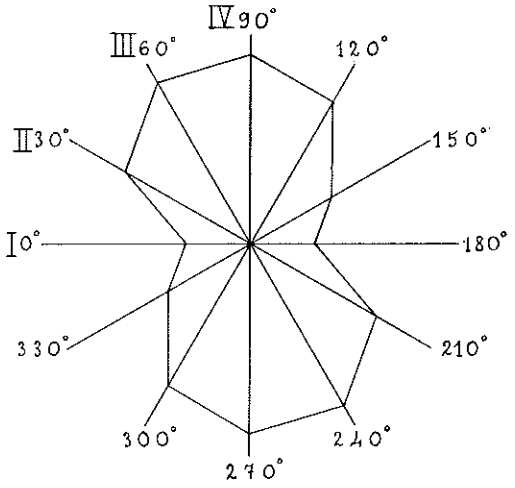


FIG. 6. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 12 lati del Triangolo isoscele di 1ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = 20°$ e Indice = 34,730. Il tricometrogramma ha Indice = 34,202. Spiegazione nel testo.

cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo.

$$x\,(120°) = x\,(300°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(120°) = y\,(300°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 5, di cui una metà, cm 2,5, si riporta sul raggio 0-150° e l'altra metà sul raggio 0-330° del modulo.

$$x\,(150°) = x\,(330°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50... \text{ (come qui sopra).}$$

$$y\,(150°) = y\,(330°) = \text{cm } 1{,}25.$$

Il tricometrogramma (fig. 6) ha falso Indice = 34,202, inferiore di 0,528 rispetto allo pseudo Indice del triangolo (= 34,730).

Esso possiede 12 lati, ed è « rientrante » sul ∅ a 0°-180°; ma, mentre ha forma uguale nei quadranti opposti, ha forma *non* speculare, assai diversa da quella che presenta nei quadranti adiacenti. Nel II e IV Quadrante è molto più rientrante (di cm 1,606·976...) che non nel I e III Quadrante (nei quali la rientranza è soltanto di cm. 0,454·963·50) [11]. In questi ultimi Quadranti, inoltre, i lati opposti con i vertici sui raggi 0-120° e 0-150°, 0-300° e 0-330° sono paralleli al ∅ a 90°-270° del modulo e distanti da esso cm 2,165·063.50...

La singolare simmetria del tricometrogramma, la quale è presente nei quadranti opposti fra loro, ma non trova corrispondenza in quella dei quadranti adiacenti, dipende dal modo particolare (cfr. § B), con il quale tutti i triangoli delle prime 3 Categorie debbono essere « azzerati ». Anche il minor Indice dei tricometrogrammi, rispetto a quello dei triangoli delle prime 3 Categorie, da cui derivano, dipende, come ho già spiegato nei §§ A e B, dal particolare azzeramento dei modelli.

L'area del tricometrogramma è circa il 253,730·717... % di quella del triangolo, essendo la prima = ÷ cm² 43,390·949... e la seconda = ÷ cm² 17,101·181..., con una differenza tra le due di ÷ cm² 26,289·768...

La somma delle aree del tricometrogramma nei Quadranti II e IV è = ÷ cm² 25,015·348..., mentre quella nei Quadranti I e III è = ÷ cm² 18,375·601..., ossia inferiore di circa cm² 6,639·746... alla precedente.

2° Esempio, Triangolo della 1ª Cat. con $\alpha = 25°39'32''$.

Lati isosceli = cm 10, h = cm 9,750·352·80..., base = cm 4,441·004, Indice = 44,410·04.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 4,330·127..., una metà dei quali, cm 2,165·063·50..., si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta il falso a. m. del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(180°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$
$$y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla particolare posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,256·934, una metà dei quali, cm 4,128·467, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

[11] $x(30°) - x(0°) = x(210°) - x(180°) = \text{cm } 1{,}606{\cdot}976...$; $x(150°) - x(180°) = x(330°) - x(0°) = \text{cm } 0{,}454{\cdot}963{\cdot}50$.

$$x\,(30°) = x\,(210°) = \text{cm } 3{,}575{\cdot}357...$$
$$y\,(30°) = y\,(210°) = \text{cm } 2{,}064{\cdot}233{\cdot}5...$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,971·306, di cui una metà, cm 4,985·653, si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60°) = x\,(240°) = \text{cm } 2{,}492{\cdot}826{\cdot}5$$
$$y\,(60°) = y\,(240°) = \text{cm } 4{,}317{\cdot}702...$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra sul raggio 0-270° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x\,(90°) = x\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm. } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254.03..., di cui una metà, cm 4,330·127·01..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo.

$x\,(120°) = x\,(300°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$ [come $x\,(0°)$ e $x\,(180°)$].

$y\,(120°) = y\,(300°) = \text{cm } 3{,}75.$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 5, di cui una metà, cm 2,5, si riporta sul raggio 0-150° e l'altra metà sul raggio 0-330° del modulo.

$$x\,(150°) = x\,(330°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50... \text{ (come sopra)}$$
$$y\,(150°) = y\,(330°) = \text{cm } 1{,}25.$$

Il tricometrogramma (fig. 7) ha falso Indice = 43,301·270..., inferiore di 1,108·770... rispetto allo pseudo Indice del triangolo (= 44,410·04). Esso presenta soltanto 10 lati e forma uguale nei quadranti opposti, ma diversa, *non* speculare rispetto a quella che ha nei quadranti adiacenti. Nei Quadranti II e IV è rientrante sul ∅ a 0°-180° di cm 1,410·293·78..., ossia un po' meno che nel 1° Esempio. Inoltre nei Quadranti I e III presenta un unico lato parallelo al ∅ a 90°-270° dal vertice sul raggio 0-120° al vertice sul raggio 0-180° e dal vertice sul raggio 0-300° al vertice sul raggio 0-0° (essendo gli x (120°), (150°), (180°) (300°), (330°) e (0°) tutti uguali fra loro).

In riassunto, la « rientranza » sul ∅ 0°-180° è diminuita nei Quadranti II e IV, ed è scomparsa nei Quadranti I e III, rispetto al 1° Esempio. La discordanza fra i Quadranti adiacenti è sempre palese a prima vista.

L'area del tricometrogramma è circa il 213,245·916... % di quella del triangolo, essendo la prima = ≒ cm² 46,169·186... e la seconda = ≒ cm² 21,650·677..., con una differenza tra le due all'incirca di cm² 24,518·508...

La somma delle aree del tricometrogramma nei Quadranti II e IV è = ≒ cm² 27,244·880..., mentre quella nei Quadranti I e III è = ≒ cm² 18,944·305..., ossia inferiore di circa cm² 8,280·575... alla precedente.

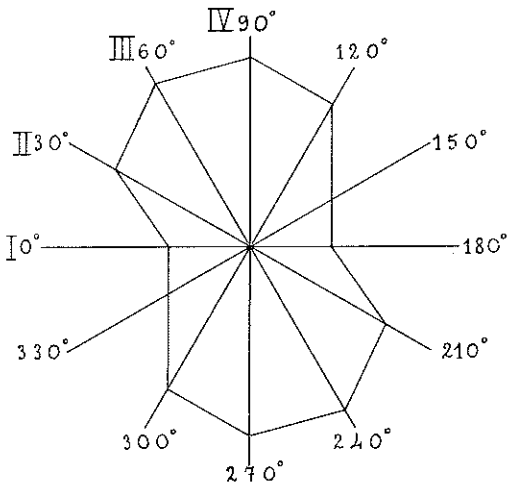


FIG. 7. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 10 lati del Triangolo isoscele di 1ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = 25°39'32''$ e Indice 44,410·04. Il tricometrogramma ha Indice = 43,301·270... Spiegazione nel testo.

3° Esempio, Triangolo della 1ª Cat. con $\alpha = 30°$.

Lati isosceli = cm 10, h = cm 9,659·255·704..., base = cm 5,1764, Indice = 51,764.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 5, di cui una metà, cm 2,5, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta uno dei due falsi a. m. del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(180°) = \text{cm } 2{,}5;\ y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla particolare posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x\,(30°) = x\,(210°) = \text{cm } 3{,}75.$$

$$y\,(30°) = y\,(210°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta uno dei due pseudo A. M. del tricometrogramma, quello non ortogonale al falso a. m. sul ∅ a 0°-180°.

$$x\,(60°) = x\,(240°) = \text{cm } 2{,}5$$

$$y\,(60°) = y\,(240°) = \text{cm } 4{,}330{\cdot}127{\cdot}018{\cdot}920...$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella dell'altro lato isoscele), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta l'altro pseudo A. M. del tricometrogramma, quello ortogonale al suo falso a. m. sul ∅ a 0° - 180°.

$$x\,(90°) = x\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254·037..., di cui una metà, cm 4,330·127·018..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo.

$$x\,(120°) = x\,(300°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(120°) = y\,(300°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 5, di cui una metà, cm 2,5, si riporta sul raggio 0-150° e l'altra metà sul raggio 0-330° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta l'altro falso a. m. del tricometrogramma, quello non ortogonale allo pseudo A. M. sul ∅ a 90°-270°, ma ortogonale allo pseudo A. M. sul ∅ a 60°-240°.

$$x\,(150°) = x\,(330°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(150°) = y\,(330°) = \text{cm } 1{,}25.$$

Il tricometrogramma (fig. 8) possiede due falsi a. m. e due pseudo A. M., ed ha falso Indice = 50, inferiore di 1,764 rispetto allo pseudo Indice del triangolo (= 51,764). Esso presenta di nuovo 12 lati e, come nei due esempi precedenti, forma uguale nei Quadranti opposti, ma discordante da quella dei Quadranti adiacenti. Nei Quadranti II e IV è « rientrante » sul ∅ a 0°-180° di cm 1,25, ossia ancor meno che nel 2° esempio. Invece, a differenza dei due primi esempi, nei Quadranti I e III è « sporgente » sul ∅ a 0°-180° di cm 0,334·936·50... [12].

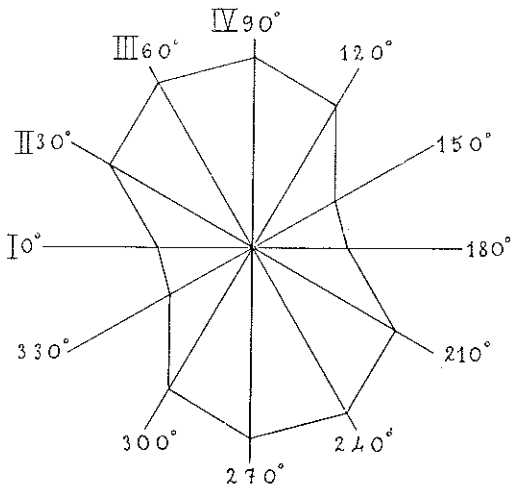


FIG. 8. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 12 lati del Triangolo isoscele di 1ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = 30°$ e Indice = 51,764. Il tricometrogramma ha Indice = 50. Spiegazione nel testo.

Inoltre nei Quadranti I e III presenta il lato con i vertici sopra i raggi 0-120° e 0-150° e il lato opposto con i vertici sopra i raggi 0-300° e 0-330° paralleli a ∅ a 90°-270° del modulo e ugualmente distanti da esso di cm 2,165·063·50..., in modo identico al primo esempio e, per quanto riguarda il tratto fra i raggi suddetti, anche al secondo esempio.

L'area del tricometrogramma è circa il 192,403·152... % di quella del triangolo, essendo la prima = ≒ cm² 48,100·952... e la seconda = ≒ cm² 25,000·085..., con una differenza tra le due all'incirca di cm² 23,100·866...

[12] $x\,(180°) - x\,(150°) = x\,(0°) - x\,(330°) = \text{cm } 0{,}334{\cdot}936{\cdot}50...$

La somma delle aree del tricometrogramma nei Quadranti II e IV è $= \div$ cm^2 28,737·976..., mentre quella nei Quadranti I e III è $= \div$ cm^2 19,362·976..., ossia inferiore di circa cm^2 9,374·999... alla precedente. Questa differenza, arrotondabile a cm^2 9,375, è la massima possibile.

4° Esempio, Triangolo della 1ª Cat. con $\alpha = \div 36°13'18''$.

Lati isosceli = 10, h = cm 9,504·567·912..., base = cm 6,217·134, Indice = 62,171·34.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 5,909·108, una metà dei quali, cm 2,954·554, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta il falso a. m. del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(180°) = \text{cm } 2{,}954{\cdot}554;\ y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla particolare posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,151·114, di cui una metà, = cm 4,575·557, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x(30°) = x(210°) = \text{cm } 3{,}962{\cdot}548{\cdot}58...$$

$$y(30°) = y(210°) = \text{cm } 2{,}287{\cdot}778{\cdot}5$$

Ruotato in senso orario di 60° dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,941·11, di cui una metà, cm 4,970·555, si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x(60°) = x(240°) = \text{cm } 2{,}485{\cdot}277{\cdot}5$$

$$y(60°) = y(240°) = \text{cm } 4{,}304{\cdot}956{\cdot}88...$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x(90°) = x(270°) = 0;\ y(90°) = y(270°) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254·037·84..., di cui una metà, cm 4,330·127·018·92..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo

$$x\,(120^\circ) = x\,(300^\circ) = \text{cm } 2{,}165\cdot063\cdot509\cdot46...$$

$$y\,(120^\circ) = y\,(300^\circ) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 6,083·770·258·566, di cui una metà, cm 3,041·885·129·283, si riporta sul raggio 0-150° e l'altra metà sul raggio 0-330° del modulo.

$$x\,(150^\circ) = x\,(330^\circ) = \text{cm } 2{,}634\cdot351\cdot610\cdot972\cdot439\cdot358$$

$$y\,(150^\circ) = y\,(330^\circ) = \text{cm } 1{,}520\cdot942\cdot564\cdot641\cdot5$$

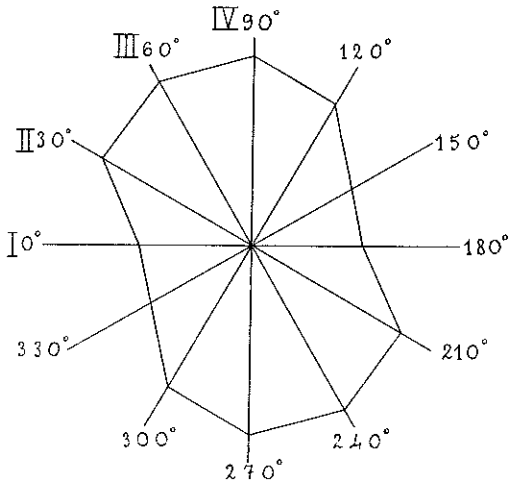


FIG. 9. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 10 lati del Triangolo isoscele di 1ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = \div 36°13'18''$ e Indice = 62,171·34. Il tricometrogramma ha Indice = 59,091·08. Spiegazione nel testo.

Il tricometrogramma (fig. 9) ha falso Indice = 59,091·08, inferiore di 3,080·26 allo pseudo Indice del triangolo (= 62,171·34). Esso presenta di nuovo soltanto 10 lati e, come nei tre esempi precedenti, forma uguale nei Quadranti opposti, ma discordante rispetto a quella che ha nei Quadranti adiacenti. Nei Quadranti II e IV è « rientrante »

sul ∅ a 0°-180°, ma ancor meno che nel 3° esempio, essendo qui $x(30°) - x(0°)$ e $x(210°) - x(180°) =$ cm 1,007·994·58... Nei Quadranti I e III presenta di nuovo un solo lato dal vertice sul raggio 0-120° al vertice sul raggio 0-180° e dal vertice sul raggio 0-300° al vertice sul raggio 0-0°; ma, a differenza del 2° esempio, questa volta i lati suddetti sono obliqui rispetto al ∅ a 90°-270° e « sporgenti » in fuori sul ∅ a 0°-180°, essendo $x(180°) - x(120°) = x(0°) - x(300°) =$ cm 0,789·490·50...; si noti però che la sporgenza di $x(180°)$ rispetto a $x(150°)$ e di $x(0°)$ rispetto a $x(330°)$ è di cm 0,320·202·38..., e quindi lievemente inferiore a quella riscontrata nel 3° esempio.

L'area del tricometrogramma è circa il 177,567·661... % di quella del triangolo, essendo la prima $= \div$ cm² 52,463·446... e la seconda $= \div$ cm² 29,545·586..., con una differenza tra le due all'incirca di cm² 22,917·860...

La somma delle aree del tricometrogramma nei Quadranti II e IV è $= \div$ cm² 30,558·588..., mentre quella nei Quadranti I e II è $= \div$ cm² 21,904·857..., ossia inferiore di circa cm² 8,653·721... alla precedente.

5° Esempio, Triangolo della 1ª Cat. con $\alpha = 44°26'$.

Lati isosceli = cm 10, $h =$ cm 9,257·606·75..., base = cm 7,5622, Indice = 75,622.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 7,0008, di cui una metà, cm 3,5004, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta il falso a. m. del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(180°) = \text{cm } 3{,}5004;\ y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,6332, di cui una metà, cm 4,8166, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x(30°) = x(210°) = \text{cm } 4{,}171·297·94...$$

$$y(30°) = y(210°) = \text{cm } 2{,}4083.$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,6844, di cui una metà, cm 4,8422, si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60^\circ) = x\,(240^\circ) = \text{cm } 2{,}4211$$

$$y\,(60^\circ) = y\,(240^\circ) = \text{cm } 4{,}193{\cdot}468{\cdot}19...$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra sul raggio 0-270° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x\,(90^\circ) = \text{x}\,(270^\circ) = 0;\ y\,(90^\circ) = y\,(270^\circ) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo.

$$x\,(120^\circ) = x\,(300^\circ) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(120^\circ) = y\,(300^\circ) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 7,492·521·889·2, di cui una metà, cm 3,746·260·944·6, si riporta sul raggio 0-150° e l'altra metà sul raggio 0-330° del modulo.

$$x\,(150^\circ) = x\,(330^\circ) = \text{cm } 3{,}244{\cdot}357{\cdot}133...$$

$$y\,(150^\circ) = y\,(330^\circ) = \text{cm } 1{,}873{\cdot}130{\cdot}472{\cdot}3$$

Il tricometrogramma (fig. 10) ha falso Indice = 70,008, inferiore di 5,614 allo pseudo Indice del triangolo (= 75,622). Esso presenta 12 lati e, come negli esempi precedenti, forma uguale nei Quadranti opposti, ma discordante rispetto a quella che ha nei Quadranti adiacenti. Nei Quadranti II e IV è « rientrante » sul ∅ a 0°-180° del modulo, ma ancor meno che nel 4° esempio, essendo $x\,(30^\circ) - x\,(0^\circ)$ e $x\,(120^\circ) - x\,(180^\circ) = \text{cm } 0{,}670{\cdot}897{\cdot}94...$ Invece nei Quadranti I e III è diventato « ovaloide », essendo $x\,(120^\circ) = x\,(300^\circ) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$, $x\,(150^\circ) = x\,(330^\circ) = \text{cm } 3.244{\cdot}357{\cdot}133...$ e $x\,(180^\circ) = x\,(0^\circ) = \text{cm } 3{,}5004$; risulta inoltre, dalle misure ora fornite, che la « sporgenza » di $x\,(180^\circ)$ su $x\,(150^\circ)$ e di $x\,(0^\circ)$ su $x\,(330^\circ)$ è di cm 0,256·042·86..., e quindi minore rispetto all'esempio precedente.

Questa forma mantiene le caratteristiche essenziali acquisite fino ad $\alpha < 60^\circ$; ma con l'aumentare dell'ampiezza di questo angolo, ve-

dremo diminuire le differenze tra i quadranti adiacenti, in maniera che, raggiunti i 60° con il triangolo equilatero, il tricometrogramma assumerà la forma di un esagono regolare.

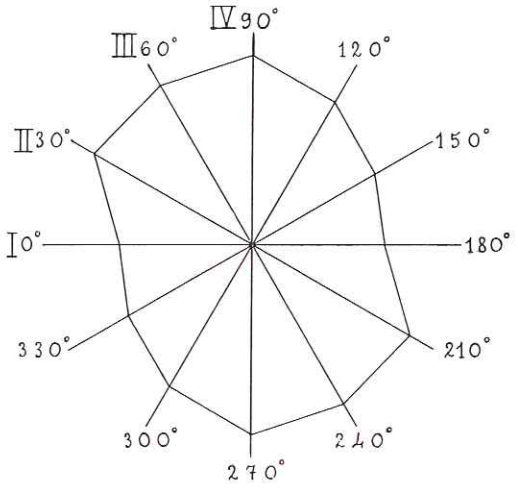


FIG. 10. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 12 lati del Triangolo isoscele di 1ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = 44°26'$ e Indice = 75,622. Il tricometrogramma ha Indice = 70,008. Spiegazione nel testo.

6° Esempio, Triangolo della 2ª Cat. con $\alpha = \div 53°7'48''$.

Lati isosceli = cm 10, h = base = $\div$ cm 8,944·271·91 [13], Indice = $\div$ 89,442·719·1, che rappresenta l'*Indice Massimo* possibile per i triangoli isosceli, e che si ha soltanto quando h = base.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 8 (arrotondata da cm 7,999·992), di cui una metà, cm 4, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180°. Tale misura complessiva rappresenta il falso a. m. del tricometrogramma (fig. 11 a, segmento C E del triangolo B A C; fig. 11 b, asse sul ∅ a 0°-180° del modulo).

$$x\,(0°) = x\,(180°) = \text{cm } 4;\quad y\,(0°) = y\,(180°) = 0.$$

[13] h = base = $\sqrt{\text{cm}^2\ 80}$ = cm 8,944·271·909·999·158·784... Poiché la cifra è troppo lunga, ho adottato h = base = cm 8,944·271·91, la quale è solo leggermente in eccesso, dando al quadrato cm² 80,000·000·000·015·048·1, che è giusta fino alla 10ª cifra decimale.

Secondo le Barlow's Tables $\sqrt{\text{cm}^2\ 80}$ = cm 8,944·271·9, che però dà al quadrato cm² 79,999·999·821·129·61, ossia una cifra in difetto, la quale si discosta di più dal valore reale di quella da me adottata.

Ruotato in senso orario di 30° dalla particolare posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,928·196, di cui una metà, cm 4,964·098, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x\,(30°) = x\,(210°) = \text{cm } 4{,}299{\cdot}034{\cdot}95...$$

$$y\,(30°) = y\,(210°) = \text{cm } 2{,}482{\cdot}049.$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,196·164, di cui una metà, cm 4,598·082, si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60°) = x\,(240°) = \text{cm } 2{,}299{\cdot}041$$

$$y\,(60°) = y\,(240°) = \text{cm } 3{,}982{\cdot}055{\cdot}80...$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), una metà della quale, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270°. Tale misura complessiva rappresenta lo pseudo A. M. del tricometrogramma (fig. 11 a, lato A′ B′ del triangolo B′ A′ C′; fig. 11 b, asse sul ∅ a 90°-270° del modulo).

$$x\,(90°) = \text{x}\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254... di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo.

$$x\,(120°) = x\,(300°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(120°) = y\,(300°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,928·191·89..., di cui una metà, cm 4,464·095·94..., si riporta sul raggio 0-150° e l'altra rnetà sul raggio 0-330° del modulo.

$$x\,(150°) = x\,(330°) = \text{cm } 3{,}866{\cdot}020{\cdot}479{\cdot}8...$$

$$y\,(150°) = y\,(330°) = \text{cm } 2{,}232{\cdot}047{\cdot}97...$$

Il tricometrogramma ha falso Indice = 80, inferiore di ÷ 9,442·719·1 allo pseudo Indice del triangolo (= ÷ 89,442·719·1), e tale *differenza*, che dall'esempio 1° è andata sempre crescendo, *è la massima possibile*; vedremo negli esempi successivi che essa diminuirà con l'aumentare di α, fino ad annullarsi quando α avrà raggiunto i 60°.

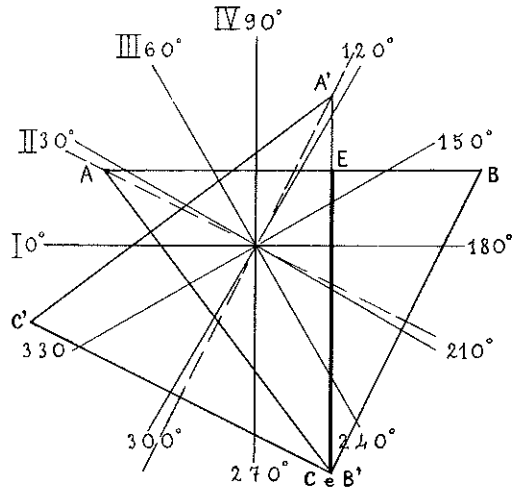


FIG. 11 a. - Riproduzione 1 : 2. - Triangolo isoscele della 2ª Categoria, con angolo al vertice α = ÷ 53°7'48" $\left(\frac{1}{2}\alpha = \div 26°33'54''\right)$ e Indice Massimo = ÷ 89,442·719·1, disegnato in posizione « azzerata » (triangolo B A C) e in posizione ruotata di 90° in senso orario rispetto alla precedente (triangolo B' A' C'). Misure del disegno originale: lati isosceli = cm 10; bisettrice = base = = ÷ cm 8,944...
La figura è stata eseguita per mostrare che nel caso dei triangoli isosceli delle prime 3 Categorie, a causa del loro particolare « azzeramento », l'Indice del tricometrogramma risulta inferiore a quello del triangolo (si veda la spiegazione nel testo, ai §§ A, B, C del Capitolo 3°).
Nel caso qui raffigurato l'a. m. di simmetria del triangolo è rappresentato dalla bisettrice dell'angolo al vertice α ($\widehat{B\,A\,C}$), la quale ha la stessa lunghezza, = ÷ cm 8,944..., della base B C; mentre il falso a. m. del tricometrogramma (guardando il triangolo B A C, come se si osservasse al microscopio, in direzione del diametro a 0°-180° del modulo) sarà dato dalla minor lunghezza visibile, = cm 8, corrispondente a quella del segmento C E (fatto più spesso, per metterlo in evidenza), chiaramente più corto della base B C, la quale nel triangolo rettangolo C E B rappresenta l'ipotenusa. Invece (si guardi ora il triangolo B' A' C' in direzione del diametro a 0°-180° del modulo) lo pseudo A. M. del tricometrogramma corrisponde alla lunghezza, = cm 10, del lato isoscele A' B', che rappresenta lo pseudo A. M. del triangolo. Pertanto il falso Indice del tricometrogramma risulterà = 80, mentre lo pseudo Indice del triangolo è = 89,442... Si noti ancora che, per costruire il tricometrogramma, il falso a. m. e lo pseudo A. M. saranno riportati, divisi in due parti uguali a partire dal centro del modulo, rispettivamente sopra i diametri a 0°-180° e a 90°-270° del modulo, in modo artificioso e del tutto arbitrario, perché sia il segmento C E che il lato A' B' sono tagliati in due parti disuguali dal diametro a 0°-180° del modulo (il segmento C E o falso a. m., in una parte di cm 2 e in un'altra di cm 6; il lato A' B', o pseudo A. M., in una parte di cm 4 e in un'altra di cm 6); si veda in proposito la figura seguente.

Il tricometrogramma (fig. 11 b) ha 12 lati; nei Quadranti II e IV la sua « rientranza » sul ∅ a 0°-180° si è abbassata a cm 0,299·034·956... mentre nei Quadranti I e III è ovaloide e la sua « sporgenza » su questo stesso diametro è diminuita a cm 0,133·979·520...

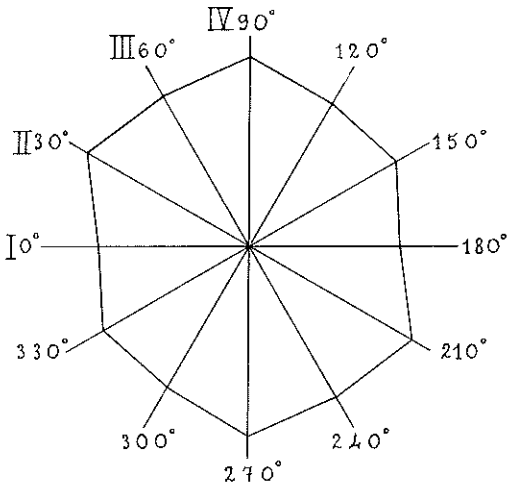


FIG. 11 b. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 12 lati del Triangolo isoscele di 2ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = \div 53°7'48''$ e Indice Massimo $= \div 89{,}442{\cdot}719{\cdot}1$.
Il tricometrogramma ha Indice = 80.
Spiegazione nel testo e nella didascalia della figura precedente.

L'area del tricometrogramma è circa il 155,636·565... % di quella del triangolo, essendo la prima $= \div$ cm² 62,254·626.., e la seconda = cm² 40, con una differenza tra le due di circa cm² 22,254.626...

La somma delle aree del tricometrogramma nei Quadranti II e IV è $= \div$ cm² 32,836·065..., mentre quella nei Quadranti I e III è $= \div$ cm² 29,418·560..., ossia inferiore di circa cm² 3,417·505... alla precedente.

7° Esempio, Triangolo della 3ª Cat. con $\alpha = 56°28'$.

Lati isosceli = cm 10, base = cm 9,461·28, h = cm 8,8103, Indice = 88,103.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 8,335·64, di cui una metà, cm 4,167·82, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta il falso a. m. del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(180°) = \text{cm } 4{,}167{\cdot}82;\ y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla particolare posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,9810, di cui una metà, 4,9905, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x\,(30^\circ) = x\,(210^\circ) = \text{cm } 4{,}321{\cdot}899{\cdot}95...$$

$$y\,(30^\circ) = y\,(210^\circ) = \text{cm } 2{,}495{\cdot}25.$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,951·94, di cui una metà, cm 4,475·97, si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60^\circ) = x\,(240^\circ) = \text{cm } 2{,}237{\cdot}985$$

$$y\,(60^\circ) = y\,(240^\circ) = \text{cm } 4{,}122{\cdot}021{\cdot}09...$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata», lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x\,(90^\circ) = x\,(270^\circ) = 0;\ y\,(90^\circ) = y\,(270^\circ) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo.

$$x\,(120^\circ) = x\,(300^\circ) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}509{\cdot}46...$$

$$y\,(120^\circ) = y\,(300^\circ) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,456·776·43..., di cui una metà, cm 4,728·388·215..., si riporta sul raggio 0-150° e l'altra metà sul raggio 0-330° del modulo.

Il tricometrogramma ha falso Indice = 83,3564, inferiore di 4,7466 allo pseudo Indice del triangolo (= 88,103); la differenza ora accennata, ottenuta scegliendo appositamente le misure del triangolo, è circa la metà di quella più grande fra tutte, presentata dal triangolo con Indice Massimo, visto nell'esempio precedente.

Il tricometrogramma ha 12 lati; nei Quadranti II e IV la sua « rientranza » sul ∅ a 0°-180° è soltanto di cm 0,154·079..., mentre nei Quadranti I e III è ovaloide e la sua « sporgenza » sullo stesso diametro è ridotta a cm 0,072·915...

L'area del tricometrogramma è circa il 155,323·832... % di quella del triangolo, essendo la prima $= \div$ cm² 64,736·422... e la seconda $= \div$ cm² 41,678·357..., con una differenza tra le due all'incirca di cm² 23,058·064... n

La somma delle aree del tricometrogramma nei Quadranti II e IV è $= \div$ cm² 33,820·308..., mentre quella nei Quadranti I e III è $= \div$ cm² 30,916·113..., ossia inferiore di circa cm² 2,904·194 alla precedente.

8° Esempio, Triangolo Equilatero con $\alpha = 60°$.

Ciascuno dei tre lati = cm 10; ciascuna delle tre h = cm 8,660·254·037·844·386·(9); Indice = 86,602·540·378·443·86 (9).

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254 ecc. (quella di una delle h), di cui una metà, cm 4,330·127 ecc. si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta il vero a. m. del tricometrogramma, poiché corrisponde ad uno dei tre assi di simmetria bilaterale, le bisettrici, del triangolo equilatero, e alla minor misura lineare da esso presentata (fig. 12 a, bisettrice sul ∅ a 90°-270° del modulo; fig. 12 b, asse sul ∅ a 0°-180° del modulo).

$$x(0°) = x(180°) = \text{cm } 4{,}330{\cdot}127 \text{ ecc.}; \; y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla posizione « azzerata », finalmente normale, lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo. Tale misura complessiva corrisponde a uno dei tre pseudo A. M. (i lati) del triangolo, e quindi anche a uno degli pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x(30°) = x(210°) = \text{cm } 4{,}330{\cdot}127 \text{ ecc.}$$

$$y(30°) = y(210°) = \text{cm } 2{,}5.$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254 ecc. (quella di un'altra delle 3 h) di cui una metà, cm 4,330·127 ecc. si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° (cfr. posizione « azzerata »).

$$x(60°) = x(240°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063 \text{ ecc.}$$

$$y(60°) = y(240°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di un altro dei 3 lati uguali), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo (cfr. posizione ruotata di 30°) (fig.

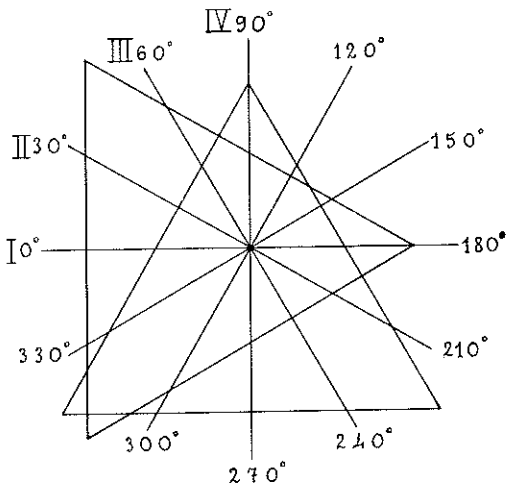


FIG. 12 a. - Riproduzione 1 : 2. - Triangolo equilatero, il quale possiede angoli ai vertici di 60° e Indice = 86,602·540..., disegnato in posizione « azzerata » (ossia in I Posizione) e in posizione ruotata di 90° in senso orario (ossia in IV Posizione) rispetto alla precedente.
Misure del disegno originale: lati = cm 10; bisettrici = cm 8,660...
La figura è stata eseguita per mostrare che nel caso del triangolo equilatero e dei triangoli isosceli di 4ª Categoria, dato il loro normale « azzeramento », l'Indice del tricometrogramma risulta eguale a quello del triangolo (si veda la spiegazione nel testo, ai §§ A, B, C del Capitolo 3°).
Il triangolo equilatero « azzerato » è quello che ha uno dei suoi vertici sul raggio 0-90° del modulo e la bisettrice corrispondente sul diametro a 90°-270° del modulo. L'osservatore, che guarda, come se fosse al microscopio, in direzione del diametro a 0°-180° del modulo, prende come misura minima quella della bisettrice suddetta (che è uno dei 3 a. m. di simmetria del triangolo), la quale nel tricometrogramma figurerà come l'a. m. disposto sul diametro a 0°-180° del modulo. Il triangolo equilatero ruotato di 90° in senso orario rispetto alla posizione precedente è quello che ha uno dei suoi vertici sul raggio 0-180° del modulo e la bisettrice corrispondente sul diametro a 0°-180° del modulo. Esso presenta all'osservatore uno dei tre lati eguali (ossia uno dei suoi tre pseudo A. M.) in tutta la sua lunghezza (essendo parallelo al diametro a 90°-270° del modulo, e quindi in posizione ortogonale rispetto all'osservatore), la quale sarà riportata come uno degli pseudo A. M. del tricometrogramma sul diametro a 90°-270° del modulo. Pertanto lo pseudo Indice del tricometrogramma risulterà eguale allo pseudo Indice del triangolo; si veda in proposito la figura seguente.
Uguaglianza tra lo pseudo Indice del tricometrogramma e l'Indice del triangolo si avrà pure per i Triangoli isosceli di 4ª Categoria, perché questi, quando saranno « azzerati », presenteranno all'osservatore come misura minima quella della bisettrice, loro unico a. m. di simmetria, disposta sul diametro a 90°-270°, e, quando saranno ruotati di 90° in senso orario, rispetto alla posizione precedente, presenteranno all'osservatore come misura massima quella della base, loro unico pseudo A. M., disposta parallelamente al diametro a 90°-270° del modulo.

12 a, lato parallelo al ∅ a 90°-270° del modulo; fig. 12 b, asse sul ∅ 90°-270° del modulo).

$$x\,(90°) = x\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° si prende la misura completa della terza h, e i valori di $x\,(120°)$, $x\,(300°)$, $y\,(120°)$ e $y\,(300°)$ corrispondono a quelli segnati per la rotazione di 60°.

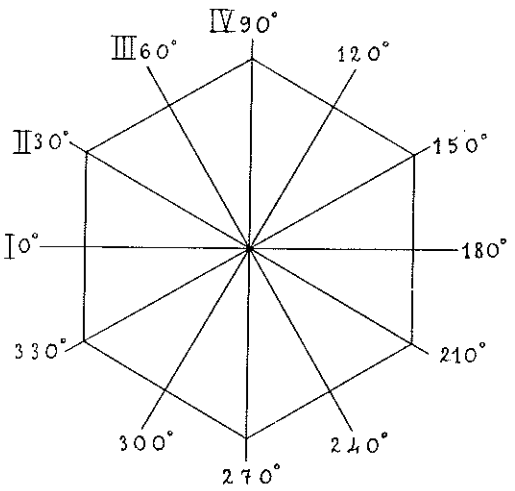


FIG. 12 b. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma del Triangolo equilatero, il quale possiede angoli ai vertici di 60° e Indice = 86,602·540...
Il tricometrogramma ha 6 lati soltanto, ed è un esagono regolare, con Indice uguale a quello del triangolo equilatero.
Spiegazione nel testo.

Ruotato di 150° si prende la misura completa del terzo lato, e i valori di $x\,(150°)$, $x\,(330°)$, $y\,(150°)$ e $y\,(330°)$ corrispondono a quelli segnati per la rotazione di 30°.

Pertanto il tricometrogramma (fig. 12 b), pur avendo lo stesso pseudo Indice del suo triangolo (= 86,602·540 ecc.), ha la forma di un esagono regolare, con lati di cm 5, angoli ai vertici di 120° e 6 assi di simmetria incrociantisi fra loro nel punto medio, al centro della figura e del modulo, di cui 3 di cm 8,660·254 ecc., corrispondenti agli a. m. di simmetria bilaterale del triangolo, e 3 di cm 10, corrispondenti agli pseudo A. M. del triangolo. Gli A. M. dividono il tricometrogramma in 6 triangoli equilateri con lati = cm 5, e insieme ai tre a. m. suddividono l'esagono in 12 triangoli rettangoli scaleni, dei quali 6 alternatamente uguali fra loro e speculari rispetto agli adiacenti.

Il tricometrogramma ha dunque simmetria raggiata alterna, con 3 a. m. e 3 A. M., mentre il triangolo equilatero ha soltanto — come

ho già spiegato — simmetria bilaterale triplice. Inoltre l'area del tricometrogramma è il 150 % di quella del suo triangolo, essendo la prima = cm² 64,951·905·283·832·902·4(9) e la seconda = cm² 43,301·270·189·221·934(9), con una differenza di cm² 21,650·635·094·610·967·5(0).

9° Esempio, Triangolo della 4ª Cat. con $\alpha = 64°$.

Base = cm 10, lati isosceli = cm 9,435·397·33..., h = cm 8,001·670, Indice = 80,0167.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 8,001·670 (quella della h), di cui una metà, cm 4,000·835, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. La misura complessiva qui sopra segnata rappresenta il vero a. m. del tricometrogramma, perché corrisponde all'asse di simmetria bilaterale del triangolo e alla sua minor misura lineare.

$$x\,(0°) = x\,(180°) = \text{cm } 4{,}000{\cdot}835;\ y\,(0°) = y\,(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla normale posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 9,429·641·73..., di cui una metà, cm 4,714·820·86..., si riporta sopra il raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x\,(30°) = x\,(120°) = \text{cm } 4{,}083{\cdot}154{\cdot}65...$$

$$y\,(30°) = y\,(120°) = \text{cm } 2{,}357{\cdot}410{\cdot}43...$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60°) = x\,(240°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(60°) = y\,(240°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione « azzerata », lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella della base), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo.

$$x\,(90°) = x\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm } 5.$$

Il tricometrogramma ha lo stesso pseudo Indice del triangolo (= 80,0167), ma possiede 12 lati, ed è bisimmetrico, di forma uguale nei quadranti opposti e di forma speculare nei quadranti adiacenti. Inoltre è leggermente rientrante su ∅ a 0°-180°, essendo $x(30°) - x(0°) = x(210°) - x(180°) = x(150°) - x(180°) = x(330°) - x(0°) =$ cm 0,082·319·65..., e lievemente sporgente sopra i ∅∅ a 60°-240° e a 120°-300° del modulo, non essendovi esatta proporzionalità fra $x(30°)$, $x(60°)$ e $y(90°) - y(60°)$, $y(90°) - y(30°)$. Data la lieve entità delle differenze sopra accennate, la forma del tricometrogramma, sebbene a 12 lati, poco si discosta da quella a 6 lati ottenibile dal triangolo equilatero.

L'area del tricometrogramma è il 152,292·280... % di quella del triangolo, essendo la prima = cm² 60,929·628·757·524·28... e la seconda = cm² 40,008·350, con una differenza fra le due di cm² 20,921·278·757·524·28...

10° Esempio, Triangolo della 4ª Cat. con $\alpha = 72°24'$.

Base = cm 10, lati isosceli = cm 8,466·067·05..., h = cm 6,831·630, Indice = 68,3163, all'incirca intermedio tra quello del triangolo equilatero e quello del triangolo isoscele rettangolo.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 6,831·630 (quella della h), a. m. vero del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(90°) = \frac{1}{2}h = \text{cm } 3{,}415{\cdot}815;\quad y(0°) = y(90°) = 0.$$

Ruotato di 30°, lunghezza visibile complessiva = cm 8,416·540·56..., di cui una metà, cm 4,208·270·28..., si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x(30°) = x(120°) = \text{cm } 3{,}644{\cdot}468{\cdot}95...$$

$$y(30°) = y(120°) = \text{cm } 2{,}104{\cdot}135{\cdot}14...$$

Ruotato di 60°, lunghezza visibibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x(60°) = x(240°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y(60°) = y(240°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 90°, lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella della base), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo. Tali 10 cm costituiscono lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x(90°) = x(270°) = 0;\ y(90°) = y(270°) = \text{cm } 5.$$

Il tricometrogramma somiglia a quello precedente; possiede 12 lati ed ha una forma bisimmetrica con « falsa rientranza » sul ∅ a 0°-180°; quest'ultima, però, è maggiore, essendo di cm 0,228·653·95...

11° Esempio, Triangolo Rettangolo della 4ª Cat. con $\alpha = 90°$.

Base = cm 10, lati isosceli = cm 7,071·067·811..., h = cm 5, Indice = 50.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 5 (quella della h), a. m. vero del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(180°) = \frac{1}{2}\text{ a. m.} = \text{cm } 2{,}5;\ y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30°, lunghezza visibile complessiva = cm 6,830·128·247..., di cui una metà, cm 3,415·064·123..., si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x(30°) = x(210°) = \text{cm } 2{,}957·532·286...$$

$$y(30°) = y(210°) = \text{cm } 1{,}707·532·061...$$

Ruotato di 60°, lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x(60°) = x(240°) = \text{cm } 2{,}165·063·509...$$

$$y(60°) = y(240°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 90°, lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella della base), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo.

$$x(90°) = x(270°) = 0;\ y(90°) = y(270°) = \text{cm } 5.$$

Pertanto il tricometrogramma (fig. 13) ha 12 lati e forma bisimmetrica come nei due esempi precedenti, ma con « falsa rientranza » sul ∅ 0°-180° più accentuata, di cm 0,457·532·286...

L'Indice del tricometrogramma, come dall'8° esempio compreso in poi, è uguale a quello del triangolo.

L'area del tricometrogramma è circa il 179,903·827·346 % di quella del triangolo, essendo la prima = ÷ cm² 44,975·956·836... e la seconda = cm² 25, con una differenza fra le due di cm² 19,975·956·836...

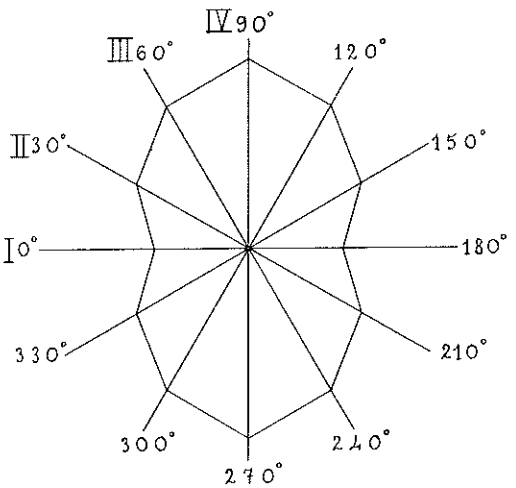


FIG. 13. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 12 lati del Triangolo isoscele di 4ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = 90°$ (il triangolo è dunque rettangolo) e Indice = 50.
Il tricometrogramma ha lo stesso Indice del triangolo.
Spiegazione nel testo.

12° Esempio, Triangolo della 4ª Cat. con $\alpha = 120°$.

Base = cm 10, lati isosceli = cm 5,773·502·71..., h = cm 2,886·75, Indice = 28,8675.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 2,886·75 (quella della h), di cui una metà, cm 1,443·375, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. La h è l'a. m. vero del tricometrogramma.

$$x\,(0°) = x\,(180°) = \text{cm } 1{,}443{\cdot}375;\ y\,(0°) = y\,(180°) = 0$$

Ruotato di 30°, lunghezza visibile complessiva = cm 5, di cui una metà, cm 2,5, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x\,(30^\circ) = x\,(210^\circ) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(30^\circ) = y\,(210^\circ) = \text{cm } 1{,}25.$$

Ruotato di 60°, lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60^\circ) = x\,(240^\circ) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(60^\circ) = y\,(240^\circ) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 90°, lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella della base), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra sul raggio 0-270° del modulo. Tale lunghezza complessiva costituisce lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x\,(90^\circ) = x\,(270^\circ) = 0;\ y\,(90^\circ) = y\,(270^\circ) = \text{cm } 5.$$

Il tricometrogramma ha lo stesso Indice del triangolo; possiede 12 lati e forma bisimmetrica come nei tre esempi precedenti, ma con « falsa rientranza » sul ∅ a 0°-180° ancora maggiore, di cm 0,721·688·50... Inoltre presenta la particolarità di avere i lati con i vertici sopra i raggi 0-30° e 0-60°, 0-120° e 0-150°; 0-210° e 0-240°, 0-300° e 0-330° paralleli al ∅ a 90°-270° del modulo.

Con questa forma, dunque, comincia a delinearsi nettamente (tranne che sul ∅ a 0°-180°, ove l'a. m. è = cm 2,886·75) quella composta di due esagoni regolari, che il tricometrogramma assumerebbe se l'angolo α fosse di 180° e il triangolo diventasse quindi un segmento di retta, con l'a. m., rappresentato dal suo punto medio, = 0.

13° Esempio, Triangolo della 4ª Cat. con $\alpha = 160^\circ$.

Base = cm 10, lati isosceli = cm 5,077·121·47..., h = cm 0,881·630, Indice 8,8163.

I dati per costruire il tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato », lunghezza visibile complessiva = cm 0,881·630 (quella della h), a. m. vero del tricometrogramma.

$$x\,(0^\circ) = x\,(180^\circ) = \frac{1}{2}\,h = \text{cm } 0{,}440{\cdot}815;\ y\,(0^\circ) = y\,(180^\circ) = 0.$$

Ruotato di 30°, lunghezza visibile complessiva = cm 5, di cui una metà, cm 2,5, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x\,(30°) = x\,(210°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(30°) = y\,(210°) = \text{cm } 1{,}25.$$

Ruotato di 60°, lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$x\,(60°) = x\,(240°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50$ (lo stesso valore che si ottiene con la rotazione di 30°).

$y\,(60°) = y\,(240°) = \text{cm } 3{,}75$

Ruotato di 90°, lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella della base, che nel tricometrogramma costituisce lo pseudo A. M.), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo.

$$x\,(90°) = x\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm } 5.$$

La forma del tricometrogramma (fig. 14), bisimmetrico a 12 lati, è simile a quella dell'esempio precedente, ma ancor più vicina a quella data da un segmento di retta (composta da due esagoni regolari: cfr. Parte I), avendo una « falsa rientranza » di ben cm 1,724·248·50.., ed essendo ancora più stretta (l'a. m. è uguale soltanto a cm 0,881·630) sul ∅ a 0°-180°. Inoltre, malgrado che l'Indice sia lo stesso, l'area del tricometrogramma è circa il 761,725·213 % di quella del triangolo, essendo la prima = ≒ cm² 33,577·990... e la seconda = cm² 4,408·150, con una differenza tra le due di cm² 29,169·840...

14° Esempio, Triangolo della 1ª Cat. con $\alpha = \fallingdotseq 5°3'28''$.

Lati isosceli = cm 10, h = cm 9,990·261·371..., base = cm 0,882446, Indice = 8,82446.

Questo triangolo, appartenente alla 1ª Categoria, con il quale chiudo la serie degli esempi, è stato scelto in modo che il falso Indice del suo tricometrogramma (= 8,81604) avesse un valore molto vicino allo pseudo Indice (= 8,81630) del triangolo precedente di 4ª Categoria e del suo tricometrogramma (si veda il 13° Esempio),

allo scopo di poter fare qualche utile confronto. Occorre notare subito, però, che il confronto è reso semplice, più facile soprattutto dal valore molto basso degli Indici, dovuto al fatto che l'ampiezza degli angoli α dei due triangoli è vicina ai limiti estremi opposti, rispettivamente a 0° per l'esempio 14° e a 180° per l'esempio 13°. Pertanto ho ritenuto conveniente trattare questo caso di séguito al precedente.

I dati per costruire il suo tricometrogramma sono i seguenti.

« Azzerato » nel modo particolare occorrente per i triangoli delle

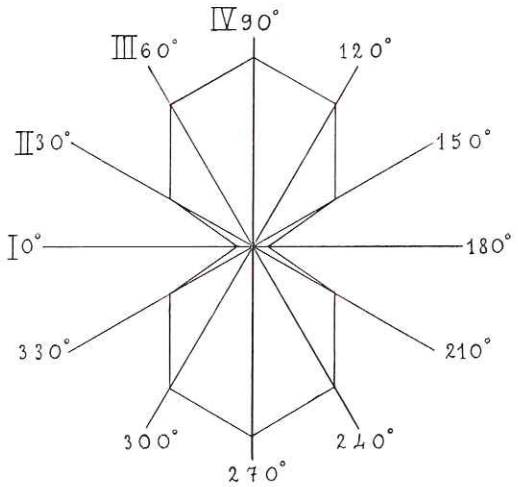


FIG. 14. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 12 lati del Triangolo isoscele di 4ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = 160°$ e Indice = 8,8163.
Il tricometrogramma ha lo stesso Indice del triangolo.
Spiegazione nel testo.

prime 3 Categorie, lunghezza visibile complessiva = cm 0,881604, di cui una metà, cm 0,440·802, si riporta sul raggio 0-0° e l'altra metà sul raggio 0-180° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta il falso a. m. del tricometrogramma.

$$x(0°) = x(180°) = \text{cm } 0{,}440{\cdot}802;\quad y(0°) = y(180°) = 0.$$

Ruotato di 30° in senso orario dalla particolare posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 5,744·02, una metà dei quali, cm 2,872·01, si riporta sul raggio 0-30° e l'altra metà sul raggio 0-210° del modulo.

$$x(30°) = x(210°) = \text{cm } 2{,}487{\cdot}233...$$

$$y(30°) = y(210°) = \text{cm } 1{,}436{\cdot}005$$

Ruotato di 60° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 9,067·338..., una metà dei quali, cm 4,533·669..., si riporta sul raggio 0-60° e l'altra metà sul raggio 0-240° del modulo.

$$x\,(60°) = x\,(240°) = \text{cm } 2{,}266{\cdot}834...$$

$$y\,(60°) = y\,(240°) = \text{cm } 3{,}926{\cdot}272...$$

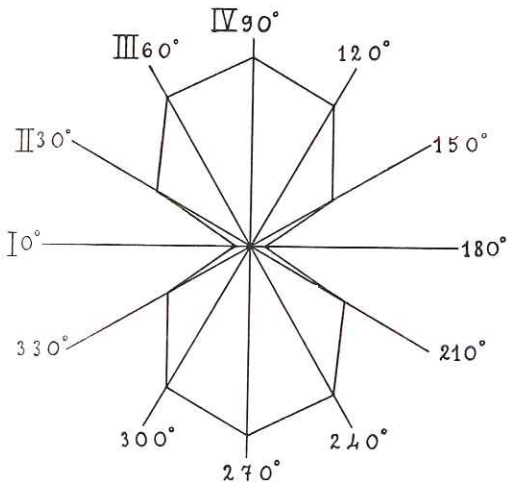


FIG. 15. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma a 12 lati del Triangolo isoscele di 1ª Categoria, con angolo al vertice $\alpha = \div\ 5°3'28''$ e Indice = 8,82446. Il tricometrogramma ha Indice = 8,81604. Spiegazione nel testo.

Ruotato di 90° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 10 (quella di uno dei lati isosceli), di cui una metà, cm 5, si riporta sul raggio 0-90° e l'altra metà sul raggio 0-270° del modulo. Tale misura complessiva rappresenta lo pseudo A. M. del tricometrogramma.

$$x\,(90°) = x\,(270°) = 0;\ y\,(90°) = y\,(270°) = \text{cm } 5.$$

Ruotato di 120° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 8,660·254..., di cui una metà, cm 4,330·127..., si riporta sul raggio 0-120° e l'altra metà sul raggio 0-300° del modulo.

$$x\,(120°) = x\,(300°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(120°) = y\,(300°) = \text{cm } 3{,}75.$$

Ruotato di 150° in senso orario dalla posizione azzerata, lunghezza visibile complessiva = cm 5, di cui una metà, cm 2,5, si riporta sul raggio 0-150° e l'altra metà sul raggio 0-330° del modulo.

$$x\,(150°) = x\,(330°) = \text{cm } 2{,}165{\cdot}063{\cdot}50...$$

$$y\,(150°) = y\,(330°) = \text{cm } 1{,}25.$$

Il tricometrogramma (fig. 15) ha falso Indice = 8,816·04, inferiore di 0,008·42 rispetto allo pseudo Indice del triangolo (= 8,824·46); possiede 12 lati, ed ha forma uguale nei quadranti opposti, ma *non* speculare, diversa da quella che presenta nei quadranti adiacenti. Inoltre è fortemente « rientrante » sul ∅ a 0°-180° del modulo (di cm 2,046·431... nei Quadranti II e IV e di cm 1.724·261·150... nei Quadranti I e III; quest'ultimo valore è quasi uguale a quello di cm 1,724·248·50..., che presenta il tricometrogramma del 13° Esempio in ciascuno dei quattro Quadranti).

Confronto con l'Esempio precedente.

Poiché l'Indice è molto basso tanto nel caso ultimo (triangolo molto stretto in rapporto alla sua altezza) che nel caso penultimo (triangolo molto basso in rapporto alla sua larghezza), ciascuno dei due tricometrogrammi somiglia a quello che si ottiene da un segmento di retta (composto di due esagoni regolari uniti per un vertice e disposti sul ∅ a 90°-270° del modulo; cfr. Parte I). Tuttavia, mentre nel caso penultimo, trattandosi di un triangolo della 4ª Categoria, si ha un tricometrogramma bisimmetrico, ossia di forma uguale nei quadranti opposti e speculare nei quadranti adiacenti (fig. 14), e quindi chiaramente simile a quello che si ottiene da un segmento di retta, nell'ultimo caso, trattandosi di un triangolo della 1ª Categoria, si ha invece un tricometrogramma, il quale nei quadranti adiacenti ha forma diversa, non speculare, e che pertanto somiglia un po' meno a quello di un segmento di retta (fig. 15).

Il tricometrogramma dell'ultimo esempio (fig. 15) nei Quadranti I e III ha forma ed area quasi identica a quella presentata negli stessi Quadranti dal tricometrogramma (fig. 14) ottenibile dal triangolo del penultimo esempio. Le differenze riguardano quindi, si può dire esclusivamente, la forma e l'area che i due tricometrogrammi presentano nei Quadranti II e IV (cfr. la fig. 14 con la fig. 15). Per quanto riguarda la forma in quest'ultimi due Quadranti, vediamo, fra l'altro, che nella fig. 15 il lato compreso fra i raggi 0-30° e 0-60° e quello compreso fra i raggi 0-210° e 0-240°, invece di essere paralleli al ∅ a

90°-270° del modulo, sono sporgenti in fuori verso il ∅ a 0°-180°, e che la rientranza sul ∅ a 0°-180° è maggiore di cm 0,322·170... rispetto a quella che si ha nei Quadranti I e III.

Per quanto riguarda le aree, il tricometrogramma del triangolo con α di ampiezza = 160° ha un'area di cm² 16,788·995... per ogni coppia di Quadranti, sia opposti che adiacenti; il tricometrogramma del triangolo con $\alpha = \div 5°3'28''$ ha un'area complessiva di cm² 16,788·978... nei Quadranti I e III, pressoché identica a quella suddetta, ma nei Quadranti II e IV ha un'area complessiva di cm² 18,476·729..., maggiore di circa cm² 1,687·751...

L'area del triangolo con ampiezza dell'angolo al vertice α di $\div 5°3'28''$ è = cm² 4,407·933..., mentre l'area totale del suo tricometrogramma è = cm² 35,265·708..., ossia circa l'800,050 % di quella del suo triangolo. Come abbiamo già visto, invece, l'area del triangolo con ampiezza dell'angolo al vertice α di 160° è = cm² 4,408·150 e l'area totale del suo tricometrogramma è = cm² 33,577·990..., ossia circa il 761,725 % di quella del suo triangolo. Le differenze qui sopra annotate derivano in minima parte dalle differenze, molto piccole, tra gli Indici dei due triangoli e gli Indici dei loro due tricometrogrammi e in massima parte dell'azzeramento particolare del triangolo con $\alpha = \div 5°3'28''$, dal quale dipende la forma diversa e l'area maggiore del tricometrogramma nei Quadranti II e IV.

L'area di due tricometrogrammi in parola — è forse superfluo dirlo — è molto vicina a quella di cm² 32,475·952... del tricometrogramma ottenibile da un segmento di retta lungo cm 10; i due esagoni che lo compongono hanno ciascuno un'area di cm² 16,237·976... (cfr. Parte I).

Comparazione fra altri Esempi simili ai due precedenti.

Dopo l'esame fatto qui sopra, può riuscire interessante comparare fra loro e con i due casi precedenti anche quei tricometrogrammi con Indice uguale o quasi, ma ottenuti da triangoli isosceli con angolo al vertice α più ampio e appartenenti a Categorie diverse, pur avendo un'area quasi identica.

