SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLIII — ANNO CXV

(gennaio - dicembre 1976)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1977

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLIII — ANNO CXV

(gennaio - dicembre 1976)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1977

Sull'andamento secolare dell'attività solare

Nota del socio ordinario TITO NICOLINI

(Adunanza del 7 gennaio 1976)

RIASSUNTO. — Dalle fonti più autorevoli di grandi macchie solari ed aurore polari osservate, antiche e moderne, è stata dedotta una lista coerente di date di massima attività, riprodotta nella tavola numerica.

Secondo l'analisi effettuata, non risulta con sicura evidenza un andamento delle date diverse da un andamento lineare, cioè non risultano variazioni sistematiche di periodo. Si osservano perturbazioni della periodicità regolare, ma di apparenza temporanea o locale: la periodicità sembra fondamentalmente regolare in periodo e fase.

SUMMARY. — From the main authoritative sources of observed great sunspots and aurorae, old and modern, a coherent selected list of maxima of solar activity, from year —481 to 1969 has been undertaken, and reported in tabular and diagrammatic form.

The lenght and steadiness of the undecennial cycle has been investigated. Apart from temporary or local disturbances, the periodicity, fundamentally, appears as secularly stable, both in period and phase.

Notwithstanding the appearances of local perturbations of P, his stability could recall analogy with the stability of the annual meteorological cycle in the long run; or with the stability of the vibrations of an oscillating circuit imposed by a crystal. As for the solar period, that would naturally point to very deep causes.

Le variazioni dell'attività fotosferica solare hanno stimolato molte ricerche: sono classiche quelle di A. SCHUSTER [1], J. LARMOR - N. YAMAGA [2], G. U. YULE [3] ed altri. Ora si può tentare un'analisi numerica appropriata disponendo di una lista di osservazioni più che bimillenaria di macchie solari ed aurore polari, tratta particolarmente dagli antichi annali Cinesi, ed anche da cronologie Europee.

Le osservazioni antiche sono discontinue e fatte senza criterio statistico, ma comunque è possibile utilizzarle ponendole in relazione con le *epoche di massima attività* del Sole.

Del soggetto l'a. si occupò già in una nota presentata a questa Accademia dal prof. L. Carnera nell'adunanza del 2 maggio 1942 [4], e successivamente in un'altra presentata alla Società Astronomica Italiana nel 1962 [5].

La serie di osservazioni statisticamente utile e continuativa non può farsi risalire anteriormente a H. Schwabe, che dall'intervallo da lui coperto, 1826-1853, fu il primo a stabilire sicuramente una oscillazione undecennale nel numero di macchie. Successivamente R. Wolf di Zurigo si assunse l'incarico di seguire accuratamente l'attività solare, ed introdusse i *numeri relativi* o indici di attività $W = k\,(10\,g + n)$ osservati giornalmente (g = numero dei gruppi di macchie, n = numero complessivo di macchie o nuclei, k un coefficiente di riduzione ad una serie campione.

Nella serie moderna cominciarono ad avere un peso rilevante le osservazioni di Staudacher dal 1749 al 1799; poi quelle più sicure ma meno frequenti di Stark dal 1813 al 1837; il massimo del 1828.5 è determinato dalle osservazioni di Schwabe, e qui adottato in luogo del 1829.9 di Wolf, eccessivamente influenzato dalle osservazioni di Stark secondo W. A. LUBY [6]. Dalla serie di Wolf e successori di Zurigo (v. M. WALDMEYER, 1961 [7]) è stata presa la serie delle epoche moderne dei massimi usata in questa nota.

Le osservazioni antiche di macchie solari ad occhio nudo sono generalmente dovute ai Cinesi, e corrispondono con probabilità preponderante, particolarmente se vistose o ripetute, ad epoche prossime ai massimi di attività. Occorre sempre un esame accurato, caso per caso, perché non tutte le osservazioni di macchie visibili ad occhio nudo, e meno ancora di aurore a basse latitudini, risultano corrispondenti ad anni di massimo; p. es. una grande macchia fu osservata nel giugno 1899, epoca di minimo. Viceversa per circa 70 anni (1645-1715) l'attività solare è risultata molto ridotta anche in corrispondenza ai massimi [8].

Le notizie cronologiche anteriori al 1600, prese dalle fonti originali, sono discusse e riportate da liste documentarie dovute a R. WOLF [9], H. FRITZ [10], S. HIRAYAMA [11], P. J. DE MOIDREY [12], S. KANDA [13], D. J. SCHOVE [14]. Le osservazioni di aurore sono anche riportate da S. TROMHOLT [15] e A. N. VISSOTSKY [16].

Incertezze di uno o due anni, qualche volta più sulle date dei massimi, sono dovute alla natura discontinua delle osservazioni, ed anche a difficoltà di traduzione delle date antiche Cinesi.

Essendo notevolmente estesi gli elenchi di macchie ed aurore degli autori citati, per ottenere la lista dei massimi di questa nota, libera da inclusioni estranee, si è generalmente effettuata la selezione delle date al modo seguente: 1°, macchie particolarmente vistose, o insistenti per almeno 3 mesi (o rotazioni solari); 2°, macchie osservate in mesi diversi, o con forma descritta, o più macchie contemporanee, o stessa macchia in giorni vicini; 3°, aurore descritte vistosissime, spettacolari, o molto frequenti, o di lunga durata, o

ancora visibili a latitudini basse (p. es. 1737, aurora visibile in Sicilia).

Spesso le date delle aurore sono state diminuite di un anno: FRITZ citato, come ELLIS per l'intervallo 1729-1871 [17], ed altri, hanno rilevato in media questo sfasamento rispetto alle macchie, spiegato p. es. da Cortie, con lo spostamento delle macchie in latitudine verso l'equatore, dopo il massimo, per cui la Terra viene a trovarsi spesso meglio centrata dai fasci corpuscolari e radiativi provenienti dalle eruzioni brillanti.

Per collezionare una selezione decisiva di manifestazioni, si è tenuto conto delle fonti citate; particolarmente documentaria e valida è quella di Schove (1955), che ha distinto le osservazioni in 10 classi. Di essa sono state qui considerate generalmente: quelle classificate dall'autore SSS (extremely strong), SS (very strong); delle S (strong) sono ritenute quelle con errore probabile dalla data valutato inferiore a 3 anni; è inclusa anche qualche MS (moderately strong) che nel quadro generale appare sicura.

È il caso di segnalare qualche esempio di rilevazione caratteristica delle fonti citate, con qualche incertezza in alcune date.

– 464 e – 442, aurore in Cina per 75 giorni e per 60 giorni [4]. Ma nel calcolo sono state usate le date di SCHOVE [14].

– 202, aurora osservata a Cartagine.

– 43, notevole diminuzione di luce. Virgilio ne riferisce tra i segni terrificanti che si ebbero alla morte di Cesare: il Sole *coprì il suo capo brillante con una scura ruggine* (*obscura ferrugine*). Da notare però che qualche cosa doveva pure attribuirsi alle polveri vulcaniche di una eruzione etnea, citata ugualmente come prodigio.

– 27, aurora visibile nella Cina Sud, e *Sole giallo con una emanazione nera grande come una moneta giusto al centro del Sole* [14].

+ 20, Sole molto scuro, riferimento anche in *Han Shu* [14]; Aurora spettacolare a Roma, dove Tiberio, non sapendo cosa succedeva a nord della città, mobilitò il corpo dei pompieri.

187, *A black emanation as large as a gourd* (*zucca*) *was on the Sun.* 188, *The Sun was reddish yellow, and in it there was a black emanation, like a flying bird* (*uccello in volo*); *in several months it dissolved* (SCHOVE [14]).

501-2, macchie frequenti osservate in Cina, ed una aurora imponente visibile in Mesopotamia.

535-6, diminuito splendore del Sole per 14 mesi; macchie riferite da Humboldt senza citare la fonte.

566, manifestazioni aurorali per 70 giorni. 567, al levare e al tramonto del Sole, *vapeur noire comme une tasse* (MOIDREY [12]).

829, *Sur le soleil, vapeur noire, comme en lutte avec lui* [12].

840, aurora frequente ed intensa; macchie (da Humboldt e Kanda). 841, *À coté du Soleil, vapeur noire attaquant le Soleil* [12].

Per altre descrizioni particolari, si rinvia alla Bibliografia.

Le epoche accettate dei massimi sono riportate nella tabella numerica. È ben noto che il periodo medio di variazione dell'attività solare è prossimo ad 11 anni, ma con valori singoli riscontrati nella serie moderna da8 a 17 anni. In media si hanno 9 cicli in un secolo, e questa favorevole circostanza aiuta a disporre la tabella ed il corrispettivo diagramma in forma assai suggestiva. La ordinata corrispondenza indicata dalle linee in figura, è praticamente obbligata dalla condizione di avere 9 massimi in 100 anni, senza il dubbio di saltare o di intrudere un ciclo. È evidente dalla figura che se si ha una durata anomala di un ciclo, questa viene presto compensata, e la coerenza della tabella appare sicura e libera da arbitrarietà, pur avendo richiesta ponderazione in punti alquanto difficili. La data 301 risulta dalla lista di macchie dei riferimenti [4] e [5], abbastanza chiaramente, sebbene vi siano osservazioni di macchie per 5 anni consecutivi (299-304); mentre SCHOVE [14] (1955) riporta la data 302 con la classifica SS ed errore probabile 1. Altre date intermedie tra più anni successivi di osservazioni riportate dalle fonti citate, sono particolarmente quelle del 372, 398, ma la loro determinazione appare ben accertata; nel 372 si ha una dispersione di osservazioni di macchie in ben 7 anni (369-375), ma anche qui la determinazione è evidente, e nella lista di Schove classificata ancora con SS ed errore probabile 1.

Le manifestazioni del 354 e 355 consistono in macchie con forma descritta in [4] e [5], e la lista di Schove riporta l'indicazione S con e. p. 2.

Le date 745 e 765 darebbero due deviazioni un po' forti sull'andamento della tabella, comunque senza effetto rilevante sui risultati. Schove dà indicazioni piuttosto nette per esse (SS ed e. p. 1), ma aurore non molto specificate sono segnalate di continuo per tutto il secolo 8°. Sembra preferibile assumere due date poco diverse, risultanti rispettivamente dal Fritz (che lista aurore nel 740, 41, 42, 43, 45, e si può assumere 742) e dal Lovering che dà 762 e 765, ed è più chiaro l'inquadramento del 762.

La selezione effettuata è importante in quanto costituisce la base dell'analisi numerica della tabella; questa conterrà certo erratici sfasamenti di date, forse anche in brevi sequenze; ma è presumibile che essa rispecchi essenzialmente la situazione effettiva.

Oltre alle evidenti e limitate deviazioni delle date singole dalla regolarità lineare, apparentemente accidentali, potrebbero essere presenti, almeno per ipotesi, deviazioni con visibili conseguenze siste-

matiche, che farebbero presumere vere perturbazioni fisiche della periodicità regolare. Nel caso nostro, più che qualsiasi analisi metodologica, vale una attenta e lunga serie di prove per ottenere conclusioni degne di fiducia. Con tutta la confusione prodotta dalle deviazioni accidentali (originarie o osservative) delle date, dove potrebbero vedersi perturbazioni aventi conseguenze sistematiche? Nel 398-429? 1101-1118? 1660-1705? Forse anche in altri punti (1769)? Comunque conviene iniziare analisi separate per intervalli presumibilmente regolari, che potrebbero essere (senza che la divisione abbia carattere decisivo):

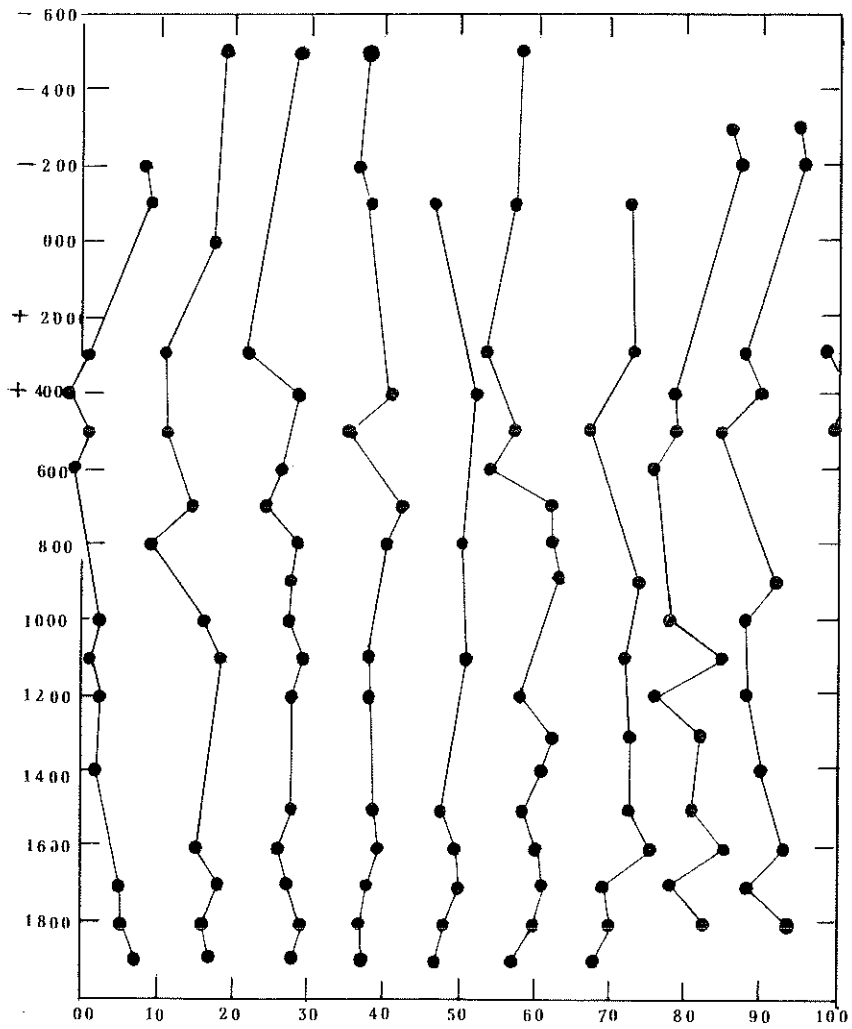
$$-481 \text{ a } +398,\ 429 \text{ a } 1027,\ 1118 \text{ a } 1660,\ 1705 \text{ a } 1968.$$

Per l'ultimo intervallo è da notare: dopo il 1660 la serie è moderna e generalmente più sicura, e presenta visibili perturbazioni. Sembrerebbe quindi opportuna la suddivisione in intervalli parziali, ma si hanno pochi cicli, e date le notevoli fluttuazioni accidentali, sovrapposte alle vere o presunte perturbazioni fisiche, conviene l'analisi in blocco per l'intervallo 1705-1968.

Epoche di massima attività solare ordinate per secoli successivi

—	− 481	− 471	− 461	—	− 442	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	− 214	− 205
− 192	—	—	− 163	—	—	—	− 113	− 104
− 91	—	—	− 62	− 53	− 42	− 27	—	—
—	+ 19	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—
301	311	322	—	—	354	372	—	388
398	—	429	441	452	—	—	479	490
501	511	—	535	—	557	567	579	585
599	—	626	—	—	654	—	676	—
—	714	724	742	—	762	—	—	—
—	809	828	840	850	862	—	—	—
—	—	927	—	—	963	974	—	992
1002	1016	1027	—	—	—	—	1078	1088
1101	1118	1129	1138	1151	—	1172	1185	—
1202	—	1228	1238	—	1258	—	1276	1288
—	—	—	—	—	1362	1372	1382	—
1402	—	—	—	—	1461	—	—	1490
—	—	1528	1539	1548	1558	1572	1581	—
—	1615	1626	1639	1649	1660	1675	1685	1693
1705	1718	1727	1738	1750	1761	1769	1778	1788
1805	1816	1829	1837	1848	1860	1870	1883	1894
1907	1917	1928	1937	1947	1957	1968		

In ciascuno dei suddetti intervalli l'analisi da seguire è quella della regressione rettilinea nelle serie di tempo in cui il tempo è la variabile indipendente X in scala che varia per unità successive ($X_o = 0$, $X_{-1} = -1$, $X_{-2} = -2, \ldots X_1 = 1$, $X_2 = 2, \ldots$), e nella quale assu-



Traduzione grafica della tavola di date: corrispondenza di date intervallate di 9 cicli di attività solare.

miamo come unità il periodo P da ricercare. Per la successione periodica delle date osservate, ad $X_o = 0$ si pone in corrispondenza una data di riferimento O_o che converrebbe scegliere come media aritmetica delle date O_i dell'intervallo considerato (per rendere

spedito il calcolo si prende per O_o la data osservata, o eventualmente interpolata, più prossima alla media aritmetica sopra detta). Ora si costruisce la successione delle date $Y_i = O_i - O_o$ (i =o, $-$ 1, $-$ 2, . . . , 1, 2 , . . .), negative anteriormente ad O_o, positive posteriormente. La retta di regressione ha la forma

$$Y = P\,X$$

e la soluzione per il periodo in accordo con la teoria dei minimi quadrati è

$$P = \Sigma\, X_i\, Y_i \,/\, \Sigma\, X_i^2$$

Ora col P, partendo da O_o, si costruisce la successione uniforme delle date calcolate $C_i = O_o + P\,X_i$, e quindi dei residui $v_i = O_i - C_i$. A questo punto, lo scarto quadratico medio σ di una data generica si valuta.

$$\sigma = \pm\, 1.25\, \frac{v_i]}{\sqrt{n\,(n-2)}}$$

dove $v_i]$ è la semplice somma dei valori assoluti dei v_i, ed n il loro numero, cioè il numero delle date. Lo scarto (o errore) medio di P può ottenersi

$$\sigma_P = \sqrt{\Sigma\, v^2/(n-2)\,\Sigma\, X^2}$$

Applicato il detto procedimento standard agli intervalli prescelti si hanno i seguenti risultati, cominciando dai due intermedi:

429 a 1027, $P = 11.^{a}17$, $\sigma = \pm\, 3.19$, $\sigma_P = \pm\, 0.03$, 54 cicli

1118 a 1660, $P = 11.08$, $\sigma = \pm\, 2.63$, $\sigma_P = \pm\, 0.03$, 49 cicli.

La differenza tra i due valori P è abbastanza sensibile, ed è per questo che sono riportati i due risultati; ma molto dipende dalle deviazioni incontrollabili delle date, e dall'insieme delle prove appare più opportuno considerare un unico intervallo, 429 a 1660, esteso per 111 cicli. Allora i risultati conclusivi nell'ipotesi di due lacune intermedie perturbate da eliminare sono:

Intervallo	σ	P	σ_P	Cicli
$-$ 481 a + 398	$\pm$ 4.03	11.^{a}064	$\pm$ 0.033	80
429 a 1660	$\pm$ 3.04	11.129	$\pm$ 0.012	111
1705 a 1968	$\pm$ 2.19	11.048	$\pm$ 0.051	24

Si noti che vi è una grande differenza tra la formola per σ_P usata, in cui le deviazioni singole s'intendono dalla retta di regressione imposta, e quella $(\sigma/\sqrt{n})$ in cui si considerano deviazioni singole di misure indipendenti di una grandezza dalla loro media aritmetica.

Nei risultati scritti, la dispersione σ_P per la successione antica appare inferiore a quella relativa alla moderna; ma questa comprende pochi cicli. Tralasciando altre considerazioni probabilistiche sui risultati sopra scritti delle prove effettuate, rimane qualche dubbio serio sulla significanza della divisione in intervalli. La tabella mostra differenze, ma in parte può avere influito la eliminazione delle lacune, alquanto arbitraria. Appare opportuna quindi una soluzione, con lo stesso procedimento, in blocco; essa dà questo risultato:

— 481 a 1968: 115 date, estensione 221 cicli:

$$P = 11.^{a}130, \quad \sigma = \pm 3.57, \quad \sigma_P = \pm 0.005$$

Il valore di P è assai vicino alla media ponderata (11.12) dei precedenti.

Quanto alla stima ± 0.005 dell'errore medio, essa forse esagera la fiducia nel calcolo numerico e nella tabella di date, stabilite con criteri obiettivi, ma con qualche propensione (bias) per alcune di esse, presumibile dalla previa conoscenza del valore approssimato 11 anni. Così il risultato complessivo sembra tenuto in limiti di maggiore sicurezza scrivendo

$$P = 11.^{a}13 \pm 0.01 \qquad (1)$$

La serie moderna, a causa del ristretto numero di cicli e delle notevoli deviazioni locali, nonostante sia qualitativamente molto migliore e sicura, si rivela insufficiente. Da questa serie moderna SCHUSTER [1] ed altri usufruenti delle tecniche periodografiche (Thiele, Kimura, Michelson, ecc.) hanno dedotto vari termini armonici; ma questi, come ben noto dalla teoria delle serie trigonometriche, si adattano alle funzioni empiriche rappresentate, solo entro l'intervallo di osservazione, e di regola non esternamente; e nel caso delle macchie solari resta sicuro (almeno nei limiti di questa ricerca) il solo periodo undecennale, o anche ventiduennale se si considera il ciclo completo di polarità magnetica.

Il concetto di YULE [3] è che la successione dei numeri di macchie solari possa rientrare nello schema del *pendolo bombardato,*

cioè soggetto a piccoli impulsi o disturbi accidentali esterni, che lasciano il periodo proprio di oscillazione inalterato, ma alterano la fase nelle oscillazioni successive, e quindi anche l'andamento regolare della periodicità. Ma secondo la presente ricerca, non risulta traccia sicura di alterazioni ereditarie nella regolarità del ciclo solare, questo appare secolarmente stabile. Si notano perturbazioni del ciclo, ma temporanee; a lungo andare esso si ritrova in fase, come se le predette perturbazioni fossero manifestazioni deviate di un regolare ritmo proprio. Che le cose stiano così sembra mostrato da 3 date in netto anticipo della sicura serie moderna: 1769, 1778, 1788, alle quali segue la restituzione in fase col massimo del 1805. Ciò è visibilmente evidente dalla figura, insieme a situazioni analoghe delle date finali del secolo precedente e del seguente. Le perturbazioni, o anche eventualmente errori, delle date, non risultano avere conseguenze durevoli sulla successione. Una situazione analoga abbastanza rilevante si ha particolarmente per date del 5° secolo; ma si ha l'impressione di date errate di alcuni anni, tuttavia non in grado di alterare l'inquadratura generale della tavola o della figura; e tanto meno appare possibile un migliore aggiustamento con una alterazione della numerazione ordinale dei cicli, inserendone o togliendone uno.

Un esempio lontanamente analogo di compensazione di deviazioni temporanee di periodicità regolari, si ha nel ciclo meteorologico terrestre, che varia anche notevolmente da anno ad anno, ma tuttavia di durata media e successione esattamente rigida, un anno tropico. Si può anche richiamare, per la cronometria di precisione, la stabilità di periodo di un circuito oscillante controllata dall'accoppiamento con un cristallo di quarzo, o ancora con più spinta regolarità, dall'ulteriore controllo di frequenze spettrali. La regolarità del ritmo meteorologico a lungo andare, è imposta dalla rivoluzione annua apparente del Sole; nel caso della cronometria di precisione, dalla elevata regolarità intrinseca delle vibrazioni dei cristalli o delle frequenze spettrali.

Siccome non si conosce alcun fenomeno esterno cosmico in grado di imporre il ritmo undecennale all'attività solare, si può pensare che la causa di questo ritmo regolare debba risiedere nel profondo interno del Sole, che libera energia raggiante ad una misura praticamente invariata da miliardi d'anni.

Le successioni continuate di Zurigo, dànno le epoche non solo dei massimi, ma anche dei minimi di attività, dal 1610. Evidentemente per la valutazione di P, quantunque i cicli non siano in grande numero, si è in condizioni più favorevoli del passato, e il risultato

ottenuto dalla successione (non riportata) dei minimi, dal 1666 al 1976, è

$$P = 11.^{a}10 \pm 0.03 \qquad (2)$$

I limiti fiduciari del valore P al livello di probabilità del 95 % (cioè limiti entro i quali il valore P dovrebbe trovarsi con probabilità 95 %), $P \pm 2\,\sigma_P$, sono rispettivamente nelle due valutazioni (1) e (2):

$$11.12 < P < 11.14$$

$$11.04 < P < 11.16$$

La conclusione di questa ricerca si può sintetizzare come segue. Secondo la semplice analisi statistica fatta, non appare sicuramente dimostrata qualche variazione sistematica del periodo undecennale dell'attività solare. Se vi sono state perturbazioni effettive o apparenti nelle manifestazioni fotosferiche, esse non hanno prodotto conseguenze ereditarie durevoli: dopo una perturbazione, come per un certo effetto di autoregolazione (o feedback), il ritmo si è presto ripreso con un periodo uguale o molto prossimo, e col ritorno in fase.

Il valore numerico di P è dato dalla (1), e non si altera includendo la (2).

BIBLIOGRAFIA

[1] *Phil. Trans. R. S.*, London, A, **206** (1906).
[2] *Proc. R. S.*, London, A. **93** (1916-17).
[3] *Phil. Trans. R. S.*, London, A, **226** (1927).
[4] *Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem.*, Napoli, serie 4ª vol. XII (1941-2).
[5] *Atti della 7ª riunione della S.A.I.*, Pavia 1963.
[6] *Pop. Astr.*, **36** (1928).
[7] *The Sunspot activity*, 1610-1960, Zurich 1961.
[8] V. *Sky and Telescope*, VI, 1976.
[9] *Mitteilungen über die Sonneflecken*, ed *Astronomische Mitteilungen*, **24**, Zurich 1868.
[10] *Polarlichtkatalog* e supplementi; v. *Verzeichnis beobachteter Polarlichter*, Vienna 1873. Il catalogo è riportato nella tav. 2ª di: *Die Perioden Solarer und Terrestrischen Erscheinungen, Viertljahrsch.* der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Heft 1, 1893, tradotta in: *The Periods of Solar and Terrestrial Phenomena*, Month. Wea. Rev., Ott. 1928. È forse questa ultima la raccolta più citata, ed indubbiamente è fondamentale per le date riportate, non per la deduzione della serie di epoche di massimi secondo l'a., confusa dalla inclusione di elementi meteorici ed altri.
[11] *The Observatory*, **12**, 1889.

[12] *Bull. Astr.*, **21**, 1904, con traduzione di date di P. P. Hoang.
[13] *Proc. Imp. Acad. of Sc.*, Tokyo, **9**, 1932.
[14] Il dr. Schove ha rielaborato la documentaria raccolta di date antiche, particolarmente Cinesi, riportate in: *Journ. Brit. Astr. Ass.*, **58**, 1947; **61**, 1951 (con alcune date tradotte dal prof. Dubs dalla *Han Shu*, Storia della dinastia Han); *Journ. Brit. Archeol. Ass.*, III series, **13**, 1950; **69**, 1960, in collaborazione col dr. P. Y. Yo; e particolarmente in *Journ. Geoph. Res.* **60**, 1955, con una interessante proposta sequenza della completa successione cronologica dei massimi e minimi
[15] *Katalog der in Norwegen bis Juni 1878 beobachteten Nordlichter*, Cristiania (Oslo), Dybwad 1902.
[16] *Lund Meddel.* n. 22, 1949.
[17] *M.N.R.A.S.*, **64**, 1904.

Dati preliminari sull'analisi strumentale mediante attivazione neutronica delle terre rare in campioni di rocce fornite dall'USGS ***

Nota di ANTONIO ALBINI *,
DONATA DE CILLIS ** e DAMIANO STANZIONE **
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 17 gennaio 1976)

RIASSUNTO. — Viene descritto un semplice metodo che impiega l'analisi per attivazione neutronica per la rapida determinazione delle terre rare contenute nelle rocce. Il metodo è stato applicato all'analisi di rocce standard fornite dall'USGS.

Vengono discussi i risultati ottenuti con particolare riferimento alla loro precisione ed accuratezza.

SUMMARY. — An easy method for the Rare Earth content evaluation in rock samples by neutron activation analysis is discussed.

This methodes has been used to analyse some USGS standard rocks. The results are discussed with special emphasis to their precision and accuracy.

INTRODUZIONE

Nell'ambito degli studi di geochimica volti a definire l'origine di un magma così come in molti altri problemi geologici in cui la caratterizzazione chimica (mediante la determinazione quantitativa del contenuto di un elevato numero di elementi) delle rocce riveste il carattere di fondamentale ricerca di base, nell'ultimo decennio ha fatto la sua autorevole apparizione la tecnica dell'analisi per attivazione neutronica. Scopo di questo lavoro è di portare a conoscenza di chi esegue studi geochimici le possibilità offerte dalla tecnica di analisi per attivazione neutronica per la determinazione quantitativa degli elementi del gruppo delle terre rare contenuti nelle rocce.

* CISE - Centro Informazioni Studi Esperienze - Segrate (Mi). Casella Postale 3986. Milano 20100.
** Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli.
*** Lavoro eseguito con il contributo del CNR.

Questa tecnica ben si presta allo scopo soprattutto per i notevoli vantaggi che presenta, in termini di rapidità e di sensibilità per l'analisi chimica di un numero elevato di elementi. Tra questi elementi le terre rare in particolare possono essere dosate senza grandi difficoltà, superando così i problemi che si incontrano durante l'analisi con i metodi tradizionali a causa delle loro proprietà chimiche estremamente simili.

I vari metodi di analisi per attivazione neutronica (AAN) delle terre rare, reperibili in letteratura, possono essere classificati in due gruppi fondamentali.

Il primo gruppo (2 ÷ 6) comprende i metodi che si basano sull'analisi per attivazione esclusivamente strumentale (ossia senza alcuna manipolazione chimica); essi non sono distruttivi, sono rapidi e permettono di determinare senza troppe difficoltà e senza apparecchiature di conteggio troppo sofisticate 8 o 9 terre rare.

Nel secondo gruppo (7 ÷ 18) sono raccolti i metodi radiochimici, che prevedono cioè separazioni chimiche dopo l'irraggiamento con neutroni del campione, e che permettono di determinare tutte le 14 terre rare con elevatissima sensibilità anche con apparecchiature di conteggio relativamente semplici, ma che per contro sono lunghi e richiedono manipolazioni chimiche su campioni radioattivi.

Il metodo che viene descritto è stato messo a punto facendo riferimento in particolare ai lavori di BEREZNAI [1], GORDON [2] e BRUNFELT [3], appartenenti al primo gruppo, in quanto ci è sembrato più utile disporre dapprima di un metodo rapido e relativamente semplice anche se con esso si ottengono risultati solo per La, Ce, Sm, Eu, Tb, Dy, Yb e Lu, che sono presenti nelle rocce in concentrazioni relativamente alte.

È nostra intenzione proseguire il lavoro di messa a punto di metodi che impiegano l'AAN sia raffinando e migliorando questo metodo sia studiandone altri.

DESCRIZIONE DEL METODO

Si pesano 300 mg di roccia finemente macinata e ben omogeneizzata e si introducono in un contenitore di alluminio.

Si irraggiano 3 di questi contenitori contemporaneamente (uno contiene il « monitor ») per 2 min ad un flusso di $0{,}8.10^{10}$ n/cm^2 sec.

Si trasferiscono i campioni nel locale di conteggio e si misura la loro attività gamma con l'idonea apparecchiatura a partire da 30′ dalla fine dell'irraggiamento per tempi variabili da 900″ a 3600″. Si

ripete il conteggio degli stessi campioni dopo circa 10 ore per una durata di 3600″.

Si ripete poi l'irraggiamento su 6 campioni (tra cui 1 « monitor ») per 2 ore ad un flusso di $3{,}5.10^{11}$ n/cm^2 sec. Si lasciano raffreddare per 3 giorni e si esegue quindi una sequenza di conteggi con un'altra apparecchiatura per la spettrometria gamma con tempi di conteggio variabili da 1000″ a 20.000″ dopo 3, 8, 15, 30, 60 giorni dall'irraggiamento. Si esegue l'elaborazione dei dati ottenuti dai conteggi sia per determinare il contenuto espresso in ppm delle diverse terre rare nelle rocce in esame sia per calcolare gli errori.

Apparecchiature usate

Per la pesata dei campioni si è usata una bilancia di precisione Mettler ad un piatto (sensibilità 0,1 mg).

Per l'irraggiamento ci si è rivolti al CESNEF del Politecnico di Milano presso il quale è disponibile un reattore L54.

L'apparecchiatura di conteggio gamma utilizzata subito dopo l'irraggiamento breve consiste di un rivelatore Ge (Li) da 30 cm^3 della Laben abbinato ad un analizzatore d'impulsi 1024 canali pure della Laben con stampante.

L'apparecchiatura di conteggio utilizzata dopo l'irraggiamento lungo consiste di un rilevatore Ge (Li) da 50 cm^3 e da un altro analizzatore d'impulsi 1024 canali, sempre della Laben, anch'esso con stampante e perforatore.

L'elaborazione dei dati è stata eseguita manualmente, con l'ausilio di una calcolatrice Olivetti LOGOS 27-2.

Discussione

Analizzando in dettaglio le varie fasi del metodo descritto va sottolineato che con questo tipo di analisi riveste estrema importanza la preparazione del campione. Andrà infatti evitato accuratamente che il campione possa contaminarsi durante la fase di manipolazione e andrà pure garantita l'omogeneità dell'aliquota prelevata per l'analisi rispetto a tutto il campione di provenienza.