A tale scopo (si veda la Tabella A) è utile confrontare i due tricometrogrammi con Indice = 50, ottenuti l'uno dal triangolo di 4ª Categoria con $\alpha = 90°$ (cfr. 11° Esempio, fig. 13) e l'altro dal triangolo di 1ª Categoria con $\alpha = 30°$ (cfr. 3° Esempio, fig. 8), e i due tricometrogrammi rispettivamente con Indice = 80,0167 e con Indice = 80, ottenuti l'uno dal triangolo di 4ª Categoria con $\alpha = 64°$ (cfr. 9° Esempio) e l'altro dal triangolo di 2ª Categoria con $\alpha = \div 53°$

TABEL

Segmento di retta lungo cm 10 (o due segmenti come sopra, coincidenti)		Angolo	Indice Segmento	Indice Tricometrogramr
		piatto, 180° (o nullo, 0°)	0	0
Esempio Triangolo	**Categoria Triangolo**	**Ampiezza angola α**	**Indice Triangolo**	**Indice Tricometrogramı**
XIII, fig. 14.	4ª	160°	8,81630	8,81630
XIV, fig. 15.	1ª	≒ 5°3′28″	8,82446	8.81604
XI, fig. 13.	4ª	90°	50	50
III, fig. 8.	1ª	30°	51,764	50
IX —	4ª	64°	80,0167	80,0167
VI, fig. 11 b.	2ª	≒ 53°7′48″	≒ 89,442·719·1	80
VII —	3ª	56°28′	88,103	83,3564
VIII, fig. 12 b.	Equilatero	60°	86,602·540...	86,602·540..

Nella tabella sono stati riassunti alcuni dei dati principali intorno ai triangoli isosceli de o quasi. Per rendere più esauriente il confronto, sono stati aggiunti i dati intorno al segmer VIII). Spiegazione nel testo.

7′48″ (cfr. 6° Esempio, fig. 11 b), tenendo presenti anche i dati ottenuti dal triangolo di 3ª Categoria con $\alpha = 56°28'$ (cfr. 7° Esempio) e dal triangolo equilatero con $\alpha = 60°$ (cfr. 8° Esempio, fig. 12 b).

Si può notare in tal modo che a parità o quasi di Indice i tricometrogrammi da triangoli delle prime 3 Categorie, a causa del loro particolare « azzeramento », hanno sempre un'area maggiore di

Area Segmento	Area Tricometrogramma	Area Tricometrogramma nei Quadranti II e IV	Area Tricometrogramma nei Quadranti I e III
cm² 0	cm² 32,475·952...	cm² 16,237·976...	cm² 16,237·976...

Area Triangolo	Area Tricometrogramma e %	Area Tricometrogramma nei Quadranti II e IV	Area Tricometrogramma nei Quadranti I e III
cm² 4,408·150	cm² 33,577·990... 761,725... %	cm² 16,788·995...	cm² 16,788·995...
cm² 4,407·933...	cm² 35,265·708... 800,050... %	cm² 18,476·729...	cm² 16,788·978...
cm² 25	≒ cm² 44,975·956... 179,903·827... %	≒ cm² 22,487·978...	≒ cm² 22,487·978...
≒ cm² 25,000·085...	≒ cm² 48,100·952... ≒ 192,403·152... %	≒ cm² 28,737·976...	≒ cm² 19,362·976...
cm² 40,008·350	cm² 60,929·628... 152,292·280... %	cm² 30,464·814...	cm² 30,464·814...
cm² 40	≒ cm² 62,254·626... ≒ 155,636·565... %	≒ cm² 32,836·065...	≒ cm² 29,418·560...
≒ cm² 41,678·357...	≒ cm² 64,736·422... ≒ 155,323·832... %	≒ cm² 33,820·308...	≒ cm² 30,916·113...
cm² 43,301·270...	cm² 64,951·905... 150 %	cm² 32,475·952...	cm² 32,475·952...

ppie di Esempi XIII-XIV, XI-III e IX-VI, che presentano tricometrogrammi con Indice uguale retta, a un triangolo della 3ª Categoria (Esempio VII) e al triangolo equilatero (Esempio

quella ottenibile da triangoli della 4ª Categoria, i quali vengono « azzerati » normalmente. La somma delle aree dei tricometogrammi da triangoli delle prime 3 Categorie nei Quadranti II e IV è inoltre sempre maggiore della somma delle loro aree nei Quadranti I e III. La maggiore differenza tra le due somme (= cm² 9,375, arrotondata) viene raggiunta dal tricometrogramma con Indice = 50, proveniente dal

triangolo della 1ª Categoria con $\alpha = 30°$; ma tale differenza va attenuandosi e infine scompare, man mano che l'ampiezza dell'angolo al vertice α aumenta da 30° a 60°.

La diversità di forma dei tricometrogrammi con Indice uguale o quasi, ma appartenenti rispettivamente ad una delle prime 3 Categorie o alla 4ª, si può rilevare dai dati forniti per ogni Esempio, e mi sembra sufficientemente illustrata dalle figure nel testo. Aggiungerò soltanto che la quasi identità di forma (e di area), notata per i Quadranti I e III nella coppia di Esempi 13° e 14° (figg. 14 e 15), va presto perduta con l'aumentare dell'Indice, perché già nei tricometrogrammi da triangoli della 1ª Categoria la forma nei detti Quadranti si modifica molto e finisce col diventare « ovaloide » sul ∅ a 0°-180° del modulo, quando l'angolo al vertice α ha superato l'ampiezza di $\div$ 36°13'18" (cfr. Esempi 1°-5° e figg. 6-10), e tale si mantiene fino a un'ampiezza di tale angolo $< 60°$; mentre i tricometrogrammi da triangoli della 4ª Categoria presentano sempre, in tutti i Quadranti, forma con « falsa rientranza » sul ∅ a 0°-180° del modulo. Falsa rientranza su questo diametro, nei Quadranti II e IV, hanno anche i tricometrogrammi da triangoli delle prime 3 Categorie; ma la forma del loro contorno (oltre all'area già considerata, la quale è maggiore) è diversa da quella che presentano negli stessi Quadranti i tricometrogrammi da triangoli della 4ª Categoria (si confronti, ad esempio, la fig. 8 del 3° Esempio con la fig. 13 dell'11° Esempio). La forma ovaloide e la forma rientrante suddette vanno attenuandosi e scompaiono con il triangolo equilatero, avente $\alpha = 60°$ e un tricometrogramma a forma di esagono regolare.

* * *

Dalle premesse e dalle considerazioni fatte al principio di questo capitolo e dai confronti eseguiti, quando era opportuno, man mano che procedevo nella esposizione dei vari esempi, risulta evidente che i tricometrogrammi dei triangoli esaminati hanno sempre forme ben diverse e per nulla somiglianti a quelle dei modelli, dai quali sono stati tratti.

I triangoli isosceli hanno due lati uguali e la bisettrice dell'angolo detto al vertice, ossia dell'angolo compreso tra i due lati uguali e da me chiamato α, la quale rappresenta per essi l'asse di simmetria bilaterale. Il triangolo equilatero ha tutti e tre i lati uguali e quindi tre bisettrici, che però non s'incrociano fra loro nel punto medio, per cui la simmetria di questo triangolo resta bilaterale, pur essendo triplice in confronto a quella dei triangoli isosceli, che si può denominare semplice.

I loro tricometrogrammi, assai variabili di forma, presentano invece al minimo 6 lati, nel caso del triangolo equilatero, e di regola, nel caso di triangoli isosceli, 12 lati (talora 10, come vedremo meglio tra poco).

L'Indice Massimo, $= \div$ 89,442·719·1, è posseduto dal triangolo isoscele con $\alpha = \div$ 53°7'48". Con α variabile da $> 0°$ a $< \div$ 53°7'48", l'Indice dei triangoli va crescendo da > 0 a $< \div$ 89,442·719·1. Con α variabile da $> \div$ 53°7'48" a $< 180°$ l'Indice dei triangoli va diminuendo da $< \div$ 89,442·719·1 a > 0. L'area più grande, però, è posseduta dal triangolo equilatero, con $\alpha = 60°$ e Indice = 86,602·540 ecc. Con α variante da $< 60°$ a $> 0°$ e da $> 60°$ a $< 180°$ l'area dei triangoli diminuisce fino a un valore $> \text{cm}^2\, 0$.

L'Indice dei tricometrogrammi, a causa del modo particolare con il quale debbono essere « azzerati » i triangoli con $\alpha < 60°$, dapprima è inferiore [14], e poi, dal triangolo equilatero compreso, con $\alpha = 60°$, a tutti i triangoli con $\alpha > 60°$, è uguale a quella dei triangoli. Ne risulta che proprio dal triangolo equilatero (vedi *infra*) si ottiene il tricometrogramma con l'Indice più alto e con l'area più grande. Le aree dei tricometrogrammi diventano tanto meno estese, quanto più il valore di α diminuisce o cresce rispetto all'ampiezza di 60° presentata dal triangolo equilatero.

L'area dei tricometrogrammi, tuttavia, è sempre maggiore di quella dei corrispettivi triangoli. Il rapporto percentuale minimo tra le due aree suddette è quello del 150 % presentato dal caso del triangolo equilatero. Tale rapporto cresce fino a valori altissimi, sia che l'ampiezza di α vada riducendosi da 60° a un valore $> 0°$, sia che vada crescendo da 60° a un valore $< 180°$; questo perché quanto più l'ampiezza di α sarà vicina ai valori estremi di 0° e di 180°, tanto più la forma del triangolo si avvicinerà a quella di un segmento di retta (cfr. gli esempi 14°, 6°, 8°, 9° e 13°), il quale, pur non possedendo un'area, dà per tricometrogramma due esagoni regolari uniti fra loro per un vertice, che nell'insieme presentano un'area relativamente assai estesa (cm^2 32,475·952 ecc. per un segmento lungo cm 10; cfr. Parte I).

La simmetria dei tricometrogrammi è assai variabile. Con i triangoli aventi $\alpha < 60°$, a causa del modo particolare con il quale debbono essere « azzerati », i tricometrogrammi risultano di forma uguale nei Quadranti opposti, ma di forma discordante nei Qua-

[14] Si noti che la differenza tra i due Indici va dapprima crescendo, tanto che il maggior divario si verifica fra il triangolo con Indice Massimo $= \div$ 89,442 ecc. e il suo tricometrogramma, che ha Indice = 80; in séguito tale differenza decresce, per annullarsi con il triangolo equilatero dall'Indice = 86,602 ecc.

dranti adiacenti; essi possiedono di regola 12 lati, ma in due casi hanno soltanto 10 lati (esempi 2° e 4°). Il triangolo equilatero, come abbiamo già visto, dà per tricometrogramma un esagono regolare, a simmetria raggiata alterna. I triangoli con $\alpha > 60°$ dànno tricometrogrammi bisimmetrici, ossia di forma uguale nei Quadranti opposti e di forma speculare nei Quadranti adiacenti, e con « falsa rientranza » sul ∅ a 0°-180° del modulo tanto più accentuata, quanto più il valore di α si avvicina ai 180°.

Circa i triangoli con $\alpha < 60°$, si vedano gli esempi dal 1° al 5° per il mutevole aspetto iniziale dei loro tricometrogrammi soprattutto nei Quadranti I e III e specialmente in corrispondenza del ∅ a 0°-180° del modulo, dove si presentano dapprima con « rientranze » di valore uguale nei Quadranti opposti, ma di valore diverso nei Quadranti adiacenti, e infine, dal triangolo con $\alpha > \div$ 36°13'18" al triangolo con $\alpha < 60°$, con forma sempre « rientrante » nei Quadranti II e IV ed invece divenuta « ovaloide » nei Quadranti I e III. Queste ultime discordanze fra i Quadranti adiacenti vanno però attenuandosi con l'aumentare dell'ampiezza dell'angolo α, fino a scomparire del tutto con il tricometrogramma a forma di esagono regolare, che si ottiene dal triangolo equilatero, avente $\alpha = 60°$. Più precisamente, la forma nei Quadranti II e IV si modifica lentamente, ma mantiene le sue principali caratteristiche — ad esempio la « rientranza » su ∅ a 0°-180° del modulo — sia pure con un'attenuazione progressiva, finché l'angolo al vertice α del triangolo non avrà raggiunto l'ampiezza di 60°; mentre la forma nei Quadranti I e III, da quella « rientrante » iniziale (figg. 15 e 6), cambia dapprima piuttosto rapidamente quattro volte (figg. 7-10), fino ad assumere, quando l'ampiezza dell'angolo al vertice α del triangolo sarà diventata $> \div$ 36° 13'28", una forma « ovaloide », che tale si conserva, pur attenuandosi anch'essa progressivamente, fino ad annullarsi soltanto quando l'angolo al vertice α avrà raggiunto, con il triangolo equilatero, l'ampiezza di 60°.

Ancora a proposito dei triangoli appartenenti alle prime 3 Categorie, ossia con valore dell'angolo al vertice $\alpha > 0° < 60°$, occorre aggiungere che, sempre a causa del particolare modo con il quale debbono essere « azzerati », i loro tricometrogrammi hanno un'area maggiore, a parità o quasi di Indice, di quella dei tricometrogrammi ottenibili dai triangoli dalla 4ª Categoria (cfr. la Tabella A e i confronti eseguiti al termine del 14° Esempio).

Ritengo infine di un certo interesse rilevare che nei tricometrogrammi dei triangoli delle prime 3 Categorie la somma delle aree nei Quadranti II e IV è sempre maggiore della somma delle aree che essi presentano nei Quadranti I e III. Tale differenza raggiunge il

massimo con il triangolo avente l'angolo al vertice α di 30° (cfr. Tabella A; la massima differenza, arrotondata, è di cm² 9,375 con le misure adottate nel testo), e in séguito diminuisce, fino ad annullarsi, quando l'angolo al vertice α avrà raggiunto, con il triangolo equilatero, l'ampiezza di 60°.

CONCLUSIONI.

Nelle pagine precedenti, cui rimando per maggiori particolari, sono stati presi in esame i modelli di sezione trasversa di capelli (o di peli) di forma quadrata, rettangolare, triangolare isoscele ed equilatera.

Le conclusioni generali, alle quali si perviene, sono le seguenti.

Non un solo tricometrogramma ha una forma che somigli, sia pur lontanamente, a quella da cui deriva e che avrebbe dovuto, secondo quanto era stato affermato, rappresentare schematicamente con buona approssimazione.

Il quadrato, che ha I = 70,710·678..., dà un tricometrogramma con lo stesso Indice e a 16 lati, se riportiamo su di esso anche gli A. M., ma a forma di tozza croce, con uguale « falsa rientranza » sopra i ∅∅ a 0°-180° e a 90°-270° del modulo. L'area a 16 lati di quest'ultimo è = ≒ 118,301·290... % di quella del quadrato. Il quadrato avente le diagonali = cm 10 e i lati = cm 7,071·067... ha un'area di cm² 50 e il suo tricometrogramma a 16 lati ha un'area di cm² 59,150·645...

I rettangoli hanno un Indice variante da un valore < 70,710·678... a un valore > 0. Essi presentano tricometrogrammi di ugual Indice, se consideriamo anche gli A. M. [15]; però la loro forma, dapprima simile a quella di una tozza croce, ma più « rientrante » sul ∅ a 0°-180° e meno « rientrante » sul ∅ a 90°-270° del modulo rispetto a quella data dal quadrato, man mano si modifica, per diventare sempre più somigliante, pur senza mai raggiungerla, alla forma del tricometrogramma ottenibile dal segmento di retta, il quale è composto di due esagoni regolari, disposti lungo il ∅ a 90°-270°, e congiunti fra loro per un vertice al centro del modulo. Il cambiamento avviene, man mano che l'Indice si abbassa, per l'accentuarsi della « falsa rientranza sul ∅ a 0°-180°, mentre quella sul ∅ a 90°-270° va attenuandosi, fino a scomparire con l'I = 50. In tal modo, dall'Indice 50 compreso in poi, andando verso l'Indice 0, i tricometrogrammi assumono una forma bisimmetrica, dapprima molto vagamente e in séguito sempre

[15] Cfr. nota a pag. 16.

più somigliante a quella data da un segmento di retta, restando però caratterizzati dal fatto, se teniamo conto anche degli A. M. [16], che in corrispondenza del ∅ a 90°-270°, invece di presentare due vertici (come avviene per i modelli ellittici, ecc. studiati nella Parte I), presentano due lati opposti, equidistanti e paralleli al ∅ a 0°-180°, i quali con l'I = 50 vanno dal raggio 0-60° al raggio 0-120° e dal raggio 0-240° al raggio 0-300°, e in seguito diventano sempre più brevi.

L'area dei rettangoli va da un valore inferiore a quello dell'area del quadrato a un valore > 0, con l'abbassarsi dell'Indice. L'area dei loro tricometrogrammi va pure diminuendo, ma si mantiene sempre superiore a quella dei rettangoli, ed anzi il rapporto centesimale fra le due aree cresce a favore dei tricometrogrammi da un valore $> \div$ 118,301·290... % (che è quello anzidetto per il quadrato) fino a valori altissimi. In concreto, con diagonali sempre = cm 10 e l'a. m. sempre più breve, le aree dei tricometrogrammi vanno da un valore $<$ cm² 59,150·645..., che è quello dell'area del tricometrogramma a 16 lati del quadrato, a un valore $>$ cm² 32,475·952..., che è quello dell'area del tricometrogramma di un segmento di retta lungo cm 10, e poiché le aree dei rettangoli vanno da un valore $<$ cm² 50 a un valore $>$ cm² 0, è comprensibile come il rapporto fra le due aree vada crescendo fino a valori altissimi a favore di quella del tricometrogramma, quanto più basso è l'Indice.

I triangoli isosceli delle prime tre Categorie, ossia quelli con l'angolo α variabile da $> 0°$ a $< 60°$, presentano dapprima Indici crescenti da un valore > 0 a un valore $< \div$ 89,442·719..., quindi l'Indice Massimo $= \div$ 89,442·719... con $\alpha = \div$ 53°7′48″, e successivamente Indici decrescenti fino ad un valore $>$ 86,602·540... I loro tricometrogrammi, a causa del particolare modo con il quale debbono essere « azzerati », hanno Indice sempre inferiore (cfr. nota a pag. 53) a quello del triangolo corrispondente. Con uno pseudo A. M. (uno dei lati isosceli) = cm 10, le aree di questi triangoli vanno da un valore $>$ cm² 0 a un valore $<$ cm² 43,301·270..., mentre le aree dei loro tricometrogrammi vanno da un valore $>$ cm² 32,475·952... (che è l'area ottenibile da un segmento di retta lungo cm 10) a un valore $<$ cm² 64,951·905... (che è l'area più grande, ottenibile dal triangolo equilatero con lati = cm 10); il triangolo con Indice Massimo ha un'area di soli cm² 40 e il suo tricometrogramma ha un'area di cm² 62,254·626... Il rapporto percentuale tra le aree dei tricometrogrammi e quelle dei rispettivi triangoli delle prime tre Categorie vanno pertanto da un valore altissimo a un valore > 150 %.

[16] Cfr. nota a pag. 16.

La forma dei tricometrogrammi ottenibile dai triangoli delle prime tre Categorie, sebbene uguale nei Quadranti opposti, è sempre discordante nei Quadranti adiacenti; dapprima è molto variabile, soprattutto nei Quadranti I e III; ma in séguito assume una forma « ovaloide » in questi Quadranti, mentre rimane « rientrante » nei Quadranti II e IV; la forma ovaloide e quella rientrante vanno attenuandosi con l'aumentare dell'ampiezza dell'angolo α, per cui le differenze tra Quadranti adiacenti tendono ad annullarsi, e la forma complessiva del tricometrogramma, di regola a 12 e in due casi a 10 lati, tende ad avvicinarsi a quella dell'esagono regolare.

Il triangolo equilatero, con $\alpha = 60°$ e I = 86,602·540..., dà per tricometrogramma un esagono regolare con lo stesso Indice ed un'area che è uguale al 150 % di quella del triangolo. Con pseudo A. M., uno dei tre lati uguali, = cm 10, l'area del triangolo equilatero è di cm² 43,301·270... e quella del suo tricometrogramma è di cm² 64,951·905...

I triangoli isosceli della 4ª Categoria, ossia quelli con l'angolo α variabile da $> 60°$ a $< 180°$ e Indici decrescenti da un valore $< 86,602·540...$ a un valore > 0, danno tricometrogrammi dello stesso Indice, dodecagoni e bisimmetrici (a quadranti opposti uguali e a quadranti adiacenti speculari), con « falsa rientranza » sul $\varnothing$ a 0°-180° del modulo; tale rientranza va man mano aumentando, mentre i tricometrogrammi vanno assumendo una forma sempre più vicina a quella che si ottiene da un segmento di retta.

L'area dei triangoli della 4ª Categoria con pseudo A. M. (la base) = cm 10, va da un valore $<$ cm² 43,301·270... a un valore $>$ cm² 0, mentre quella dei loro tricometrogrammi va da un valore $<$ cm² 64,951·905... a un valore $>$ cm² 32,475·952..., che è quella ottenibile da un segmento di retta lungo cm 10. Il rapporto percentuale tra l'area dei tricometrogrammi e quella dei triangoli della 4ª Categoria va da un valore > 150 % a valori tanto più grandi, quanto più basso è l'Indice.

Circa la simmetria dei modelli esaminati e quella dei loro tricometrogrammi rimando per il confronto ai capitoli precedenti; qui ricorderò soltanto che non si corrispondono.

In definitiva, per lo studio della forma delle sezioni trasverse dei capelli e dei peli vale, anche per questa seconda parte del lavoro, la conclusione che occorre attenersi, negli studi scientifici e nelle indagini di Medicina legale, alle sezioni istologiche, oggi più facilmente ottenibili che per il passato, e abbandonare l'uso del tricociclòforo.

BIBLIOGRAFIA

Rimando alla Bibliografia pubblicata nella I Parte del lavoro; qui aggiungerò l'elenco di poche altre pubblicazioni, fra le quali alcune per il loro interesse, anche se non citate nel testo.

BARKER D. G., *Factor analysis of body hair distributions.* Amer. J. Phys. Anthrop., Vol. 44, pp. 27-30, Philadelphia, PA., 1976.

BARLOW P., *Barlow's tables.* Edited by L. J. Comrie, E. & F. N. Spon L.T.D., London, 1965.

DE STEFANO G. F., MASALI M. e RABINO-MASSA E., *Hair of Nicaraguan populations (preliminary) data.* J. Human Evolutions, European Anthrop., Vol. 1, pp. 1-12, Acadamic Press, London, 1974.

FEDERICO R., *Tavole dei logaritmi e dei valori naturali delle funzioni circolari.* S. Lattes & C. Editori, Torino, 1974.

GÀLGANO M., *Il tricociclòforo, apparecchio dalle limitate prestazioni.* Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Ser. IV, Vol. XLII pp. 177-182, Napoli, 1975.

GÀLGANO M., *Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli.* Parte I - *Modelli di forma circolare, a segmento di retta, ellittica, fusiforme o* « cis », « trans », *ovale bisimmetrica e reniforme.* Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Ser. IV, Vol. XLIII, pp. 451-484, Napoli, 1976.

GARN S. M., *The use of middle-phalangeal hair in population studies.* Amer J. Phys. Anthrop., Vol. 9, pp. 325-333, Philadelphia, PA., 1951.

HRDY D., *Quantitative hair form variation in seven population.* Amer J. Phys Anthrop., Vol. 39, pp. 7-17, Philadelphia, PA., 1973.

MARTIN R., SALLER K., *Lehrbuch der Anthropologie in systematischer Darstellung.* 12ª Lieferung. G. Fischer Verlag, Stuttgart, 1961.

NEUERT W., *Untersuchung über die Korrelation der Krummung und Querschnitsform menschlicher Kopfhaare.* Anthrop. Anzeiger, Band 6, pp. 144-154, Stuttgart, 1929,

TROTTER M., *A review of the Classifications of hair.* Amer. J. Phys. Anthrop., Vol. 24, pp. 105-126, Philadelphia, P.A., 1938.

Dall'Istituto di Antropologia con annesso Museo dell'Università degli Studi di Napoli.

Étude de certains systèmes intégrodifferentiels non lineaires aux opérateurs paraboliques et aux autoréglages multiples dans les limites d'intégration

Nota di LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN * KIN VINH LEUNG **, DEMETRIO MANGERON *** e MEHMET NAMIK OGUZTORELI ****
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 4 giugno 1977)

A la memoire de Mauro Picone

SUMMARY. — In this Note a self-regulating non-linear integro-differential system with controls as limits of integration is considered, and the existence, uniqueness, stability, and the error estimation for certain approximate solutions are exposed.

RIASSUNTO. — Gli AA. espongono nella presente Nota, una serie di risultati concernenti certi sistemi integro-differenziali non lineari con operatori parabolici ed autocontrolli multipli nei limiti d'integrazione. Si stabiliscono tra l'altro i teoremi d'esistenza, di unicità, di stabilità rispetto a certe perturbazioni e di valutazione degli errori commessi se ci si ferma ad una certa classe di soluzioni approssimanti la soluzione del sistema considerato.

1. — Les auteurs étudient dans cette Note, tout en puisant des méthodes et des idées d'une richesse incomparable, dûes à MAURO PICONE [8], [9], certains systèmes intégrodifférentiels non linéaires aux opérateurs paraboliques et aux autoréglages multiples dans les limites d'intégration. On expose entre autres les problèmes d'existence, d'unicité, de stabilité et d'évaluation des erreus commises concernant une classe de solutions approchées de tels systèmes. On con-

* Université d'Etat de la R.S.S. de Kirgizie, Frunze, U.R.S.S.
** Department of Computer Science. Concordia University, Montreal, Quebec H3G 1M8, Canada.
*** Polytechnic Institute of Jassy, Romania. At present: Visiting Professor, Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Quebec H3G 1M8, Canada. The author wishes to express his warmest thanks to the University of Alberta and to Concordia University for the invaluable conditions offered to him to develop his work there.
**** Dept. of Mathematics, The University of Alberta. Edmonton, Alberta T6G 2G1, Canada. The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada through the University of Alberta.

sidère dans cet ordre d'idées l'équation intégrodifférentielle non linéaire

$$u''_{yy}(x, y) =$$

$$f\left[x, y, u(x,y), u'_y(x,y), \int_{r[x,y,u(x,y]}^{s[x,y,u'_y(x,y)]} K(x,y,\xi,u(\xi,y),u'_y(\xi,y))\, d\,\xi\right] \equiv \mathfrak{L}[u]. \tag{1}$$

Das le but de pouvoir embrasser dans cet étude une classe assez vaste de problèmes « bien posés » au sens d'Hadamard et par suite d'en avoir un modèle mathématique assez général qui répond aux cas particuliers de tels problèmes que l'on rencontre dans les applications, on soumet la fonction inconnue $u(x, y)$ aux conditions elles-aussi intégrodifferentielles non linéaires

$$u_y^{(i)}[x, p(x)] = \zeta_i\left[x, \iint_{\mathfrak{D}} M(x, \xi, \eta, u'_\eta(\xi, \eta))\, d\,\mathfrak{D}\right],\ i = 0, 1, \tag{2}$$

où $\mathfrak{D} = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ et où encore les fonctions $f(x, y, l_1, l_2, l_3)$, $r(x, y, l_1)$, $K(x, y, \xi, l_4, l_5)$, $s(x, y, l_2)$, $p(x)$, $\zeta_i(x, l_6)$, $i = 0, 1$, $M(x, \xi, \eta, l_7)$ sont supposées définies, continues et lipschitziennes par rapport aux paramètres l_i, $i = \overline{1,7}$, dans le domaine $\mathfrak{D}_1 = \{a \leq \xi,\ r(x, y, l_1),\ s(x, y, l_2),\ x \leq b,\ \alpha \leq \eta,\ p(x),\ y \leq \gamma,\ 0 \leq |l_i| \leq r_i = \text{const},\ i = \overline{1,7}\},\ 0 \leq |\zeta_i(x, l_6)| \leq r_{Hi},\ i = 0, 1,\ \forall (x, l_6) \in \mathfrak{D}_1$, ayant dans ce domaine pour coefficients de Lipschitz, respectivement, des fonctions continues et non négatives $L_{if}(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, $L_{ik}(x, y, \xi)$, $i = 1, 2$, $L_r(x, y)$, $L_s(x, y)$, $L_{\zeta_i}(x)$, $L_M(x, \xi, \eta)$.

2. — Conditions suffisantes concernant l'existence et l'unicité de la solution du système intégrodifferentielle (1), (2) dans la classe des fonctions $C^{0,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$. On utilise dans ce but le système d'équations intégrales

$$v(x, y) = \zeta_1\left[x, \iint_{\mathfrak{D}} M(x, \xi, \eta, v)\, d\,\mathfrak{D}\right] + \tag{3}$$

$$+ \int_{p(x)}^{y} f\left[x, \eta, H[v], v, \int_{r(x,\eta,H[v]}^{s(x,\eta,v)} K(x, \eta, \xi, H[v], v)\, d\,\xi\right] d\,\eta \equiv A[v]$$

et

$$u(x, y) = \zeta_0\left[x, \iint_{\mathfrak{D}} M(x, \zeta, \eta, v)\, d\,\mathfrak{D}\right] + \int_{p(x)}^{y} v(x, \eta)\, d\,\eta \equiv H[v], \tag{4}$$

dont la résolubilité dans le cadre de la recherche des solutions

$$v(x, y) \in C^{0,1}[a, b] \times [\alpha, \gamma] \text{ et } u(x, y) \in C^{0,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$$

est équivalente à la résolubilité du système (1), (2) dans la classe de fonctions $C^{0,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$.

En prenant pour la définition de la norme

$$\| \cdot \| = \max_{\mathfrak{D}_1} | \cdot | ,$$

on s'assère, à la suite de l'exécution des calculs assez laborieux, que l'opérateur intégrodifférentiel non linéaire $A[\cdot]$ satisfait le principe des représentations condensées de Banach si l'on a

$$\forall (x, y),\ v_*(x, y) \in \mathfrak{D}_1 \Rightarrow A[v_*],\ H[v_*],\ \in \mathfrak{D}_1 \tag{5}$$

et

$$k = \left\| L_{\zeta_1}(x) \iint_{\mathfrak{D}}^{y} L_M(x, \xi, \eta)\, d\mathfrak{D} + \left| \int_{p(x)} \left\{ L_{1f}(x, \eta)\, g(x, \eta) + L_{2f}(x, \eta) + \right.\right.\right.$$

$$+ L_{3f}(x, \eta) \left\{ \| k(\cdot) \| [L_r(x, \eta)\, g(x, \eta) + L_s(x, \eta)] + \right. \tag{6}$$

$$\left.\left.\left. + \left| \int_{r(x,\eta,H[v_*])}^{s(x,\eta,v_*)} [L_{1k}(x, \eta, \xi)\, g(\xi, \eta) + L_{2k}(x, \eta, \xi)]\, d\xi \right| \right\} \right\} d\eta \left| \right\| < 1 ,$$

où l'on a mis $g(x, y) \equiv L_{\zeta_0}(x) \iint_{\mathfrak{D}} L_M(x, \xi, \eta)\, d\mathfrak{D} + |y - p(x)|$.

On en déduit par suite le

THÉORÈME 1. — *L'équation* (1) *possède dans le domaine* $\mathfrak{D}_1$, *dans le cadre de la validité des conditions ci-dessus* (5), (6), *une solution unique* $v = v(x, y) \in C^{0,1}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$, *déterminée par*

$$\lim_{i \to \infty} v_i(x, y) = v(x, y) , \tag{7}$$

où l'on a

$$v_i(x, y) = A[v_{i-1}],\ i = 1, 2, \ldots,\ \forall (x, y),\ v_0(x, y) \in \mathfrak{D}_1 \tag{8}$$

et l'évaluation de l'ordre de grandeur de l'erreur commise en prenant pour la i-ème solution approchée $v_i(x, y)$ *de l'équation* (3) *s'exprime par*

$$(9) \qquad \| v(x, y) - v_i(x, y) \| \leq k^i \| v_0(x, y) - A[v_0] \| : (1 - k) \to 0 .$$

Il en résulte en ce que regarde le problème de l'intégration du système intégrodifférentiel non linéaire (1), (2) le suivant

THÉORÈME 2. — *Si l'opérateur* $A[\cdot]$ *satisfait dans le domaine* $\mathfrak{D}_1$ *le principe de Banach des représentations condensées et si l'on a pour toutes les fonctions* $v_i(x, y)$ *données par* (8)

$$\forall (x, y),\ v_i(x, y) \in \mathfrak{D}_1 \Rightarrow H[v_i] \in \mathfrak{D}_1,$$

les solutions approchées du sistème intégrodifferentiel (1), (2) *s'obtiennent par les relations*

$$(10) \qquad u_i(x, y) = H[v_i],\ i = 0, 1, \ldots$$

et le passage à la limite,

$$(11) \qquad \lim_{i \to \infty} u_i(x, y) = u(x, y),\ \forall (x, y) \in \mathfrak{D} ,$$

nous conduit, dans $\mathfrak{D}_1$, *à la solution unique* $u(x, y)$ *de ce système appartenant à la classe de fonctions* $C^{0,2}[a\, b] \times [\alpha, \gamma]$, *tandis que l'évaluation des erreurs commises si l'on s'arrête à la i-ème solution approchée* $u_i(x, y)$ *s'exprime par l'inégalité*

$$(12) \qquad | u(x, y) - u_i(x, y) | \leq g(x, y)\, k^i \| v_0(x, y) - A[v_0] \| : (1 - k) \underset{i \to \infty}{\to} 0$$

et il suffit de prendre

$$(13) \qquad i > ln \{ \varepsilon (1 - k) : [g(x, y) \| v_0(x, y) - A[v_0] \| \} : ln\, k$$

afin que l'ordre d'approximation à un $\varepsilon > 0$ *près soit assuré, à savoir*

$$| u(x, y) - u_i(x, y) | < \varepsilon ,\ \forall (x, y) \in \mathfrak{D}_1 .$$

3. — *Etude de la stabilité du système intégrodifferentiel* (1), (2). Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions $p(x)$ et $M(x, \xi, \eta, l_7)$ soumises à certaines perturbations dans le domaine $\mathfrak{D}_1$ deviennent,

respectivement, des fonctions $p_1(x)$ et $M_1(x, \xi, \eta, l_8)$, telles, que l'on aie $0 \leq |l_8| \leq r_7$,

$$|p(x) - p_1(x)| \equiv \delta(x) \leq \varepsilon_1,$$

$$|M(x, \xi, \eta, l_7) - M_1(x, \xi, \eta, l_8)| \leq d_1(x, \xi, \eta) + d_2(x, \xi, \eta)\,|l_7 - l_8|,$$

où les fonctions $\delta(x)$ et $d_i(x, \xi, \eta)$, $i = 1,2$, sont supposées connues, continues et non négatives dans $\mathfrak{D}_1$. Soit $L_{M_1}(x,\xi,\eta)$ le coefficient de Lipschitz de la fonction $M_1(\cdot)$ par rapport à son quatrième argument, continu et non négatif dans $\mathfrak{D}_1$. A la suite des perturbations considérées, les conditions initiales (2) se transforment, respectivement, dans les conditions

$$(14)\quad w_y^{(i)}[x, p_1(x)] = \zeta_i\left[x, \iint_{\mathfrak{D}} M_1(x, \xi, \eta, w'_\eta(\xi, \eta))\, d\,\mathfrak{D}\right],\ i = 0, 1,$$

relatives, cette fois-ci, à la fonction inconnue $w(x, y)$ gouvernée par l'équation intégrodifférentielle non linéaire

$$(1\text{ bis})\qquad w''_{xy}(x, y) =$$

$$f\left[x, y, w(xy), w'_y(x, y), \int_{r[x,y,w(x,y)]}^{s[x,y,w'_y(x,y)]} k(x, y, \xi, w(\xi, y) w'_y(\xi, y))\, d\,\xi\right] \equiv \mathfrak{L}[w].$$

On aboutit à la réponse concernant la résolubilité du système perturbé (1 bis), (14) grâce à l'étude préalable du système d'équations intégrales

$$(15)\quad w(x, y) = \zeta_0\left[x, \iint_{\mathfrak{D}} M_1(x, \xi, \eta, z)\, d\,\mathfrak{D}\right] + \int_{p_1(x)}^{y} z(x, \eta)\, d\,\eta \equiv G[z],$$

$$(16)\qquad z(x, y) = \zeta_1\left[x, \iint_{\mathfrak{D}} M_1(x, \xi, \eta, z)\, d\,\mathfrak{D}\right] +$$

$$+ \int_{p_1(x)}^{y} f\left[x, \eta, G[z], z, \int_{r(x,\eta,G[z])}^{s(x,\eta,z)} k(x, \eta, \xi, G[z], z)\, d\,\xi\right] d\,\eta \equiv \mathfrak{B}[z].$$

D'une manière analogue à ce que été établit pour le système intégrodifférentiel (1), (2), on en déduit le suivant

THÉORÈME 3. — *Le système intégrodifférentiel* (1 bis), (14) *possède dans le domaine* $\mathfrak{D}_1$, *dans le cadre des conditions restrictives*

$$\forall (x, y),\ z_*(x, y) \in \mathfrak{D}_1 \Rightarrow G[z_*],\ B[z_*] \in \mathfrak{D}_1$$

et

$$k_1 = \| B[\cdot] \| < 1\,, \tag{17}$$

$$B[z_*] \in C^{0,1}[a, b] \times [\alpha, \beta],\ G[z_*] \in C^{0,2}[a, b] \times [\alpha, \beta]\,,$$

une solution unique $w = w(z, y) \in C^{0,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$, *déterminée par la limite de la suite convergente* $\{w_i(x, y)\}_0^\infty$ *où l'on a*

$$w_i(x, y) = G[z_i],\ i = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$

$$z_i(x, y) = B[z_{i-1}],\ i = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

tandis que l'évaluation des erreurs commises s'exprime par l'inégalité

$$| w(x, y) - w_i(x, y) | \leq \tag{20}$$

$$g_1(x, y)\, k_1^i \,\| z_0(x, y) - B[z_0] \| : (1 - k_1) \equiv h_i(x, y) \underset{i \to \infty}{\to} 0\,,$$

où l'on a mis $g_1(x, y) \equiv L_{\zeta_0}(x) \iint_{\mathfrak{D}} L_{M_1}(x, \xi, \eta)\, d\mathfrak{D} + | y - p_1(x) |$.

Les conditions restrictives ci-dessus étant supposées satisfaites, on aboutit à l'evaluation des différences $u(x, y) - w(x, y)$ et $u(x, y) - w_i(x, y)$ $\forall (x, y) \in \mathfrak{D}_1$ d'une manière qui suit. On obtient de (4) et (16)

$$\| v(x, y) - z(x, y) \| \leq P_1 + P_2 \| v(x, y) - z(x, y) \|$$

où P_1, P_2 sont des nombres connus non négatifs. Par suite, si $P_2 < 1$ on en déduit

$$\| v(x, y) - w(x, y) \| \leq P_1 : (1 - P_2) = \mu$$

et donc

$$| u(x, y) - w(x, y) | \leq r_2\, \delta(x) + L_{\zeta_0}(x) \iint_{\mathfrak{D}} d_1(x, \xi, \eta)\, d\mathfrak{D} +$$

$$+ \left[L_{\zeta_0}(x) \iint_{\mathfrak{D}} d_2(x, \xi, \eta)\, d\mathfrak{D} + | p_1(x) - y | \right] \mu \equiv m_1(x, y),\ \forall (x, y) \in \mathfrak{D}\,.$$

On obtient en outre

$$|u(x, y) - w_i(x, y)| \leq |u(x, y) - w(x, y)| + |w(x, y) - w_i(x, y)| \leq$$
$$m_1(x, y) + h_i(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{D} .$$

D'où le suivant

THÉORÈME 4. — *La stabilité des solutions du système intégrodifférentiel non linéaire* (1), (2) *en est assurée dans le cadre des perturbations concernant les fonctions* $p(x)$ *et* $M(x, \xi, \eta, l_7)$ *dans les conditions ci-dessus.*

REMARQUE 1. — On peut aboutir à la construction des solutions approchées du système intégrodifferentiel (1), (2), tout en conservant les conditions restritives suffisantes (5) et (6), grâce à l'utilisation de quelques autres méthodes telle, par ex., la méthode de l'estimation du reste, que l'on a élaborée en collaboration avec M. A. KUTANOV dans [1], à savoir procédant selon les formules $u_i(x, y) = A[v_i]$, $i = 0, 1, \ldots,$ où $v_i(x, y) = v_{i-1}(x, y) + \lambda R_{i-1}(x, y)$ et où encore $R_i(x, y) \equiv v_{i-1}(x, y) - H[v_{i-1}] : \lambda = \text{const}, \quad i = 1, 2, \ldots,$

que l'on détermine par la condition d'optimisation

$$\min_{\lambda} \iint_{\mathfrak{D}} R_i^2(x, y)\, d\mathfrak{D} ,$$

ou bien par quelque autre méthode adéquate.

REMARQUE 2. — On exposera dans les pages du « Bolletin de l'Institut Polytechnique de Jassy » nombre de détails algorithmiques concernant ce sujet, tout en y abordant la programmation aux ordinateurs d'un problème particulier appartenant à la classe de systèmes intégrodifférentiels non linéaires considérés [7].

REMARQUE 3. — On doit mentionner ici toute une série de travaux des auteurs consacrée à la formulation et à la résolution des problèmes aux opérateurs intégrodifférentiels non linéaires assez généraux, « bien posés » au sens d'Hadamard, de contrôle ou bien d'autoréglage, [2]-[6], qui ont intéressés nombre de chercheurs, tels, par ex., MM. K. Deimling, A. Dou, S. Fenyö, O. Gürel, B. Frank Jones, Jr., G. Hecket, V. Lakshmikantham, W. T. Reid, H. Wacker.

BIBLIOGRAPHIE

[1] a) KRIVOSHEIN L. E., KUTANOV A., MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Su una classe di equazioni integro-differenziali aventi per limiti d'integrazione autocontrolli temporali e locali* (à paraître); b) KRIVOSHEIN L. E., KUTANOV A., LEUNG K. V., OGUZTORELI M. N., *Problèmes à la frontière aux conditions initiales fonctionnelles pour une classe d'équations intégrodifférentielles de Mangeron*, Bull. Soc. Math., de Belg., XXVII, 1975, 157-165. Voir encore: Bull Politechn. Inst. Jassy, N. S., **20** (24), 1974, fasc. 1-2, S. I, 111-115.

[2] MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Boundary value and optimal control concerned with various types of « polyvigrating » equations.* Dans le Vol. « Advances in differential and integral equations ». Ed. John A. Nobel, SIAM, Philadelphia, Pa., 1969.

[3] KRIVOSHEIN L. E., MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Studi concernenti certe estensioni di equazioni di Volterra, I, II, III, IV*, Atti Accad. Naz. dei Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e nat., (8) **54**, 187-192, 860-864 (1973) et Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **43**, 9-13, 14-19 (1974).

[4] KRIVOSHEIN L. E., MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Determinazione delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali non lineari di dimensioni diverse tra di loro e con derivate totali di Picone*, Atti Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat., (8) **59**, fasc. 1-2, 14-21 (1976).

[5] KRIVOSHEIN L. E., LEUNG K. V., MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Problèmes à la frontière pour une classe d'équations intégrodifférentielles non linéaires aux opérateurs polyvibrants*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid. Tomo LXIX, cuaderno 4, 831-843 (1975).

[6] CHALÉAT R., KRIVOCHÉINE L. E., MANGÉRON D., OGUZTORELI M. N., *Sur la capacité de détermination des solutions d'un problème intégrodifférentiel non linéaire mixte aux opérateurs polyvibrants et limites d'intégration dépendant de fonctions inconnues*. Bull. Acad. Polonaise Sci., Séric sci. math., astr., phys., Vol. XXIV, No. **9**, 697-704 (1976).

[7] BUI T. D., LEUNG K. V., *New Developments in Computer Techniques for Stiff Differential Equations*. Programme. Sixth Canadian Congres of Applied Mechanics, May 30-June 3, 1977. The University of British Columbia, Vancouver, B. C., Canada. Abstracts, p. 17.

[8] PICONE M., a) Nel volume: *Biografie e Bibliografie degli Accademici Lincei*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976, pp. 491-505; b) Nel volume: *Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notizia*, Pontificia Academia Scientiarum, Città del Vaticano, A. D. MCMLCC, pp. 118-146.

[9] HADAMARD J. (texte de sa lettre adressée à M.le Président du Comité institué en 1956 par l'Université de Roma dans le but d'honorer M.le Professeur Mauro Picone à l'ocasion de son 70-e anniversaire). Dans le volume: *Onoranze a Mauro Picone*, Roma 1956, pp. 45-46 et dans l'opuscule *La Mia Vita* par M. Picone, Rome, 1975, pp. 18-19.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e F. Cafiero.

Osservazioni sui punti doppi impropri di una superficie di $\mathbf{P}^4$

Nota di ALESSANDRO DI SANTE (a Napoli)
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza del 7 luglio 1977)

RIASSUNTO. — In questa Nota si dimostrano alcune proprietà dei punti doppi impropri di una superficie algebrica di $\mathbf{P}^4$.

In particolare si dimostra che se la superficie è proiezione generica di una superficie non singolare di $\mathbf{P}^5$ un punto doppio improprio di 1ª specie ha l'anello locale di profondità 1.

SUMMARY. — In this note we establish some properties concerning « non-proper » double points of a surface in $\mathbf{P}^4$.

In particular we show that if the surface is a generic projection of a non singular surface of $\mathbf{P}^5$ a « non-proper » double point of the first kind has a local ring of depth 1.

1. — Sia F una superficie algebrica di $\mathbf{P}^4$. Un suo punto doppio P si dice improprio quando la sezione di F con un generico iperpiano per P ha lo stesso genere di una generica sezione iperpiana non passante per P. Si dimostra, [5], che, dette corde improprie di F per P le rette per P che sono limiti di corde di F, il punto doppio P è improprio se tutte le ∞^3 rette per P sono corde improprie, mentre è proprio (cioè non improprio) se le corde improprie per P sono tutte e sole le rette per P che appartengono a un determinato $\mathbf{P}^3$.

Una caratterizzazione, strettamente legata alla precedente, dei punti doppi impropri si ottiene considerando l'insieme delle coppie di punti di F: allora si ha che i punti doppi impropri sono le coincidenze perfette di tale insieme, tali cioè che ogni retta uscente da uno di tali punti di coincidenza sia retta principale.

Dalla prima delle caratterizzazioni ricordate segue in modo evidente che se P è punto doppio improprio per F ogni forma Φ per F ha un punto singolare in P.

Questa proprietà si può invertire, valendo la Proposizione: « *se* P *è un punto doppio per* F *e ogni forma* Φ *per* F *ha in* P *un punto singolare,* P *è improprio* ».

Dim. Sia $F \subset \mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ di ordine n, sia $O \in F$ un punto doppio proprio. Consideriamo le corde improprie per O, esse costituiscono un $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$.

Si consideri una retta r generica e si prendano le corde di F che si appoggiano a r, esse costituiscono una forma Φ.

Se P è un punto generico di F, per P passano $n-1$ generatrici di Φ. Infatti il piano per r e per P sega F in $n-1$ punti distinti da P e quindi P ha molteplicità $n-1$ per Φ. Anche O ha la stessa molteplicità per Φ infatti il piano per r e per O sega F in $n-2$ punti distinti da O, quindi ci sono $n-1$ corde per O e in più c'è una corda impropria (se $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \cap r = N$, è ON). Dal ragionamento precedente si vede che F è contenuta in Φ, anzi è luogo di punti $(n-1)^{upli}$ per Φ. Considerando la polare di ordine $n-2$ rispetto a Φ del generico punto si ottiene una forma che passa semplicemente per O e che contiene semplicemente la F.

2. — È ben noto che se P è un punto doppio improprio della superficie F di $\mathbf{P}^4$ il cono osculatore a F in P è riducibile in due piani che diremo tangenti a F in P.

Ora può accadere che tali due piani abbiano in comune soltanto il punto P o anche una retta per P.

Nel primo caso il punto doppio si dice 1^a specie, nel secondo di 2^a specie.

Dimostriamo in proposito la seguente Proposizione: « *un punto doppio improprio di* 2^a *specie* O *di una superficie* F *di* $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ *con i due piani tangenti che s'intersecano in una retta ha un punto doppio infinitamente vicino nella direzione della retta* ».

Dim. Ci mettiamo nel caso in cui la superficie proiezione di $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ abbia nel punto O', proiezione di O, un punto doppio biplanare appartenente alla curva doppia. In questo caso il punto O' è origine di due falde lineari α' e β' e quindi anche la superficie $F \subset \mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ presenta in O due falde lineari α e β i cui piani tangenti siano Π_α e Π_β. Supponiamo Π_α e Π_β passanti per una stessa retta r e prendiamo un piano generico σ passante per r, esso ha molteplicità di intersezione $\geqslant 2$ perché O è doppio, allora sarà doppio il punto infinitamente vicino nella direzione di r se la molteplicità è 4 per σ generico.

Prendiamo un $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ per σ esso intersecherà α e β secondo due rami lineari di curve a e b tangenti ad r. Un secondo $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ passante

per σ ha molteplicità di intersezione almeno 2 con ciascuno di questi rami.

Indichiamo molto brevemente un'altra maniera di dimostrare la precedente proposizione. Se si opera una trasformazione quadratica di $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ con punto eccezionale in O, α e β vanno in falde che hanno per origine due rette corrispondenti agli intorni di O su α e β. Siccome i piani tangenti hanno una retta in comune tali due rette hanno un punto comune il quale risulta doppio per la superficie trasformata ed è, naturalmente, l'immagine di un punto doppio infinitamente vicino ad O.

3. — Sia ora F una superficie algebrica non singolare di $\mathbf{P}^5$. Se si proietta F da un punto O di $\mathbf{P}^5$ su un $\mathbf{P}^4$ non passante per O si ottiene una superficie F' la quale presenta punti doppi impropri nelle tracce delle corde (proprie o improprie) di F passanti per O. Si dimostra, [5], che scegliendo genericamente O la F' è dotata di punti doppi impropri di 1ª specie.

Vogliamo dimostrare che « *un punto doppio improprio di 1ª specie ha l'anello locale di profondità 1 e che perciò compare come componente immersa in una sezione della superficie* $F' \subset \mathbf{P}^4(k)$ (*k campo base algebricamente chiuso e* $\mathrm{car}(k) = 0$) *con una ipersuperficie che non contenga la F'* ».

A questo scopo ricorderemo in via preliminare talune proprietà di carattere algebrico tratte per la massima parte dai seminari sulle « Varietà Normali » tenuti a Napoli nel 1976 dal Prof.re S. Greco.

Sia A un anello commutativo con unità, integro, K il suo corpo delle frazioni,

a) $x \in K$ si dice *intero* su A se

$$a_0 + a_1 x + \ldots + x^n = 0$$

con $a_i \in A \; \forall_i$ e il polinomio a primo membro è monico.

b) $\bar{A} = \{x \in K, \text{ interi su } A\}$ si chiama *chiusura integrale* di A (o *normalizzazione*) e si dimostra che è un anello.

c) A si dice *normale* se e solo se $A = \bar{A}$, se cioè è integralmente chiuso.

$V \subset k^n$ (k algebricamente chiuso) varietà affine irriducibile, si dice *normale* se e solo se il suo anello delle coordinate $\Gamma(V)$ è normale.

Si dimostra che, indicato con $\mathcal{O}_x$ l'anello locale delle funzioni razionali su V definite in x, V è normale se e solo se tutti gli anelli $\mathcal{O}_x$ sono normali. La normalità è dunque un concetto che si può controllare punto per punto. Inoltre $x \in V$ si dice normale se $\mathcal{O}_x$ è normale

per cui V è normale se e solo se è normale in ogni suo punto. Sia A un anello, $a_1, \ldots, a_n \in A$ si dice che formano una *successione regolare* o *A-successione* se 1) $I = (a_1, \ldots, a_n) \neq A$; 2) a_1 non è divisore dello zero e a_i non è divisore dello zero modulo $(a_1, \ldots, a_{i-1})$, $\forall i = 2, \ldots, n$.

Se $A = \Gamma(V)$ (qui si suppone che l'ideale della varietà sia qualsiasi, in modo che potrebbero comparire anche componenti immerse), $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$ sono ipersuperfici.

1) $I = (a_1, \ldots, a_n) \neq A$ vuol dire che $\mathfrak{V}(I) \neq \Phi$;

2) a_1 non divisore dello zero se e solo se $a_1 = 0$, ipersuperficie, non contiene componenti (anche immerse) di V; a_2 non divisore dello zelo modulo (a_1) vuol dire che $a_2 = 0$ non contiene componenti (anche immerse) di $V \cap (a_1 = 0)$.

Se $I \subset A$ è un'ideale, il *grado* di I è l'intero n che gode delle proprietà seguenti.

1) $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in I$ formanti una successione regolare;

2) $\nexists\, x_1, \ldots, x_n \in I$ formanti una successione regolare se $m > n$.

Dato un ideale qualsiasi di A tutte le successioni regolari contenute nell'ideale hanno la stessa lunghezza. Se $A = \Gamma(V)$, I sia l'ideale di una sottovarietà $W \subset V$ allora $gr(I) = n$ vuol dire che esistono $a_1, \ldots, a_n \in I$ tali che $a_1 = 0$ è un ipersuperficie che contiene W ma non contiene componenti (anche immerse) di V, $a_2 = 0$ è una ipersuperficie che contiene W, ma non contiene componenti (anche immerse) di $V \cap (a_1 = 0)$ ...

Se $I \subset A$ è un ideale, allora $gr(I) \leq ht(I)$.

Sia A un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{M}$, il grado di $\mathfrak{M}$ si chiama profondità (depth) di A e si scrive prof(A) (depth(A)).

Un anello A *si dice* S_n $(n = 0, 1, \ldots)$ se $\text{prof}(A_y) \geq \min\{n, \dim(A_y)\}$, $\forall_y \in \text{Spec}(A)$.

Questo equivale a dire che $\text{prof}(A_y) = \dim(A_y)$ se $\dim(A_y) \leq n$, $\text{prof}(A_y) \geq n$, se $\dim(A_y) > n$.

Sono condizioni equivalenti:

« 1) A verifica S_n; 2) Se $a_1, \ldots, a_{n-1}$ è una successione regolare ogni primo associato ad $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ ha altezza $n - 1$ ». Se $A = \Gamma(V)$, tagliando V con $n - 1$ ipersuperfici abbastanza generiche la intersezione è pura di codimensione $n - 1$. In particolare, proprietà S_2 vuol dire che se tagliamo V con una ipersuperficie non contenente componenti (anche immerse) di V otteniamo una intersezione di pura codimensione 1. Data una varietà V esiste una coppia $(\bar{V}, \Pi)$ dove $\bar{V}$ è una varietà normale e $\Pi: \bar{V} \to V$ è un morfismo suriettivo finito, tale che Π sia un isomorfismo tra $\Pi^{-1}(\text{Nor}(V))$ e Nor(V), dove $\text{Nor}(V) = \{x \in V / \mathcal{O}_x \text{ è normale}\}$.

I punti non normali di V costituiscono una sua sottovarietà, come poi vedremo. $\bar{V}$ prende il nome di *normalizzazione* di V e coincide con V in tutti punti in cui V è già normale. Per chiarire questo

il modo più pratico è di usare il conduttore. Sia A un anello integro, $\bar{A}$ la sua chiusura integrale, K il campo delle frazioni, definiamo $\mathbf{f} = \{a \in A / a\,\bar{A} \subset A\}$ e lo chiamiamo *conduttore* di A in $\bar{A}$.

Altrimenti $\mathbf{f}$ si può definire anche come l'ideale annullatore dell'A-modulo $\bar{A}/A$ oppure come il più grande ideale di A che sia anche un ideale di $\bar{A}$.

Teorema: « Se $\bar{A}$ è finito come A-modulo si ha: $A_{\mathbf{y}}$ è normale se e solo se $\mathbf{y} \not\supset \mathbf{f}$, con $\mathbf{y}$ primo di A, se e solo se $A_{\mathbf{y}} = \bar{A}_{\mathbf{y}}$ $(= (A_{\mathbf{y}})^{-1}\,\bar{A})$.

Se $A = \Gamma(V)$, V irriducibile, con $x \in V$, $\mathcal{O}_x$ non è normale se e solo se $\mathfrak{M}_x \supset \mathbf{f}$, se e solo se $x \in \mathcal{V}(\mathbf{f})$, indicando così la sottovarietà di V definita da equazioni che si ottengono da $\mathbf{f}$. Quindi il conduttore ci dice qual'è il luogo dei punti di V, $\mathcal{V}(\mathbf{f})$, che non sono normali.

Sia A ridotto non normale, con $\bar{A}$ finito su A. Sia $\mathbf{f}$ il conduttore e sia $\mathbf{y}$ un primo associato a $\mathbf{f}$. Allora $\mathrm{prof}\,(A_{\mathbf{y}}) = 1$.

Se $A = \Gamma(V)$, ogni componente della sottovarietà associata a $\mathbf{f}$ è componente dell'intersezione di V con una ipersuperficie [1].

Conviene infine precisare che una varietà proiettiva irriducibile $V \in \mathbf{P}^n(k)$ si dice normale se l'anello locale di ogni suo punto è integralmente chiuso cioè se e soltanto se tutte le varietà affini che si ottengono disomogeneizzando V sono normali nel senso precisato prima.

Come in precedenza abbiamo ricordato, proiettando da un punto O una superficie F priva di singolarità di $\mathbf{P}^5(\mathbf{C})$ si ottiene in $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ una superficie F′ dotata di un numero finito di punti doppi, in corrispondenza alle corde passanti per O. Il punto O si può prendere in una posizione tale, che chiameremo *generica*, che i suddetti punti siano soltanto *punti doppi impropri di 1ª specie*. Se O centro di proiezione è in posizione generica, la proiezione da O la chiameremo generica e la indicheremo con p_o. Si tratta di verificare questo: « *ognuno dei suddetti punti compare come componente immersa in una sezione di* F′ *con una ipersuperficie, che non contenga la* F′ » (campo base k algebricamente chiuso e di caratteristica 0).

Tenendo conto di quello che affermano Mumford [« Introduction to algebraic geometry » pag. 245-248] oppure Šafarevic [« Basic algebraic geometry » § 5, n. 3, pag. 47 in poi] la proiezione generica p_o è un morfismo finito suriettivo ed un è isomorfismo eccetto che nell'insieme dei punti doppi di F′. Questo porta a concludere, dato che F è

[1] Sia $\mathbf{y} \subset A$ un ideale massimale. Sono equivalenti le seguenti proposizioni: 1) gr $(\mathbf{y}) = 1$; 2) Prof $(A_{\mathbf{y}}) = 1$; 3) $\mathbf{y}$ è associato ad un ideale principale di A generato da un non divisore dello zero ». Se $\mathbf{y}$ non è massimale 1) $\Leftarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

non singolare e quindi normale, che essa è la normalizzazione di F' e che l'insieme dei punti doppi impropri di F' è il luogo dei punti non normali di F', cioè la sottovarietà di F' individuata dal conduttore **f**, perciò tali punti sono di profondità 1.