La preparazione del campione per l'irraggiamento consiste essenzialmente nella pesata, che non presenta problemi, e nella scelta del contenitore. La nostra preferenza, tenendo conto dei valori del flusso neutronico e del tipo di campioni da analizzare, è andata ad un contenitore realizzato con un foglietto di alluminio purissimo sottile che

avvolgeva la roccia formando una « pasticca » cilindrica di circa 10 mm di diametro e 2 mm di altezza. Circa la posizione di irraggiamento e il numero di campioni da irraggiare contemporaneamente si è adottata una soluzione che permetteva di ridurre a valori trascurabili gli effetti di schermaggio e di variazione del flusso. Anche gli effetti di autoassorbimento sono risultati trascurabili. Notevole importanza riveste il problema degli standard di riferimento (« monitor »). La letteratura giustamente si sofferma molto su questo aspetto. La soluzione da noi adottata si è rivelata soddisfacente; essa consiste nel preparare una miscela di ossidi delle terre rare, pesando

TABELLA I

Preparazione del « monitor » costituito dalla miscela degli ossidi delle terre rare.

	peso di ossido mg	peso di elemento mg	quantità di elemento per mg di miscela µg
La_2O_3	86,9	74,09	224,7
CeO_2	132,8	108,10	327,9
Pr_6O_{11}	12,7	11,65	35,3
Nd_2O_3	62,9	53,91	163,5
Sm_2O_3	12,7	10,95	33,2
Eu_2O_3	1,9	1,64	5,0
Gd_2O_3	6,6	5,73	17,4
Tb_4O_7	0,8	0,68	2,1
Dy_2O_3	5,1	4,44	13,5
Ho_2O_3	0,81	0,71	2,2
Er_2O_3	2,5	2,19	6,6
Tm_2O_3	0,27	0,24	0,7
Yb_2O_3	2,5	2,20	6,7
Lu_2O_3	0,66	0,58	1,8

una quantità di ciascun elemento proporzionale alla quantità che si presume sia presente nei campioni (ricavata da analisi di rocce geologicamente simili) (vedi Tab. 1). Dalla miscela di ossidi si preleva un'aliquota opportuna in modo da avere la stessa quantità di T.R. che sono presenti in 300 mg della roccia in esame e la si miscela con tanto $CaCO_3$ da avere alla fine un peso totale di 300 mg. Il

« monitor » così preparato viene irraggiato insieme al campione da analizzare.

I tempi e i flussi di irraggiamento sono stati stabiliti tenendo conto della sezione di cattura e della costante di decadimento degli isotopi che interessano (vedi Tab. 2) e di quelli che possono interferire. In particolare la scelta di eseguire anche un irraggiamento breve è motivata dalla necessità di dosare il Dy.

TABELLA 2

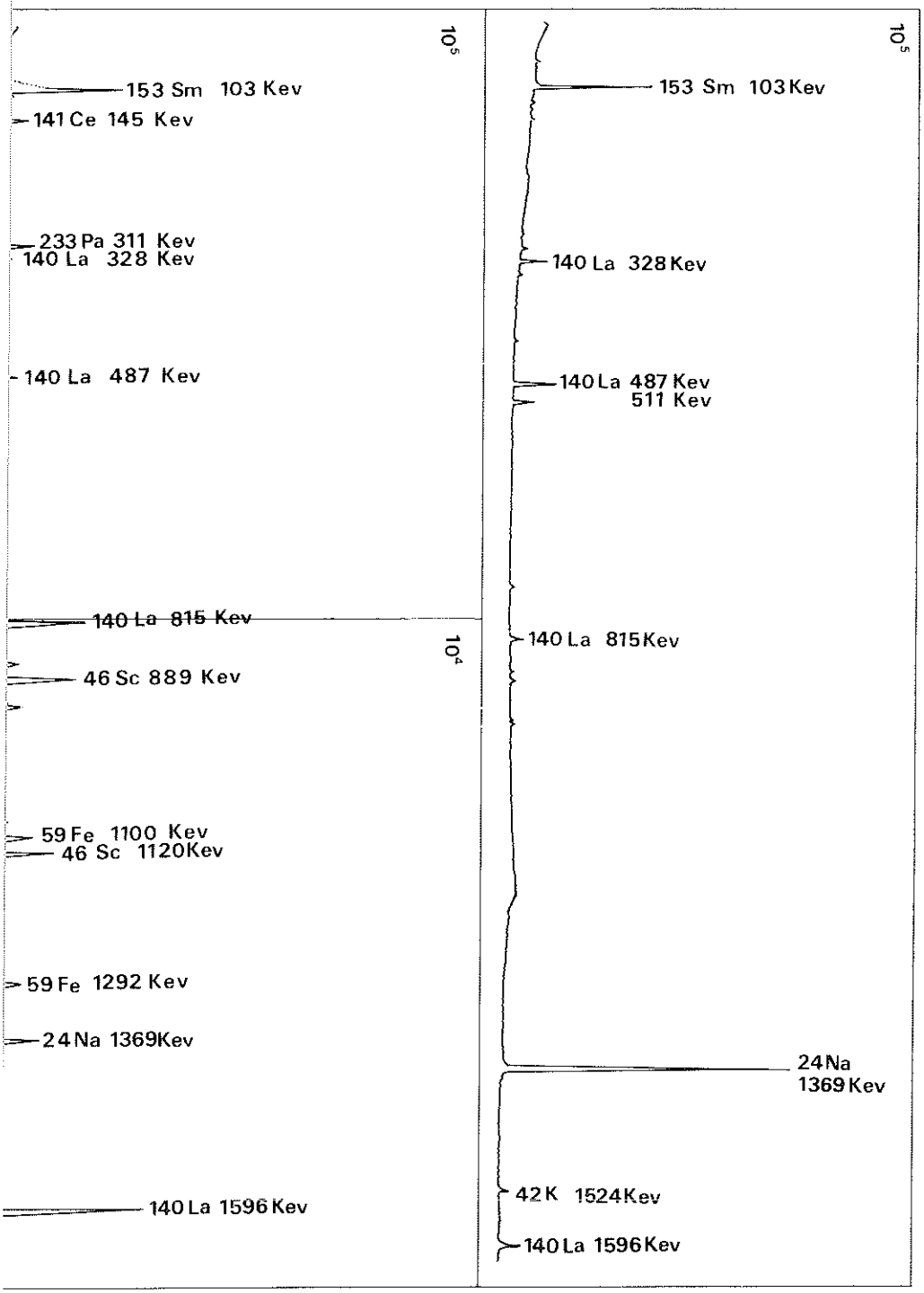
Caratteristiche fisiche dei nuclidi usati per la determinazione quantitativa delle terre rare nei campioni di rocce dell'USGS.

Elemento	Isotopo naturale	abbond. isotopica %	Nuclide prodotto	vita media (t 1/2)	sezione di cattura effettiva (n_{th}, γ) barns	fotopicchi usati per la det. (KeV)	tempo di attesa per conteggio (di)
La	139_{La}	99,9	140_{La}	44,2 h	8,9	487,1596	3÷8
Ce	140_{Ce}	88,5	141_{Ce}	33 d	0,6	145	15
Sm	152_{Sm}	26,6	153_{Sm}	47 h	210	103	3
Eu	151_{Eu}	47,8	$152m_{Eu}$	9,3 h	2800	122	30 min
			152_{Eu}	12 y	5900	122,1408	60
Tb	159_{Tb}	100,0	160_{Tb}	72,1 d	46	963+966	60
Dy	164_{Dy}	28,2	165_{Dy}	2,32 h	$\sim$ 2700	95	30 min
Yb	168_{Yb}	0,14	169_{Yb}	32 d	11000	198	15÷30
Lu	176_{Lu}	2,6	177_{Lu}	6,7 d	2100	208	15

Per quanto riguarda il flusso, le caratteristiche del reattore impiegato (pot. max. 40 KW) impediscono di ottenere valori particolarmente elevati e quindi costituiscono una limitazione alla sensibilità del metodo.

Il tempo di attesa tra la fine dell'irraggiamento e l'inizio del conteggio (tempo di raffreddamento) è nel caso dell'irraggiamento breve ridotto al minimo per permettere di avere più elevata intensità di conteggio per gli isotopi a vita breve presenti. Nel caso dell'irraggiamento lungo, l'attesa minima deve essere di 3 giorni perché altrimenti il campione non sarebbe maneggiabile a causa della eccessiva attività e comunque non potrebbe essere eseguito nelle migliori condizioni il conteggio dell'attività gamma emessa dal campione.

Circa i rivelatori impiegati già si è detto nel paragrafo delle apparecchiature; le loro caratteristiche (efficienza riferita al ^{60}Co = 5,8 %; rapporto picco/compton = 26, e potere risolutivo 3,5 KeV e 1332 KeV) sono normali per questo tipo di strumento.


10⁵
153 Sm 103 Kev
141 Ce 145 Kev
233 Pa 311 Kev
140 La 328 Kev
140 La 487 Kev
140 La 815 Kev
10⁴
46 Sc 889 Kev
59 Fe 1100 Kev
46 Sc 1120Kev
59 Fe 1292 Kev
24 Na 1369Kev
140 La 1596 Kev
10⁵
153 Sm 103 Kev
140 La 328 Kev
140 La 487 Kev
511 Kev
140 La 815 Kev
24 Na
1369 Kev
42 K 1524Kev
140 La 1596 Kev

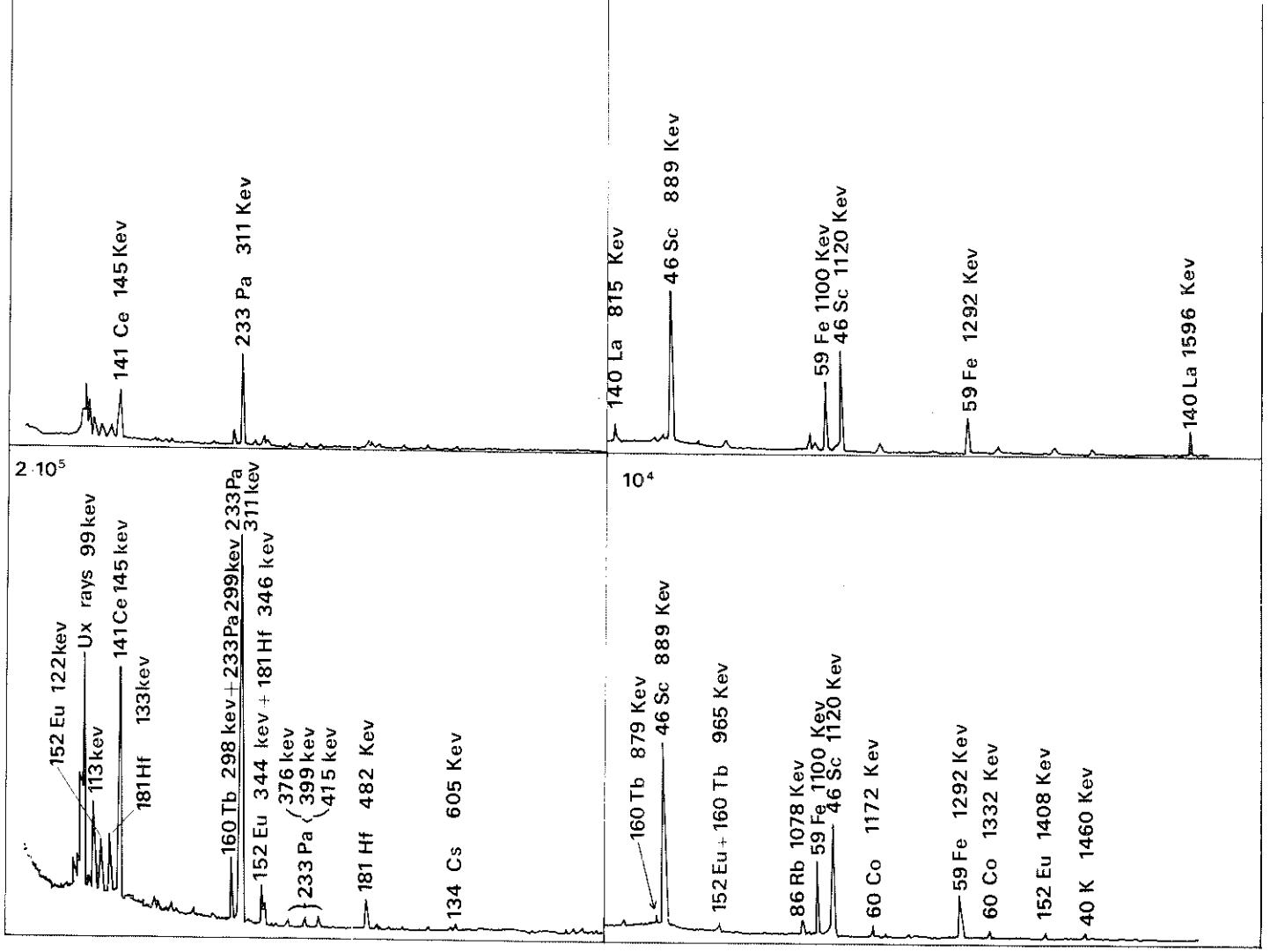
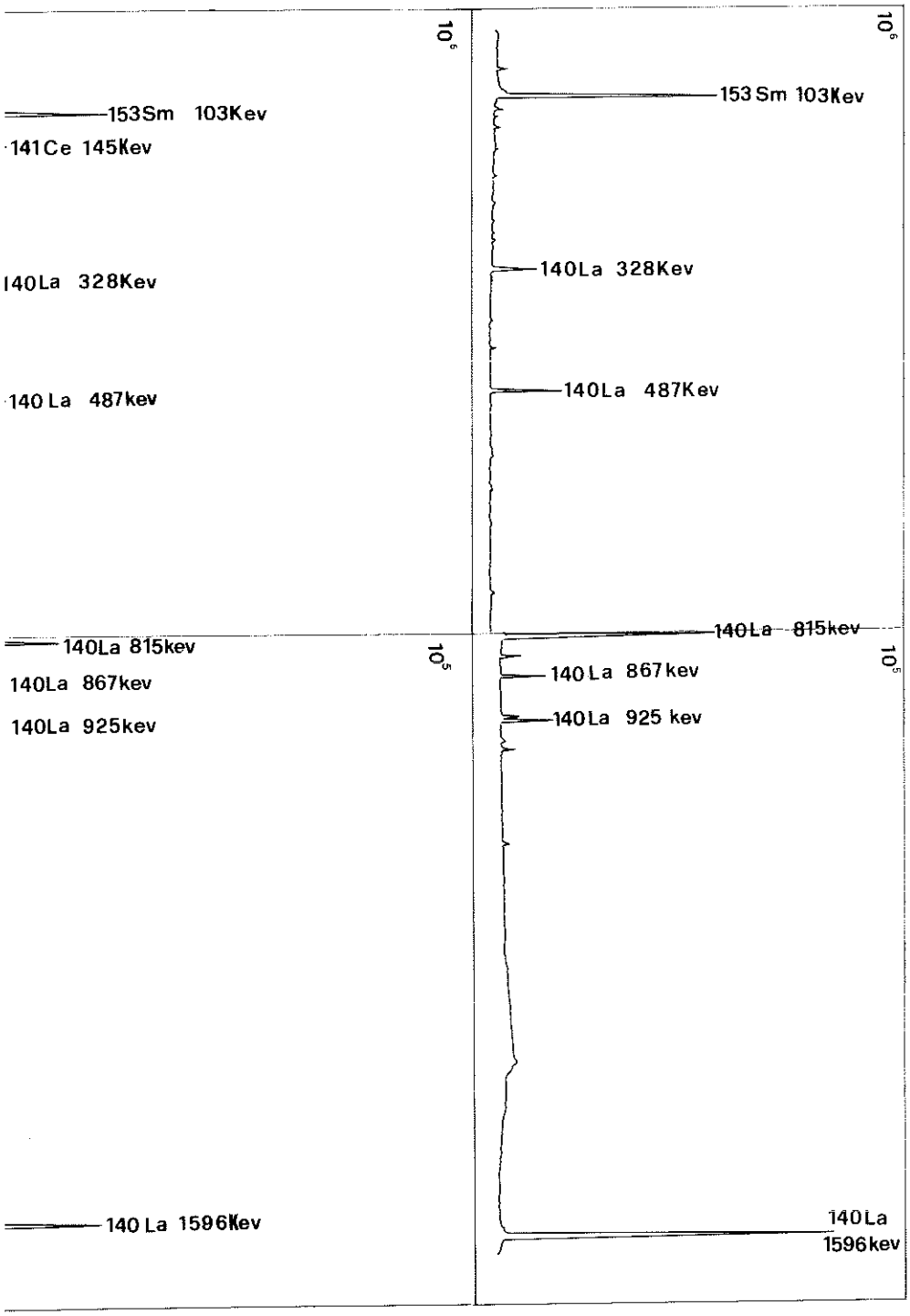


FIG. 1. - Sequenza di spettri γ dello standard (GSP-I) eseguita con tempi di attesa (dalla fine dell'irraggiamento) di 3, 9, 15 e 32 giorni. La durata dei conteggi è rispettivamente di 1000, 4000, 6000 e 8000 secondi.


153Sm 103Kev
141Ce 145Kev
140La 328Kev
140La 487kev
140La 815kev
140La 867kev
140La 925kev
140La 1596Kev
153Sm 103Kev
140La 328Kev
140La 487Kev
140La 815kev
140La 867kev
140La 925 kev
140La
1596kev

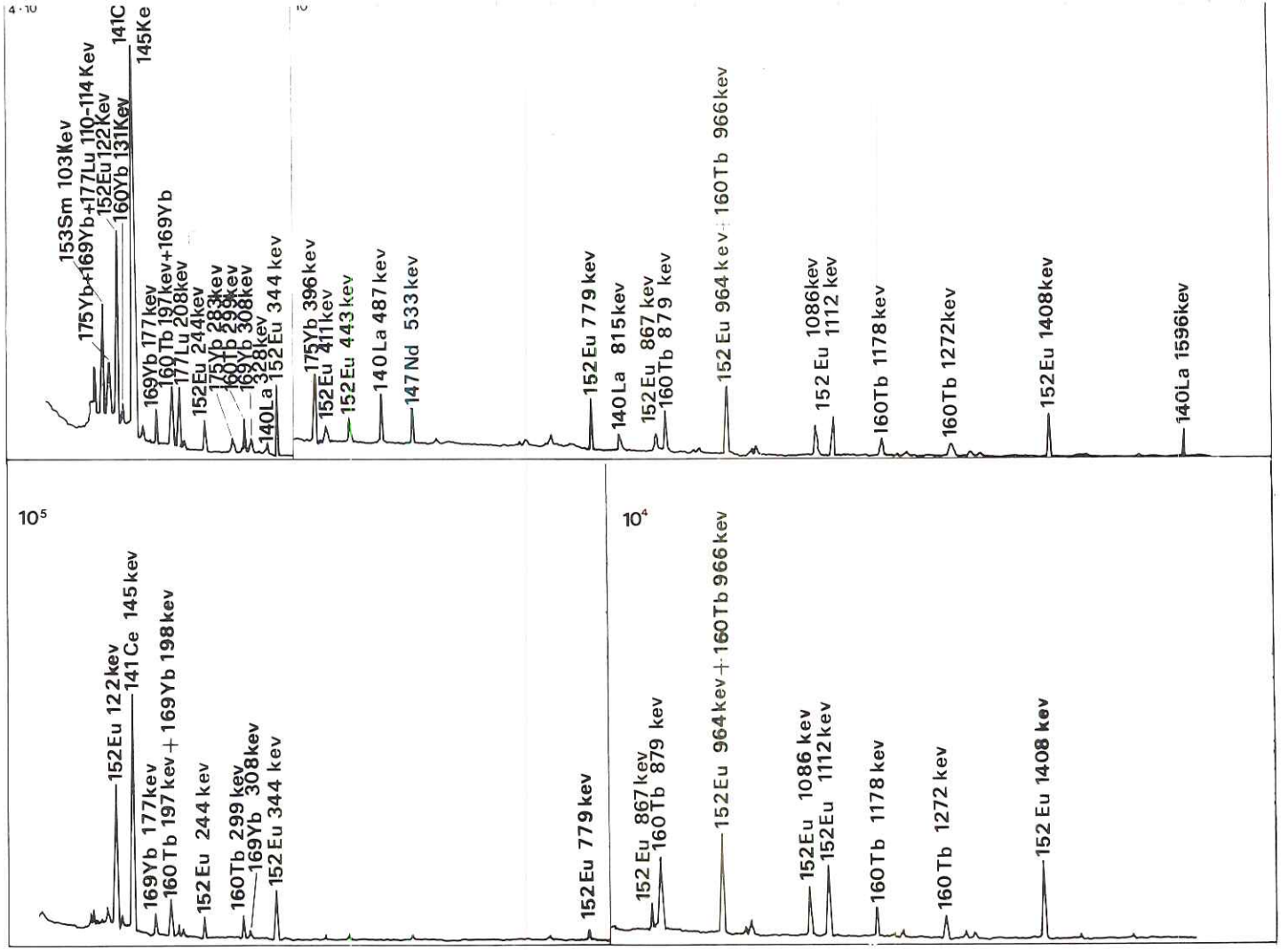


FIG. 2. - Sequenza di spettri γ di una miscela di T.R. (« monitor ») eseguita con tempi di attesa (dalla fine dell'irraggiamento) di 3, 10, 19 e 32 giorni. La durata dei conteggi è rispettivamente di 1000, 2000 e 3000 secondi.

In letteratura si parla di una notevole gamma di apparecchiature più sofisticate che permettono di incrementare notevolmente i risultati a parità delle altre condizioni. Unico inconveniente è il costo particolarmente elevato di queste apparecchiature.

I conteggi sono stati eseguiti senza trasferire il campione dal contenitore usato per l'irraggiamento e questo non ha prodotto alcun inconveniente dato il materiale di cui era costituito (Al). La maggior parte dei conteggi è stata eseguita ponendo il campione a contatto del rivelatore; solo per i primi conteggi si è usato un distanziatore di circa 5 cm di altezza affinché il tempo morto dell'analizzatore fosse al massimo pari al 10 %.

La durata dei conteggi variava in funzione della attività del campione e del radionuclide che era interesse dosare con quel conteggio.

Al termine del conteggio è stata eseguita la stampa dei risultati mediante Teletype il che ha permesso di ottenere anche una banda di carta perforata per l'eventuale elaborazione automatica dei dati.

Per questo primo gruppo di campioni ci si è però limitati ad un'analisi manuale degli spettri e all'elaborazione pure manuale col solo ausilio di una calcolatrice.

L'elaborazione dei dati si è svolta secondo il seguente schema.

1) Esame dello spettro gamma ed identificazione dei picchi dei radionuclidi da dosare (vedi Fig. 1).

2) Verifica della loro identità mediante la loro costante di decadimento con l'esame di spettri successivi (vedi Fig. 1).

3) Calcolo delle aree dei picchi selezionati.

4) Eventuali sottrazioni o correzioni del valore ottenuto per effetto di sovrapposizioni di picchi o altro.

5) Calcolo del valore dell'area riportato al tempo (t_o) di fine irraggiamento (correzione per il decadimento).

6) Calcolo, con analogo procedimento, del valore dell'area del picco, riportato a t_o, per ciascun radionuclide da dosare, eseguito analizzando gli spettri del « monitor » (vedi Fig. 2) preparato miscelando quantità note di ossidi di terre rare.

7) Calcolo del contenuto (in ppm) di ciascuna terra rara nel campione in esame con la formula

$$\text{ppm El} = \frac{\text{cps a } t_o \text{ CAMPIONE} \times 3{,}33 \times \mu\text{g El nel MONITOR}}{\text{cps a } t_o \text{ MONITOR}}$$

8) Calcolo dell'errore statistico connesso con l'intensità di conteggio.

9) Valutazione di altre fonti di errore e calcolo degli errori cumulativi.

10) Calcolo della deviazione standard su campioni analizzati in triplo con la formula

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

$\bar{x}$ = media aritmetica N = numero delle misure

Conclusioni

Il metodo descritto si è rivelato piuttosto semplice e rapido e i risultati ottenuti analizzando gli standard forniti dall'USGS (vedi Tabella 3) sono discretamente buoni sia come accuratezza che come precisione e sono comparabili a quelli ottenuti da altri autori [2, 7] con metodi più complessi. Come già segnalato in precedenza sono state individuate parecchie possibilità di miglioramento che sono attualmente in fase di studio.

In particolare può essere migliorato il « monitor » e la precisione nella determinazione dell'Yb, aumentando la durata del conteggio. Ulteriori migliorie sono previste man mano che si renderanno disponibili apparecchiature più sofisticate con particolari vantaggi soprattutto per quanto riguarda l'uscita veloce dei dati dall'analizzatore e l'elaborazione semiautomatica degli stessi.

Si segnala infine che contemporaneamente alle terre rare citate è possibile determinare, senza particolari problemi, anche i seguenti elementi: K, Na, Rb, Cs, Sc, Hf, Fe, Co.

TABELLA 3

Risultati dell'analisi dei campioni di rocce standard dell'USGS e loro confronto con i risultati ottenuti da altri autori.

		questo lavoro *	deviazione standard % **	G. CAPALDI et al. [7]	GORDON et al. [2]
	La	188 ± 18	14	166 ± 16	171 ± 15
	Ce	385 ± 16	6	419 ± 42	390 ± 20
	Sm	26,5 ± 1,1	6	22,6 ± 1,2	23,2 ± 1,0
GSP-1	Eu	2,7 ± 0,1	6	2,1 ± 0,1	2,0 ± 0,1
Granodiorite	Tb	1,4 ± 0,2	17		1,3 ± 0,1
	Dy	5,6 ± 0,3	7	5,7 ± 0,9	
	Yb	2,2 ± 0,1	7	2,3 ± 0,2	2,0 ± 0,5
	Lu	0,3 ± 0,02	10	0,24 ± 0,01	0,17 ± 0,04
	La	21,1 ± 2,5		25 ± 3	23 ± 2
	Ce	53,5 ± 3,2		53 ± 5	46 ± 5
	Sm	6,7 ± 0,3		5,7 ± 0,3	5,9 ± 0,5
BCR-1	Eu	2,5 ± 0,1		2,0 ± 0,1	1,95 ± 0,1
Basalto	Tb	1,4 ± 0,2		1,1 ± 0,2	1,0 ± 0,1
	Dy	7,2 ± 0,3		6,1 ± 0,9	—
	Yb	3,3 ± 0,2		3,6 ± 0,4	3,2 ± 0,4
	Lu	0,5 ± 0,03		0,55 ± 0,03	0,06 ± 0,05
	La	32 ± 4		38 ± 4	33 ± 3
	Ce	58 ± 2		56 ± 6	57 ± 3
	Sm	6,2 ± 0,3		5,2 ± 0,3	5,4 ± 0,5
AGV-1	Eu	2,0 ± 0,2		1,4 ± 0,1	1,55 ± 0,06
Andesite	Tb	0,5 ± 0,1		0,7 ± 0,1	0,77 ± 0,04
	Dy	4,2 ± 0,4		3,5 ± 0,5	—
	Yb	1,5 ± 0,1		1,7 ± 0,2	1,6 ± 0,3
	Lu	0,47 ± 0,03		0,25 ± 0,02	0,37 ± 0,06

* Gli errori sono quelli dovuti alla statistica di conteggio (95 % confidence level) ed alle correzioni apportate.

** Calcolata sui risultati di 3 analisi.

BIBLIOGRAFIA

[1] BEREZNAI T., *Activation Analysis of Rare Earth Elements*, J. Radioanal. Chem., **9**, 81-100 (1971).

[2] GORDON G. E., RANDLE K., GOLES G. G., CORLISS J. B., BEESON M. H., OXLEY S. S., *Instrumental Activation Analysis of Standard Rocks with High-resolution γ-ray Detectors*. Geochim. Cosmochim. Acta, **32**, 369-396 (1968).

[3] BRUNFELT A. O., *A Neutron-Activation Scheme Developed for the Determination of 42 Elements in Lunar Material*. Talanta, **18**, 1197-1208 (1971).

[4] COBB J. C., *Determination of Lanthanide Distribution in Rocks by Neutron Activation and Direct Gamma Counting*. Analytical Chemistry, **39**, 1, 127-131 (1967).

[5] MELSOM S., *Precision and Accuracy of Rare Earth Determinations in Rock Samples Using Instrumental Neutron Activation Analysis and a Ge (Li) Detector*. J. Radioanal. Chem., **4**, 355-363 (1970).

[6] ROSENBERG J., WIIK H. B., *Instrumental Activation Analysis of 11 Lanthanide Elements in Apollo 12 Lunar Samples*. Radiochem. Radioanal. Letters, **6**, 1, 45-55 (1971).

[7] CAPALDI G., GASPARINI P., MOAURO A., SALVIA E., TRAVAGLIONE O., *Rare Earth Abundances in the Alkaline Volcanic Rocks from Campania, South Italy*. Earth and Planetary Science Letters, **17**, 247-257 (1972).

[8] MORRISON G. H., GERARD J. T., TRAVESI A., CURRIE R. L., PETERSON S. F., POTTER N. M., *Multielement Neutron Activation Analysis of Rock Using Chemical Group Separations and High Resolution Gamma Spectrometry*. Analytical Chemistry, **41**, 12, 1633-1637 (1969).

[9] TOWELL D. G., VOLFOVSKY R. and WINCHESTER J. W., *Rare Earth Abundances in the Standard Granite G-1 and Standard Diabase W-1*. Geochim. Cosmochim. Acta, **29**, 569-572 (1965).

[10] TOMURA K., HIGUCHI H., MIYAJI N., *Determination of Rare Earth Elements in Rock Samples by Neutron Activation Analysis with a Lithium-drifted Germanium Detector after Chemical Group-separation*. Anal. Chim. Acta, **41**, 217-228 (1968).

[11] BRUNFELT A. O., STEINNES E., *Determination of Rare Earths in Silicate Rocks by Epithermal Neutron Activation and a Simple Group Separation*. J. Radioanal. Chem., **13**, 11-20 (1973).

[12] BRUNFELT A. O., ROELANDTS I., STEINNES E., *Determination of Rubidium, Caesium, Barium and Eight Rare Earth Elements in Ultramafic Rocks by Neutron-activation Analysis*. Analyst, **99**, 277-284 (1974).

[13] CSAJKA M., *Fast Radiochemical Separation of Rare Earths from Rock Samples by Retention of Lanthanum Oxalate*. Radiochem. Radioanal. Letters, **13**, 2, 151-159 (1973).

[14] DENECHAUD E. B., HELMKE P. A., HASKIN L. A., *Analysis for the Rare-Earth Elements by Neutron Activation and Ge (Li) Spectrometry*. J. Radioanal. Chem., **6**, 97-113 (1970).

[15] ELEK A., PERNECZKI G., SZABÒ E., *Determination of 12 Rare Earth Elements in Luna-16 Lunar Sample by Neutron Activation Analysis*. Radiochem. Radioanal. Letters, **15**, 2, 123-133 (1973).

[16] GRABER F. M., LUKENS, H. R., MACKENZIE J. K., *Neutron Activation Analysis Determination of All 14 Stable Rare Earth Elements with Group Separation and Ge (Li) Spectrometry*. J. Radioanal. Chem., **4**, 229-239 (1970).

[17] FILBY R. H., HALLER W. A., SHAH K. R., *Determination of 32 Elements in Rocks by Neutron Activation Analysis and High Resolution Gamma-Ray Spectroscopy*. J. Radioanal. Chem., **5**, 277-290 (1970).

[18] HASKIN L. A., WILDEMAN T. R., HASKIN M. A., *An Accurate Procedure for the Determination of the Rare Earths by Neutron Activation*. J. Radioanal. Chem., **1**, 337-348 (1968).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, G. Imbò e R. Sersale.

Sull'esistenza di certi piani regolari *

Nota di LUCIO PARLATO
presentata dal socio corrispondente VITTORIO DALLA VOLTA

(Adunanza del 17 gennaio 1976)

RIASSUNTO. — L'Autore si occupa dei cosiddetti « piani regolari » ed estende un risultato di Szamkolowicz con metodi strettamente geometrici.

SUMMARY. — The author deals with the so-called « regular planes » and extends a result by Szamkolowicz using a strictly geometric approach.

INTRODUZIONE

La presente ricerca trae origine da un lavoro di SZAMKOLOWICZ, [1], in cui l'autore studia i piani regolari P_i^n (particolari strutture di incidenza in cui per ogni punto passano i rette e ogni retta contiene n punti) e le A_n^3-algebre, osserva che ad ogni piano regolare di tipo P_i^3 può essere associata una A_n^3-algebra (con $n = 2i + 1$) e viceversa; dimostra, inoltre, che a partire da ogni A_n^3-algebra può essere costruita una A_k^3-algebra (con $k = 2n + 1$). Da quanto detto si può immediatamente dedurre che ad ogni piano regolare di tipo P_i^3 può essere associato un piano regolare di tipo P_{2i+1}^3.

Nel presente lavoro si dimostrerà che, è possibile estendere tale risultato ai piani regolari di tipo P_i^n; costruiremo infatti, un piano regolare di tipo $P_{(n-1)i+1}^n$ nelle ipotesi che esistano un piano regolare di tipo P_i^n e un piano grafico di ordine $n - 1$.

Nel par. 1, dopo aver ricordato le principali proprietà dei piani regolari si introduce un concetto analogo a quello del parallelismo negli ordinari piani affini: il « parallelismo principale ». Nel par. 2 si

* Lavoro svolto nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

studiano i sottopiani e le estensioni di un piano regolare, si trovano delle condizioni necessarie affinché in un piano regolare sia possibile introdurre una relazione di parallelismo principale e si dimostra, per via geometrica, un teorema che, come caso particolare ci restituisce il già citato risultato di [1].

Par. I

DEF. 1. *Si definisce piano finito una coppia ordinata* (S, R), *ove* S *è un insieme finito non vuoto e* R *un sottoinsieme di* P(S), *soddisfacente i seguenti assiomi*:

1) $\forall$ (A, B) $\in S^2$, A $\neq$ B, *esiste uno e un solo elemento di* R, *r, tale che* A $\in r$, B $\in r$.

2) *Esistono tre elementi distinti di* S, A, B *e* C *tali che non esista nessun elemento* $r \in$ R *a cui essi appartengano.*

Un piano finito si dirà, poi, un *piano regolare* se:

3) *Ogni* $r \in$ R *contiene lo stesso numero n di elementi.*

Se (S, R) è un piano regolare, chiameremo, rispettivamente, punti e rette gli elementi di S e R.

Come primi esempi di piani regolari possono essere citati i piani affini, i piani grafici e i grafi completi.

Riportiamo, ora, alcune proprietà dei piani regolari che ci saranno utili nel seguito, la cui dimostrazione può essere trovata, ad esempio in [1] e [2].

1.1 *Sia* (S, R) *un piano regolare e* P *un suo punto per il quale passino* i_P *rette; il numero s dei punti* S *è allora dato dalla formula*:

$$s = (n - 1)\, i_P + 1 \tag{1.1}$$

1.2. *Il numero* i_P *delle rette passanti per un punto* P *non dipende, dunque, dal punto* P *ed è naturale, quindi, indicarlo semplicemente con i; cosicché è*:

$$i = \frac{s - 1}{n - 1} \tag{1.2}$$

Indicheremo allora con P_i'' un piano regolare in cui ogni retta contiene n punti ed ogni punto appartiene ad i rette.

1.3 $i \geq n$.

1.4 $i\,s = n\,r$, *ove* r *è il numero delle rette.*

La 1.4 può essere dimostrata osservando che i numeri $i\,s$ e $n\,r$ coincidono con il numero t degli elementi dell'insieme

$$T = \{(P, r) \in S \times R \,/\, P \in r\}.$$

Posto, poi, $i = n + m\,(m \geq 0)$ si ha:

$$n\,r = i\,s = (m + n)\,[(n - 1)(m + n) + 1] =$$

$$= n^3 + (2\,m - 1)\,n^2 + (m - 1)^2\,n - m\,(m - 1)$$

e, quindi, per la 1.4,

1.5 n *divide il prodotto* $m\,(m - 1)$.

Il numero m precedentemente introdotto, ha un'importante caratterizzazione geometrica in quanto rappresente il numero delle rette passanti per un punto P del piano e non incidenti una retta non contenente P.

DEF. 2. *Diremo che due rette* a *e* b *sono parallele se si verifica una delle condizioni seguenti*:

a) $\qquad a = b$

b) $\qquad a \cap b = \emptyset$

La relazione di parallelismo ora introdotta non è una relazione di equvialenza non appena sia $i > n + 1$. In generale, quindi, non è possibile associare, in modo naturale, ad un piano del tipo P_i^n un piano del tipo P_i^{n+1} con procedimento analogo a quello usato per associare ad un piano affine un piano proiettivo.

DEF. 3. *Chiameremo « Relazione di parallelismo principale » ogni relazione binaria* F *definita nell'insieme delle rette di un piano regolare godente delle seguenti proprietà*:

i) $a\,F\,b \Rightarrow a$ *e* b *sono parallele ai sensi della def. 2.*

ii) *Comunque presi un punto* P *e una retta a, esiste una retta b contenente* P *e tale che a* F *b.*

iii) F *è una relazione d'equivalenza.*

In generale, in un piano regolare non è definibile una relazione di parallelismo principale (ad esempio nel grafo completo P_2^2).

Par. II

Sia $P_i^n = (S, R)$ un piano regolare ed S' un sottoinsieme proprio non vuoto di S non contenuto in nessuna retta di R.

DEF. 4. *Chiameremo sottopiano di un piano regolare la struttura* (S', R') *ove* R' *è il soattoinsieme di* P (S') *definito dalla condizione*:

$$R' = \left\{ r' \in P(S') \;\middle/\; \begin{array}{l} 1)\ |r'| > 1 \\ 2)\ \exists\ r \in R \,/\, r' = r \cap S' \end{array} \right\}$$

Sia (S', R') un sottopiano del piano regolare (S, R) = P_i^n.

DEF. 5. *Indicato con* t_α $(\alpha = 0, \ldots, n)$ *il numero delle rette di* R *aventi* α *punti in comune con* S', *chiameremo gli interi* t_α *caratteri del sottopiano* (S', R').

PROP. 1. *Detto k il numero di elementi di* S', *i caratteri* t_α *di un sottopiano* (S', R') *di un piano regolare* P_i^n *soddisfano le seguenti relazioni*[1]:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} t_\alpha = \frac{[(n-1)\,i + 1]\,i}{n}$$

$$\sum_{\alpha=2}^{n} \alpha\,(\alpha - 1)\,t_\alpha = k\,(k-1) \tag{2.1}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \alpha\,t_\alpha = k\,i$$

Dim. La prima delle (2.1) è ovvia, ove si osservi che, in virtù delle (1.4) il secondo membro è proprio il numero delle rette di P_i^n ; la se-

[1] Le (2.1) sono analoghe alle relazioni dimostrate in [3] per i (k, n) -archi di un piano grafico finito.

conda si ottiene contando il numero delle coppie distinte, non ordinate, di punti di S'; i due membri della terza, infine, rappresentano il numero delle coppie costituite da un elemento P di S' e da una retta di P_i^n passante per P.

DEF. 6. *Diremo che un sottopiano* (S', R') *di* P_i^n *è un sottopiano regolare di* P_i^n *se la coppia* (S', R') *è un piano regolare, se esistono, cioè, due interi h e j* ($h \leq n$, $j \leq i$), *tali che* (S', R') *sia del tipo* P_j^h.

Se P_j^h è un sottopiano regolare di P_i^n ogni retta r di P_i^n avente in comune con P_j^h almeno due punti conterrà, necessariamente, per la regolarità di P_j^h, esattamente h punti di P_j^h; si ha quindi che:

PROP. 2. *Se* P_j^h *è un sottopiano regolare di* P_i^n *i caratteri* $t_2, \ldots, t_{h-1}, t_{h+1}, \ldots, t_n$ *sono tutti nulli. Le* (2.1.) *diventano*:

$$t_o + t_1 + t_h = \frac{i\,[(n-1)\,i + 1]}{n}$$

$$(h-1)\,h\,t_h = [(h-1)\,j + 1]\,(h-1)\,j \tag{2.2}$$

$$t_1 + h\,t_h = [(h-1)\,j + 1]\,i$$

Risolvendo le (2.2) rispetto a t_o, t_1, t_h si ha:

$$t_h = \frac{[(h-1)\,j + 1]\,j}{h}$$

$$t_1 = [(h-1)\,j + 1]\,i - [(h-1)\,j + 1]\,j =$$

$$= [(h-1)\,j + 1]\,(i-j)$$

(2.3)

$$t_o = \frac{i\,[(n-1)\,i + 1]}{n} - \frac{[(h-1)\,j + 1]\,j}{h} - [(h-1)\,j + 1]\,(i-j)$$

Dalla seconda delle (2.3) discende, la seguente proposizione:

PROP. 3. *Sia* P_j^h *un sottopiano regolare di un piano regolare* P_i^n ; *se e soltanto se* $i = j$ *non esiste alcuna retta di* P_i^n *avente in comune con* P_j^h *uno e un sol punto.*

DEF. 7. *Se* P_i^n *è un piano regolare e* $P_j^h = (S', R')$ *è un sottopiano regolare di* P_i^n *ha senso considerare la struttura* (S'', R''), *ove* $S'' = S - S'$ *e* R'' *è definito allo stesso modo di* R'. *Se* R'' *ha più di un elemento,* (S'', R'') *sarà un sottopiano finito di* P_i^n *e verrà chiamato sottopiano complementare di* P_j^h *rispetto a* P_i^n.

Poiché una retta di P_i^n avente in comune con S' p punti interseca il suo complementare S'' in $n - p$, per la prop. 2 gli unici caratteri di (S'',R'') eventualmente diversi da zero saranno t_n', t_{n-1}', t_{n-h}'.

Osserviamo, poi, che se $h = n$ le (2.3) diventano:

$$t_n = \frac{[(n-1)j + 1]j}{n}$$

$$t_1 = [(n-1)j + 1](i - j) \tag{2.4}$$

$$t_0 = \frac{(i+j)(n-1)}{n}(i - k)$$

ove con $k = j(n-1) + 1$ si è indicato il numero dei punti di P_j^n.

Per la terza delle (2.4), stante il fatto che i caratteri di un sottopiano sono necessariamente non negativi, si avrà che:

$$i - k = i - (n-1)j - 1 \geq 0 \tag{2.5}$$

da cui:

$$j \leq \frac{i-1}{n-1} \tag{2.6}$$

PROP. 4. *Se* $j = \dfrac{i-1}{n-1}$ *e* $n \geq 1$ *il sottopiano* K *complementare di* P_j^n *rispetto a* P_i^n *è un sottopiano regolare di* P_i^n *di tipo* P_i^{n-1}.

Dim. Infatti, essendo t_1 e t_n gli, unici caratteri di P_j^n diversi da zero, ogni retta di P_i^n, avendo in comune con P_j^n 1 o n punti, interseche rà il suo complementare in $n - 1$ o $n - n = 0$ punti; K avrà, quindi, come unici caratteri diversi da zero t_0' e t_{n-1}' e sarà un piano regolare di tipo P_i^{n-1}, in quanto le i rette di P_i^n passanti per un punto P di K devono necessariamente intersecare K in $n-1$ in quanto $t_1' = 0$.

Viceversa, se (S', R') è un sottopiano regolare di tipo P_i^{n-1} di un piano regolare $P_i^n = (S, R)$, posto $S'' = S - S'$ e detti s, s' e s'' i numeri dei punti di S, S', S'' si ha che:

$$(2.7) \qquad s'' = s - s' = (n-1)\,i + 1 - [(n-2)\,i + 1] = i$$

Se $i > n$ la struttura (S'', R'') sarà un sottopiano finito di P_i^n ed avrà, come unici caratteri diversi da zero, per la prop. 3, t_1' e t_n'. K sarà, allora, un sottopiano regolare di P_i^n del tipo P_j^n con $j = \dfrac{i-1}{n-1}$.

Se, invece, $i = n$ è subito visto, con considerazioni analoghe, che S'' coincide con una retta di P_i^n.

Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione:

PROP. 5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un piano regolare* P_i^n $(i > n)$ *ammetta sottopiani regolari di tipo* P_i^{n-1} *è che esistano sottopiani regolari di* P_i^n *di tipo* P_j^n *ove* $j = \dfrac{i-1}{n-1}$.

PROP. 6. *Se* P_i^{n-1} *è un sottopiano regolare di* P_i^n *è possibile introdurre in* P_i^{n-1} *una relazione binaria di parallelismo principale.*

Dim. Indichiamo con P_j^n il complementare di P_i^{n-1} rispetto a P_i^n. Ogni retta r di P_i^{n-1} è, per definizione, la restrizione a P_i^{n-1} di una retta r' di P_i^n; per quanto detto prima, r' avrà in comune con P_j^n uno e un sol punto $P_{r'}$.

Definiamo, allora, nell'insieme delle rette di P_i^{n-1} la seguente relazione binaria F:

$$r\,F\,s \Leftrightarrow P_{r'} = P_{s'}$$

È facile verificare che la relazione F suddetta gode delle proprietà i), ii), iii) che caratterizzano le relazioni di parallelismo principale.

Siano ora n e i due interi positivi tali che esistano un piano regolare P_i^n e un piano grafico π di ordine $n - 1$.

Posto $j = (n-1)\,i + 1$, sia S un insieme costituito da $(n-1)\,j + 1$ elementi:

$$S = \left\{ 0,\ A_{\beta}^{\alpha} \right\} \quad (\alpha = 0, \ldots n-2; \quad \beta = 1, \ldots j).$$

Dimostreremo l'esistenza di un piano regolare di tipo $P^{n}_{(n-1)\,i+1}$ avente per sostegno l'insieme S.

Indicato con R_β il sottoinsieme di S così definito:

$$R_\beta = \left\{ 0,\ A_{\beta}^{\circ}\ , \ldots A_{\beta}^{n-2} \right\} \tag{2.8}$$

si ha che:

LEMMA 1. *L'insieme* $T = \{R_1, \ldots R_j\}$ *è dotabile di una struttura di piano regoalre di tipo* P_i^n.

Dim. Infatti, essendo $j = (n-1)\,i + 1$ esiste una corrispondenza biunivoca f fra l'insieme dei punti del piano regolare P_i^n esistente per ipotesi e T; T resta allora munito di una struttura di piano regolare assumendovi come rette le immagini, mediante f, delle rette di P_i^n.

Se $r = \left\{ R_{\beta_1}, \ldots, R_{\beta_n} \right\}$ è una retta di T, indichiamo con S_r il sottoinsieme di S costituito dagli elementi di S appartenenti ai sottoinsiemi $R_{\beta_1}, \ldots, R_{\beta_n}$:

$$S_r = R_{\beta_1} \cup \ldots \cup R_{\beta_n} = \left\{ 0,\ A_{\beta_p}^{\alpha} \right\} \quad (\alpha = 0, \ldots, n-2;\ p = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Osserviamo esplicitamente che, poiché due rette distinte di un *piano regolare hanno al più un punto in comune*:

LEMMA 2. *Se* $r \neq r'$, *l'intersezione dei rispettivi* S_r *e* $S_{r'}$ *è costituita o dal solo* 0 *o da un opportuno* R_β.

Per la (2.9), per ogni r, l'insieme S_r è costituito da $n^2 - n + 1$ elementi e può essere, quindi, messo in corrispondenza biunivoca g_r con l'insieme dei punti del piano grafico π esistente per le ipotesi fatte; si ha, quindi, che:

LEMMA 3. *Per ogni r, l'insieme* S_r *è dotabile di una struttura di piano grafico in modo tale che l'applicazione biunivoca* g_r *risulti un isomor-*

fismo; g_r può, poi, essere scelto in modo tale che in ogni S_r siano allineati gli elementi appartenenti a ciascuna delle seguenti n-ple:

$$(2.10)\quad \left\{0,\ A^{o}_{\beta_1},\ \ldots,\ A^{n-2}_{\beta_1}\right\},\ \ldots,\ \left\{0,\ A^{o}_{\beta_n},\ \ldots,\ A^{n-2}_{\beta_n}\right\},\ \left\{A^{o}_{\beta_1},\ \ldots,\ A^{o}_{\beta_n}\right\}.$$

Siano, ora, B e C due elementi distinti di S; se uno di essi coincide con 0 e l'altro con un certo A^{α}_{β}, chiameremo retta passante per B e C il sottoinsieme R_β definito dalla (2.8). Se B e C sono, invece, entrambi diversi da 0 si avrà: $B = A^{\alpha_1}_{\beta_1}$, $C = A^{\alpha_2}_{\beta_2}$; se $\beta_1=\beta_2=\beta$ chiameremo retta passante per B e C ancora il sottoinsieme R_β; se, invece, $\beta_1 \neq \beta_2$ chiameremo retta passante per B e C la retta del piano grafico S_r passante per $A^{\alpha_1}_{\beta_1}$ e $A^{\alpha_2}_{\beta_2}$.

(Osserviamo, esplicitamente che tale definizione ha senso in quanto se $\beta_1 \neq \beta_2$, $A^{\alpha_1}_{\beta_1}$ e $A^{\alpha_2}_{\beta_2}$ appartengono, per il lemma 2, ad un unico S_r, e che la retta passante per essi in S_r, per le (2.10) non può contenere altri punti del tipo $A^{\alpha}_{\beta_1}$ o $A^{\alpha}_{\beta_2}$).

È immediato verificare che. detto R l'insieme delle rette così definito, la coppia (S, R) è un piano regolare di tipo $P^{n}_{(n-1)i+1}$.

Il sottopiano di (S, R) avente per sostegno l'insieme dei punti $\left\{A^{o}_{\beta}\right\}$ ($\beta = 1, \ldots j$) sarà. poi, ovviamente, un sottopiano regolare isomorfo a P^{n}_{i} e avrà per compelmentare, per la prop. 5, un piano regolare di tipo $P^{n-1}_{(n-1)i+1}$ nel quale, per la prop. 6 è possibile introdurre una relazione di parallelismo principale.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

TEOREMA. *Sia P^{n}_{i} un piano regolare; se esistono piani grafici di ordine $n-1$, esiste un piano regolare del tipo $P^{n}_{(n-1)i+1}$ avente un sottopiano regolare isomorfo a P^{n}_{i} e un sottopiano regolare del tipo $P^{n-1}_{(n-1)i+1}$ nel quale è possibile introdurre una relazione di parallelismo principale.*

COROLLARIO. *Se $n = q + 1$ (q = potenza di un numero primo) esistono piani regolari di tipo $P^{n}_{(n-1)n+1}$.*

La dimostrazione è ovvia, ove si osservi che nelle ipotesi fatte esistono piani grafici di ordine $n-1$ e che ogni piano grafico di ordine $n-1$ è un piano regolare di tipo P^{n}_{n}.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. SZAMKOLOVICZ, *On the problem of existence of finite regular planes*, Math. Coll. (1962), 245-250.

[2] G. RUSSO, *Una osservazione su certe geometrie finite di Bolyai-Lobachevsky*, Atti Acc. Sc. Lett. Arti di Palermo, Vol. XXVII, 1966-67.

[3] M. TALLINI SCAFATI, *Sui* $\{k, n\}$ *-archi di un piano grafico finito*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8), 40, (1966), 1-6.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Dalla Volta, M. Curzio e A. Franchetta.

The intramolecolar condensation of 2-acylamino-3-hydroxyphenalene-1-ones and related compound

Nota di PETER A. CROOKS *, FRANCESCO DE SIMONE ** e ANTONIO DINI **
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 7 febbraio 1976)

RIASSUNTO. — Per riscaldamento a riflusso in anidride acetica, il 2-acetamido-3-idrossifenalen-1-one subisce la condensazione intramolecolare a 2-metilfenaleno[3,2-d] ossazol-4-one. Altri 2-acilammino-3-idrossifenalene-1-oni reagiscono allo stesso modo. Il 2-acetammidoindan-1,3-dione nelle stesse condizioni porta a un prodotto dimero. Derivati 2-acilammino e N-alchil-2-acilammino-2-idrossifenalene-1,3-dionici, in diverse condizioni sperimentali, non danno condensazioni intramolecolari.

ABSTRACT. — Contrary to a previous report 2-acetamido-3-hydroxyphenalene-1-one undergoes intramolecular condensation in refluxing acetic anydride to give 2-methylphenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one. Other 2-acylamino-3-hydroxyphenalene-1-ones react similarly. 2-Acetamidoindan.1,3-dione under similar conditions affords only a dimeric product. 2-Acylamino- and N-alkyl2-acylamino-2-hydroxphenalene-1,3-dione derivatives fail to undergo intramolecular condensation under a variety of conditions.

We have recently reported [1] the non-catalytic intramolecular condensation of 2-N-methylacetamido-2-hydroxyindan-1,3-dione (1 a) to 2,3,3a, 8a-tetrahydro-3a, 8a-dihydroxy-1-methylindeno[2,1-*b*] pyrrole-2,8-dione (2 a), which can also be obtained by prolonged heating under reflux of a benzene solution of ninhydrin and N-methylacetamide. Other 2-N-alkylacetamido-2-hydroxyindan-1,3-diones react similarly. This represents a novel example of an intramolecular aldol condensation of an N-acyl-β-ketoamine. 2-Alkylamido-2-hydroxyindan-1,3-diones (1 b) fail to undergo this cyclisation reaction [2, 3] probably due to their inability to exist as the enamine tautomer (3), the formation of which may be necessary for the condensation reaction to proceed.

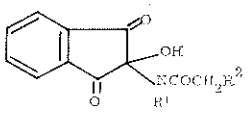
* Department of Pharmacy, Manchester University, Manchester 13.
** Istituto di Chimica Farmamceutica e Tossicologica della Università di Napoli.

The heating under reflux of a solution of 2-acetamido-3-hydroxyphenalene-1-one (4 a) in acetic anhydride has been reported [4] to afford a product tentatively assigned as 2,3-dihydrophenaleno[2,3 *b*] pyrrole-2,10-dione (5) without supporting chemical or spectroscopic evidence. The apparent similarity in the mechanism of formation of the above product to that described for the 2,3,3a,8a-tetrahydro-3a, 8a-dihydroxy-1-alkylindeno[2,1-*b*]pyrrole-2,8-dione derivatives has led us to examine the validity of this structural assignment. We now report our findings on the intramolecular condensation of a number of 2-acylamino-3-hydroxyphenalene-1-ones and some related compounds.

On heating under reflux a solution of 2-acetamido-3-hydroxyphenalene-1-one (4 a) [4] in acetic anhydride for 1 hr, a product was obtained which had an identical m.p. to that previously described by ERRERA [4]. The mass spectrum of this product exhibited a molecular ion at 235 m/e, a band at 1650 cm^{-1} but absence of bands in the region 3000-3500 cm^{-1} in its IR spectrum and its PMR spectrum showed only a 6-proton multiplet at δ 8.8-7.4 and a 3-proton singlet at δ 2.72. These spectral data are not consistent with those expected for 2,3-dihydrophenaleno[2,3-*b*]pyrrole-2,10-dione (5) but suggest that the product is the isomeric 2-methylphenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one (6 a). This was further substantiated by the observation that on treating the product with concentrated HC1, the hydrochloride salt of 2-amino-2-hydroxyphenalene-1-one [4] (4 b) was obtained, and on reaction of (6 a) with benzaldehyde a benzylidene derivative (6 b) was formed which could also be obtained from the intramolecular condensation of 2-cinnamido-3-hydroxyphenalene-1-one (4 c) in presence of P_2O_5. 2-Methylphenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one (6 a) was also obtained by heating under reflux a solution of 2-amino-3-hydroxyphenalene-1-one (4 b) in acetic anhydride.

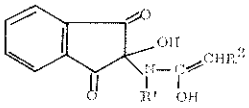
Under similar conditions 2-propionamido-3-hydroxyphenalene-1-one (4 d) and 2-(4-methylbenzamido)-3-hydroxyphenalene-1-one 4 c) afforded 2-ethylphenaleno[3,2-*d*] oxazol-4-one (6 c) and 2-(4-toluyl)--phenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one (6 d) respectively.

Formation of 2-alkylphenaleno[3,2-*d*]ozaxol-4-ones (6) from the corresponding 2-acylamino-3-hydroxyphenalen-1-ones (4, R = C.OR) under the conditions described by ERRERA [4], is not unexpected, since acid catalysed generation of the enol tautomer (7) of the latter compounds and its subsequent cyclisation would afford the corresponding oxazole derivative (6). As might be expected, attempted intramolecular cyclization of 2-N-acetamidoindan-1,3-dione (8) [5], which from its PMR spectrum exists solely in the keto-form, did not give

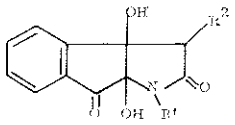


1

(a) $R^1=CH_3$, $R^2=H$
(b) $R^1=H$. $R^2=H$ or alkyl

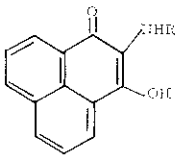


3



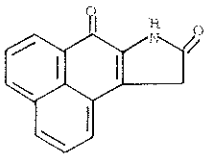
2

(a) $R^1=CH_3$, $R^2=H$

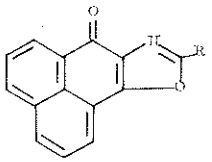


4

(a) $R=COCH_3$
(b) $R=H$
(c) $R=CO-CH=CH-C_6H_5$
(d) $R=COCH_2CH_3$
(e) $R=-CO-C_6H_4-P-CH_3$

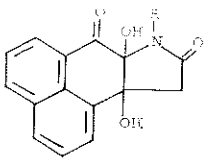


5

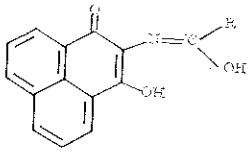


6

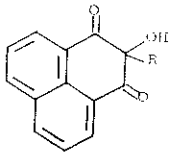
(a) $R=CH_3$
(b) $R=CH=CH-C_6H_5$
(c) $R=CH_2CH_3$
(d) $R=-C_6H_4-P-CH_3$



11

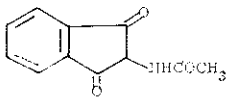


7

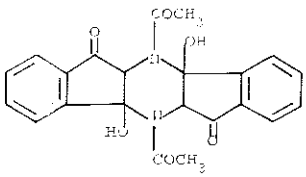


10

(a) R=OH
(b) R=NH $COCH_3$
(c) $R=N(CH_3)COCH_3$



8



9

the corresponding 2-methylindeno[3,2-*d*]oxazol-4-one, but did afford in small yield the dimeric compound (9).

We have found that the reaction of phenalene-1,2,3-trione hydrate [6] (10 a) with acetamide and with N-methylacetamide in boiling benzene affords only 2-acetamido- and 2-N-methylacetamido-2-hydroxyphenalene-1,3-dione, (10 b) and (10 c) respectively. The use of prolonged refluxing times and higher boiling point solvents in these reactions failed to produce any of the corresponding 2,3,3a,10a-tetrahydro-3a,10a-dihydroxyphenaleno[2,3-*b*]pyrrole-2,10-dione derivative (11), which would be formed as a result of an intramolecular condensation reaction. The failure of (10c) to undergo intramolecular condensation is in contrast to that observed for the corresponding indane analogue (1a).

Experimental

M. ps were determined on a Kofler hot stage apparatus and are uncorrected. IR spectra were recorded as mulls in Nujol on a Perkin-Elmer 237 spectrophotometer, PMR spectra were recorded in deuterochloroform on a Perkin-Elmer R 12 B spectrometer. Chemical shifts are expressed in δ values (ppm) downfield from TMS as internal reference. In some cases deuterium oxide was added to check on exchangeable protons. Mass spectra were measured on an AEI MS-12 spectrometer. Column chromatographic separations were carried out on alumina (Grade H) and TLC separations were carried out on Merck silica GF_{254} and developde in iodine vapour. Analytical samples were dried over P_2O_5 at 80°/0.1 mm for 4 hr immediately prior to analysis.

2-Methylphenaleno[3,2-d]oxazol-4-one. (3 a). A solution of 2-acetamido-3-hydroxyphenalene-1-one (1.0g) [4] in acetic anhydride (4 ml) was heated under reflux (oil bath) for 1 hr. After cooling, the solution was poured into iced water (10 ml), the resulting solid collected and recrystallised from water and then benzene to afford *2-methylphenaleno[3,2-d]oxazol-4-one* as yellow prisms (0.65 g; 57 %) m.p. 184-5° (Cf Lit. 185-186°) [4] (Found: C, 76.5; H, 3.8; N, 6.1; $C_{15}H_9NO_2$ requires: C, 76.6; H, 3.9; N, 5.95 %); (M+ = 235); IR 1650, 1585 cm^{-1}; PMR singlet δ 2.72 (3 H), multiplet between 7.4 - 8.8 (6 H).

2-Methylphenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one (3 a) was also obtained in 61 % yield by heating under reflux for 12 hr a mixture of 2-amino-3-hydroxyphenalene-1-one (1 a) [4])2.0 g) and acetic anhydride (10 ml) and treating the cooled reaction mixture in the manner described above.

2-Amino-3-hydroxyphenalene-1-one hydrochloride (4 b)

On treating 2-methyphenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one (3 a) with excess concentrated methanolic HCl solution and leaving the solution to stand at room temperature overnight, dark red needles of *2-amino-3-hydroxyphenalene-1-one hydrochloride*, m.pt 203-206°, were deposited, which were identical to the hydrochloride of 2-amino-3-hydroxyphenalene-1-one prepared by the method of ERRERA [4].

2-Cinnamido-3-hydroxyphenalene-1-one (1 e). 2-Amino-3-hydroxyphenalene-1-one (2.0 g) was dissolved in cold 10 % NaOH solution (7 ml) and cinnamyol chloride (3.0 g) added dropwise with shaking. The resulting precipitate was collected, washed with $NaHCO_3$ solution and then water, and recrystallised from benzene/petroleum ether (40-60) to afford *2-cinnamido-3-hydroxyphenalene-1-one* (1 e) as red prisms (1.68 g; 53 % m.pt 162-164° (Found: C, 77.6; H, 4.4; N, 4.0; $C_{22}H_{15}NO_3$ requires: C, 77.4; H, 4.4; N, 4.1 %): (M+ = 341); IR 3250 (± 10) (N−H), 1630, 1580 cm^{-1}; PMR doublet centred at δ 6.72 (1 H, J = 16 Hz), doublet centred at 8.0 (1 H, J = 16 Hz), multiplet between 8.7-7.2 (12 H reducing to 11 H with D_2O), broad singlet (exchangeable with D_2O) centred at 9.1 (1 H).

2-Stryrylphenaleno[2,2-b]oxazole-4-one (3 d)

Method. 1. A mixture of 2-methylphenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one (3 a) (1.0 g), benzaldehyde (0.5 g) and anhydrous $ZnCl_2$ (2.5 g) was heated at 160° for 7 hr (oil bath). On pouring the cooled reaction mixture into iced water a green amorphous solid was deposited which was filtered off, dissolved in ether and the ethereal solution subjected to column chromatography using ether as eluant. An initial yellow band was eluted which afforded yellow prisms (0.43 g) identical (m.p., IR and MS) to 2-methylphenaleno[3,2-*d*]oxazol-4-one. A second yellow-green band on evaporation of solvent afforded *2-styrylphenaleno[3,2-d] oxazol-4-one* (3 d) as greenish-yellow prisms (0.11 g; 8 % m.pt 178-180° (Found; C, 81.6; H, 3.8; N, 4.4; $C_{22}H_{13}NO_2$ requires: C, 81.7; H, 4.05; N, 4.3 %); (M+ = 323); IR 1640, 1575 cm^{-1}; PMR doublet centred at δ 6.9 (1 H, J = 17 Hz), doublet centred at 8.06 (1 H, J = 17 Hz), multiplet between 7.25 - 8.75 (11 H).

Method 2. A mixture of 2-cinnamido-3-hydroxyphenalene-1-one (1 e) (0.34 g) and P_2O_5 (3.0 g) in dry benzene (15 ml) was heated under reflux for 2 hr. The cooled reaction mixture was filtered and the residue extracted with dry benzene (2 x 10 ml). The combined benzene liquors were then decomposed by addition of water (15 ml), the

benzene layer separated off, dried over anhydrous $MgSO_4$ an the filtered solution evaporated to afford a green oil which was subjected to column chromatography in the manner escribed in method 1.

This procedure gave *2-Styrylphenaleno[3-2-d]oxazol-4-one* (3 d) as green prisms (0.13 g; 41 %) identical (m.p., IR and PMR) to the product obtained from method 1.

2-Propionamido-3-hydroxyphenalene-1-one (1 c). A solution of 2-amino-3-hydroxyphenalene-1-one (1 a) (0.5 g) in propionic anhydride (2 ml) containing 2 drops of concentrated H_2SO_4 was heated under reflux (oil bath) for 5 min and the mixture then poured into ice water (5 ml). The resulting dark orange precipitate was collected and recrystallised from 95 % ethanol to afford 2-propionamido-3-hydroxyphenalene -1-one (1 c) as orange-red needles (0.45 g; 72 % m.pt 142-3° (Found: C, 71.9; H, 4.7; N, 5.3; $C_{16}H_{13}NO_3$ requires; C, 71.9; H, 4.9; N, 5.2; (M+ = 267); IR 3280 (± 10) (N−H), 1640, 1560 cm^{-1}; PMR triplet centred at δ 1.15 (3 H), quartet centred at 2.5 (2 H), multiplet between 7.22-8.55 (7 H reducing to 6 H on addition of D_2O), singlet (broad) centred at 8.8 (1 H) (exchangeable with D_20).

2-Ethylphenaleno[3,2-d]oxazol-4-one (3 b). A solution of 2-propionamido-3-hydroxyphenalene-1-one (1 c) (1.5 g) in propionic anhydride (8 ml) was heated under reflux for 6 hr and the cooled, green reaction mixture poured into iced-water (12 ml) to afford a greenish oil which slowly crystallised on standing. The yellow-green solid was collected and recrystallised from methanol-benzene solution after decolourising with norit, to afford *2-ethylphenaleno[3,2-d]oxazol-4-one* (3 b) as yellow needles (1.1 g; 63 %), m.pt 106-7° (Found: C, 77.3; H, 4.5; N, 5.7; $C_{16}H_{11}NO_2$ requires: C, 77.1; H, 4.45; N, 5.6 %); M+ = 249); IR 1650, 1580 cm^{-1}; PMRtriplet centred at δ 1.5 (3 H), quartet centred 3.02 (2 H), multiplet between 7.4 - 8.82(6 H).

2-(4-Methylbenzamido)-3-hydroxyphenalene-1-one (1 d)

2-Amino-3-hydroxyphenalene-1-one (1 a) (1.25 g) was dissolved in cold 10 % NaOH solution (10 ml) and excess p-toluyl chloride (3.0 ml) added dropwise to the solution with shaking. The dark-violet solution was left to stand for 2 hr and the orange-red precipitate which formed was collected, washed with water and then diluite acetic acid. Recrystallisation from aqueous acetic acid afforded *2-(4-methylbenzamido)-3-hydroxyphenalene-1-one* (1 d) as orange prisms (1.35 g; 70 %) m.pt 199-200° (Found: C, 76.3; H, 4.9; N, 4.5; $C_{21}H_{15}NO_3$ requires: C, 76.6; H, 5.0; N, 4.25 %); (M+ = 329); IR 3290 (± 10) (N−H), 1635, 1580 cm^{-1}; PMR singlet δ 2.73 (3 H), multiplet between 7.1-8.8 (11 H)

reducing to 10 H on addition of D_2O), singlet (broad) centred at 9.0 (1 H) (exchangeable with D_2O).