Ora se **y** è l'ideale di uno di questi punti esso è associato ad un ideale principale di A (anello delle coordinate di F') generato da un non divisore dello zero, come diretta conseguenza del fatto che $\text{prof}(A_{\mathbf{y}}) = 1$.

Geometricamente questo vuol dire che ogni punto doppio improprio di F' compare come componente immersa nella intersezione di F' con una ipersuperficie che non la contenga.

Se V è una varietà, $x \in V$, $A = \mathcal{O}_x$, allora i rami analitici di V in x si definiscono come i primi minimali dell'anello $\hat{A}$, completamento di A.

Ora se $\Pi : \tilde{V} \to V$ è la normalizzazione di V, allora la controimmagine di x è un numero finito di punti, sia $\Pi^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_s\}$ e c'è corrispondenza biunivoca tra $\{y_1, \ldots, y_s\}$ e i rami di V in x, per cui si può affermare che « *in un punto doppio improprio di 1ª specie di* F' *ci sono due rami analitici di* V ».

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Bertini, *Introduzione alla Geometria Proiettiva degli Iperspazi*, G. Principato, Messina 1923.

[2] A. Franchetta, *Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4, da un punto generico su un S_3*, Rendiconti R.A. d'Italia, Fasc. 6, serie VII, vol. II, 1940, XIX.

[3] D. Mumford, *Introduction to algebraic geometry*, lectures notes, Harvard University, 1966.

[4] I. R. Šafarevic, *Basic Algebraic Geometry*, Grundlehren der matematischen Wissenschaften 213 Springer - Verlag 1974.

[5] F. Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a 4 dimensioni e ai suoi punti tripli apparenti*, Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XV (1901).

[6] O. Zariski e P. Samuel, *Commutative algebra*, Vol. I, II, Princeton, D. Van Nostrand, 1960.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, F. Cafiero e V. Dalla Volta.

About the solvability of some nonlinear functional equations in locally convex spaces *

Nota di NICOLA BASILE e MICHELE MININNI **
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 5 novembre 1977)

SUMMARY. — In this paper we extend the spectral approach to the solvability of functional equations of the form $L(x) - \lambda T(x) = y$, studied in [8] and [9], to the case when L and T act in locally convex vector spaces.

As an example of application of these results we study a particular integro-differential equation.

SOMMARIO. — In questo lavoro si estende al caso di operatori tra spazi vettoriali topologici localmente convessi l'approccio di tipo spettrale alla solubilità di equazioni del tipo $L(x) - \lambda T(x) = y$ studiati in [8] e [9]. Come esempio di applicazione di questi risultati si studia una particolare equazione integrodifferenziale.

INTRODUCTION AND NOTATIONS

In [8] and [9] as generalizations of preceding researchs by M. FURI and A. VIGNOLI, [1], [2], M. Mininni studied the global and local solvability of some nonlinear equations of the form $L(x) - \lambda T(x) = y$, where λ is a real or complex parameter and L, T are mappings acting between two normed spaces X and Y.

The aim of this paper is to extend such an approach to the case when L and T act between two separated locally convex vector spaces. To do this, we use the Mawhin's coincidence degree theory and a notion of characteristic value of a couple of operators, which extends the similar notions given in [8] and [9]. Some simple applications of these results to some integrodifferential equations are given.

* Paper written under the auspices of the National Group for Functional Analysis and its applications, (G.N.A.F.A.), of C.N.R., Italy.

** Istituto di Analisi Matematica - Palazzo Ateneo, via Nicolai 2 - Università degli Studi di Bari.

About the notations used here, we have that:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ denote the sets of the natural, real and complex numbers; moreover we put $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$. X and Y are two Hausdorff locally convex vector spaces over the same field $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). For any subset U of X or Y, the symbols $\bar{U}$, $\overset{\circ}{U}$ and ∂U will denote the closure, the interior and the boundary of U. Finally the symbol I denotes the identity operator of X or Y, (the domain will always be deduced from the context).

Section 1.

Throughout the paper L: Dom $L \subset X \to Y$ is a linear Fredholm operator, $P : X \to X$ is a continuous projector on Ker L, and T is a continuous mapping from X into Y. Moreover let us fix a filter $\mathfrak{F}$ on X and a mapping $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ such that $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$. Then we give the following definitions.

DEFINITION 1.1. — *A scalar* λ *will be said a bifurcation point of* (L, T) *with respect to* $\mathfrak{F}$, *(in symbols* $\lambda \in B_{\mathfrak{F}}(L, T)$*), if for any* $\varepsilon > 0$, $F \in \mathfrak{F}$ *there exist* $\mu \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$, $x \in F$ *such that* $L(x) = \mu T(x)$.

DEFINITION 1.2. — *Let* A *be a subset of* X. *Then a scalar* λ *will be said a characteristic value of* (L, T) *with respect to* A, $\mathfrak{F}$ *and* φ, *(in symbols* $\lambda \in ch_A^{\mathfrak{F},\varphi}(L, T)$*), if we have* $\liminf_{x \in A, \mathfrak{F}} \frac{q(L(x) - \lambda T(x))}{\varphi(x)} = 0$ *for any continuous seminorm* q *on* Y.

Remark 1.1. — Here and in the sequel, for any mapping $g : X \to \mathbb{R}$, we put $\liminf_{x \in A, \mathfrak{F}} g(x) = +\infty$, in the case when $A \cap F = \emptyset$ for some $F \in \mathfrak{F}$. Hence $ch_A^{\mathfrak{F},\varphi}(L, T) = \emptyset$ in this case.

DEFINITION 1.3. — *The mapping* T *will be said quasibounded with respect to* $\mathfrak{F}$ *and* φ *if we have* $\limsup_{\mathfrak{F}} \frac{q(T(x))}{\varphi(x)} < +\infty$, *for any continuous seminorm* q *on* Y. *Two mappings* T *and* T′ *will be said to be equivalent with respect to* $\mathfrak{F}$ *and* φ *if* $\lim_{\mathfrak{F}} \frac{q(T(x) - T'(x))}{\varphi(x)} = 0$ *for any continuous seminorm* q *on* Y.

For sake of simplicity we shall omit in the sequel, (when no confusion is possible), the indication « with respect to $\mathfrak{F}$ and φ ».

PROPOSITION 1.1. — *The set* $B(L, T)$ *is closed in* $\mathbb{K}$.

Proof. — Let $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of elements of $B(L, T)$ converging to $\lambda \in \mathbb{K}$ and let us pick $\varepsilon > 0$, $F \in \mathfrak{F}$. Now, if $|\lambda - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, then there exist $\mu \in \mathbb{K}$, $x \in F$ such that $|\mu - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ and $L(x) = \mu T(x)$. From this it follows $\lambda \in B(L, T)$.

PROPOSITION 1.2. — *If* T *and* T′ *are equivalent, then* $ch_A(L, T) = ch_A(L, T')$.

Proof. — In fact for any continuous seminorm q on Y, and for any $\lambda \in \mathbb{K}$ we have

$$\liminf_{x\in A,\mathfrak{F}} \frac{q(L(x) - \lambda T(x))}{\varphi(x)} = \liminf_{x\in A,\mathfrak{F}} \frac{q(L(x) - \lambda T'(x))}{\varphi(x)}.$$

PROPOSITION 1.3. — *Assume that* L *or* T *is quasibounded. Then* $ch_A(L, T)$ *is closed. If in addition* A *contains the set* $\{x \in X \mid T(x) \in Im\, L\}$, *then we have the inclusion* $B(L, T)\backslash\{0\} \subset ch_A(L, T)$.

Proof. — First of all notice that if $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$, and if q is a continuous seminorm on Y, then

$$(1.1)\quad q(L(x) - \lambda T(x)) \leq \begin{cases} q(L(x) - \mu T(x)) + |\lambda - \mu|\, q(T(x)) \\ \left|1 - \frac{\lambda}{\mu}\right| q(L(x)) + \frac{\lambda}{\mu} q(L(x) - \mu T(x)) \end{cases}.$$

From this with the same argument of [9], Prop. 2.3, it may be proved the first part of the assertion. On the other hand if $A \supset \{x \in X \mid T(x) \in Im\, L\}$, and $\lambda \in B(L, T)\backslash\{0\}$, then for any $\varepsilon > 0$, $F \in \mathfrak{F}$ there exist $\mu \neq 0$, $x \in F$ such that $|\lambda - \mu| < \varepsilon$, and $L(x) = \mu T(x)$, (and therefore $x \in A \cap F$). From this and from (1.1) it easily follows $\lambda \in ch_A(L, T)$.

PROPOSITION 1.4. — *We have* $0 \notin ch_A(L, T)$, *(and therefore* $ch_A(L, T) \neq \mathbb{K}$), *if one of the following conditions holds*:

i) *there exist two continuous seminorm* p *on* X *and* q *on* Y *such that* $p(x - P(x)) \leq q(L(x))$ *for all* $x \in X$, *and* $\beta = \liminf_{x\in A,\mathfrak{F}} \frac{p(x - P(x))}{\varphi(x)} > 0$;

ii) *there exists a continuous seminorm* q *on* Y *such that* $\varphi(x - P(x)) \leq q(L(x))$ *for all* $x \in X$, *and* $\beta = \liminf_{x\in A,\mathfrak{F}} \frac{\varphi(x - P(x))}{\varphi(x)} > 0$.

Moreover if T *is quasibounded, then for any continuous seminorms* p *and* q *satisfying* i) *or* ii), *we have* $\lambda \notin ch_A(L, T)$, *for all* $\lambda \in \mathbb{K}$, *such that* $|\lambda| \limsup_{\mathfrak{F}} \frac{q(T(x))}{\varphi(x)} \leq \beta$.

The proof is obvious.

Remark 1.2. — It is easy to prove that the first part of i) or ii) holds if φ is positive homogeneous and continuous at 0, and if the inverse K of $L|_{Ker P \cap Dom L}$ is continuous. Hence, if in addition L is one-to-one, then $0 \notin ch_A(L, T)$.

From now on assume that the index of L is zero and let us fix a continuous projector Q on Y such that $Ker\, Q = Im\, L$, and an orientation preserving isomorphism J from $Im\, Q$ into $Im\, P$. Finally assume that the inverse $K : Im\, L \to X$ *of* $L|_{Ker P \cap Dom}$ is continuous. Then it is easily seen, ([3], [7]), that

$$x \in Dom\, L,\ L(x) = T(x) \Leftrightarrow x = [P + J\,Q\,T + K(I - Q)\,T](x)$$

and therefore

$$x \in Dom\, L,\ L(x) - T(x) = y \Leftrightarrow \tag{1.2}$$
$$\Leftrightarrow x - [P + J\,Q\,T + K(I - Q)\,T](x) = J\,Q(y) + K(I - Q)(y).$$

From this we deduce the following

LEMMA 1.5. — *If* U *is a subset of* X *and* $[P+JQT+K(I-Q)T](U)$ *is relatively compact, then* $\overline{(L - T)(U \cap Dom\, L)} \subset (L - T)(\bar{U} \cap Dom\, L)$.

Proof. — In fact if $(x_i)_{i \in I}$ is a directed family of elements of $U \cap Dom\, L$ such that $(L(x_i) - T(x_i))_{i \in I}$ converges to an element y of Y, then we have $J\,Q(y) = \lim_{i \in I} J\,Q\,T(x_i)$ and $K(I - Q)(y) = \lim_{i \in I} x_i - P(x_i) - K(I - Q)\,T(x_i)$. On the other hand we may assume that the family $((P + J\,Q\,T + K(I - Q)\,T)(x_i))_{i \in I}$ converges to an element z of X. Then $(x_i)_{i \in I}$ converges to $x = z + J\,Q(y) + K(I - Q)(y) \in \bar{U}$. From this, from the continuity of P, Q, J, K and T, by (1.2) we deduce $L(x) - T(x) = y$, i.e. $y \in (L - T)(\bar{U} \cap Dom\, L)$.

The preceding lemma allows us to prove the following proposition which completely describes $ch_A(L, T)$ in a particular case.

PROPOSITION (1.6). — *Assume that* T *is positive homogeneous and the following conditions hold*

$$x \neq 0,\ F \in \mathfrak{F} \Rightarrow t\,x \in F \text{ for some } t > 0; \tag{1.3}$$

(1.4) $0 \notin \bar{U}$ *and the sets* $P(U)$, $QT(U)$ *and* $K(I-Q)T(U)$ *are relatively compact* $\left(\text{where } U = \left\{\frac{x}{\varphi(x)} : x \neq 0\right\}\right)$.
Then we have inclusion
$ch_A(L, T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in Dom\, L \setminus \{0\} \ni' L(x) = \lambda T(x)\}$.
Conversely if $A \supset \{x \in X \mid T(x) \in Im\, L\}$, *and the equation* $L(x) = \lambda T(x)$, (*with* $\lambda \neq 0$), *has a nontrivial solution, then* $\lambda \in ch_A(L, T)$.

Proof. — If $L(x) \neq \lambda T(x)$ for all $x \neq 0$, then $0 \notin (L - \lambda T)(\bar{U} \cap Dom\, L)$ and therefore $0 \notin \overline{(L - \lambda T)(U \cap Dom\, L)}$ by Lemma 1.5. Hence a continuous semimorm q on Y exists such that $q(L(x) - \lambda T(x)) \geq 1$ for all $x \in U \cap Dom$, i.e. $\frac{q(L(x) - \lambda T(x))}{\varphi(x)} \geq 1$, for all $x \in Dom\, L \setminus \{0\}$. Hence $\lambda \notin ch_A(L, T)$, as desired.

Conversely if $L(x) = \lambda T(x)$, with $\lambda \neq 0$ and $x \neq 0$, and if A contains the set $\{x \in X \mid T(x) \in Im\, L\}$, then from (1.3) for any $F \in \mathfrak{F}$ we have $t x \in A \cap F$ and $L(t x) - \lambda T(t x) = 0$ for some $t > 0$. From this it follows that $\lambda \in c\, h_A(L, T)$.

Remark 1.3. — In the case when X and Y are normed spaces, φ is the norm on X and $\mathfrak{F}$ is the filter generated from the filterbasis $\mathfrak{B} = \{X \setminus B(0, r) : r > 0\}$, then the definitions and the results of this section clearly extend the definitions and the results of [8].

Section 2.

The classical Leray-Schauder degree theory can be extended to the case of a compact perturbation of the identity operator of a locally convex topological vector space, (see [10], [11]). Now under the same assumptions of the last section, consider an open and finitely bounded subset U of X such that

(2.1) $\bar{U} \cap Dom\, L \neq \emptyset$ and $0 \notin (L - T)(Dom\, L \cap \partial U)$

(2.2) $[P + J Q T + K(I - Q) T](U)$ is relatively compact.

(A subset U of X is said to be finitely bounded iff its intersection with any finite dimensional subspace of X is bounded). Then, following Mawhin, (see [3] and [7]) we define « coincidence degree of

the couple (L, T) in U » as the integer

$$\deg((L, T), U, 0) = \deg(I - [P + J Q T + K(I - Q) T], U, 0). \tag{2.3}$$

This definition is justified by the fact that the right member of (2.3) is independent of the choice of J, P and Q satisfying (2.2).

From now on assume that A is a subset of X containing the set $\{x \in X \mid T(x) \in Im\, L\}$ and a basis $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{F}$ exists such that for all $B \in \mathfrak{B}$ we have

(2.4) $X \backslash B$ is an open and finitely bounded neighbourhood of 0;

(2.5) the sets $P(X \backslash B)$, $J Q T(X \backslash B)$ and $K(I - Q) T(X \backslash B)$ are relatively compact.

Moreover assume that

$$\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x) = + \infty . \tag{2.6}$$

Remark 2.1. — We give now an example of filter $\mathfrak{F}$ satisfying these assumtions.

First of all notice that if φ is continuous and positive homogeneous, then $B_r = \varphi^{-1}([0, r[)$ is open and finitely bounded for all $r > 0$. (In fact if X_0 is a finite dimensional subspace of X, then $\varphi^{-1}([0, r[) \cap X_0$ is bounded, since, by Weierstrass' theorem there exists $k > 0$ such that $k \| x \|_e \leq \varphi(x)$, for all $x \in X_0$, where $\| x \|_e$ means the euclidean norm of x in X_0).

Therefore, if we assume that the sets $P(B_r)$, $J Q T(B_r)$ and $K(I - Q) T(B_r)$ are relatively compact for all $r > 0$, then the filter $\mathfrak{F}$ generated by the family $\mathfrak{B} = \{\varphi^{-1}([r, + \infty[) : r > 0\}$ evidently satisfies conditions (2.4), (2.5) and (2.6). Moreover $\mathfrak{F}$ also satisfies (1.3) and (1.4).

More generally if φ and ψ are continuous and positive homogeneous mappings from X into $\mathbb{R}_+$, such that

$$\varphi^{-1}(0) = \psi^{-1}(0) = \{0\}; \tag{2.7}$$

(2.8) there exists $M > 0$ such that $\psi(x) \leq M \varphi(x)$ for all $x \in X$;

(2.9) $P(B_r)$, $J Q T(B_r)$ and $K(I - Q) T(B_r)$ are relatively compact for all $r > 0$, where $B_r = \psi^{-1}([0, r[)$,

then the filter $\mathfrak{F}_\psi$ generated by $\mathfrak{B}_\psi = \{\psi^{-1}([r, + \infty[) : r > 0\}$ satisfies conditions (1.3), (1.4), (2.4), (2.5) and (2.6).

Now for all $\lambda \notin \{0\} \cup ch_A(L, T)$, there exists $B \in \mathcal{B}$ such that $L(x) \neq \lambda T(x)$ for all $x \in B$. Therefore, by the excision property, we can put

$$\deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda T) = \lim_{\mathcal{B} \in \mathcal{B}} \deg((L, \lambda T), X \backslash B, 0)$$

for all $\lambda \notin \{0\} \cup ch_A(L, T)$.

We have the following proposition

PROPOSITION 2.1. — *If* λ_0 *and* λ_1 *do not belong to* $ch_A(L, T) \cup \{0\}$, *and* $\deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda_0 T) \neq \deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda_1 T)$, *then any continuous mapping* $\lambda(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{K}$ *joining* λ_0 *and* λ_1 *meets* $B(L, T)$.

Consequently if T *or* L *is quasibounded, then the mapping* $\lambda \to \deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda T)$ *is locally constant in* $\mathbb{K} \backslash (ch_A(L, T) \cup \{0\})$.

Proof. — Let $\lambda(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{K}$ be a continuous mapping joining λ_0 and λ_1 and put $\hat{T}(x, t) = \lambda(t) T(x)$ for all $t \in [0, 1]$, $x \in X$. Then by the homotopy invariance property for all $B \in \mathcal{B}$ there exist $t_B \in [0, 1]$ and $x_B \in B$ such that $L(x_B) = \hat{T}(x_B, t_B)$. Since $[0, 1]$ is compact, the family $(t_B)_{B \in \mathcal{B}}$ has a limit point t. Hence $\lambda(t)$ is a limit point of $(\lambda(t_B))_{B \in \mathcal{B}}$. From this it easily follows $\lambda(t) \in B(L, T)$.

THEOREM 2.1. — *Assume that* L *or* T *is quasibounded and* $0 \notin ch_A(L, T)$ (*see Prop.* 1.4.). *Then for all* λ *in the component of* $\mathbb{K} \backslash c\, h_A(L, T)$ *containing* $\{0\}$ *we have* $\deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda T) = 1$ *if* $Ker\, L = \{0\}$, *and* $|\deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda T)| = |\deg^{\mathcal{F}}_{Br}(J Q T|_{KerL})|$ *if* L *is not one-to-one, (where* $\deg^{\mathcal{F}}_{Br}(J Q T|_{KerL}) = \lim_{B \in \mathcal{B}} \deg_{Br}(J Q T|_{KerL}, Ker\, L \backslash B, 0)$ and $\deg_{Br}(\ldots)$ *means « Brouwer degree of... »).*

Proof. — Let $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ such that $\{\mu \in \mathbb{K} \mid |\mu| \leq |\lambda|\} \cap ch_A(L, T) = \emptyset$, (see Prop. 1.3), and put $\hat{T}(x, t) = (\lambda t - t + 1) Q T(x) + \lambda t (I - Q) T(x)$ for all $t \in [0, 1]$, $x \in X$. It can be proved that $L(x) \neq \hat{T}(x, t)$ for all $t \in [0, 1]$, $x \in B$ for some $B \in \mathcal{B}$. In fact, if this was not the case, then for all $B \in \mathcal{B}$ there would exist $t_B \in [0, 1]$ and $x_B \in B$ such that $L(x_B) = \hat{T}(x_B, t_B)$. Hence $x_B \in A \cap B$ and $L(x_B) = \lambda t_B T(x_B)$. Now, since $[0, 1]$ is compact, the family $(t_B)_{B \in \mathcal{B}}$ has a limit point t. From this it would follow $\lambda t \in ch_A(L, T)$, contradicting our assumptions, since $|\lambda t| \leq |\lambda|$.

Therefore by the homotopy invariance property, we have

$$\deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda T) = \deg^{\mathcal{F}}(L, \hat{T}(\cdot, 1)) = \deg^{\mathcal{F}}(L, \hat{T}(\cdot, 0)) =$$
$$= \deg^{\mathcal{F}}(L, Q T) = \lim_{B \in \mathcal{B}} \deg_{LS}(I - P - J Q T, X \backslash B, 0).$$

Hence we have

$$\deg^{\mathfrak{F}}(L, \lambda T) =$$

$$= \begin{cases} \lim_{B \in \mathfrak{B}} \deg_{LS}(I, X \setminus B, 0) = 1, \text{ if } L \text{ is one-to-one} \\ \deg^{\mathfrak{F}}_{Br}((I - P - J Q T)|_{KerL}) = \deg^{\mathfrak{F}}_{Br}(-JQT|_{KerL}), \text{ if } Ker L \neq \{0\}. \end{cases}$$

From this the assertion follows.

The importance of knowing $\deg^{\mathfrak{F}}(L, \lambda T)$ is explained by the following

THEOREM 2.2. — *Assume that* $\lambda \notin ch_A(L, T)$ *and* $\deg^{\mathfrak{F}}(L, \lambda T) \neq 0$. *The we have the inclusion* $Im\, L \subset (L - \lambda T)(Dom\, L)$. *In particular* $L - \lambda T$ is onto if $A = X$.

Proof. — Let us pick $y \in Im\, L$, (more generally $y \in Y$ if $A = X$), and put $\hat{T}(x, t) = \lambda T(x) + t y$ for all $t \in [0, 1]$, $x \in X$. We shall prove that $y \in (L - \lambda T)(Dom\, L)$.

To do this, by the solution property and the homotopy invariance property of the coincidence degree it will be sufficient to prove that $L(x) \neq \hat{T}(x, t)$ for all $t \in [0, 1]$, $x \in B$ for some $B \in \mathfrak{B}$. In fact if this was not the case, then for all $B \in \mathfrak{B}$ there would exist $t_B \in [0, 1]$, $x_B \in B$ such that $L(x_B) = \hat{T}(x_B, t_B) = \lambda T(x_B) + t_B y$, (and therefore $x_B \in A \cap B$). Hence for any continuous seminorm q on Y we would have $\liminf_{x \in A, \mathfrak{F}} \frac{q(L(x) - \lambda T(x))}{\varphi(x)} \leq \lim_{x \in A, \mathfrak{F}} \frac{q(y)}{\varphi(x)}$, i. e. $\lambda \in ch_A(L, T)$, by (2.6).

COROLLARY 2.1. — *Assume that* $0 \notin ch_A(L, T)$, *that* L *or* T *is quasi-bounded, and, (if* L *is not one-to-one), that* $\deg^{\mathfrak{F}}_{Br}(J Q T|_{KerL}) \neq 0$. *Then for all* λ *in the component of* $\mathbb{K} \setminus ch_A(L, T)$ *containing* $\{0\}$ *we have the inclusion* $Im\, L \subset (L - \lambda T)(Dom\, L)$.

Proof. — It is obvious.

Another useful result is the following

THEOREM 2.3. — *Assume that* T *is equivalent to* S, *(with respect to* $\mathfrak{F}$ *and* φ*), and assume that* T *and* S *satisfy* (2.5). *Then* $\deg^{\mathfrak{F}}(L, \lambda T) = \deg^{\mathfrak{F}}(L, \lambda S)$ *for all* $\lambda \notin ch_X(L, T) = ch_X(L, S)$.

Consequently, if $\lambda \notin ch_X(L, S)$ *and* $\deg^{\mathfrak{F}}(L, \lambda S) \neq 0$, *then* $L - \lambda T$ *is onto.*

Proof. — Put for all $t \in [0, 1]$, $x \in X$

$$\hat{T}(x, t) = \lambda t S(x) + (1 - t) \lambda T(x).$$

It is easily seen that $L(x) \neq \hat{T}(x, t)$ for all $t \in [0, 1]$, $x \in B$, for some $B \in \mathcal{B}$. From this by the homotopy invariance property, the assertion follows.

COROLLARY 2.2. — *Assume that* T *is equivalent to a continuous and odd mapping* S, *such that* (2.5) *holds for* T *and* S. *Then* $L - \lambda T$ *is onto for all*

$$\lambda \notin ch_X(L, T) = ch_X(L, S).$$

In particular, if T *satisfies* (2.5) *and is equivalent to a linear continuous mapping* S *satisfying* (1.3), (1.4), (2.5), *then* $L - \lambda T$ *is onto for all* $\lambda \in \mathbb{K}$ *such that* $L(x) \neq \lambda S(x)$ *for all* $x \neq 0$.

Proof. — In fact, by Borsuk's theorem, $\deg^{\mathcal{F}}(L, \lambda S)$ is an odd number for all $\lambda \notin ch_X(L, S)$. Therefore the assertion follows from Theorem 2.3 and from Prop. 1.6.

Remark. — Let $a \in X$, put $T_a(x) = T(a + x) - T(a)$, for all $x \in X$, and assume that

$$\lim_{\mathcal{F}} \varphi(x) = 0 . \tag{2.10}$$

Moreover assume that $\mathcal{F}$ has a filterbasis $\mathcal{B}$ such that for all $B \in \mathcal{B}$ the following conditions hold:

(2.11) B is an open and finitely bounded neighbourhood of 0;

(2.12) there exists $B' \in \mathcal{B}$ such that $\bar{B}' \subset B$;

(2.13) the sets $P(B)$, $JQT_a(B)$ and $K(I - Q)T_a(B)$ are relatively compact.

Then for all $\lambda \notin ch_A(L, T_a) \cup \{0\}$, there exists $B \in \mathcal{B}$ such that $L(x) \neq \lambda T_a(x)$ for all $x \in B \setminus \{0\}$. Therefore we can define the integer

$$\deg^a(L, \lambda T) = \lim_{B \in \mathcal{B}} \deg((L, \lambda T_a), B, 0)$$

Now, with arguments which are quitely similar to the proofs of the

preceding theorems, it is possible to extend the local solvability results of [9] to the case when X and Y are locally convex topological vector spaces. We omit the details for brevity.

Section 3.

The present section is devoted to give an example of application of the preceding results. We do not know how much this example is actually significant for the applications; its only aim is to show how it is possible to apply the theory.

Consider the space $X = \mathcal{C}^\infty([0,1])$ endowed with a locally convex and metrizable topology by means of the sequence $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of seminorms defined by $p_n(x) = \sup_{0\leq t\leq 1} |x^{(n)}(t)|$, for all $x \in X$.

It is well known that a metric on X is defined by the Frechét modulus, i.e. by the mapping $x \to |x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}$, [5].

Consider now two mappings $f : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ such that

(3.1) f is continuous and $\alpha > 0$, $\beta > 0$ exist such that

$$|f(t,u,v)| \leq \alpha |v| + \beta \qquad \forall\, t \in [0,1],\ u \in [0,1],\ v \in \mathbb{R};$$

(3.2) K is sufficiently regular, (for sake of simplicity we shall assume $K \in \mathcal{C}^\infty([0,1] \times [0,1])$).

Then we shall put for all $x \in X$

$$F(x)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s, |x|, x(s))\, ds \qquad t \in [0,1].$$

Evidently $F(x) \in X$ for all $x \in X$. Moreover the mapping $F : X \to X$ is continuous. In fact, if $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of elements of X converging to $x \in X$, then we have $|x_n| \to |x|$ and $p_k(x_n - x) \to 0$ as $n \to \infty$, for all $k \in \mathbb{N}$. Therefore there exists $M > 1$ such that $|x_n(t)| \leq M$, for all $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Now, since f is uniformly continuous in $[0,1] \times [0,1] \times [-M, M]$, then, for a fixed $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| < \varepsilon$, for all $t \in [0,1]$, $u_1, u_2 \in [0,1]$, $v_1, v_2 \in [-M, M]$, with $|u_1 - u_2| < \delta$ and $|v_1 - v_2| < \delta$. On the other hand there exists $\nu \in \mathbb{N}$ such that $||x_n| - |x|| < \delta$ and $|x_n(t) -$

$-x(t)| < \delta$ for all $t \in [0,1]$, $n \geq \nu$. Therefore for all $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$, we have

$$p_k(Fx_n - Fx) = \sup_{0\leq t\leq 1} \left| \int_0^1 \frac{\partial^k K(t,s)}{\partial t^k} [f(s,|x_n|,x_n(s)) - f(s,|x|,x(s))]\, ds \right| <$$

$$< \varepsilon \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 \left| \frac{\partial^k K(t,s)}{\partial t^k} \right| ds,$$

which proves the continuity of F.

Finally from (3.1) it easily follows that for all $n \in \mathbb{N}$ there exist $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ such that

$$p_n(F(x)) \leq \alpha_n p_o(x) + \beta_n \qquad \forall x \in X. \tag{3.3}$$

Hence if we put $B_r = \{x \in X \mid p_o(x) < r\}$, for all $r > 0$, then $F(B_r)$ is bounded in X and therefore relatively compact, (see [5]).

Consider now the following integrodifferential problems

$$\begin{cases} x'(t) - \lambda \int_0^1 K(t,s) f(s,|x|,x(s))\, ds = y(t) \\ x(0) = x_o \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} x'(t) - \lambda \int_0^1 K(t,s) f(s,|x|,x(s))\, ds = y(t) \\ x(0) = x(1). \end{cases} \tag{3.5}$$

We shall be interested in giving solution of (3.4), (respectively (3.5)), for all $y \in X$, $x_o \in \mathbb{R}$, (respectively for all y in a subspace of X).

In fact in the case (3.4), put $Y = X \times \mathbb{R}$ endowed with the locally convex topology defined by the family of seminorms $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ where

$$q_n(x,u) = p_n(x) + |u|, \qquad \forall x \in X,\ u \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Consider the mappings $L : X \to Y$ and $T : X \to Y$ defined by

$$L(x) = (x', x(0)),\ T(x) = (F(x), 0) \qquad \forall x \in X.$$

Evidently L is an algebraic and topological isomorphism; T is continuous and $T(B_r)$ is relatively compact for all $r > 0$. Finally by (3.3) it is easily seen that T is quasibounded with respect to $\mathfrak{F}$ and

φ, where $\varphi = p_o$ and $\mathfrak{F}$ is the filter generated by the family $(X \setminus B_r)_{r>0}$. Therefore, since evidently conditions (2.4), (2.5) and (2.6) hold for $\mathfrak{F}$ and φ, and since $0 \notin ch_X(L, T)$, (see Remark 1.2), we have that:

The mapping $L - \lambda T$ *is onto, (i.e. the integrodifferential problem* (3.4) *has at least a solution in* X *for all* $y \in Y$, $x_o \in \mathbb{R}$), *for any* $\lambda \in \mathbb{R}$ *such that* $\lambda \notin ch_X(L, T)$ *and* $\deg^{\mathfrak{F}}(L, \lambda T) \neq 0$, *in particular for any* λ *in the component of* $\mathbb{R} \setminus ch_X(L, T)$ *containing* $\{0\}$. *For example this is the case if* $|\lambda| \alpha \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |K(t, s)| \, ds \leq 1$, (see Prop. 1.4).

In the case (3.5), put $Y = X$, $T : x \in X \to F(x) \in Y$ and $L : x \in \{x \in X \mid x(0) = x(1)\} \to x' \in Y$. Evidently L is a linear Fredholm operator of index zero, (in fact $Ker\, L = \{x \in X \mid x \text{ is constant}\}$ and $Im\, L = \{x \in X\} \mid \int_0^1 x(s)\, ds = 0\}$). The mappings $P : X \to X$ and $Q : Y \to Y$ defined by $P\, x(t) = x(0)$ and $Q\, y(t) = \int_0^1 y(s)\, ds$ are continuous projectors on X and Y such that $Im\, P = Ker\, L \simeq \mathbb{R}$ and $Ker\, Q = Im\, L$. Finally put $J(u) = u$, for all $u \in \mathbb{R} \simeq Im\, Q \simeq Ker\, L$, and $K\, y(t) = \int_0^t y(s)\, ds$ for all $y \in Im\, L$, $t \in [0, 1]$. Evidently K is the pseudo inverse of L associated to P and is continuous. Moreover T is quasibounded with respect to $\mathfrak{F}$, φ and for all $r > 0$ the sets $P(B_r)$, $J\, Q\, T(B_r)$ and $K(I - Q)\, T(B_r)$ are relatively compact.

Therefore Theorem 2.2 and Corollary 2.1 can be used in order to solve (3.5) for all $y \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ such that $\int_0^1 y(s)\, ds = 0$.

Notice that the assumptions of Corollary 2.1 are satisfied, (for $A = \{x \in X \mid T(x) \in Im\, L\} = \{x \in X \mid \int_0^1 \int_0^1 K(t, s) f(s, |x|, x(s))\, ds dt = 0\}$), when the following conditions on K and f hold:

$$K(t, s) \geq 0 \qquad \text{for all } t, s \in [0, 1] \tag{3.6}$$

$$f(s, u\, v) = f(0, u, v) \qquad \text{for all } s, u \in [0, 1],\ v \in \mathbb{R}; \tag{3.7}$$

$$v\, f(0, u\, v) > 0 \qquad \text{for all } u \in [0, 1],\ v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.8}$$

In fact in this case we have $\liminf_{x \in A, \mathfrak{F}} \frac{\varphi(x - P\, x)}{\varphi(x)} \geq \frac{1}{2}$, and therefore $0 \notin ch_A(L, T)$, see Proposition 1.4). On the other hand, we have for all $u \in \mathbb{R} \simeq Ker\, L$

$$J\, Q\, T(u) = \left(\int_0^1 \int_0^1 K(t, s)\, ds\, dt \right) f\left(0, \frac{|u|}{1 + |u|}, u\right)$$

and therefore $\deg^{\mathfrak{F}}_{B_r}(J\, Q\, T|_{Ker L}) \neq 0$.

Remark. — Since $F(x)$ depends on the Frechét modulus of x, it is not possible to solve (3.4) or (3.5) by means of the tecniques of [8]. In fact it is not difficult to prove that the mapping F can be not continuous when in X and Y we consider the norms of $\mathcal{C}^k([0,1])$ for any $k \in \mathbb{N}$. (For example if we put $K(t,s) = 1$ for all $t, s \in [0,1]$ and $f(s,u,v) = u\,v$, for all $s, u \in [0,1], v \in \mathbb{R}$, then the mapping F defined by $F\,x(t) = \int_0^1 |x|\,x(s)\,ds$ is not continuous from X endowed with the topology induced by $\mathcal{C}^k([0,1])$ into X endowed with the topology induced by $\mathcal{C}^k([0,1])$, for all $h, k \in \mathbb{N}$).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Furi - A. Vignoli, *A nonlinear spectral approach to surjectivity in Banach spaces*, Jour. Funct. Anal., **20**, pp. 304-318, (1975).

[2] M. Furi - A. Vignoli, *Spectrum for nonlinear maps and bifurcation in the non-differentiable case*, Ann. Mat. Pura ed Appl., (IV) vol. CXIII, pp. 265-285 (1977).

[3] R. Gaines - J. Mawhin, *Coincidence degree and nonlinear differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, n. 568, Springer Verlag, (1977).

[4] A. Granas, *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces*, Rozprawi Math., **30**, (1962).

[5] J. Horvath, *Topological vector spaces and disributions*, Vol I, Addison Wesley Publishing company, (1966).

[6] M. A. Krasnosel'skij, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford, (1964).

[7] J. Mawhin, *Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree...*, Jour. Diff. Equat., **12**, pp. 610-635, (1972).

[8] M. Mininni, *Coincidence degree and solvability of some nonlinear functional equations...*, Nonlinear Anal.: Theory, methods and appl. Vol. I, n. 2, pp. 105-122, (1977).

[9] M. Mininni, *A spectral approach to local solvability of some nonlinear equations in normed spaces, Nonlinear Anal.: Theory, Methods and appl. to appear.*

[10] M. Nagumo, *Degree of mapping in locally convex linear topological spaces*, Amer. Jour Math., **73**, pp. 497-511, (1951).

[11] J. T. Schwartz, *Nonlinear functional Analysis*, Gordon and Breach, New York, (1969).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, G. Panella e C. Ciliberto.

Synthesis of some 1,4-benzothiazines

Nota di Francesco De Simone, Antonio Dini,
Eliseo Ramundo e Gaetana La Bella
presentata dal socio ordinario R. A. Nicolaus

(Adunanza del 5 novembre 1977)

Riassunto. — Viene descritta la sintesi di alcuni derivati a nucleo 1,4-benzotiazinico, in vista dei loro rapporti strutturali con i composti fenotiazinici e delle interessanti proprietà farmacologiche di questi ultimi.

Con analogo procedimento è stata effettuata la preparazione del derivato 2-naftilico.

La sintesi è stata effettuata per trattamento con SO_2Cl_2 in etere anidro e a temperatura ambiente delle appropriate 1,3-benzotiazoline N-acetilate.

Le 1,3-benzotiazoline sono state preparate per reazione in benzene dell'o-amminotiofenolo con vari acetofenoni p-sostituiti e con la 2-acetil naftalina in presenza di acido p-toluensolfonico come catalizzatore.

Summary. — The synthesis of some 1,4-benzothiazine derivatives, in view of their structural connections with phenothiazine compounds of interesting pharmacological properties, are described.

By the same procedure the 2-naphthilic derivative has been prepared.

These products have been obtained by treatment with SO_2Cl_2 in dry ether at room temperature of the appropriate 1,3-benzothiazolines N-acetylated.

The 1,3--benzothiazolines have been prepared by condensation in benzene of 2-aminothiophenol with several p-substituted acetophenones and with the 2-acetyl naphthalene in the presence of p-toluenesulphonic acid as catalyst.

1,4-benzothiazinic derivatives have been intensively studied in these last years [1-3] in consideration of the chemical and pharmacological properties of this heterocyclic system. Unities related to 1,4-benzothiazinic nucleus are also present in the phaemelanins [4-7] biogenetically derived from the cysteinildopa [8] wich constitute the principal red and red-brown pigments of the mammalian hair and the feathers of birds [9]. Besides, some 1,4-benzothiazinic systems can be related to the structure of the phenothiazines, whose pharmacological and clinic

Istituto di Biorganica della Facoltà di Farmacia - Università di Napoli - Via L. Rodinò 22 - 80138 Napoli (Italy).

activities are widely comproved. Therefore, we have found it particulary interesting to prepare some of these derivatives, to determine eventual modification of activities at the level of the receptorial unities due to minor rigidity of the system compared to the phenothiazine structure.

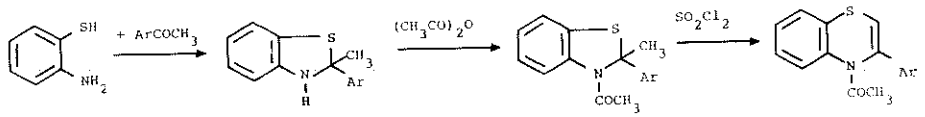
The preparation of these compounds was carried out by refluxing in benzene the o-aminothiophenol with some ketones of various structure. The so-obtained 1,3-benzothiazolines were transformed in 4H-1,4-benzothiazinic derivatives by acetylation and rearrangement of the chlorosolphonium salts obtained « in situ » by chlorination in non-aqueous medium [10].

As ketones we have used some p-substituted acetophenones, the methyl naphthyl ketones, some cyclic (cyclohexanon, cyclottanone, cyclodecanone and cyclododecanone) and heterocyclic ketones (2-acetyl furano, 2-acetyl pyrrole and 2-acetyl thiophene), the methyl cycloesyl and the methyl cyclopentyl ketones, and some dicarbonylic compounds.

In many cases the 1,4-benzothiazines were obtained and in very good yield.

In this preliminary report we refer on our results concerning the preparation of some 1,4-benzothiazinic derivatives (Schema I).

SCHEMA I



where Ar = 4-chloro-, 4-bromo, 4-iodio-, 4-acetoxy acetophenon; β-naphthyl.

EXPERIMENTAL

The melting points (m.p.) are uncorrected and have been determined by a Kofler hot-stage apparatus. The IR spectra have been determined on a Perkin Elmer mod. 177 spectrophotometer using cloroform as solvent. The PMR spectra have been recorded in deuterochloroformic solution on a Perkin Elmer R-24 spectrometer and chemical shifts are reported in parts per million (δ) from internal standard Me_4Si. In some cases deuterium oxide was added to check on exchangeable protons. The UV spectra have been measured on a Beckmann DB-GT spectrophotometer in EtOH solution. The mass spectra have been done by an AEI mod. MS 902 instrument, with a direct inlet system (70 e V). Column chromatographic separations were carried out on

Merck silica GF_{254}; the TLC on silica gel F_{254} Merck with chloroform as eluent: the spots were located by iodine vapour or by UV light.

The p-substituted acetophenones have been prepared according to the methods of the literature [11-14]; the 2-acetyl naphthalene has been acquired from the EGA Chemie KG (W. Germany).

2-methyl-2-(p-chlorophenyl)-1,3-benzothiazoline.

2-aminothiophenol (3.75 g, 30 mmol) has been added to a solution of p-chloroacetophenon [11] (4.62 g, 30 mmol) in benzene (200 ml) containing p-toluenesulphonic acid (0.15 g). The solution was refluxed for 9-10 h using a Dean-Stark apparatus. The solvent was then evaporated to dryness and the remaining oil was chromatographed on silica gel using benzene as eluent. The benzothiazoline was obtained as a pale-yellow solid (5.6 g, 72 %), m.p. 65-66° (from ethanol). Similary were prepared the 2-methyl-2-(p-bromophenyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 73-74; 2-methyl-2-(p-iodophenyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 79-81; 2-methyl-2-(p-acetoxyphenyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 133-135; 2-methyl-2-(β-naphthyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 108-109°.

N-acetyl-2-methyl-2-(p-chlorophenyl)-1,3-benzothiazoline.

This compound was prepared by acetylation of the corresponding benzothiazoline with acetic anhydride on steam bath for 9 h. Brown product, m.p. 98-101°. The acetyl derivatives of the other benzothiazolines have been prepared by a similar process:

N-acetyl-2-methyl-2-(p-bromophenyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 91-92; N-acetyl-2-methyl-2-(p-iodophenyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 112-113; N-acetyl-2-methyl-2-(p-acetoxyphenyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 80-81; N-acetyl-2-methyl-2-(β-naphthyl)-1,3-benzothiazoline, m.p. 121-122°.

3-(p-chlorophenyl)-4-acetyl-4H-1,4-benzothiazine.

Sulphoryl chloride (0.5 ml, 6 mmol) was added dropwise to a solution of N-acetyl-2-methyl-2-(p-chlorophenyl)-1,3-benzothiazoline (1.5 g, 5 mmol) in anhydrous ether (142 ml). The solution was stirred at room temperature for some hours; then was neutralized with a $NaHCO_3$ solution, washed with H_2O and dried over Na_2SO_4. The ether was evaporated and the residue chromatographed on silica gel using

benzene or benzene-chloroform as eluent: 1.0 g (67 %) of yellow crystals, m.p. 72-73°. The 3-(p-bromophenyl)-4-acetyl-4H-1,4-benzothiazine, m.p. 112-113; 3-(p-iodophenyl)-4-acetyl-4H-1,4-benzothiazine, mp. 186-187; 3-(p-acetoxyphenyl)-4-acetyl-4H-1,4-benzothiazine, mp. 108-110; 3-(β-naphthyl)-4-acetyl-4H-1,4-benzothiazine, m.p. 116-117°, were prepared in the same way (average yields: ~ 60 %).

ACKNOWLEDGMENT

The authors are grateful to G. Amato, G. Aurioso, G. Crusco and V. Rullo for technical assistance.

BIBLIOGRAFIA

[1] SANTACROCE C., SICA D. e NICOLAUS R. A., Gazz. Chim. It., **98**, 85 (1968).
[2] CARELLI V., MARCHINI P., CARDELLINI M., MICHELETTI MORACCI F., LISO G. e LUCARELLI M. G., Ann. Chim. **59**, 1050 (1969).
[3] PROTA G., *Organic compounds of sulphur, selenium and tellurium*, Specialistic Periodical Reports, The Chemical Society, London 1975, Vol. 3, Chap. XVI, p. 708-727.
[4] NICOLAUS R. A., Melanins (Chemistry of Natural Products, Ed. E. Lederer), Hermann, Parigi.
[5] PROTA G., PIATTELLI M. e NICOLAUS R. A., Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, **33**, 146 (1966).
[6] PROTA G. e NICOLAUS R. A., Gazz. Chim. It., **98**, 665 (1968).
[7] PROTA G., SCHERILLO G., NAPOLANO E. e NICOLAUS R .A., Gazz. Chim. It., **97**, 1451 (1967).
[8] MINALE L., FATTORUSSO E., CIMINO G., DE STEFANO S. e NICOLAUS R. A., Gazz. Chim. It., **99**, 431 (1969).
NICOLAUS R. A., PROTA G., SANTACROCE G., SCHERILLO G. e SICA D., Gazz. Chim. It., **99**, 323 (1969).
NICOLAUS R. A., *The Nature of Mammalian Colors*, Chim. Ind., **54**, 427 (1972).
MISURACA G., NICOLAUS R. A., PROTA G. e GHIARA G., Experientia. **25**, 920 (1969).
[9] NICOLAUS R. A., NOVELLINO E. e PROTA G., Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Napoli, Serie IV, XLII, I.
[10] CHIOCCARA F., NICOLAUS R. A., NOVELLINO E., PROTA G., la Chimica e l'Industria, **58**, 546 (1976).
[11] GAUTIER H., A. ch., [6] 14, 373 (1888).
[12] SCHWEITZER R., B., **24**, 550 (1891).
[13] SCHWEITZER R., B., **24**, 551 (1891).
KLINGEL, B., **18**, 2692 (1885).
[14] IRVINE F. M. e ROBINSON R., J. Chem. Soc., 2091 (1927).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, L. Mangoni e M. Covello.

Ricerca preliminare sull'insaponificabile di alcuni oli edibili: eventuale presenza di idrocarburi policiclici aromatici

Nota di UMBERTO GALLONE *, FRANCESCO BOTTIGLIERI *, MARIO COTUGNO * e AUGUSTO BIONDI *

presentata dal socio ordinario R. A. NICOLAUS

(Adunanza del 5 novembre 1977)

RIASSUNTO. — Lo scopo di questa ricerca è quello di stabilire l'eventuale presenza dell'idrocarburo aromatico 3-4 Benzopirene nell'insaponificabile dei più comuni olii commerciali.

Gli insaponificabili degli olii di oliva rettificato ed extra-vergine e degli olii di semi di Arachide, Girasole, Mais e Soia, sono stati sottoposti a cromatografia su strato sottile di gel di silice: le lastre sono state esaminate con gli U.V. e con particolari coloranti (fluoresceina, rodamina, vapori di iodio). Gli stessi insaponificabili sono stati inoltre cromatografati su colonna con supporto di gel di silice.

Spettri di assorbimento sono stati effettuati per tutte le frazioni dell'eluato.

SUMMARY. — The aim of this analysis is to ascertain the possible presence of the aromatic 3-4 benzopyrene hydrocarbon in the non-saponificables of commercial edible oils.

The non-saponificables of the rectified and extravirgin olive-oils and those of the seeds-oils as peanut, sunflower, maize and soya, have been underwent to silica gel thin layer chromatography: the plates have been examined with the U.V. and by particular colourings (fluorescene-rodamine and iodine steams). The same non-saponificables have moreover been cromatographed on the column with the support of silica gel. Absorption spectrum have been executed for all the fractions of the eluate.

Gli scopi di tale ricerca sono quelli di determinare se nella frazione dell'insaponificabile dei più comuni olii commerciali (Oliva rettificato, olio di semi d'arachide, olio si semi di girasole, olio di semi di mais, olio di semi di soia) risulti presente, anche in tracce l'idrocarburo policiclico aromatico 3-4 Benzopirene e se la sua presenza sia collegabile ai vari processi chimici (idratazione, deacidifica-

* Fisiologia Generale - Facoltà di Farmacia - Università di Napoli.

zione, decolorazione, deodorazione, demarganizzazione e rettificazione) che permettono alle industrie di porre in commercio tali olii.

L'importanza di tale ricerca è dovuta alla ormai inequivocabilmente dimostrata azione cancerogena del 3-4 Benzopirene e dei suoi derivati da processi di ossidazione anche a concentrazioni bassissime [1-2-3].

Ricordiamo che già vari studiosi hanno appurato la presenza del 3-4 Benzopirene in taluni olii (olio di noce di cocco, olio di rapa,

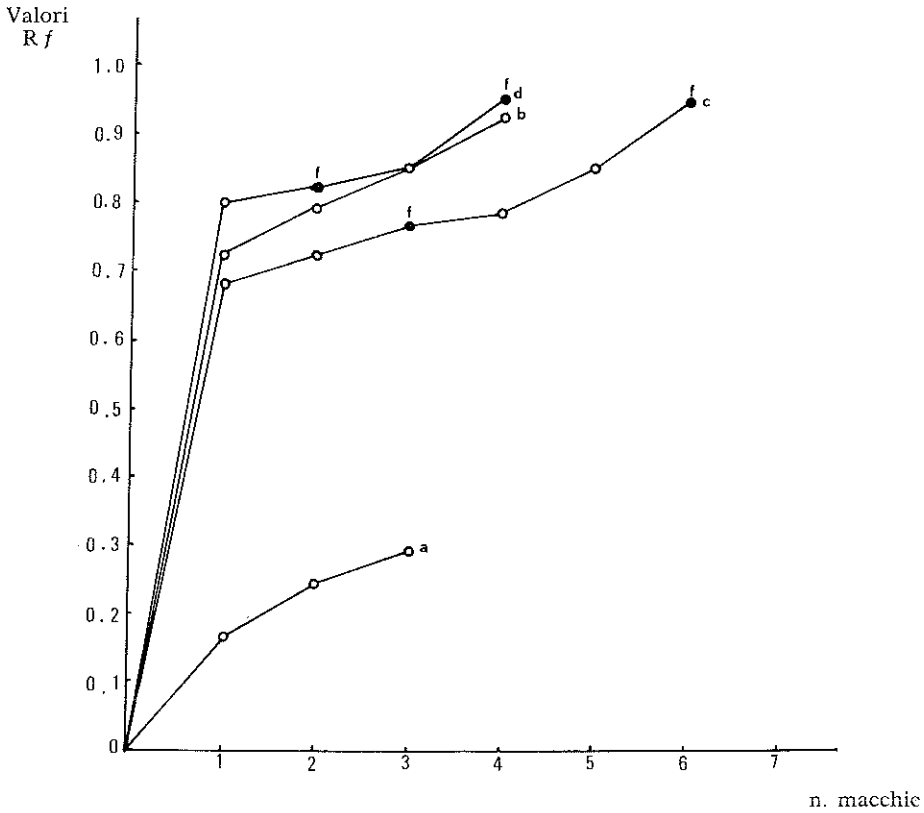


GRAFICO 1. - Arachide

Miscele

a» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/1
b» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/3
c» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6
d» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/10

olio di semi di girasole), mentre la ricerca è risultata negativa per altri olii (olio di semi d'arachide e olio d'oliva) [4-5].

Inoltre sono state effettuate ricerche anche sull'eventuale formazione di tale idrocarburo in qualche fase della lavorazione dell'olio: tra queste ricordiamo quelle sull'affumicamento della drupa (di cui è stata inequivocabilmente dimostrata l'azione di incremento

della concentrazione del 3-4 Benzopirene) [6] e quelle di analisi comparata del livello del 3-4 Benzopirene nei semi e negli olii del lino [7] e del girasole [8].

Però nonostante l'imponente numero di ricerche, l'accertamento della presenza del 3-4 Benzopirene negli olii commestibili e la definizione della sua origine (naturale o collegata ad un processo industriale) sono ben lontane dall'essere definiti esattamente, come dimostrano le frequenti e nette contraddizioni che si rivelano leggendo i vari articoli a riguardo.

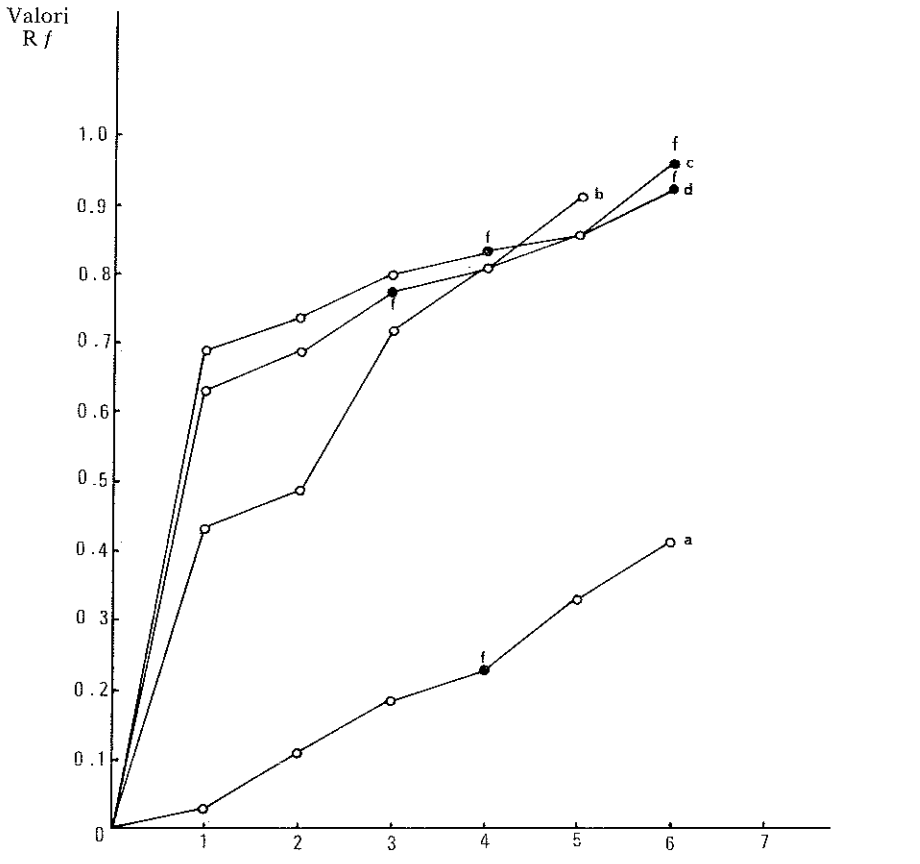


GRAFICO 2. - Girasole

Miscele

a» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/1
b» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/3
c» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6
d» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/10

SEPARAZIONE DELL'INSAPONIFICABILE

È noto che gli olii possono essere chimicamente ripartiti in due diverse frazioni: « il saponificabile » e « l'insaponificabile ».

Il saponificabile è costituito per la maggior parte da gliceridi e da trigliceridi (in particolar modo).

Gli acidi grassi che rientrano nelle molecole dei gliceridi sono così ripartibili:

Acidi grassi saturi: Butirrico - Capronico - Caprilico - Caprinico - Laurico - Miristico - Palmitico - Stearico - Arachico - Beenico - Lignocerico.

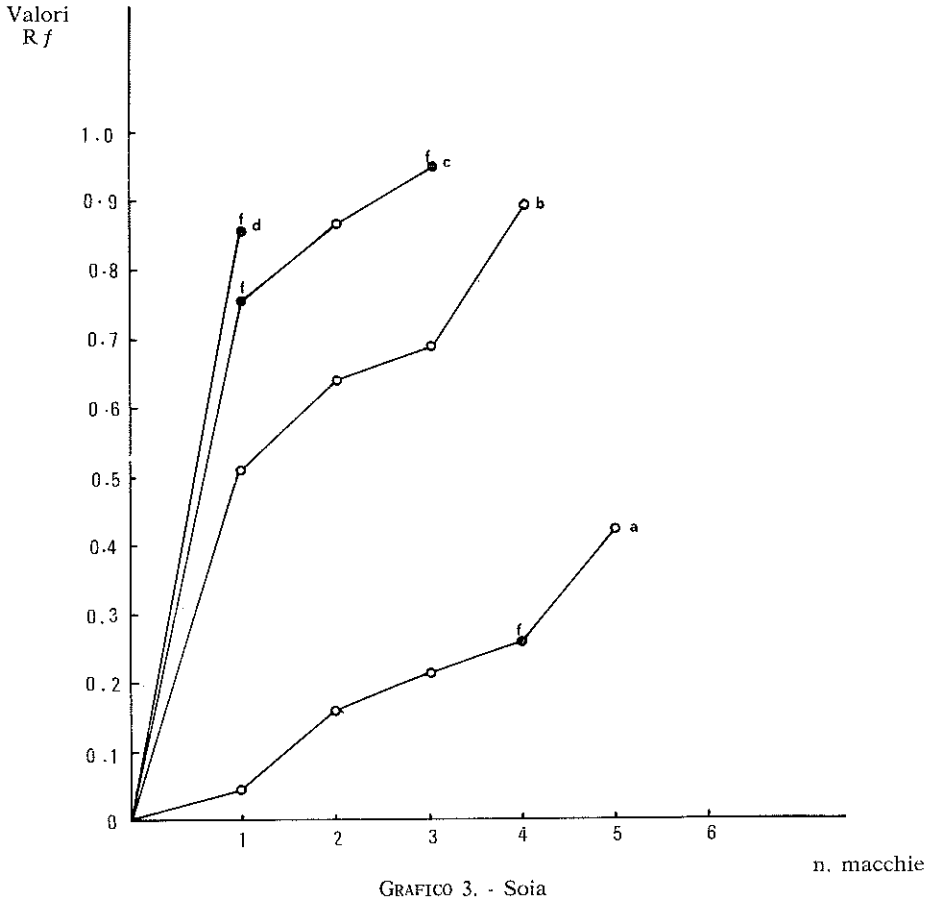


GRAFICO 3. - Soia

Miscele

a» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/1
b» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/3
c» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6
d» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/10

Acidi grassi monoinsaturi: Miristoleico - Palmitoleico - Oleico - Gadoleuceo - Erucico.