2-(p-toluyl)-phenaleno[3,2-d]oxazol-4-one (3 c). A mixture of 2-(4-methylbenzamido)-3-hydroxyphenalene-1-one (1 d) (0.4 g) and acetic anhydride (5 ml) was heated under reflux for 8 hr and the cooled, green reaction mixture poured into iced water. The resulting precipitate was collected and recrystallised from aqueous ethanol to give *2-(p-toluyl)-phenaleno[3,2-d]oxazol-4-one* as yellow-green prisms (0.25 g; 67 %) m.pt 181-3° (Found: C, 81.0; H, 4.0; N, 4.5; $C_{21}H_{13}NO_2$ requires: C, 81.0; H, 4.2; N, 4.5 %); (M+ = 311); IR 1650, 1585 cm^{-1}; PMR singlet δ 2.6 (3 H), multiplet between 7.2-8.7 (10 H).

N^1, N^7-Diacetyl-1, 1a, 6a, 7, 7a, 12a-hexahydro-1a, 7a-dihydroxydiindeno [1, 2-b: 1', 2'-e]pyrazine-6, 12-dione (9)

A solution of 2-N-acetamidoindan-1,3-dione [5] (1.5 g) in acetic anhydride (5 ml) was heated under reflux for 6 hr. After cooling, the solution was poured into cold water, the mixture extracted with ethyl acetate (4 x 15 ml) and the combined organic extracts washed with water (3 x 50 ml) and dried over $MgSO_4$. The filtered, concentrated extract was subjected to column chromatography using ethyl acetate as eluant to afford an initial band which crystallised on evaporation of solvent and was identical (m.p., IR and MS) to 2-N-acetamidoindan-1,3-dione (0.93 g) recovered). A second fraction on evaporation of solvent gave a brown crystalline solid contaminated with starting material which on recrystallising five times from ethanol afforded light brown prisms (0.12 g; 7 %) of *N', N'-diacetyl-1, 1a, 6a, 7, 7a, 12a-hexahydro-1a 7a-dihydroxydiindeno [1, 2-b: 1', 2'-e] pyrazine-6, 12-dione* (9), m.p. 244-249° (Found: C, 64.8; H, 4.3; N, 7.1; $C_{22}H_{18}N_2O_6$ requires: C, 65.0; H, 4.4; N, 6.8 %); M+ = 406, $M_{/e}$ 388, 364, 346, 203); IR 3370 ($\pm$ 10), 1715, 1665 cm^{-1}; PMR singlet δ 2.03 (6 H), singlet 3.87 (2 H), broad singlet (exchangeable with D_2O) centred at 5.5 (2 H), multiplet between 8.15 - 7.19 (8 H). The mother liquor from the above separation contained a small amount of a diastereoisomer of (9).

2-Acetamido-2-hydroxyphenaleneE1,3-dione (10 b)

Phenalene-1,2,3-trione hydrate [6] (10 a) (2.28 g) and acetamide (0.59 g) were dissolved in hot benzene (50 ml) and the mixture heated under reflux for 24 hr using a Dean and Stark warter trap, during which time the solution went dark brown. The reaction mixture was

then cooled, the solvent evaporated and the residual solid recrystallised from CH_2Cl_2 to afford *2-acetamido-2-hydroxyphenalene-1,3-dione* as light tan prisms (1.56 g; 58 %) m.p. 160-162° (Found: C, 67.1; H, 4.3; N, 5.0; $C_{15}H_{11}NO_4$ requires: C, 66.9; H, 4.1; N, 5.2 %); (M+ = 269, M/e 212, 182, 155, 126); IR 3320 (± 10) (N−H), 3260 (± 10 (broad-OH), 1725, 1690, 1670 cm^{-1}; PMR singlet δ 2.01 (3 H), broad singlet (exchangeable with D_2O) centred at 3.12 (1 H), multiplet between 8.68 - 7.51 (6 H), broad singlet (exchangeable with D_2O) centred at 9.05 (1 H).

On extending the refluxing time to 96 hr and monitoring the reaction by TLC at 24 hr intervals, no significant change was observed.

Similarly, on changing the solvent to toluene or xylene and extending the refluxing time to 96 hr only 2-acetamido-2-hydroxyphenalene-1,3-dione could be recovered.

2-N-Methylacetamido-2-hydroxyphenalene-1,3-dione (10 c)

Phenalene-1,2,3-trione hydrate [6](10 a) (22.8 g) and N-methylacetamide (0.73 g) were reacted together under similar conditions to those described for (10 b) to afford only *2-N-methylacetamido-2-hydroxyphenalene-1,3-dione* (10 c) as tan prisms (1.73; 61 %) m.p. 140 - 144° (Found: C, 68.1; H, 4.5; N, 4.9; $C_{16}H_{13}NO_4$ requires: C, 67.8; H, 4.6; N, 4.9); (M+ = 283 M/e 212, 182, 155, 126); IR 3380 (± 10) (broad-OH), 1710, 1685 cm^{-1}; PMR singlet δ 1.95 (3 H), broad singlet (exchangeable with D_2O) centred at 2.06 (1 H), singlet 2.7 (3 H), multiplet between 8.76 - 7.49 (6 H).

REFERENCES

[1] P. A. Crooks, *Chem. Ind.*, **4**, 176 (1975).
[2] P. A. Crooks, *Chem. Ind.*, **12**, 495 (1974).
[3] D. Mathias and K. Hain, *Synthesis*, **3**, 154 (1973).
[4] G. Errera, *Gazz. Chim. Ital.*, **44** (II), 18 (1914).
[5] L. Geita, I. Dalberga and A. Grinvalde, *Latv. PSR Zinat. Akad. Vestis Kim. Ser.*, **1**, 114 (1973); *Chem. Abs.*, **78**, 135911 *d* (1974).
[6] G. Errera, *Gazz. Chim. Ital.*, **43** (I), 589 (1913).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, M. Covello e L. Mangoni.

Occurrence of calc-alkaline two-pyroxene andesites from deep bore-holes in the Phlegraean Fields. I. Petrographic and petrochemical data *

Nota di Pio Di Girolamo, Giuseppe Nardi, Giuseppe Rolandi e Damiano Stanzione **
presentata dal socio ordinario Antonio Scherillo

(Adunanza del 7 febbraio 1976)

Riassunto. — Si segnala l'esistenza nel sottosuolo dei Campi Flegrei di attività vulcanica alcalicalcica, sia effusiva che esplosiva, rinvenuta in trivellazioni profonde (1400-1900 m) presso la foce del fiume Volturno e, più in superficie, come blocchi nei pressi di Parete. I diversi litotipi inclusi in una formazione di tufo suggeriscono che tale attività deve essere alquanto abbondante.

I dati geologici indicano che si tratta di un vulcanismo di età quaternaria manifestatosi in regime tettonico distensivo, che ha prodotto morfologie a horst e graben, alquanto lontano, quindi, dalle ultime fasi compressive avvenute nel Miocene.

L'associazione mineralogica in fenocristalli è costituita da plagioclasio bytownitico-labradoritico, ortopirosseno bronzitico-iperstenico, clinopirosseno augitico, titanomagnetite e rara olivina in rapporto di reazione con ortopirosseno.

Dai dati mineralogici e chimici degli elementi maggiori tali vulcaniti si classificano come andesiti a basso contenuto di Si e andesite, quest'ultima con massa di fondo riolitica; esse costituiscono un'associazione alcalicalcica ricca in potassio. Tale vulcanismo è caratteristico di aree orogeniche.

Nell'area flegrea si osserva la sovrapposizione delle vulcaniti alcalino-potassiche sottosature a quelle alcalicalciche; la presenza di una situazione simile nelle vulcaniti plio-quaternarie dell'Arcipelago Pontino rende possibile una correlazione fra le due aree.

Si riportano in sintesi i dati petrologici disponibili sulle associazioni vulcaniche dell'area flegrea e quelli tettonici relativi al margine tirrenico della catena appenninica. Il passaggio da vulcanismo alcalicalcico a potassico (shoshoniti) si rinviene negli stadi evolutivi avanzati di alcuni archi insulari, comunque il vulcanismo alcalicalcico e potassico della Campania è in relazione con una tettonica distensiva a graben e horst.

Summary. — Calc-alkaline Quaternary volcanics have been found deeply underground in the Phlegraean region. After having reported the geologic and tectonic interpretation for this area, the petrographic, mineralogical and petrochemical features are described for some samples of these rocks.

* This work has been supported by C.N.R. (Grant N. 75.00009.05).
** Istituto di Mineralogia, University of Naples.

The volcanism is either effusive or explosive, and gave origin to two pyroxene (bronzite-hyperstene and augite) rocks typical of orogenic areas. The samples are low-silica andesites and andesites with features that can be referred to rocks of a K- rich calc-alkaline association.

We describe briefly the temporal succession of the undersaturated potassic volcanics to the calc-alkaline ones in the region between the Phlegraean Fields and the Pontine Islands. The data about the volcanic associations in Phlegracan area and about tectonic setting of the Tyrrhenian side of Apennine chain are briefly summarized and the correlation of the calc-alkaline and potassic volcanism in Campania with tensional horst and graben structures is pointed out.

INTRODUCTION.

In this paper we describe some calc-alkaline volcanics, both effusive and explosive, found out during rather deep drillings (1400-1900 m.) in the Phlegraean area, by the mouth of the Volturno river (Castelvolturno), and also, nearer to the surface, in the surroundings of Parete. They consist, more precisely, of samples of lava ($CV2_{1440}$), tuff ($CV3_{1889}$-$CV3_{1889'}$) and a block ($P3_{297}$). These products come from bore-hole for oil research (CV2 and CV3) drilled from 1950 to 1955 by SAMET [26], and for geothermal research (P3), drilled after 1969, in co-operation by CNR and ENEL [11] [1].

These places (Fig. 1) are situated few kilometres north of the area usually assigned to the Phlegraean Fields. Their boundary is given on the basis of the superficial volcanic and tectonic morphological features, related to the most recent potassic volcanism; anyhow the fact that at a relatively shallow-depth lavas are present in the area north of this boundary [11, 26], may suggest that in the past the activity in the Phlegraean area involved wider regions to the north. As a matter of fact the area around Parete and Castelvolturno are located respectively on a probable horst of the carbonate Mesozoic basement, which affects also the substratum of the Phlegraean Fields with NNE-SSW trend, and in the graben near the NW edge of this horst [4, 11, 12, 30].

The presence of a calc-alkaline volcanic activity is of great importance: nowadays we have not yet data on andesitic lavas either in Campania or in the surrounding areas of peninsular Italy. Moreover, such activity is an important fact for interpreting the magmatic and tectonic evolution that led to a calc-alkaline and later potassic volcanism.

[1] We express sincere thanks to dr. F. Ortolani (Istituto di Geologia e Geofisica, Università di Napoli) who has given the samples CV and to ENEL, Divisione Studi e Ricerche and dr. M. Puxeddu (CNR, Istituto Internazionale Ricerche Geotermiche) that have given the sample P3.

In this paper we give the petrographic, mineralogical and major element chemical data on three samples of volcanites: at present we are analyzing these rocks for REE, other trace element and for isotope composition; we are further comparing them with potassic volcanites from the Phlegraean area.

1. - Geologic Data.

Drillings, where the calc-alkaline volcanics under study have been found, are situated in the area north of the Phlegraean Fields, formed by the plain of the Volturno River and of other minor rivers. Besides the recent sediments near the Volturno R. and along the coast, the superficial products in this area are formed by trachytic volcanoclastites of the potassic suite, essentially Holocene in age, coming from the Phlegraean area. These rocks in the uppermost part are formed for about 10 metres or less, by a marginal incoherent facies of the « neapolitan yellow tuff » [16] 11.000-12.000 years old from present time [1]; the Campanian Ignimbrite [17], about 28.000 to 42.000 years old [1, 2, 3, 18] lies at the bottom probably down to a depth of 100 m [11].

The available data on the area between Castelvolturno and Parete [11, 26] show that frequent horizons of lavas and pyroclastites are found beyond the potassic volcanics at the bottom of the ignimbrite [20] and among them, the calc-alkaline volcanics under study at a depth between 1400 and 1900 m. These are interlayered with sedimentary beds made of sands, claystones and conglomerates of infra-circalittoral and delta environment Quaternary in age. A gap in the volcanic activity is apparently present between the deeper volcanic levels and the more superficial ones which are connected to the recent potassic volcanism in the Phlegraean area [26].

The thickness of the Quaternary levels is very high along the coast where a sequence about 3000 m thick has been found in the surrounding of the Volturno mouth (Fig. 1). At the bottom there are probably sediments of a Mio-Pliocene shallow sea, laying on a substratum formed by the essentially Mesozoic carbonatic platforms, outcropping frequently along the reliefs surrounding the Campanian trough.

The recent tectonics of that area (Fig. 1) has been of two kinds: compressive episodes took place during Miocene, while tensional fracturing occurred in Pliocene and Quaternary. The former led to the formation of the overthrust-sheet structure of the Apennines [13, 31], while the latter has formed a series of horst and graben within the

chain itself. The Pliocene-Quaternary tectonics gave origin to the most important structures along the Tyrrhenic edge of the chain

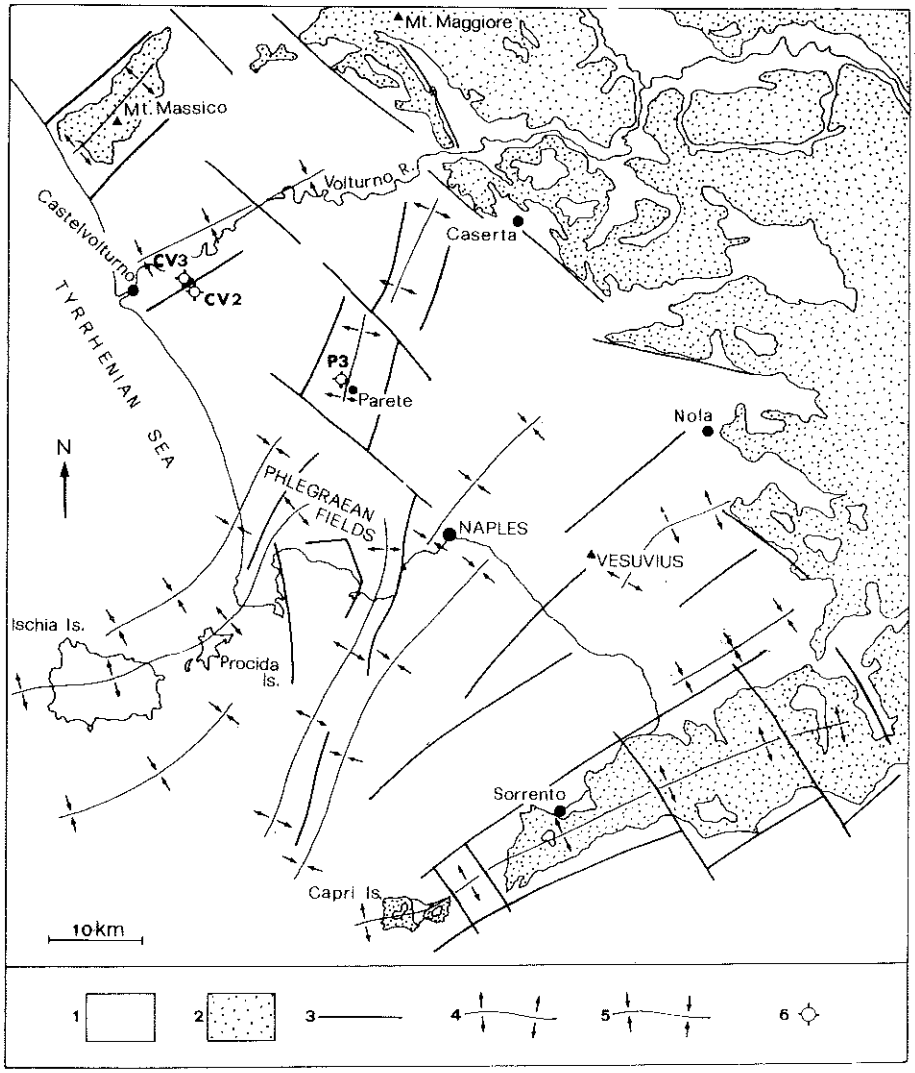


FIG. 1. - Main structural features of western Campania and location of the bore-holes. 1: potassic volcanics (ignimbrites, pyroclastites, lavas) and recent alluvial deposits; Quaternary. 2: Mesozoic to Miocene sedimentary rocks. 3: normal faults. 4: structural highs (carbonatic substratum?). 5: structural lows (carbonatic substratum?). 6: bore-holes that have encountered the studied calc-alkaline volcanics. Map data from [11, 24, 26].

such as the graben of Garigliano plain, the Campanian trough and the Sele plain.

The Campanian trough is a deep graben directed NW-SE about 75 km long, bounded at North by the horst of Mount Massico, at NE and E by the ridge of Mount Maggiore - Nola Mountains and at SE by the Sorrento Peninsula horst.

Geophisical data [4, 11, 12, 30] suggest that this large graben is probably divided by a horst under Parete and, with some complications, under the Phlegraean Fields, into two minor structures: the north-western one represented by the Volturno basin and the south-eastern one forming the basin between the Phlegraean Fields and Somma-Vesuvius.

In these basins, during the Quaternary age, there has been an active sedimentation, supported by a high subsidence rate of about 1.600 m/M.Y. near the Volturno River [26].

In this generally tensional tectonic stage, the volcanic activity started in Campania, particularly where two systems of faults crossed; according to the present stratigraphic data, calc-alkaline products were erupted first, and later the potassic ones.

The mineralogical and chemical characters (see the following pages) of the calc-alkaline volcanism are on the whole typical of orogenic areas.

In Fig. 1 the location of the drillings is shown, where the calc-alkaline rocks have been found and the probable main structural features of the carbonatic substratum of the NW part of Campania according essentially to [11] for the dryland and to [24] for the submarine areas.

In Fig. 2 we show the stratigraphic columns of the three drillings [11, 26].

The CV2 and CV3 wells, in the area east and east-south east of Castelvolturno, are located near the most depressed faulted area in the Volturno graben; pyroclastites and lavas interbedded, in these and other wells, with definitely marine levels suggest us that calc-alkaline volcanic vents were under the sea or at least near the coast-line [26]. The $CV3_{1889}$ sample comes from a tuff formation, 40 m thick, found at a depth between 1870 and 1910 metres; $CV2_{1440}$ is a lava, found 1440 m deep, from a level of pyroclastites and lavas, 100 m thick.

The well, at 1.5 Km NW from Parete (P3), is located near the supposed edge of the horst, towards the Volturno graben. Such well, drilled with other ones as a geothermal test [11], reached a depth of 303 m and has crossed potassic volcanics in the medium-high part (Fig. 2), with interlayered sedimentary psammitic levels prevalently formed by clasts of volcanic rocks and loose crystals from trachytes; quartz and Foraminifera of marine littoral or deltaic environment

are also present. The sample from the P3 well ($P3_{297}$) is flattened pebble in a pyroclastite matrix, 297 m deep.

Besides the presence of lava, about 230 m deep, and of pyroclastites [11], this area shows positive gravimetric anomalies suggesting that at depth other magmatic products and/or a positive structure of the carbonate basement are present [4, 11, 12, 30].

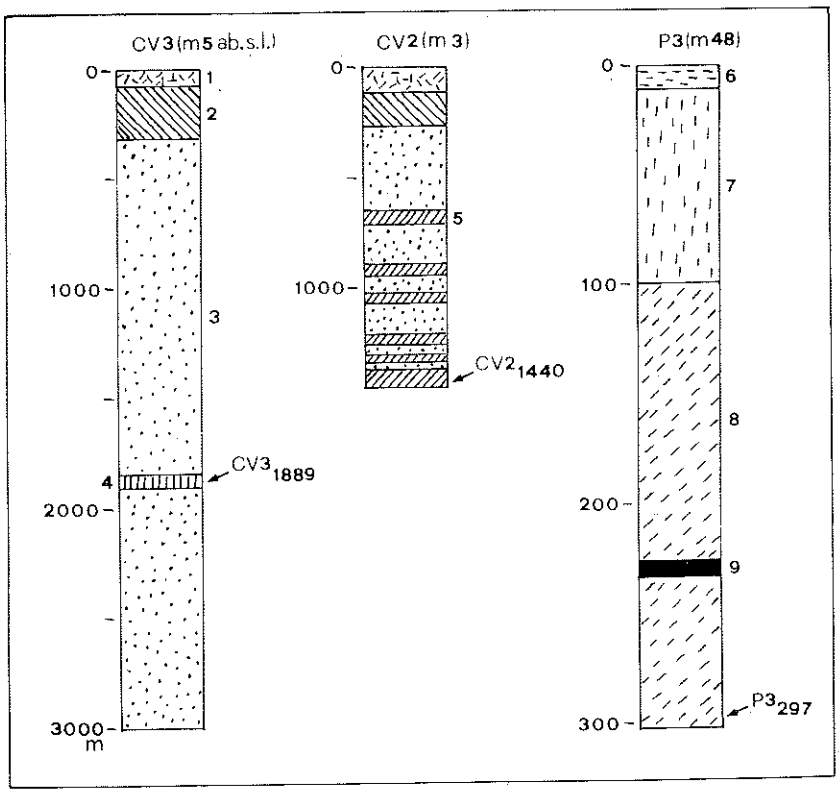


FIG. 2. - Stratigraphic columns from the bore-holes drilled near Castelvolturno (CV2, CV3) and Parete (P3) showing (arrows) the position of the studied andesitic calc-alkaline volcanics. 1: alluvial deposits with pyroclastics intercalations. 2: sublittoral sands and clays with pyroclastics intercalations. 3: sublittoral to deltaic sands. clays and conglomerates. 4: tuff. 5: pyroclastites and lavas. 6: pumice and ash (Neapolitan yellow tuff). 7: Campanian Ignimbrite. 8: pumice, ash and coarse volcanic sand. 9: andesitic lava.

2. - PETROGRAPHIC AND MINERALOGICAL DATA.

According to the mineralogical (Table I and II) and the petrochemical (Table IV and V) features, these calc-alkaline volcanics can be defined as « low-silica andesites » ($CV2_{1440}$, $CV3_{1889}$, $CV3_{1889'}$) and

« andesite » ($P3_{297}$); all samples are two-pyroxene (augite and bronzite) rocks.

2 a. - LOW-SI ANDESITES.

Lava.

The observation of the lava specimen ($CV2_{1440}$) shows (Fig. 3) a porphyritic texture with phenocrysts of pyroxene (augite and bronzite) and of feldspars (bytownitic plagioclase) in a gray groundmass.

The phenocrysts size (2-4 mm) gradually decreases towards groundmass. Texture is slightly vesicular.

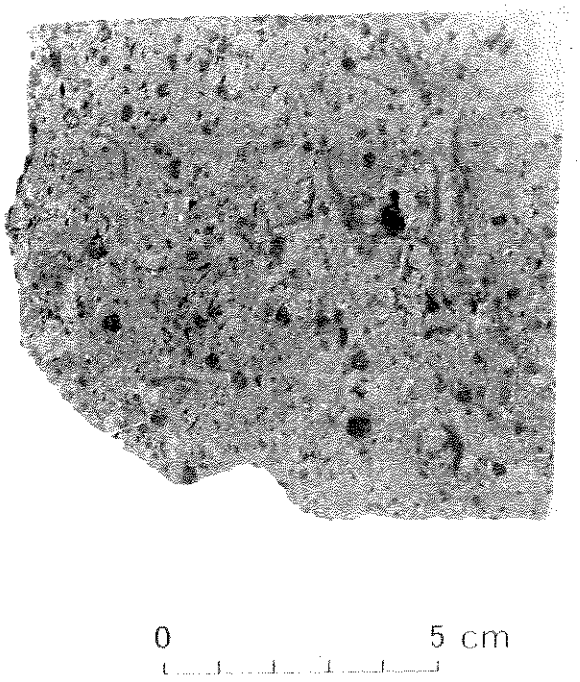


FIG. 3. - Low-Si andesite lava, sample $CV2_{1440}$. Bronzitic orthopyroxene and augitic clinopyroxene phenocrysts.

In thin section the groundmass is microcristalline to hypocristalline. Phenocrysts (Fig. 4), in order of abundance, are plagioclase, calcic clinopyroxene, orthopyroxene (Table I); among the microphenocrysts « magnetite » (titanomagnetite?) is found. The above mentioned mineralogical phases are present in the groundmass, but it is not

possible to state the composition of the plagioclase and pyroxene; in this groundmass the diffractometric data show the presence of little possibly zoned sanidine.

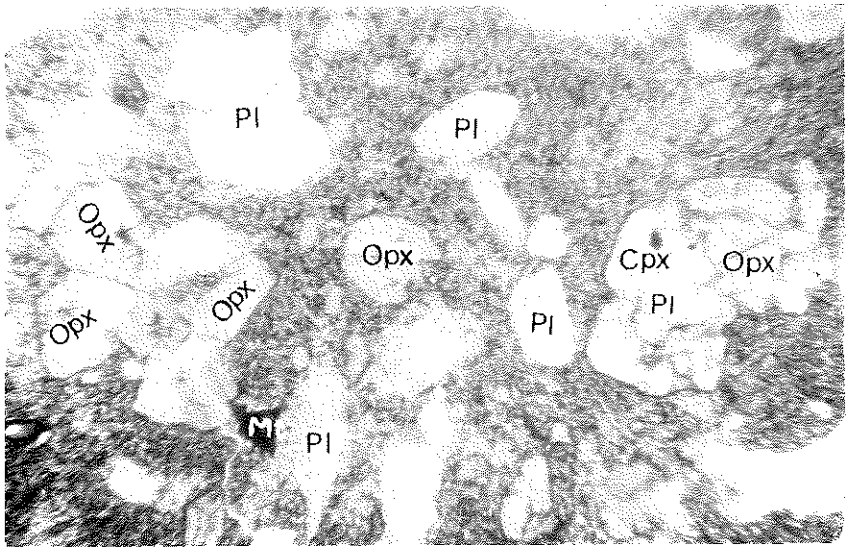


FIG. 4. - Low-Si andesite, sample $CV2_{1440}$. Phenocrysts of labradoritic-bytownitic plagioclase (Pl, 80-60 % An), augite (Cpx), bronzitic orthopyroxene (Opx, 27 % Fs), titanomagnetite (Mt). Plane-polarized light. 35 X.

TABLE I

Modal composition of deep-seated calc-alkaline andesitic volcanics from the Phlegraean Fields.

		sample $CV2_{1440}$	$P3_{297}$
phenocr. + microphen.	Plagioclase	23.3	30.5
	Clinopyroxene	11.1	7.5
	Orthopyroxene	5.6	5.7
	Titanomagnetite	1.0	2.2
	Biotite	—	0.3
	groundmass	59.0	53.8
	Porphyritic Index	41.0	46.2
	Opx / Cpx	0.50	0.76

The order of crystallization is: plagioclase, magnetite, orthopyroxene, clinopyroxene, sanidine. We observed some rare laths, that according to their outline seem to be olivine, completely altered in carbonates and iron hydroxides.

The Phenocrysts of plagioclase are not altered; some grains of pyroxene, mostly rhombic, show inclusions or edges of no better identifiable ferriferous alteration products.

The rock contains minerals laid by hydrothermal solutions along the fractures and in the vesicles. These phases are about 2 % by volume; they are formed by spatic crystals of siderite (1 %), iron hydroxides, zeolites, calcium and magnesium carbonates and rare pyrite.

Not considering the hydrothermal phases, the rock shows a Porphyritic Index of 41 (Tab. I) and a orthopyroxene/clinopyroxene ratio = 0.50.

We observe also glomerophiric structures of clinopyroxene, orthopyroxene, plagioclase alone or of the three grouped phases.

In Table II are summarized the mineralogical compositions obtained from the optical, diffractometric and chemical study.

The phenocrysts show the following characters:

PLAGIOCLASE. It is generally zoned in the larger grains.

The optical determinations [8, 10] show a bytownitic composition (78-80 % An) at the core; this has sometimes resorption edges and in some larger grains it reaches a composition of 84 % An.

The intermediate envelope is sodic bytownite (75 % An) and the outer edge is labradoritic (60 % An). In some grains an oscillatory zoning is found.

The average composition of zoned phenocrysts can be estimated as a bytownite (76 % An).

The diffractometric determinations on phenocrysts show an average composition of 6 Or, 19 Ab, 75 An, and on the whole rock of 7 Or, 31 Ab, 62 An. Such data show a marked fractionation of the plagioclase from about 84 An in phenocrystal cores to less than 60 An in the groundmass.

During the fractionation the melt must have reached the cotectic line in the An-Ab-Or system with sanidine crystallizing in the groundmass. Here the diffractometric data show the presence of sanidine possibly zoned from 74 to 67 % Or (Table II).

ORTHOPYROXENE. The structural relations between ortho-clinopyroxene are quite complex. In some cases one can observe that orthopyroxene is crystallized earlier than the augitic clinopyroxene.

TABLE II

Mineral composition of deep-seated calc-alkaline andesitic volcanics from Phlegraean Fields. Optical (●), diffractometric (+) and chemical (*) data.

Sample	Classification and lithology	Mineral	Composition				Remarks
$CV2_{1440}$	low-Si andesite; lava	Plagioclase		Or	Ab	An	
			●		20-40	80-60	mol. % whole phenocrysts
			+	6	19	75	wt. % zoned phenocrysts
			+	7	31	62	wt. % whole rock
		Sanidine		Or	Ab (+ An)		found only in the
			-	74-67	26-33		wt. % groundmass
		Orthopyroxene		En	Fs		mol. % phenocrysts
			●	73	27		bronzite
		Clinopyroxene	●	$2V_\gamma = 51°$,	$c/\gamma = 42°$		phenocrysts
			*	Ca = 41.4,	Mg = 43.5,		Σ Fe = 15.1; augite
$CV3_{1889}$	low-Si andesite; scoriae	Plagioclase		Ab	An		zoned phenocrysts
			●	17-40	83-60		mol. %
$P3_{297}$	andesite; microblock	Plagioclase		Or	Ab	An	
			●		30-46	70-54	mol. % zoned phenocrysts
			+	3	32	65	wt. % whole phenocrysts
		Orthopyroxene		En	Fs		mol. % phenocrysts
			●	72	28		bronzite
		Clinopyroxene	●	$2V_\gamma = 53°$,	$c/\gamma = 43°$;		augitic phenocrysts

We observe augite phenocrysts enclosing orthopyroxene besides plagioclase (Fig. 5A).

In such cases often the orthopyroxene shows irregular edges (Fig. 5B). According to the optical observations, probably this is not the consequence of unmixing of an original Ca-poor clinopyroxene because of the type of structure and of the random orientation of the enclosed orthopyroxene; perhaps this particular orthopyroxene corresponds to mineral relics.

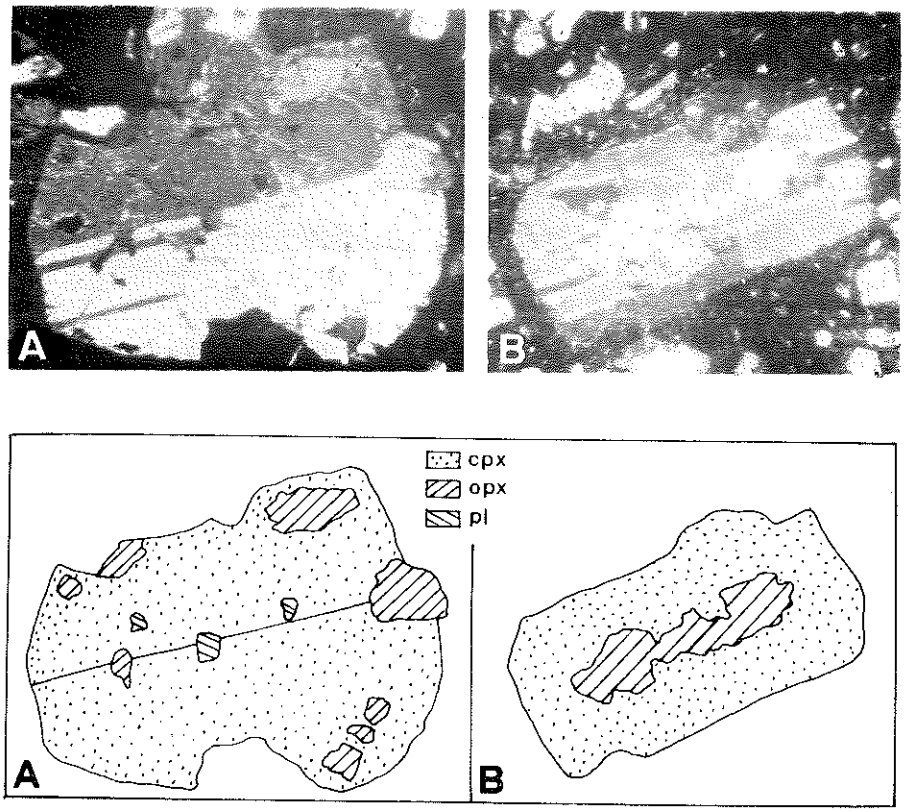


FIG. 5. - Low-Si andesite, sample $CV2_{1440}$; cross. polariz., 22 X. A: Phenocryst of Ca-rich clinopyroxene (cpx, $2V\gamma = 53°$) with orthopyroxene (opx) and plagioclase (pl) inclusions. B: Orthopyroxene, with irregular border, included in Ca-rich clinopyroxene ($2V\gamma = 52°,5$).

In some groups of phenocrysts their structure suggests a contemporaneous crystallization of the two pyroxenes (Fig. 4, at the right). Perhaps such relation, in the first approximation, holds also for the numerous distinct phenocrysts of the two kinds. Orthopyroxene is weakly zoned and slightly pleochroic with: α = light

green, β = light green, γ = light bronze yellow; the axial angle ($2V_\alpha = 67°$) shows a bronzitic composition trending toward hypersthene (27 % Fs) with some grains at 28 % Fs.

CLINOPYROXENE. It is slightly pleochroic from a light brown to a light green tone, weakly iron enriched toward the edge. It is often multiply twinned $\parallel \{100\}$ and has $2V_\gamma = 51°$, $c/\gamma = 42°$. A chemical analysis on phenocrysts separated by means of heavy liquids and magnetic separator gave the results shown in Table III.

TABLE III

Chemical composition of augite phenocrysts in the deep-seated andesitic lava (sample $CV2_{1c40}$) from the Phlegraean Fields.

SiO_2	50.91		
TiO_2	0.72	Ca	41.4
Al_2O_3	3.57	Mg	43.5
Fe_2O_3	1.60	Σ Fe	15.1
FeO	7.60		
MnO	0.22		
MgO	14.85		
CaO	19.76	$K_D \left[\left(\frac{Fe^{2+}}{Mg} \right)_{opx} : \left(\frac{Fe^{2+}}{Mg} \right)_{cpx} \right] = 1.28$	
Na_2O	0.32		
K_2O	0.09		
	99.64		

According to the atom proportions of Ca, Mg, Σ Fe ($Fe^{++} + Fe^{+++} + Mn$) this clinopyroxene is classified (Fig. 6) as an augite. If, as it seems, ortho- and clinopyroxene phenocrysts are in equilibrium, from the data about the distribution of Mg and Fe^{++} between the two phases, we can compute distribution coefficient $K_D \left[\left(\frac{Fe^{++}}{Mg} \right)_{opx} : \left(\frac{Fe^{++}}{Mg} \right)_{cpx} \right]$ equal to 1,28. Such data agree with the observation that in igneous rocks with two pyroxenes in equilibrium the Ca-poor phase has a higher Fe^{++}/Mg ratio than the Ca-rich one [9, 40]; such ratio is essentially shown by the inclination of the tie-line of Fig. 6.

Tuff.

The tuff in hand specimen (Fig. 7) is formed by blackish scoriae and minor amounts of lava and crystal clasts. The lower part of the bank is lithoidal, the upper one is from incoherent to weakly lithoidal. We have analysed the tuff in toto (sample $CV3_{1889}$) and scoriae ($CV3_{1889'}$) from the incoherent facies.

In thin section the clasts are subrounded and immersed in a cineritic matrix cemented by calcium carbonate in the lithoidal part.

In this part no welding microstructures are observed that could suggest an ignimbritic origin; it is probably an epiclastic level. Its deposition through reworking of pyroclastic rocks is also suggested by the presence of some pisolites.

Scoriae show an uniform mineralogical composition and microstructural characters. They have a low degree of crystallinity, the groundmass is glassy and vesicular.

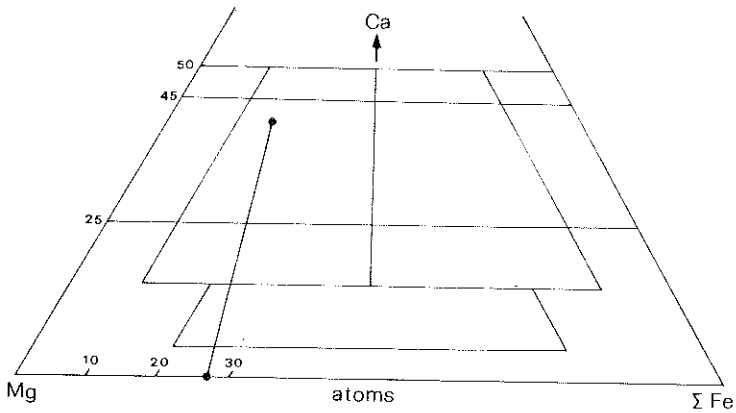


FIG. 6. - Plot, using the Ca, Mg, Σ Fe (Fe^{2+}, Fe^{3+}, Mn) ratios, of Ca-poor (bronzite) and Ca-rich (augite) pyroxenes phenocrysts in the deep-seated andesitic lava (sample $CV2_{1440}$) from Phlegraean Fields.

Plagioclase represents the main mineralogical phase, it is formed by microphenocrysts and a few zoned phenocrysts (Table II) with a bytownitic core (83 % An), a sodic bytownitic intermediate shell (75 An) and a thin labradoritic edge (60 An). Rare microphenocrysts of clino- and orthopyroxene are observed.

Possible correlations between such scoriae and the previoulsy described lava are suggested by the mineralogic association, the identity of composition of plagioclase phenocrysts and the similar chemical composition, that is more sialic in the scoriae (Table IV).

It is confirmed that in such low-silica andesites plagioclase is the first mineralogical phase to crystallize.

In the tuff, besides clasts of crystals of labradoritic-bytownitic plagioclase and rare ortho- and calcic clinopyroxenes, an association of numerous lava clasts with calc-alkaline character and tuff fragments is observed.

Clasts have different microstructural features and crystallinity degree: they show microcrystalline to hypocrystalline porphyritic

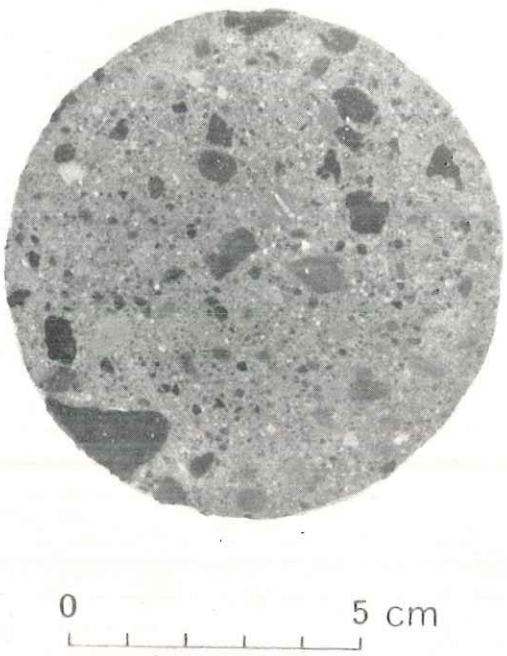


FIG. 7. - Andesitic tuff sample $CV3_{1889}$. Blackish low-Si andesitic scoriae and calc-alkaline lava fragments in a cineritic matrix.

structures and are vitrophyres, pumices, scoriae, obsidians; some lithotypes are similar to a low-silica lava ($CV2_{1440}$) and to the andesitic block $P3_{297}$. The main associations of phenocrysts are the following:

plagioclase + clinopyroxene + orthopyroxene
plagioclase + biotite + rare pyroxenes
plagioclase
plagioclase + clinopyroxene

Such tuff is interesting not only for the presence of the rather little altered andesitic scoriae (Table IV), but also for the association of lava fragments that shows a complex and abundant calc-alkaline activity in the Phlegraean area.

2 b. - ANDESITE.

The andesitic block $P3_{297}$ shows a porphyritic structure with phenocrysts, 2-3 mm in size, made of feldspar (plagioclase) and

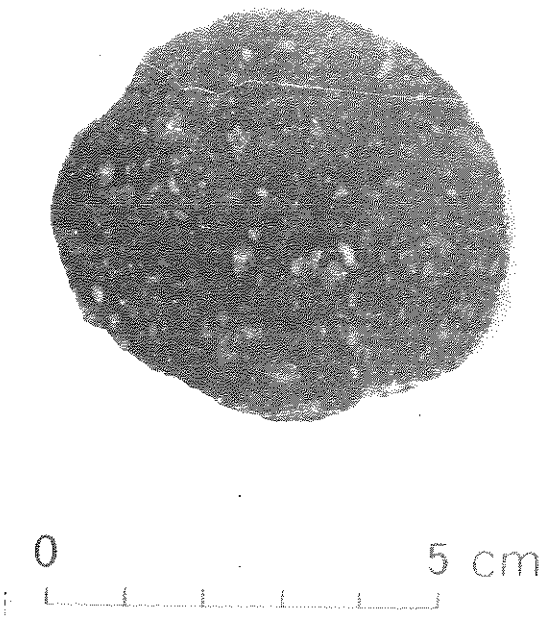


FIG. 8. - Andesite, sample $P3_{297}$. Phenocrysts of plagioclase, bronzitic orthopyroxene and calcic clinopyroxene (darker crystals) in glassy rhyolitic groundmass.

pyroxenes (augite and bronzite) and a blackish groundmass (Fig. 8).

In thin section (Fig. 9) the structure is vitrophyric; there are almost no secondary minerals. We can observe, in order of decreasing amount (Table I), phenocrysts of plagioclase, calcic clinopyroxene,

orthopyroxene and an opaque mineral that, according to the rock type, could be referred to titanomagnetite. We can also observe few microphenocrysts of biotite and some crystals of olivine with reaction rim of orthopyroxene (Fig. 10).

The size of phenocrysts decreases gradually towards the grondmass. The crystallization order is: olivine-titanomagnetite, pyroxenes, plagioclase, biotite.

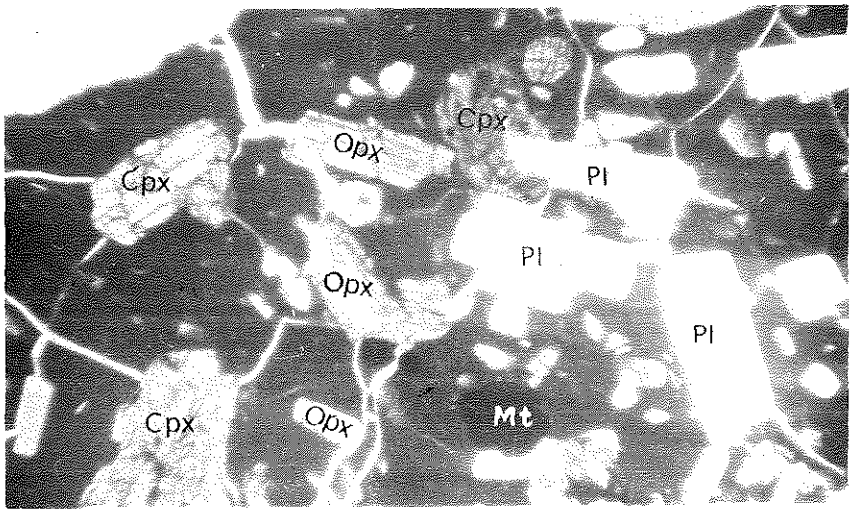


FIG. 9. - Andesite, sample $P3_{297}$. Phenocrysts of labradoritic plagioclase (Pl, 70-54 % An), calcic clinopyroxene (Cpx), bronzitic orthopyroxene (Opx, 28 % Fs), titanomagnetite (Mt) in rhyolitic groundmass. Plane-polarized light, 35 X.

The groundmass is formed by compact brown glass. The rock shows (Table I) a Porphyritic Index of 46,2 and an ortho-/clinopyroxene ratio of 0,76. Plagioclases are strongly zoned, pyroxenes show a weak zoning and are probably slightly iron enriched toward the outer margin.

The phenocrystal characters are as follows:

PLAGIOCLASE. It is more remarkably zoned than in sample $CV2_{1446}$; zoning is oscillatory in the intermediate shells. The core is often corroded and shows glassy inclusions; less frequently they are also present in the medium-external zone. Optical data (Table II) show that the composition is labradorite-bytownite at the core (70 % An), labradorite in the intermediate shell (63 An) and sodic labradorite in the outer part (54 An); the average composition is a calcic labradorite (66 % An).

The composition from diffractometer data is: 3 % Or, 32 Ab, 65 An (Table II). Some large phenocrysts reach in the core a bytownitic composition (78 % An).

ORTHOPYROXENE. It is slightly zoned and shows optical characters very similar to the phenocrysts of sample $CV2_{1440}$; it is slightly pleochroic with α = light green, β = light green, γ = light bronze yellow.

The $2V_\alpha$ value of 66° suggests a bronzite composition trending toward hyperstene (28 % Fs); some crystals have a composition of 29 % Fs. There are also rare olivine crystals showing a reaction relationship with the orthopyroxene (Fig. 10).

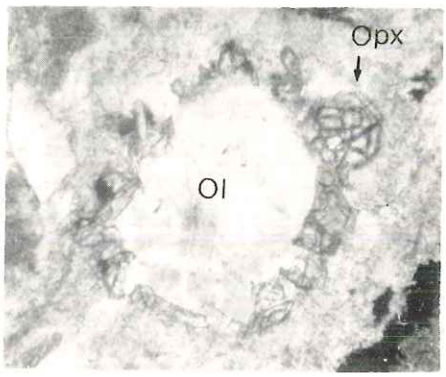


FIG. 10. - Andesite, sample $P3_{297}$. Orthopyroxene rim (Opx) surrounding serpentinized olivina (Ol). Plane-polarized light, 90 X.

CLINOPYROXENE. It is likely to be referred to an augite as it is slightly coloured in light brown-green with $2V_\gamma = 53°$ and $c/\gamma = 43°$.

From the overall mineralogical data, in this kind of andesite, more sialic than the lava $CV2_{1440}$ (Table IV), we can observe on average a more sodic plagioclase, an increase of the orthopyroxene in comparison with the monoclinic one and titanomagnetite in bigger and more numerous crystals.

Other data on a greater number of samples are necessary in order to know possible relations between the andesites poorer and richer in silica.

With the present data, the almost identical composition of the orthopyroxene phenocrysts (optical data) in both lavas could suggest a crystal accumulation in $CV2_{1440}$.

Anyway the structural difference between magnetite and some pyroxene phenocrysts does not look to convalidate such possibility. Further, the other relatively femic andesite, ($CV3_{1889'}$), is very poor in phenocrysts.

On the other hand, an evolution by fractional crystallization towards the most sialic types, could be shown also by the composition of the zoned plagioclases.

TABLE IV

Chemical composition of deep-seated calc-alkaline volcanics from the Phlegraean Fields.

	$CV2_{1440}$	$CV3_{1889}$	$CV3_{1889'}$	$P3_{297}$	$P3_{297'}$
SiO_2	54.31	53.51	55.80	59.76	71.47
TiO_2	0.65	0.71	0.68	0.59	0.24
Al_2O_3	16.88	17.34	17.75	17.10	14.45
Fe_2O_3	1.25	0.29	1.29	1.81	1.26
FeO	5.66	4.76	5.23	3.19	2.14
MnO	0.12	0.10	0.13	0.10	0.09
MgO	4.85	3.52	3.35	2.74	0.33
CaO	8.61	8.05	7.70	5.95	0.98
Na_2O	2.05	2.30	2.88	3.16	3.79
K_2O	1.77	1.94	1.94	2.85	5.10
P_2O_5	0.05	0.06	0.12	0.08	0.15
H_2O^-	0.45	1.80	0.42	0.67	—
H_2O^+	3.35	5.70	2.07	1.47	—
	100.00	100.08	99.36	99.47	100.00
SI	31.1	—	22.8	19.9	2.6
σ	1.29	—	1.82	2.16	2.78
τ	22.82	—	21.87	23.63	44.42
CI	24.3	—	18.6	13.6	8.3
An % in plag.	60	—	51	47	19

$CV2_{1440}$ - Lava. Low-Si andesite.
$CV3_{1889}$ - Andesite tuff (whole rock).
$CV3_{1889'}$ - Scoriae in the $CV3_{1889}$ tuff. Low-Si andesite.
$P3_{297}$ - Microblock. Andesite.
$P3_{297'}$ - Computed composition of glassy groundmass of the $P3_{297}$ microblock. Rhyolitic.

3. - PETROCHEMICAL DATA.

In Table IV the chemical composition of lava $CV2_{1440}$, tuff in toto ($CV3_{1889}$), tuff scoriae ($CV3_{1889'}$) and block ($P3_{297}$) are shown. With regard to the tuff we shall discuss only the scoriae composition. All samples have been previously treated with acetic acid and washed; from the analysis of the lava $CV2_{1440}$ we have subtracted 1,4 % in weight of

siderite (1 % in volume) because the microstructural features seem to suggest that the chemical components of such secondary mineral do not belong to this rock. In Table V the standard mineralogical composition is shown calculated according to the procedure suggested for the volcanic facies [33].

TABLE V

Normative mineral composition as volume (Rittmann norm) of calc-alkaline volcanics (data from Tab. IV).

	$CV2_{1440}$	$CV3_{1889'}$	$P3_{297}$	$P3_{297'}$
Quartz	10.2	10.2	13.9	26.7
Sanidine	9.6 (Or 73 %, Ab 21, An 6)	11.9 (67, 27, 6)	21.3 (64, 30, 6)	57.2 (48, 48, 4)
Plagioclase	55.9 (Or 8, Ab 32, An 60)	59.3 (8, 41, 51)	51.2 (9, 44, 47)	7.8 (13, 68, 19)
Hypersthene	13.0	9.8	7.6	—
Augite	9.3	6.4	4.2	—
Biotite	—	—	—	4.7
Cordierite	—	—	—	2.6
Magnetite	1.2	1.3	1.1	0.6
Ilmenite	0.7	0.8	0.6	0.1
Apatite	0.1	0.3	0.1	0.3
Average feldspar	Or 17.6, Ab 30.4, An 52.0	17.1, 38.7, 44.2	24.5, 41.1, 34.4	42.5, 51.5, 6.0
Q	13.4	12.5	16.1	29.1
A	12.7	14.6	24.6	62.4
P	73.9	72.9	59.3	8.5
Colour Index	24.3	18.6	13.6	8.3
classification after Streckeisen	quartz-bearing latiteandesite	quartz-bearing latiteandesite	quartz-bearing leuko-latiteandesite	rhyolite

From the most femic ($CV2_{1440}$) to the most sialic sample ($P3_{297}$) the normative plagioclase goes from labradorite to calcic andesine (60-47 % An, Table IV, V), the colour index (CI) is from 24.3 to 13.6,

the serial type ranges from strongly pacific to medium pacific (σ = 1.29-2.16).

According to these data, to the chemical composition and to the above mentioned mineralogical characters, we point out that these volcanites belong to an andesitic calc-alkaline association. Due to the alteration stage of the rocks, the mineralogic characters are the most significant evidence to establish the association type.

From the mineralogical-microstructural point of view, these volcanics contain orthopyroxene with augite; the former because of the persistence of microlites in the groundmass of sample $P3_{297}$, should crystallize over a wide range of crystallization. Pigeonitic clinopyroxene is absent, olivine shows reaction relationship with orthopyroxene and the ratio ortho-/clinopyroxene increases from the most femic to the most sialic type.

The andesite $P3_{297}$ shows biotite microcrystals in the glassy groundmass that, as it will be shown, has a rhyolitic composition.

Such mineralogical data are on the whole characteristic of the « hyperstenic series » of H. KUNO [28] that is of the sensu strictu calc-alkaline volcanics.

Also the above mentioned microstructural features can be considered typical of the andesites [25, 36]. Such volcanics, commonly named « orogenic andesites », are restricted, as it is known, to the orogenic chains and island arcs.

In the nomenclature of S. R. TAYLOR et Al., used here [35, 37], these volcanics can be classified as « low-silica andesites » (sample CV_{1440}, $CV3_{1889'}$) and « andesite » ($P3_{297}$); the potash content, higher than in common andesites, shows that these rocks belong to a « K-rich calc-alkaline association ».

According to the standard mineralogical composition (Table V) and after A. L. STRECKEISEN'S classification [34], these volcanics (Fig. 11) are quartz-bearing latiteandesites ($CV2_{1440}$ and $CV3_{1889'}$) and leuko-latiteandesite ($P3_{297}$); such definitions depend on the relative abundance of potassium, that can be partly referred to the presence of sanidine, observed by XRD in the micro-hypocrystalline groundmasse of $CV2_{1440}$ (Table II).

The τ and σ values agree with the orogenic environment of the volcanism under object; such parametres are in fact considered discriminant of the tectonic environment for different volcanic associations [32].

The three samples (Fig. 12) are plotted in the field of volcanics from orogenic chains and island arcs.

According to the few available samples, and to the rhyolitic composition of the groundmass of $P3_{297}$, that is to be examined later, a

low iron-enrichment curve can be supposed in the FAM diagram (Fig. 13), that is a feature of the calc-alkaline series. The volcanics plot in the field of « hyperstene series » according to H. KUNO [28].

For the amount of alkalies and silica the three volcanics (Fig. 14) essentially fall in the range of the series of the « high-alumina basalts »

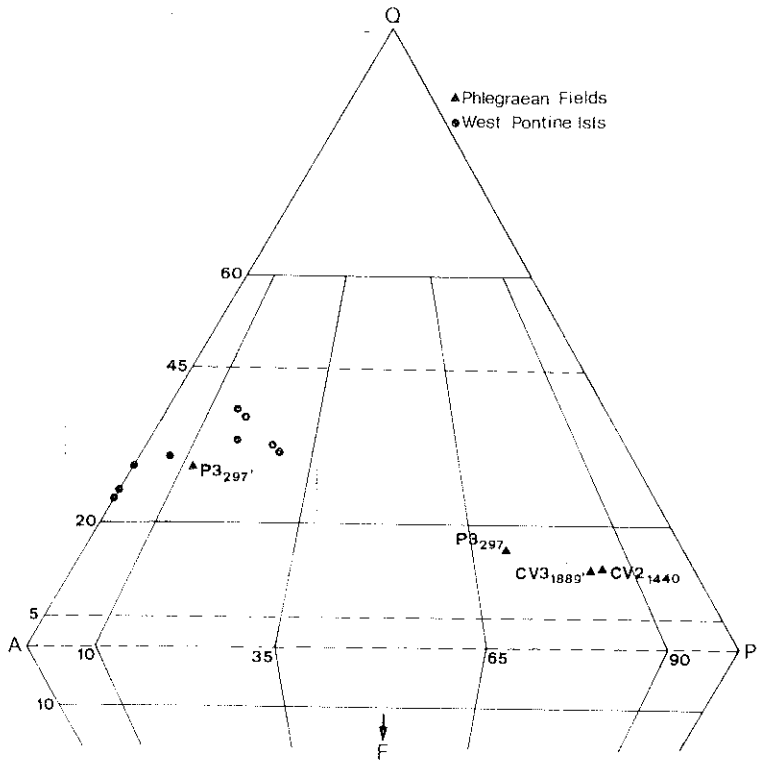


FIG. 11. - Deep-seated calc-alkaline volcanics from Phlegraean Fields. Classification (according to A. L. Streckeisen) on the base of mineral composition, Rittmann norm. In this figure and in successive diagrams are reported for comparison the calc-alkaline rhyolites of Western Pontine Islands.

after H. KUNO [28]. In such case, according to this author, the calc-alkaline volcanics in the Phlegraean area should derive from a basaltic magma, with a high alumina content, by fractional crystallization under high P_{O_2} controlled by a high H_2O content in the magma, and possibly by contamination with crust material. The high-H_2O content could account for some important chemical-mineralogical features of these Phlegraean rocks: low iron enrichment during fractionation,

magnetite phenocrysts, orthopyroxene persisting over a large range of crystallization.

In order to get information about the composition of the groundmass of the andesite $P3_{297}$ (Fig. 9) the amount of phenocrysts and microphenocrysts of Table I has been subtracted from the whole

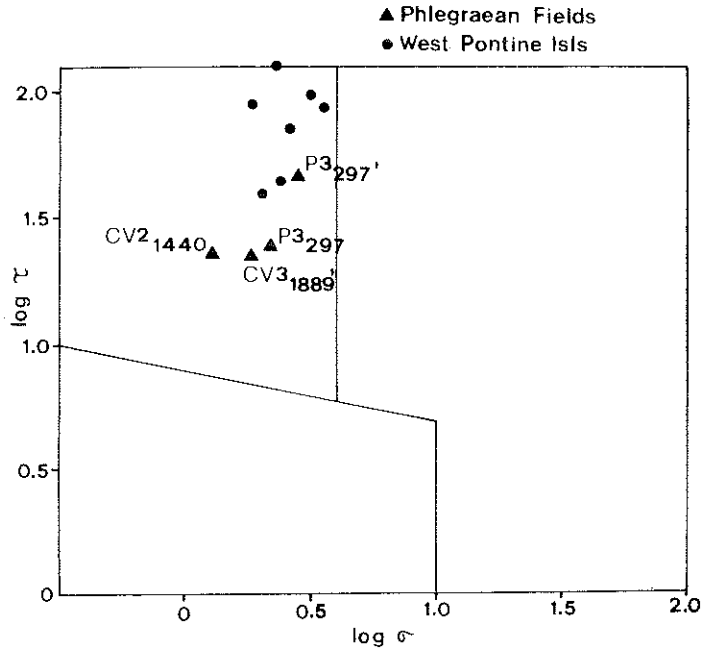


FIG. 12. - Plot of deep-seated calc-alkaline volcanics from Phlegraean Fields in the τ-σ diagram.

rock analysis. With regard to mineral compositions (Table VI) data from this paper and from other authors about minerals from similar rocks have been used; for calcic clinopyroxene the phenocrystic augite composition from the andesitic lava $CV2_{1449}$ (Table III) has been adopted, assuming that this mineralogical phase does not undergo wide changes in an andesitic association [40].

The computed composition for the glassy groundmass ($P3_{297'}$) is rhyolitic (Table IV, V, Fig. 11). This glass can be formed as a residual liquid derived from an andesite melt by fractional crystallization.

It is to be noted that, within the limits of the mineral compositions that have been used, this melt is rather similar to the rhyolites of West Pontine Islands [6] (Fig. 11, 12, 13, 14) situated at an average distance of about 100 km west of the Phlegraean Fields.

It is to be pointed out [6] that also within the volcanic sequence outcropping in the Pontino Archipelago a potassic volcanism follows a rhyolitic calc-alkaline activity, Pliocene to lower Quaternary in age (5.0-1.6 M.Y.). The Pontinian potassic volcanics are undersaturated trachybasalts, trachytes, phonolites (Ponza, La Botte, Ventotene, S. Stefano Islands) with a composition rather similar to the potassic

TABLE VI

Approximate chemical composition of the phenocrysts of the andesite $P3_{297}$.

Mineral	orthopyroxene			clinopyroxene			plagioclase			titanomagnetite		
	Mg	Σ Fe	Ca	Mg	Σ Fe	Ca	An	Ab	Or	RO	R_2O_3	TiO_2
Composition	71.2	25.6	3.2	43.5	15.1	41.4	65	32	3	43.3	32.3	24.4
	$100\,Mg/Mg+Fe^{+2}+Fe^{+3}+Mn=73.1$											
References and remarks	[14] an. 8+9			phenocr. of $CV2_{1440}$			phenocr. of $P3_{297}$			[40] an. 2		

volcanics of the Phlegraean area [19, 21]; absolute age determinations of this volcanism could show if such similar evolution of the volcanics possibly occurred in different times in the two areas.

CONCLUSIONS.

The calc-alkaline volcanic rocks found at depth in the Phlegraean area belong to an association with mineral-microstructural features and major element composition similar to those of volcanics from orogenic areas.

The many different lithotypes enclosed in the tuff show that the calc-alkaline products should be very abundant in the Phlegraean area; the whole rocks and the groundmass composition suggest that this deep volcanism includes at least types ranging from low-Si andesite to rhyolite. Chemical data about analyzed samples show again that this is a K-rich calc-alkaline association.

To frame this volcanic activity in to the regional tectonics, absolute age determinations on volcanics are needed, the stratigraphic data about the samples from CV2 and CV3 boreholes near Castelvolturno [26] show that the volcanic activity took place during the Qua-

ternary in a distensive tectonic period after a quite long time from the Miocene compressive stages.

The following facts should be useful for a better knowledge of the petrogenesis and evolution of the volcanics in Campania and also for their fitting into the tectonic environment:

1) Undersaturated alkaline-potassic products outcrop at the surface following an andesitic calc-alkaline volcanism, already relatively K-rich. The features of the former, already known for some

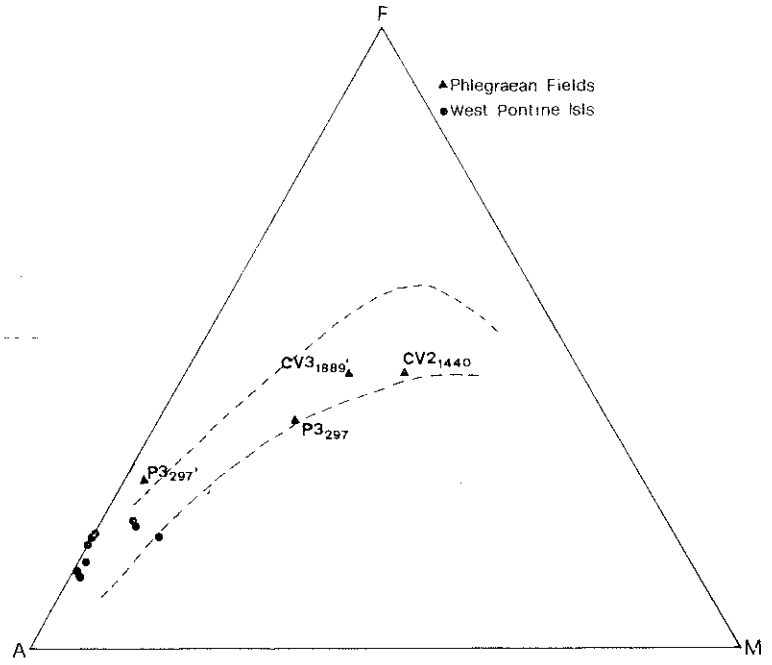


FIG. 13. - FAM diagram for deep-seated calc-alkaline volcanics from Phlegraean Fields. Dashed line indicates the field of the hypersthenic rock series according to H. Kuno [28].

sequences, show that these rocks are to be referred to the latitebasalt--trachyte-phonolite association with almost exclusively normative nepheline, whose evolution has been essentially controlled by fractional crystallization starting from latitebasaltic members [19, 21].

2) These potassic series show the following chemical and mineralogical features [21]: their iron enrichment is low (calc-alkaline trend type); total alkalies and alumina content is high; potassium content is high compared to silica; large cations (above all Rb and

Ba) are abundant; TiO_2 content is low; olivine is stable and there is almost no orthopyroxene; alkali feldspars, plagioclases and feldspathoids coexist in the groundmass.

On the basis of these features, and of their association with calc-alkaline rocks, the potassic volcanics could be interpreted as similar to varieties of a particularly K-rich and undersaturated shoshonitic association [21]. This seems not justified at least if one takes into account the present tectonic environment where the Campania volcanism occurred: typical shoshonitic suites are found related with subduction zones, while, when either the calc-alkaline or the potassic

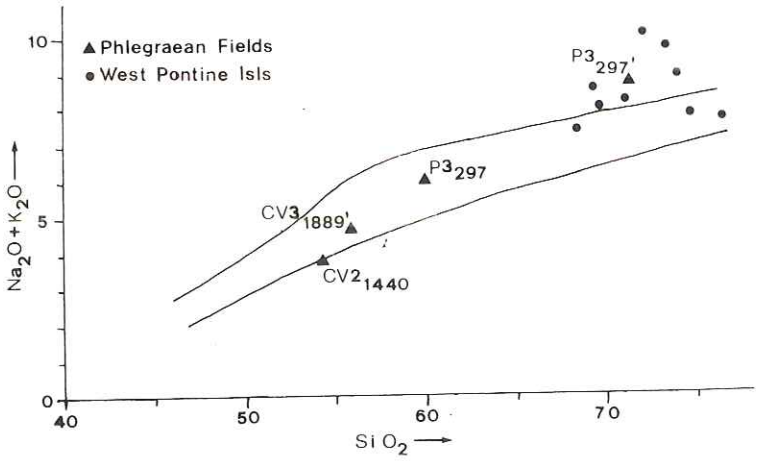


FIG. 14. - Alcali-silica diagram for deep-seated calc-alkaline volcanics from Phlegraean Fields.

volcanism occurred, the region under consideration was showing since a long time tensional tectonics which gave origin to horst and graben (see 7).

3) The undersaturated volcanics richer in potassium, with modal leucite, belong to this potassic association in the whole area of Campania.

4) With regard to the volcanic association and the sequence of events, the Pontine Islands must be probably related to Phlegraean area. According to available data in those islands, in fact, a calc-alkaline rhyolitic Plio-Quaternary volcanism is followed by a potassic undersaturated one similar to that of the Phlegraean area. Absolute age determinations on the volcanic associations of the latter may show whether such possible similar evolution is controlled, in time, by the tectonic evolution from the Tyrrhenian to Apenninic area.

5) In both the Phlegraean area and in the Western Pontine Islands, where an older calc-alkaline volcanism has been found up to now, the younger potassic products lie more or less along the same vertical above it.

6) Regarding the origin of the Quaternary potassic volcanic rocks found just along the Tyrrhenian Sea mixing of mantle and crust melts should have occurred, more and more going from northern Latium south-east ward [39]; on the genesis of these crust melts, geochemical data suggest, as possible hypothesis, melting or assimilation of sediments by calc-alkaline magmas combined with deep burial and/or subduction [38]. In particular, in the region under consideration, the presently available data about isotope and trace element compositions suggest that melts from the crust and the mantle mixed either for the potassic rocks of the whole Campanian area or for the calc-alkaline rhyolitic rocks of the Pontine Islands [6, 39].

7) A tectonic evolution of the « Rift Valley » type seems to control the magmatic evolution of the alkaline volcanics along the Tyrrhenian edge of Central Italy [29].

Since upper Miocene compressive tectonic episodes have been involving areas more and more external to the Apennine chain with an increasing intensity from North to South. Starting from the same time tensional tectonics took place along the chain inner edge proceeding towards its external edge [22, 23]. As a consequence of such tectonic stages complex phenomena should have occurred between crust and mantle, because of the deformations along the boundary of the Tyrrhenian and Apenninic area.