Acidi grassi polinsaturi: Linoleico - Linolenico.

L'insaponificabile degli olii vegetali rappresenta una miscela di sostanze in parte nota ed in parte ancora da determinare.

Le sostanze note sono: idrocarburi saturi ed insaturi, alcooli superiori (cetirico e messilico), vitamine liposolubili, terpeni, steroli. Logicamente è in questa frazione che bisogna ricercare il 3-4 Benzopirene.

In seguito è riportato lo schema della tecnica da noi usata per separare questa frazione, sulla quale sono stati effettuati tutti i vari saggi chimici [9].

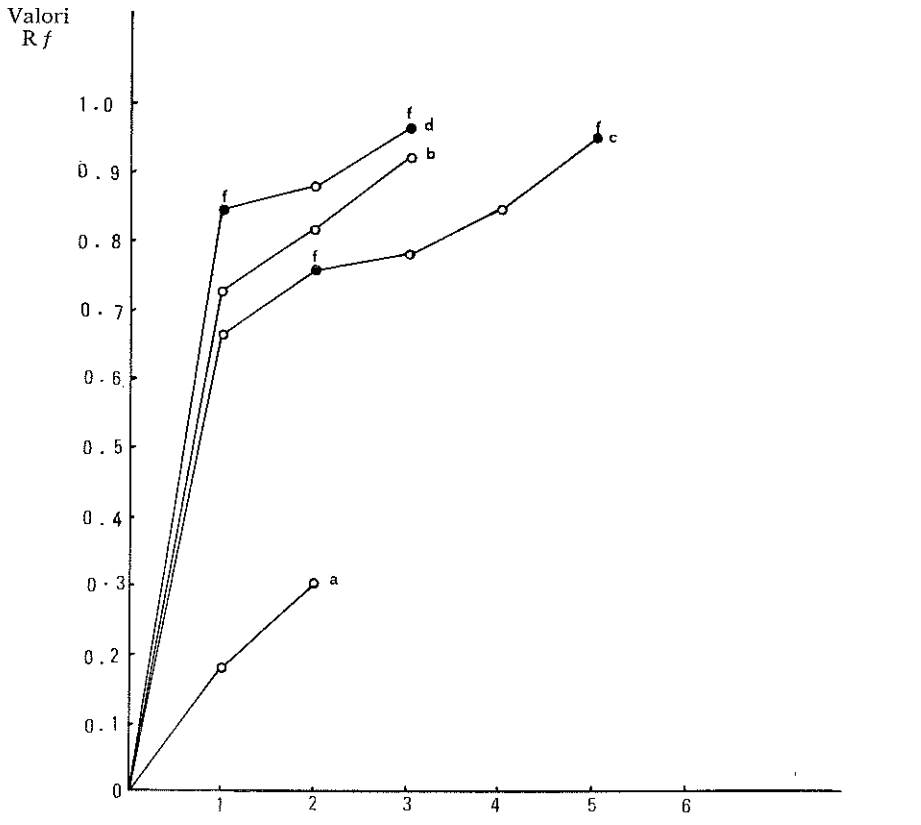


GRAFICO 4. - Mais

Miscele

a» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/1
b» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/3
c» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6
d» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/10

1) 25 ml d'olio + 200 ml di una soluzione alcoolica 2N di KOH vengono riscaldati in una beuta munita di refrigerante a ricadere per un'ora a 60° C. Si lascia raffreddare il tutto.

2) La soluzione così ottenuta viene posta in un imbuto separatore con 200 ml d'acqua e 200 ml d'etere di petrolio. Si lascia separare le fasi che vengono raccolte.

3) La fase acquosa si dibatte per altre 2 volte con 200 ml di etere di petrolio.

4) Le tre fasi organiche riunite si lavano 3 volte con 150 ml di una soluzione al 50 % d'alcool metilico e successivamente si filtrano.

5) Il filtrato si porta a secco.

6) Il residuo si riprende con poche gocce d'opportuno solvente (confronta in seguito).

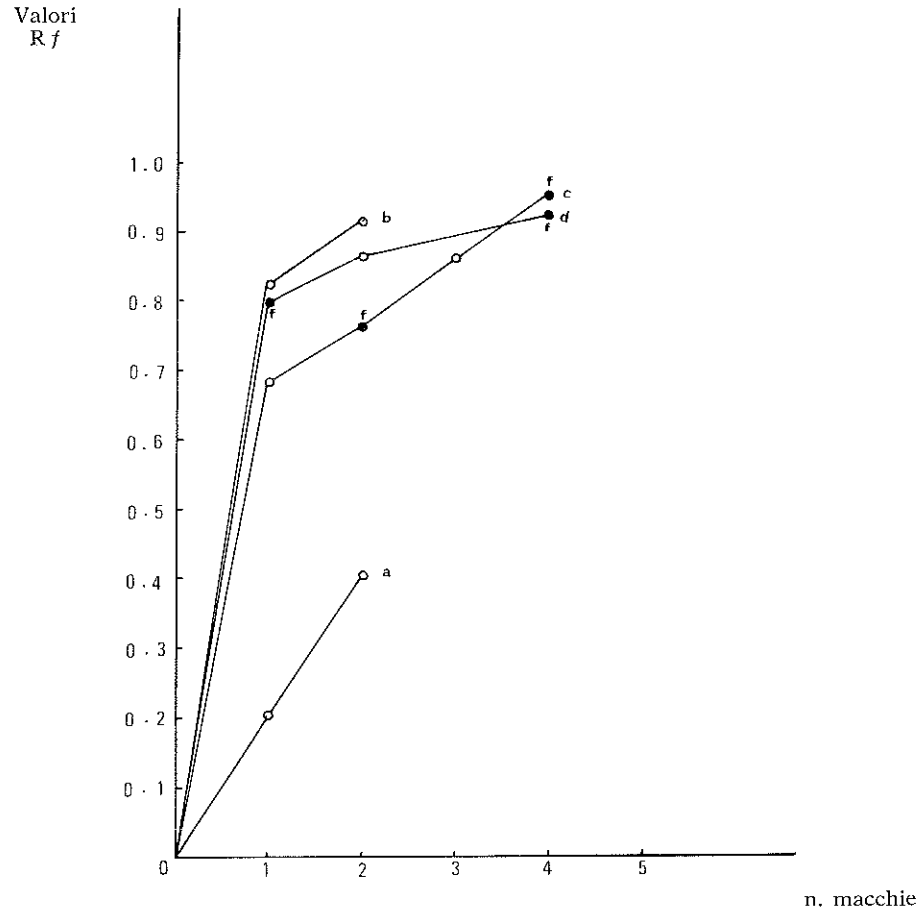


GRAFICO 5. - Oliva rettificato

Miscele

a» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/1
b» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/3
c» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6
d» Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/10

In questo modo da ciascun olio si ottiene circa 0,1 gr. di sostanza insaponificabile.

Va ricordato che indipendentemente dalla composizione chimica, la diversità degli insaponificabili dei 5 olii da noi scelti, si rileva

facilmente dalle loro caratteristiche « morfologiche »: infatti mentre, ad esempio, l'insaponificabile dell'olio di semi d'arachide ha un aspetto di minute scaglie, l'insaponificabile dell'olio di mais assume l'aspetto di uno strato resistente, omogeneo e compatto.

Anche la solubilità degli insaponificabili nel solvente usato per sciogliere il residuo ottenuto alla fine del processo di separazione dell'insaponificabile è molto variabile: gli insaponificabili degli olii di semi di arachide, girasole ed oliva rettificato si solubilizzano ottimamente in etere di petrolio, mentre in tale solvente l'insaponificabile dell'olio di semi di soia si solubilizza parzialmente e quello dell'olio di semi di mais si solubilizza minimamente e solo ad una temperatura di 60° C. L'insaponificabile dell'olio di semi di soia (come quello degli olii di semi di arachide, girasole e oliva rettificato) si solubilizza bene in una miscela formata da Eptano, Benzene ed Etanolo, nel rapporto 10/10/6 (in tale miscela l'insaponificabile dell'olio di semi di mais si solubilizza solo parzialmente ed alla temperatura di 60° C).

Cromatografia su gel di silice a strato sottile

Numerosi esperimenti indicano che nella ricerca, separazione e riconoscimento degli idrocarburi aromatici policiclici, alla cromatografia su colonna è da preferire quella su strato sottile poiché quest'ultima permette un'analisi « più rapida, precisa ed accurata » [10].

I substrati più comunemente usati per tali cromatografie a strato sottile sono: 1) Fluorisil (silicato di Magnesio attivati) [11]; 2) Acetato di cellulosa [12]; 3) Poliacrilammide plastico [12]; 4) Ossido di Alluminio [13]; 5) Gel di silice [13].

Nei precedenti esperimenti condotti nel nostro Istituto, utilizzando come substrato per tali cromatografie il Silica-Gel Merckx 60 F254 si è ottenuta una netta separazione del 3-4 Benzopirene dai suoi composti ossidati e di questi tra loro [15].

In letteratura sono riportate numerose miscele usate per la ripartizione degli idrocarburi aromatici policiclici (con particolare riferimento al 3-4 Benzopirene) sulle lastre di silice gel; ne riportiamo alcune con accanto i valori del Rf del Benzopirene: 1) Esano (Rf = 0,17) [13]; 2) CCl_4 (Rf = 0,65) [13]; 3) Esano/diclorobenzene/piridina: 20/2/1 (Rf = 0,22) [14]; 4) Benzene/eptano/etanolo: 10/10/1 (Rf = 0,80).

Sempre in base agli esperimenti precedentemente condotti nel nostro Istituto, con quest'ultima miscela si è avuta una accurata e netta separazione del 3-4 Benzopirene dai suoi ossidi. Per tali motivi si è effettuata una serie di cromotografie degli insaponificabili, usando

come supporto il gel di silice e come miscela di separazione Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/1 (cromatografie effettuate su lastre di dimensioni 5 × 10 cm opp. 20 × 20 cm).

Mentre però si aveva una buona separazione dei campioni di insaponificabile degli olii di oliva rettificato, di semi di girasole e di semi di soia, gli insaponficabili degli olii di semi di mais ed arachide, non mostravano nemmeno una minima traccia di migrazione sulla lastra. Abbiamo quindi variato i rapporti della miscela, effettuando comparativamente una serie di cromatografie con le seguenti miscele: -1) Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/1; 2) Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/3; 3) Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6; 4) Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/10.

I risultati (riportati nei grafici n. 1 n. 2 n. 3 n. 4 n. 5) indicano che la separazione più netta e completa avviene con la miscela Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6. La ripartizione dei campioni con tale miscela è riassunta nella Tavola I.

TAVOLA I

Insaponificabili degli olii di semi di	Valori degli R *f* delle macchie N.					
	1	2	3	4	5	6
Arachide	0.685	0.730	0.769*	0.788	0.858	0.948*
Girasole	0.641	0.692	0.775*	0.801	0.858	0.942*
Mais	0.679	0.750*	0.775	0.846	0.942*	
Soia	0.769*	0.884	0.948*			
Oliva rettificato	0.692	0.762*	0.865	0.955*		

* Netta fluorescenza azzurra.

In tale miscela il 3-4 Benzopirene ha un Rf = 0.933.

CROMATOGRAFIA SU COLONNA

Frazionati in tal modo i componenti degli insaponificabili dei 5 olii, si è passato ad una seconda fase: ovvero alla loro determinazione chimica.

Ci si è subito reso conto che rimuovendo le macchie e separando in adatto solvente i campioni dal gel di silice tramite centrifugazione, si avevano (almeno con le lastre da noi adottate) quantitativi di sostanza pura così scarsi da essere del tutto insufficienti per i vari saggi chimici.

Tali quantitativi rimanevano insufficienti anche disponendo i campioni anzi che in singoli punti della linea di partenza della cromatografia, lungo tutta la linea stessa (18 cm).

Questo metodo presentava anche l'inconveniente di non separare nettamente le varie bande.

Perciò, sebbene come già accennato presenti taluni incovenienti, si è deciso di far ricorso ad una serie di cromatografie su colonna.

Anche per la cromatografia su colonna sono riportate numerose metodiche in letteratura, tra cui: 1) Colonna con supporto cromatografico di ossido di alluminio in acqua [16]; 2) Colonna con supporto di gel di polistirene Bio-Beads SX-8 in tetraidrofurano [17]; 3) Colonna con supporto di acetato di cellulosa (40 %) e Durapak OPN [18].

In tutti questi casi si parla di cromatografia liquida ad alta pressione [18-19].

Noi invece abbiamo pensato di usare una colonna con supporto di gel di silice 60 e una miscela eluente formata da Benzene/Eptano/Etanolo nel rapporto di 10/10/6.

La colonna è stata così preparata: 10 gr. di gel di silice sono stati sciolti in 70 ml di etanolo puri e disaerati per 10 minuti. Successivamente con le consuete tecniche impacchettata la colonna (il cui letto è risultato di cm^3 21,20575, con h = cm 42,187 e diametro = cm 0,8) si è lavato il letto con 100 cm^3 di miscela Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6. Con tale colonna abbiamo cromatografato campioni costituiti da soluzioni al 15 % (0,30 gr in 2 ml) degli insaponificabili nella miscela Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6. Raccolti in un'unica frazione i primi 10 cm^3 dello eluato, abbiamo separato 20 altre frazioni da 1 ml, ed il tutto è stato sottoposto a cromatografia su lastra sottile (si noti che dalla 21ª frazione in poi sulla lastra non appare alcuna macchia, tranne quelle dovute ad impurezze del solvente).

Le frazioni che su lastra davano macchie con Rf uguali, sono state raccolte insieme e di tali gruppi si è fatto lo spettro (nell'U.V. ovvero da 400 a 200 mμ per le frazioni incolori e nel visibile oltre che nell'U.V. per le frazioni colorate: in tal caso gialle).

I risultati possono così riassumersi:

Olio di semi d'arachide	Frazioni gialle:	1-16
	Frazioni incolori:	17-21
Olio di semi di girasole	Frazioni gialle:	9-14
	Frazioni incolori:	1-8 e 15-21
Olio di semi di mais	Frazioni gialle:	4-13
	Frazioni incolori:	1-3 e 14-21

Olio di semi di soia	Frazioni gialle: 4-9 Frazioni incolori: 1-3 e 10-21
Olio d'oliva rettificato	Frazioni gialle: 4-13 Frazioni incolori: 1-3 e 14-21

I dati inerenti a tali frazioni sono schematizzati in Tavola II.

TAVOLA II

Frazioni cromatografate	Valori R *f* delle macchie N.						D.O. alla lunghezza d'onda di mμ:		
	1	2	3	4	5	6	320	475	485
				Olio di semi d'arachide					
1/4			0.396						
5/6	0.493	0.650	0.936						
7/15	0.348		0.936						
16/21			0.936						
				Olio di semi di girasole					
1/3						0.925			
4/7			0.629		0.756	0.925			
10/11	0.518	0.574	0.647	0.703	0.777	0.925			
12/21						0.925	1.62		
				Olio d'oliva rettificato					
1/2	nessuna macchia								
3/6			0.951					0.25	
7/10	0.567	0.748	0.951						0.36
11/21			0.951						
				Olio di semi di mais					
1/3			0.936						
4/12	0.607	0.748	0.936						
13/21			0.936						
				Olio di semi di soia					
1					0.913				
2/4				0.879	0.913				
5	0.602	0.670	0.745	0.906	0.913				
6/8	0.608	0.670	0.739	0.819	0.913				
9/21					0.913				

N. B. - Tutte le frazioni danno un picco a 278 mμ.

CROMATOGRAFIA SU COLONNA (letto volume = 110 cm^3)

Siccome con la precedente serie di cromatografie non si è ottenuta una netta separazione delle sostanze dei vari insaponificabili (confronta i dati riportati), si è effettuata una cromatografia sempre con substrato di gel di silice « 60 » e sempre con eluente costituito dalla miscela Eptano/Benzene/Etanolo 10/10/6 ma con volume = 110 cm^3 (h = 35 cm, r = 1 cm); volume che si ottiene impacchettando 30 gr. di gel di silice.

Il campione esaminato risulta costituito da una soluzione al 15 % (1 gr. in 6,66 cm^3) dell'insaponificabile dell'olio di semi di girasole (che meglio di ogni altro si era frazionato con le precedenti cromatografie: Tavola II) nella miscela Eptano/Benzene/Etanolo: 10/10/6. Il campione prima di essere cromatografato su colonna è stato cromatografato su lastra di gel di silice, ove si è ripartito nelle usuali sei frazioni (confronta Tavola I).

Infine ricordiamo che l'eluato della colonna è stato ripartito in 36 frazioni da 3 cm^3 l'una. Le frazioni sono state cromatografate su lastra sottile (Tavola III) e quelle danti macchie con « Rf » uguali sono state radunate e sottoposte a spettro nell'U.V. (frazioni incolori) e nello U.V. e nel visibile (frazioni gialle) (Tavola III).

I risultati possono così schematizzarsi:

Frazioni incolori: 1-21 e 27-36

Frazioni gialle: 22-26

TAVOLA III

Olio di semi di girasole

Frazioni cromatografate	Valori R *f* delle macchie N.						Lunghezza d'onda dello spettro (λ)	A a lunghezza d'onda dei picchi (λ)
	1	2	3	4	5	6		
1/21						0.928	278	0.2
22/26	0.710	0.775	0.804*	0.846	0.887	0.928	278	2.00
27/36						0.928	278	1.5

* Netta fluorescenza azzurra.

CROMATOGRAFIE SU STRATO SOTTILE DI INSAPONIFICABILI, 3-4- BENZOPIRENE, E DEI DERIVATI DALL' OSSIDAZIONE DEL 3-4 BENZOPIRENE

Siccome a differenza di quella su colonna, la cromatografia su lastra di gel di silice (con eluente la miscela Eptano/Benzene/Eta-

nolo 10/10/6) separa nettamente le componenti dell'insaponificabile dei cinque olii da noi trattati, una di tali cromatografie è stata da noi effettuata su 8 campioni disposti tutti su un'unica lastra (di dimensioni 20 × 20 cm), in modo da poter raffrontare comparativamente gli « Rf » e l'eventuale fluorescenza delle macchie dei singoli campioni.

Gli 8 campioni sono: 1) Insaponificabile olio di semi di arachide. 2) Insaponificabile olio di semi di girasole. 3) Insaponificabile olio di semi di mais. 4) Insaponificabile olio di semi di soia. 5) Insaponificabile olio di oliva rettificato. 6) Insaponificabile olio extra vergine d'oliva. 7) Soluzione di 3-4 Benzopirene puro in Benzene. 8) Soluzione dei 10 derivati dai processi d'ossidazione del 3-4 Benzopirene in Benzene [15]. I risultati sono riassunti in Tavola IV.

Successivamente una serie di tali lastre è stata colorata con le sostanze più adatte alla colorazione selettiva degli idrocarburi aromatici [20-21].

Le sostanze in questione sono: la *Fluorosceina*, la *Rodamina* e lo *Iodio* (esposizione ai vapori).

La *Fluoresceina* (sol. 0,2 % in etanolo) ha colorato soltanto il saponificabile (sulla linea di partenza poiché non migra) e, sempre

TAVOLA IV

Insaponificabili degli olii di semi di	Valori degli R *f* delle macchie N.							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Arachide	0.685	0.730	0.769*	0.788	0.858	0.948*		
Girasole	0.641	0.692	0.775*	0.801	0.858	0.942*		
Mais	0.679	0.750*	0.775	0.846	0.942*			
Soia	0.769*	0.884	0.948*					
Oliva rettificato	0.692	0.762*	0.865	0.955*				
Oliva extravergine	0.626	0.646	0.673	0.713*	0.813	0.946*		
Soluzione di 3-4 Benzopirene puro in Benzene	0.933*							
Soluzione prodotti di ossidazione del 3-4 Benzopirene	0.06	0.366	0.533	0.580	0.613	0.666	0.766	0.933

* Netta fluorescenza azzurra.

N. B. - I saponificabili dei 6 olii anch'essi cromatografati non hanno migrato.

limitatamente alla linea di partenza, l'insaponificabile: probabilmente ha in tal caso colorato la porzione di saponificabile che nel processo di separazione, come sempre accade, rimane congiunta all'insaponificabile.

La *Rodamina* (sol. 0,05 % in etanolo) ha colorato le macchie coi seguenti valori di Rf:

1) Insaponificabile Arachide: nessuna.
2) Insaponificabile Girasole: 0,942.
3) Insaponificabile Mais: 0,679 e 0,942.
4) Insaponificabile Soia: 0,948.
5) Insaponificabile Oliva Rettificato: nessuna.
6) Insaponificabile Oliva Extra Vergine: nessuna.
7) Soluzione 3-4 Benzopirene puro: 0,933.
8) Soluzione prodotti di ossidazione 3-4 Benzopirene: 0,933.
9) Saponificabili dei 6 olii su citati: nessuna.

Dopo esposizione, in vaschetta cromatografia, della lastra ai vapori di Iodio per 24 h, si colorano le macchie coi seguenti valori di Rf:

1) Insaponificabile Arachide: 0,685-0,730-0,788-0,948.
2) Insaponificabile Girasole: 0,641-0,692-0,775-0,801-0,942.
3) Insaponificabile Mais: 0,679-0,750-0,846-0,942.
4) Insaponificabile Soia: 0,769-0,884-0,948.
5) Insaponificabile Oliva Rettificato: 0,692-0,865-0,955.
6) Insaponificabile Oliva Vergine: 0,620-0,646-0,673-0,713-0,813-0,946.
7) Soluzione 3-4 Benzopirene puro: 0,933.
8) Soluzione prodotti di ossidazione del 3-4 Benzopirene: 0,666-0,933.
9) Saponificabile dei 6 olii su citati: nessuna macchia.

N.B. - Tutti i campioni danno una colorazione sulla linea di partenza.

Conclusioni.

Il presente lavoro costituisce una preliminare esperienza sul contenuto negli olii alimentari delle sostanze descritte che sarà ulteriormente approfondito sia per quanto si riferisce alla caratterizzazione

chimica e chimico-fisica delle sostanze isolate sia per quanto attiene alla loro probabile attività patogena in animali da esperimenti.

I risultati che si otterranno saranno oggetto di ulteriore pubblicazione.

Gli autori ringraziano il sig. Gennaro Laudadio per l'assistenza tecnica prestata.

BIBLIOGRAFIA

[1] GUERIN, CHOUROULINKOV LAZAR, *Inhibiting effect of chemical carcinogens on mitosis in rat lung cell cultures*, C. R. Soc. Biol., 1970, **164** (2), **234** (8) (Fr.).

[2] KUPFER-WAEHMER-WUENSCHER, *Late stages of infiammatory process and manifestation of tumors with various compositions of Benzo(a)pirene Croton olil mixtures*, Arch. Geschwulst For Sch., 1970, **35** (2), 99-108 (Ger).

[3] KURIHARA-TAKUMA, *Experimental bone sarco-mas in rats induced by various chemical carcinogens*, Nichidai Igaku Zasshi, 1969, **28** (9), 921-41 (Japan).

[4] GRIMMER GERNOT HILDEBRANDT, *Levels of Polycyclic Hydrocarbons in crude vegetable oils*, Arch. Hyg. Bakteriol, 1968, **152** (3), 255-9 (Ger.).

[5] GRIMMER-HILDEBRANDT, *Content of Polycyclic Hydrocarbons in crude vegetable oils*, Chem. Ind. (London), 1967 (47), 2000-2 (Eng.).

[6] BIERNOTH-ROST, *Occurrence of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons in coconut oil and their renoval*, Chem. Ind. (London), 1967 (47), 2002-3 (Eng.).

[7] GRIGORENKO-DIKUN, *3-4 Benzopyrene level in cotton seeds and their processing products*, TR. VN II Zhirov, 1970, n. 27, 46-9 (Ross) from Ref 2H Khim 1971 Abstrac, n. 5R. 450.

[8] GRIGORENKO-DIKUN-KALININA-MIRANOVA-RZHEKHIN, *3-4 Benopyrene level in suflower seed and their processing products*. TR. VN II, 1970 n. 27-32-41 from Ref. Khim 1971 Abstrac. n. 5R 453.

[9] TATEO, *Analisi dei prodotti alimentari*, Vol. I.

[10] ARRO, *Application of thin layer and paper cromatography in detecting Polycyclic Hydrocarbons*, Eesti NSV Teaduste Akad Toimetised Fuusikalis Mat., Ja-Tehn Teaduste Seer., **13** (1), 47-51 (1963).

[11] ELBERT-STANLEY, *The eluting power of solvent sistems on thin layers of florisil*, Chemist Analyst, 54 (3), **68** (9), 1965) (Eng.).

[12] KLIMISCH, *Separation of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons by high pressure liquid cromatography. Selective separation sistem for the quantitative determination of isomeric Benzopyrenes and Coronene*, J. Chromatogr., 1973, **83**, 11-14, (Eng.).

[13] KUCHARCZYK-FOHL-VYMETAL, *Thin layer chromatography of Aromatic Hydrocarbons and some Heterocyclic compounds*, J. Cromatagr., **11**, 55-61 (1963) (Ger.).

[14] SUZUKI-MTSUSHITA, *Thin layer cromatographic separation of Polynuclear Hydrocarbons on the plate composed of two adsorbent layers*, Ind. Health (Kawasaki-Japan), **4** (3), 109-17 (1966) (Eng.).

[15] BIONDI, *In vitro oxidation of 3-4 Benzopyrene chromatographic separation of the oxidation products*, Rassegna di Medicina Sperimentale, Anno XXI, n. 2 (1974).

[2] SNYDER, *Linear elution adsorption chromatograpy*. II) *Compound separability with Alumina ad adsorbent*, J. Chromatog., **5**, 430-41, (1961), bid., **6**, 22-52.

[17] KLIMISCH-REESE, *Gel chromatographic separation of Hydrocarbons Amine and Phenols on a Polystyrene gel column. Preparative fractionation of cigaret smoke condensate for biological experiments*, J. Chromatog., 1972, **67** (2), 299-307 (Ger.).

[18] IVES-FRED-GIUFFRIDA, *Liquid chromatography of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons*, J. Ass. off. Anal. Chem., 1972, **55** (4), 757-61 (Eng.).

[19] CORTESI-FEDELI-GASPAROLI-TISCORINA, *Cromatografia liquida ad alta pressione (HPLC) nell'analisi degli insaponificabili degli oli vegetali*, Rivista Italiana delle sostanze grasse, ol. LIV, gennaio 1977.

[20] WILK-HOPPE-TAUPP-ROCHLITZ, *Reaktions chromatographie en identifizierungsverfahren fur aromaten bei der papier und dünnschichtchromatographie*, J. Chromatogr., **27** (1967), 311-316.

[21] BOBBIT, *Thin layer chromatography.*

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, L. Mangoni e M. Covello.

Nucleolytic enzymes in seminal plasma *

Nota di HISANORI SUZUKI **
presentata dal socio ordinario VINCENZO LEONE

(Adunanza del 5 novembre 1977)

RIASSUNTO. — La presenza di vari enzimi nucleolitici è stata mostrata nel plasma seminale umano e di toro.

Nel plasma seminale umano è stata trovata attività di 3',5' fosfodiesterasi ciclica, 5' nucleotidasi, 2',3' fosfodiesterasi ciclica, adenosina deaminasi, nucleoside fosforilasi e xantinossidasi; inoltre, sono anche state evidenziate 3'-nucleotidasi e adenasi, enzimi che finora non erano stati ancora trovati in tessuti animali.

Nel plasma seminale di toro è stata dimostrata la presenza di tutte le stesse attività nucleolitiche trovate nel plasma umano, meno quella adenasica.

Sulla base degli enzimi nucleolitici trovati nel plasma seminale, sono proposte le vie cataboliche che rendono conto della formazione di ac. urico a partire da vari precursori fra cui anche i nucleotidi ciclici.

SUMMARY. — A number of nucleolytic enzyme activities has been detected both in human and bull seminal plasma.

Human seminal plasma is shown to possess 3',5' cyclic phosphodiesterase, 5'-nucleotidase, 2',3' cyclic phosphodiesterase, adenosine deaminase, nucleoside phosphorylase and xanthine oxidase; adenase activity and a very high level of 3'-nucleotidase have also been brought to light. This last finding is of special interest since until now these enzymes have not been found in the animal kingdom.

Bull seminal plasma has all nucleolytic enzyme activities found in human plasma, except adenase.

On the basis of the nucleolytic enzyme activities found in seminal plasma, possible catabolic pathways starting from cyclic nucleotides and ending to uric acid are formulated.

INTRODUCTION

It is well known that bull seminal vesicles are rich in nucleolytic enzymes such as adenosine deaminase, purine nucleoside phosphorylase [1] and xanthine oxidase [2], that can convert adenosine to uric acid by consecutive reactions. 5'-nucleotidase [3], NADase [4, 5], phosphodiesterase [6, 7], CoA-splitting enzymes [8, 9] and nucleotide pyrophosphatase [10] have also been found in seminal vesicles. Fur-

* This work was performed with the financial help of C.N.R., contract N. 77.00343.85 of Progetto finalizzato della Biologia della Riproduzione.

** Istituto di Chimica Organica e Biologica della Facoltà di Scienze - Università di Napoli

thermore, a specific ribonuclease (seminal RNAse BS-1) has been purified from seminal plasma [11, 12] and its primary structure has been elucidated by LEONE and co-workers [13]. Recently, a specific phosphodiesterase capable of hydrolyzing 3',5'-cyclic nucleotides, has been partially purified and characterized from seminal plasma and vesicles [14, 15]. In the course of kinetic assays of cyclic phosphodiesterase using a fraction from seminal plasma, it was noted that this fraction showed also adenosine deaminase activity [16]. Until now research on the nucleolytic enzymes in seminal plasma has been relatively scarce. It is thought, however, that most enzymes present in bull seminal plasma are synthesized chiefly in the seminal vesicles and are secreted in seminal plasma [17]. Furthermore, uric acid which is the end product of purine nucleotides metabolism and is present in quite high concentrations in bull seminal vesicles has been detected also in bull seminal plasma [18].

This research was performed to determine the various nucleolytic enzyme activities that are responsible for the pathways of uric acid formation starting from adenosine and its derivatives in bull seminal plasma.

The same research was performed also on human seminal plasma, since little is known about the nucleolytic enzyme activities in that fluid.

MATERIALS AND METHODS

Bull semen, obtained from the artificial insemination centres, was centrifuged (5.000 g $\times$ 15 min.) to remove the spermatozoa. The same treatment was performed also for human semen, which was kindly provided by human fertility centers.

Xanthine oxidase and uricase were from Sigma. Dowex 1 $\times$ 2 (200-400 mesh) and Biogel A-5m were from Bio Rad Laboratories.

Adenosine, inosine, hypoxanthine, uric acid, adenine, 2',3' cyclic AMP, 3' AMP, 3',5' cyclic AMP, 5' AMP were from Sigma (St. Louis, Mo., U.S.A.).

All other reagents were of analytical grade.

Assay of adenosine deaminase activity

Adenosine deaminase activity was assayed by the spectrophotometric method [19] in 3 ml of total volume, containing 0.04M Tris-HCl, pH8, 0.045 mM adenosine and appropriate amount of enzyme at room temperature. The decrease in absorbance at 265 nm was measured. An extinction coefficient of $-8060\ M^{-1}\ cm^{-1}$ was calculated for the complete conversion of adenosine to inosine at 265 nm.

Assay of nucleosidase activity

Nucleosidase activity was measured by the spectrophotometric method in 3 ml of total volume, containing 0.04 M Tris-HCl, pH 7.5, 0.05 M Phosphate (K_2HPO_4), 0.05 mM inosine, 5 µl xanthine oxidase (specific activity 0.5) and appropriate amount of enzyme at room temperature. The increase in absorbance at 293 nm was measured. An extinction coefficient of 12200 M^{-1} cm^{-1} was calculated for the complete conversion of inosine to uric acid.

Assay of xanthine oxidase activity

Xanthine oxidase activity was assayed as for nucleosidase activity, substituting inosine for hypoxanthine and without 0.05 M phosphate and xanthine oxidase.

Assay of adenase activity

Adenase activity was assayed as for adenosine deaminase activity, substituting adenine for adenosine.

Assay of 3' nucleotidase activity

3' nucleotidase activity was assayed in 0.5 ml of total volume containing 0.06 M Tris-HCl, pH 8.0, 1 mM 3' AMP, 5 mM $MgCl_2$ and suitable amount of enzyme for 30 minutes at 37° C. After the reaction was stopped with 0.5 ml 12 % TCA, the quantity of liberated inorganic phosphate was detected by the method of KING [20].

Assay of 2',3' cyclic nucleotide phosphodiesterase activity

2',3'-cyclic nucleotide phosphodiesterase activity was measured using two types of nucleotides, 2',3' cyclic AMP and 2',3, cyclic CMP. The activity for 2',3' cyclic AMP was assayed as for 3'-nucleotidase activity, substituting 3' AMP for 2',3 cAMP. 3' AMP formed by phosphodiesterase activity was then hydrolyzed by means of 3'-nucleotidase present intrinsically in the enzyme sample.

The activity for 2',3' cCMP was measured by spectrophometric method in a total volume of 1 ml containing 0.06 M Tris-HCl, pH 8.0; 1 mM cCMP, 5 mM $MgCl_2$ and appropriate amount of enzyme sample at room temperature. The increase in absorbance at 290 nm was measured. An extinction coefficient of 1068 M^{-1} cm^{-1} was calculated for the complete conversion of 2',3' cCMP to 3' CMP.

Assay of 5'-nucleotidase activity

5'-nucleotidase activity was assayed as for 3'-nucleotidase activity, substituting 3'-AMP for 5'-AMP.

Assay of cyclic 3',5'-cyclic nucleotide phosphodiesterase activity

3',5' cyclic nucleotide phosphodiesterase activity was assayed as for 3'-nucleotidase activity, substituting 3',5' cAMP for 3' AMP. 5' AMP formed was then hydrolyzed to adenosine and inorganic phosphate by means of 5'-nucleotidase present intrinsically in the enzyme sample.

One unit is defined as that amount of enzyme which converts 1 nmole of substrate to products per minute. Specific activity refers to units/mg of enzyme.

Spectrophotometric assays were performed using a Zeiss spectrophotometer PM 6 and Servogor 5 automatic recorder.

Paper chromatography

Descending paper chromatography with Whatman No. 1 paper was performed using H_2O, pH 10 as operating system for 7 hours at room temperature. After the chromatography, the spots were detected by a UV lamp.

Differential spectrophotometry

An appropriate cell with two identical compartments was used for the differential spectrophotometry. In the reference cell, the enzyme sample was in one compartment and buffer and substrate in another compartment. In the sample cell, all components of the reaction were in one compartment and only the buffer in the other compartment. Differential spectrophotometry was performed using a Cary Spectrophotometer 118.

Results

1) Bull seminal plasma

1. Gel filtration on Bio-Gel A-5 m column

1.5 ml of bull seminal plasma were applied on to a column of Biogel A-5 m (1.6 × 40 cm), equilibrated with 0.05 M Tris-HCl, pH 8.0, containing 5 mM $MgCl_2$. The activities of 3',5' cyclic phosphodiesterase and adenosine deaminase were detected as described in the legend

to Fig. 1. Adenosine deaminase activity was eluted together with main peak of 3',5' cyclic phosphodiesterase activity. This fraction corresponds to a molecular weight of about 2×10^6 daltons [14]. It is clear now that interference observed sometimes during the course

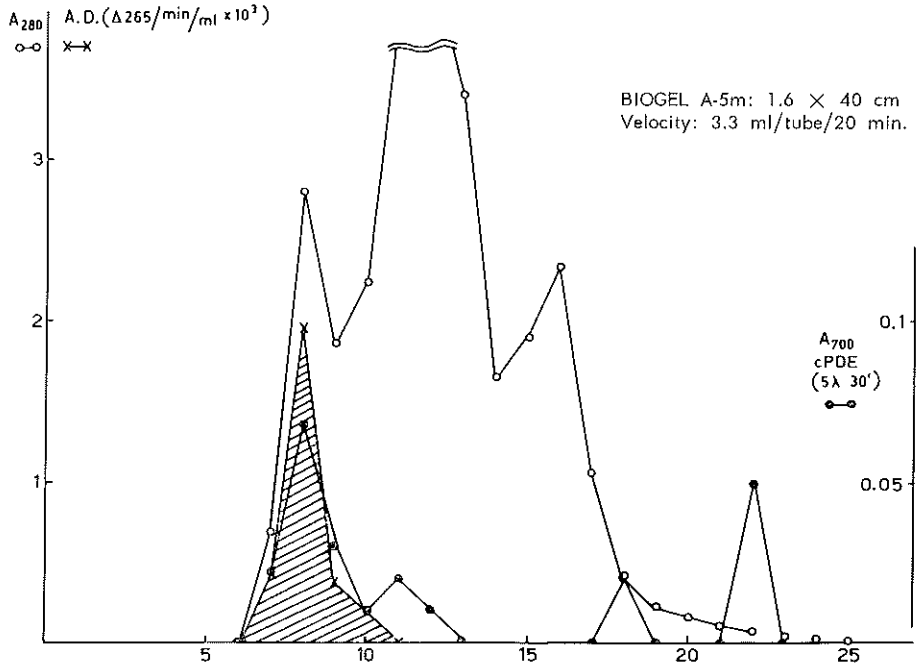


FIG. 1. - Gel-filtration of bull seminal plasma on Bio-gel A-5 m column.
Bio-gel A-5 m: 1.6 × 40 cm.
Velocity: 3.3 ml/tube/20 minutes.
For the adenosine deaminase assay, 1 ml from each tube was incubated as described in Methods.
For the 3',5' cyclic phosphodiesterase assay, 5 µl from each tube was incubated as described in Methods.

of radioactive assays for 3',5' cyclic phosphodiesterase activity [16] was caused by the presence of adenosine deaminase activity in the same fraction of cyclic phosphodiesterase.

2. *Identification of products from adenosine enzymatic digestion*

Ammonium sulfate precipitation of seminal plasma showed that adenosine deaminase activity was present chiefly in the supernatant from 60 % ammonium sulfate saturation (Table I). The recovery of the activity in this supernatant was more than 400 %. The 60 % am-

monium sulfate supernatant was used always in the following research.

TABLE I

	Volume (ml)	Proteins mg/ml	Proteins Total mg	Specific activity (units/mg)	Units	Recovery %
Bull seminal plasma	2	105	210	0.13	27	100
60 % ammonium sulfate precipitation	3	48	144	0.11	16	59
60 % ammonium sulfate supernatant	2.5	4.6	12	10	120	445

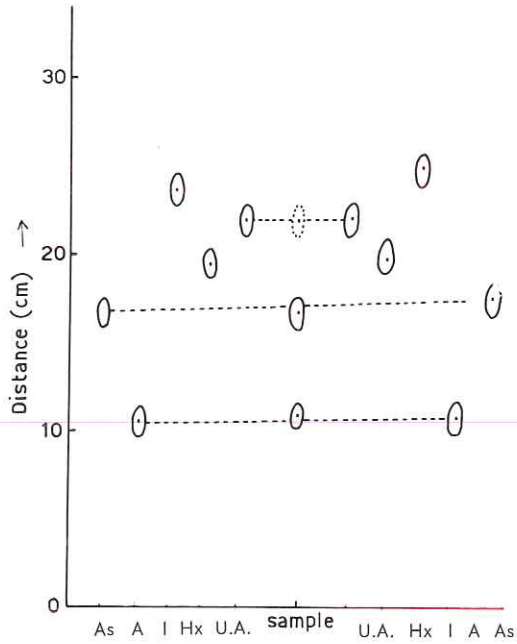


FIG. 2. - Paper chromatography of products from adenosine by 60 % ammonium sulfate supernatant.
As: adenosine, A: adenine, I: inosine, Hx: hypoxanthine, U.A.: uric acid.

2.5 ml of enzyme preparation were incubated with adenosine as described in MATERIALS AND METHODS. After 1 hour incubation, the reaction mixture was divided in two equal parts. One part was desalted by passing through Dowex 1 × 2 (200-400 mesh) (1.2 × 10 cm), equilibrated with water. After the elution with 0.1 N HCl from the column, the reaction products (including unreacted substrate) were analyzed by paper chromatography. After the chromatographic run,

three u.v. absorbing spots were detected, with Rf corresponding to adenine, adenosine and uric acid (Fig. 2).

The differential spectrophotometry of the other part of the reaction mixture showed clearly the absorption spectrum characteristic for uric acid (Fig. 3). This was confirmed by uricase digestion of the sample which produced the expected change in u.v. spectrum (Fig. 4).

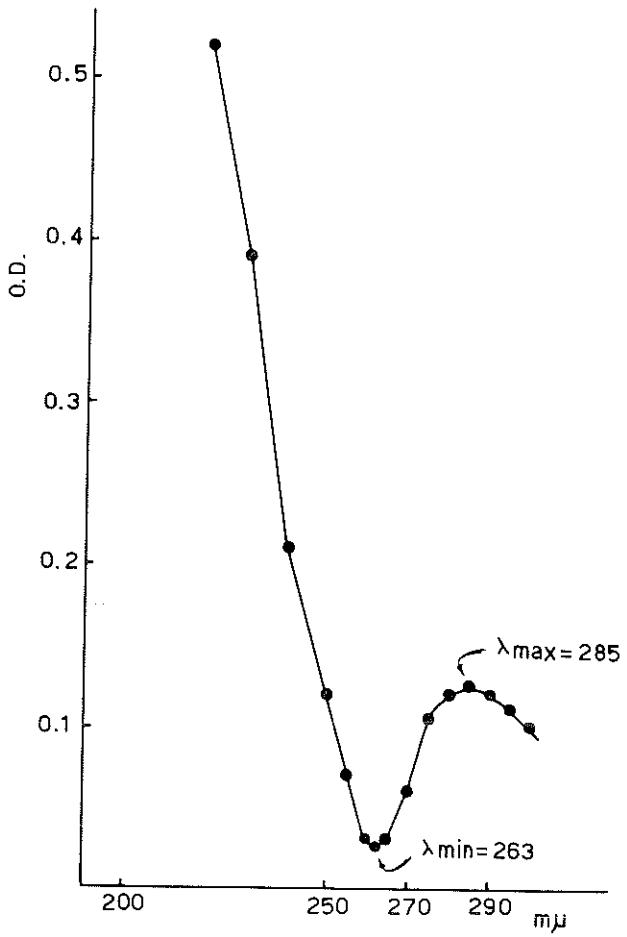


FIG. 3. - Differential spectrometry of products from adenosine by 60 % ammonium sulfate supernatant.

3. *Other nucleolytic enzymes involved in the adenosine deaminase fraction*

Some nucleolytic enzyme activities that could possibly be involved in the conversion of adenosine to uric acid were also assayed.

Another series of enzyme activities that convert cyclic purine nucleotides to corresponding purine nucleotides were also detected. The results are shown in Table II.

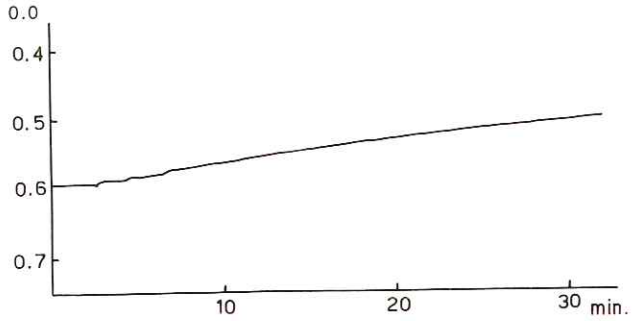


FIG. 4. - Uricase digestion of products from adenosine by 60 % ammonium sulfate supernatant.
1 µl of uricase was added to the reaction mixture at 25°. The increase in absorbance at 293 nm was recorded automatically.

TABLE II

Activity	Specific activity	Units/ml
Adenosine deaminase	27	2160
Nucleoside phosphorylase	4.9	392
Xanthine oxidase	0.25	20
3',5' cyclic phosphodiesterase *	5	400
5'-nucleotidase *	1000	80000
3'-nucleotidase	1	80
2',3' cyclic phosphodiesterase		
cyclicAMP	0.5	40
cyclicCMP	—	—
Adenase	0	0

* These two activities were determined using crude bull seminal plasma. All other activities were determined using 60 % ammonium sulfate supernatant.

TABLE III

	Volume (ml)	Proteins		Specific activity (units/mg)	Units	recovery (%)
		mg/ml	total mg			
Human seminal plasma	3	39	118	8.9	1050	100
60 % ammonium sulfate precipitation	36	2	72	11.5	830	79
60 % ammonium sulfate supernatant	23	1.2	28	0.7	20	2

TABLE IV

Activity	Specific activity			Units			Recovery (%)		
	H.S.P.*	60% Sup.**	60% Ppt.***	H.S.P.*	60% Sup.**	60% Ppt.***	H.S.P.*	60% Sup.**	Ppt.*** 60%
Adenosine deaminase	9	0.7	12	1060	20	860	100	2	81
Nucleoside phosphorylase	0.15	0.07	0.37	18	2	27	100	11	150
Xanthine oxidase	0.86	0.06	5	102	1.7	360	100	2	353
3',5' cyclic phosphodiesterase	1.5	0.21	1.3	176	6	93	100	3	53
5'-nucleotidase	90	34	133	10600	950	9500	100	9	99
3'-nucleotidase	1200	440	1350	141600	12300	97000	100	9	68
2',3' cyclic phosphodiesterase cyclic AMP	12	0.6	12	1400	17	860	100	1	61
cyclic CMP	0	10.4	0	0	292	0	—	—	—
Adenase	4	0.2	5	470	6	360	100	1	77

* Human seminal plasma.
** 60 % ammonium sulfate supernatant.
*** 60 % ammonium sulfate precipitate.

2) Human seminal plasma

Human seminal plasma was fractionated by ammonium sulfate precipitation as for bull seminal plasma (Table III) and some nucleolytic enzyme activities were assayed in the crude seminal plasma, in the supernatant and in the precipitate from 60 % saturation. The results are shown in Table IV.

Conclusions

Recently, Leone and Suzuki [14] have partially purified a phosphodiesterase specific for 3',5' cyclic nucleotides from both bull seminal plasma and vesicles. This enzyme can hydrolyze specifically 3',5' cyclic nucleotides forming the corresponding 5'-nucleotides. These 5'-nucleotides so formed are then split immediately by the 5'-nucleotidase which is present in large amounts in the enzyme preparations, to give the corresponding nucleosides. Until now, the metabolism of the nucleotides has been studied principally using bull seminal vesicles and very little is known about the same reactions occurring in bull seminal plasma.

This research, as shown in Results, has revealed the presence of various nucleolytic enzyme activities responsible for the conversion of cyclic adenosine phosphate to adenosine and, in turn, to uric acid and adenine. The enzymes that are involved in the metabolic pathway from adenosine to uric acid are adenosine deaminase that converts adenosine to inosine, nucleoside phosphorylase that splits inosine to hypoxanthine and ribose 1-phosphate and xanthine oxidase that oxidizes hypoxanthine to xanthine and to uric acid. Although these three enzyme activities have been detected already by Leone [1, 2] in bull seminal vesicles, this is the first time that these enzyme activities are shown to be present also in bull seminal plasma. The presence of these three enzyme activities can explain the content of uric acid in bull seminal plasma [18]. The presence of adenine in the reaction mixture of adenosine deaminase fraction (Results 1-2) is an indication that nucleoside phosphorylase can react also on adenosine, splitting it to adenine and ribose 1-phosphate. Given the absence of adenase activity in that fraction, adenine was left unreacted in the reaction mixture.

The presence of 3'-AMP nucleotidase activity and 2',3'-cyclic AMP phosphodiesterase activity has been also shown. These activities have been detected chiefly in plants and microorganisms [21-24]. For the moment, it is not clear whether 3'-AMP nucleotidase activity is accom-

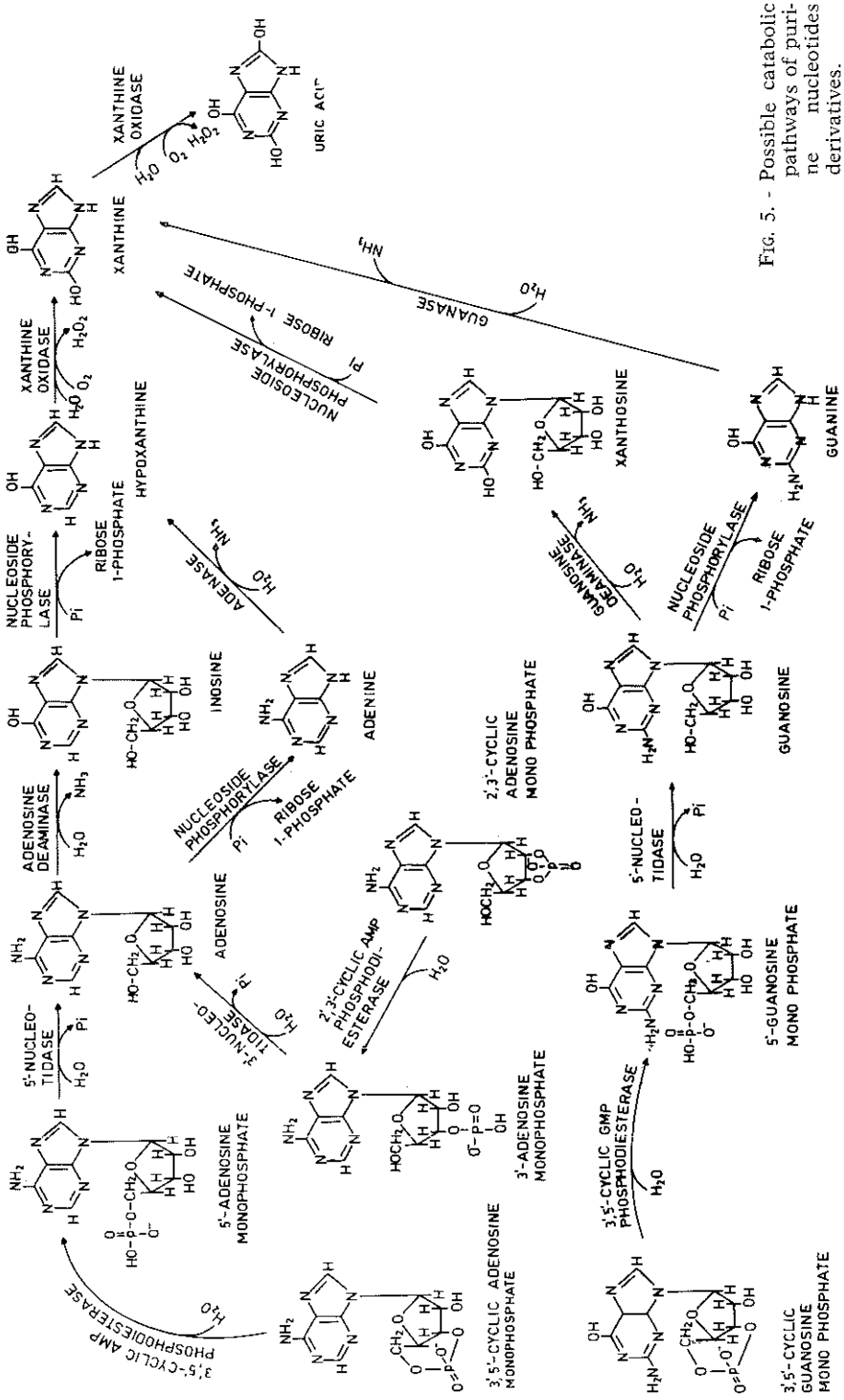


FIG. 5. - Possible catabolic pathways of purine nucleotides derivatives.

panied by 2'-3'-cyclicAMP phosphodiesterase activity intrinsically in seminal plasma as in the case of microorganisms [25-30].

A number of nucleolytic enzume activities have been shown to be present also in human seminal plasma in this research. It appears particularly interesting the presence of adenase activity, because this activity has not been identified till now in the animal kingdom. However, further research is needed in order to better defining and characterizing the presence of this enzyme. Another point to be mentioned, regarding the human seminal plasma, is the high level of 3'-nucleotidase activity, as compared to the high level of 5'-nucleotidase in bull seminal plasma. As this enzyme is seldom found in animal tissues, its presence in both bull and human seminal plasma is almost exceptional.

The surprisingly high recovery of adenosine deaminase, nucleoside phosphorylase and xanthine oxidase after ammonium sulfate precipitation are suggestive of the presence of some inhibitor(s), occurring in the crude secretions.

Another interesting feature is the evidence that at least some of the nucleolytic enzyme activities, that is, 3',5'-cyclic phosphodiesterase, 5'-nucleotidase and adenosine deaminase, are present as aggregated oligomers with molecular weights in excess of 2 million daltons.

Summarizing from the data obtained from human and bull seminal plasma, the following metabolic pathways could be postulated (Fig. 5).

For the moment, the physiological significance of the presence of the nucleolytic enzyme activities and of uric acid in seminal fluids is not clear.

REFERENCES

[1] Leone E. and Santoianni P., Ital. J. Biochem., **6**, 212 (1957).
[2] Leone E., Boll. Soc. Ital. Biol. Sper., **29**, 513 (1953).
[3] Heppel L. A. and Hilmoe R. J., J. Biol. Chem., **188**, 665 (1951).
[4] Leone E. and Bonaduce L., Biochim. Biophys. Acta, **31**, 292 (1959).
[5] Yuan J. H. and Anderson B. M., J. Biol. Chem. **246**, 2111 (1971).
[6] Libonati M., Farina B. and Leone E., Biochem. J., **89**, 7P (1963).
[7] Farina B., Curti B. and Leone E., Boll. Soc. Ital. Biol. Sper., **43**, 27 (1967).
[8] Libonati M. and Leone E., Ital. J. Biochem., **11**, 135 (1962).
[9] Libonati M. and Leone E., Biochem. J., **84**, 80P (1962).
[10] Brownlee S. T. and Wheat R. W., J. Biol. Chem., **125**, 3567 (1960).
[11] D'Alessio G., Floridi A., Di Prisco R., Pignero A. and Leone E., Eur. J. Biochem., **26**, 153 (1972).
[12] Floridi A. D'Alessio G. and Leone E., Eur. J. Biochem., **26**, 162 (1972).
[13] Leone E., Suzuki H., Greco L., Parente A., Farina B. and La Montagna R., Proceedings of the 8th Meeting of the Federation of European Biochemical Societies, 1972 Abstract 259.

[14] SUZUKI H. and LEONE E., 1° Congr. Naz. Soc. Ital. Biochimica, 1975 Abstract Pb 27.
[15] SUZUKI H. and LEONE E., 2° Congr. Naz. Soc. Ital. Biochimica, 1976, Abstract 75.
[16] SUZUKI H., 3° Congr. Naz. Soc. Ital. Biochimica, 1977, Abstract c. 1.
[17] MANN T., Biochem. J., **39**, 451 (1945).
[18] LEONE E., Quad. Scz. Perug., S.I.B.S. No. 10 (1953).
[19] KALCKAR H. M., J. Biol. Chem., **167**, 445 (1947).
[20] KING E. J .,Biochem. J., **26**, 292 (1932).
[21] SHUSTER L. and KAPLAN N. O., « Methods in Enzymology », vol. 2, p. 551 (1955).
[22] WALTERS T. and LORING H. S., J. Biol. Chem., **241** 2870 (1966).
[23] HANSON D. M. and FAIRLEY F. L., J. Biol. Chem., **244**, 2440 (1969).
[24] IGARASHI S. and KAKINUMA A., Agr. Biol. Chem. (Tokyo), **26**, 218 (1962).
[25] ANRAKU Y., J. Biol. Chem., **239**, 3412 (1964).
[26] CENTER M. S. and BEHAL F. J., Biol. Chem. **243**, 138 (1968).
[27] UEMOTO T. and HAYASHI M., Biochim. Biophys. Acta, **171**, 89 (1969).
[28] SHIMADA K. and SUGINO Y., Biochim. Biophys. Acta., **185**, 367 (1969).
[29] NEU H. C., Biochemistry, **7**, 3774 (1968).
[30] NEU, H. C. and CHOU J., J. Bacteriol., **94**, 1934 (1967).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Leone, M. Covello e R. A. Nicolaus.

Zeoliti e zeolitizzazione nell'area vulcanica Campana e Laziale

Relazione del socio emerito ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 3 dicembre 1977)

Nel 1974 è stato tenuto a Roma presso l'Accademia Nazionale dei Lincei un convegno nazionale sulle zeoliti; nel 1980 Napoli avrà l'onore di ospitare il triennale Congresso Internazionale sulle Zeoliti. Vi è quindi un'evidente progressione, non solo per quanto riguarda il livello della riunione che da nazionale diviene internazionale, ma anche per la sede, perché Napoli metterà a disposizione dei graditi ospiti, oltre alle attrezzature e alle attrattive sue e dei dintorni, anche un complesso di situazioni, quale nessuna altra grande città potrebbe offrire, che mostreranno nel modo più evidente che cosa sia una zeolitizzazione massiva e quali conseguenze comporti. Insomma i congressisti si troveranno in un ambiente tipicamente zeolitico e potranno valutare meglio la problematica della zeolitizzazione naturale.

Alle ricerche connesse con tale problematica gli studiosi napoletani hanno portato — e tuttora portano — i loro contributi e questi sono stati per buona parte pubblicati sui nostri rendiconti ed atti. Considero perciò mio dovere riferire brevemente sull'argomento all'Accademia che è direttamente interessata alla questione.

Per ben comprendere il ruolo della zeolitizzazione nell'area vulcanica campana e laziale occorre tener conto — nell'ordine — del seguente trinomio: pozzolana/zeoliti/tufo litoide.

Come « pozzolana », dal punto di vista scientifico, noi intendiamo una piroclastite (cioè una roccia piroclastica) costituita per la massima parte da frammenti molto minuti di vetro vulcanico, oppure da pomici e scorie vetrose. Il vetro vulcanico, quando presenta una superficie assai estesa, è una sostanza facilmente reattiva e infatti, come è noto, le pozzolane reagiscono su una soluzione concentrata di idrossido di calcio, trasformandola in un materiale da presa idraulico. Non tutte le pozzolane — se diamo al termine il significato precedentemente usato — sono ugualmente reattive: presentano una

reattività particolarmente elevata le pozzolane trachitiche (quali sono appunto le pozzolane flegree) e leucitiche (pozzolane laziali). In pratica il termine « pozzolana » è riservato a queste piroclastiti vetrose particolarmente reattive e i prototipi, come indica il nome stesso (« lapis puteolanus »), sono appunto le nostre.

Non sono invece reattive le piroclastiti, anche trachitiche, costituite essenzialmente da frammenti cristallini. Non è quindi una pozzolana, in senso scientifico e tecnico, il « cinerazzo », piroclastite molto diffusa in Campania, che è in gran parte sanidinica.

Un fenomeno naturale, che è in un certo senso il corrispondente dell'« idrauliticizzazione » della calce, è la reazione del vetro vulcanico alcalino coll'acqua. In un primo tempo si ha la parziale idrossilizzazione di tetraedri silicio/ossigeno e solubilizzazione degli alcali, poi il risultato è diverso a seconda del drenaggio. Se vi è drenaggio, gli alcali sono dilavati e si giunge a fillosilicati di Al, cioè a montmorillonite o, più spesso, ad halloysite, mentre se il drenaggio manca o è scarso, gli alcali, almeno per la maggior parte, rimangono e, col riassetto dei tetraedri, si originano quei tectoallumosilicati idrati di Ca, K, Na che sono appunto le zeoliti. Le zeoliti più comuni nelle piroclastiti sono, secondo la nostra esperienza, la cabasite e la phillipsite. In qualche caso non manca l'analcime.

Non è forse superfluo ricordare che nella tecnica le zeoliti detengono oggi un posto di primo piano come « cristalli laboratorio » per le singolari proprietà chimico/fisiche di cui godono a causa della loro struttura cristallina a canali. Le proprietà fondamentali delle zeoliti — facoltà di variare, senza « invecchiare », il loro contenuto in H_2O, potere adsorbente, facilità di scambio ionico — erano note già da gran tempo, ma il massiccio sfruttamento di tali proprietà (e di altre ancora, come l'attitudine alla catalisi) è recente. Lo sviluppo è stato così rapido e imponente che ormai si ricorre sempre più alle zeoliti sintetiche, perché le zeoliti sono tra i non numerosi silicati sintetizzabili senza difficoltà. Le zeoliti sintetiche non sempre hanno il loro corrispondente in natura e, talvolta, nelle applicazioni, sono preferite alle naturali: queste, comunque, conservano la loro importanza tecnica.

Per quanto riguarda la giacitura delle zeoliti naturali, è stata per lungo tempo considerata tipica quella nelle geodi delle rocce basaltiche, la quale è di evidente origine idrotermale; a questo tipo appartiene la massima parte dei campioni nei nostri musei. Ne era, tuttavia, conosciuta da tempo anche un'altra, meno localizzata, in quel tufo basaltico di origine sottomarina che è la « palagonite ». Sono però andate sempre aumentanlo le segnalazioni di zeoliti in rocce sedimentarie, anche non vulcaniche, come le argille dei fondi

oceanici, ma si tratta di cristalli sporadici o di limitate concentrazioni, oppure, al massimo, di livelli zeolitici. La prima segnalazione di una « zeolitite » (cioè di una roccia in cui le zeoliti rappresentano un costituente mineralogico fondamentale) riguarda l'area flegrea e risale al 1952. La zeolitite è quella notissima roccia piroclastica conosciuta come « tufo giallo napoletano », per la quale ho avuto la fortuna di poter segnalare io stesso, durante il rilevamento della serie piroclastica napoletana, al margine della zona urbana orientale di Napoli e precisamente ai Ponti Rossi, il passaggio « laterale » molto evidente, dalla pozzolana al tufo, con un termine intermedio, il cosidetto « mappamonte ». È stato così possibile stabilire che il tufo deriva dalla pozzolana e che tale passaggio comporta un fortissimo aumento nel tenore di H_2O che passa dal 5 % al 13 o 14 % (per un terzo H_2O^-), nell'ossidazione di FcO e in una sensibile diminuzione degli alcali, mentre gli altri costituenti chimici rimangono quasi invariati, cosicché il tipo petrografico originario è ancora riconoscibile.

A questo punto riassumo le ricerche del nostro collega Sersale, le quali sono state pubblicate per la maggior parte sui nostri rendiconti e traggono lo spunto dai materiali dei Ponti Rossi. Come primo risultato Sersale ha trovato che la differenza fondamentale tra pozzolana e tufo è che la pozzolana è essenzialmente vetrosa, mentre il tufo è zeolitico. Questa però non era ancora una novità: infatti che il tufo napoletano contenesse zeoliti era già stato mostrato da Norin ed io stesso, nel lontano 1938, avevo riscontrato (e ciò allora costituiva un fatto nuovo) la presenza di zeoliti in alcune « pozzolane litoidi » del Lazio. Sersale però ha potuto stabilire con mezzi fisici (indagini coi raggi X e analisi termiche) e chimici (determinazione del potere di scambio) che la presenza di zeoliti (cabasite e phillipsite) nel tufo è massiccia e che la tufizzazione della pozzolana è appunto l'effetto di una zeolitizzazione su larga scala. Sersale ha proceduto, partendo dalla pozzolana, alla sintesi del tufo, trattando la pozzolana, a temperatura moderata, con soluzioni alcaline, provocando così la tufizzazione della pozzolana stessa. La sintesi è stata rapidissima, ma certo, poiché era necessaria un'alta velocità di reazione, la temperatura e la concentrazione degli alcali erano molto maggiori che nelle condizioni naturali; indubbiamente, in linea generale, la sintesi però è valida. In condizioni più severe, sempre secondo le esperienze di Sersale, si giunge alla formazione del sanidino e ciò può aver relazione con un altro processo naturale — la pipernizzazione — che qui però non interessa.

Dopo di che, Sersale ed io ci siamo messi alla ricerca di altre zeolititi, ed io, in particolare, di altre doppiette pozzolana/tufo. Le zeolititi non sono una esclusività flegrea. Zeolititi si sono dimostrati

il « tufo carpato » (trachitico) del Monte Vulture in Lucania, il « peperino » (leucititico) e il « tufo lionato » (leucotefritico) del Vulcano Albano, il « tufo giallo tiberino » (leucotefritico) dei Vulcani Sabatini, il « tufo rosso a scorie nere » (da leucofonolitico a leucotefritico) del Vulcano di Vico, mentre ricchissimi di sanidino sono il « nenfro » dei Vulcani Vulsini e il nostro « tufo pipernoide ».

È singolare e forse unica al mondo la grande varietà di zeolititi in un'area vulcanica relativamente ristretta, come è quella del Lazio e della Campania. Le zeoliti presenti sono però sempre cabasite e phillipsite.

Fuori d'Italia si sono rivelati zeolitici il « tufo delle Canarie » (trachitico) e il « trass » renano (pure trachitico), ma si tratta di semplici saggi, perché ormai l'elenco delle zeolititi nel mondo si è molto accresciuto, tanto che ormai possiamo considerare le zeoliti come uno dei più diffusi gruppi di minerali epigenetici nella litosfera.

Per quanto invece riguarda le « doppiette » l'esempio migliore è rimasto quello tufo napoletano/pozzolana. Solo in questi ultimissimi tempi ho potuto acquisire un altro esempio che riguarda il « tufo verde ischitano » alla spiaggia dei Maronti a Ischia.

Così abbiamo completato il trinomio pozzolana/zeoliti/tufo. Vi è però da accennare ancora a qualche altro argomento che interessa noi e potrà interessare i congressisti.

L'effetto tipico della zeolitizzazione naturale è, come si è visto, la tufizzazione. Poiché però nelle nostre zone vulcaniche coesistono pozzolane e tufi, è chiaro che non tutte le pozzolane si sono tufizzate e questa zeolitizzazione selettiva è un fatto che ha avuto grandissime ripercussioni storiche.

Non può certo meravigliare, per quanto si è detto in precedenza, che il cinerazzo non si zeolitizzi, ma non è facile spiegare la mancata tufizzazione delle pozzolane di Astroni e di Baia. Secondo G. De Lorenzo è questione di età, ma il discorso non è né breve né facile; ad ogni modo basta ricordare che le ceneri delle colate piroclastiche (presumibilmente fredde) che hanno investito e sommerso Ercolano (età assoluta appena 1900 anni) sono già zeolitizzate (E. Franco).

L'esempio più indicativo è però quello del « tufo lionato » nell'ambito delle pozzolane scoriacee albane. Di tali pozzolane si hanno alcune formazioni sovrapposte, assai simili, anche chimicamente ed il tufo lionato, petrograficamente non è diverso ed era anch'esso in origine una pozzolana scoriacea. Questa pozzolana però si è completamente tufizzata mentre le altre — tanto le inferiori che le superiori — non lo sono affatto, o lo sono assai limitatamente. Forse la causa del differente comportamento — che appare paradossale — è un diverso contenuto iniziale d'acqua (che però non possiamo dimo-

strare) oppure qualche particolarità chimica o ambientale, che ancora ci sfugge.

Non si sfuggono invece le conseguenze della zeolitizzazione selettiva. Infatti le formazioni tufacee intercalate alle altre vulcanoclastiti incoerenti formano, per la maggiore resistenza all'erosione, pareti, costoni, placche che hanno rappresentato centri di attrazione per l'insediamento umano. Un centro abitato costruito sul tufo godeva del vantaggio di una buona difendibilità e inoltre disponeva sul posto di un materiale utilizzabile come pietra da costruzione e facilmente scavabile. Le grotte scavate nel tufo sono termostatiche e — per la natura zeolitica del tufo stesso — igrostatiche e quindi erano pienamente utilizzabili come abitazioni e stalle.

Napoli è l'esempio più tipico di grande città costruita sul tufo e ubicata proprio in base alla topografia e alla morfologia determinata dalla presenza del tufo. È anche il migliore esempio delle conseguenze — che i congressisti potranno rilevare facilmente — di un sottosuolo tufaceo: conseguenze che sono in genere buone, ma in parte anche cattive. Un altro esempio illustre dell'influenza determinante della « tufizzazione selettiva » nella fondazione delle città è la Roma primitiva, quella del Campidoglio e del Palatino. I due storici colli sono appunto placche di tufo lionato ubicate in quello che è il « punto chiave » dell'Italia peninsulare.

Ci auguriamo, prima del 1980, di poter individuare la causa o le cause di questa « tufizzazione selettiva », un fenomeno che ha avuto così profonde ripercussioni storiche!

Le zeoliti di alcuni blocchi della « Breccia Museo » di Punta della Lingua (Isola di Procida)

Nota di MAURIZIO DE' GENNARO,
ENRICO FRANCO, GIUSEPPE PARACUOLLO e CESARE PORCELLI
presentata dal socio emerito ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 3 dicembre 1977)

RIASSUNTO. — Sono state studiate le zeoliti rinvenute in alcuni blocchi lavici della Breccia di Punta della Lingua. Si è notata la presenza nelle geodi di Analcime, Mordenite, e Thomsonite a volte associate a Calcite. Si riportano i dati chimici, ottici. roentgenografici e termici e si illustrano i rapporti paragenetici fra le varie fasi.

SUMMARY. — Zeolites found in some ejecta from « Breccia di Punta della Lingua » formation have been studied. In geodes Analcime, Mordenite, Thomsonite have been seen, Calcite is also present. Chemical, optical, thermal and X ray data have reported. Paragenesis is discussed.

Le indagini condotte sui proietti del Vesuvio e delle brecce dovute all'attività dei vulcani Flegrei hanno portato al rinvenimento, tra i prodotti dovuti all'attività esplosiva del vulcano di Punta della Lingua nell'isola di Procida, di particolari blocchi lavici ricchi in zeoliti [8, 15, 16].

I proietti di tale tipo, che raggiungono anche dimensioni ragguardevoli, macroscopicamente si presentano di colore bruno per l'alterazione abbastanza spinta della pasta di fondo nella quale spiccano abbondanti cavità le cui pareti risultano tappezzate da individui di diverse fasi cristalline delle quali all'osservazione macroscopica sono facilmente riconoscibili solo la calcite e l'analcime; più rari sono degli aggregati di cristalli aghiformi e altri di cristalli ad abito tabulare.

Al microscopio polarizzatore la roccia presenta una massa di fondo ipocristallina nella quale spiccano fenocristalli di pirosseno augitico, plagioclasio, l'olivina si presenta profondamente alterata in minerali argillosi e idrossidi di ferro, subordinatamente è presente anche l'analcime in cristalli piuttosto minuti pseudomorfi della leucite ed infine magnetite.

La matrice presenta una profonda argillificazione sopratutto a danno della frazione vetrosa, i numerosi vacuoli si presentano tappezzati e a volte completamente riempiti di analcime, calcite, mordenite con il caratteristico abito aciculare e thomsonite in cristalli appiattiti.

Il presente studio è rivolto principalmente alla conoscenza delle zeoliti presenti nella roccia descritta anche perché di queste fasi la mordenite è alquanto rara per le rocce vulcaniche in genere e del tutto nuova per la Campania.

Risultati sperimentali

Tutte le indagini sono state effettuate utilizzando per ogni fase, quei cristalli che non presentavano patine o incrostazioni rossicce e che fossero il più possibile incolori; l'analcime studiata è quella di origine primaria che si presenta costantemente limpida e incolore non essendo stato possibile isolare i minuti cristalli presenti nella pasta di fondo e derivanti da analcimizzazione della leucite.

In tabella I si riportano le analisi dei due proietti studiati dei quali il primo è caratterizzato da una particolare abbondanza di mordenite e di thomsonite il secondo.

Tabella I

SiO_2	49.94	46.86
Al_2O_3	16.80	17.59
TiO_2	0.45	0.40
Fe_2O_3	4.20	4.21
FeO	1.08	1.29
MnO	0.12	0.15
MgO	4.88	4.88
CaO	6.07	9.30
BaO	0.10	0.12
Na_2O	5.01	6.04
K_2O	2.02	1.77
H_2O^+	9.17	6.20
H_2O^-	0.10	1.40
	99.94	100.21

I contenuti in H_2O denotano una argillificazione abbastanza diffusa della massa che, come si vedrà, è stata evidenziata anche dallo studio termico e roentgenografico.

TABELLA II

	1	2	3	4	5	6
SiO_2	52.80	54.19	66.03	66.06	38.01	37.44
Al_2O_3	23.03	23.12	12.08	12.32	31.86	31.57
Fe_2O_3	0.03	—	0.09	—	0.02	0.08
MgO	0.01	0.10	0.06	0.36	0.01	—
CaO	2.80	1.54	2.20	3.02	13.72	13.80
SrO	0.20	—	0.05	—	0.12	—
BaO	0.02	—	0.06	—	0.08	—
Na_2O	11.67	11.08	4.25	3.86	2.95	3.98
K_2O	0.55	1.62	0.23	0.50	0.01	0.04
Rb_2O	tr	—	tr	—	—	—
H_2O^+	8.20	8.20	14.90	9.19	13.40	13.22
H_2O^-	1.00			4.68		
	100.12	99.85	99.95	99.99	100.18	100.13

	numero degli ioni delle basi per 7 (0)		numero degli ioni delle basi per 48 (0)		numero dtgli ioni delle basi per 80 (0)	
Si	2.2900	1.995	19.77	19.61	20.26	20.04
Al	1.1800	1.030	4.26	4.31	20.01	19.92
Fe	0.0005	—	0.02	—	0.01	—
Mg	0.0005	0.006	0.03	0.16	0.01	—
Ca	0.1305	0.061	0.71	0.96	7.84	7.92
Sr	0.0005	—	0.01	—	0.04	—
Ba	—	—	0.01	—	0.02	—
Na	0.9836	0.791	2.47	2.22	3.05	4.13
K	0.0302	0.076	0.09	0.10	0.01	0.03
H_2O	1.3321	2.014	14.88	13.73	23.82	23.60
R	1.14	0.934	3.32	3.53	10.97	12.08
Ca	11.48	7.21	22.99	31.73	72.11	65.56
Na	85.88	85.15	74.40	62.89	27.80	34.19
K	2.64	7.64	2.71	5.38	0.09	0.25
$\frac{Si}{Al+Fe}$	1.94		4.62		1.01	

1) Analcime Punta della lingua; 2) Analcime Is. Ciclopi [7]; 3) Mordenite Punta della Lingua; 4) Mordenite Custer County; 5) Thomsonite Punta della lingua; 6) Thomsonite New York.

Nella tabella seconda sono raggruppate le analisi delle tre fasi zeolitiche e per ognuna se ne riporta per confronto una desunta dalla letteratura [5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 24].

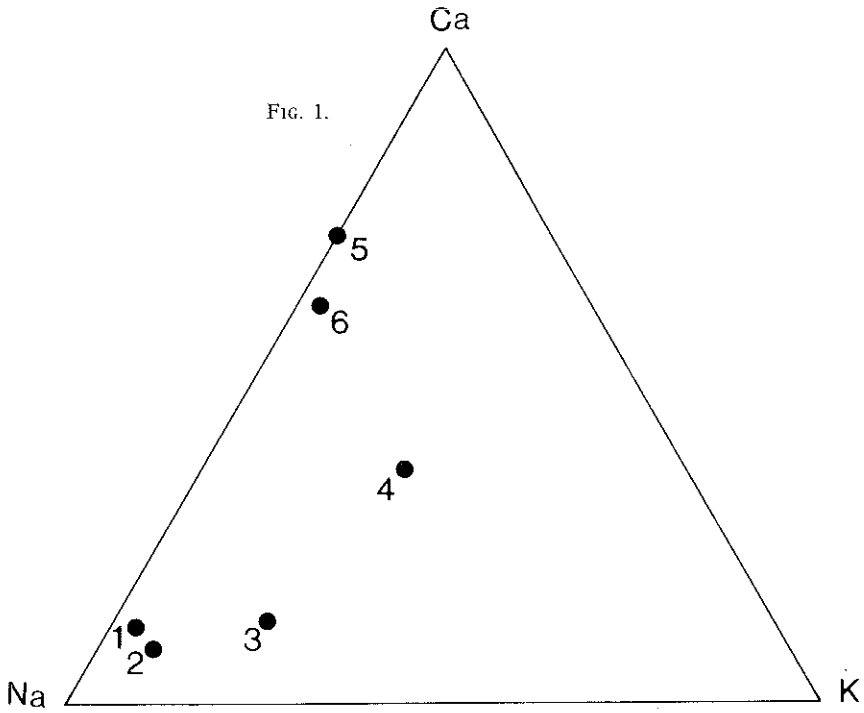


FIG. 1.

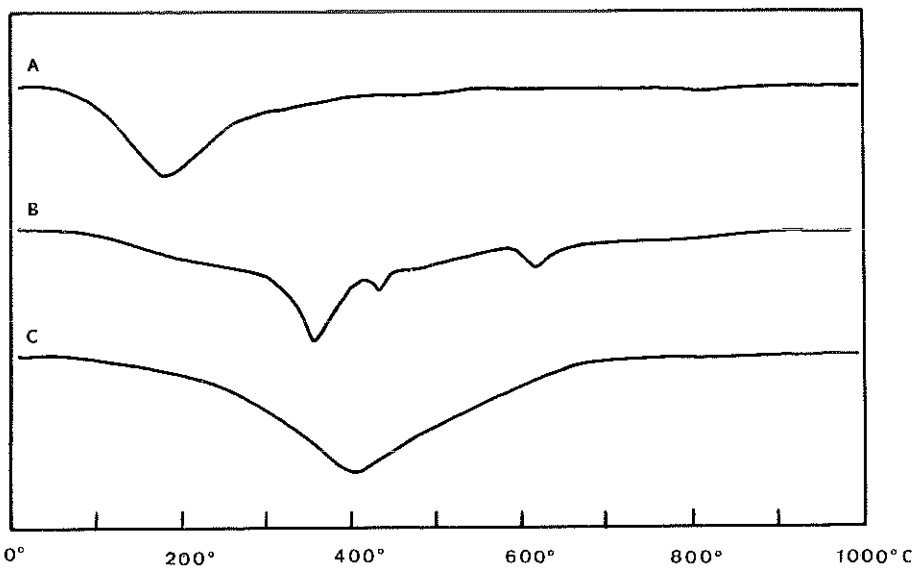


FIG. 2. - Curve D.T.A.: A - Mordenite; B - Thomsonite; C - Analcime.

I dati nel loro insieme poco si discostano da quelli di zeoliti provenienti da altri distretti ad eccezione di piccole variazioni come per esempio il maggiore contenuto in CaO dell'analcime e di Na_2O nella Mordenite o il basso tenore di Na_2O nella Thomsonite, tutte compatibili con l'ambiente genetico di tipo non sedimentario come

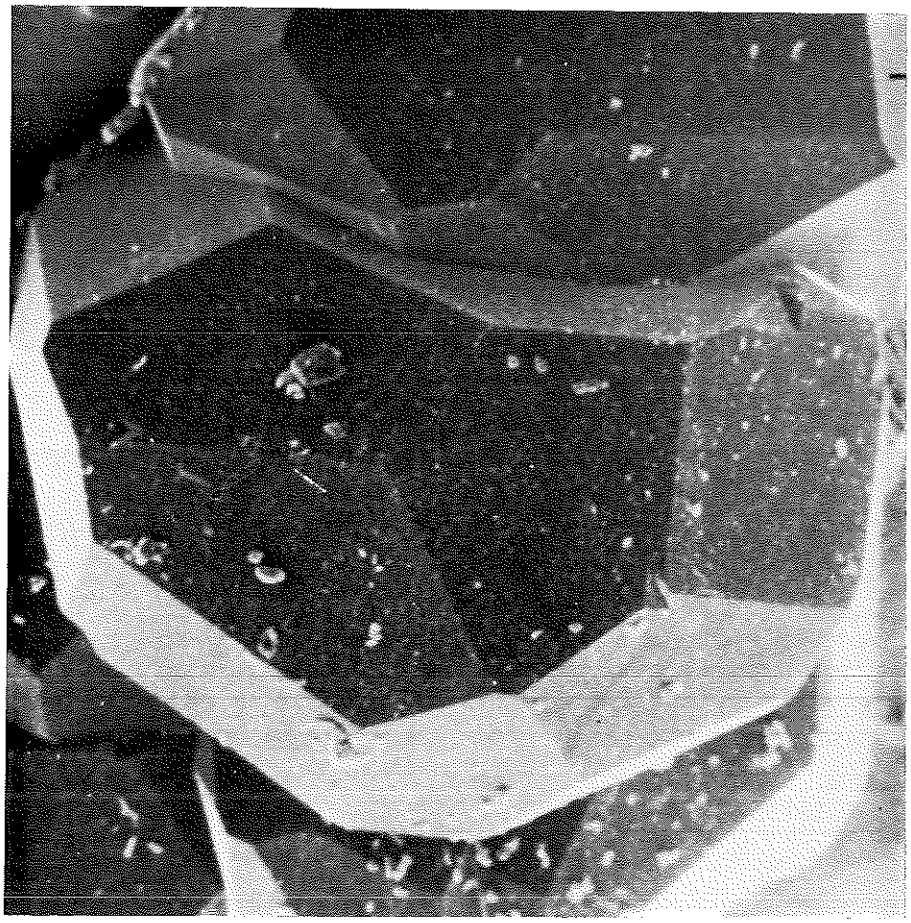


FIG. 3. - Analcime 50 X

si può osservare anche considerando i valori del rapporto Si/Al + Fe [2, 4, 5, 21, 22, 23, 27].

Anche il diagramma triangolare Na, Ca + Mg + Ba + Sr, K + Rb evidenzia quanto detto non discostandosi ciascuna fase dal proprio campo di stabilità (Fig. 1).

Le analisi termodifferenziali eseguite sui vari campioni impiegando un'apparecchiatura Rigaku Denki con incremento della tem-

peratura di 10° al minuto hanno fornito le curve termiche riportate in figura 2.

I dati di diffrazione delle polveri ai raggi X dei campioni studiati e di alcuni termini di confronto sono riportati in tabella III [17, 18, 19, 20, 23].



FIG. 4. - Mordenite 500 X

Per le zeoliti di Procida si riportano i valori di d (Å) osservati e quelli risultati dopo affinamento utilizzando un programma di A. Alberti [1, 3, 11, 14, 23, 25, 26, 28]; le costanti ottenute sono:

Analcime $a = 13{,}674 \pm 0.0003$ Å

$V = 2556.74$ Å^3 $D = 2.25$

Mordenite	a = 18.1059	V = 2777,43 Å^3
	b = 20.3819	D = 2.10
	c = 7.5263	

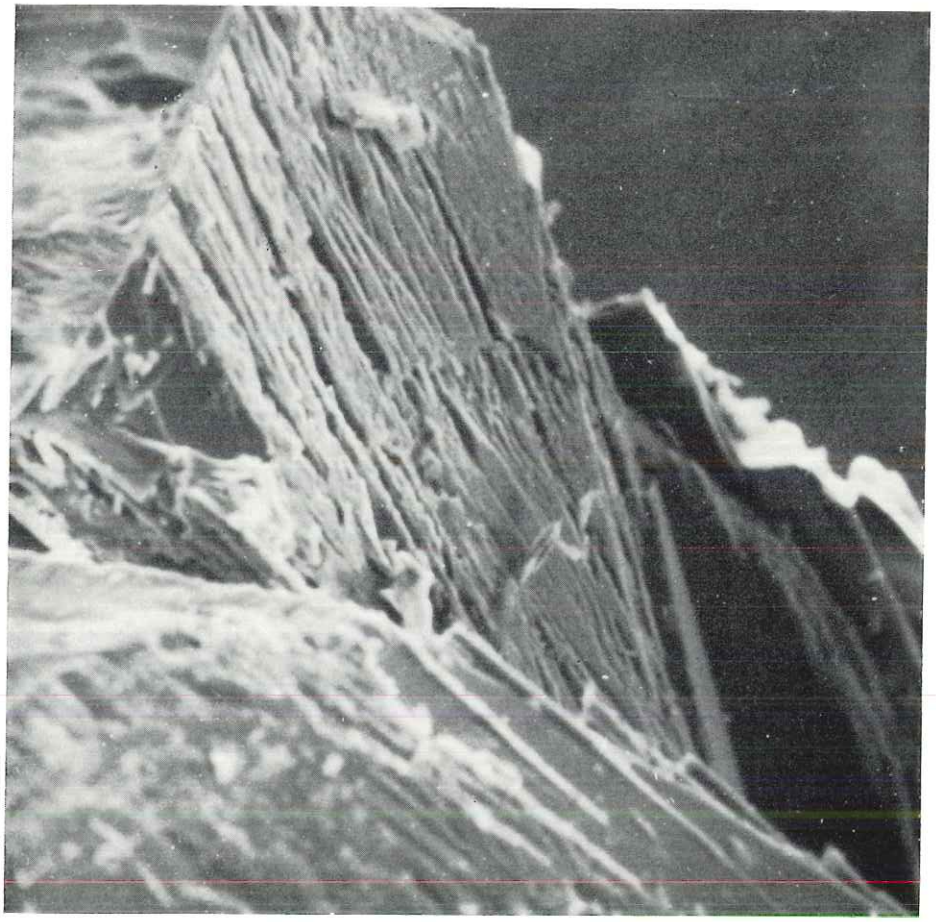


FIG. 5. - Thomsonite 400 X

Thomsonite	a = 13.0928	V = 2249,27 Å^3
	b = 13.0896	D = 2.38
	c = 13.1245	

In considerazione di quanto osservato si può sottolineare che i blocchi studiati rappresentavano in origine frammenti di colate laviche di eruzioni precedenti alla messa in posto della « Breccia

TABELLA III

1			2	3				4	5				6
hkl	d (Å)$_{oss.}$	I/I$_1$	d (Å)	hkl	d (Å)$_{oss.}$	d (Å)$_{cal.}$	I/I$_1$	d (Å)	hkl	d (Å)$_{oss.}$	d (Å)$_{cal.}$	I/I$_1$	d (Å)
211	5.57	f	5.61	110	13.71	13.5402	md	13.58	200 020	6.52	6.5464	ff	6.6
220	4.82	m	4.86	020	10.17	10.0600	dd	10.26	102	5.87	5.8666	m	5.9
321	3.64	d	3.68	200	9.07	9.0529	f	9.07	112	5.38	5.3535	dd	5.37
402	3.42	ff	3.43	111	6.59	6.5779	m	6.59	220 022	4.62	4.6284	f	4.63
		dd	3.21	130	—	—	d	6.40	122	4.37	4.3685	mf	4.38
332	2.91	f	2.92	021	6.07	6.0542	dd	6.07	130 310	4.13	4.1394	mf	4.14
422	2.78	d	2.82	310	5.84	5.7875	d	5.80	ni	—	—	dd	3.95
431	2.67	m	2.69	131	4.84		dd	4.88	222	3.78	3.7823	dd	3.79
521	2.50	m	2.51	311	—		dd	4.60	132 312	3.50	3.5011	m	3.50
440	2.41	d	2.43	330	4.51	4.5121	m	4.53	040	3.27	3.2724	md	3.27
611 532	2.22	md	2.23	240	—		m	4.46	232	3.20	3.1769	d	3.20
620	2.17	dd	—	420	4.14	4.1368	dd	4.15	322	3.18	3.1771	m	3.18
541	2.11	dd	2.02	150	3.99	3.9768	f	4.00	240 420	2.95	2.9271	m	2.95
640	1.90	md	1.91	241	3.84	3.8244	dd	3.84	042 402	2.92	2.9285	f	2.93

633	1.86	d	1.87	002	3.78	3.7632	dd	3.77	142 412	2.85	2.8579	ff	2.86
732 651	2.74	m	1.75	421	—	—	dd	3.63	332	2.79	2.7923	d	2.79
800	1.71	d	1.70	510	—	—	dd	3.57	242 422	2.67	2.6732	m	2.68
741	1.68	md	1.68	022	3.52		dd	3.53	134 314	2.56	2.5713	d	2.58
820	1.65	dd	1.64	202	3.48	3.4749	m	3.48		2.43		dd	2.43
822 660	1.61	dd	1.60	060	3.38	3.3970	dd	3.42		2.25		dd	
831	1.59	d	1.57	350	—	—	m	3.39		2.17			
743 761	1.48	dd	1.48	222	—	—	dd	3.29		2.12			
664	1.46	dd	1.46	511	3.22	3.1956	f	3.22		2.08			
754	1.44	dd	1.43	530	3.20	3.1880	mf	3.20		2.06			
932 763	1.41	d	1.39	312	—	—	dd	3.16		1.96			
941 853	1.38	dd	—	061 441	—	—	dd	3.10		1.86			
860	1.37	dd	1.36	042	—	—	dd	3.03		1.82			
1011	1.35	d	1.33	600	—	—	dd	3.02		1.81			
				261	—	—	dd	2.94		1.78			
				402	2.89	2.8835	d	2.90		1.73			
				452	—	—	dd	2.74		1.72			
				550	—	—	dd	2.72		1.62			
				171	2.69	2.7008	dd	2.70		1.61			
				370	—	—	dd	2.63					
				511	—	—	dd	2.59					
				080	2.55	2.5556	dd	2.57					
				352	2.52	2.5163	d	2.52					
				641	2.45	2.4497	dd	2.46					

segue TABELLA III

1			2	3				4	5				6
hkl	d (Å)$_{oss.}$	I/I$_1$	d (Å)	hkl	d (Å)$_{oss.}$	d (Å)$_{cal.}$	I/I$_1$	d (Å)	hkl	d (Å)$_{oss.}$	d (Å)$_{cal.}$	I/I$_1$	d (Å)
				532									
				262	—	—	dd	2.44					
				622	—	—	dd	2.29					
				570	—	—	dd	2.28					
				800	—	—	dd	2.26					
				480	2.23	2.2296	dd	2.23					
				661	2.15	2.1612	dd	2.17					
				082	2.11	2.1184	dd	2.12					
				0100	2.05	2.0529	dd	2.05					
				732	—	—	dd	2.04					
				443	2.01	2.0123	dd	2.01					
				841	—	—	dd	1.99					
				533									
				263	—	—	dd	1.97					
				680	1.95	1.9507	dd	1.95					
				911	—	—	dd	1.94					
				930	—	—	dd	1.93					
				590									
				482	—	—	dd	1.92					
				004	1.88	1.8769	dd	1.88					
				771	—	—	dd	1.87					
				114	1.86	1.8591	dd	1.86					
				1110	—	—	dd	1.85					
				1000	—	—	dd	1.81					
				950	1.80	1.7992	dd	1.80					
				713	1.74	1.7873	dd	1.76					

Museo » di Punta della Lingua e non può essere precisato se siano prodotti di eruzioni subaeree o sottomarine anche se alcune circostanze fanno preferire la seconda ipotesi in quanto: la matrice della roccia costituente i blocchi è uniformemente interessata da fenomeni di argillificazione a spese della parte vetrosa e dei minerali femici sopratutto olivina; la leucite presente nella massa è pseudomorfosata in analcime; i blocchi di questo tipo sono, in genere, arrotondati

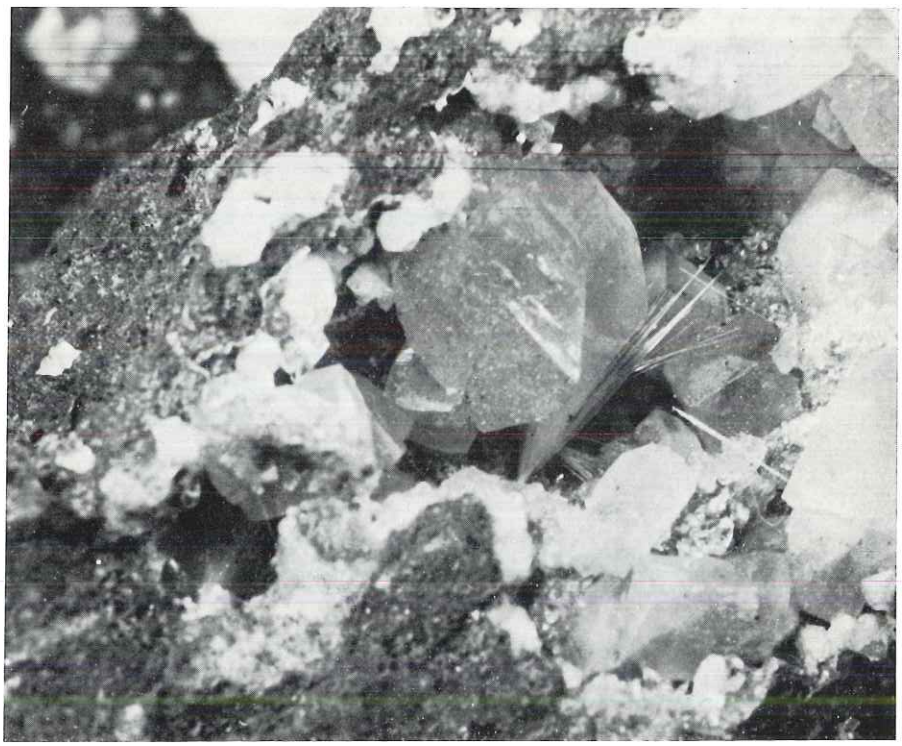


FIG. 6. - Analcime, Calcite e Mordenite 10 X

e, considerato che, provengono dalle pareti della breccia in posto e non hanno subito rotolamento si può ritenere che rappresentino nuclei di sferoidi di lave esternamente palagonitizzate.

Si può notare, altresì, che nella formazione della « Breccia Museo » si rinvengono anche frammenti di lave a vario chimismo che non presentano segni di alterazione e di arrotondamento e che pertanto possono essere considerati testimoni o di manifestazioni subaeree o, quanto meno, di materiali più profondi non venuti in contatto con acque marine al momento della messa in posto.

Le zeoliti in questione, che si rinvengono in geodi di dimensioni variabili, rappresentano, come in genere si nota nelle lave, i prodotti finali della cristallizzazione magmatica ed è quindi ipotizzabile che, malgrado la possibile interazione tra lave ed acque marine, la cristallizzazione delle fasi finali non abbia subito variazioni sostanziali.

Dall'osservazione delle paragenesi presenti si può ricostruire l'andamento e la successione della cristallizzazione delle fasi epigenetiche, infatti, l'analcime precede sempre le altre fasi ed in qualche geode



FIG. 7. - Mordenite su Calcite 6 X

costituisce il solo minerale presente; viene poi, in alcuni casi, la calcite a sua volta seguita dalla mordenite che costantemente le si sovrappone, o la thomsonite senza la presenza di calcite (Figg. 6 e 7).

Si può ritenere a questo riguardo che l'attività chimica della CO_2 abbia avuto un ruolo determinante sulla cristallizzazione in quanto ad alti valori della sua pressione parziale corrisponde la formazione di calcite con sottrazione della maggior parte dello ione Ca^{++} disponibile all'ambiente e successiva cristallizzazione di mordenite, più

acida e più sodica della thomsonite che viceversa si rinviene in altre geodi laddove, presumibilmente, l'attività della CO_2 è stata trascurabile [30, 31] (Fig. 8).



FIG. 8. - Thomsonite 6 X

Non è da escludere, tuttavia, la possibilità che il contatto acqua marina lava abbia potuto influire sulle mineralizzazioni epigeniche constatata l'abbondanza di analcime tra queste.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERTI A., *The use of structure factors in the refinement of Unit-Cell parameters from Powder Diffraction Data.* J. Appl. Cryst., **9** (1976).

[2] BALGORD W. D., ROY R., *Crystal chemical relationships in the Analcite family. II. Influence of temperature and* P_{H_2O} *on structure.* Molecular Sieves, Vol. 121 (1973).

[3] BEATTIE I. R., *The structure of Analcite and Ion- Exchanged forms of Analcite.* Acta Cryst., **7** (1954).

[4] COOMBS D. S., *Sedimentary analcime rocks and sodium-rich gneisses.* Min. Mag. Vol. spec. (1966).

[5] Coombs D. S., Whetten J. T., *Composition of Analcime from sedimentary and burial metamorphic Rocks.* Geol. Soc. Am. Bull., **78** (1967).
[6] Di Franco S., *La thomsonite dell'Isola dei Ciclopi.* Per. Min. Vol., **3** (1932).
[7] Di Franco S., *L'analcite e il basalto analcitico dell'Isola dei Ciclopi.* Boll. Soc. Geol. It., **45** (1926).
[8] Di Girolamo P., Stanzione D., *Lineamenti geologici e petrologici dell'isola di Procida.* Rend. SIMP., **29** (1973).
[9] Gaertner H. R., Machatschki F., *Der thomsonit aus dem basalte von Disko, Grönland.* Centr. Min. Abt. A (1927).
[10] Goodwin J. H., *Analcite and K-Feldspar in tuffs of the Green River Formation, Wyoming.* Am. Min., **58** (1973).
[11] Gottardi G., *Sul dimorfismo mordenite dachiardite.* Per. Min., **29** (1960).
[12] Harris P. G., Brindley G. W., *Mordenite as an alteration product of a Pitchstone glass.* Am. Min., **39** (1954).
[13] Henderson E. P., Glass J. J., *Additional notes on laumontite and thomsonite from Table Mountain Colorado.* Am. Min., **18** (1933).
[14] Maier W., *The crystal structure of mordenite (ptilolite).* Zeit. Krist., **115** (1961).
[15] Parascandola A., *I crateri dell'Isola di Procida.* Boll. Soc. Nat. Nap., **36** (1924).
[16] Parascandola A., *Osservazioni mineralogiche e litologiche sull'isola di Procida.* Boll. Soc. Nat. Nap., **40** (1928).
[17] Phillips A. H., *Thomsonite from Peeskill. New York.* Am. Min., **9** (1924).
[18] Passaglia E., *Le zeoliti della valle dei Zuccanti (Vicenza).* Per. Min., **35** (1966).
[19] Passaglia E., *The crystal chemistry of mordenites.* Contr. Min. Petr., **77** (1975).
[20] Pecsi-Donath E., *Some contributions of to the knowledge of zeolites.* Acta Ung. Szegediensis, **18** (1968).
[21] Ross C. S., *Sedimentary Analcite.* Am. Min., **13** (1928).
[22] Ross C. S., *Sedimentary Analcite.* Am. Min., **26** (1941).
[23] Saha P., *Geochemical and X-Ray investigation of natural and sintetic analcites.* Am. Min., **44** (1932).
[24] Schaller W. T., *Ptilolite from Utah.* Am. Min., **17** (1932).
[25] Sherman J. D., Bennet J. M., *Framework structures related to the zeolite mordenite.* Molecular Sieves. Advances in chem., Serie 121 (1973).
[26] Taylor W. H., *Note on the structure of Analcite.* Zeit. Krist., **99** (1938).
[27] Thompson A. B., *Analcime: free energy from hydrotermal data. Implications for phase equilibria and thermodynamic quantities for phases in* $NaAlO_2-SiO_2-H_2O$. Am. Min., **58** (1973).
[28] Waymouth C., Thornely P. C., Taylor W. H., *An X-ray examination of mordenite (ptilolite).* Min. Mag., **25** (1938).
[29] Wherry E. T., *Pseudo-isomorphism as illustrated in thomsonite.* Am. Min., **10** (1925).
[30] Wilkinson J. F. G., Whetten J. T., *Some analcime bearing pyroclastic and sedimentary rocks from New South Wales.* Jour. Sed. Petr., **34** (1964).
[31] Zen E an, *Mineralogy and petrography of marine bottom sediment samples of the coast of Perù and Chile.* Jour. Sed. Petr., **29** (1959).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, P. Corradini e G. Imbò.

Un problema al contorno di tipo variazionale per un operatore ellittico-parabolico del IV ordine

Nota di ESTER GIARRUSSO *
presentata dal socio emerito CARLO MIRANDA

(Adunanza del 3 dicembre 1977)

RIASSUNTO. — In questo lavoro stabiliamo un teorema di esistenza ed unicità di una soluzione regolare per un problema al contorno, relativamente ad un operatore L ellittico-parabolico del IV ordine in un aperto Ω di R^{n+1}.

SUMMARY. — In this paper we prove existence and unicity of a regular solution for a boundary problem regard to an elliptic-parabolic operator L of order 4, in an open set Ω of R^{n+1}.

INTRODUZIONE

In una recente nota ([2]), M. L. BENEVENTO, T. BRUNO, L. CASTELLANO hanno stabilito un teorema di esistenza e unicità di una soluzione generalizzata per il problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori L ellittico-parabolici del quarto ordine a coefficienti reali verificanti la condizione:

$$(1) \qquad (u, L\,u)_\Omega \geq K \| u \|^2_\Omega \qquad \forall \in H^4(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)$$

Tale teorema è stabilito ricorrendo ad una formulazione variazionale del problema stesso e adattando ad esso le tecniche di AGMON [1].

Muovendomi in questo ordine di idee, in questo lavoro stabilisco un teorema di esistenza e unicità di una soluzione regolare per un altro problema al contorno relativo ad operatori ellittico-parabolici simili a quelli considerati in [2]; essi, in particolare, nella zona in cui non sono ellittici coincidono con operatori quasi-ellittici.

Tale problema, nell'ipotesi che gli operatori in questione siano ellittici, si identifica con il problema di Neumann.

* Istituto di Matematica. Università degli Studi di Napoli, Napoli, Via Mezzocannone n. 8.

Nel numero 1 è riportata la formulazione di tale problema e l'enunciato del teorema di esistenza e unicità.

Nel n. 2 vengono stabilite alcune diseguaglianze utili per dimostrare le formule di maggiorazione contenute nel n. 3.

Nel numero 4, infine, si dimostra il teorema in questione approssimando il problema in esame con un problema ellittico, mediante un procedimento di piccolo parametro.

1. - Posizione del problema e risultati

Sia Ω un aperto limitato di R^{n+1} ed L un operatore ellittico-parabolico del IV ordine in Ω.

Detto $x' = (x_1', \ldots, x_{n+1}')$ il generico punto di R^{n+1}, supponiamo che la parte di Ω in cui L non è ellittico, sia un dominio D, eventualmente non connesso, contenuto in un insieme D' aperto su $\bar{\Omega}$ e che l'intersezione di tali insiemi con la frontiera di Ω sia costituita da porzioni di iperpiani normali ad assi coordinati; al fine di semplificare l'esposizone supponiamo, inoltre, che tali parti di $\partial\Omega$ giacciano tutte nell'iperpiano $x_{n+1}' = 0$ e che per tutti i punti di D' si abbia $x_{n+1}' \geq 0$.

Supponiamo, poi, che nella generica componente connessa di D', l'operatore L abbia forma:

$$
\begin{aligned}
(1.1)\quad L(x', D) = {} & \sum_{\substack{|\alpha|\leq 2 \\ |\beta|\leq 2}} (-1)^{|\beta|} D_x^{\beta} (a_{\alpha\beta}(x') D_x^{\alpha}) - \sum_1^m{}_i \sum_1^m{}_j D_{t_i} (b_{ij}(x') D_{t_j}) \\
& + (-1)^h D_y (q_h(x') D_y^h) + \sum_{\substack{|\alpha|\leq 2 \\ i=1,\ldots,m}} (-1)^{|\alpha|} D_x^{\alpha} (c_{i\alpha}(x') D_{t_i}) \\
& + \sum_{|\alpha|\leq 2} (-1)^{|\alpha|} D_x^{\alpha} (b_{\alpha}(x') D_y) - \sum_1^m{}_i D_{t_i} (e_i(x') D_y) \\
& + \sum_1^m{}_i D_{t_i}^2 (\rho^{2\mu_h}(x') \cdot D_{t_i}^2) + D_y^2 (\rho^{2\nu}(x') D_y^2) \qquad h \in \{1, 2\}
\end{aligned}
$$

dove si è posto:

$(x_1', x_2', \ldots, x_l') = x \in R^l$; $(x_{l+1}', \ldots, x_n') = t \in R^m$; $t = (t_1, \ldots, t_m)$ con $m + l = n$, e $x_{n+1}' = y$; $\rho = \rho(x') = \text{dist.}(x', D)$, e dove μ_h e ν sono numeri reali positivi che preciseremo nel seguito.

Supponiamo, inoltre, che l'operatore:

$$\text{(1.2)} \qquad L - \left(\sum_1^m{}_i D_{t_i}^2 (\rho^{2\mu_h} D_{t_i}^2) + D_y^2 (\rho^{2\nu} D_y^2) \right) \qquad h \in \{1, 2\}$$

sia quasi-ellittico in D'.

Denoteremo nel seguito con D_1 e D_2, e con D_1' e D_2', rispettivamente le parti di D e di D' in cui la (1.1) vale con $h = 1$ e $h = 2$, e, con Γ_1' e Γ_2', le parti di $\partial\Omega$ adiacenti rispettivamente a D_1' e D_2', e indicheremo, inoltre con Γ' l'unione di Γ_1' e Γ_2'.

Porremo infine:

$$x^{(h)} = \left(\frac{4}{m_1}, \ldots, \frac{4}{m_n}, \frac{4}{1+h} \right) \qquad h \in \{1, 2\}$$

dove $m_1, \ldots, m_n$ sono interi positivi così definiti:

$$m_i = \begin{cases} 4 & i \in \{1, \ldots, l\} \\ 2 & i \in \{l+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

La quasi-ellitticità dell'operatore (1.2) comporta tra l'altro che valga la disuguaglianza:

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x') \zeta^{\alpha+\beta} + \sum_1^m{}_{i,j} b_{ij}(x') \tau_i \tau_j \geq \sigma (|\zeta|^4 + |\tau|^2)$$
$$\zeta \in R^l \text{ e } \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m) \in R^m$$

uniformemente al variare di x' in D,
e che inoltre si abbia:

$$\text{(1.3)} \qquad q_1(x') > 0 \qquad x' \in D_1$$

$$\text{(1.4)} \qquad |q_2(x')| > 0 \qquad x' \in D_2$$

Sarà opportuno, ora introdurre alcuni spazi funzionali. Posto [1]:

$$\| u \|_{h,k} = \sum_{\substack{|\gamma| \leq h \\ |\delta| \leq k}} \| D_x^\gamma D_t^\delta u \|_\Omega$$

[1] Detto E un insieme di R^n indicheremo con $\| u \|_E$ e $(u, v)_E$ rispettivamente la norma di u ed il prodotto scalare di u e v in $L^2(E)$; quando ciò non darà luogo ad equivoci ometteremo l'indicazione dell'insieme di integrazione.

dove $h, k \in N_0$ e $(\gamma, \delta) \in N_0^l \times N_0^m$, indichiamo con $\mathcal{H}(\Omega)$ il completamento di $C^\infty(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma:

$$(1.5) \qquad \| \varphi \|_{\mathcal{H}(\Omega)} = \| \varphi \|_{2,0} + \| \varphi \|_{0,1} + \sum_1^2 {}_h \sum_1^m {}_i \| \rho^{\mu_h} D_{t_i}^2 \varphi \|_{D_h'} + \| \rho^\nu D_y^2 \varphi \|_\Omega + \| D_y \varphi \|_{D_1'}$$

e con $\mathcal{H}_1(\Omega)$ il completamento di $C^\infty(\bar{\Omega})$ nella norma:

$$\| \varphi \|_{\mathcal{H}_1(\Omega)} = \| \varphi \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| D_y^2 \varphi \|_{D_2'}$$

Infine con $\mathcal{H}_2(\Omega)$ denoteremo lo spazio per il quale è finita la norma:

$$\| \varphi \|_{\mathcal{H}_2(\Omega)} = \| \varphi \|_{4,0} + \| \varphi \|_{0,2} + \sum_{h=1,2} \sum_1^m {}_i \| \rho^{2\mu_h} D_{t_i}^4 \varphi \|_{D_h'} + \| \rho^{2\nu} D_y^2 \varphi \|_\Omega + \| D_y^3 \varphi \|_{D_2'} + \| D_y^2 \varphi \|_{D_1'}$$

Introduciamo ora le seguenti forme bilineari:

$$(1.6) \quad M[u, v] = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant 2 \\ |\beta| \leqslant 2}} (D_x^\alpha u, a_{\alpha\beta}(x') D_x^\beta v)_\Omega + \sum_{i,j=1}^m (D_{t_i} u, b_{ij}(x') D_{t_j} v)_\Omega + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \sum_1^m {}_i (D_{t_i} u, c_{i\alpha}(x') D_x^\alpha v)_\Omega$$

$$(1.7) \quad N[u, v] = \sum_{h=1,2} (-1)^{h+1} (D_y^h u, q_h(x') D_y v)_{D_h'} + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} (D_y u, b_\alpha(x') D_x^\alpha v)_\Omega + \sum_1^m {}_i (D_y u, e_i(x') D_{t_i} v)_\Omega$$

$$(1.8) \quad P[u, v] = \sum_{i=1,\ldots,m} \sum_{h=1,2} (D_{t_i}^2 u, \rho^{2\mu_h}(x') D_{t_i}^2 v)_{D_h'} + (D_y^2 u, \rho^{2\nu}(x') D_y^2 v)_\Omega$$

e consideriamo una forma bilineare $B[u, v]$ associata all'operatore L e definita in $\mathcal{H}_1(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega)$, che, qualora il supporto della $u \cdot v$ sia contenuto in D', abbia l'espressione:

$$(1.9) \qquad B[u, v] = M[u, v] + N[u, v] + P[u, v].$$

Orbene supporremo verificata la seguente condizione [2]:

$$B[\varphi, \varphi] \geq K \| \varphi \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \qquad \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ e } K \in R_+ \tag{1.10}$$

È facile convincersi che dalla (1.10) segue che:

$$q_2(x') > 0 \qquad \forall x' \in D_2 \tag{1.11}$$

Ciò posto, il problema che vogliamo studiare è il seguente.

Assegnata una funzione $f \in L^2(\Omega)$, determinare una u tale che risulti:

$$B[u, v] = (f, v) \qquad \forall v \in \mathcal{H}(\Omega) \tag{1.12}$$

Osserviamo, ora, che se u è una funzione di $\mathcal{H}_2(\Omega)$ e v ha il supporto in $\bar{\Omega} - D$ vale la relazione [3]:

$$B[u, v] = (L u, v) + \sum_{j=0}^{1} \int_{\partial\Omega - D} N_{3-j} u \frac{\partial^j v}{\partial n^j} d\sigma \tag{1.13}$$

dove n è il versore normale e N_2 ed N_3 sono operatori di frontiera, che possiamo chiamare di Neumann, in analogia al caso ellittico, rispettivamente del secondo e terzo ordine. Se invece v ha il supporto in D', con semplici integrazioni per parti si prova che:

$$\begin{aligned} B[u, v] = {} & (L u, v)_\Omega - (\rho^{2\nu} D_y^2 u, D_y v)_{\Gamma'} + (D_y(\rho^{2\nu} D_y^2 u), v)_{\Gamma'} \\ & + (q_2 D_y^2 u, v)_{\Gamma_2'} - (q_1 D_y u, v)_{\Gamma_1'} . \end{aligned} \tag{1.14}$$

Dalle (1.13) e (1.14) essendo v e le sue derivate essenzialmente arbitrarie si trae che, se una u di $\mathcal{H}_2(\Omega)$ è soluzione del problema (1.12), verifica le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} N_2 u = 0 \\ N_3 u = 0 \end{cases} \qquad \forall x' \in \partial\Omega - D \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} \rho D_y^2 u = 0 \\ \rho^{2\nu} D_y^3 u - q_1 D_y u = 0 \end{cases} \qquad \forall x' \in \Gamma_1' \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} D_y^2 u = 0 \\ \rho D_y^3 u = 0 \end{cases} \qquad \forall x' \in \Gamma_2' \tag{1.17}$$

[2] In [2] la (1.10) non viene presupposta ma viene ricavata dalla (1) attraverso convenienti utilizzazioni della diseguaglianza di Gårding.

[3] Cfr. [1] sec. 10.

nonché l'equazione:

$$L\,u = f \qquad \forall\, x' \in \Omega.$$

Orbene supposta verificata la condizione (1.10) nonché, per quanto osservato la (1.11), per il problema (1.12) proveremo il seguente:

TEOREMA 1.1. — *Nelle ipotesi che*:

a) *i coefficienti di* $B[u, v]$ *siano di classe* $C^2(\bar{\Omega})$,

b) *la funzione* $\rho(x')$ *abbia derivate prime e seconde limitate in* Ω

c) *risulti* supp. $D_y\,\rho \cap \Gamma_2' = \emptyset$ [4]

d) *sia* $\nu > 2$; $\mu_1 \geq \nu$; $\mu_2 \geq \nu + 1$

il problema (1.12) *ammette una ed una sola soluzione di classe* $\mathfrak{H}_2(\Omega)$, *che verifica, quindi, per quanto precedentemente osservato, l'equazione* $L\,u = f$, *nonché le* (1.15), (1.16) *ed* (1.17).

2. - LEMMI PRELIMINARI

In questo numero stabiliamo diseguaglianze utili per la dimostrazione delle formule di maggiorazione contenute nel numero seguente. Premettiamo che, nel seguito, denoteremo sempre con K una costante numerica positiva, non necessariamente la stessa in tutte le maggiorazioni in cui compare.

Poniamo, anzitutto:

$$[u]' = \sum_{\substack{\alpha \cdot x_h < 4 \\ h=1,2}} \| D^\alpha u \|_{D_h'} + \sum_{\substack{k=0,\ldots,3 \\ h=1,2}} \sum_1^m{}_i \| \rho^{2\mu_h + k - 4} D_{t_i}^k u \|_{D_h'}$$

$$+ \sum_0^3{}_k \| \rho^{2\nu + k - 4} D_y^k u \|_\Omega$$

e

$$[u] = \| u \|_{\mathfrak{H}_2(\Omega)} + \varepsilon \| D_y^4 u \| + \varepsilon \sum_1^m{}_i \| D_{t_i}^4 u \|$$

dove ε è un numero reale positivo minore di uno; da noti risultati (cfr. [4], teorema n. 2.1) si trae facilmente il lemma:

LEMMA 2.1. — *Esiste un intero q positivo tale che si ha*:

$$[u]' \leq K \left(\lambda\,[u] + \frac{1}{\lambda^q} \| u \| \right) \tag{2.1}$$

[4] Ciò significa che la parte Σ della frontiera di D_2, che risulta interna ad Ω è nelle vicinanze di Γ_2' una ipersuperficie cilindrica con generatrici parallele all'asse y.

e:

$$(2.2) \qquad \| \rho^{\mu-1} D_{x_i'} u \| \leq K \left(\lambda \| \rho^{\mu} D^2_{x_i'} u \| + \frac{1}{\lambda} \| u \| \right) \qquad \forall \mu > 1$$

dove λ *è un arbitrario numero positivo minore di uno.*

Dalla (2.1) si trae in particolare la diseguaglianza:

$$(2.3) \qquad \| u \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \leq K \left[(\lambda + \delta^{\nu}) [u] + \frac{1}{\lambda^q} \| u \| \right]$$

dove λ e q hanno il significato assunto nel lemma 2.1 e δ, qui, come nel seguito, indica la distanza tra $\Omega - D'$ e D.

Si suppone, poiché non è restrittivo, che tale distanza sia minore di uno.

Ora, detto s un intero non negativo, indichiamo con $M^{(s)}_{x_i'} [u, v]$ la forma bilineare che si ottiene dalla (1.6) sostituendo ai coefficienti le loro derivate s^{ma}, rispetto ad x_i'. Significato del tutto analogo avranno, poi, i simboli $N^{(s)}_{x_i'} [u, v]$, $P^{(s)}_{x_i'} [u, v]$ e $B^{(s)}_{x_i'} [u, v]$. Per semplificare l'esposizione ometteremo, però, il numero s quando questo è uguale ad uno.

Dalle (1.6) e (1.9) e dalla a) segue allora il lemma di immediata dimostrazione:

LEMMA 2.2. — *Valgono le seguenti diseguaglianze con* $s \in \{1, 2\}$:

$$(2.4) \qquad | M^{(s)}_{x_i'} [u, v] | \leq K \| u \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot \| v \|_{\mathcal{H}(\Omega)}$$

$$(2.5) \qquad | B^{(s)}_{x_i'} [u, v] | \leq K \{ (\| u \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| D_y u \|_{D_2'}) \| v \|_{H^2(\Omega)} + \| D^2_y u \|_{D_2'} \cdot \| D_y v \|_{D_2'} \}$$

Indicata con μ una funzione in D' così definita:

$$\mu = \mu_1 \text{ in } D_1' \text{ e } \mu = \mu_2 \text{ in } D_2'$$

dimostriamo il seguente lemma:

LEMMA 2.3. — *Valgono le diseguaglianze*:

$$(2.6) \qquad | M [\rho^{\mu} \varphi, \rho^{\mu} \varphi] - M [\varphi, \rho^{2\mu} \varphi] | \leq K \left\{ \eta \| \rho^{\mu} \varphi \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{\eta} (\| \varphi \|^2 + \sum_{|\gamma|=1} \| \rho^{\mu-1} D^{\gamma}_x \varphi \|^2) \right\}$$

$$(2.7)\quad |\,N[\,\rho^{\mu}\varphi,\rho^{\mu}\varphi] - N[\varphi,\rho^{2\mu}\varphi]\,| \le K\left(\eta\,\|\,\rho^{\mu}\varphi\,\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{\eta}\,\|\,\varphi\,\|^2\right) + \sum_{|\gamma|=1} |\,(D_y\varphi,\rho^{2\mu-1}\cdot c_{\gamma}(x')\,D_x^{\gamma}\varphi)\,|$$

$$(2.8)\quad |\,P[\rho^{\mu}\varphi,\rho^{\mu}\varphi] - P[\varphi,\rho^{2\mu}\varphi]\,| \le K\left\{(\delta^{\nu-1}+\eta)\,\|\,\rho^{\mu}\varphi\,\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{\eta^3}\,\|\,\varphi\,\|^2\right\}$$

dove φ *è una funzione di classe* $C_0^{\infty}(\overset{\circ}{D'}\cup\Gamma')$, *le* $c_{\gamma}(x')$ *sono funzioni aventi le derivate prime limitate ed* η *è un arbitrario numero positivo minore di uno.*

Dim. — La (2.6) si stabilisce senza difficoltà, applicando la formula di Leibnitz e tenendo conto delle ipotesi b) e d).