Along the Tyrrhenian side of the Apennine chain, therefore, compressive tectonic stages occurred until upper Miocene, followed by intense tensional episodes, horst and graben forming mainly in Pliocene and in Quaternary.

The evidence of a strong explosive activity (volcanic ashes) from upper Miocene to Pliocene (data still in process) along the Apennine chain, shows also in the past an orogenic volcanic activity related with the geodynamic evolution of the inner side of Apennine chain.

8) Besides the above remarks, the magmatic evolution of some island arcs in the West Mediterranean Sea should be taken in mind.

Calc-alkaline magmatic association is considered as typical of margins of converging plates; moreover in some island arcs the calc-alkaline volcanism changes into a shoshonitic one. More exactly we can observe that, with an advancing evolution stage of the island arcs, tholeiites change into a calc-alkaline products, with K-contents increasing with time, and these in turn into shoshonites [27].

In South-eastern Spain we can observe a late Tertiary-Quaternary volcanism, made up of rocks of a calc-alkaline association (andesites, dacites, rhyolites) and femic K-rich volcanics, referred to an island arc environment (Gibraltar arc) at a mature stage of the subduction process [5].

In the Quaternary arc of the Eolian Islands the typical calc--alkaline association has evolved into a K-rich calc-alkaline one and finally into shoshonites with subordinate leucite-bearing rocks. Both shoshonites and the continental crust that we find on either side of the area where plates are converging, are interpreted as an evidence that this arc is at a senile evolution stage. On the whole the magma should derive from upper mantle [7] or, with reference to shoshonitic association, by contamination of crustal material or lower crust anatexis [15].

We must point out a certain chemical affinity between the Eolian Islands and the area under consideration in Campania. In the latter, where very recent volcanic activity took place (Ischia, Phlegraean Fields, Vesuvius), geophysical data do not show any plate subduction; further, geological data show (see 7) that on the whole the volcanic activity is well correlated with horst and graben structures.

9) At this moment one must put himself very important questions:

a) Can this calc-alkaline-potassic volcanic sequence be found also in areas subjected to a tensional regime involving large vertical movements? If so, this suite, therefore, should not be an index of a subduction environment.

b) Have the magmas of this calc-alkaline-potassic volcanic sequence been generated from a subducted plate? In this case the magmas should have been formed during the Miocene compressive stages, and erupted later in the following Plio-Quaternary tensional phase. These products of paleosubduction environment are not to be taken, obviously, as tracers of the present tectonic setting.

REFERENCES

[1] Alessio M., Bella F., Belluomini G., Cortesi C., Improta S., Turi B., *University of Rome carbon-14 dates IX*, Radiocarbon, **13**, pp. 395-411 (1971).

[2] Alessio M., Bella F., Belluomini G., Calderoni G., Cortesi C., Improta S., Turi B., *University of Rome carbon-14 dates X*, Radiocarbon, **15**, pp. 165-178 (1973).

[3] Alessio M., Bella F., Belluomini G., Calderoni G., Cortesi C., Improta S., Turi B., *University of Rome carbon-14 dates XII*, Radiocarbon, **16**, pp. 358-367 (1974).

[4] Amadei G., Maino A., Tribalto G., *Risultato delle misure gravimetriche di raffinamento effettuate nei Campi Flegrei (Napoli)*, Boll. Serv. Geol. d'It., **92**, pp. 73-85 (1971).

[5] ARAÑA V., VEGAS R., *Plate tectonics and volcanism in the Gibraltar arc*, Tectonophysics, **24**, pp, 197-212 (1974).

[6] BARBERI F., BORSI S., FERRARA G., INNOCENTI F., *Contributo alla conoscenza vulcanologica e magmatologica delle isole dell'Arcipelago Pontino*, Mem. Soc. Geol. It., **6**, pp. 581-606 (1967).

[7] BARBERI F., FERRARA G., INNOCENTI F., KELLER J., VILLARI L., *Evolution of Eolian arc volcanism (Southern Tyrrhenian Sea)*, Earth Planet. Sci. Lett., **21**, pp. 269-276 (1974).

[8] BONATTI S., FRANZINI M., *Metodo per la determinazione dei plagioclasi di alta e bassa temperatura alla piattaforma di Fedoroff*, Per. Mineral., anno 30, pp. 67-79 (1961).

[9] BROWN G. M., *Mineralogy of Basaltic Rocks*, in « Basalts » the Poldervaart Treatise on Rocks of Basaltic Composition, J. Wiley & Sons, New York, London, Sydney, **1**, pp. 103-162 (1968).

[10] BURRI C., PARKER R. L., WENK E., *Die optische Orientierung der Plagioklase*, Birkäuser Verlag, Basel and Stuttgart (1967).

[11] CAMELI G. M., PUXEDDU M., RENDINA M., ROSSI A., SQUARCI P., TAFFI L., *Geothermal research in western Campania (Southern Italy): geological and geophysical results*, Acta II Geothermal Symposium, St. Francisco. In press (1975).

[12] CARRARA E., IACOBUCCI F., PINNA E., RAPOLLA A., *Gravity and magnetic survey of the Campanian volcanic area, S. Italy*, Boll. Geol. Teor. e Appl., **15**, n. 57, pp. 39-51 (1973).

[13] D'ARGENIO B., PESCATORE T., SCANDONE P., *Schema geologico dell'Appennino Meridionale (Campania e Lucania)*, Att. Acc. Naz. Lincei, quad. 183, pp. 49-72 (1973).

[14] DEER W. A., HOWIE R. A., ZUSSMANN J., *Rock-forming minerals*, Longmans, **2**, p. 17 (1963).

[15] DEUTSCH S., DE WINTER J., GIJBELS R., HERTOGEN J., KLERKS J., PICHLER H., *Comments on « Evolution of Eolian arc volcanism (Southern Tyrrhenian Sea) »*, Earth. Planet. Sci. Lett., **23**, pp. 297-303 (1974).

[16] DI GIROLAMO P., *Piroclastiti stratificate riferibili al 2° periodo flegreo nella Pianura Campana tra il Volturno e Napoli*, Per. Mineral., anno 37, n. 1, pp. 341-371 (1968).

[17] DI GIROLAMO P., *Differenziazione gravitativa e curve isochimiche nella « Ignimbrite Campana » (« Tufo grigio campano » Auct.)*, Rend. Soc. It. Min. e Petr., **26**, fasc. 2, pp. 547-588 (1970).

[18] DI GIROLAMO P., KELLER J., *Zur stellung des Grauen Campanischen Tuffs innerhalb des quartären Vulkanismus Campaniens*, Ber. Naturf. Ges. Freiburg i. Br. **61-62**, pp. 85-92 (1971-72).

[19] DI GIROLAMO P., STANZIONE D., *Lineamenti geologici e petrologici dell'isola di Procida*, Rend. Soc. It. Min. e Petr., **29**, n. 1, pp. 81-125 (1973).

[20] DI GIROLAMO P., ROLANDI G., STANZIONE D., *L'eruzione di pomici a letto dell'Ignimbrite Campana (« Tufo Grigio Campano » Auct.)*, Per. Mineral., anno 42, n. 3, pp. 439-469 (1973).

[21] DI GIROLAMO P., ROLANDI G., *Vulcanismo sottomarino latitebasaltico-latitico (serie potassica) nel Canale d'Ischia (Campania)*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., **42** (1975).

[22] DI NOCERA S., ORTOLANI F., TORRE M., *La tettonica messiniana nell'Appennino meridionale*, Boll. Soc. Natur. in Napoli, **84**. In press.

[23] ELTER P., GIGLIA G., TONGIORGI M., TREVISAN L., *Tensional and compressional areas in the recent (Tortonian to recent) evolution of the Northern Apennines*, Boll. Geof. Teor. e Appl., **17**, pp. 3-18 (1975).

[24] FINETTI I., MORELLI C., *Esplorazione sismica a riflessione dei golfi di Napoli e Pozzuoli*, Boll. Geof. Teor. Appl., **16**, pp. 175-222 (1974).

[25] GUNN B. M., *Systematic Petrochemical Differences in Andesite Suites*, Bull. Volc., **38**, n. 2, pp. 481-490 (1974).

[26] IPPOLITO F., ORTOLANI F., RUSSO M., *Struttura marginale tirrenica dell'Appennino Campano: reinterpretazione di dati di antiche ricerche di idrocarburi*, Mem. Soc. Geol. It., **12**, pp. 227-250 (1973).

[27] JAKES P., WHITE A. J. R., *Maior and Trace Element Abundances in Volcanic Rocks of Orogenic Areas*, Geol. Soc. of Am. Bull., **83**, pp. 29-40 (1972).

[28] KUNO H., *Differentiation of Basalt Magmas*, in « Basalts » the Poldervaart treatise on Rocks of Basaltic Composition, J. Wiley & Sons, New York, London, Sydney, **2**, pp. 623-688 (1968).

[29] LOCARDI E., FUNICIELLO R., LOMBARDI G., PAROTTO M., *The main volcanic groups of Latium (Italy): relation between structural evolution and petrogenesis*, Guidebook for Internaz. coll. of planct. geol. Rome (1975).

[30] OLIVERI DEL CASTILLO A., *Considerazioni gravimetriche sul bacino eruttivo e sedimentario campano (anomalie residue di ordine n−1)*, Annali Osserv. Vesuv., **8**, s. 6 (1966).

[31] PESCATORE T., ORTOLANI F., *Schema tettonico dell'Appennino Campano-Lucano*, Boll. Soc. Geol. It., **92**, pp. 453-472 (1973).

[32] RITTMANN A., *The Probable Origin of High-alumina Basalts*, Bull. Volc., **34**, n. 2, pp. 414-420 (1970).

[33] RITTMANN A., *Stable Mineral Assemblages of Igneous Rocks*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).

[34] STRECKEISEN A. L., *Classification and nomenclature of Igneous Rocks*, N. Jb. Miner. Abb., **107**, pp. 144-240 (1967).

[35] TAYLOR S. R., WHITE A. J. R., *Trace element abundances in andesites*, Bull. Volc., **29**, pp. 177-194 (1966).

[36] TAYLOR S. R., *Geochemistry of Andesites*, in « Origin and distribution of the elements », Pergamon Press, pp. 559-583 (1968).

[37] TAYLOR S. R., CAPP A. C., GRAHAM A. L., BLAKE D. H., *Trace element abundances in andesites II, Saipan, Bougainville and Fiji*, Contr. Mineral. and Petrol., **23**, pp. 1-26 (1969).

[38] TAYLOR H. P. Jr., TURI B., *High-^{18}O Igneous Rocks from the Tuscan Magmatic Province, Italy*, Contrib. Mineral. Petrol., **55**, pp. 33-54 (1976).

[39] VOLLMER R., *Rb-Sr and U-Th-Pb sistematics of alkaline rocks: the alkaline rocks from Italy*, Geoc. Cosmoc. Acta, **40**, pp. 283-295 (1976).

[40] WILKINSON J. F. G., *The Petrology of Some Vitrophyric Calc-Alkaline Volcanics from the Carboniferous of New South Wales*, Journ. of Petrol., **12**, pp. 587-619 (1971).

This paper has been approved for pubblication by Professors A. Scherillo, G. Imbò and R. Sersale, members of the ad hoc Academic Editorial Board.

Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche

Nota II - Leganti con rapporto scoria/clinker variabile, stagionati a vapore *

Nota di GIUSEPPE MASCOLO, ALFONSO NASTRO e VITTORIO SABATELLI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 7 febbraio 1976)

RIASSUNTO. — Gli Autori riferiscono sui risultati della valutazione del comportamento idraulico di campioni di cemento d'alto forno confezionati con scorie sintetiche a rapporto costante CaO/SiO_2, e contenuto di MgO, fino al 20 %, stagionati in condizioni idrotermali.

Viene confermata l'influenza positiva dell'ossido di magnesio della scoria sul comportamento idraulico dei relativi cementi, per valori di MgO compresi fra 5 e 15 %, così come già rilevato a seguito di stagionatura a temperatura ambiente.

Viene altresì posto in luce che il comportamento idraulico della serie di cementi d'alto forno contenenti il 30 % di scoria ed il 70 % di clinker, è poco influenzato dal contenuto di MgO della scoria e pertanto paragonabile a quello di un normale cemento Portland. Viene anche sottolineato che il comportamento idraulico di malte confezionate con clinker, scorie contenenti il 5 ed il 10 % di MgO ed inerte, risulta superiore a quello delle malte confezionate con solo clinker ed inerte, anche per elevati valori del rapporto scoria/clinker.

SUMMARY. — The effect of MgO content on the compressive strenghts of Portland slag-cements stored in hydrothermal conditions, has been investigated.

A Portland clinker was mixed, in different ratios, with synthetic slags containing 10 % Al_2O_3, variabile amount of MgO (up to 20 %) and with $CaO/SiO_2 = 1.4$.

Higher compressive strenghts have been obtained with Portland slag cements prepared with slags having 5 ÷ 15 % MgO content.

Portland slag cements containing 30 % of slag shows compressive strenghts to be not dependent from the slag composition.

The hydraulic behaviour of Portland-slag cements obtained utilizing slags having 5 and 10 MgO content, clinker and sand, is better than that of the corresponding Portland cement mixed only with sand. This behaviour, besides, is indipendent from the slag/clinker ratio.

* Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

PREMESSA.

In precedenti lavori [1] e [2] si è riferito sui risultati delle ricerche rivolte a studiare l'influenza della magnesia e dell'allumina, contenute in scorie sintetiche, sull'idraulicità dei corrispondenti cementi, stagionati a temperatura ambiente. Si è rilevata altresì una relazione tra resistenze meccaniche dei cementi e comportamento alla devetrificazione delle scorie impiegate nella loro confezionatura [2].

Si è ritenuto opportuno estendere le indagini anche alla stagionatura a temperature più elevate, sottoponendo i campioni di cementi di scoria sintetica a trattamento in condizioni idrotermali (temperatura di 150°C e pressione di 10 Atm.), anche in vista della sempre più diffusa affermazione dei leganti induriti in tali condizioni [3], [4], [5].

L'indagine ha comportato lo studio dell'influenza dell'ossido di magnesio contenuto nelle scorie sulle proprietà leganti dei cementi d'alto forno con esse confezionati, nonché lo studio dell'influenza del rapporto scoria/clinker sulle proprietà meccaniche dei relativi cementi. È noto infatti che i cementi contenenti fino al 50 ÷ 60 % di scoria sono caratterizzati da un processo di idratazione, a temperatura ambiente, simile a quello di un cemento Portland; inoltre le migliori prestazioni meccaniche vengono esibite da cementi contenenti il 40 % di scoria [6].

PARTE SPERIMENTALE.

Sono stati preparati cinque campioni di scoria sintetica a tenore di MgO variabile da 0 al 20 % ed a rapporto molare CaO/SiO_2 costante e pari a 1,4. La loro composizione è riportata nella tab. I, mentre per le modalità di preparazione si rimanda alla precedente Nota [1].

TABELLA I

Composizione delle scorie sintetiche (% in peso)

Campione	CaO	SiO_2	Al_2O_3	MgO	Fe_2O_3
1	50,4	38,6	10,0	—	1,0
2	47,8	36,6	9,6	5,0	1,0
3	45,3	34,6	9,1	10,0	1,0
4	42,8	32,6	8,6	15,0	1,0
5	40,0	30,0	9,0	20,0	1,0

È stato adoperato un clinker di finezza pari a 3.800 Blaine e di composizione riportata in Tab. II.

TABELLA II

Composizione chimica del clinker impiegato (% in peso)

SiO_2	= 22,92 %	C_3S *	= 52,30 %
Fe_2O_3	= 2,60 %	C_2S	= 26,27 %
Mn_3O_4	= 0,15 %	C_3A	= 8,93 %
Al_2O_3	= 5,13 %	C_4AF	= 8,39 %
CaO	= 65,94 %	CaO libera	= 0,26 %
MgO	= 1,40 %	p.F.	= 0,16 %
SO_3	= 0,85 %		

* $C = CaO$; $S = SiO_2$; $A = Al_2O_3$; $F = Fe_2O_3$.

Con i suddetti prodotti sono state preparate: una serie di paste costituite dal 30% di clinker e 70% di scoria, e tre serie di malte per le quali, a parità di rapporto $\frac{\text{clinker} + \text{scoria}}{\text{sabbia}} = 1$ veniva fatto variare il rapporto $\frac{\text{scoria} + \text{clinker}}{\text{clinker}}$ secondo i valori 0,3; 0,5; 0,7; rispettivamente. È stato inoltre confezionato un campione di riferimento costituito da malta di solo clinker e sabbia con rapporto $\frac{\text{clinker}}{\text{sabbia}} = 1$. La sabbia adoperata rispettava le prescrizioni riportate nelle Norme sui requisiti di accettazione e modalità di prova dei cementi [7].

I componenti dell'impasto, opportunamente omogeneizzati ad umido, sono stati sottoposti a formatura sotto una pressione di 400 Kg/cm^2. I provini cilindrici, di diametro pari 2,5 cm e di altezza di 5 cm circa, sono stati successivamente stagionati in autoclave in ambiente saturo di vapor d'acqua alla temperatura di 175°C, per la durata di 24 ore, indi sottoposti alla prova di resistenza a compressione. I dati ottenuti, se anche non eseguiti su provini normalizzati, devono tuttavia ritenersi validi per un paragone omogeneo.

RISULTATI E DISCUSSIONE.

Nel grafico in Fig. 1 sono riportati i valori delle resistenze meccaniche relative a due serie di cementi d'alto forno, in funzione del contenuto di MgO delle scorie; la curva *a* corrisponde a provini con-

fezionati con scoria e clinker, la curva *b* a provini confezionati con scoria, clinker e sabbia. In entrambi i casi il rapporto scoria/(clinker+ +sabbia) è pari a 0,7. L'esame del grafico mostra che il valore massimo di resistenza meccanica corrisponde al cemento confezionato con scoria contenente il 10 % di MgO, sia per i provini confezionati con scoria, clinker e sabbia, sia per quelli confezionati soltanto con

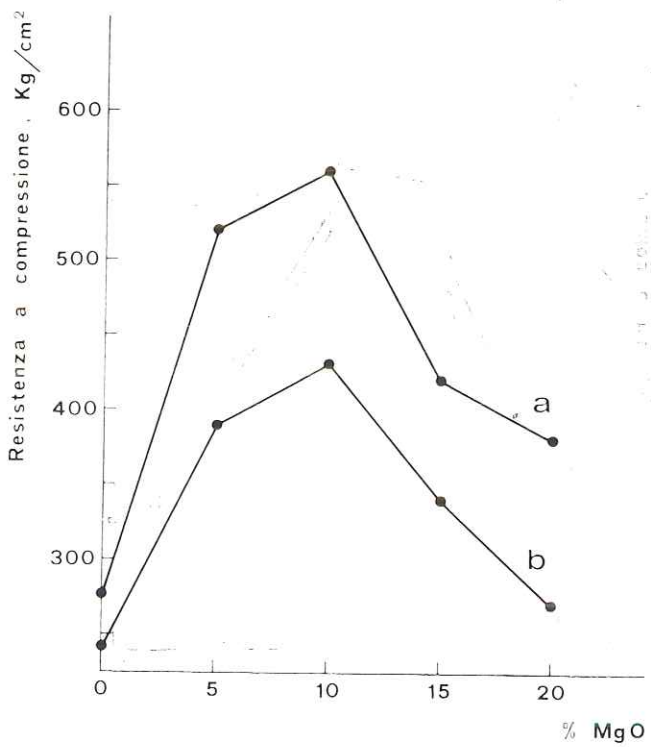


FIG. 1. - Resistenze meccaniche a compressione di cementi d'alto forno in funzione del contenuto di MgO nella scoria.

scoria e clinker. Tale risultato è in accordo con quanto già evidenziato nel caso di stagionatura a temperatura ambiente. Si rileva altresì che i campioni di cui alla curva *a* esibiscono valori delle resistenze meccaniche superiori (mediamente di $\simeq$ 100 Kg/cm^2) a quelli relativi ai campioni di cui alla curva *b*.

Nel grafico in Fig. 2 sono riportati i risultati delle prove di resistenza meccanica su tre serie di provini contenenti clinker, scoria e inerte a differente rapporto scoria/(scoria+clinker). La curva *a* si riferisce a campioni contenenti il 30 % di scoria (nella frazione legante scoria+clinker); la curva *b* si riferisce al 50 % di scoria nella

frazione legante; la curva *c* si riferisce infine al 70 % di scoria nella frazione legante; il rapporto $\frac{\text{scoria + clinker}}{\text{sabbia normale}}$ è uguale all'unità per tutte le malte.

Risalta dall'esame delle curve che i campioni confezionati con cementi contenenti il 30 % di scoria non presentano variazioni signi-

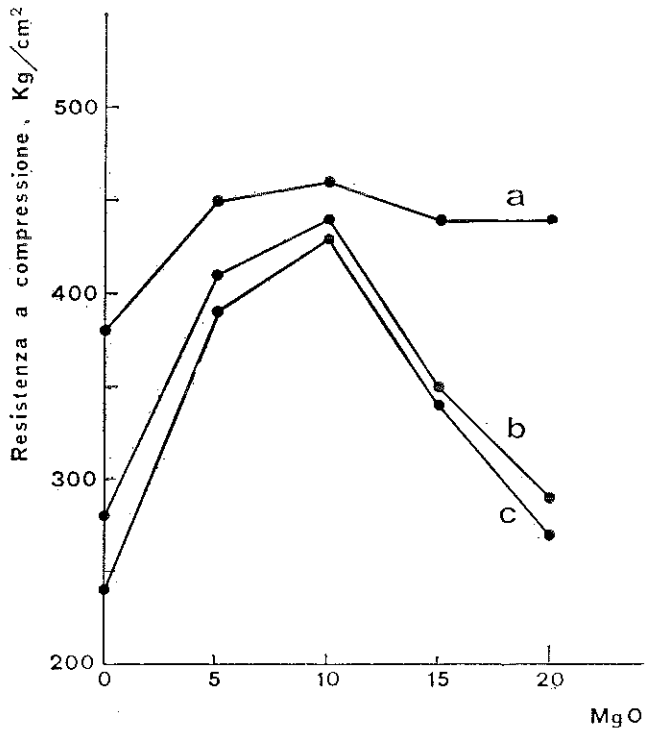


FIG. 2. - Resistenze meccaniche a compressione di cementi d'alto forno in funzione del contenuto di MgO nella scoria, per diversi contenuti di scoria.

ficative dei valori di resistenza meccanica in funzione della composizione delle scorie impiegate e che pertanto i cementi d'alto forno contenenti il 30 % delle scorie in esame, si comportano in modo analogo al Portland.

I provini confezionati con cementi contenenti il 50 ed il 70 % di scoria, rispettivamente, presentano invece valori di resistenza meccanica influenzati dalla composizione della scoria. I valori più alti si rilevano comunque per tutti i provini confezionati con scorie a tenore di MgO intorno al 10 %.

Per mettere meglio in evidenza l'influenza del tenore dell'MgO delle scorie sul comportamento meccanico, si riportano nel grafico

in Fig. 3 i valori delle resistenze in funzione del rapporto scoria/(scoria+clinker), per i differenti campioni a contenuto fisso di MgO, confrontati con il valore della resistenza meccanica di un campione di solo clinker e sabbia, stagionato nelle stesse condizioni.

Si rileva che campioni confezionati con scorie contenenti il 5 e il 10 % di MgO presentano valori delle resistenze meccaniche sempre

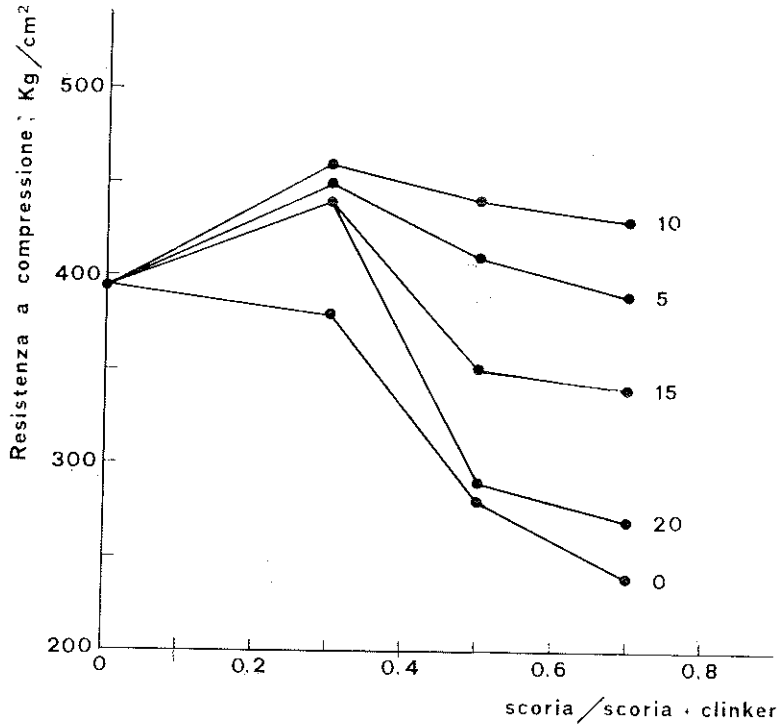


FIG. 3. - Resistenze meccaniche di cementi d'alto forno in funzione del rapporto $\frac{\text{scoria + clinker}}{\text{scoria}}$ per diversi tenori di MgO nella scoria.

superiori a quello del campione privo di scoria, anche per alti valori del rapporto scoria/(scoria + clinker). I campioni confezionati con scorie prive di MgO o contenenti tenori di MgO superiori al 15 %, presentano resistenze meccaniche che diminuiscono sensibilmente all'aumentare del rapporto scoria/(scoria + clinker).

CONCLUSIONI.

I risultati confermano quanto già è stato evidenziato nel corso di un precedente lavoro [1] e cioè: l'influenza dell'MgO sul com-

portamento meccanico risulta positiva per cementi confezionati con scorie che contengono un tenore compreso fra il 5 ed il 15 %.

In particolare, cementi confezionati con scorie contenenti il 5 e il 10 % di MgO esibiscono resistenze meccaniche superiori a quelle di un cemento Portland. Tale constatazione appare vieppiù interessante se si tien conto che le resistenze meccaniche risultano superiori a quelli di un cemento Portland anche per valori elevati del rapporto scoria/(scoria + clinker).

Istituto di Chimica Applicata - Facoltà d'Ingegneria - Piazzale Tecchio - 80125 Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] MASCOLO G., BISACCIA G. e SABATELLI V., *Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche.* Nota 1ª: *Scorie con rapporto CaO/SiO_2 fisso,* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, IV, XLII, 1975.

[2] SABATELLI V., NASTRO A. e MASCOLO G., *Sulla relazione fra comportamento alla devetrificazione ed attività idraulica di scorie d'alto forno sintetiche,* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli, IV, XLII, 1975.

[3] ANILOVA T. N., SHESTOPEROV S. V., *Slag Portland Cement Properties under Hot-steam treatment,* Beton i thelezobeton, **10**, 1969.

[4] POPKO V. N., *Slag Portland Cement Hardening at steaming,* Tsement, **1**, pp. 7-9, 1967.

[5] SATARIN V. I., SYRKIN Y. M., SHATOKHINA L. P., KHOLODNY A. G., LYSUNKINA D. R., *Fundamentals of production and some aspects of super rapid-hardening slag Portland cement,* Collection. Tekhnologiya, Suoistua Spetsialnvkl Tsementou, pp. 314 323, Stroyizdat 1967.

[6] CESARENI C. e FRIGIONE G., *Alcune ricerche sulle proprietà fisiche delle paste indurite di cemento Portland contenenti loppe granulate di alto forno,* L'industria Ital. del Cemento, **3**, 14 (1966).

[7] *Norme sui requisiti di accettazione e modalità di prova dei cementi,* D.M. 3-6-1968, pubblicato sulla G.U. n. 180 del 17-7-1968.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. Sersale, M. Covello e A. Scherillo.

Inquinamento atmosferico da radicali liberi

Nota di ELISEO RAMUNDO *
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 7 febbraio 1976)

RIASSUNTO. — Fra gli inquinanti dell'atmosfera vengono presi in considerazione i radicali liberi indicandone sommariamente le fonti, la loro chimica, i danni che possono provocare ed i possibili sistemi di prevenzione.

SUMMARY. — This paper is concerned with free radicals as atmospheric pollutants; their sources, their chemistry, the damage coming from them and their probable methods of prevention are briefly indicated.

La degradazione dell'ambiente naturale quale problema di conservazione di risorse e beni collettivi condizionanti la sopravvivenza stessa dell'uomo, a causa degli interessi politici, sociali ed economici della nostra comunità che coinvolge, è un argomento di tale scottante attualità da essere oggi al centro dell'interesse generale.

L'inquinamento è vecchio quanto il mondo. Tuttavia la Natura ha sempre trovato il modo di ristabilire l'equilibrio ingaggiando un'ardua lotta con l'Uomo che, innegabilmente, sin dalla sua venuta sulla terra, ha iniziato un processo di varie modificazioni dell'ambiente circostante prevalentemente in senso negativo.

Oggi la millenaria lotta tra l'Uomo e la Natura è entrata, ormai, in una fase critica. Infatti, l'aria, l'acqua ed il suolo sono attualmente esposti a così innumerevoli alterazioni delle loro caratteristiche da essere sempre più allontanati dal loro stato di normalità e tali da turbare il benessere della collettività.

Il pericolo insito nell'inquinamento fu chiaramente avvertito dai nostri avi i quali, come s'apprende dal « Fumifugium » di John Evelyn del 1661, avevano, già da allora, riconosciuto le proprietà dannose de-

* Del Gruppo Ecologico della Facoltà di Farmacia. Titolare di un contratto presso la Facoltà di Farmacia, Università di Napoli.

rivanti dalla combustione del carbone e s'adoperarono in ogni modo per ridurne le gravi conseguenze.

Nonostante ciò, molto tardivamente si ci è risvegliati al problema dell'inquinamento in quanto, solamente agli inizi della rivoluzione industriale, esso cominciò ad assumere una gravità tale da imporsi all'attenzione di tutti. L'aumento del benessere materiale verificatosi in molte nazioni a causa del progresso tecnologico ha portato come diretta conseguenza all'accrescimento della popolazione e la sua concentrazione nelle zone più idonee allo sviluppo industriale. Opportunamente il Klein sottolinea l'effetto del passaggio da una civiltà agraria, che durava dall'epoca neolitica, ad una civiltà industriale dipendente dai combustibili fossili anche sotto gli aspetti agricoli.

L'aumento, infine, del tenore di vita ha portato ad un incremento dei consumi « pro-capite » provocando, così, l'accrescimento delle quantità di sostanze di rifiuto che debbono essere smaltite.

Come il Betetto afferma, oggi « acqua, aria e terra, i mezzi essenziali della nostra vita, vanno sempre più inquinandosi, facendosi portatori di malattie, di rovina, di morte » [1].

A tutti è noto come l'immissione nell'aria di polveri, gas o vapori provenienti da operazioni industriali o da sorgenti di combustione, o in generale, da tutte quelle fonti che possono venir ascritte all'attività quotidiana dell'uomo, siano alla base dell'inquinamento atmosferico.

Usualmente si considerano come inquinanti dell'atmosfera quelle sostanze presenti in concentrazione sufficiente a produrre effetti deleteri sugli uomini, sulla vegetazione e sui materiali.

Volendo classificare i così detti pollutanti è conveniente considerare due gruppi generali:

— quelli emessi direttamente da sorgenti identificabili; (*inquinanti primari*);

— quelli prodotti nell'aria per interazione tra due o più pollutanti primari o per reazione con i costituenti normali dell'atmosfera con o senza fotoattivazione; (*inquinanti secondari*).

Secondo i dati in nostro possesso, cinque tipi di sostanze, conosciute come inquinanti primari, sono responsabili del più del 90 % dell'inquinamento atmosferico. Esse sono:

Ossido di carbonio	(CO)	Ossidi d'azoto	(NO_x)
Idrocarburi	(HC)	Particelle	(part.)
Ossidi di zolfo	(SO_x)		

Infatti la nostra attuale civiltà dei consumi ha fra le sue caratteristiche principali quella di richiedere sempre più diffusamente e largamente dell'energia termica, sia essa prodotta dall'abbruciamento

di combustibili solidi, liquidi o gassosi, non solo per quanto compete alla produzione e utilizzazione all'interno dell'abitazione dell'uomo (riscaldamento, condizionamento, ecc.), ma anche per quanto concerne le cosiddette centrali termiche. Anche se con questi aspetti differenti, passando ad esaminare più da vicino quali sono gli inquinanti propri degli impianti termici, si può facilmente constatare che tutti, indifferentemente, chi più chi meno, immettono nell'atmosfera circostante ceneri, anidride solforosa, ossidi d'azoto, ossidi di carbonio e fumo.

Rivestono particolare importanza tra questi gli ossidi d'azoto ed il fumo. Ossido d'azoto e biossido, prodotti dalla combustione, si trovano in quantità variabili, massime negli impianti a gas ed a olio combustibile, minime negli impianti termici per incenerimento. Il fumo, invece, è la tipica forma dell'inquinamento atmosferico che più colpisce l'uomo della strada per la sua visibilità. Formato da particelle per lo più submicroniche e di scarso peso, possiede un grande potere assorbente della luce solare e una rilevante concentrazione di composti organici ad azione cancerogena.