Proviamo, ora, la (2.7).

Intanto, ragionando come per la (2.6) si prova che:

$$|\,(D_y(\rho^{\mu}\varphi),\,q_1\,D_y(\rho^{\mu}\varphi))_{D_1'} - (D_y\varphi,\,q_1\,D_y(\rho^{2\mu}\varphi))_{D_1'}\,| \le K\,\|\,\rho^{\mu}\varphi\,\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\cdot\|\,\varphi\,\|$$

Invece, le maggiorazioni degli altri termini che compaiono nella differenza $N[\rho^{\mu}\varphi,\rho^{\mu}\varphi] - N[\varphi,\rho^{2\mu}\varphi]$ risultano più delicate, e per poterle effettuare in D_2', è necessario ricorrere anche all'ipotesi c) e alla 3ª condizione della d) del teorema 1.1.

Ciò posto, osserviamo che, tenuto conto della b), c) e della d), nonché della (2.2), in quanto per la d) $2\mu_2 - 2 > \mu_2 + \nu - 1$, si ha ha con qualche facile calcolo:

$$|\,(D_y^2(\rho^{\mu}\varphi),\,q_2\,D_y(\rho^{\mu}\varphi))_{D_2'} - (D_y^2\varphi,\,q_2\,D_y(\rho^{2\mu}\varphi))_{D_2'}\,|$$
$$\le K\,(\|\,\rho^{\mu}\varphi\,\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\cdot\|\,\varphi\,\| + \|\,\varphi\,\|^2) + \|\,\rho^{\mu-\frac{1}{2}}\,D_y\varphi\,\|^2_{\Delta}$$

dove $\Delta = D_2' \cap (\text{supp. } D_y\rho)$

D'altra parte, detta ζ' una funzione di classe $C^{\infty}(R^n)$ tale che:

$$\zeta' = 1 \qquad \forall\, x' \in \Delta \qquad \text{e supp. } \zeta' \subset \overset{\circ}{D_2'},$$

$$|\,D^{\alpha}\zeta'\,| \le K, \qquad |\,\alpha\,| \le 2,$$

integrando per parti, risulta:

$$\| \rho^{\mu-1/2} D_y \varphi \|_\Delta^2 \leq \| \rho^{\mu-1/2} D_y (\zeta' \varphi) \|^2 = | (\zeta' \varphi, D_y (\rho^{2\mu-1} D_y (\zeta' \varphi)) | ,$$

da cui, ancora per la b) la d) e la (2.2), si ricava:

$$\| \rho^{\mu-1/2} D_y \varphi \|_\Delta^2 \leq K (\| \varphi \|^2 + \| \rho^\mu \varphi \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot \| \varphi \|) \tag{2.9}$$

Inoltre, utilizzando ulteriormente la b) la d) e la (2.2) si ha:

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} | (D_y (\rho^\mu \varphi), b_\alpha (x') D_x^\alpha (\rho^\mu \varphi)) - (D_y \varphi, b_\alpha (x') D_x^\alpha (\rho^{2\mu} \varphi)) |$$

$$\leq K (\| \varphi \|^2 + \| \rho^\mu \varphi \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot \| \varphi \| + \sum_{|\gamma|=1} | (D_y \varphi, \rho^{2\mu-1} c_\gamma (x') D_x^\gamma \varphi) |$$

ed infine sempre per la (2.2) e le ipotesi b) e d), si ha che anche la quantità:

$$\sum_1^m {}_i | (D_y (\rho^\mu \varphi), e_i D_{t_i} (\rho^\mu \varphi)) - (D_y \varphi, e_i D_{t_i} (\rho^{2\mu} \varphi)) |$$

si maggiora col secondo membro della (2.9).

Da tutte le diseguaglianze qui provate discende allora la (2.7). Per quanto riguarda, infine, la (2.8) si può facilmente osservare che dalla b) e dalla d) si ha:

$$| P [\rho^\mu \varphi, \rho^\mu \varphi] - P [\varphi, \rho^{2\mu} \varphi] | \tag{2.10}$$

$$\leq K \| \rho^\mu \varphi \|_{\mathcal{H}(\Omega)} (\delta^{\nu-1} \| \rho^\mu \varphi \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| \varphi \| + \| \rho^{\nu+\mu-1} D_y \varphi \|_\Delta)$$

D'altra parte, per la (2.2) e la d), nonché per la (2.9), si ha, applicando la diseguaglianza di Young:

$$\| \rho^{\mu+\nu-1} D_y \varphi \|_\Delta \leq \| \rho^{\mu-1/2} D_y \varphi \|_\Delta \leq K \left(\eta \| \rho^\mu \varphi \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{\eta} \| \varphi \| \right) \tag{2.11}$$

con η numero positivo minore di uno, da cui tenendo conto della (2.10), segue, allora, la (2.8).

3. - Formule di maggiorazione

Fissato un numero reale $0 < \varepsilon < 1$, sia L_ε l'operatore differenziale ellittico in $\bar{\Omega}$ così definito:

$$L_\varepsilon u = L u + \varepsilon D_y^4 u + \varepsilon \sum_1^m {}_i D_{t_i}^4 u \tag{3.1}$$

e sia $B_\varepsilon[u, v]$ la forma bilineare definita in $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ ad esso associata avente l'espressione:

$$(3.2) \quad B_\varepsilon[u, v] = B[u, v] + \varepsilon(D_y^2 u, D_y^2 v) + \varepsilon \sum_1^m{}_i (D_{t_i}^2 u, D_{t_i}^2 v).$$

Osserviamo, ora, che per la diseguaglianza di Schwartz e per la condizione (1.10), esistono due costanti positive $K_\varepsilon^{(1)}$ e $K_\varepsilon^{(2)}$ dipendenti dai coefficienti della $B[u, v]$ e da ε tali che:

$$|B_\varepsilon[u, v]| \leq K_\varepsilon^{(1)} \|u\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^2(\Omega)} \qquad u, v \in H^2(\Omega)$$

e

$$B_\varepsilon[u, u] \geq K_\varepsilon^{(2)} \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \qquad u \in H^2(\Omega)$$

Pertanto, per il teorema di Lax-Migran, esisterà una unica funzione $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ tale che, per ogni $v \in H^2(\Omega)$, si abbia:

$$(3.3) \qquad B_\varepsilon[u_\varepsilon, v] = (f, v) \qquad \forall v \in H^2(\Omega).$$

Da noti risultati (cfr. [1] sec. 10) e grazie alle ipotesi assunte per i coefficienti di $B[u, v]$ segue che la funzione u_ε è di classe $H^4(\Omega)$.

Ne segue, con ragionamenti analoghi a quelli esposti nel n. 1, che per ogni $v \in H^2(\Omega)$ ed avente il supporto D', si può scrivere:

$$(3.4) \quad B_\varepsilon[u_\varepsilon, v] = (L_\varepsilon u_\varepsilon, v) - (\rho^{2\nu} D_y^2 u_\varepsilon, D_y v)_{\Gamma'} + (D_y(\rho^{2\nu} D_y^2 u_\varepsilon), v)_{\Gamma'}$$
$$+ (q_2 D_y^2 u_\varepsilon, v)_{\Gamma_2'} - (q_1 D_y u_\varepsilon, v)_{\Gamma_1'} - \varepsilon(D_y^2 u_\varepsilon, D_y v)_{\Gamma'} + \varepsilon(D_y^3 u_\varepsilon, v)_{\Gamma'}$$

e, quindi, che la funzione u_ε verifica l'equazione:

$$(3.5) \qquad L_\varepsilon u_\varepsilon = f$$

nonché le condizioni al contorno:

$$(3.6) \qquad \begin{cases} D_y^2 u_\varepsilon = 0 \\ (\varepsilon + \rho^{2\nu}) D_y^3 u_\varepsilon - q_1 D_y u_\varepsilon = 0 \end{cases} \qquad \forall x' \in \Gamma_1'$$

$$(3.7) \qquad \begin{cases} D_y^2 u_\varepsilon = 0 \\ D_y^3 u_\varepsilon = 0 \end{cases} \qquad \forall x' \in \Gamma_2'$$

Ci proponiamo ora, di stabilire alcuni teoremi, che ci forniranno maggiorazioni per la u_ε.

TEOREMA 3.1. — *Vale la limitazione*:

$$\| u_\varepsilon \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \| u_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)} \leq K \| f \|_\Omega$$

Infatti, per la condizione (1.10) e per la (3.3) si ha:

$$K \| u_\varepsilon \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \varepsilon \| D^2_y u_\varepsilon \|^2 + \varepsilon \sum_1^m{}_i \| D^2_{t_i} u_\varepsilon \|^2 \leq B_\varepsilon [u_\varepsilon, u_\varepsilon] = (f, u_\varepsilon)$$

da cui discende il teorema.

Sia ora D'' un dominio tale che $D \subset D'' \subset D'$ e tale che la dist. $(\Omega - D'', D)$ sia maggiore o uguale $\frac{\delta}{2}$ e per il quale, inoltre, valga la (1.3) e (1.11) con x' rispettivamente in $D'' \cap D'_1$ e $D'' \cap D'_2$.

Indichiamo inoltre con ζ una funzione di classe $C^\infty_0(\overset{o}{D'} \cup \Gamma')$, per la quale si abbia:

$$\zeta(x') = \zeta(x, y, t) = 1 \qquad \forall x' \in D''$$

$$0 \leq \zeta(x') \leq 1 \qquad D_y \zeta \in C^\infty_0(\overset{o}{D'})$$

$$| D^\alpha \zeta | \leq K, \quad | \alpha | \leq 4$$

Si ha il seguente:

TEOREMA 3.2. — *Sussiste la seguente maggiorazione*:

$$| B_\varepsilon [\zeta u_\varepsilon, v] | \leq \frac{K}{\delta^p} \| f \|_\Omega \cdot \| v \|_\Omega \qquad \forall v \in H^2(\Omega)$$

dove p è un numero reale positivo.

Infatti, poiché ζu_ε soddisfa per la costruzione di ζ, le (3.6) e (3.7), si ha, tenuto conto della (3.4):

$$B_\varepsilon [\zeta u_\varepsilon, v] = (L_\varepsilon(\zeta u_\varepsilon), v) \qquad \forall v \in H^2(\Omega)$$

da cui si trae immediatamente, per la diseguaglianza di Schwartz:

$$(3.8) \qquad | B_\varepsilon [\zeta u_\varepsilon, v] | \leq \| L_\varepsilon(\zeta u_\varepsilon) \|_\Omega \cdot \| v \|_\Omega, \qquad v \in H^2(\Omega)$$

D'altra parte con noti procedimenti si ottiene:

$$\| L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon) \| \leq \| \zeta L_\varepsilon u_\varepsilon \| + K \| u_\varepsilon \|_{H^3(\Omega - D'')} \tag{3.9}$$

Ora, in $\Omega - D''$, la costante di ellitticità dell'operatore L_ε è limitata inferiormente da δ^{μ_2} e, quindi, per noti risultati sull'equazioni ellittiche (cfr. [1]), esiste un numero reale $p > 0$ tale che:

$$\| u_\varepsilon \|_{H^4(\Omega - D'')} \leq \frac{K}{\delta^p} \| f \|_\Omega$$

Da cui, per la (3.5), la (3.8) e la (3.9) segue l'asserto.

Detto, ora, λ un numero positivo, poniamo

$$\Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) = (\lambda + \delta^{\nu-2}) [\zeta u_\varepsilon] + \frac{\| f \|}{\lambda^q \delta^p}$$

dove q e p sono numeri positivi definiti rispettivamente nel lemma (2.1) e nel teorema (3.2).

Passiamo, ora, a dmostrare il seguente:

TEOREMA 3.3. — *Vale la seguente diseguaglianza*:

$$\| D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \| D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon) \|_{H^2(\Omega)} \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon)$$

dove $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e* λ *è un arbitrario numero reale positivo minore di uno.*

Dimostrazione. — Dalla condizione (1.10) si trae, intanto, che:

$$\| D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon) \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \varepsilon \| D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon) \|^2_{H^2(\Omega)} \leq K B_\varepsilon [D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon), D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)] \qquad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{3.10}$$

Integrando per parti si ricava:

$$B_\varepsilon [D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon), D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)] = - B_\varepsilon [\zeta u_\varepsilon, D^2_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)] - B_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon, D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)) \qquad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{3.11}$$

Ora, tenendo conto dell'ipotesi a), dalla (2.4) si ha con $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$| M_{x_i'} [\zeta u_\varepsilon, D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)] | \leq K \| \zeta u_\varepsilon \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot \| D_{x_i'} \zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} ,$$

mentre, dalla (1.7), si ottiene:

$$| N_{x_i'} [\zeta u_\varepsilon, D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)] | \leq K \{ [\zeta u_\varepsilon]'^2 + [\zeta u_\varepsilon]' \| D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \qquad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Infine dalla (1.8), per l'ipotesi b), abbiamo:

$$| P_{x_i'} [\zeta u_\varepsilon, D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)] | \leq K \| D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot (\delta^{\nu-1} [\zeta u_\varepsilon] + [\zeta u_\varepsilon]') \qquad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Dalle diseguaglianze ora provate per la (1.9), applicando la diseguaglianza di Young, si ha:

$$| B_{x_i'} [\zeta u_\varepsilon, D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon)] | \leq K \left(\eta \| D_{x_i'} (\zeta u_\varepsilon) \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{\eta} \| \zeta u_\varepsilon \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{\eta} [\zeta u_\varepsilon]'^2 + \frac{1}{\eta} \delta^{2\nu-2} [\zeta u_\varepsilon]^2 \right)$$

con η numero reale positivo minore di uno.

Da cui per il teorema 3.1 e per la (2.1), nonché per la (3.11) e la (3.10) e per il teorema 3.2 consegue l'asserto.

Dimostriamo, ora, il seguente:

TEOREMA 3.4. — *Per ogni* $k \in \{1, \ldots, l\}$ *si ha:* [5]

$$\| D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \| D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{H^2(\Omega)} \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon)$$

dove λ *ha il significato assunto nel teorema precedente.*

Osserviamo, innanzitutto, che integrando per parti, tenuto conto dell'ipotesi a) del teorema 1.1, si ha:

$$B_\varepsilon [D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon), D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon)] = B_\varepsilon [\zeta u_\varepsilon, D^4_{x_k} (\zeta u_\varepsilon)] - 2 B_{x_k} [D_{x_k} (\zeta u_\varepsilon), D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon)] - B^{(2)}_{x_k} [\zeta u_\varepsilon, D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon)]$$

D'altra parte per la (2.4), tenuto conto della a), otteniamo:

$$\sum_{s=1,2} | M^{(s)}_{x_k} [D^{2-s}_{x_k} (\zeta u_\varepsilon), D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon)] | \leq K (\| D_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| \zeta u_\varepsilon \|_{\mathcal{H}(\Omega)}) \| D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \qquad k \in \{1, \ldots, l\} \tag{3.12}$$

[5] Si converrà di denotare con D^m_x, con $m \in N$, la D^α_x, con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, e $|\alpha| = m$, quando interessa conoscere solo l'ordine m della derivata e non interessa precisare le $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$.

ed analogamente per la (1.7), abbiamo:

$$(3.13)\qquad \sum_{s=1,2} | N^{(s)}_{x_k} [D^{2-s}_{x_k}(\zeta u_\varepsilon), D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon)] |$$
$$\leq K ([\zeta u_\varepsilon]'^2 + [\zeta u_\varepsilon]' \cdot \| D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)}) \qquad k \in \{1, \ldots, l\}$$

mentre per la (1.8) e l'ipotesi b) traiamo:

$$(3.14)\qquad | P^{(2)}_{x_k} [\zeta u_\varepsilon, D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon)] |$$
$$\leq K (\delta^{\nu-2} [\zeta u_\varepsilon] + [\zeta u_\varepsilon]') \| D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \qquad k \in \{1, \ldots, l\}$$

ed ancora: con $k \in \{1, \ldots, l\}$:

$$(3.15)\quad | P_{x_k}[D_{x_k}(\zeta u_\varepsilon), D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon)] | \leq K \Big([\zeta u_\varepsilon]' + \| \rho^{\nu-1} D^2_y D_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|_{D_1'}$$
$$+ \sum_1^m i \sum_{h=1,2} \| \rho^{\mu_h - 1} D^2_{l_i} D_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|_{D_h'} \| D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \Big)$$

Ora, integrando per parti, otteniamo:

$$(3.16)\qquad \| \rho^{\nu-1} D^2_y D_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|^2_{D_1'}$$
$$\leq K \{ | (D^2_y(\zeta u_\varepsilon), D_{x_k}(\rho^{2\nu-2}) D^2_y D_{x_k}(\zeta u_\varepsilon))_{D_1'} |$$
$$+ | (D^2_y(\zeta u_\varepsilon), \rho^{2\nu-2} D^2_y D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon))_{D_1'} |$$

ed ancora con una integrazione per parti si trae, ricordando anche la b):

$$| (D^2_y(\zeta u_\varepsilon), D_{x_k}(\rho^{2\nu-2}) D^2_y D_{x_k}(\zeta u_\varepsilon))_{D_1'} |$$
$$= \frac{1}{2} | (D^2_{x_k}(\rho^{2\nu-2}), (D^2_y(\zeta u_\varepsilon))^2)_{D_1'} | \leq K \delta^{2\nu-4} [\zeta u_\varepsilon]^2$$

per cui la (3.16) diventa:

$$(3.17)\qquad \| \rho^{\nu-1} D^2_y D_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|^2_{D_1'}$$
$$\leq K (\delta^{2\nu-4} [\zeta u_\varepsilon]^2 + \delta^{\nu-2} [\zeta u_\varepsilon] \cdot \| D^2_{x_k}(\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)})$$

Con calcoli del tutto analoghi si prova che:

$$(3.18)\qquad \sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ h=1,2}} \| \rho^{\mu_h - 1} D^2_{t_i} D_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|^2_{D_h'} \leq K \left(\delta^{2\mu_h - 4} [\zeta u_\varepsilon]^2 + \delta^{\mu_h - 2} [\zeta u_\varepsilon] \cdot \| D^2_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)}\right)$$

Orbene le diseguaglianze fin qui ottenute ed il teorema 3.3 ci consentono di giungere all'asserto, seguendo lo schema di dimostrazione di quest'ultimo e tenendo conto anche della d).

Sarà utile, per il seguito, osservare che dalle (3.17) e (3.18), nonché del teorema 3.4, si traggono le diseguaglianze:

$$(3.19)\qquad \| \rho^{\nu - 1} D^2_y D_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|^2 \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \qquad k \in \{1, \dots, l\}$$

e:

$$(3.20)\qquad \sum_1^m{}_i \sum_{h=1,2} \| \rho^{\mu_h - 1} D^2_{t_i} D_{x_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_h'} \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \quad k \in \{1, \dots, l\}$$

Utilizzando la (2.5) e tenendo conto dei teoremi precedenti, si dimostra, poi, il:

TEOREMA 3.5. — *Sussiste la seguente diseguaglianza*:

$$\sqrt{\varepsilon} \sum_1^m{}_i \| D^2_{t_i} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \varepsilon \sum_1^m{}_i \| D^2_{t_i} (\zeta u_\varepsilon) \|_{H^2(\Omega)} \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon)$$

λ, *avendo il significato assunto nel teorema* 3.3.

Dimostriamo ora il

TEOREMA 3.6. — *Vale la diseguaglianza*:

$$| (D_y D^2_{t_k} (\zeta u_\varepsilon), \rho^{2\mu - 1} c_\gamma (x') D^\gamma_x D^2_{t_k} (\zeta u_\varepsilon)) |$$
$$\leq K \left(\eta \| \rho^\mu D^2_{t_k} (\zeta u_\varepsilon) \|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{\eta} \Phi^2_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \right) \qquad k \in \{1, \dots, m\}$$

dove $\gamma \in N^l_o$, $|\gamma| = 1$, *le funzioni* $c_\gamma (x')$ *e* μ *hanno il significato assunto nel lemma* 2.3 *ed* η *è un arbitrario numero positivo minore di uno.*

Osserviamo, anzitutto, che il prodotto scalare che compare al primo membro di questa diseguaglianza, lo si può pensare come la

somma di due addendi e, cioè, come la somma di quel prodotto scalare in D_1' ed in D_2'. Poiché la tecnica di dimostrazione è diversa, sarà allora opportuno considerare separatamente questi due addendi. Dalla (3.19) si trae, intanto, facilmente con $|\gamma| = 1$:

$$\begin{aligned} &| (D_y D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon), \rho^{2\mu-1} c_\gamma(x') D_x^\gamma D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon))_{D_1'} | \\ &\leq K \| \rho^\mu D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon). \qquad k \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

Integrando per parti, e tenendo conto della b), invece si trae:

$$\begin{aligned} &| D_y D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon), \rho^{2\mu-1} c_\gamma(x') D_x^\gamma D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon))_{D_2'} | \\ &\leq K \| D_y D_{t_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \cdot (\| \rho^{2\mu-1} D_x^\gamma D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \\ &+ \| \rho^{2\mu-2} D_x^\gamma D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'}) \qquad |\gamma| = 1, \quad k \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

D'altra parte sempre integrando per parti:

$$\begin{aligned} \| \rho^{2\mu-1} D_x^\gamma D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'}^2 &\leq K | (\rho^{4\mu-2} D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon), D_x^2 D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon))_{D_2'} | \\ + | (\rho^{4\mu-3} D_x^\gamma \rho D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon), D_x^\gamma D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon))_{D_2'} | &= |A_1| + |A_2|, \ |\gamma| = 1 \end{aligned}$$

Ma con un'ulteriore integrazione per parti, per la b), si può ricavare:

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq K (\| \rho^{2\mu} D_{t_k}^4 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} + \| \rho^{2\mu-1} D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'}) \\ &\cdot \| \rho^{2\mu-2} D_x^2 D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \qquad k \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

Da cui tenendo conto della c) si trae:

$$|A_1| \leq K \| \rho^\mu D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot \| D_x^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \qquad k \in \{1, \ldots, m\}$$

D'altra parte, tenendo conto della b) e della c), integrando ancora per parti si ha:

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq K \| \rho^{2\mu-3} D_x^\gamma D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \cdot (\| \rho^{2\mu} D_{t_k}^4 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \\ &+ \| \rho^{2\mu-1} D_{t_k}^3 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'}), \qquad |\gamma| = 1 \end{aligned}$$

da cui per la c) e la (2.2) si trae, con $|\gamma| = 1$:

$$|A_2| \leq K \| D_x^\gamma (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \cdot \| \rho^\mu D_{t_k}^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \qquad k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Da tutte le maggiorazioni qui provate, tenendo conto della c), della (2.2), del teorema 3.2 e del teorema 3.4 applicando opportunamente la diseguaglianza di Young, segue allora l'asserto.

Utilizzando ora il lemma 2.3 ed il teorema 3.6 e seguendo lo schema di dimostrazione di teoremi 3.3 e 3.4, con qualche calcolo opportuno si può dimostrare il

TEOREMA 3.7. — *Vale la seguente maggiorazione*:

$$\| \rho^{\mu} D^2_{t_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{\mathfrak{H}(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon} \| \rho^{\mu} D^2_{t_k} (\zeta u_\varepsilon) \|_{H^2(\Omega)} \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon)$$

dove $k \in \{1, \ldots, m\}$ *e* λ *e* μ *hanno il significato assunto nei teoremi* 3.3 *e* 3.4.

Indichiamo con L'_ε l'operatore differenziale in Ω così definito:

$$L'_3 u = \varepsilon D^4_y u + D^2_y (\rho^{2\nu} D^2_y u) + (-1)^h D_y (q_h D^h_y u) \qquad h \in \{1, 2\}$$

dove $h = 1$ in D'_1 e $h = 2$ in D'_2. Allora, anzitutto, osserviamo che per tutti i teoremi già dimostrati in questo numero si ha:

$$\| L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon) - L'_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon) \| \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \tag{3.21}$$

Inoltre moltiplicando scalarmente $L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon)$ per $D^2_y (\zeta u_\varepsilon)$ in D'_1 e tenendo conto della (3.6), integrando opportunamente per parti si ha:

$$(L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon), D^2_y (\zeta u_\varepsilon))_{D'_1} = - \varepsilon \| D^3_y (\zeta u_\varepsilon) \|^2_{D'_1} - \| \rho^{\nu} D^3_y (\zeta u_\varepsilon) \|^2$$

$$- (D_y \rho^{2\nu} \cdot D^2_y (\zeta u_\varepsilon), D^3_y (\zeta u_\varepsilon))_{D'_1} - (q_1 D^2_y (\zeta u_\varepsilon), D^2_y (\zeta u_\varepsilon))_{D'_1}$$

$$- ((L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon) - L'_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon)), D^2_y (\zeta u_\varepsilon))_{D'_1} - (D_y q_1 D_y (\zeta u_\varepsilon), D^2_y (\zeta u_\varepsilon))_{D'_1} .$$

Da cui, ricordando l'ipotesi b) ed il fatto che $q_1 (x') > 0$ in $D'' \cap D_1$ dalla (2.1) e dalla (3.21) si trae:

$$\| D^2_y (\zeta u_\varepsilon) \|^2_{D'_1} \leq K \| D^2_y (\zeta u_\varepsilon) \|_{D'_1} \cdot \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \tag{3.22}$$

Con procedimento analogo, tenendo conto però della (3.7) in luogo della (3.6), del fatto che $q_2 (x') > 0$ in $D'' \cap D_2$, della (2.1) e della (3.21), moltiplicando scalarmente $L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon)$ per $D^3_y (\zeta u_\varepsilon)$ in D'_2 e integran-

do opportunamente per parti si ricava:

$$\| D_y^3 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \leq K \| D_y^3 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \cdot \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \tag{3.23}$$

Dalle (3.22) e (3.23) si trae quindi il

TEOREMA 3.8. — *Vale la seguente diseguaglianza*:

$$\| D_y^2 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_1'} + \| D_y^3 (\zeta u_\varepsilon) \|_{D_2'} \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon)$$

essendo λ *un arbitrario numero reale positivo minore di uno.*

Dimostriamo, ora, il

TEOREMA 3.9. — *Vale la maggiorazione*:

$$\| \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon) \| + \| \rho^{2\nu} D_y^4 (\zeta u_\varepsilon) \| \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon)$$

Infatti, detto $L_\varepsilon'' u$ l'operatore differenziale in Ω dato da:

$$L_\varepsilon'' u = \varepsilon D_y^4 u + D_y^2 (\rho^{2\nu} D_y^2 u)$$

da tutti i teoremi precedentemente dimostrati in questo numero si ha:

$$\| L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon) - L_\varepsilon'' (\zeta u_\varepsilon) \| \leq K \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \tag{3.24}$$

D'altra parte si ha:

$$\begin{aligned} (L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon), \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon)) &= \| \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon) \|^2 + (D_y^2 (\rho^{2\nu} D_y^2 (\zeta u_\varepsilon)), \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon)) \\ &+ (L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon) - L_\varepsilon'' (\zeta u_\varepsilon), \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon)) \end{aligned}$$

Da cui per la (3.24) e la (2.1) segue:

$$\| \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon) \| \leq K \| \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon) \| \cdot \Phi_\lambda (\zeta u_\varepsilon) \tag{3.25}$$

Ed infine si ha:

$$\begin{aligned} \| \rho^{2\nu} D_y^4 (\zeta u_\varepsilon) \| \leq K \{ &\| \varepsilon D_y^4 (\zeta u_\varepsilon) \| + \| (L_\varepsilon - L_\varepsilon'') (\zeta u_\varepsilon) \| \\ &+ \| L_\varepsilon (\zeta u_\varepsilon) \| + \| \rho^{2\nu-1} D_y^3 (\zeta u_\varepsilon) \| + \| \rho^{2\nu-2} D_y^2 (\zeta u_\varepsilon) \| \} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dalle (3.25), (3.26) e dalle (2.1) e (3.24) si trae l'asserto.

Ora da tutte le maggiorazioni provate, potendosi scegliere δ « sufficientemente » piccolo e fissando opportunamente λ discende, allora, facilmente il

TEOREMA 3.10. — *Vale la maggiorazione*:

$$[\zeta u_\varepsilon] \leq C \| f \|_\Omega$$

C *essendo una costante che dipende da* δ, *ma non da* ε.

4. - ESISTENZA ED UNICITÀ DI UNA SOLUZIONE REGOLARE.

Dal teorema 3.10 si ha che la famiglia delle u_ε è limitata in $\mathcal{H}_2(\Omega)$, e pertanto si può estrarre da essa una successione $\{u_{\varepsilon_n}\}_{n \in N}$, che per $\varepsilon_n \to 0$, converge debolmente ad una $u \in \mathcal{H}_2(\Omega)$.

Consegue, allora, che:

$$\lim_n B\,[u_{\varepsilon_n}, v] = B\,[u, v] \qquad \forall\, v \in \mathcal{H}(\Omega) \tag{4.1}$$

Inoltre, per il lemma 3.1 si ha:

$$\sqrt{\varepsilon_n}\, \| D_y^2\, u_{\varepsilon_n} \|_\Omega + \sqrt{\varepsilon_n} \sum_1^m{}_i \| D_{t_i}^2\, u_{\varepsilon_n} \|_\Omega \leq K \| f \|_\Omega$$

con K indipendente da ε_n e, quindi:

$$\lim_n \varepsilon_n\, (D_y^2\, u_{\varepsilon_n}, D_y^2\, v)_\Omega + \varepsilon_n \sum_1^m{}_i\, (D_{t_i}^2\, u_{\varepsilon_n}, D_{t_i}^2\, v)_\Omega = 0 \quad v \in C^\infty(\bar{\Omega}) \tag{4.2}$$

Pertanto, essendo:

$$B_\varepsilon\,[u, v] = B\,[u, v] + \varepsilon\, (D_y^2\, u, D_y^2\, v)_\Omega + \varepsilon \sum_1^m{}_i\, (D_{t_i}^2\, u, D_{t_i}^2\, v)_\Omega$$

dalle (4.1) e (4.2) si ha:

$$(f, v) = B\,[u, v] \qquad \forall\, v \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

Da cui l'esistenza di una soluzione per il problema (1.12).

L'unicità è, poi, un'immediata conseguenza della condizione (1.10).

Il teorema 1.1 risulta così completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGMON S., *Lectures on elliptic boundary value problem,* D. Van Nostrand Co., Inc. Princeton (1965).

[2] BENEVENTO M. L., BRUNO T., CASTELLANO L., *Esistenza e unicità di una soluzione generalizzata del problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni,* Ricerche di Matematica. Napoli, vol. 25 (1976), 81-100.

[3] MATSUZAWA T., *On quasi elliptic boundary problems,* Trans. Amer. Math. Soc., **133** (1968), 241-265.

[4] TROISI M., *Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso,* Ricerche di Matematica, Napoli, vol. 18 (1969), 49-74.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e A. Franchetta.

Determinazione quantitativa dell'ascaridolo nell'olio di « Chenopodium anthelminticum » mediante HPLC

Nota di MARIA IMMACOLATA LA ROTONDA, SILVANA SALVATI
e ORESTE SCHETTINO
presentata dal socio ordinario MARIO COVELLO

(Adunanza del 3 dicembre 1977)

RIASSUNTO. — È stata messa a punto una tecnica di determinazione dell'ascaridolo nell'olio di chenopodio mediante l'HPLC. Vengono precisate le condizioni ottimali per la separaizone dell'ascaridolo dagli altri costituenti dell'olio. Il metodo proposto dimostra considerevoli vantaggi sugli altri metodi analitici finora suggeriti, particolarmente nei riguardi del metodo ufficiale prescritto dalla Farmacopea Uff. VIII ed.

SUMMARY. — The determination of ascaridol in chenopodium oil by HPLC has been performed. Optimal conditions for achieving the separation of ascaridol from other oil constituents are established. The proposed method seems to have notable advantages over the oter methods of evaluation, especially with respect to the Pharmacopoeia official method.

L'attività farmacologica dell'olio di Chenopodio, il ben noto prodotto che si ottiene dalla distillazione in corrente di vapore del « Chenopodium Ambrosoides L. var. anthelminticum » è legata alla presenza in esso dell'ascaridolo. A quest'ultimo, infatti, va fatta risalire l'efficacia dell'olio contro gli ascaridi, gli oxiuri, gli anchilostomi, che si esplica dapprima attraverso un'azione convulsivante sui vermi, che vengono poi paralizzati.

È perciò che l'ascaridolo viene assunto quale sostanza di riferimento nelle varie metodiche di dosaggio dell'olio di Chenopodio.

Peraltro l'olio di Chenopodio presenta diverse azioni collaterali indesiderabili, sia a carico del tubo digerente (provoca infatti ipersecrezione salivare, gastrica ed enterica, agendo nel contempo da deprimente della muscolatura intestinale) che a carico del sistema nervoso centrale e degli organi di senso (alterazione della vista e dell'udito). Da ciò la necessità del suo esatto dosagio nei medicamenti che lo contengono.

La Farmacopea Uff. VIII ed. ne riporta, come metodo di dosaggio quantitativo una titolazione iodometrica, più empirica che stechiometrica, descritta nel lavoro di Cooking e Hymas e consistente nella titolazione mediante tiosolfato sodico dello iodio che si libera, nella reazione di ossidazione in ambiente acido, tra ascaridolo e ioduro di potassio.

Critiche diverse sono state mosse a questo metodo: alcuni autori hanno evidenziato che il fattore di trasformazione che permette il passaggio iodo liberato-ascaridolo, riportato nel lavoro originario ed equivalente a 0,00665 g di ascaridolo per 1 ml di tiosolfato di sodio 0,1 N è valido entro determinati limiti di concentrazione [1, 2], altri autori nel criticare i limiti di questo metodo suggeriscono dei fattori diversi, anche essi però validi per determinate concentrazioni [3, 4].

Successivamente sono state proposte metodiche chimiche [5] e chimico-fisiche diverse, quali assorbimento nell'infrarosso [6], polarografia [7, 8] gascromatografia [9, 10].

In considerazione delle incertezze analitiche sopra delineate e nell'ambito di ricerche già avviate da noi in questo settore e tendenti a suggerire metodi più selettivi e sensibili nella determianzione dei principi attivi delle forme farmaceutiche iscritte nella F.U. VIII ed., si è messa a punto una nuova metodica atta alla determinazione quali-quantitativa dell'ascaridolo nell'olio di « Chenopodium anthelminticum » utilizzando la tecnica di cromatografia in fase liquida ad alta pressione (HPLC).

Questa metodica, pur traendo origine dalla classica cromatografia in colonna, ha acquistato una propria fisionomia che si è accompagnata ad una ragguardevole diffusione nelle applicazioni pratiche.

Ciò è stato determinato dai requisiti peculiari di questa tecnica analitica che accoppia ad una certa semplicità operativa, notevole versatilità ed elevata sensibilità nonché, quando le condizioni sperimentali siano opportunamente scelte, una ottima risoluzione, sia in campo qualitativo che quantitativo, anche per sostanze strutturalmente simili.

Fase delicata della sperimentazione è costituita dalla ricerca della fase mobile più opportuna, soprattutto in relazione alla solubilità della sostanza in esame, nonché l'oculata scelta dei materiali di riempimento della colonna.

Parte sperimentale

Prodotti ed apparecchiature: Le indagini cromatografiche HPLC sono state eseguite impiegando un cromatografo liquido Perkin Elmer

mod. 601 dotato di detector UV Perkin Elmer mod. LC 55 ed equipaggiato con una valvola di introduzione del tipo « Loop injector ».

Sull'apparecchio è stata montata una colonna Sil-X1 Perkin Elmer della lunghezza di 50 cm e diametro interno 2 mm.

Le misure spettrofotometriche sono state eseguite con spettrofotometro Beckman DB.

Quale standard si è usato Ascaridolo pract Fluka al 98 %. Si sono esaminati, inoltre, campioni vari di olio di chenopodio reperiti in commercio.

Preparazione dell'ascaridolo puro. L'ascaridolo Fluka 98 % è stato purificato mediante cromatografia preparativa su strato. A tale scopo, mediante l'apposita apparecchiatura Desaga, sono state preparate lastre di vetro (20 × 20 cm) stratificando per uno spessore di 500 μ una miscela di gel di silice Merck e acqua nel rapporto di 1:2. Dopo stratificazione ed essiccazione all'aria, le lastre sono state poste in stufa per un'ora alla temperatura di 105°C in modo da aumentare il potere adsorbente del gel di silice.

L'eluente più selettivo per separare l'ascaridolo dalle impurezze (residui dei componenti dell'olio di chenopodio) si è dimostrata la miscela esano-acetato di etile 95:5 v/v.

Il gel di silice su cui era assorbito l'ascaridolo (Rf 0,58), allontanato mediante raschietto, veniva eluito con etere etilico e la soluzione eterea evaporata a temperatura ambiente.

Il prodotto purificato, così ottenuto, è stato ripetutamente controllato mediante titolazione seguendo la tecnica riportata dalla Farmacopea ufficiale VIII ed. La medesima metodica è stata impiegata per determinare il titolo dei campioni di olio di chenopodio commerciale.

I risultati ottenuti dalla media di tre titolazioni su ciascun campione sono riportati nella tabella I. Và, subito sottolineata l'incongruenza del risultato ottenuto per l'ascaridolo puro: dato 100, trovato 113 % !

TABELLA I

Confronto tra le determinazioni di ascaridolo in diversi campioni, secondo FU VIII e con la metodica proposta.

Campione	Metodo F.U. VIII ed. (%)	HPLC (%)	Scarto %
Ascaridolo purificato	113	100	+ 13
Olio di Chenopodio Camp. n. 1	68	58	+ 17,2
Olio di Chenopodio Camp. n. 2	72	63	+ 14,2
Olio di Chenopodio Camp. n. 3	80	69	+ 16,3
Olio di Chenopodio Camp. n. 4	75	64	+ 17,2

Analisi mediante HPLC. L'apparecchiatura e la colonna sono state in precedenza descritte. L'analisi è stata condotta diluendo in una miscela di isottano e cloroformio (90:10 v/v) i campioni in esame

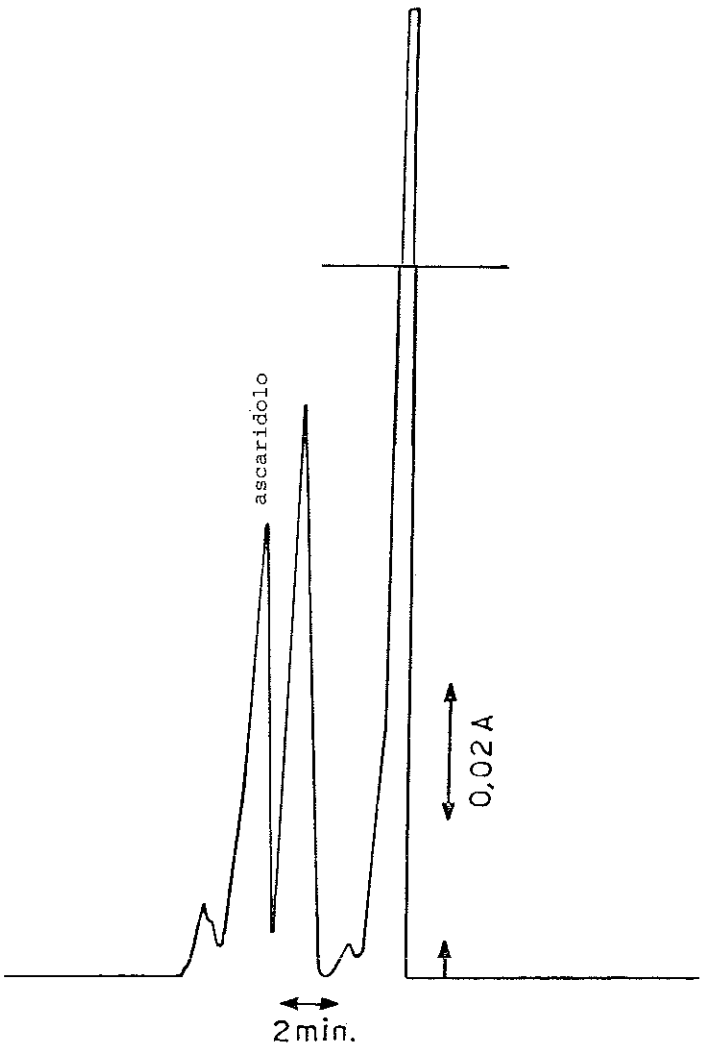


FIG. 1. - HPLC del campione n. 1 di « Chenopodium anthelminticum ». Apparecchio: Perkin Elmer mod. 601; $\lambda = 254$ nm; Colonna Sil × 1; Eluente isoottano-cloroformio 90:10 (V:V); Flusso 1,5 ml/min; Pressione 1100 psi.

ed introducendo alcuni μl della soluzione nel cromatografo mediante siringa di precisione Hamilton.

L'introduzione del campione è stata eseguita sempre con grande accuratezza essendo l'apparecchio fornito di una valvola di tipo « loop

injector » che evita gli effetti negativi della retropressione in colonna ai fini di una precisa analisi quantitativa.

Il miglior sistema eluente è risultato la miscela isoottano-cloroformio (90:10 v/v). L'ascaridolo si separa bene dagli altri costituenti

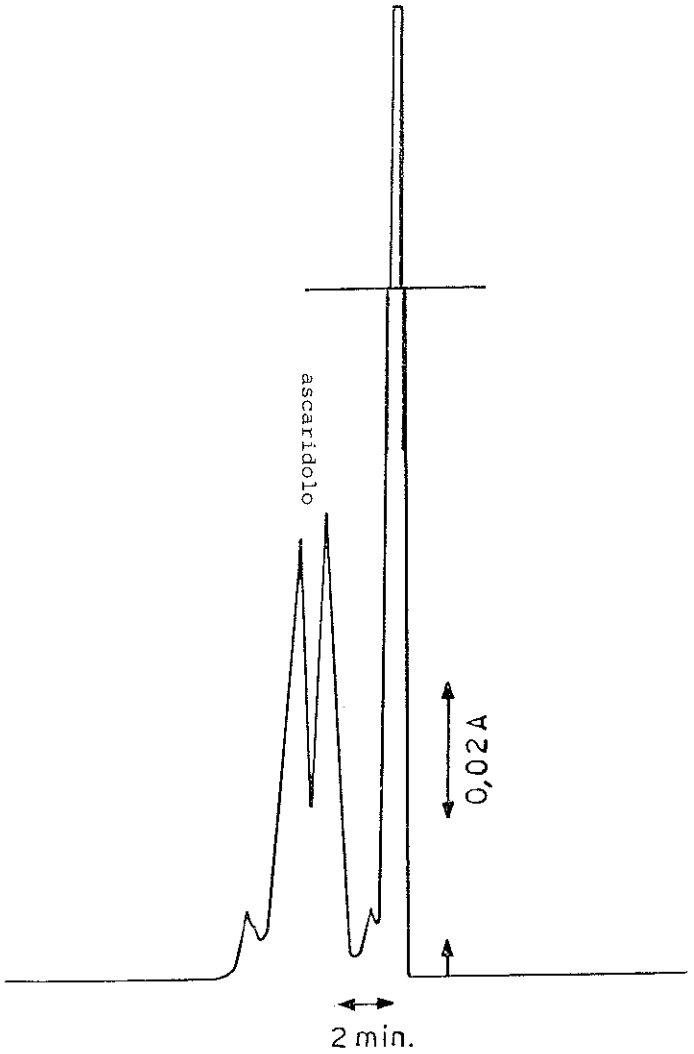


FIG. 2. - HPLC del campione n. 1 di olio di « Chenopodium anthelminticum » arricchito di ascaridolo. Apparecchio: Perkin Elmer 601; $\lambda = 254$ nm; Colonna Sil × 1; Eluente: isoottano-cloroformio 90:10 (v/v); flusso: 2 ml/min; Pressione 1300 psi.

della miscela come si evidenzia dalle Figg. 1 e 2 che rappresentano rispettivamente l'analisi del campione di olio di chenopodio n. 1 tal quale e dello stesso addizionato, al momento dell'introduzione in co-

lonna, di due µl di ascaridolo allo scopo di caratterizzare qualitativamente l'ascaridolo nel cromatogramma.

Le condizioni operative ottimali sono quelle riportate nelle didascalie delle figure. La lunghezza d'onda alla quale sono state effettuate le rivelazioni dei cromatogrammi è di 254 nm. Tale lunghezza d'onda non è quella corrispondente al massimo di assorbimento dell'ascaridolo nell'eluente adoperato: misure effettuate in precedenza con spettrofotometro Beckman sull'ascaridolo purificato e disciolto in isoottano-cloroformio 90:10 avevano evidenziato un massimo di assorbimento

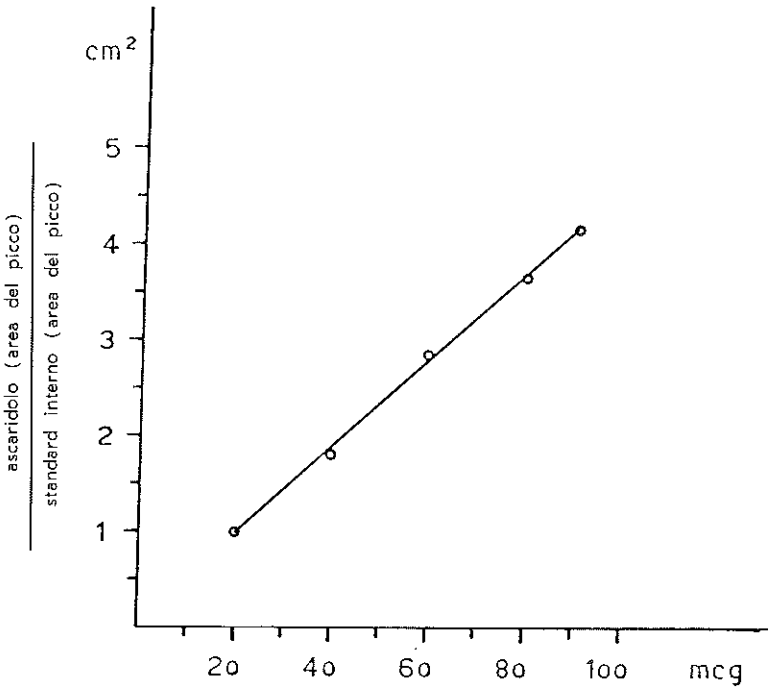


FIG. 3. - Curva standard dell'ascaridolo.

a 232 nm. In un primo momento si era ritenuto fosse questa la lunghezza d'onda ideale per caratterizzare i componenti della miscela. In seguito, tuttavia, l'esame dei cromatograggi registrati a questa lunghezza d'onda ne sconsigliava l'impiego: risultava, infatti, molto evidenziato il picco dell'ascaridolo ma decisamente poco significativi i picchi degli altri componenti. A 254 nm, invece, i componenti sono tutti evidenziati chiaramente, anche se l'ascaridolo, in queste condizioni, può sembrare apparentemente un componente presente in piccola concentrazione.

La determinazione quantitativa è stata effettuata costruendo una curva di taratura assorbanza-concentrazione.

A questo scopo si è preparata una serie di diluizioni di ascaridolo nel solvente isottano-cloroformio 90:10 v/v alle quali veniva aggiunta la medesima quantità di linalolo con funzione di standard interno. La risoluzione linalolo-ascaridolo è ottima nelle condizioni sperimentali sopra riportate ed il linalolo ha un volume di ritenzione inferiore all'ascaridolo.

La determinazione quantitativa è stata eseguita calcolando l'area dei picchi (prodotto dell'altezza per l'ampiezza a metà altezza).

La Fig. 3 rappresenta la retta di taratura dell'ascaridolo. La legge di Lambert-Beer è rispettata alle concentrazioni prese in considerazione: da 20 ad 80 mcg. I risultati quantitativi ottenuti, ciascuno dalla media di 3 analisi, sono riportati nella Tabella I.

Discussione dei risultati e conclusioni

Le due tecniche adoperate nella determinazione quantitativa dell'ascaridolo, da solo e nell'olio di chenopodio, portano a risultati diversi, con scarti percentuali notevoli (dal + 13 al + 17 %): in particolare il dosaggio iodometrico dà costantemente un titolo in ascaridolo maggiore.

Il metodo proposto dalla Farmacopea è senz'altro quello meno preciso e dà valori in eccesso se si considera che, applicato al prodotto puro di riferimento, ha fornito un titolo del 13 %. A questo si aggiunga la mancanza di selettività, dal momento che si basa su una normale titolaizone di perossidi. L'eventuale presenza, quindi, nell'olio di chenopodio, di altri perossidi naturali, o di perossidi che si possono formare nel corso dell'invecchiamento, è egualmente titolata ed espressa come ascaridolo; il titolo più basso ottenuto mediante HPLC è quindi quello più attendibile.

Dalle considerazioni sopra esposte sembra che il metodo proposto per la sua selettività (l'ascaridolo è ben separato dagli altri componenti), per la sensibilità (20-100 mcg), per la rapidità di esecuzione (sono sufficienti 8-10 minuti per una analisi), nonché per il vantaggio che presenta rispetto al metodo gascromatografico di lavorare a temperatura ambiente, possa essere adottato come metodo di analisi ufficiale nel controllo degli olii di chenopodio.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bohne H., Van Emster K., Arch. Pharm. Berl., **284**, 171 (1951).
[2] Beckett A. H. e coll., J. Pharm. Pharmacol., **7**, 55 (1951).
[3] Beckett A. e coll., ibid., **7**, 606 (1951).

[4] LEPETIT, riportato da WEBBA e coll., J. Pharm. Pharmacol., **17**, 766 (1965).
[5] COVELLO M., CIAMPA, G., La Ricerca Sci., **30**, 1207 (1960).
[6] MARUJAMA M., Pharmazia, **8**, 595 (1953).
[7] MARUJAMA M., J. Chem. Soc. Japan., Ind. Chem. Sect., **55**, 617 (1952).
[8] MARUJAMA M., Ann. Rept. Takamine Lab., **7**, 103 (1955).
[9] ROCHAT J. e coll., Ann. Pharm. Franc., **30**, 577 (1972).
[10] QUERCIA e coll., Boll. Chim. Farm., **110**, 428 (1971).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Covello, R. A. Nicolaus e L. Mangoni.

Caratterizzazione dello strato superficiale di paste cementizie

Nota di Bernardo Marchese, Alberto Annetta e Pasquale Pernice
presentata dal socio ordinario Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 3 dicembre 1977)

Riassunto. — Paste di silicato tricalcico e di aliti stagionate per quattro anni e paste di tre cementi industriali a diversi tempi di stagionatura sono state sottoposte ad analisi termogravimetrica, TG, a misure di microdurezza, HV, e a diffrattometria X, XRD. I dati delle prime due tecniche sono stati in grado di caratterizzare l'interno della massa mentre i diffrattogrammi ottenuti direttamente dalla superficie dei campioni hanno permesso di riconoscerne la costituzione delle fasi cristalline, in particolare calcite ed aragonite.

Rimuovendo le vecchie patine i diffrattogrammi delle nuove superfici mostrano la struttura cristallina dell'interno della pasta. Lo stato di alterazione di queste provocato dal contatto con soluzioni acquose di NaCl e con acqua di mare è stato determinato ancora mediante analisi diffrattometrica diretta. Oltre a calcite ed aragonite è stata rilevata la presenza di $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ e di $Mg(OH)_2$.

Summary. — Four years mature synthetic alite and tricalcium silicate pastes, and the three industrial cement pastes at different hydration times by thermogravimetric, TG, microhardness, HV, and X diffractometry, XRD, were analyzed. The first two analyses results have characterized the interior of the mass; the XRD patterns obtained directly from the specimen surfaces however have revealed the calcite and the aragonite as the principal crystalline phases present.

On removing the old patina the new surface XRD patterns have shown the crystalline structure of the interior mass. The different alteration degree of the latter for the contact with NaCl aqueous solution and with sea water was determined by XRD analyses of the same specimen too. In addition to calcite and aragonite the other present crystalline phases were $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ and $Mg(OH)_2$.

Introduzione

Il calcestruzzo costituisce un materiale multifasico le cui proprietà derivano sia dal tipo di aggregato sia dalla matrice cementante; a quest'ultima è affidato il ruolo predominante [1]. Le strutture in calcestruzzo analogamente a quelle realizzate con altri materiali di natura diversa diventano oggi sempre più complicate mentre la loro

utilizzazione avviene sotto condizioni sempre più severe sia meccaniche che chimiche. L'aggressività chimica dell'ambiente si rivolge essenzialmente verso la pasta di cemento esplicando l'aggregato soltanto un'azione moderatrice.

È noto che lo studio della matrice cioè della pasta di cemento si presenta estremamente difficile per la contemporanea presenza ed interazione dei numerosi prodotti di idratazione [2]. Tali prodotti, d'altra parte, sono dotati di notevole reattività quando sono esposti alle atmosfere normali ed aggressive, a contatto con soluzioni acquose o addirittura immersi in acqua di mare. La permanenza nei differenti ambienti quindi porta generalmente all'alterazione dello strato superficiale: i nuovi prodotti formano una patina protettiva verso gli strati sottostanti. Ma anche la stabilità di tale massa può essere compromessa da nuove e successive sollecitazioni sia di natura meccanica che chimica.

La formazione di fessurazioni, « microcracking », a seguito di ritiro o di fenomeni espansivi o infine per impreviste sollecitazioni meccaniche, è altamente dannosa [3].

La carbonatazione della pasta di cemento ad opera dell'anidride carbonica sia gassosa sia sciolta nell'acqua è stata intensamente studiata, alcuni dei numerosi lavori sono qui richiamati [4, 5, 6].

Profonde alterazioni sono apportate da ioni quali Mg^{++}, Cl^{-}, SO_4^{--} normalmente presenti nelle acque del mare e in acque inquinate [7].

In questo Istituto studi preliminari sono stati condotti su paste di silicato tricalcico, C_3S [1], su paste di soluzioni solide di silicato tricalcico, aliti, per spiegarne la reattività verso differenti soluzioni acquose [8, 9]. Lo strato superficiale delle suddette paste così come lo strato esistente sulla superficie di paste di cemento Portland industriale sono stati successivamente studiati [10].

Il presente lavoro che fa parte di uno studio più ampio sulla degradabilità delle paste di cemento ha lo scopo di verificare le diverse tecniche già sperimentate sulle paste di silicato tricalcico a lunga stagionatura per applicarle alle paste di cementi Portland industriali, anche a tempi più brevi di idratazione.

Si è cercato infine di caratterizzare le paste di silicato tricalcico e di aliti mediante misure di microdurezza. Tale mezzo d'indagine non distruttivo è stato infatti già applicato per i materiali porosi per collegarne i valori ottenuti con la resistenza a flessione [11]. L'utilità dei valori di microdurezza è stata anche dimostrata per le paste di

[1] Nella chimica del cemento è usata la seguente notazione abbreviata: C = CaO, S = SiO_2, H = H_2O, CH = $Ca(OH)_2$, MH = $Mg(OH)_2$, Cc = calcite, Ar = aragonite, $\bar{S}$ = $CaSO_4 \cdot 2H_2O$.

silicato tricalcico [12], di alluminato tricalcico [13] e per le superfici di paste di cemento impregnate di zolfo [14].

Parte sperimentale

Le paste di silicato tricalcico e di due sue soluzioni solide contenenti Al e Fe sono state preparate e caratterizzate secondo le modalità descritte in un precedente lavoro [15]. La composizione chimica dei prodotti anidri è riportata nella Tabella I. Il rapporto acqua/solido è stato di 0,5 anche per le paste dei cementi. La stagionatura è avvenuta in ambiente chiuso in presenza di acqua per una durata superiore ai 4 anni. Di proposito si è voluto tenere presente l'atmosfera normale di laboratorio contenente cioè CO_2, SO_2 ecc.

Tabella I

Composizione chimica dei campioni anidri

Campione	SiO_2	CaO	Analisi chimica, % in peso				alcali	SO_3	Finezza Blaine cm^2/g
			CaO libera	MgO	Al_2O_3	Fe_2O_3			
silicato tricalcico C_3S	26,07	73,47	0,33	—	—	—	—	—	5100
alite 1	25,98	73,57	0,45	—	0,32	—	—	—	5050
alite 2	26,35	72,70	0,24	—	—	1,08	—	—	5250
cemento Portland PC1	24,06	61,49	—	1,10	4,60	2,76	1,20	2,52	4090
cemento Portland PC2	22,3	66,66	—	1,02	3,0	4,0	1,30	1,9	3730
cemento d'Altoforno AF2	29,40	51,82	—	2,62	7,98	2,04	1,67	1,56	3000

La composizione chimica dei tre cementi industriali espressa sottoforma degli ossidi principali è riportata nella Tabella I. Il primo cemento PC1, ha un basso contenuto di Al_2O_3 e quindi di alluminato tricalcico, C_3A. Il secondo, PC2, è un cemento Portland ordinario del tipo 425 secondo le norme italiane, anch'esso con basso contenuto di Al_2O_2.

Il cemento d'altoforno AF2 è costituito da loppa d'altoforno miscelata con il clinker del cemento PC2. Le modalità operative per l'allestimento dei preparati da sottoporre al SEM e le diverse soluzioni di attacco sono state già descritte [9, 10, 15].

La microdurezza è stata misurata con il microdurimento « Durimet » della Leitz utilizzando come penetratore la piramide di Vickers sotto un carico di 50 g. Le paste di silicato tricalcico e delle aliti sono state incluse assieme a freddo in Mecaprex « KM » e lucidate con pasta diamantata fino a 1 μm. Il valore della durezza è stato calcolato con la formula:

$$HV = \frac{1854{,}4 \times P}{d^2} \quad \frac{kg}{mm^2}$$

dove P = carico in grammi e d = il valore medio della diagonale.

Risultati e discussione

a) Paste di aliti.

I prodotti costituenti le paste provenienti dalla idratazione dei campioni di aliti sono deducibili dall'analisi termogravimetrica. Nella Fig. 1 sono riportate le tracce termogravimetriche dalle quali sono stati estratti i valori riportati nella Tabella II. Le perdite parziali di peso sono state suddivise in diversi intervalli di temperatura e ciascuna di esse riferita al peso che il campione assume a 1000°C, valore che può essere considerato eguale al peso del campione anidro. Le perdite registrate nell'intervallo 440-590°C sono dovute alla decomposizione del $Ca(OH)_2$, mentre le perdite nell'intervallo 590-800°C sono attribuibili alla decomposizione del $CaCO_3$ [16]. Le perdite registrate dalla temperatura ambiente fino a 350°C comprendono sia quelle dovute all'umidità sia a quelle dovute alla decomposizione della fase C-S-H, la quale si concentra intorno ai 100°C. Pertanto i valori ottenuti nel predetto intervallo anche se affetti da notevole imprecisione, sono stati utilizzati in maniera semiquantitativa per un esame comparativo.

La sensibilità alla temperatura ed al grado di umidità dell'ambiente è maggiore nei primi tempi di idratazione, come è dimostrato dai valori del campione del cemento PC2 a 3 giorni di stagionatura. Lo stesso campione, così come quello analogo del cemento AF2, ha mostrato valori più attendibili dopo un trattamento isotermo a 60°C per trenta minuti nell'interno della termobilancia.

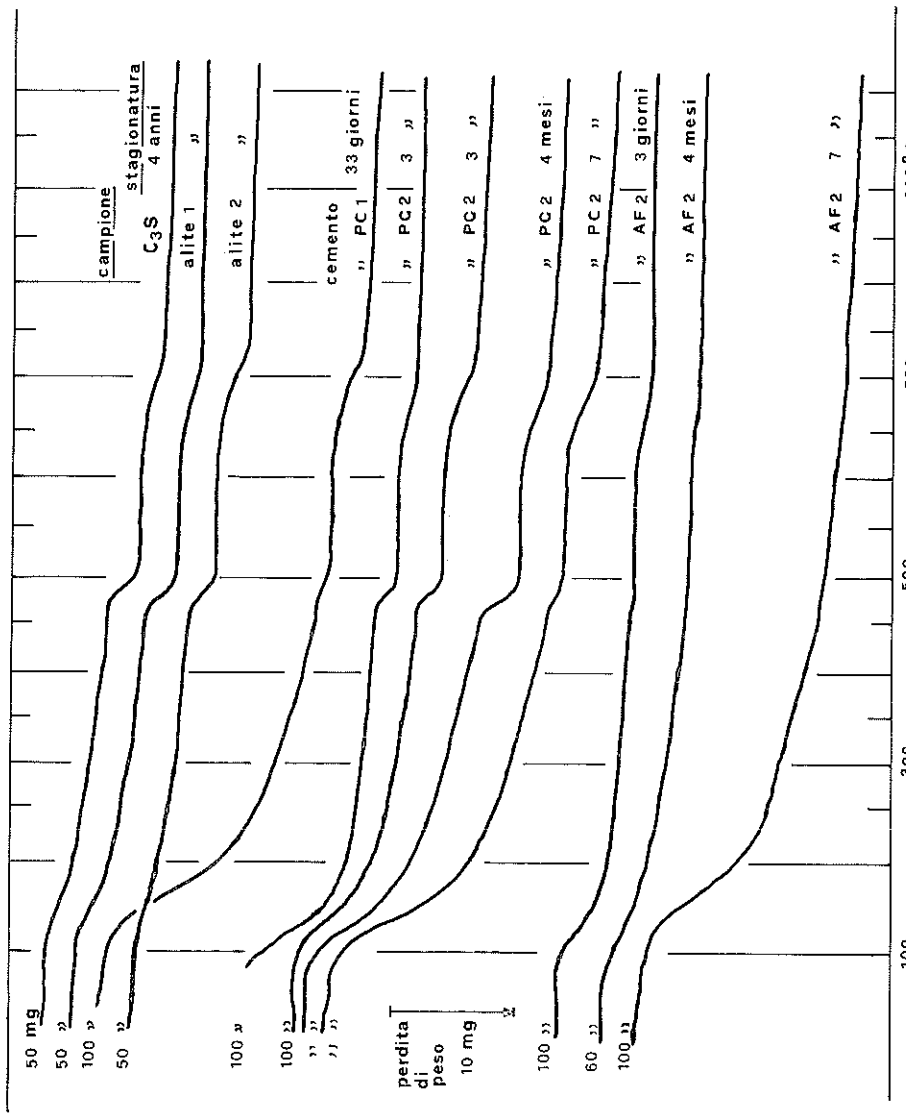


FIG. 1. - Curve termogravimetriche dei campioni di paste di C_3S, di aliti e dei cementi industriali.

Le misure di microdurezza sono state eseguite sulla parte interna delle paste ad una distanza di circa 150,450 e 750 μm dalla superficie esterna. Eseguendo cinque impronte per ogni distanza si hanno dieci diagonali dalla cui misura e relativa distribuzione è stata calcolata la misura media ed il suo intervallo di confidenza.

TABELLA II

Dati termogravimetrici delle paste delle aliti e dei cementi

campione di partenza e stagionatura	peso in mg		perdite parziali, percento in peso, $\frac{\Delta W}{W_{1000}} \cdot 100$				
	iniziale	finale	50-350°	350-440°	440-590°	590-800°	800-1000°C
C_3S	50	38,8	12,4	2,6	7,2	5,6	1,5
4 anni							
alite 1	50	38,8	14,0	2,1	7,2	4,6	1,1
4 anni							
alite 2	50	39,1	11,9	2,1	6,2	6,7	1,3
4 anni							
cemento PC1	100	77,5	19,6	2,8	1,7	3,7	1,2
33 giorni							
cemento PC2							
3 giorni	100	73,4	30	0,8	2,7	2,5	0,3
3 giorni	100 *	85,0	9,9	1,2	2,6	3,5	0,5
4 mesi	100	79,6	15,0	2,3	4,0	3,5	0,8
7 mesi	100	76,6	20,8	2,4	2,6	3,7	1,0
cemento AF2							
3 giorni	100 *	85,2	14,8	0,5	0,5	1,4	0,4
4 mesi	60	52,2	10,3	1,5	1,2	1,3	0,6
7 mesi	100	82,8	14,5	2,2	1,9	1,3	0,9

* Isoterma a 60°C non inclusa nella Fig. 1.

In Tabella III sono riportate le misure medie delle diagonali relative al C_3S da cui si deduce che la durezza ha un valore uniforme all'interno della pasta. Lo stesso dicasi per le altre paste.

Anche se i valori di microdurezza sono fortemente dipendenti da diversi fattori [11] quelli dedotti dalle sezioni lucide delle paste presentano un alto grado di riproducibilità. I campioni poi sono stati inclusi nello stesso provino e sono stati perciò sottoposti contempo-

raneamente alle stesse operazioni meccaniche di lucidatura. Anche la influenza della anidride carbonica e dell'umidità ambiente si deve manifestare in modo uguale per le superfici in esame. I valori della microdurezza così dedotti sono rappresentativi dell'interno della massa, mentre quelli misurati sulle superfici originarie dei campioni

TABELLA III

Misure delle diagonali medie relative al C_3S

Distanza dalla superficie μm	Diagonale media μm
150	32,29 ± 0,57
450	31,71 ± 1,43
750	31,20 ± 1,16

Diagonale media su tutto il campione: 31,76 ± 0,59.

non hanno mostrato una riproducibilità accettabile anche per la inerente difficoltà di superfici poco riflettenti. Tenendo presente che la durezza è una proprietà della superficie, è facile supporre come sia determinante l'esistenza di uno strato superficiale, cioè di una patina, la cui composizione e microstruttura sono continuamente alterate dall'ambiente e dalla durata di esposizione.

Per caratterizzare lo strato superficiale si è fatto perciò ricorso ad altre tecniche che ne permettano anche un confronto immediato con l'interno dello stesso campione.

La microscopia elettronica a scansione, la quale consente tra l'altro, di sottoporre i preparati all'osservazione senza apprezzabili variazioni [8], è stata di aiuto per studiare la tessitura sia delle superfici sia dell'interno.

Una caratteristica zona della superficie di un campione di pasta della alite 2 è riportata nelle micrografie della Fig. 2. Ad ingrandimenti successivi la superficie si rivela decisamente non piana, estremamente eterogenea, lasciando intravedere a volte le caratteristiche aree lamellari di formazioni di $Ca(OH)_2$. La stagionatura di 4 anni in un ambiente ad umidità relativa del 100 % ha permesso successive dissoluzioni e trasformazioni chimiche; la stessa superficie ha rivelato con il diffrattogramma X riportato in Fig. 5 di essere costituita da diverse fasi cristalline.

Le caratteristiche dell'interno della pasta possono essere agevolmente studiate osservando contemporaneamente le due superfici pro-

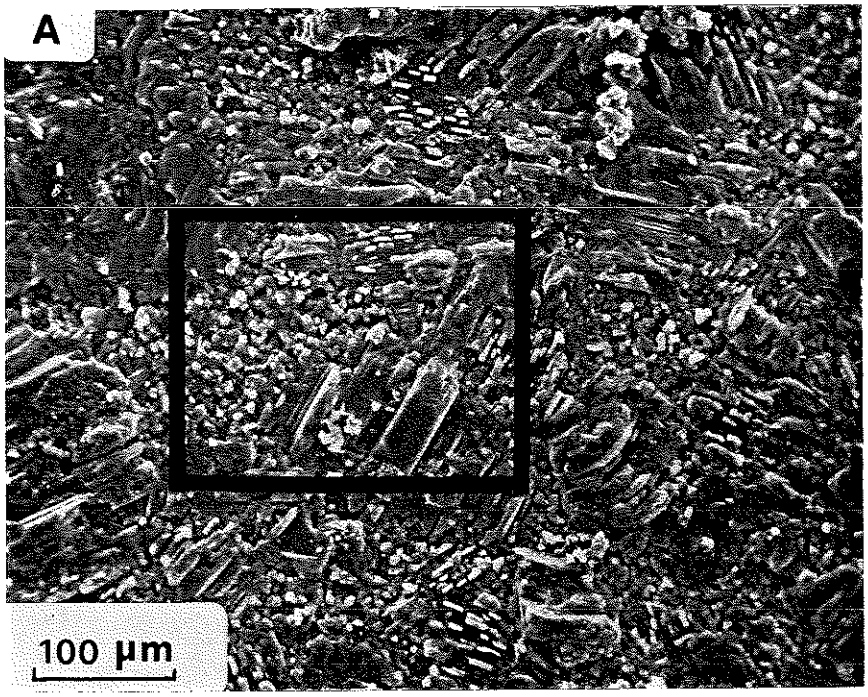


FIG. 2 A - Micrografia SEM della superficie della pasta dell'alite 2 dopo 4 anni di stagionatura. Il diffrattogramma della stessa superficie è riportato nella Fig. 5.

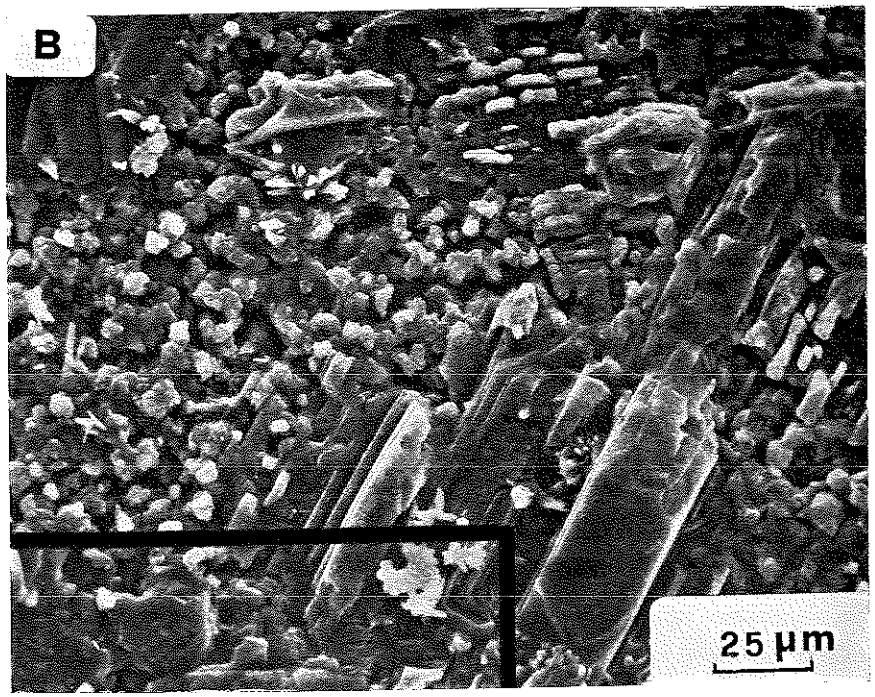


FIG. 2 B - Ingrandimento dell'area contrassegnata in Fig. 2 A. Aree lamellari cristalline di $Ca(OH)_2$.

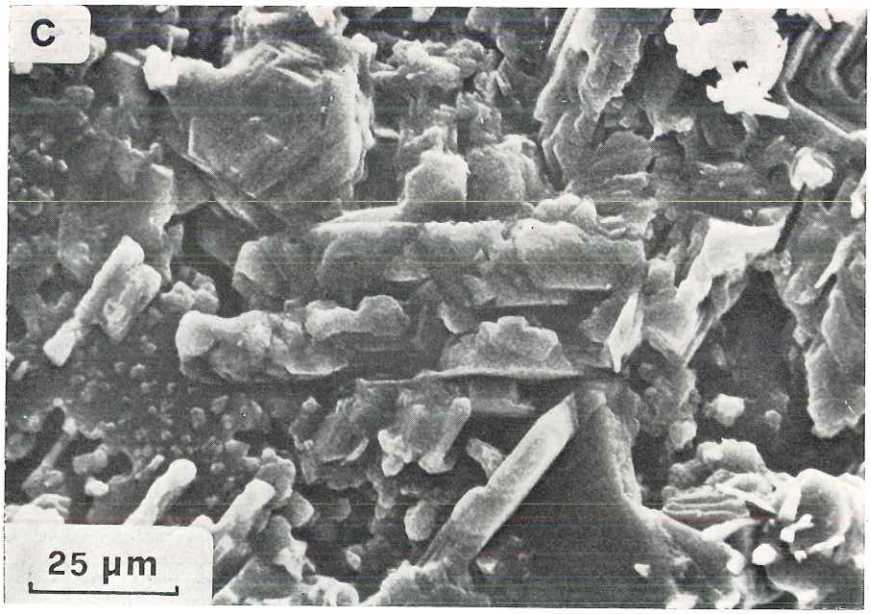


FIG. 2 C - Ingrandimento dell'area contrassegnata della Fig. 2 B. Aree cristalline esagonali e camellari.

venienti dalla stessa operazione di frattura [8]. Un campione di pasta della alite 2 ha mostrato una superficie di frattura parte della quale è riportata nella micrografia in basso della Fig. 3. Sono visibili, specie a forte ingrandimento, aree lamellari di $Ca(OH)_2$, vaste aree attribuibili al gelo C-S-H ed infine una porosità capillare di diverse dimensioni nella quale è favorita la crescita di forme fibrose. Le micrografie in alto nella Fig. 3 riportano le immagini dell'altra superficie di frattura e le zone che risultano perciò speculari sono state contrassegnate. L'osservazione contemporanea delle due superfici « gemelle » è in grado di chiarire le conseguenze di qualsiasi alterazione di morfologia quando una di esse è sottoposta ad attacco chimico. La superficie, riportata nella micrografia in alto, è stata infatti a contatto con una soluzione acquosa di NaCl per 15 minuti. La osservazione, specie a forte ingrandimento, rivela una dissoluzione preferenziale delle zone precedentemente occupate dal $Ca(OH)_2$, si rendono anche visibili le zone sottostanti ed un attacco periferico dei grani costituiti da C-S-H. La vistosa linea di frattura è successiva alla operazione meccanica in quanto è assente sull'altra faccia non attaccata, ed è anche evidente che essa si è propagata più facilmente agevolata dalle cavità preesistenti nella massa.

Le micrografie della Fig. 4 riportano analoghe immagini relative al campione di pasta dell'alite 2. Le micrografie in alto rappresentano la superficie simmetrica che è stata sottoposta all'attacco della stessa

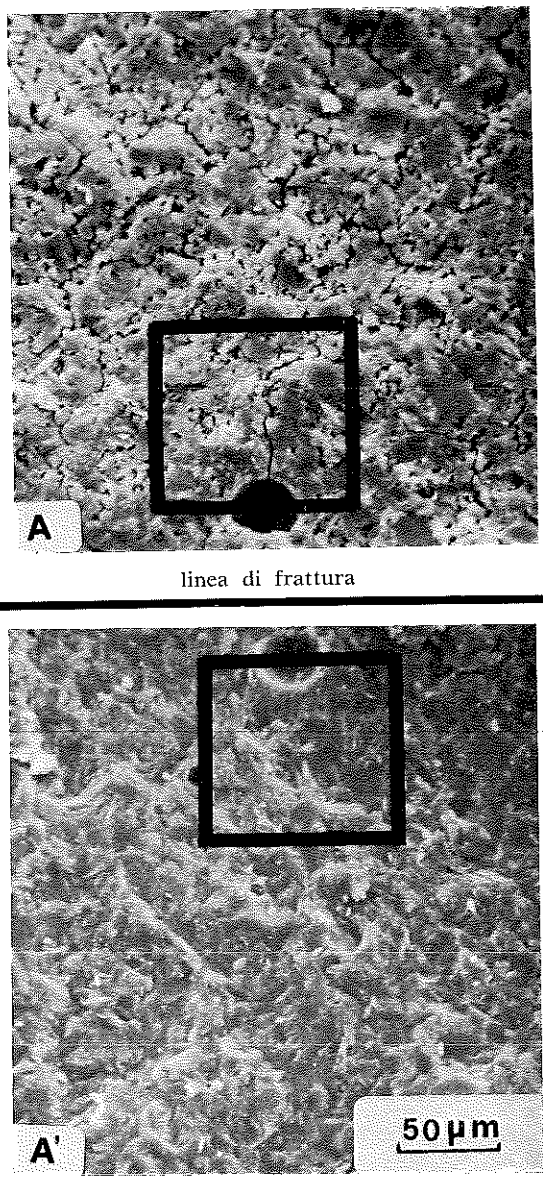
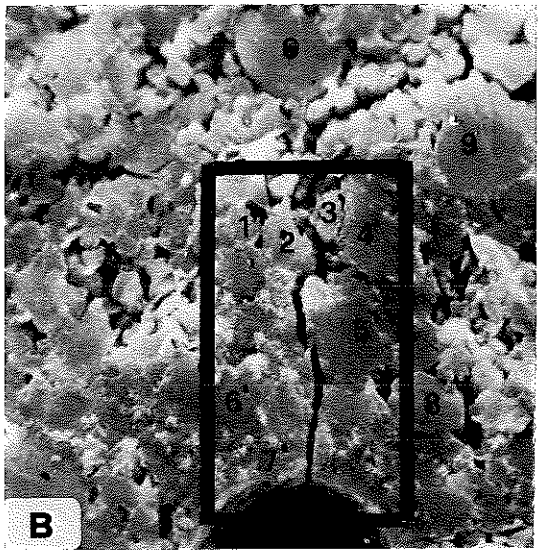
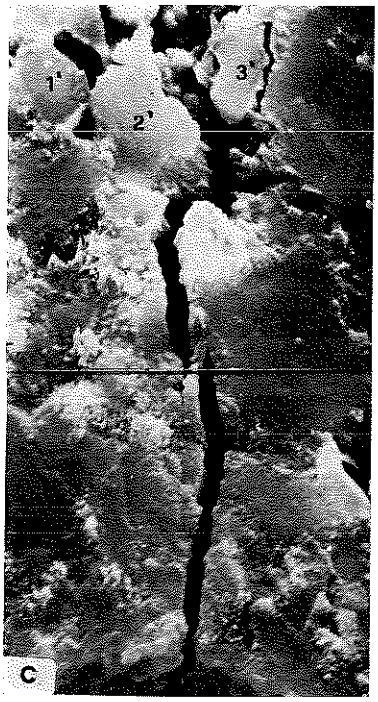
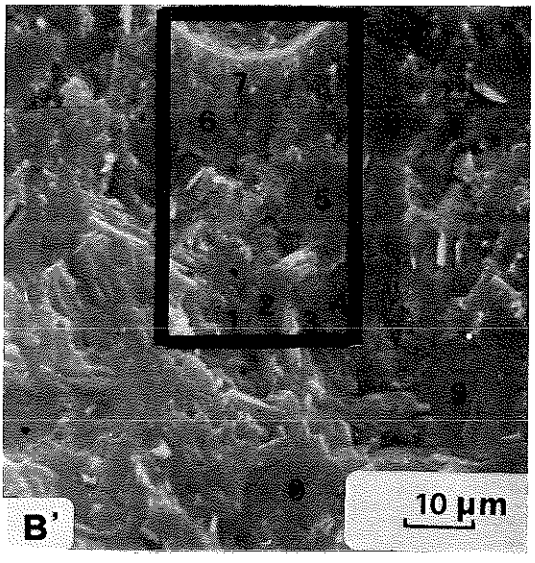


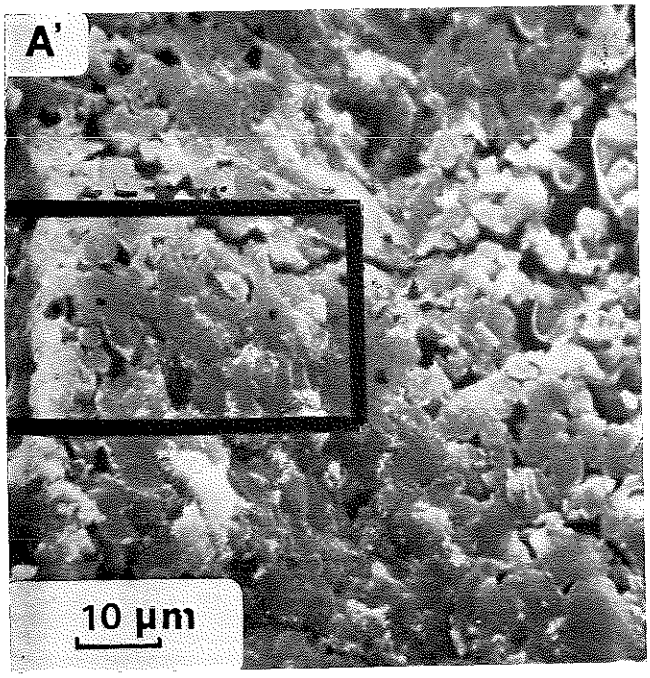
FIG. 3. - Micrografie SEM dell'interno della pasta dell'alite 2 rivelato dalle superfici di frattura. Una delle due superfici « gemelle » è stata attaccata per 15 min. con soluzione acquosa di NaCl, (micrografie A, B, e C). Le micrografie B e C, B′ e C′ sono ingrandimenti successivi rispettivamente delle micrografie A e A′.

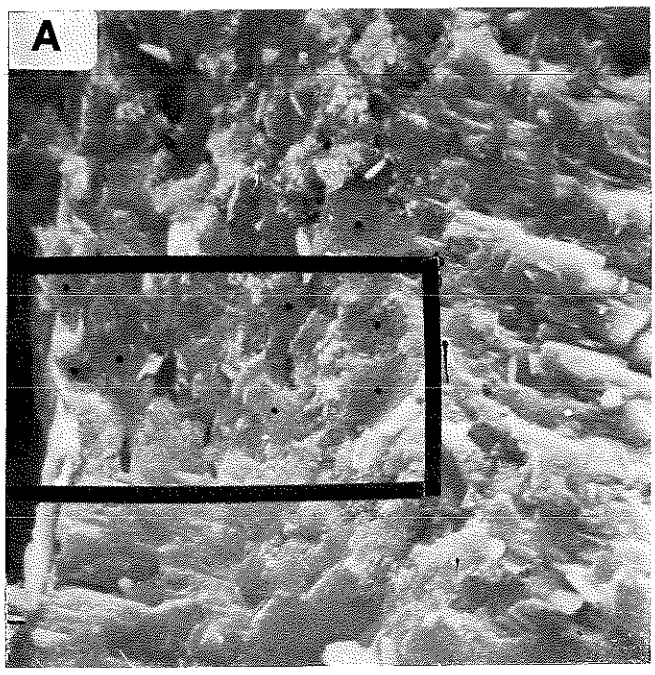

B

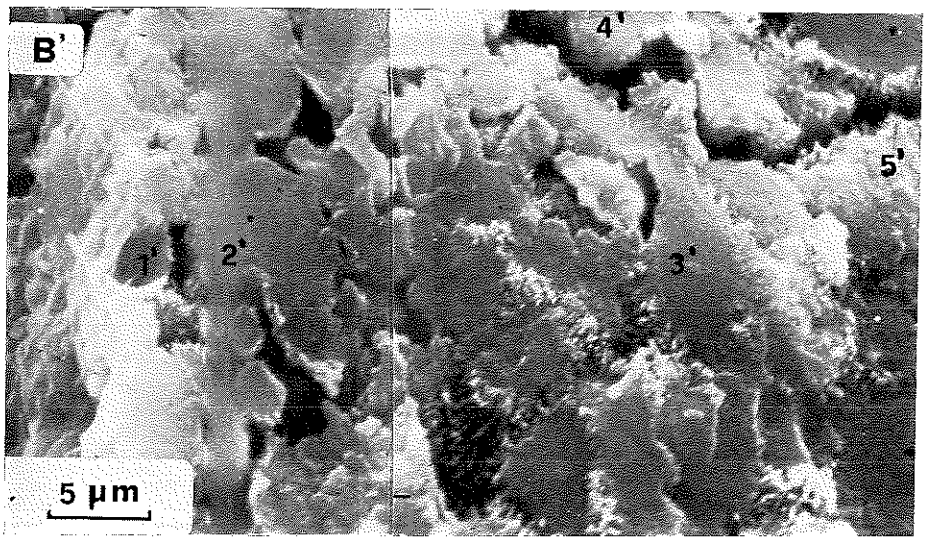

1'
2'
3'
C


B'
10 µm


C'
5 µm


A'
10 µm


A



linea di frattura

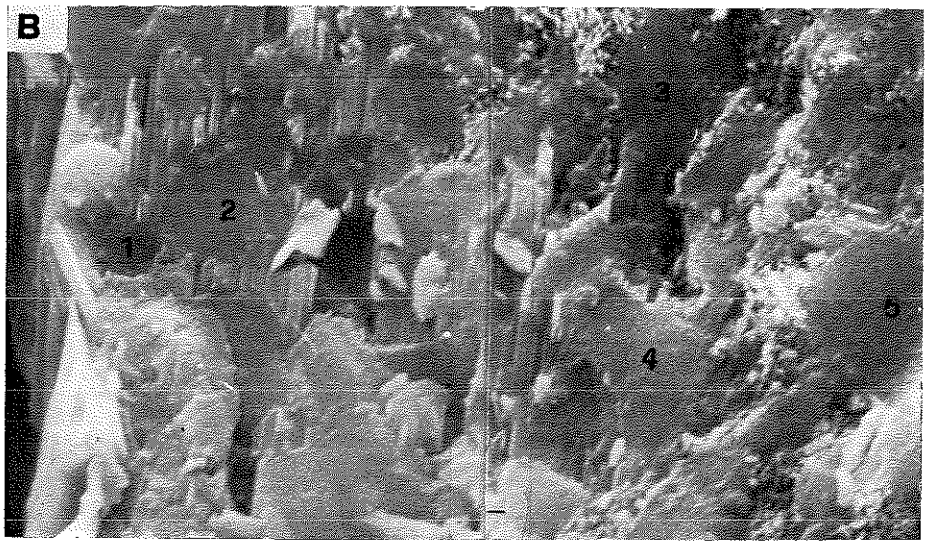


FIG. 4. - Micrografie SEM dello stesso campione di Fig. 3. La superficie « gemella » di frattura è stata attaccata per 30 min. con NaCl (micrografie A′ e B′).

soluzione di NaCl per 30 minuti. Le immagini confermano le osservazioni fatte precedentemente mettendo ancor più in risalto la specificità dell'attacco verso le aree di $Ca(OH)_2$; il loro allontanamento ha reso possibile l'osservazione di forme fibrose nell'interno di cavità precedentemente ricoperte.

Lo studio della costituzione dello strato superficiale può ricevere notevole aiuto dalla diffrazione dei raggi X quando il provino è messo inizialmente nello stesso porta-campioni del goniometro [10]. La superficie del campione di pasta della alite 2, lavata con CCl_4, rivela mediante il diffrattogramma riportato in Fig. 5 la presenza di diverse

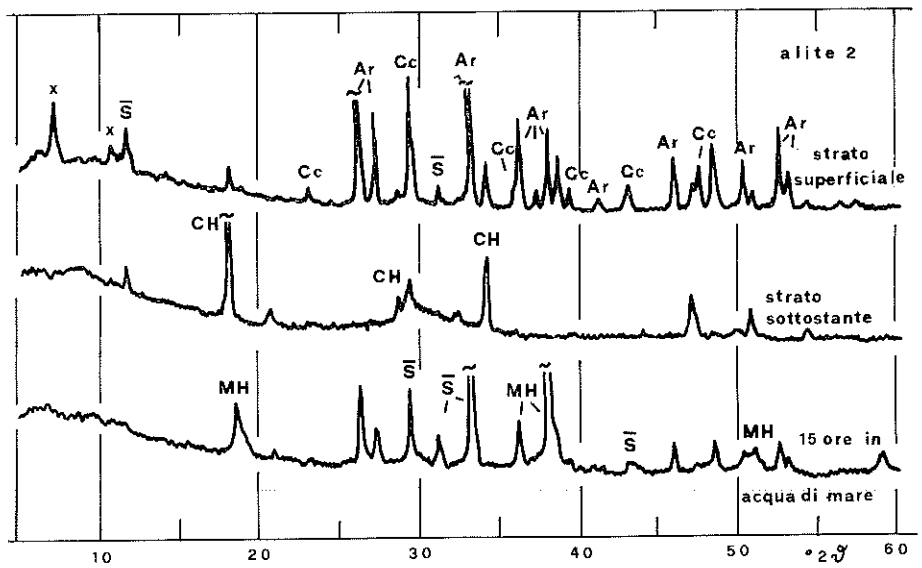


FIG. 5. - Diffrattogrammi X rilevati dai diversi strati superficiali dello stesso campione di pasta di alite 2.

fasi cristalline. La calcite presenta riflessi molto intensi, i riflessi a 48,50° 2θ e a 47,48° mostrano un anomalo rapporto di intensità. Anche l'aragonite presenta riflessi di notevole intensità anche se il picco a 33,14° 2θ presenta un intensità anomala rispetto a quello a 2θ = 26,26°. È anche presente il $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, mentre rimangono non assegnati i due riflessi a 2θ = 10,90° e a 12,46°. Quando tale patina viene rimossa meccanicamente la superficie sottostante può essere di nuovo esaminata nello stesso porta-campione dando un diverso diffrattogramma. Sono così evidenti i riflessi del $Ca(OH)_2$ mentre emergono anche i picchi molto larghi attribuibili al gelo C-S-H in corrispondenza di 50° 2θ e nell'intervallo 29,5 ÷ 31° 2θ. La reattività di

tale strato è dimostrata mettendolo a contatto con acqua di mare. I riflessi che compaiono nel diffrattogramma possono essere assegnati al $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, al $Mg(OH)_2$ ed alla aragonite.

b) Paste di cementi Portland industriali.

Lo studio svolto sulle paste di silicato tricalcico puro e su alcune sue soluzioni solide fornisce una base per l'interpretazione di dati e risultati derivanti dalle paste di cementi industriali.

Una prima indicazione della costituzione della massa globale delle paste di tre cementi industriali è fornita dai dati termogravimetrici, alcuni dei quali riportati nella Fig. 1 e nella Tabella II. Di notevole interesse è il confronto dei valori, esteso anche a quelli delle paste di silicato tricalcico e di aliti.

La perdita totale fino a 1000°C, riferita al peso iniziale, non supera il 25 % per i due cementi Portland e il 17 % per il cemento d'altoforno, valori che raggiungono rispettivamente il 30 % e il 18 % se riferiti al peso finale a 1000°C.

Come già accennato su tali valori permane una imprecisione dovuta alla impossibilità pratica di separare il contenuto dell'acqua libera da quello del gelo C-S-H, come si può ricavare dal confronto dei primi tempi di stagionatura. La perdita di peso tra i 350 e 440°C sembra stabilizzarsi tra il 2,4 e il 2,8 % per le lunghe stagionature mentre si registra un aumento fino ad un massimo del 2,2 % per il cemento d'altoforno. Significativa è anche la differenza che si riscontra per la perdita tra 440 e 590°C attribuita alla deidrossilazione del $Ca(OH)_2$. Tuttavia il valore del 4 % ottenuto per il cemento PC2 sembra essere troppo elevato. La perdita dovuta alla carbonatazione mostra un valore quasi costante per ogni tipo di pasta mentre passando dalle paste di aliti a quelle del cemento d'altoforno diminuisce sensibilmente e proporzionalmente al contenuto di $Ca(OH)_2$. Analogo andamento sembra mostrare la perdita da 800 a 1000°C.

I diffrattogrammi X ottenuti dalla superficie dei campioni dopo aver rimosso lo strato precedente permettono di seguire l'evolversi dei prodotti di idratazione. Dopo una stagionatura di 33 giorni in acqua dolce la patina superficiale del cemento Portland PC1 rivela la presenza di calcite come fase cristallina predominante, Fig. 6. La rimozione di tale strato il cui spessore è dell'ordine di alcune decine di μm rivela lo strato sottostante idratato parte ancora carbonatato e parte ancora anidro. È da constatare che la presenza di $Ca(OH)_2$ non viene segnalata con riflessi molto intensi nel diffrattogramma anche se è stata rivelata dall'analisi termogravimetrica, e questo si riscontra

anche per i campioni degli altri due cementi. La presenza di $Ca(OH)_2$ nella pasta di cemento matura è segnalata invece nei diffrattogrammi ottenuti dalla stessa pasta di cemento macinata [10]. La reattività di tale superficie con acqua di mare evolve nella formazione delle fasi cristalline: calcite, aragonite e idrossido di magnesio. Rispetto alla pasta di alite, Fig. 5, si nota l'assenza di $CaSO_4 \cdot 2H_2O$.

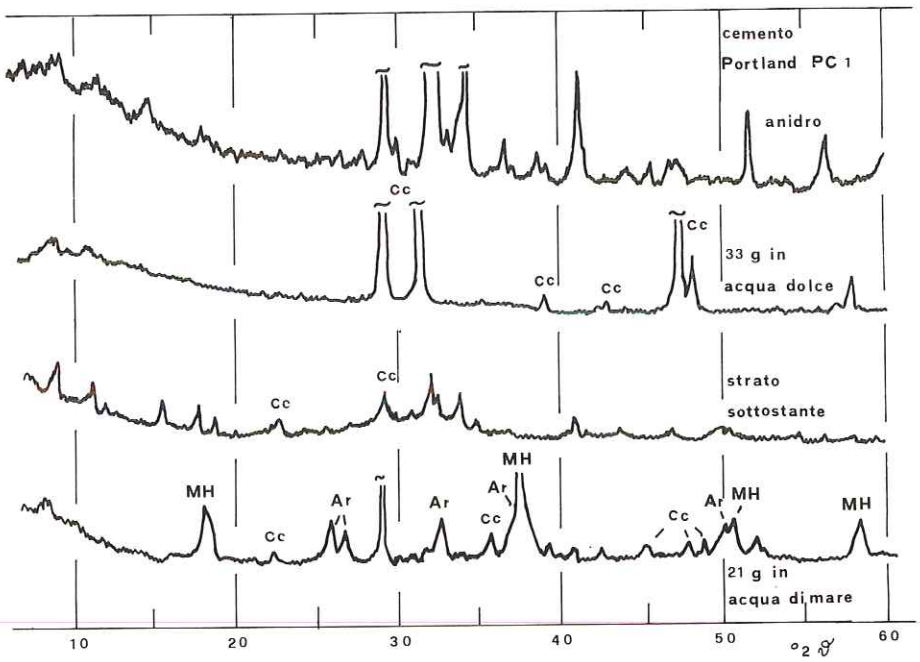


FIG. 6. - Diffrattogrammi X rilevati dai diversi strati superficiali dello stesso campione di pasta di cemento Portland PC1.

Il cemento Portland PC2 e quello d'altoforno AF2, derivante dallo stesso clinker, mostrano una reattività molto simile tenuto conto della differenza di composizione, Fig. 7 e Fig. 8. La stagionatura di tre giorni in acqua dolce provoca la formazione di calcite e per il PC2 anche di aragonite. Tale formazione continua nei tempi successivi ma con una presenza maggiore nello strato superficiale del cemento d'altoforno, in contrasto con l'interno della massa come rilevato dai dati termogravimetrici. L'acqua di mare favorisce per tutti e due i cementi la formazione di calcite e di aragonite. Lo strato immediatamente sottostante rivela la presenza di $Ca(OH)_2$ per il cemento Portland puro. Sulle superfici « fresche », così ottenute, l'acqua di mare produce la formazione di calcite, $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ e $Mg(OH)_2$.

L'assenza di quest'ultimo sulla superficie del cemento d'altoforno può suggerire che la sua formazione avviene per la maggior parte a spese del $Ca(OH)_2$ libero e quando è presente in notevole quantità.

Di notevole difficoltà risulta l'interpretazione della microstruttura all'osservazione condotta mediante il SEM, sopratutto a causa della presenza dei numerosi prodotti di idratazione. Particolarmente utile

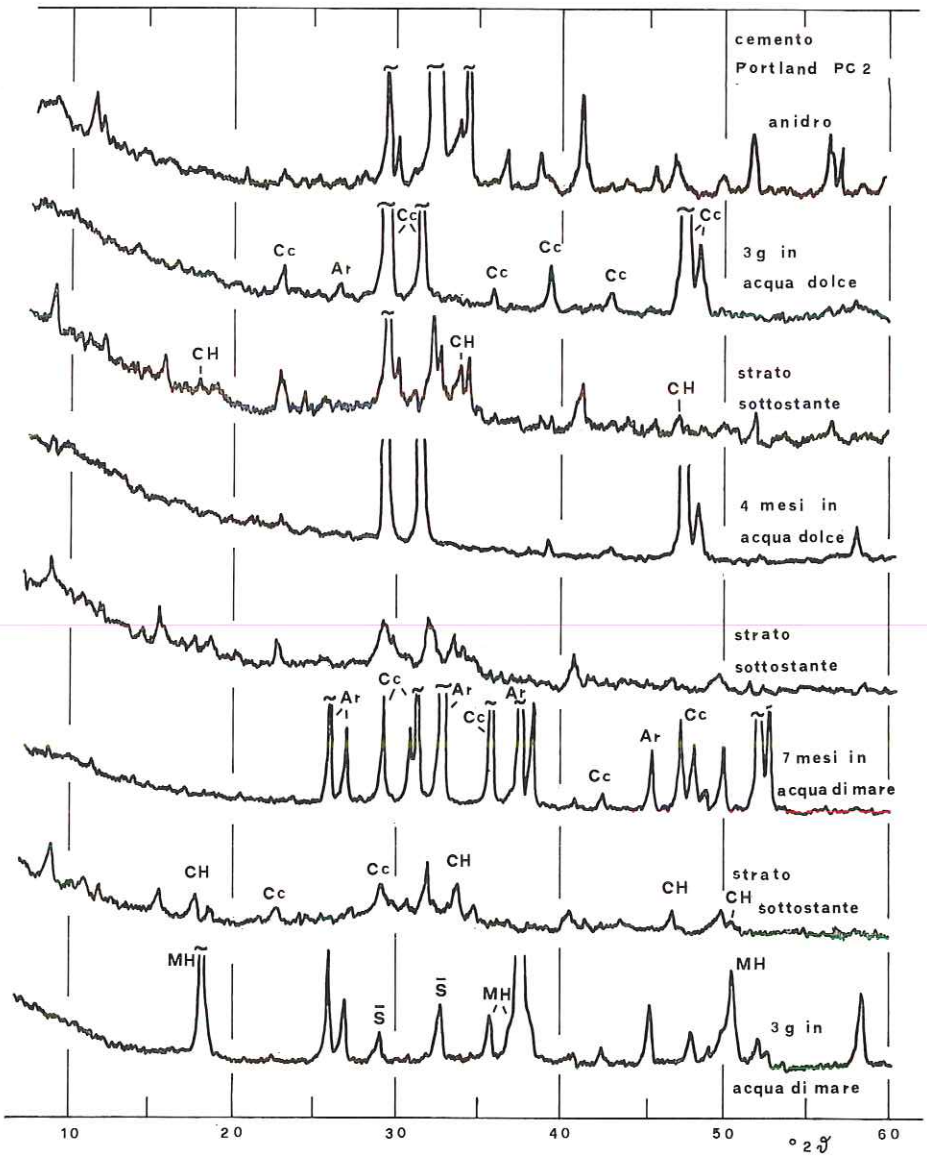


FIG. 7. - Diffrattogrammi X rilevati dai diversi strati superficiali dello stesso campione di pasta di cemento Portland PC2

per tale studio morfologico si è dimostrata la notevole profondità di campo del SEM. Le micrografie della Fig. 9 mettono appunto in evidenza la possibilità di osservare la patina costituente lo strato superficiale del campione di pasta del cemento Portland PC1. La tessitura di tale patina si presenta molto compatta con formazioni cristalline dotate di facce di crescita molto ben sviluppate verso l'esterno.

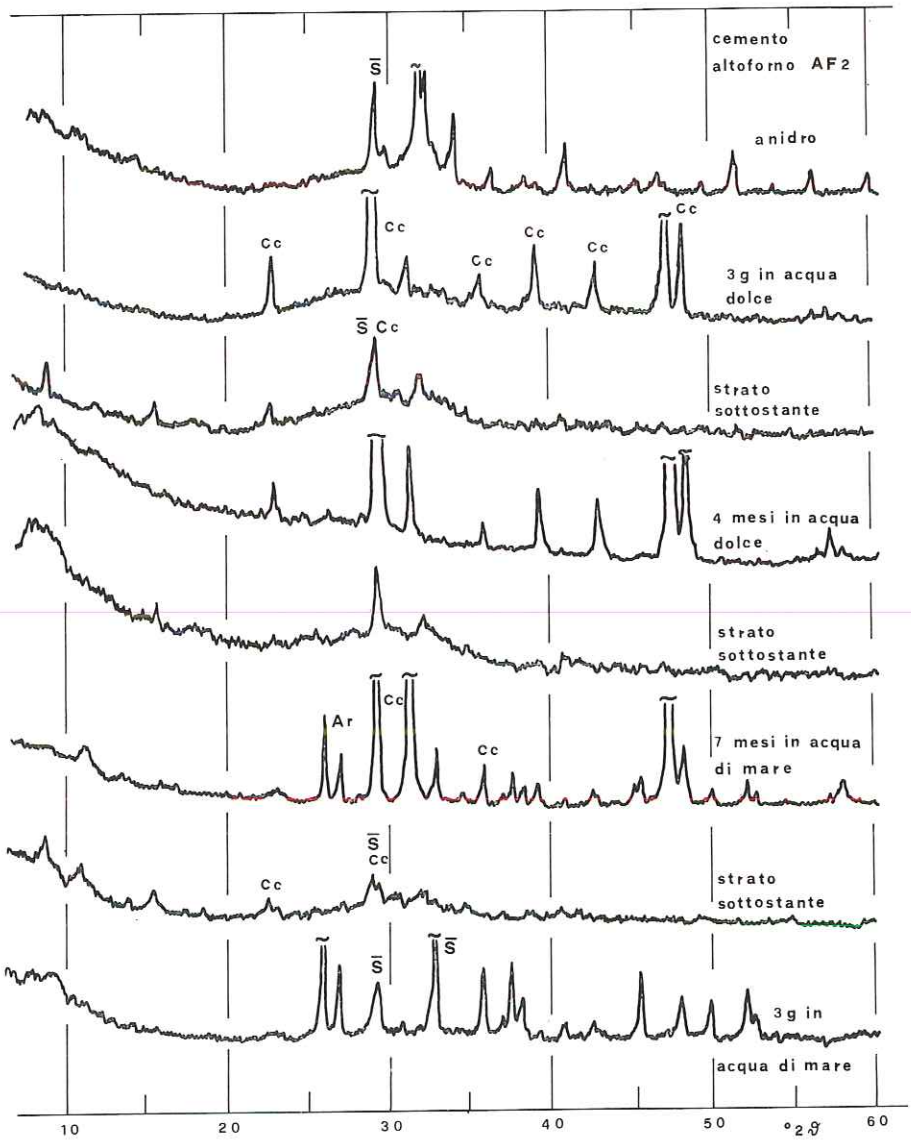


FIG. 8. - Diffrattogrammi X dei diversi strati superficiali dello stesso campione di pasta di cemento d'altoforno AF2.

Risulta anche evidente la linea di frattura che la separa dalle masse interne anch'esse notevolmente compatte ma senza aspetti morfologici caratteristici.

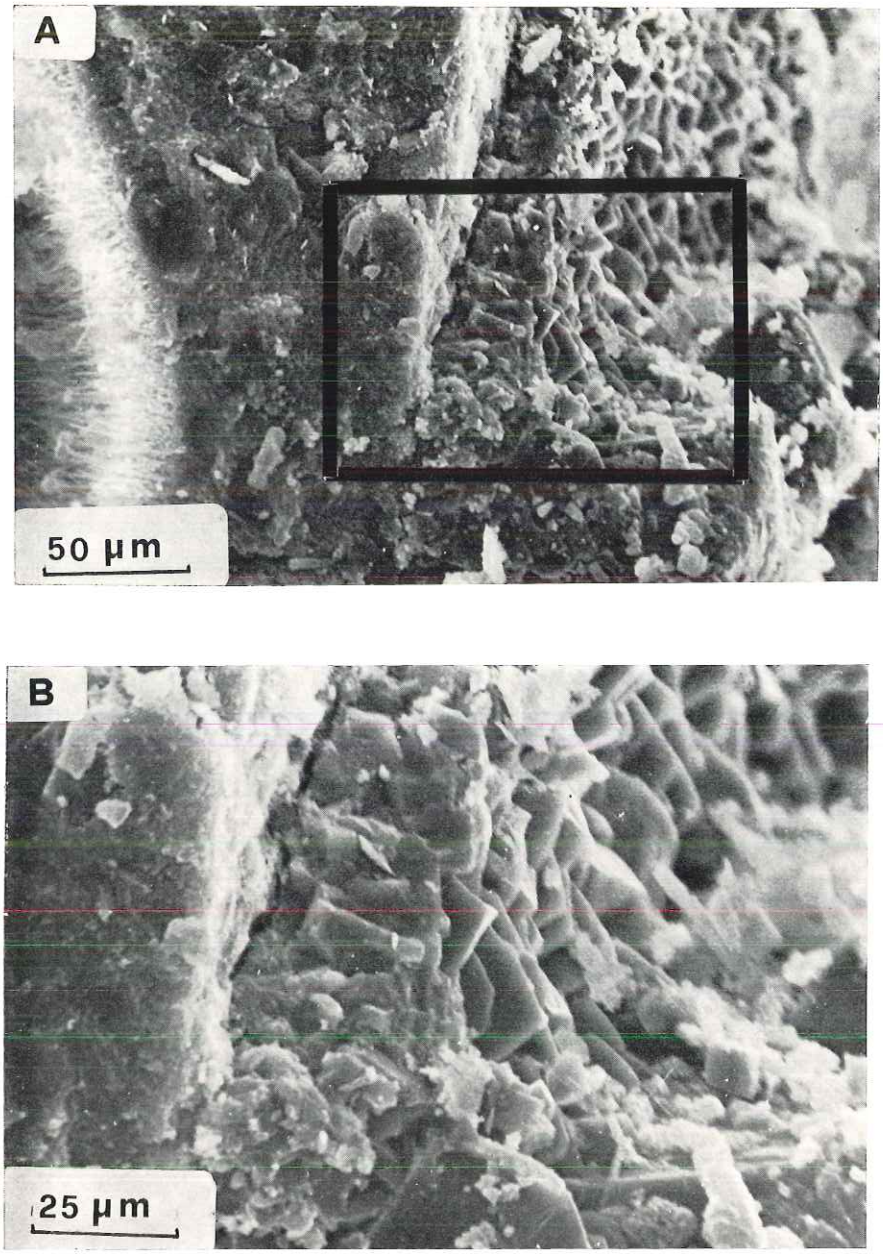


FIG. 9. - Micrografie SEM del campione di pasta di cemento Portland PC2 dopo 4 mesi di stagionatura. La patina quasi staccata mostra uno spessore di circa 40 µm.

Conclusioni

La costituzione dello strato superficiale è stata dedotta mediante diffrattometria X e microscopia elettronica a scansione per le paste di silicato tricalcico, di aliti e di tre tipi cementi Portland industriali. Ulteriore studio è necessario per le paste di cemento e le osservazioni al SEM sono tuttora in via di svolgimento. Conclusioni più specifiche si possono così riassumere:

1) La conoscenza della costituzione della massa interna delle paste è essenziale per seguire le successive alterazioni. L'analisi termogravimetrica è stata in grado di determinare il contenuto del $Ca(OH)_2$, del $CaCO_3$. Per il cemento d'altoforno le perdite dell'intervallo 350-440° e 440-590° sembrano aumentare con regolarità col tempo di stagionatura; il valore dell'intervallo 350-440°C a 7 mesi è quasi uguale a quello del PC2 a 4 mesi.

2) Le misure di microdurezza sono riproducibili quando sono effettuate su sezioni lucide dell'interno delle masse. Per le paste mature di silicato tricalcico e delle aliti il valore è intorno a 88,72 kg/mm^2. Le misure effettuate sugli strati superficiali risentono notevolmente delle alterazioni apportate dall'ambiente.

3) La diffrattometria X è in grado di determinare la natura delle fasi cristalline costituenti lo strato superficiale. È stata accertata la presenza di carbonato sotto forma di calcite ed aragonite, come pure quella di $CaSO_4 \cdot 2H_2O$. Quando tale patina è allontanata meccanicamente può essere messo in evidenza l'interno della pasta inalterato. È possibile quindi seguirne la reattività verso le diverse soluzioni aggressive. L'attacco dell'acqua di mare in particolare lascia uno strato le cui fasi cristalline sono: calcite, aragonite, $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ e $Mg(OH)_2$.

Ringraziamenti

Gli Autori ringraziano il Prof. R. Sersale per gli incoraggiamenti ricevuti. Il presente lavoro è stato svolto col contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Istituto di Chimica Applicata della Facoltà di Ingegneria Università di Napoli - Piazzale Tecchio - 80125 Napoli.

Bibliografia

[1] Wittmann F. H., *The Structure of Hardened Cement Paste*, Proc. Confer. Sheffield, 8-9 April 1966, pag. 96-117.

[2] Powers T. C., *The Nature of Concrete*, ASTM Spec. Tecn. Pub. no. 169-A, 61-72 (1966).

[3] BRENNEISEN A., *Problemes de la fissuration dans les ovrages*, Colloque Behaviour in Service of Concrete Structures - Liege, Tome IV, pag. 265-308 (1975).

[4] HAMADA M., *Carbonation of Concrete*, Session III-3, 343-369 V° Inter. Symp. Chem. Cem., Tokyo (1968).

[5] VALENTA O., MODRY S., *A Study of the Deterioration of Surface Layer of Concrete Structures*, Inter. Symp. RILEM V, A55-A64 (1969).

[6] SLEGER P. A., ROUXHET P. G., *Carbonation of the Hydration Products of Tricalcium Silicate*, Cem. Concr. Res., **6**, 381-388 (1976).

[7] SCHRÖDER F., SMOLCZYK M. G., *Behaviour in Aggressive Solutions*, Tome IV, 181-188 V, Inter. Symp. Chem. Cem., Tokyo (1968).

[8] MARCHESE B., *SEM Topography of Twin Fractures Surfaces of Alite Pastes 3 Years Old*, Cem. Concr. Res., **7**, 9-18 (1977).

[9] MARCHESE B., *Microstructure of Mature Alite Pastes*, J. Amer. Ceram. Soc. In Press.

[10] MARCHESE B., *Chemical Resistance of Cement Pastes. I Patina Alterations*, Cem. Concr. Res. In Press.

[11] SEREDA P. J., *Significance of Microhardness of Porous Inorganic Materials*, Cem. Concr. Res., **2**, 717-729 (1972).

[12] TRAETTEBERG A., RAMACHANDRAN V. S., *The Microstructural and Hardening Behaviour of Tricalcium Silicate Pastes in the Presence of* $CaCl_2$, J. Appl. Chem. Biotechnol., **24**, 157-170 (1974).

[13] TRAETTEBERG A. SEREDA P. J., *Strength of* C_3A *Paste Containing Gypsum and* $CaCl_2$, Cem. Concr. Res., **6**, 461-476 (1976).

[14] FELDMAN R. F., BEAUDOIN J. J., *Studies of Composites made by Impregnation of Porous Bodies I.*, Cem. Concr. Res., **7**, 19-30 (1977).

[15] MARCHESE B., *Il contributo della SEM allo studio delle paste di cemento. Nota III: microstruttura di paste di* C_3S *e di aliti, lungamente stagionate*, Il Cemento, **73**, 195-208 (1976).

[16] EL-JAZAIRI B., ILLSTON J. M., *A Simultaneous semi-isothermal method of TG and derivative TG, and its Application to Cement Pastes*, Cem. Concr. Res., **7**, 247 (1977).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. Sersale, M. Covello e P. Corradini.

Una applicazione delle disequazioni variazionali in geometria differenziale globale di varietà riemanniane

Nota di DOMENICO PERRONE (Lecce) *
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza del 3 dicembre 1977)

RIASSUNTO. — Utilizzando tecniche di disequazioni variazionali valide in R^n e in spazi di Hilbert H, si può dimostrare un teorema di geometria differenziale globale di varietà riemanniane, teorema dovuto a È. CARTAN in ipotesi più generali.

SUMMARY. — Using technics of variational incqualities valid in R^n and in Hilbert spaces H, we can prove a theorem of global differential geometry for riemannian manifolds, theorem due a È. CARTAN in more general hypotheses.

Sia M una varietà riemanniana C^∞ di dimensione n, completa, semplicemente connessa ed orientata.

Sia K un gruppo compatto operante su M mediante isometrie.

In questa nota proviamo anzitutto il

TEOREMA. — Se M ha curvatura sezionale nulla in ogni punto, esiste in M un punto y_o che è soluzione di una disequazione variazionale ed è punto fisso di tutte le trasformazioni di K.

Dimostrazione. — Sia μ la misura di Haar di K normata dalla condizione $\int_K \mu(d\,k) = 1$

Indichiamo con $\varphi : K \times M \to M$ l'applicazione che definisce l'azione di K su M.

Fissato $x_o \in M$, consideriamo l'operatore $A : M \to T(M)$ così definito:

$$\forall\, y \in M,\ A\, y = -\,2\, Y_K$$

$$\text{con}\ \ Y_K \in T_y(M)\ \ni'\ \mathrm{Exp}_y\, Y_K = \int_K \varphi(k, x_o)\, \mu(d\,k).$$

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Ricerca sulle strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni.

Ora tenendo conto che la varietà M è isometrica allo spazio tangente $T_x(M)$ per ogni $x \in M$, allora senza perdere di generalità possiamo operare su M supponendo che sia uno spazio euclideo R^n. Pertanto l'operatore $A\,y$ lo possiamo esprimere così:

$$A\,y = 2\left(y - \int_K \varphi(k, x_o)\,\mu(d\,k)\right).$$

L'operatore A è ovviamente continuo, inoltre è strettamente monotono in quanto $\forall\, y_1, y_2 \in M : < A\,y_2 - A\,y_1, y_2 - y_1 > = 2 < y_2 - y_1, y_2 - y_1 > = 2 \| y_2 - y_1 \|^2 \geq 0$ ed è $= 0$ se e solo se $y_1 = y_2$.

Quindi se V è un chiuso convesso limitato non vuoto di M, siamo nelle ipotesi per applicare il teorema di esistenza ed unicità per la soluzione di una disequazione variazionale (cfr. [4]) cioè:

$$(1) \qquad \exists!\, y_o \in V : < A\,y_o, y - y_o > \geq 0 \qquad \forall\, y \in V.$$

Consideriamo ora la funzione reale non negativa $\mathfrak{J} : M \to R$ definita da $\mathfrak{J}(y) = \int_K \| y - \varphi(k, x_o) \|^2 \mu(d\,k)$.

Osserviamo che l'operatore grad $\mathfrak{J}(y)$ coincide con l'operatore A considerato, infatti

$$\mathfrak{J}(y) = \| y \|^2 + \int_K \| \varphi(k, x_o) \|^2 \mu(d\,k) - 2 < \int_K \varphi(k, x_o)\,\mu(d\,k), y >$$

e quindi

$$\mathfrak{J}'(y)(h) = 2 < y, h > - 2 < \int_K \varphi(k, x_o)\,\mu(d\,k), h > =$$

$$= < A\,y, h > \qquad \forall\, h \in M,$$

ma

$$< \text{grad}\, \mathfrak{J}(y), h > = \mathfrak{J}'(y)(h) = < A\,y, h >$$

pertanto $A\,y = \text{grad}\, \mathfrak{J}(y)$.

D'altronde la funzione $\mathfrak{J}(y)$ è convessa, difatti abbiamo che

$$\forall\, y_1, y_2 \in M,\ \forall\, t \in [0,1] : \mathfrak{J}(t\,y_1 + (1 - t)\,y_2) =$$

$$= \int_K \| t\,y_1 + (1-t)\,y_2 - \varphi(k, x_o) \|^2 \mu(d\,k \leq t^2 \int_K \| y_1 - \varphi(k, x_o) \|^2 \mu(d\,k) +$$

$$+ (1-t)^2 \int_K \| y_2 - \varphi(k, x_0) \|^2 \mu(dk) + 2t(1-t) \int_K \| y_1 - \varphi(k, x_0) \| \cdot$$

$$\cdot \| y_2 - (k, x_0) \| \mu(dk) \leq t^2 \mathfrak{J}(y_1) + (1-t)^2 \mathfrak{J}(y_2) +$$

$$+ t(1-t) \int_K \{ \| y_1 - \varphi(k, x_0) \|^2 + \| y_2 - \varphi(k, x_0) \|^2 \} \mu(dk) =$$

$$= t \mathfrak{J}(y_1) + (1-t) \mathfrak{J}(y_2).$$

La funzione $\mathfrak{J}(y)$ essendo convessa verificherà la relazione:

$$\mathfrak{J}(y) \geq \mathfrak{J}(y_0) + < A y_0, y - y_0 > \qquad \forall y \in V$$

e per la (1) si avrà $\mathfrak{J}(y) \geq \mathfrak{J}(y_0)$ $\forall y \in V$, cioè y_0 è di minimo per $\mathfrak{J}(y)$ su V.

Proviamo che y_0 è l'unico punto di minimo per $\mathfrak{J}(y)$ su V, cioè

$$(2) \qquad \forall y \in V,\ y \neq y_0 : \mathfrak{J}(y) > \mathfrak{J}(y_0).$$

Supponiamo per assurdo che esista $y_1 \in V$ con $y_1 \neq y_0$ di minimo per $\mathfrak{J}$ su V, allora considerata la funzione

$$\Phi(t) : [0,1] \to R \ni' t \to \mathfrak{J}(t y + (1-t) y_1)$$

con y fissato punto di V, questa funzione ha minimo per $t = 0$ pertanto si avrà

$$0 \leq \Phi'(0) = \mathfrak{J}'(y_1)(y - y_1) = < \operatorname{grad} \mathfrak{J}(y_1), y - y_1 >$$

$$\text{cioè } < A y_1, y - y_1 > \geq 0 \qquad \forall y \in V$$

con $y_1 \neq y_0$ e cioè non è possibile perché il problema (1) ammette un'unica soluzione.