Accanto alle sorgenti di inquinamento atmosferico costituite da impianti termici fissi, il traffico motorizzato è notoriamente il secondo grande imputato. Un veicolo a motore a combustione interna può emettere inquinanti atmosferici in vari modi e cioè:

— lo scarico del motore;
— i gas di sfiato del motore, cioè il cosiddetto « blow-by »;
— la evaporazione del combustibile dal carburatore;
— l'evaporazione del combustibile dal serbatoio.

Mentre i due ultimi sono simili per la natura degli inquinanti emessi (vapori del combustibile e quindi idrocarburi), i primi due sono piuttosto diversi, specie il primo che rappresenta, senza dubbio, la principale sorgente di inquinamento dell'aria del veicolo. Infatti tra i prodotti di scarico del motore si possono trovare, assieme all'anidride carbonica, l'ossido di carbonio, l'idrogeno, l'azoto, l'ossigeno e l'acqua.

Oltre che all'ossido di carbonio, grande attenzione viene oggi data agli ossidi d'azoto prodotti dal motore. Si tratta, per lo più, dell'ossido nitrico (NO) che facilmente può convertirsi in biossido (NO_2).

Accanto ai prodotti sopra ricordati lo scarico contiene un gran numero di idrocarburi; la classe di composti più complessa. Essi provengono sia dall'emissione degli idrocarburi del combustibile sia dalla emissione di idrocarburi che si producono durante la combustione. Mediante l'uso della analisi gas-cromatografica sono stati identificati numerosissimi idrocarburi nei gas di scarico, fra i quali i più importanti sarebbero: metano, etano, etilene, acetilene, benzene, o-, m-, p-xilene, toluolo, i-butano, ecc.

Vengono pure scaricati dei prodotti di ossidazione parziale (aldeidi, chetoni, alcooli, esteri, derivati acidi) in piccole quantità, ma causanti odori sgradevoli e dotati di alta reattività fotochimica.

Un'altra causa dell'inquinamento atmosferico, più eterogeneo e di più arduo studio, è quello di origine industriale. Dai processi svolgentisi nelle industrie possono liberarsi quantità e qualità ben definite di gas e vapori: anidride solforosa, composti di azoto, idrocarburi, alogenati vari, solventi organici, ecc.; prodotti anche questi molto spesso associati al problema degli odori molesti e dotati di alta tossicità.

Oggigiorno studi di laboratorio hanno evidenziato che la maggior parte delle sostanze immesse nell'atmosfera è soggetta ad una grande varietà di trasformazioni sia fisiche che chimiche portanti alla formazione di prodotti estremamente nocivi o, da quest'ultimi, a prodotti innocui. Queste sostanze, una volta nell'aria, si mescolano con i naturali componenti dell'atmosfera e possono anche rimanervi per un considerevole tempo. Durante questa permanenza, le molecole non molto stabili possono subire riarrangiamenti o reagire con altre sostanze. Sia gli inquinanti primari che quelli secondari sono, inoltre, esposti a ulteriori cambiamenti dovuti a processi ossidativi e a reazioni fotochimiche.

I primi studi accertanti la formazione di prodotti stabili nell'atmosfera furono condotti nell'area urbana di Los Angeles. Questi studi hanno mostrato che ossidi d'azoto, l'anidride solforosa e, in particolare, gli idrocarburi sono i principali responsabili di dette trasformazioni ossidative in quanto fu osservato un considerevole aumento di prodotti carbonilici (aldeidi) e di acidi organici a spese delle sostanze idrocarburiche. Ulteriori indagini, usando la spettroscopia di massa, rilevavano un analogo comportamento chimico da parte delle sostanze di tipo olefinico.

Un importante aspetto, però, delle reazioni atmosferiche è che esse avvengono mediante la formazione di radicali liberi.

È noto come la scissione omolitica di un legame covalente generi delle entità chimiche dotate di un elettrone spaiato, cioè dei radicali:

$$\geqslant C : C \leqslant \longrightarrow \geqslant C \cdot + \cdot C \leqslant$$

Siamo anche a conoscenza di come questi radicali facciano parte di reazioni manifestantesi largamente in fase gassosa e, che una volta iniziata, una reazione radicalica procede spesso con grandissima rapidità, grazie allo stabilirsi di rapide reazioni a catena. Queste traggono origine dalla capacità del primo radicale formatosi di generarne un altro per reazione con una molecola neutra; il nuovo radicale è a

sua volta in grado di ripetere il processo, in modo che la reazione continui. Numerosi sono i metodi mediante i quali possono ottenersi radicali; i più importanti sono costituiti dalla scissione termica e fotochimica dei legami, da reazioni di ossidoriduzione operate da ioni inorganici, con trasferimento di un singolo elettrone, e, infine, da elettrolisi.

Ora le sostanze inquinanti che possono dar luogo a reazioni coinvolgenti la formazione di radicali liberi sono, come già accennato, composti di natura organica insieme con gli ossidi d'azoto risultanti dall'uso di benzine a base di idrocarburi e componenti principali dei gas di scarico delle auto. Infatti i lavori di Haagen-Smit e collaboratori hanno dimostrato come possono prodursi ossidanti, tra cui l'ozono, in laboratorio, per irradiazione di basse concentrazioni di ossido di azoto e di una grande varietà di composti organici. Analoghi risultati sono anche riportati nei lavori di Fox e di Schuck [2, 3, 4].

È logico come dette reazioni fotochimiche debbano dipendere da molteplici ed importanti fattori. Una reazione fotochimica inizia con l'assorbimento di una radiazione. Infatti il più basso strato atmosferico riceve radiazioni visibili ed ultraviolette durante tutto il giorno non solo direttamente dal sole, ma anche dal cielo e, mediante il fenomeno della riflessione, dalla superficie della terra. Detta radiazione è dipendente dalla radiazione solare fuori dall'atmosfera, dall'angolo di zenith, dalla natura e dalla quantità di dispersione, dalla diffusione, dall'assorbimento di questa radiazione da parte degli strati dall'atmosfera. Inoltre molta rilevanza hanno anche i coefficienti di assorbimento delle sostanze assorbenti la radiazione in questione, la loro concentrazione e, chiaramente, la quantità e la natura della dispersione e diffusione della radiazione all'interno dello strato inquinato.

La dinamica dell'atmosfera interviene anche sulla presenza degli inquinanti primari e sulla formazione dei secondari mediante vari meccanismi di autodepurazione. Basti ricordare, al riguardo, l'influenza dei nuclei di condensazione naturali ed artificiali, quella dei moti orizzontali e verticali, soprattutto questi ultimi, la cui presenza esplica un ruolo assai importante nel prevenire pericolosi accumuli locali di inquinanti. Talvolta le inversioni di temperatura possono provocare seri problemi di inquinamento non perché rappresentino essi stessi una fonte di inquinamento, ma perché causano l'accumulo di inquinanti negli strati più bassi dell'atmosfera, invece di disperderli. Gli inquinanti vengono così intrappolati nell'aria più bassa, non in circolazione, rimanendo in tale situazione per giorni finché non cambiano le condizioni del tempo e si rompe lo strato di inversione. Chiaramente questo stato porta ad un aumento considerevole dell'attività fotochimica. Lo strato d'inversione è di solito caldo, secco e privo di nubi, e così

trasmette la quantità massima di luce solare, che interagisce fotochimicamente con le sostanze inquinanti intrappolate per formare grandi quantità di smog. Così, di solito, alti livelli di smog sono associati con episodi di inquinamento atmosferico coinvolgenti inversioni di temperatura.

Avvenuto l'assorbimento della radiazione solare, o meglio, l'assorbimento di un fotone, la molecola assorbente viene a trovarsi in uno stato così detto eccitato, con un'energia maggiore di quella corrispondente allo stato normale ed uguale a quella del fotone che è stato assorbito. L'esperienza ci ha mostrato come la luce che possa produrre soltanto dei moti vibrazionali e rotazionali nelle molecole assorbenti sia inattiva a differenza di quella assorbita che è in grado di produrre transizioni elettroniche.

Le molecole eccitate elettronicamente possono dar luogo a vari fenomeni. Possono dissociarsi, reagire con altre molecole mediante collisioni, possono riarrangiarsi, infine, ritornare allo stato di non eccitazione. Alcune di queste possibilità ad eccezione della fluorescenza o della disattivazione per collisione possono essere utili al primo passaggio in una reazione fotochimica. Le molecole eccitate possono reagire interamente mediante un singolo processo primario o possono suddividersi in due o più processi competitivi, includendo la fluorescenza o la disattivazione. La somma delle velocità in tutti questi processi competitivi risulta eguale alla velocità di assorbimento.

Un processo primario fotochimico può produrre molecole stabili direttamente, o può dar luogo a sostanze instabili che danno origine ad ulteriori reazioni. Nella gran maggioranza delle reazioni fotochimiche si è trovato che il processo primario consiste nella dissociazione della molecola assorbente in radicali liberi o atomi. Questi radicali liberi o atomi prendono parte in reazioni secondarie. Queste reazioni possono portare a prodotti stabili o, ancora, a altre reazioni.

Per concludere questo rapido quadro degli aspetti più significativi del fenomeno delle reazioni fotochimiche, si può, senza dubbio, in prima approssimazione, raggruppare tutti i fattori occorrenti nella seguente formula:

$$S = f\left(P \times E \times T \times \frac{1}{W} \times \frac{1}{I}\right)$$

dove: S — intensità dello « smog »;
P — concentrazione dell'inquinante;
E — intensità dell'energia radiante di appropriata lambda;
W — velocità del vento;
I — inversione termica.

Da quanto detto precedentemente risulta evidente come una importante sorgente di radicali liberi nell'aria inquinata sia la dissociazione fotochimica delle molecole coinvolte nell'assorbimento della radiazione solare. Durante i periodi di formazione dello smog fotochimico possono formarsi quattro tipi di radicali: alchil, formil, acil e alcossiradicali a velocità dell'ordine di 1 a 10 pphm hr^{-1}. Atomi di idrogeno e radicali idrossilici possono anche venir fuori mediante processi di dissociazione, i primi probabilmente a velocità nel campo di 1 a 10 pphm hr^{-1}, i secondi, invece, ad una velocità al di sotto di circa 1 pphm hr^{-1}.

La formazione di radicali liberi può indicarsi come segue:

$$RCHO + h\nu \longrightarrow R^{\cdot} + H\dot{C}O$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\!\!\diagdown\!\!\diagup C = O + h\nu \longrightarrow R^{\cdot} + R\dot{C}O$$

$$H_2O_2 + h\nu \longrightarrow 2\,\dot{O}H$$

$$RONO + h\nu \begin{cases} \nearrow RO^{\cdot} + NO \\ \searrow R^{\cdot} + NO_2 \end{cases}$$

$$HNO_2 + h\nu \longrightarrow \dot{O}H + NO \quad \text{oppure} \quad H + NO_2$$

Inoltre si è accertato come reazioni secondarie tra molecole di ozono e olefine possano portare alla formazione di grandi quantità di alchil e formil o acilradicali.

$$O_3 + \diagdown C = C \diagup \longrightarrow R^{\cdot}, RO^{\cdot}, RCO^{\cdot}, ROH, ROOH, R\overset{\overset{O}{\|}}{C}OOH, \text{Polimeri}$$

I radicali liberi attivi cercano, poi, di circondarsi di molecole di ossigeno, dando luogo alla formazione di radicali perossidici. L'equazione sotto riportata mostra questa reazione, in cui R potrebbe essere o un atomo di idrogeno come pure un gruppo alchilico o acilico, formante il corrispondente radicale perossidico:

$$R^{\cdot} + O_2 \longrightarrow ROO^{\cdot}$$

I radicali perossidici reagiscono, successivamente, facilmente con l'ossigeno, con gli ossidi d'azoto, con le olefine e con altri radicali per dare vita ad una grande varietà di prodotti-ozono, perossialchil e perossiacilnitrati, polimeri, alcooli, acidi, eteri e perossiacidi. Una sele-

zione di queste reazioni secondarie può sintetizzarsi nel seguente schema:

$$ROO^{\cdot} + O_2 \longrightarrow RO^{\cdot} + O_3$$

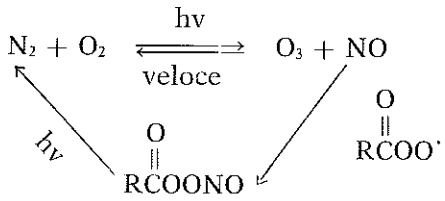
$$ROO^{\cdot} + NO \longrightarrow ROONO \longrightarrow RO^{\cdot} + NO_2$$

$$ROO^{\cdot} + \diagdown C = C \diagup \longrightarrow ROO-C-C^{\cdot} \longrightarrow \text{Polimeri}$$

$$O + O_2 \xrightarrow[+M]{} O_3 + M$$

$$O_3 + NO \longrightarrow O_2 + NO_2$$

I prodotti di dette reazioni secondarie possono nuovamente essere soggetti ad attacchi sia chimici che fotochimici. Per esempio, la decomposizione fotochimica di un perossiacilnitrito può dar luogo alla formazione di un radicale acilico e al biossido d'azoto, con un trasferimento di ossigeno dall'aria, attraverso la formazione di un radicale perossilico, al biossido d'azoto. Detti meccanismi dovrebbero contribuire alla riossidazione dell'ossido nitrico, la chiave principale nella formazione delle alte concentrazioni di ozono nelle atmosfere urbane, e possono spiegare bene il tipo di reazione a catena della formazione di detto elemento portante a concentrazioni di O_3 più abbondanti di quelle di ambedue i reagenti. Quanto detto può rappresentarsi nella maniera seguente:



I radicali, una volta formatisi, possono partecipare a tre tipi principali di reazioni: addizione, spostamento e riassestamento. A loro volta, le reazioni di riassestamento sono normalmente seguite da reazioni di addizione o di spostamento. Tra le reazioni di addizione date dai radicali possiamo ricordare quelle con gli alogeni, con gli acidi alogenidrici e la polimerizzazione vinilica; come reazioni di spostamento abbiamo l'alogenazione, l'arilazione e, molto importante, l'autoossidazione. Per i radicali sono note solo poche reazioni di riassestamento che coinvolgono quasi sempre residui arilici come gruppi migranti; anche in questi casi le migrazioni avvengono soltanto a livello

di un atomo sul quale i sostituenti sono soggetti a tensione per affollamento sterico.

Considerando più da vicino le innumerevoli reazioni date dai radicali liberi, formatisi nell'atmosfera, cominciamo con l'esaminare le possibili reazioni date dai radicali alchilici.

Questi ultimi possono facilmente reagire con l'ossigeno molecolare, con l'ozono, con altri radicali della stessa specie, con molecole di natura organica e con l'ossido d'azoto.

La rapida reazione tra i radicali alchilici e l'ossigeno porta alla formazione di radicali perossialchilici:

$$R^{\cdot} + O_2 (+ M) \longrightarrow ROO^{\cdot} (+ M)$$

Con l'ozono, come suggerito da CALVERT e HANST [5] si ha:

$$^{\cdot}CH_3 + O_3 \longrightarrow CH_3O^{\cdot} + O_2$$

I radicali alchilici reagiscono gli uni con gli altri in due diverse maniere. Essi possono combinarsi a formare delle molecole neutre:

$$R_1 \dot{C}H_2 + R_2 CH_2 \dot{C}H_2 \longrightarrow R_1 CH_2 CH_2 CH_2 R_2$$

oppure possono disproporzionarsi dando una molecola di paraffina ed un'altra di olefina:

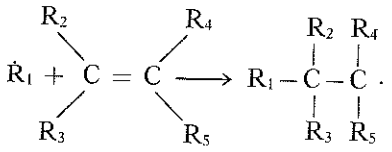
$$R_1 \dot{C}H_2 + R_2 CH_2 \dot{C}H_2 \longrightarrow R_1 CH_3 + R_2 CH = CH_2$$

Con le molecole organiche i radicali alchilici possono, anche con esse, reagire in due modi, o mediante l'estrazione di un atomo di idrogeno o addizionandosi. L'allontanamento di un atomo di idrogeno può rappresentarsi nel modo seguente:

$$R^{\cdot} + HX \longrightarrow RH + X^{\cdot}$$

È evidente che se HX è un idrocarburo paraffinico, non si avrà nessuna netta variazione nel numero dei radicali alchilici, se si eccettua una possibile variazione nel tipo di radicale risultante dalla reazione.

L'addizione si ha con molecole insature, come le olefine:



I radicali alchilici più grandi formatisi possono dar luogo a reazioni a catena con altre molecole olefiniche portanti a prodotti polimerici che, contemporaneamente, possono spezzarsi in altri radicali e nuove molecole di idrocarburi insaturi.

L'ossido d'azoto è stato frequentemente usato quale inibitore di reazioni coinvolgenti reazioni a catena in quanto l'effetto inibente è dovuto, si crede, alla capacità di neutralizzare l'entità radicalica secondo:

$$R^{\cdot} + NO \longrightarrow RNO$$

GRAY e STYLE [6] hanno anche ipotizzato una reazione di addizione tra i radicali alchilici e il biossido d'azoto a dare nitroderivati secondo la seguente reazione:

$$R^{\cdot} + NO_2 \longrightarrow RNO_2$$

per spiegare la presenza del nitrometano quale prodotto della fotolisi del nitrato di etile. Questo tipo di reazione, però, sfugge a studi quantitativi più approfonditi e non ne è conosciuto il meccanismo.

Passando alle reazioni dei radicali formilici ed acilici, essi reagiscono, analogamente ai radicali alchilici, con l'ossigeno molecolare, con altri radicali, con le molecole organiche e con l'ossido d'azoto. Inoltre sono note decomposizioni termiche.

La diretta addizione di ossigeno ai radicali formilici ed acilici, da studi condotti in laboratorio sull'ossidazione termica e fotochimica della formaldeide e dell'acetaldeide [7, 8, 9, 10], porta alla formazione di radicali perossiformilici e perossiacetilici:

$$H\dot{C}O + O_2 \longrightarrow H\dot{C}(=O)OO^{\cdot}$$

$$CH_3\dot{C}O + O_2 \longrightarrow CH_3\dot{C}(=O)OO^{\cdot}$$

A più alte temperature, le reazioni dei radicali formilici ed acilici con l'ossigeno possono dar luogo ad altre reazioni, sia direttamente o tramite la decomposizione di radicali perossilici precedentemente formatisi. Ad esempio di questa teoria si riporta la reazione

$$H\dot{C}O + O_2 \longrightarrow \dot{O}H + CO_2$$

ritenuta anche possibile dalle osservazioni condotte da MARCOTTE e NOYES [11].

Un'altra reazione dei radicali formilici con l'ossigeno,

$$H\dot{C}O + O_2 \longrightarrow H\dot{O}_2 + CO \qquad (a)$$

è stata ipotizzata da INGOLD e BRYCE [12] e da STRONG e KUTSCHKE [13] come un possibile passaggio nella serie delle reazioni che iniziano quando radicali metilici vengono prodotti in presenza di ossigeno. Ad esempio di tale ipotesi si può portare la fotolisi di una miscela iniziale di circa 82 mm di azometano e di circa 11 mm di ossigeno a 124 °C. Gli Autori precedentemente menzionati hanno trovato che un prodotto, la formaldeide, si avvicina a piuttosto basse concentrazioni mentre la velocità di formazione dell'altro prodotto, l'ossido di carbonio, aumenta col tempo. Questo comportamento potrebbe spiegare l'allontanamento di un idrogeno mediante la reazione:

$$R^{\cdot} + H_2CO \longrightarrow RH + H\dot{C}O$$

seguita, poi, dalla reazione (a).

TAYLOR e BLACET [14] nei loro studi sull'ossidazione fotochimica del biacetile, hanno proposto simili reazioni per i radicali acetilici. Le reazioni proposte sono:

$$CH_3\dot{C}O + O_2 \longrightarrow CH_3\dot{O} + CO_2$$

$$CH_3\dot{C}O + O_2 \longrightarrow CH_3O\dot{O} + CO$$

La reazione dei radicali formilici ed acilici con l'ossido d'azoto consiste, probabilmente, in una reazione d'addizione:

$$R\dot{C}O + \dot{N}O \longrightarrow R\dot{C}\overset{\overset{O}{\|}}{N}O$$

Il comportamento dei radicali acilici col biossido d'azoto dovrebbe portare alla formazione di due prodotti:

$$R\dot{C}O + NO_2 \longrightarrow R\dot{C}\overset{\overset{O}{\|}}{O}NO \quad \text{oppure} \quad R\dot{C}\overset{\overset{O}{\|}}{N}O_2$$

A tutt'oggi detto meccanismo non è ancora chiarito.

Le reazioni di decomposizione date dai radicali formilici ed acilici sono:

$$H\dot{C}O\,(+\,M) \longrightarrow H^{\cdot} + CO\,(+\,M)$$

$$R\dot{C}O\,(+\,M) \longrightarrow R^{\cdot} + CO\,(+\,M)$$

Nel caso dei radicali perossialchilici, la loro reazione con l'ossigeno porterebbe alla formazione di

$$ROO\dot{} + O_2 \longrightarrow RO^{\cdot} + O_3$$

come descritto in molti lavori per spiegare la formazione di ozono da parte di aldeidi irradiate nell'aria [15, 16, 14].

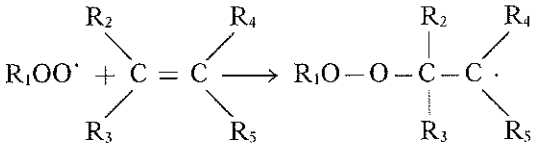
I radicali perossialchilici possono anche interagire tra loro per dare radicali alcossilici ed ossigeno molecolare:

$$ROO^{\cdot} + ROO^{\cdot} \longrightarrow 2RO^{\cdot} + O_2\,;$$

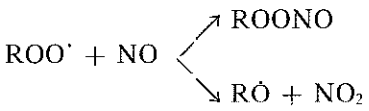
inoltre, posseggono la proprietà di estrarre un atomo di idrogeno dalle molecole organiche e di addizionarsi direttamente alle molecole olefiniche:

$$R_1OO^{\cdot} + R_2H \longrightarrow R_1OOH + R_2^{\cdot}$$

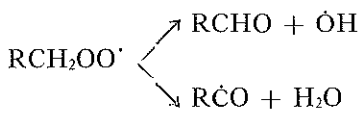
$$R_1OO^{\cdot} + R_2CHO \longrightarrow R_1OOH + R_2\dot{C}O$$



Detti radicali interagiscono anche con l'ossido d'azoto per dar vita o ad un addotto o ad un radicale alcossilico e ossido d'azoto:

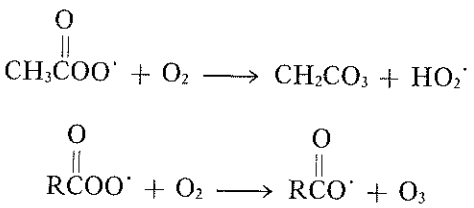


Molta bibliografia riporta due modi di decomposizione di questi radicali:

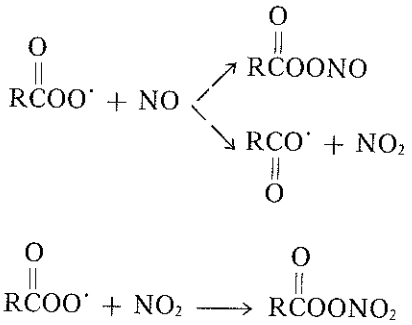


[17-24]; v'è da dire, però, che i lavori effettuati da GRAY nel 1952 [25] hanno rimesso in discussione i precedenti risultati. Al giorno d'oggi ancora il meccanismo della reazione di decomposizione non è del tutto chiarito.

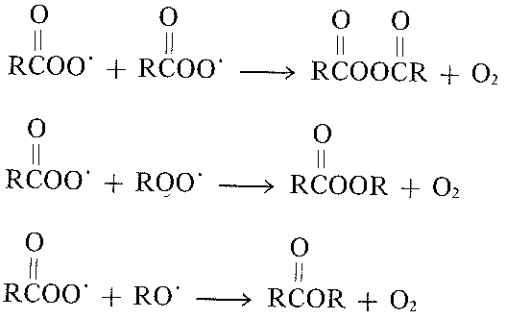
Un gran numero di reazioni è stato ipotizzato per i radicali perossiacilici ed acilati. Per i primi si hanno le reazioni con l'ossigeno,



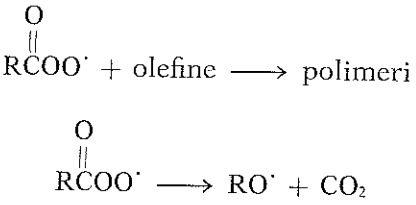
con l'ossido d'azoto e con il suo biossido,



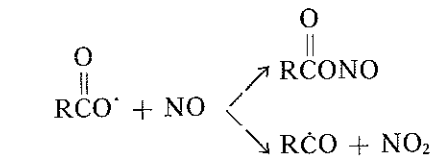
con altri radicali:

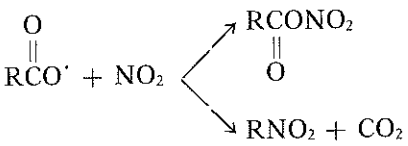


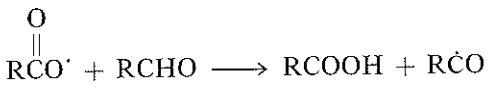
d'altra parte possono dar luogo a prodotti polimerici e a reazioni di decomposizione, come qui di segutio riportate:

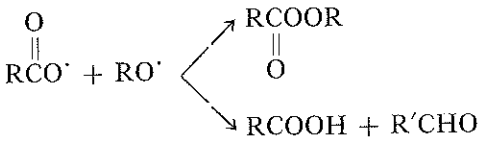


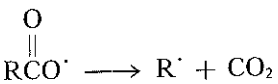
I radicali acilati, viceversa, reagiscono in uno dei seguenti modi:











Tra i su elencati modi di reagire dei radicali acilati riveste particolare importanza l'ultima reazione. I dati a disposizione nella letteratura [26-29] pongono in grande evidenza questa reazione di decomposizione ed è, quindi, possibile supporre che questo è il maggior processo che avviene per i radicali acilati nell'aria, specialmente se si erano formati con un eccesso di energia interna.

I radicali alcossilici reagiscono, anche se non vi sono buone prove, con l'ossigeno dando:

$$RO^{\cdot} + O_2 \longrightarrow R^{\cdot} + O_3$$

$$CH_3O^{\cdot} + O_2 \longrightarrow HCHO + HO_2^{\cdot}$$

$$CH_3O^{\cdot} + O_2 \longrightarrow CO + H_2O + \dot{O}H$$

Ancora questi radicali possono dar vita a reazioni con molecole organiche estraendone un atomo di idrogeno.

$$RO^{\cdot} + RH \longrightarrow ROH + R^{\cdot}$$

$$RO^{\cdot} + RCHO \longrightarrow ROH + R\dot{C}O$$

Reazioni con altri radicali sono state anche ipotizzate da molti studiosi [15, 16, 17, 21, 22]:

$$RO^{\cdot} + RO^{\cdot} \longrightarrow ROOR$$

$$RO^{\cdot} + RO^{\cdot} \longrightarrow ROH + R'CHO$$

$$RO^{\cdot} + H\dot{C}O \longrightarrow ROH + CO$$

$$RO^{\cdot} + ROO^{\cdot} \longrightarrow ROR + O_2$$

$$RO^{\cdot} + R\overset{\overset{O}{\|}}{C}OO^{\cdot} \longrightarrow R\overset{\overset{O}{\|}}{C}OR + O_2$$

Con l'ossido ed il biossido d'azoto le reazioni che avvengono più facilmente consistono nell'associazione dei due reagenti:

$$RO^{\cdot} + NO \longrightarrow RONO$$

$$RO^{\cdot} + NO_2 \longrightarrow RONO_2$$

Infine, possono addizionarsi a sostanze di natura olefinica con eventuale formazione di polimeri e, ancora, decomporsi probabilmente ad elevate temperature, come segue:

$$R_1O^{\cdot} + \begin{matrix} R_2 & & R_4 \\ & \diagdown\ \diagup & \\ & C = C & \\ & \diagup\ \diagdown & \\ R_3 & & R_5 \end{matrix} \longrightarrow R_1-O-\begin{matrix} R_2 & R_4 \\ | & | \\ C & -C \\ | & | \\ R_3 & R_5 \end{matrix}\cdot$$

$$CH_3O^{\cdot} \longrightarrow HCHO + H$$

$$C_2H_5O^{\cdot} \longrightarrow HCHO + \dot{C}H_3$$

$$C_2H_5O^{\cdot} \longrightarrow CH_3CHO + H$$

Per concludere quest'ampio quadro delle innumerevoli reazioni date dai radicali liberi, prendiamo in esame le reazioni dei radicali idrossilici e idroperossidici. Formatisi per fotodissociazione dell'acqua ossigenata e, presumibilmente, dagli acidi nitroso e nitrico, oltre che con altri metodi, essi reagiscono rapidamente, a temperatura ambiente, con l'idrogeno [30, 31],

$$\dot{O}H + H_2 \longrightarrow H_2O + H$$

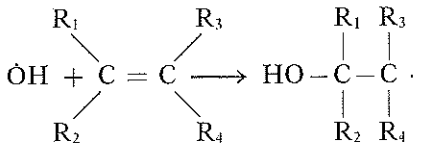
con gli idrocarburi [7, 32, 33, 34, 35, 36, 37],

$$\dot{O}H + H \longrightarrow H_2O + R^{\cdot}$$

e con le aldeidi [32, 36, 38, 39].

$$\dot{O}H + RCHO \longrightarrow H_2O + R\dot{C}O$$

In presenza di prodotti olefinici, si ha la possibilità di due modi di reagire, cioè sia mediante la possibilità d'estrarre un atomo di idrogeno, come pure, similmente ai radicali alcossilici e gli altri radicali esaminati, di addizionarsi:



Con gli ossidi d'azoto abbiamo:

$$\dot{O}H + NO + M \longrightarrow HNO_2 + M$$

$$\dot{O}H + NO_2 + M \begin{cases} \nearrow HNO_3 + M \\ \searrow HOONO + M \end{cases}$$

I radicali idroperossidici si formano rapidamente per reazione tra atomi di idrogeno con l'ossigeno [30, 31, 40, 41, 42, 43, 44, 45]:

$$H + O_2 + M \longrightarrow HOO^{\cdot} + M$$

Le reazioni di questi ultimi radicali non sono state studiate a fondo. Le più note tra queste sono:

$$HOO^{\cdot} + HOO^{\cdot} \longrightarrow H_2O_2 + O_2$$

$$HOO^{\cdot} + CH_4 \longrightarrow HOOH + \dot{C}H_3$$

$$HOO^{\cdot} + HCHO \longrightarrow HOOH + \dot{C}HO$$

$$HOO^{\cdot} + CH_3CHO \longrightarrow HOOH + CH_3\dot{C}O$$

Con le olefine si ha non solo l'estrazione di un atomo di idrogeno, ma anche altre reazioni sono possibili, come riportato sia nei lavori di LEWIS e VON ELBE [46] che da NICLAUSE e collaboratori [47]:

$$HOO^{\cdot} + C_2H_4 \longrightarrow HOOH + \dot{C}_2H_3$$

$$HOO^{\cdot} + C_2H_4 \longrightarrow 2HCHO + H$$

$$HOO^{\cdot} + C_2H_4 \longrightarrow C_2H_4O + \dot{O}H$$

Altre reazioni dei radicali idroperossidici che possono avere importanza nell'inquinamento atmosferico sono:

$$HOO^{\cdot} + NO \longrightarrow HOONO \longrightarrow \dot{O}H + NO_2$$

$$HOO^{\cdot} + ROO^{\cdot} \begin{cases} \nearrow ROOH + O_2 \\ \searrow RO^{\cdot} + \dot{O}H + O_2 \end{cases}$$

$$HOO^{\cdot} + R\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{C}OO^{\cdot} \longrightarrow R\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{C}OOH + O_2$$

$$HOO^{\cdot} + R\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{C}O^{\cdot} \longrightarrow R\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{C}OH + O_2$$

$$HOO^{\cdot} + RO^{\cdot} \longrightarrow ROH + O_2$$

$$HOO^{\cdot} + \begin{matrix} R \\ \diagdown \\ C \\ \diagup \\ R \end{matrix} = \begin{matrix} R \\ \diagup \\ C \\ \diagdown \\ R \end{matrix} \longrightarrow HOO-\begin{matrix} R \\ | \\ C \\ | \\ R \end{matrix}-\begin{matrix} R \\ | \\ C \\ | \\ R \end{matrix} \cdot$$

Quest'ampia discussione, riassumendo, ci dimostra che almeno undici radicali vengono probabilmente a formarsi mediante l'azione della luce solare sugli inquinanti delle aree urbane. Alcuni di questi radicali, non tutti di eguale importanza, vengono a formarsi nella fotolisi degli inquinanti originariamente presenti, altri invece, da reazioni secondarie o, ancora, mediante fotolisi dei prodotti di reazioni secondarie.

Il rapporto diretto tra inquinamento atmosferico e rapido aumento dei fenomeni morbosi e della mortalità per malattie croniche principalmente delle vie respiratorie è stato più volte provato e constatato [52]. Di questo fondamentale effetto, cioè della nocività sulla

salute umana in particolare e sui costituenti degli altri due regni naturali in generale, l'inquinamento fotochimico è un costante responsabile. Dai dati in nostro possesso, si evince chiaramente come gli elementi più studiati sotto questo profilo siano l'ozono e la famiglia dei perossiacilnitrati (PAN).

Esaminando gli effetti degli ossidanti fotochimici, il danno alla vegetazione è stato uno delle prime cose osservate dell'inquinamento fotochimico dell'aria. L'ozono parrebbe l'elemento fotochimico più tossico per le piante, ma altre ricerche in corso stanno portando alla luce l'importanza dei PAN.