Osserviamo a questo punto che essendo l'orbita di x_0 limitata, esisterà una palla $B_r(x_0)$ di centro x_0 e raggio r tale che $\mathfrak{J}(y) > r^2$ per ogni $y \notin B_r(x_0)$ e $\mathfrak{J}(y) \leq r^2$ per ogni $y \in B_r(x_0)$.

Quindi, scegliendo il chiuso convesso V in modo che contenga $B_r(x_0)$, il punto y_0 sarà anche di minimo per $\mathfrak{J}(y)$ su M, cioè

$$(3) \qquad \mathfrak{J}(y) > \mathfrak{J}(y_0) \qquad \forall y \in M, \qquad y \neq y_0.$$

Facciamo vedere infine che y_0 è punto fisso comune a tutte le trasformazioni di K; intanto poiché gli elementi di K operano come

isometrie e μ è invariante a sinistra, si avrà:

$$\mathfrak{I}(\varphi(k, y_0)) = \mathfrak{I}(y_0) \qquad \forall\, k \in K. \tag{4}$$

Supponiamo che esista un k tale che $\varphi(k, y_0) \neq y_0$, allora preso il punto $(1 - t)\,\varphi(k, y_0) + t\, y_0$ con $t \in [0,1[$

si avrebbe (tenendo conto della convessità di $\mathfrak{I}(y)$ e della (4)):

$$\mathfrak{I}((1 - t)\,\varphi(k, y_0) + t\, y_0) \leq (1 - t)\,\mathfrak{I}(y_0) + t\,\mathfrak{I}(y_0) = \mathfrak{I}(y_0)$$

e ciò è assurdo perché contraddice la (3).

Quindi

$$\varphi(k, y_0) = y_0 \qquad \forall\, k \in K. \qquad \text{c. v. d.}$$

Il teorema ora dimostrato è caso particolare di un risultato classico di È. CARTAN (cfr. [3] pag. 75).

Con tecniche simili alle precedenti stabiliamo un altro caso particolare del teorema generale di È. CARTAN.

Proposizione. — Se M ha una curvatura sezionale ≤ 0 in ogni punto, le trasformazioni di K hanno un punto fisso in comune.

Dimostrazione. — Consideriamo la funzione $\mathfrak{I} : M \to R$ definita da

$$\mathfrak{I}(y) = \int_K d^2(y, \varphi(k, x_0))\, \mu(d\,k)$$

ove d è la distanza in M e x_0 un fissato punto di M.

Siccome la palla $B_r(x_0)$ è compatta e $\mathfrak{I}(y)$ è continua, allora l'esistenza di un punto di minimo per $\mathfrak{I}(y)$ su M è assicurata. Detto y_0 tale punto, facciamo vedere che y_0 è l'unico punto di minimo per $\mathfrak{I}(y)$. Ci consideriamo la funzione $\mathfrak{I}' : T_{y_0}(M) \to R$ tale che

$$\mathfrak{I}'(Y) = \int_K \| Y - F(k, x_0) \|^2\, \mu(d\,k) \qquad \forall\, Y \in T_{y_0}(M)$$

ove $F : K \to T_{y_0}(M)$ è tale che $F(k, x_0) = \operatorname{Exp}_{y_0}^{-1} \varphi(k, x_0)$.

Siccome vale $\| F(k, x_0) \| = d(y_0, \varphi(k, x_0))$, segue che $\mathfrak{I}(y_0) = \mathfrak{I}'(0)$. Inoltre lo spazio tangente $T_{y_0}(M)$ si può identificare con R^n, quindi per quanto già visto lo zero sarà l'unico punto di minimo per $\mathfrak{I}'(Y)$.

Perciò $\mathcal{J}(y_0) = \mathcal{J}'(0) < \mathcal{J}'(Y)$ per ogni $Y \in T_{y_0}(M)$ e $Y \neq 0$, ma $\mathcal{J}'(Y) \leq \mathcal{J}(y)$ (difatti l'applicazione Exp aumenta la distanza) perciò $\mathcal{J}(y_0) < \mathcal{J}(y)$ $\forall\, y \in M,\ y \neq y_0$.

Segue ora facilmente che y_0 è punto fisso comune a tutte le trasformazioni di K, perché se esistesse un $k \in K$ tale che $\varphi(k, y_0) \neq y_0$ dalla (4) si avrebbe $\mathcal{J}(\varphi(k, y_0)) = \mathcal{J}(y_0)$ con $\varphi(k, y_0) \neq y_0$ e ciò non è possibile.

Osservazione. — Sia ora X una varietà riemanniana C^∞ completa, semplicemente connessa, modellata su uno spazio di Hilbert separabile H.

Il teorema dimostrato in dimensione finita, continua a valere anche in dimensione infinita. Cioè se X ha curvatura sezionale nulla in ogni punto e K un gruppo compatto operante su X mediante isometrie, allora esiste un punto y_0 di X soluzione di una disequazione variazionale su X e punto fisso comune a tutte le trasformazioni di K. Difatti X è ancora isometrica ad H e tutte le altre considerazioni utilizzate nella dimostrazione valgono anche in spazi di Hilbert.

D'altra parte, se X ha curvatura sezionale ≤ 0, non possiamo applicare alla dimensione infinita la stessa tecnica, usata in dimensione finita, poiché la palla $B_r(x_0)$ è compatta se e solo se X ha dimensione finita. Inoltre l'applicazione esponenziale stabilisce un diffeomorfismo di H su X, il quale non è in generale un'isometria. A questo rilievo si presta la nota [1] (cfr. pag. 261).

BIBLIOGRAFIA

[1] Craioveanu M., *Quelques résultats sur la géométric différentielle globale des variétés hilbertiennes*, Lincei Rend. Sc. fis. mat. nat., vol. XLVII, 253-263 (nov. 1969).

[2] Eells J. Jr., *A setting for global analysis*. Bull. of. the Amer. Math. Soc., **72**, 751-807 (1966).

[3] Helgason S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press - New York, 1962.

[4] Perrone D., *Disequazioni variazionali su varietà riemanniane di dimensione finita*, Rend. Accad. Sc. fis. e mat. della Soc. Naz. di Scienze, lettere e arti in Napoli, Serie IV, vol. XLII, 530-543 (1975).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, V. Dalla Volta e G. Panella.

Palynologic research on Triassic cyclothems at Capo Rama (Palermo mountains, Sicily)

Nota di AMALIA TAVERNIER LAPEGNA
presentata dal socio corrispondente BRUNO D'ARGENIO

(Adunanza del 3 dicembre 1977)

RIASSUNTO. — Vengono riportati i risultati di una indagine palinologica effettuata su rocce carbonatiche di mare sottile provenienti dalla successione triassica di Capo Rama (Monti di Palermo, Sicilia occidentale). Si segnala la presenza di spore di Calamitaceae e di alcuni granuli di *Alisporites*.

Viene inoltre data la descrizione di alcune forme osservate al microscopio elettronico a scansione.

ABSTRACT. — The results of palynologic study on shallow marine carbonate rocks are briefly reported.

The studied samples have been collected from the Capo Rama sequence (Palermo Mountains, Western Sicily).

The palynologic content is rather scarce and is characterized by spores (Calamitaceae) and grains of Alisporites.

Their age is consistent with that shown by algae, hydrozoans and molluscs.

Some grains studied with the SEM are also described.

Preliminary results of a palynologic study on some shallow water Triassic sediments outcropping at Capo Rama (near Terrasini village, Palermo mountains), are reported (fig. 1).

The Capo Rama sequence, recently analyzed (CATALANO et al., 1974) with respect to its sedimentology, includes a series of cyclothems rhytmically constituted of sediments of back-reef (fig. 2, n. 3) and of intertidal-supratidal facies (fig. 2, n. 2) with emersion episodes showed either by erosional surfaces or by vadose diagenesis features (fig. 2, n. 1). The lithofacies outcropping in the Capo Rama sequence (fig. 2) are:

3) Dolomites and calcareous dolomites with Megalodonts
2) Stromatolitic and loferitic dolomites
1) Loferitic breccias

The first lithofacies is essentially constituted of two litotypes:

1) arenites and biomicritic rudites among the grains of which algae, molluscs, grains covered by algal mat laminae and oncolites are present.

The matrix which is never very abundant is represented by dolomicrites and micrites;

2) intra and biosparitic dolomitic calcarenites and partially dolomitized calcilutites with lateral passages to the litologic types above described. The sediments characterized by this lithofacies are very fossiliferous: Gastropods and Pelecipods represented by *Megalodus* and *Dicerocardium* are here found. Neither pollen grains nor spores have been found up to now in this litofacies.

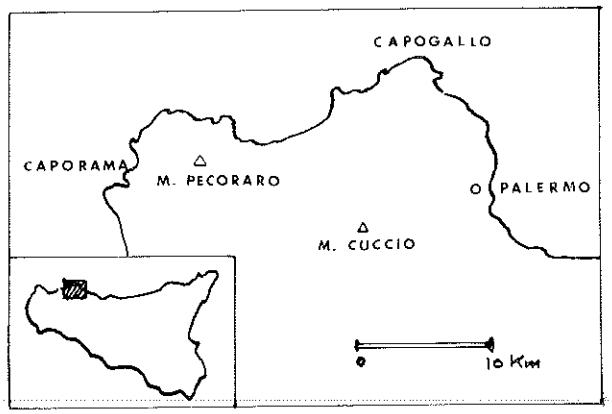


FIG. 1. - Location of the studied sequence.

In the second lithofacies, characterized by laminar sediments, the following lithotypes can be distinguished:

1) dolomitic stromatolites with laminar cavities filled by microsparites;

2) peloidal stromatolites with very small intraclasts without any interlaminar cavity and often with inverse gradation;

3) laminae composed of organic fragments (grain size between silt and fine rudites) with intergranular cavities that are always bigger than the average grain size (Loferites, FISCHER, 1964);

4) intraclastic and bioclastic arenites and rudites without any matrix and sparry cement alternanting with stromatolitic laminae.

The most part of the pollen grains here found comes from this litofacies.

The third lithofacies is characterized by breccias in which two main lithologic types may be distinguished:

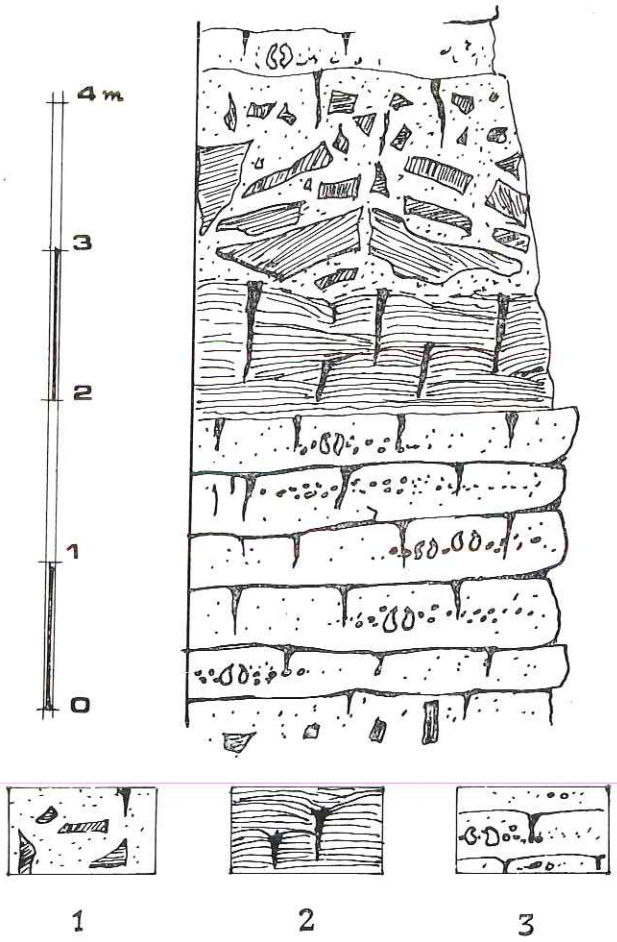


FIG. 2 - Sequence of lithofacies in the Capo Rama cyclothems.

1 - Loferitic breccias

2 - Stromatolitic and loferitic dolomites

3 - Dolomites and calcareous dolomites with Megalodonts

— breccias constitued by large elements of loferitic deposits forming *tepee-like* antiform structures.

— breccias constitued by large elements of the same nature of the former, not arched and liyng one against the other, sometimes with an almost chaotic texture.

In this lithofacies only fragments of pollen grains and spores have been found.

The palaeoclimatic conditions suggested by the above lithofacies are of tropical — subtropical setting, characterized by moderate aridity (dolomites and calcareous dolomites with Megalodonts) alternanting with moderate to strong aridity (stromatolitic and loferitic dolomites, and loferitic breccias). The aridity is moreover suggested

PLATE I

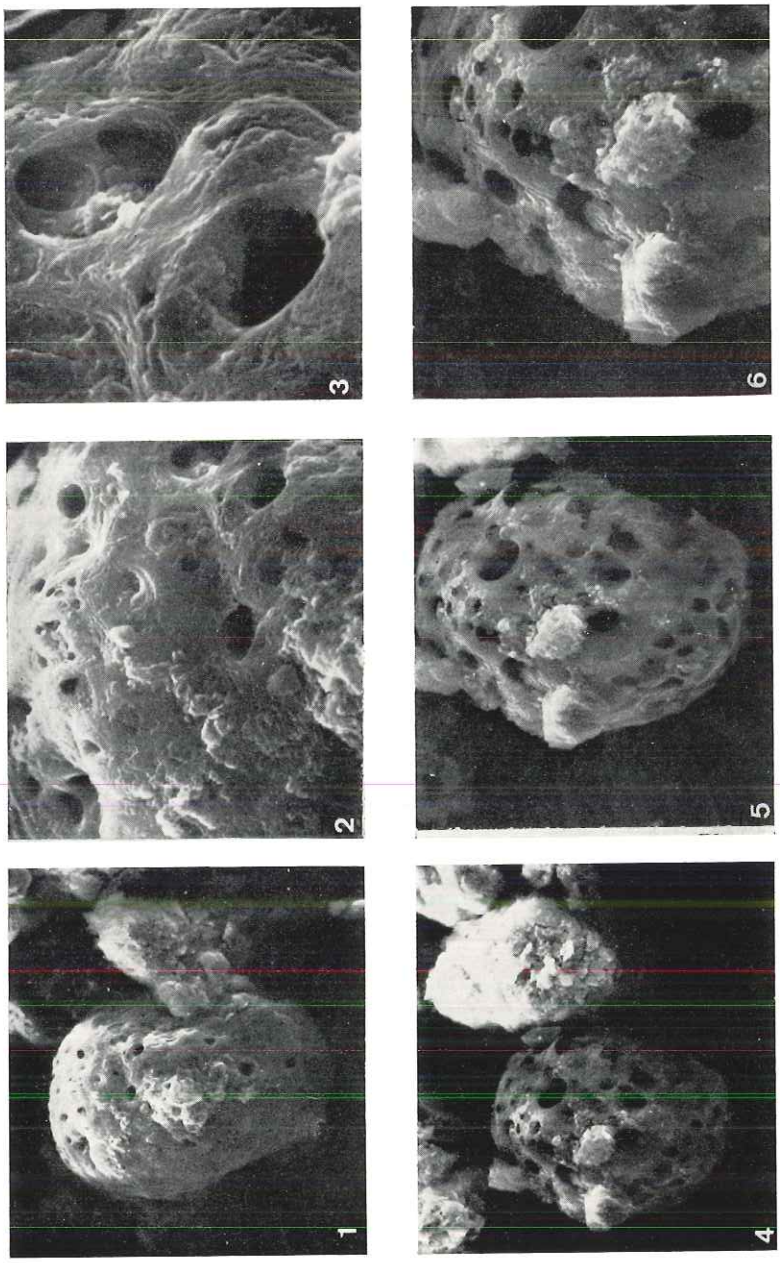


FIG. 1. - The figure shows a sub spherical grain. The exine is almost regularly pierced by holes (tectate-perforate) Size 70 microns, X 1000. FIG. 2. - Particular of exine. X 3000. FIG. 3. - Particular of holes. X 10000. FIG. 4. - Subspherical grain; the whole exine is covered by bigger pores. Note some verrucae. Size 60 microns, X 1000. FIG. 5. - The same grain of fig. 4, X 1400. FIG. 6. - Particular of the verrucae. X 2200.

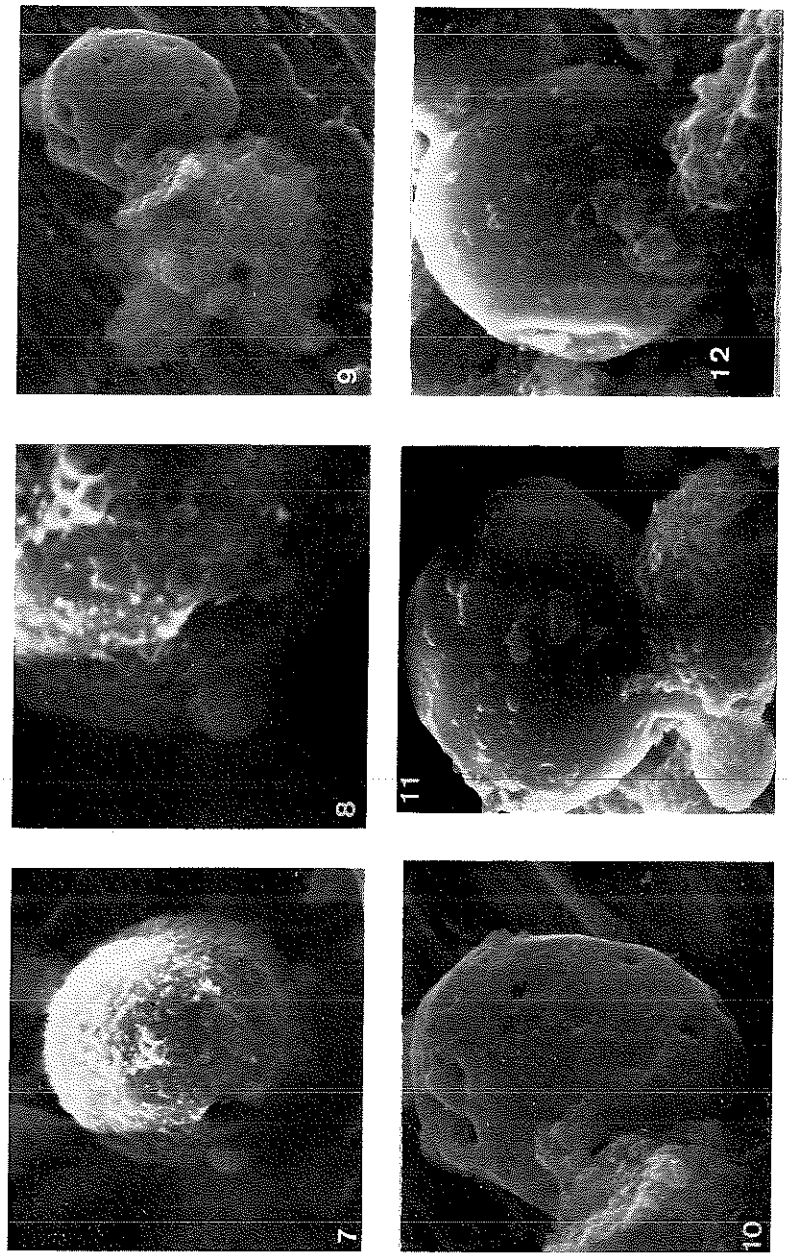


FIG. 7. - Spherical monoporate grain, microverrucate exine. Size 10 microns, X 10000. FIG. 8. - Particular of the exine and pores, X 20000. FIG. 9. - An almost spherical grain with a short furrow and rare pores, 30 microns, X 1500. FIG. 10. - The same grain, X 2500. Fig. 11. - Grain *à ballonet*. Both body and bags do not present precise and regular ornamentation. The bags are in ventral position; length of the body 25 microns, X 3500. Fig. 12. - Particular of fig. 11.

by the lateral outcrop of coheval evaporites known in the Marettimo Island (GIUNTA, LIGUORI, 1973).

For the palynological study ten samples have been chosen. They come from different lithofacies in order to ascertain possible connection with the vertical facies alternations which have been connected with recurrent eustatic, and therefore probably climatic oscillations (FISCHER 1974, D'ARGENIO and VALLARIO 1966, CARANNANTE 1971, CATALANO et al. 1974).

The studied samples are those marked with numbers 1, 3, 4, 23, 30, 65, 66, 69, 81 (these numbers conform with those of the Capo Rama sampled sequence; see CATALANO et al. 1974 table I.). Under the microscope only the slides from the samples n° 30, 66, 81, show spores and pollen grains *: the first two samples are loferitic dolomites, the third is a breccia.

Some of them were in such a good state that it has been possible to determine the families. However many grains where only fragments, not always identifiable.

Sample n° 30 has proved to be most rich in microflora. The grains are described below.

Some grains have also been observed under a Scanning Electron microscope (JEOL SEM 1). Beeing unfortunately the data now available for comparation between the forms identified under optical microscope and those known in electronic microscopy rather poor, we give only morfologic description of the SEM observed grains.

Some tens of grains have been found in the studied samples. Ten of them have been determined (COURSIN, CARETTE, DANZÉ, LAVEINE 1962) as belonging to the genus *Calamospora* and *Alisporites*.

The preservation of the other did not permit sure attributions.

Group : SPORITES H. POT., 1893
Division : TRILETES (REINSCH 1881) R. POT. and KR. 1954
Subdivision : Azonotriletes (LUBER 1935)
Series : LAEVIGATI (BENNIE and KIDSTON 1886) R. POT. 1956
Genus : *CALAMOSPORA* SCHOPF, WILSON, BENTAL 1944

* The samples have first been finely grinded, then treated as follows:
— attack with HCl at 37 % for 24 h. in order to obtain the complete disintegration of the material;
— washing;
— treatment with SCHULTZE's solution ($KClO_4$ and HNO_3) for 24 h.;
— washing;
— The separation of the vegetal material has been obtained via indirect enrichment of the studied carbonates, using a mixture of bromoformium and absolute alcool with ratio of 2:1.
After dilution with methylated ethyl alcool the residual material has been centrifuged and then put on slide with glicerine for the study.

Three spores with circular outline, smooth exine and without equatorial structures have been ascribed to this genus. The dimension of the examined grains are between 60 and 70 micron.

SCHOPF, WILSON and BENTAL have described Calamospora, as a trilete spore with circular outline, both wity equatorial ornamentation generally smooth.

The average dimensions of the spores attributed to this type are between 30 and 100 micron in order to include micro, macro and isospores inthe same genus.

In fact the spores of *Calamitaceae*, both iso and eterospores, present differences only in size.

The stratigrafic distribution of *Calamospora* include a time interval from the Permic to the Jurassic.

Group : POLLENITES R. POT. 1931
Division : SACCITES ERDTMAN 1947
Subdivision : DISACCITES COOKSON 1947
Series : DISACCIATI TRILETES (LEINSCHK 1955) R. POT 1958
Genus : *ALISPORITES* DAUGHERTY 1941

Seven grains have been attributed to this genus. They present such a good state that a classification was possible. The studied grains present oval outline constituted by a central body with two surrounding bags (grains « à ballonnets »).

The grains have dimension between 100 and 120 micron.

The stratigrafic distribution of *Alisporites* begins from the Permian and reaches the greatest spreading in the Upper Triassic.

The results thus obtained do not allow to establish a connection between the rhytmic change of facies and the changes of microflora for the small amount of grains determined. Yet the only climatic indication came from the presence of *Alisporites* thah seems to exclude condition of extreme aridity.

BIBLIOGRAPHY

AKYOL E., *Palynologie du Permien inférieur de Sariz (Kayseri) et de Pamucak Yalasi (Antalya-Turquie) et contamination jurassique observée, due aux risseaux « Pamucak »* et *« Goynuk »*. Poll. et Spor., **17**, n. 1, pp. 141-179, Paris, (1975).

CARANNANTE G., *Ricerche sedimentologiche sulla successione ciclotemica dell'Infralias Del Passo dell'Annunziata Lunga (Monti di Venafro)*. Boll. Soc. Natur., Napoli **80**, pp. 389-412, (1971).

CATALANO R., D'ARGENIO B., LO CICERO G., *I ciclotemi triassici di Capo Rama (Monti di Palermo) studi sulle piattaforme carbonatiche siciliane.* Geol. Rom., **13**, pp. 125-145, (1974).

COURSIN M. P., CARETTE J., DANZÉ J., LAVEINE J. P., *Classification des spores et des pollens du Carbonifère au Lias.* C. R. Acad. Sci., **254**, pp. 3062-3065, (1962).

D'ARGENIO B., VALLARIO A., *Sedimentazione ritmica nell'Infralias dell'Italia meridionale.* Boll. Soc. Natur., Napoli, **76**, (1967).

EMBERGER L., *Les plantes fossiles dans leurs rapports avec les végétaux vivants.* Masson, Paris, (1968).

FISCHER A. G., *The Lofer cyclothems of the Alpine Triassic.* Geol. Surv. Kansas Bull., **169**, pp. 149-170, (1964).

GIUNTA G., LIGUORI V., *Evoluzione paleotettonica della Sicilia nord-occidentale.* Boll. Soc. Geol. It., **92**, pp. 903-924, (1973).

KREMP G. O., SPACKAMN W., AMES H. T., *Catalog of fossil spores and pollen,* **9**, Coll. Min. Ind. Penn., (1959).

TSCUDY R. H., SCOTT R., *Aspect of palynology; an introdution to plant microfossiles in time.* Wiley, (1968).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci B. D'Argenio, G. Imbò e A. Scherillo.

Order-disorder transitions in crystalline substances containing hydrocarburic layers

Nota di MICHELE VACATELLO e PAOLO CORRADINI
presentata dal socio ordinario PAOLO CORRADINI

(Adunanza del 3 dicembre 1977)

SUMMARY. — The calorimetric and structural data on the order-disorder solid-solid phase transitions in $(\mathbf{n}\text{—}C_nH_{2n+1}NH_3)_2MCl_4$ with M = Mn and M = Cu and n = 9, 10 ... 17 are interpreted. in the rotational isomeric approximation, in terms of an extended, disordered chain model above the transition temperature.

INTRODUCTION.

We have recently investigated the structural aspects related to the thermal behaviour of compounds of the type $(\mathbf{n}\text{-}C_nH_{2n+1}NH_3)_2MCl_4$ with M = Mn [1, 2] and M = Cu [3, 4] and n = 9, 10 ... 17. All these compounds show solid-solid phase transitions in the range of temperatures 300-400 K. The low-temperature stable polymorphs are characterized, from a structural point of view, by the presence of two-dimensional macroanions of composition MCl_4^{2-} (built up of $MnCl_6$ octahedra sharing corners in the case of the tetrachloromanganates [5] and of distorted octahedra in the case of the Cu(II) compounds) sandwiched each between two alkylammonium layers. The packing forces between successive sandwiches are of the Van der Waals type only (Fig. 1).

The observed solid-solid phase transitions are of the order- disorder kind, as shown by a comparison of the I.R. and R.X spectra below and above the transition point [6]. Correspondingly, the total transition entropies *per* mole of alkyl chains are greater than half the total transition and melting entropies of the **n**-alkanes having the same number of conformationally flexible skeletal bonds. Moreover, the mean increase of the total transition entropy when one mole of C-C

* Istituto Chimico dell'Università - Via Mezzocannone, 4 - Naples (Italy).

bonds is added ($\overline{\Delta S_t}$) is of the order of R (Fig. 2) while it is 1,2-1,3 R for the fusion of the linear hydrocarbons [7]. All the above facts show that in the high temperature stable polymorphs the alkyl chains are conformationally disordered, and that their conformational freedom is comparable to the conformational freedom possessed by the alkyl chains in liquid hydrocarbons.

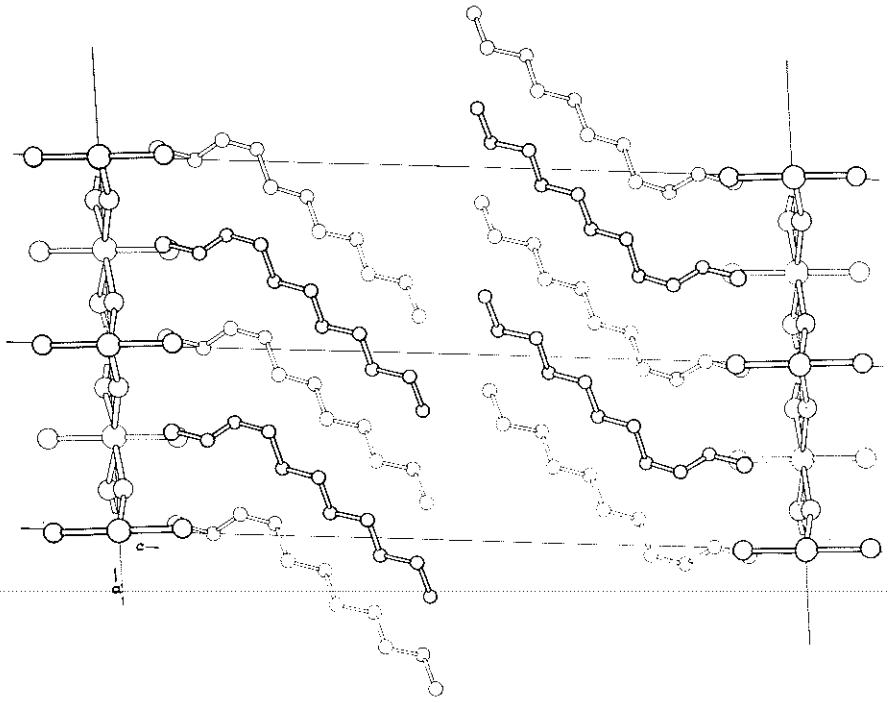


FIG. 1. - View of the layer structure of $(\mathbf{n}\text{—}C_{10}H_{21}NH_3)_2MnCl_4$ in the low temperature stable form.

The main structural feature of these disordered forms is the substantial persistence of order in the ionic regions of the structure. As a consequence, the $—NH_3^+$ end groups are held at the macroanion's surfaces and the distribution of the end-to-end vectors of the alkyl chains should be perturbed by mutual excluded volume effects with respect to that of ideal unperturbed chains. In fact the mean value of the projection of the end-to-end vector in the direction perpendicular to the macroanions increases linearly with increasing n in the investigated range of n' s, and the mean value of the projection of a C-C bond vector in this direction is as high as 1.05 Å (Fig. 3).

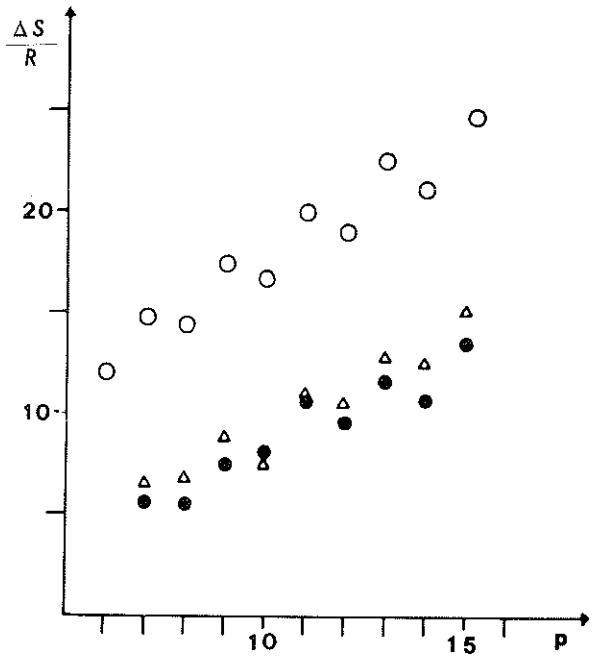


FIG. 2. - Plot of the total transition and melting entropies of the **n**-alkanes (○) (7) and of the total transition entropies *per* mole of alkyl chains of $(\mathbf{n}\text{—}C_nH_{2n+1}NH_3)_2MCl_4$ with M = Mn (△) (1, 2) and M = Cu (●) (3) versus the number p of conformationally flexible chain bonds.

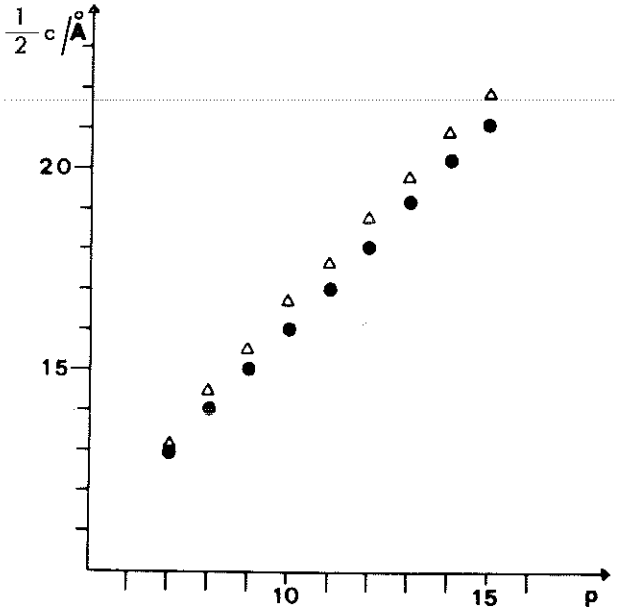


FIG. 3. - Plot of the half-distance between successive macroanions in the high temperature forms of $(\mathbf{n}\text{—}C_nH_{2n+1}NH_3)_2MCl_4$ with M = Mn (△) (1, 2) and M = Cu (●) (4) versus the number p of conformationally flexible chain bonds.

Scope of this work is to show that such a high end-to-end mean distance, proportional to n, may be still realized in disordered long chain molecules, without greatly reducing the conformational entropy of the disordered phase with respect to that expected in the case that the long chain molecules were free to assume the whole set of unperturbed « gaseous » conformations [8].

Conformational entropy of unperturbed hydrocarburic chains

The conformational entropy of an unperturbed hydrocarburic chain may be calculated in the rotational isomeric state approximation according to standard methods of statistical thermodinamics [9]. We denote with the symbols t, g^+ and g^- respectively trans, gauche right and gauche left conformations about C-C bonds [10]. We denote with the symbol $\gamma = \exp(-E_g/RT)$ the statistical weight factor associated with a gauche rotation about C-C bonds, E_g being the energy difference between gauche and trans conformations. We denote with the symbol $\omega = \exp(-E_\omega/RT)$ the statistical weight factor due to second-order interactions in $g^\pm g^\mp$ two-bond sequences, E_ω being the energy difference between $g^\pm g^\mp$ and $g^\pm g^\pm$ sequences. We assume simply equal to γ^n the statistical weight of $(g^+)_n$ and $(g^-)_n$ sequences.

The conformational partition function for the unperturbed chain

$$NH_3—\overset{1}{C}H_2—\overset{2}{C}H_2— \ldots\ldots\ldots —\overset{n-2}{C}H_2—\overset{n-1}{C}H_2—\overset{n}{C}H_3$$

is given [11] by

$$Z = \{\mathbf{J}^* \mathbf{U}^{n-2} \mathbf{J}\} z^{n-2} \qquad \text{(Eq. 1)}$$

where $\mathbf{J}^*$ is the row vector [1 0 0], $\mathbf{J}$ the column vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma \\ 1 & \gamma & \gamma\omega \\ 1 & \gamma\omega & \gamma \end{bmatrix}$$

The z term is a corrective factor ($z > 1$) accounting for the greater librational freedom about C-C bonds in the disordered state. The approximation is made that librations about each single bond are independent among each other [12] and that the conformational

energy minima have identical shapes. They may differ for the ordered and disordered state. If the librational partition functions corresponding to each rotational state are z_o in the ordered and z_d in the disordered state, then $z = z_d/z_o$.

The conformational entropy is then given by:

$$S_c = RlnZ + RT\frac{dlnZ}{dT} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

The autovalues of **U** are:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma(1+\omega) \pm \sqrt{[1-\gamma(1+\omega)]^2 + 8\gamma}\right]$$

$$\lambda_3 = \gamma(1-\omega)$$

Thus

$$Z = \left\{\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^{n-1} + \frac{\lambda_1-1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^{n-1}\right\} z^{n-2} \qquad \text{(Eq. 3)}$$

With γ of the order of 0.5 [11] and in the range of n' s of interest, $(n > 8)$

$$Z \cong c\,\lambda_1^{n-1}\, z^{n-2} \qquad \text{(Eq. 4)}$$

c being a constant.

From Eqs. 2 and 4,

$$\frac{S_c}{R} \cong lnc + (n-1)\left[ln\,\lambda_1 + T\frac{dln\,\lambda_1}{dT}\right] + (n-2)\left[lnz + T\frac{dlnz}{dT}\right] \qquad \text{(Eq. 5)}$$

and, by denoting with $\overline{\Delta S_c}$ the mean increase of S_c when $\Delta n = 1$,

$$\frac{\overline{\Delta S_c}}{R} = ln\,\lambda_1 + T\frac{dln\,\lambda_1}{dT} + lnz + T\frac{dlnz}{dT} = \frac{\overline{\Delta S_{c,o}}}{R} + \frac{\overline{\Delta S_{c,1}}}{R} \qquad \text{(Eq. 6)}$$

where

$$\frac{\overline{\Delta S_{c,o}}}{R} = ln\,\lambda_1 + T\frac{dln\,\lambda_1}{dT}$$

and

$$\frac{\overline{\Delta S_{c,l}}}{R} = lnz + T\frac{dlnz}{dT}$$

When $E_g = 2100$ J mol^{-1} and $E_{t_b} = 7000$ J mol^{-1}, typical values in the range of temperatures in which the transitions are observed, are:

$$\frac{\overline{\Delta S_{c,o}}}{R} = 0.85 \qquad T = 300 \text{ K}$$

$$\frac{\overline{\Delta S_{c,o}}}{R} = 0.88 \qquad T = 350 \text{ K}$$

CONFORMATIONAL ENTROPY OF EXTENDED HYDROCARBURIC CHAINS

A high end-to-end mean distance, proportional to n, may be realized in an extended chain in which alternate bonds are in trans conformation, while intermediate bonds are in « free » (t, g^+ or g^-) conformation. This extended chain may be described (starting from the internal rotation angle about the C-C bond nearest to the $-NH_3^+$ group) by the models M_1, M_2 and $M_1 + M_2$, where

M_1 $\quad t, (t, g^+, g^-), t, (t, g^+, g^-), t, \ldots\ldots$

M_2 $\quad (t, g^+, g^-), t, (t, g^+, g^-), t, (t, g^+ g^-), \ldots\ldots$

The « free » bonds (Fig. 4) are now all parallel to an identical direction and the mean projection of the end-to-end vector in such direction increases by an amount $\Delta c = l(1 - \cos\varphi)/2$ when $\Delta n = 1$, l being the C-C bond length and φ being the $\widehat{C\text{-}C\text{-}C}$ valence angle. If $l = 1.542$ Å

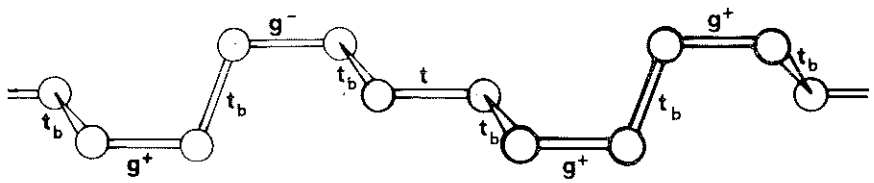


FIG. 4. - View of a part of an extended chain, showing parallelism among the « free » bonds.
t_b = trans « non-free » bond.

and $\varphi = 112°$, the mean projection of a C-C bond in this direction is 1.06 Å, in a very satisfactory agreement with the experimental values obtained by us for the disordered forms of $(\mathbf{n}\text{-}C_nH_{2n+1}NH_3)_2MCl_4$ with M = Mn, Cu and n = 9, 10, ... 17 (1-4).

The conformational partition function for this extended chain can be obtained by introducing a fictious fourth rotational isomeric state, t_b, which may be identified with the trans state of a « non free » bond. The statistical weight matrix is then

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \gamma & \gamma \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The conformational partition function is given by

$$Z = \{\mathbf{X}^* \mathbf{V}^{n-2} \mathbf{X} - 1\} z_e^{n-2} \qquad \text{(Eq. 7)}$$

where $\mathbf{X}^*$ is the row vector [1 1 0 0] and $\mathbf{X}$ the column vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

The -1 term accounts for the substantial identity of the $tt_b\,tt_b\,t\ldots$ and $t_b\,tt_b\,tt_b\ldots$ conformations.

If $\lambda_e = \sqrt{1+2\gamma}$, the conformational partition function is given by:

$$\left.\begin{aligned} Z &= (\lambda_e^{n-1} + \lambda_e^{n-3} - 1)\, z_e^{n-2} \qquad \text{odd } n \\ Z &= (2\lambda_e^{n-2} - 1)\, z_e^{n-2} \qquad \text{even } n \end{aligned}\right\} \text{(Eqs. 8)}$$

In all the cases, in the range of n' s of interest, (n > 8)

$$\frac{\overline{\Delta S_c}}{R} = ln\,\lambda_e + T\,\frac{dln\,\lambda_e}{dT} + lnz + T\,\frac{dlnz}{dT} \qquad \text{(Eq. 9)}$$

and

$$\frac{\overline{\Delta S_{c,o}}}{R} = ln\,\lambda_e + T\,\frac{dln\,\lambda_e}{dT}$$

When $E_g = 2100$ J mol^{-1}, typical values in the range of temperatures

in which the transitions are observed, are:

$$\frac{\overline{\Delta S_{c,o}}}{R} = 0.51 \qquad T = 300 \text{ K}$$

$$\frac{\overline{\Delta S_{c,o}}}{R} = 0.52 \qquad T = 350 \text{ K}$$

CONCLUSIONS.

The previous calculations show that high entropy changes can be observed in order-disorder phase transitions also if the conformational freedom of the chains is reduced in the disordered phases by a general tendency of the chain segments to be parallel to each other. The local persistence of this kind of conformational order above the melting point has been postulated in the case of polymers (9a, 13), and seems to be relevant also in the case of shorter alkyl chains in the order-disorder phase transitions studied by us, in which the fixed position of the terminal $-NH_3^+$ groups on the macroanion surfaces favours this tendency. Similar excluded volume effects may be present in lamellar lecithin systems [14], with due care to the different nature of the polar regions of the bilayers.

From a comparison of the results of the previous calculations it is seen that the $\overline{\Delta S_{c,o}}$ term in the extended chain model is calculated, in the rotational isomeric approximation, as about 0.35 R lower than in the unperturbed chain one. This calculated value agrees satisfactorily with the difference between the total melting and transition entropy per C-C bond of **n**-alkanes and the corresponding transition value of the compounds studied by us. The agreement shows that the greatest part of this difference may be accounted for only by the $\overline{\Delta S_{c,o}}$ term, in the rotational isomeric state approximation. On the other hand, the extended chain model is not exhaustive, and probably too restrictive with respect to the set of available conformations, as far as only mutual exluded volume effects are concerned. However, other restrictive effects are foreseeably present in the compounds studied by us, such as a greater tendency to the parallelism of the first few chain bonds, due to repulsive interactions with the « axial » chlorine atoms and to hydrogen bonding.

ACKNOWLEDGEMENTS.

We are grateful to the National Research Council of Italy for financial assistance.

REFERENCES

[1] M. VACATELLO and P. CORRADINI, Gazz. Chim. It., **103**, 1027 (1973).
[2] M. VACATELLO and P. CORRADINI, Gazz. Chim. It., **104**, 773 (1974).
[3] M. VACATELLO, Ann. Chim., **64**, 13 (1974).
[4] M. VACATELLO, Ann. Chim. **64**, 19 (1974).
[5] M. R. CIAJOLO, P. CORRADINI and V. PAVONE, Gazz. Chim. It., **106**, 807 (1976).
[6] C. CARFAGNA, M. VACATELLO and P. CORRADINI, Gazz. Chim. It., **107**, 131 (1977).
[7] A. BONDI, Chem. Rev., **67**, 565 (1967).
[8] For a discussion on this point, referred to polymers and long chain molecules, see P. CORRADINI, J. Polym. Sci., **50**, 327 (1975).
[9] P. CORRADINI, Polymer Letters, **7**, 211 (1969).
A. TONELLI, J. Chem. Phys., **52**, 4749 (1970).
[10] Pure and Applied Chemistry - Rules for nomenclature of organic chemistry - 1974 Recommandations.
[11] P. J. FLORY, *Statistical mechanics of chain molecules*, Interscience, New York, 1969.
[12] See for instance:
M. V. VOLKENSTEIN, *Configurational statistics of polymeric chains*, Interscience, New York, 1963, p. 249
P. J. FLORY, Macromolecules, **7**, 381 (1974).
[13] W. PECHHOLD, S. BLASENBREY, Koll. Zeit., **216**, 235 (1967).
[14] Y. K. LEVINE, Progress in Biophysics, **24**, 1 (1972).

RELAZIONE SUI LAVORI COMPIUTI DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

durante l'anno 1977, letta nell'adunanza plenaria del 30 gennaio 1978

dal socio VINCENZO LEONE

Segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

Il 1977 è stato un anno di proficua attività della nostra Accademia, alla quale sono state presentate, nelle 8 sedute ordinarie tenutesi, 39 comunicazioni scientifiche; sono state inoltre tenute 4 conferenze su temi di particolare attualità.

Per la Sezione di Scienze Naturali si è avuto un numeroso contributo di cultori di scienze biologiche. Il socio Nicolaus ha presentato una nota di attuale interesse scientifico e generale, di A. Dini, E. Novellino, L. Zeuli e A. Biondi: « Cefalopodi ed inquinamento marino », oltre ad altre note, quali quelle di A. Dini e C. Pizzi su « Proteine e *Vicia Faba* », di A. Dini e E. Finamore su « Melanine biosintetiche », di F. De Simone, A. Dini e E. Ramundo su « Formazione di legami ammidici mediante sintesi enzimatiche », di M. D'Agostino, A. Biondi, G. Misuraca e G. Sansone « Ricerche sulla incorporazione di metalli in tracce nelle valve del *Mytilus galloprovincialis* ». Il socio Galgano, continuando i suoi studi sulla formologia del capello, ha comunicato i risultati delle sue ricerche su « Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli (Parte II) ». Il socio De Lerma ha presentato una Nota di G. Parisi, A. R. Franco e A. Crasto su « Analisi elettroforetica delle α-esterasi nel corso dell'ontogenesi di *Drosophila melanogaster* »; il socio Leone ha presentato, in collaborazione con B. Farina e M. R. Faraone Mennella, una nota sull'enzima poli (adenosina difosfato ribosio) polimerasi in spermatozoi di toro, e in collaborazione con M. R. Faraone Mennella, B. Nicolaus e B. Farina una Nota sugli inibitori dell'enzima uricasi; lo stesso socio Leone ha inoltre presentato Note di M. Abet, E. De Vendittis, G. Sannia e G. Marino, e di P. Petrilli, G. Sannia e G. Marino sulla sequenza C-terminale e sulla reattività dei gruppi sulfidrilici nell'asparato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino; di A. Di Donato e C. Formica su « Eterogeneità della ribonucleasi seminale bovina », e di H. Suzuki sugli enzimi nucleolitici presenti nel plasma seminale bovino e umano.

Nell'ambito di ricerche pertinenti alle scienze chimiche, va segnalata la nota del socio Corradini, in collaborazione con P. Vacatello, su « Transizioni da stato ordinato a disordinato in sostanze cristalline contenenti strati idrocarburici », e inoltre le Note presentate dal socio Covello (M. I. La Rotonda, S. Salvati e O. Schettino, « Determinazione quantitativa dell'ascaridolo nell'olio di *Chenopodium anthelminticum* mediante cromatografia liquida ad alta pressione (HPLC) »), dal socio Mangoni (R. Capasso, E. Evidente, M. Lasaponara e G. Randazzo, « Una insolita reazione dell'acetone sulla fusicoccina »), dal socio Sersale (A. Marotta, A. Buri e S. Saiello, « Proprietà e struttura di vetri del sistema $CaO—Al_2O_3—Sio_2$ con rapporto $CaO/Al_2O_3=1$ », e B. Marchese, P. Pernice, A. Annetta, « Caratterizzazione dello stato superficiale di paste cementizie ») e dal socio Nicolaus (U. Gallone, F. Bottiglieri e A. Biondi, « Ricerche preliminari sull'insaponificabile di alcuni oli edibili: eventuale presenza di idrocarburi policiclici aromatici »).

Nel campo geomineralogico il socio emerito Scherillo ha presentato una Nota di M. R. Ghiara e G. Rolandi su « La serie piroclastica di Monte S. Angelo (Cicciano) », e una di M. De Gennaro, E. Franco, G. Peracuollo e C. Porcelli su « Le zeoliti di alcuni blocchi della *Breccia Museo* di Punta della Lingua (Isola di Procida) »; il socio D'Argenio ha presentato una nota di A. Tavernier Lapegna su ricerche palinologiche su ciclotemi triassici a Capo Rama (montagna di Palermo, Sicilia).

Per la Sezione di Scienze Matematiche, il socio emerito Miranda ha presentato varie Note: di A. Alvino su problemi di equazioni funzionali, di L. Biacino su equazioni differenziali, di B. A. Bondarenko, K. Vinh Leung, D. Mangeron e M. Namik Oguztoreli su equazioni polilineari, di L. Krivoshein, K. Vinh Leung, D. Mangeron e M. Namik Oguztoreli su alcuni sistemi integrodifferenziali non lineari, di N. Basile e M. Mininni su equazioni funzionali non lineari, di E. Giarrusso su un problema al contorno per un'equazione alle derivate parziali. Il socio Ciliberto ha presentato una Nota di L. Diomeda su problemi di equazioni alle derivate parziali; il socio Panella ha presentato una Nota di C. Bartolone su problemi di algebra; il socio Cafiero ha presentato una Nota di G. Mastroianni e M. R. Occorsio su problemi di analisi numerica; il socio Franchetta ha presentato Note di Abbatangelo, di A. Di Sante e di D. Perrone, su problemi vari di geometria algebrica. Infine il socio emerito Miranda ha dedicato una sua comunicazione personale a una breve storia e alle prospettive future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli.

Tutte le comunicazioni fin qui brevemente accennate saranno come di consueto pubblicate nei Rendiconti dell'Accademia, nel Volume 44° della Serie IV.

Ad iniziativa del Presidente socio Nicolaus l'Accademia ha invitato alcuni suoi soci a svolgere delle conferenze, nel corso delle sedute ordinarie, su argomenti di particolare interesse scientifico. Il socio Mangoni, nella seduta del 2-4-77 ha trattato del tema della « Tetracloro-dibenzodiossina: Chimica e Tossicologica »; il socio Nicolaus, il 7-5-77, ha parlato su « Le Bioproteine »; il socio emerito Carrelli, il 5-11-77, ha parlato su « Le centrali termonucleari » e infine il socio emerito Scherillo, il 3-12-77, ha illustrato il tema « Zeoliti e zeolitizzazione nell'area vulcanica campana e laziale ». Tutte le conferenze hanno riscosso il vivo plauso dei soci, che hanno altamente apprezzato la competenza e la compiutezza con cui i vari temi sono stati trattati.

In occasione del lutto che ha colpito l'Accademia con la fine del Socio Ordinario non residente Francesco Scarsella, il socio emerito Scherillo ha commemorato la figura scientifica e umana dell'illustre Scomparso, con parole che l'Accademia ha ritenuto voler pubblicare nel suddetto Volume dei Rendiconti.

Nella seduta del 5-3-77 è stata portata a conoscenza dei soci la relazione finale della commissione giudicatrice per l'assegnazione dei premi intitolati al Prof. Domenico Montesano, defunto socio e Presidente di questa Accademia nel 1921. Gli eredi del Prof. Montesano, con nobile iniziativa, avevano messo a disposizione dell'Accademia la somma di Lit. 3.000.000, per onorare degnamente la figura scientifica del loro illustre congiunto, con la istituzione di due premi di Lit. 1.500.000 ciascuno da assegnare per concorso a giovani studiosi di matematica che avessero recato un contributo allo sviluppo delle discipline geometriche. Scaduto il 31 dicembre 1976 il termine di presentazione delle proposte e designazioni di candidati, la Commissione giudicatrice formata dai Professori F. Gherardelli dell'Università di Firenze, E. Marchionna dell'Università di Milano, e dai soci dell'Accademia Franchetta, Dalla Volta e Curzio, ha formulato la relazione finale che è stata all'unanimità approvata dai soci, per cui sono risultati vincitori dei Premi « D. Montesano » i Dottori Fulvio Lazzeri e Carlo Traverso, ambedue dell'Istituto Matematico dell'Università di Pisa.

Per l'anno 1978 il Consiglio di Classe risulta costituito come segue: Presidente, il socio emerito Carlo Miranda; Vice Presidente, il socio Baldassarre De Lerma; Tesoriere, il socio Riccardo Sersale; Segretario, il socio Vincenzo Leone.

INDICE

A. Scherillo — Ricordo di Francesco Scarsella . . . . . pag. 5

Scienze biologiche

M. Abet, E. De Vendittis, G. Marino, G. Sannia — Sulla sequenza C-terminale dell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino . . . » 45

A. Di Donato, C. Formica — Eterogeneità della Ribonucleasi seminale bovina » 113

A. Dini, C. Pizza — Proteine e *Vicia faba* . . . . . » 121

A. Dini, E. Finamore — Melanine biosintetiche . . . . . » 171

P. Petrilli, G. Sannia, G. Marino — Sulla reattività dei gruppi sulfidrilici nell'aspartato aminotransferasi citoplasmatica da cuore bovino . . . » 203

M. D'Agostino, A. Biondi, G. Misuraca, G. Sansone — Ricerche sull'incorporazione dei metalli in tracce nelle valve del *Mytilus galloprovincialis* . » 241

F. De Simone, A. Dini, E. Ramundo — Formazione di legami ammidici mediante sintesi enzimatica . . . . . » 245

A. Dini, E. Novellino, L. Zeuli, A. Biondi - Cefalopodi ed inquinamento marino . . . . . » 253

B. Farina, M. R. Faraone Mennella, V. Leone — Poly (Adenosine Diphosphate Ribose) Polymerase in Bull Spermatozoa . . . . . » 257

M. Gàlgano — Tricometrogrammi da modelli di sezione trasversa di capelli » 301

M. R. Faraone Mennella. B. Nicolaus, B. Farina, V. Leone — A Research on Inhibitors of Uricase . . . . . » 293

G. Parisi, A. R. Franco, A. Crasto — Analisi elettroforetica delle α-esterasi nel corso dell'ontogenesi di *Drosophila melanogaster* . . . . . » 279

H. Suzuki — Nucleolytic enzymes in seminal plasma . . . . . » 407

Scienze della terra

M. R. Ghiara, G. Rolandi — La serie piroclastica di Monte S. Angelo (Cicciano - Napoli) . . . . . » 125

A. Scherillo — Zeoliti e zeolitizzazione nell'area vulcanica Campana e Laziale . . . . . » 421

M. DE, GENNARO, E. FRANCO, G. PARACUOLLO, C. PORCELLI — Le zeoliti di alcuni blocchi della « Breccia Museo » di Punta della Lingua (Isola di Procida) pag. 327

A. TAVERNIER LAPEGNA — Palynologic research on Triassic cyclothems at Capo Rama (Palermo mountains, Sicily) . . . . . » 497

SCIENZE CHIMICHE

R. CAPASSO, A. EVIDENTE, M. LASAPONARA, G. RANDAZZO — Una insolita reazione dell'acetone sulla fusicoccina . . . . . » 69

A. MAROTTA, A. BURI, S. SAIELLO — Proprietà e struttura di vetri del sistema $CaO\text{-}Al_2O_3\text{-}SiO_2$ con rapporto $CaO/Al_2O_3 = 1$ . . . . . » 141

F. DE SIMONE, A. DINI, E. RAMUNDO, G. LA BELLA — Synthesis of some 1,4-benzothiazines . . . . . » 387

U. GALLONE, F. BOTTIGLIERI, M. COTUGNO, A. BIONDI — Ricerca preliminare sull'insaponificabile di alcuni oli edibili: eventuale presenza di idrocarburi policiclici aromatici . . . . . » 391

M. VACATELLO, P. CORRADINI — Order-disorder transitions in crystalline substances containing hydrocarburic layers . . . . . » 505

M. I. LA ROTONDA, S. SALVATI, O. SCHETTINO — Determinazione quantitativa dell'ascaridolo nell'olio di « Chenopodium anthelminticum » mediante HPLC » 461

B. MARCHESE, A. ANNETTA, P. PERNICE — Caratterizzazione dello strato superficiale di paste cementizie . . . . . » 469

SCIENZE MATEMATICHE

C. MIRANDA — Breve Storia e Prospettive Future dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli . . . . . » 7

L. DIOMEDA — Sui sistemi, non lineari, di Cauchy-Riemann generalizzati . . » 75

C. BARTOLONE — Le immagini epimorfe di un M-piano . . . . . » 53

A. ALVINO — Un caso limite della diseguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz » 105

G. MASTROIANNI, M. R. OCCORSIO — Una generalizzazione dell'operatore di Bernstein . . . . . » 151

P. DONATO, L. MIGLIACCIO — Su una classe di spazi di Sobolev con peso in un aperto non limitato di R^n . . . . . » 179

L. BIACINO — Su di una classe di equazione non fuchsiane nel campo reale » 223

V. ABATANGELO — Osservazioni sugli spazi di prossimità . . . . . » 211

C. FERRERO COTTI — Sugli stems in cui la corrispondenza $x\,y \to y\,x$ è una funzione . . . . . » 265

B. A. BONDARENKO, K. VINH LEUG, D. MANGERON, M. NAMIK OGUZTORELI — Studi concernenti le equazioni polilineari . . . . . » 285

L. E. KRIVOSHEIN, K. VINH LEUNG, D. MANGERON, M. NAMIK OGUZTORELI — Étude de certains systèmes intégrodifferentiels non lincaires aux opérateurs paraboliques et aux autoréglages multiples dans les limites d'intégration pag. 359

A. DI SANTE — Osservazioni sui punti doppi impropri di una superficie di P^4 » 367

N. BASILE, M. MININNI — About the solvability of some nonlinear functional equations in locally convex spaces . . . . . » 373

E. GIARRUSSO — Un problema al contorno di tipo variazionale per un operatore ellittico-parabolico del IV ordine . . . . . » 441

D. PERRONE — Una applicazione delle disequazioni variazionali in geometria differenziale globale di varietà riemanniane . . . . . » 491

Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1977 . . . . . » 515

TERMINATO DI STAMPARE OGGI
XXVIII APRILE MCMLXXVIII NELLE
OFFICINE GRAFICHE NAPOLETANE
« FRANCESCO GIANNINI & FIGLI »

Direttore responsabile: Prof. MICHELE FUIANO

Autorizzazione del Tribunale di Napoli, B/2315 del 14 agosto 1954