L'azione nociva dell'ozono sulle piante si rivela sotto forma di necrosi di gruppi di cellule sulla superficie superiore delle foglie. Le foglie completamente distese sono quelle più facilmente danneggiate. Anche i germogli del pino bianco vengono facilmente bruciati dalla presenza dell'ozono.

L'altro importante inquinante fotochimico secondario è il perossiacilnitrato. Altri comuni perossiacilnitrati sono il perossipropionilnitrato (PPN), il perossibutirrilnitrato (PBN) e il perossisobutirrilnitrato ($P_{iso}BN$).

Alcuni studi preliminari dimostrano come il PPN sia molte volte più tossico per le piante del PAN, mentre gli altri esponenti della famiglia siano ancora più tossici del PPN, nonostante che l'unico membro di questi che sia stato più studiato sino ad ora è il PAN. Ciò è dovuto in parte al fatto che le concentrazioni di PPN e PBN nell'ambiente sono molto basse e di solito inferiori ai limiti quantificabili.

Le piante attaccate dal PAN presentano una colorazione bronzea sulla superficie inferiore delle foglie, con prevalenza delle foglie più giovani: in alcuni casi, il tessuto della foglia muore. È stato dimostrato che tale composto è specialmente tossico per gli agrumi, foraggi, piante da insalata e conifere.

Riguardo all'azione sull'uomo, gli ossidanti fotochimici entrano nel corpo come parte dell'aria inalata e, a concentrazioni non letali, alterano, inficiano o in qualche modo interferiscono con i normali processi respiratori. Una certa irritazione agli occhi è anche caratteristica dell'esposizione a questi composti.

Sembra che, alle concentrazioni che si riscontrano nell'ambiente atmosferico, il PAN non presenti alcun riconosciuto pericolo per la salute. Esso è stato messo in relazione con le irritazioni degli occhi, ma sembra che vi svolga solo un ruolo minore, mentre il perossibenzoilnitrato causa agli occhi irritazione più rapidamente.

In questi ultimi anni, però, KOTIN e i suoi collaboratori [48, 49, 50] hanno dimostrato come l'esposizione agli ossidanti fotochimici possa portare alla produzione di tumori specialmente a carico del-

l'apparato respiratorio. Infatti, usando benzina ozonizzata ad abbastanza alta concentrazione di ossidanti, hanno messo in evidenza la formazione di tumori alla pelle in topi neri C57, come pure tumori polmonari e variazioni a carico dell'epitelio respiratorio in topi della razza A e dei medesimi topi neri C57. Molto interesse ha anche suscitato l'apparente effetto della benzina ozonizzata di inibire gli spontanei tumori extrapolmonari negli animali saggiati, paragonati con quelli campione. In tutti gli esperimenti condotti da Kotin si è anche notato che a determinate concentrazioni di ossidanti fotochimici era persistente una riduzione della velocità di crescita dei topi. Altamente importante è stata poi, la dimostrazione che gli ossidanti di natura alifatica, non relazionabili agli idrocarburi policiclici, possono dar vita a manifestazioni neoplastiche; queste sostanze includono epossidi, peracidi, aldeidi, perossidi, cheteni ed altre sostanze che o sono radicali liberi o possono a questi dar luogo. Infine, KOTIN e THOMAS hanno anche riportato l'effetto depressivo dello smog sulla riproduzione e sulla sopravvivenza della fiigliolanza dei topi [51]. Da questi dati risulta evidente la potenziale tossicità di questi inquinanti atmosferici, pur essendo molto difficile, allo stato attuale, affermare a quale dei molteplici pollutanti può addebitarsi una determinata azione nociva. Si può ipotizzare, in prima analisi, che la loro azione cancerogena sia attribuibile alla loro capacità di indurre mutazioni. Per mutazioni si intende un cambiamento della informazione. La base chimica della mutazione è una modificazione del DNA, cioè della sequenza delle basi. Si sa da tempo come raggi ricchi di energia (raggi Roentgen, raggi gamma) inducono mutazioni; è possibile, quindi, prevedere, in base a quanto detto, l'azione mutagena degli ossidanti fotochimici che mediante la formazione di radicali liberi possono alterare così l'accoppiamento delle basi portando, come conseguenza, alla non duplicazione di tratti di sequenza delle basi.

L'azione dannosa degli ossidanti fotochimici si esplica anche a carico dei materiali. Molte delle ricerche in questo settore fino ad ora hanno riguardato un solo ossidante, l'ozono, e due tipi di materiali, gomma e fibre tessili.

È fuori discussione come molti polimeri organici, comprese la gomma e le fibre tessili naturali e sintetiche, sono soggetti ad alterazioni chimiche per esposizione a quantità molto piccole di ozono. Le concentrazioni nell'aria sono sufficienti a far si che queste reazioni abbiano luogo. La suscettibilità all'attacco aumenta col crescere del numero dei doppi legami C – C nel materiale; infatti il doppio legame è la sede di tali attacchi.

Queste reazioni producono due effetti differenti, rottura della catena di atomi di carbonio e collegamento trasversale tra catene di

carbonio provocando, così, una minore elasticità, maggiore fragilità e una enorme perdita alla tensione. Questo tipo di azione ha luogo con concentrazioni di ozono ambientali molto inferiori a quelle note per avere effetti sull'uomo.

L'ozono attacca anche la cellulosa delle materie tessili. Luce ed umidità sembrano essere fattori necessari perché abbia luogo un'apprezzabile alterazione nella resistenza delle fibre. Gli effetti dannosi dell'esposizione ad ozono aumentano nell'ordine, a seconda dei seguenti tipi di fibre tessili: cotone, acetato, nylon e poliestere.

A questo punto sorge spontanea una domanda: come difendersi dagli inquinanti fotochimici?

Essendo la maggior parte di essi inquinanti secondari è quindi necessario agire sui loro precursori primari, idrocarburi e ossidi di azoto.

La prevenzione dell'inquinamento da NO_x, derivanti quest'ultimi da processi di combustione, in massima parte, coinvolge molte variabili.

Fra le più importanti, citeremo la varietà dei tipi di combustibili usati; la varietà degli apparecchi di combustione; la diversa temperatura di fiamma raggiunta e, infine, la presenza di vari altri inquinanti nei prodotti di combustione.

Attualmente molte delle ricerche e delle applicazioni in corso per la riduzione degli NO_x seguono uno o l'altro di due indirizzi fondamentali. Uno tende alla modificazione delle condizioni di combustione come mezzo per diminuire le quantità di ossidi d'azoto prodotte; l'altro utilizza vari metodi per eliminare detti ossidi dai gas di scarico. Molte ricerche in questo campo sono in via di sviluppo e molte delle informazioni seguenti implicano accorgimenti ancora in fase di sviluppo.

I possibili metodi per la riduzione e il controllo delle emissioni di NO_x adoperati oggigiorno consistono nell'usare sistemi di combustione detti « a due fasi ». In essi il combustibile è parzialmente bruciato in presenza di una quantità d'aria minore di quella stechiometrica. Questo limita la produzione di NO in quanto non permette di disporre di ossigeno in eccesso. Nella seconda fase, la combustione è completa dopo una iniezione di aria nella miscela. L'eliminazione di calore fra le due fasi riduce la temperatura alla quale avviene la combustione in presenza di aria in eccesso e di nuovo riduce la quantità di NO formata. Questo metodo è stato sperimentato con successo per le centrali termiche a gas.

La rimozione degli ossidi d'azoto dai gas di scarico è stata affrontata principalmente dal punto di vista dei reattori catalitici o dei sistemi i assorbimento. La riduzione catalitica degli NO_x a N_2 elementare è oggetto di intense ricerche, particolarmente come solu-

zione al problema delle emissioni di ossidi d'azoto delle automobili. Al presente, la durata del catalizzatore è il maggior problema. I metodi di assorbimento non appaiono realizzabili per le auto, ma potrebbero essere efficaci per i gas delle ciminiere. Questi ultimi vengono fatti passare su adsorbenti solidi o liquidi che trattengono efficacemente gli NO_x. Detti sistemi adsorbenti sono per lo più a base d'acqua e si dimostrano molto più efficaci specialmente quando l'acqua contiene sostanze alcaline o acido solforico.

Per quanto concerne le tecniche usate per prevenire la emissione di idrocarburi, quattro sono le più usate: incenerimento, adsorbimento, assorbimento e condensazione.

Per l'incenerimento vengono adoperati due tipi differenti di apparecchi: l'inceneritore a fiamma e l'inceneritore catalitico. Il primo usa una fiamma per completare l'ossidazione degli idrocarburi a CO_2 ed acqua e l'efficienza della eliminazione di idrocarburi con questo apparecchio è molto alta. L'inceneritore catalitico fa uso di un catalizzatore per permettere che sia completa l'ossidazione dell'idrocarburo a una temperatura inferiore a quella del bruciatore a fiamma. I costi del combustibile sono più bassi in questo tipo di inceneritore, ma pure più bassa è l'efficienza di rimozione, mentre si presenta anche il problema dell'avvelenamento del catalizzatore.

Con la tecnica dell'adsorbimento, i gas di scarico vengono fatti passare su un letto di carbone attivo. I vapori delle sostanze idrocarburiche vengono adsorbite ivi rimanendo finché non vengono periodicamente allontanati mediante il passaggio di vapor d'acqua attraverso il sistema. Il vapor d'acqua e gli idrocarburi vengono, successivamente, recuperati mediante condensazione.

Il metodo mediante assorbimento consiste nell'intimo contatto tra il gas di scarico ed un liquido nel quale gli idrocarburi si sciolgono o rimangono in sospensione. I gas così depurati passano oltre, lasciando gli idrocarburi intrappolati nel liquido.

Il restante metodo della condensazione sfrutta il fatto che temperature sufficientemente basse provocano la condensazione degli idrocarburi gassosi. In questa maniera la condensazione degli idrocarburi avviene molto facilmente e, diventati liquidi, vengono lasciati indietro e raccolti.

BIBLIOGRAFIA

[1] BETETTO M., *L'inquinamento dell'aria: cause, conseguenze e rimedi*, Acqua Ind., **59**, 17 (1968).
[2] HAAGEN-SMIT A. J., Ind. Eng. Chem., **44**, 1342 (1952).
[3] HAAGEN-SMIT A. J., BRADLEY C. E. and FOX M. M., Ind. Eng. Chem., **45**, 2086 (1953).
[4] HAAGEN-SMIT A. J. and FOX M. M., Air Repair, **4**, 105 (1954); S.A.E. Trans., **63**, 575 (1955).
[5] CALVERT J. G. and HANST P. L., Can. J. Chem., **37**, 1671 (1969).
[6] GRAY J. A. and STYLE D. W. G., Trans. Faraday Soc., **48**, 1137 (1952); **49**, 52 (1953).
[7] CHAMBERLAIN G. H. N., HOARE D. E. and WALSH A. D., Discussions Faraday Soc., **14**, 89 (1953).
[8] HANST P. L. and STEPHENS E. R., *Interim Repts.* 1-2373-4, 5 Project SF-6, The Franklin Institute, Philadephia, Pennsylvania (1954-55).
[9] MC DOWELL C. A., Discussion Faraday Soc., **14**, 132 (1953).
[10] MC DOWELL C. A. and THOMAS J. H. J., Chem. Soc., 2208, 2217 (1949); 1462 (1950).
[11] MARCOTTE F. B., and NOYES W. A. Jr., Discussion Faraday Soc., **10**, 236 (1951); J. Am. Chem. Soc., **74**, 783 (1952).
[12] INGOLD K. U. and BRYCE W. A., J. Chem. Phys., **24**, 360 (1956).
[13] STRONG R. L. and KUTSCHIKE K. O., Can. J. Chem., **37**, 1456 (1959).
[14] TAYLOR R. P. and BLACET F. E., Ind. Eng. Chem., **48**, 1505 (1956).
[15] CADLE R. D. and JOHNSTON H. S., Proc. Natl. Air Pollution Symposium, 2nd Symposium, Pasadena Calif., 1952, 28.
[16] JOHNSTON H. S., Ind. Eng. Chem., **48**, 1488 (1956).
[17] BELL E. R., RALEY J. H., RUST F. F., SENBOLD F. H. and VAUGHAN W. E., Discussion Faraday Soc., **10**, 242 (1951).
[18] EVERETT A. J. and MINKOFF G. J., Symposium on Combustion, 3rd Symposium, Madison, Wisconsin, 1948, 390 (1949).
[19] INGOLD K. U. and LOSSING F. P., J. Chem. Phys., **21**, 1135 (1953).
[30] MARTIN R. B. and NOYES W. A. Jr., J. Chem. Soc., **75**, 4183 (1953).
[21] RALEY J. H., PORTER L. M., RUST F. F. and VAUGHAN W. E., J. Am. Chem. Soc., **73**, 15 (1951).
[22] SCHEER M. D. and TAYLOR H. A., Chem. Phys., **20**, 653 (1952).
[23] WALSH A. D., Trans. Faraday Soc., **43**, 297 (1947).
[24] NOYES W. A. Jr. and FINKELSTEIN A., Discussions Faraday Soc.. **10**, 308 (1951).
[25] GRAY J. A., J. Chem. Soc., 3150 (1952).
[26] ERLENMEYER H. and SCHOENAUR W., Helv. Chim. Acta, **19**, 338 (1936).
[27] KARASCH M. S., ROWE J. L. and URRY, W. H., J. Org. Chem., **16**, 905 (1951).
[28] REMKAUM A. and SZWARC M., J. Am. Che m.Soc., **77**, 3486 (1955).
[29] WALLING, CHEVES, *Free Radicals in Solution*, Wilcy, New York, 1957, 475, 491-493.
[30] CALLEAR A. B. and ROBB J. C., Trans. Faraday Soc., **51**, 649 (1955).
[31] SMITH A. B. and NAPRAVNIK A., J. Chem. Soc., **62**, 385 (1940).
[32] AVRAMENKO L. E. and LORENTSO P. V., Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R., **67**, 867 (1949).
[33] CHILDS W. H. J. and MECKE R., Z. Physik., **68**, 344 (1931).
[34] GRAY J. A., Chem. Soc., 741 (1953).
[35] MILAS N. A., STAHL L. E. and DAYTON B. B., J. Am. Chem. Soc., **71**, 1448 (1949).
[36] NORRISH R. G. W., Discussions Faraday Soc., **10**, 269 (1951).
[37] WIJNEN M. H. J. and VAN TIGGELEN A., Bull. soc. chim. Belges, **57**, 446 (1948).
[37] POLLARD F. H. and WYATT R. M. H., Trans. Faraday Soc., **46**, 281 (1950).
[39] VAN TIGGELEN A., Bull. soc. chim. Belges, **55**, 202 (1946).

[40] BADIN E. J., J. Am. Chem. Soc., **70**, 3651 (1948).
[41] BATES J. R., Chem. Phys., **1**, 457 (1933).
[42] BODENSTEIN M. and SCHENK P. W., Z. physik. Chem., B**20**, 420 (1933).
[43] REBBERT R. E. and LAIDLER K. J., J. Chem. Phys., **20**, 274 (1952).
[44] VOLMAN D. H., J. Chem. Phys., **14**, 707 (1946); **17**, 947 (1949).
[45] VALSH A. D., J. Chem. Soc., 331 (1948).
[46] LEWIS B. and VON ELBE G., *Combustion, Flames, and Explosions of Gases*, Macmillan, New York, 1951.
[47] NICLAUSE M., COMBE A. and LETORT M., J. Chim. Phys., **49**, 604 (1952).
[48] P. KOTIN and FALK H. L. and THOMAS M., I. *Production of skin tumors in mice with oxidation products of aliphatic hydrocarbons*, Cancer, **9**, 905 (1956).
[49] KOTIN and FALK H. L., II. *The experimental induction of pulmonary tumors in strain A mice after exposure to atmosphere of ozonized gasoline*, Cancer, **9**, 910 (1956).
[50] P. KOTIN and FALK H. L., III. *The experimental induction of pulmonary tumors and changes in respiratory epithelium in $C_{57}BL$ mice following exposure to ozonized gasoline*, Cancer, **11**, 473 (1958).
[51] P. KOTIN and THOMAS M., *Effects of air contamination on reproduction and offspring survival in mice*, A.M.A. Arch. Ind. Healt, **16**, 411 (1957).
[52] LAWTHER P. J. and al., Thorax, **25**, 678 (1970).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, M. Covello e R. Sersale.

Virus, batteri, radicali liberi, molecole patogene *

Nota del socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS **
e di ETTORE NOVELLINO *** ed AUGUSTO BIONDI ****

(Adunanza del 6 marzo 1976)

RIASSUNTO. — Le malattie insorgono non solo per azione dei virus e dei batteri, ma anche per azione dei radicali liberi e delle molecole patogene. Nuove ricerche sono necessarie in questa direzione insieme ad una ristrutturazione del sistema igienico-sanitario del Paese.

SUMMARY. — Diseases arise not only from the action of viruses and bacteria but also because of the action of free radicals and pathogenous molecules.

New researches are necessary in this direction together with a reformation of the Public Health Service.

In rapporto alle mutate condizioni ambientali, soprattutto nelle zone ad alta attività industriale o ad elevata densità di popolazione, nuovi, subdoli e pericolosi nemici insidiano la salute umana.

Ai tradizionali agenti patogeni quali virus (VI) e batteri (BA) si sono aggiunti oggi le molecole patogene (MP) e i radicali liberi (RL) [1].

Per le malattie da virus e batteri esiste, come è noto, una vastissima letteratura, anche se gli agenti terapeutici più adatti e più recentemente scoperti sembrano talvolta, specie nella fase preventiva o epidemica della malattia, essere ignorati o applicati con ritardo.

* Lavoro eseguito con il contributo della Regione Campania.

** Cattedra di Chimica Organica - Facoltà di Farmacia - Università Napoli.

*** Titolare di assegno biennale di formazione didattica e scientifica - Facoltà di Farmacia - Università Napoli.

**** Cattedra di Fisiologia Generale - Facoltà di Farmacia - Università Napoli.

[1] L'argomento di questa nota è stato in parte oggetto di un intervento al simposio « Fonti di energia e salute pubblica » dei Comitati per la Giustizia - Vico Equense 25-28 settembre 1975, e al dibattito sulla degradazione ambientale organizzato dalla Società di Scienze ecologiche a Villa Pignatelli il 20 novembre 1975.

Molte utili informazioni sull'argomento possono essere tratte dalla vasta indagine che si compie nel mondo sull'inquinamento (vedasi ad esempio i Chemical Abstracts Sezioni 4, 59, 60 e gli Air Pollution Abstracts).

Per le molecole patogene e i radicali liberi, invece, non sembra si sia sviluppata una coscienza igienico-sanitaria, anche quando la loro azione è ben conosciuta.

Il concetto di molecole e radicali quali agenti patogeni ha infatti, nell'opinione pubblica e nell'apparato mutualistico assistenziale, lo stesso grado di conoscenza che i microbi avevano ai tempi delle classiche scoperte di Pasteur e Koch; forse, a questo proposito, è utile ricordare che anche allora le prime scoperte, e i rimedi chemioterapici che ne seguirono, furono spesso accolti con *scetticismo* e in qualche caso con atti di intolleranza e derisione.

L'accostamento tra virus, batteri, molecole patogene e radicali liberi è valido e significativo sotto moltissimi aspetti: infatti, come per i BA e VI, il contagio molecolare o radicalico può avvenire attraverso l'aria, l'acqua, il suolo, i cibi, le bevande. Vi sono inoltre molti casi di *simbiosi* in cui si può avere sinergismo d'azione tra BA o VI con MP o RL: si pensi ad esempio ad una infiammazione da molecole patogene o radicali di una mucosa delle vie respiratorie sulla quale si impianta successivamente un'infezione batterica o virale.

Se esaminiamo le differenze fondamentali esistenti tra BA, VI, RL e MP notiamo, innanzitutto, che questi ultimi agiscono attraverso molteplici vie; infatti, MP provengono da coloranti, detersivi, prodotti di risulta di varie industrie, nonché prodotti farmaceutici destinati a combattere malattie, ivi compreso il contagio batterico o virale.

Peculiare è poi la differenza nel meccanismo di azione. I virus e i batteri penetrati nell'ospite si moltiplicano rapidamente instaurando la malattia, le molecole patogene e i radicali liberi, invece, esercitano la loro azione distruttiva sulle cellule, quasi sempre, dall'esterno ed in modo continuo. Ne deriva che mentre nella lotta ai virus e ai batteri si ricorre, sia nella fase preventiva che curativa, ad agenti biologici o chemioterapici, nel caso di MP o RL l'unica forma di lotta, in carenza di farmaci antimolecolari e antiradicalici, è quella che comporta la soppressione della fonte patogena.

Come è noto, i radicali liberi, che si formano soprattutto nella atmosfera per effetto fotochimico[2], sono dotati di una elevatissima reattività e di un brevissimo periodo di vita, fattori questi che rendono oltremodo difficile lo studio sia della loro struttura che del loro destino, tenuto anche conto che essi si formano in quella complessa miscela di elementi che caratterizza l'atmosfera in cui oggi viviamo.

Ad esempio, la luce solare dissocia l'ossido di azoto in monossido di azoto ed ossigeno atomico[3]. L'ossigeno atomico, molto reat-

[2] E. RAMUNDO, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat.*, Napoli, 43 (1976); J. N. PITTS, B. J. FINLAYSON, *Ang. Chem. 14*, 1 (1975) (fra le pubblicazioni più recenti).

[3] A. C. STERN, *Air Pollution*. A. P. New York, 1962.

tivo, reagisce con l'ossigeno molecolare formando ozono che a sua volta può combinarsi con idrocarburi portando alla formazione di alchil-, formil-, o acil-radicali, nonché altri prodotti di ossidazione.

$$NO_2 \xrightarrow{h\nu} NO + O$$

$$O + O_2 \xrightarrow[+ M]{} O_3$$

$$O_3 + \geq C = C \leq \rightarrow R', RO', ROH, RCOOH, R\overset{\overset{O}{\|}}{C}OOH, \text{polimeri}$$

I radicali così formatisi reagiscono facilmente con l'ossigeno molecolare dando luogo a radicali perossidici, ancora più reattivi, che continuano il processo a catena con formazione di una vasta gamma di prodotti (ozono, alcoli, acidi, perossiacidi, eteri, perossialchil- e perossiacil-nitrati).

$$R' + O_2 \longrightarrow ROO' + O_2 \rightarrow RO' + O_3$$

$$+ NO \rightarrow R - OONO \rightarrow RO' + NO_2$$

$$+ \geq C = C \leq \rightarrow ROOC - C = C' \longrightarrow \text{polimeri}$$

Infine un radicale perossidico può reagire con il monossido d'azoto riformando ossido di azoto ed ossigeno molecolare e chiudendo in tal modo la maglia della catena di reazione.

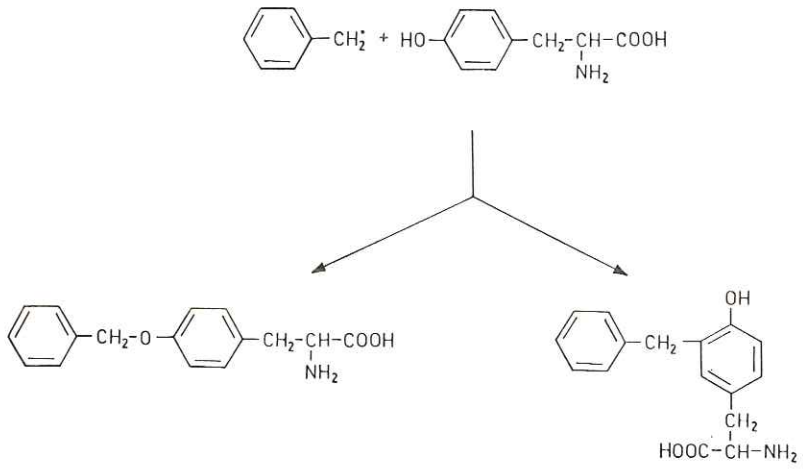
L'ozono, l'acroleina, il nitrato di perossiacetile sono alcune delle molecole patogene che si possono formare nei processi radicalici; esse come primo ed immediato effetto producono una forte irritazione delle mucose.

Inoltre, i radicali liberi sono capaci di combinarsi con gli aminoacidi e le proteine comuni costituenti delle cellule, membrane, mucose e tessuti biologici animali e vegetali. Ad esempio, un radicale come quello benzilico, per la cui formazione sono sufficienti solo 78 kcal/mole, può reagire con molecole di interesse biologico come la tirosina dando luogo alla formazione di prodotti di sostituzione, sia dell'idrogeno fenolico che di quelli nucleari[4]. Radicali si formano anche nel processo naturale della melanogenesi[5] a partire dalla tirosina e dai « fenoli » che da essa derivano nel processo fotochimico.

[4] Si può pensare che le stesse reazioni avvengano anche a livello dei residui tirosinici delle catene proteiche.

[5] R. A. NICOLAUS, Melanins, Hermann, Parigi 1968; K. STRATTON, *M. A. Pathak.* Arch. Bioch. Biophys. *123,* 477 (1967).

Infatti la pigmentazione, sotto l'azione solare, della cute degli uomini di razza bianca è preceduta nel primo stadio da quella ben nota irritazione cutanea che è da attribuire all'attività radicalica [6].



Ma, mentre a livello cutaneo il processo radicalico è controllato attraverso la produzione di granuli di melanina [7], a livello respiratorio, invece, esso può produrre diverse forme patogene sia per azione primaria sia attraverso molecole anomale che ne possono derivare e che determinano l'instaurarsi di svariate condizioni patologiche quali insufficienza respiratoria primaria e secondaria, sindromi asmatiche e bronchitiche, nonché condizioni favorenti l'impianto di ascessi polmonari; inoltre crisi allergiche, astenie, sindromi allucinatorie, alterazione dell'olfatto, del gusto ed infine tossicosi non ancora inquadrate in una corretta fisiopatologia ma che non tarderanno ad essere scoperte [8].

È anche ipotizzabile che i radicali liberi possano reagire con nucleotidi ed acidi nucleici dando dei prodotti di sostituzione sia a livello degli idrogeni delle basi azotate sia a livello degli ossidrili forforici nonché con i residui amminoacidici degli istoni e delle protamine. In questo caso, le alterazioni che ne deriverebbero sarebbero ben più pericolose, in quanto potrebbero avviare un processo di mutazione, fattore determinante dell'insorgere di alcune forme di cancro cutaneo [9].

[6] R. A. Nicolaus, *The Nature of Mammalian Colour*. Chim. Ind. *54*, 427 (1972).

[7] Gli stessi granuli di melanina conservano un debole carattere radicalico.

[8] Con queste prospettive, sembrano assolutamente necessari provvedimenti urgenti di ristrutturazione del sistema igienico-sanitario avvalendosi anche dell'opera di scienziati e tecnici di varia formazione culturale.

[9] A Napoli, nelle cosiddette belle giornate, vi sono le condizioni più adatte perché si formino radicali liberi di ogni tipo che possono combinarsi con le strutture biolo-

A questo punto è interessante conoscere quale sia il meccanismo di formazione di tumori a partire dall'incontro della cellula con la sostanza oncogena.

Esiste, innanzitutto, un periodo di latenza distinguibile in fasi cronologicamente successive. Nella prima fase, caratterizzata dall'azione dell'oncogeno (molecola o radicale) sul substrato cellulare, si ha una iniziale alterazione del nucleo e del citoplasma, segue poi una fase in cui la cellula alterata prolifera dando luogo al tumore.

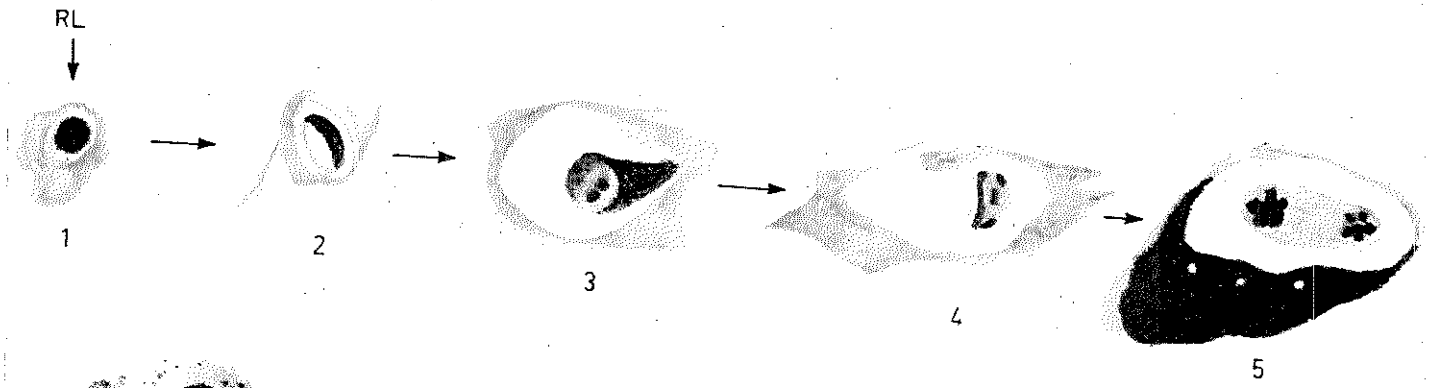
Tra queste due fasi esiste un tempo di lunghezza estremamente variabile; tuttavia è ipotizzabile che la cellula per assumere caratteristiche neoplastiche debba essere esposta per un periodo piuttosto lungo all'azione cancerogena. A volte però l'alterazione può aver luogo anche molto velocemente; è da ritenere quindi che la trasformazione tumorale acquisti un carattere probabilistico intendendo il periodo di latenza inversamente proporzionale alla frequenza di esposizione all'agente oncogeno.

Se la frequenza di stimolo è alta, la probabilità che una cellula bersaglio muti è in pratica molto elevata.

L'istogenesi del tumore della pelle si manifesta attraverso quadri istologici che vanno da stadi iperplastici più o meno marcati, con incremento metacromatico e della quantità di acqua del derma, associati ad uno scompagimento della membrana basale. Infatti, in molte neoplasie spontanee dell'uomo sono osservabili lesioni, che possono essere definite preneoplastiche, dipendenti da fattori alquanto comuni quali: esposizione a radiazioni, a sostanze irritanti, a composti non conosciuti che si possono formare a partire dall'attacco di un radicale su molecole cellulari, stati infiammatori cronici, sindromi disendocrine.

La fase precancerosa può essere intesa come condizione necessaria affinché la cellula si orienti in senso neoplastico, oppure essa costituisce la condizione biologica dalla quale può prendere avvio una progressione clonale neoplastica. Pertanto, la cancerogenesi può essere interpretata sia come risultato di una modificazione progressiva (vedi Tavola 1) riguardante una certa popolazione di cellule, sia come conseguenza di meccanismi non comuni ma coinvolgenti una selezione clonale. Nel primo caso è presumibile che l'azione cancerogena sia specificamente elevata, nel secondo gruppi cellulari autonomi iniziano la proliferazione atipica in uno stato di disordine piuttosto vasto. Quest'ultima ipotesi sembra essere più probabile, infatti la

giche cellulari dando luogo ad una serie di reazioni a catena non più controllabili e in molti casi sconosciute. Perciò, in città ove si hanno un numero di giornate solari inferiori, ad esempio Milano, il contagio radicalico è meno pericoloso. Lo stesso fenomeno è stato osservato quando si è paragonato il cosiddetto *smog* di Los Angeles con quello di Londra.



Trasformazione di cellule epidermiche in melanocarcinomatose

1) Cellula normale.
2) Iniziale cromatolisi.
3) Metacromasia.
4) Inizio mitosi atipica.
5) Mitosi atipica in atto.
6) Mitosi atipica tripolare di melanocarcinoma.

TAVOLA 1

cancerogenesi è in pratica identificabile in un processo mutazionale, mentre il cancro risulta costituito da una progressione specifica di cellule mutate. Ciò, inoltre, è dimostrato dall'irreversibilità della mutazione.

In definitiva la cancerogenesi sembra essere legata ad un danno genetico stabile e le sostanze cancerogene mostrano nel loro insieme la capacità di modificare l'informazione genetica attraverso stati casuali che si esplicano su substrati, portando così ad una interferenza col DNA. Il risultato quindi dell'incontro fra gli agenti ambientali radicali liberi e molecole altamente reattive e tutta la serie di composti ben noti ad azione carcinogenetica, è quello di provocare un danno mutazionale a vasto raggio in una serie di processi piuttosto complessi in cui vanno individuati tutti i sistemi biologici.

* * *

Gli Autori ringraziano il sig. Giuseppe Ferracane per l'assistenza tecnica prestata ed il sig. Maurizio Biondi per la realizzazione della tavola.

Napoli, 6 marzo 1976

Sull'equivalenza di alcune leggi relativistiche di trasformazione concernenti grandezze termodinamiche globali *

Nota di RAFFAELE ESPOSITO
presentata dal socio ordinario CARLO TOLOTTI

(Adunanza del 6 marzo 1976)

SOMMARIO. — Si mostra l'equivalenza di alcune leggi relativistiche di trasformazione concernenti grandezze termodinamiche globali impiegando l'assiomatica proposta recentemente da A. ROMANO per il tensore impulso-energia di un sistema continuo.

SUMMARY. — The equivalence is shown among some transformation laws of global thermodynamical quantities, using the axiomatic recentely proposed by A. ROMANO for the energy-momentum tensor of a continous system.

1. - INTRODUZIONE.

EINSTEIN [1], PLANCK [2] ed HASENÖHRL [3] proposero, nel 1907-1908, la prima versione relativistica della termodinamica dei processi omogenei quasistatici di un fluido perfetto $\mathcal{S}$, pervenendo, in particolare, alle formule di trasformazione della variazione di energia interna ΔU, del lavoro $\mathcal{L}$ e del calore Q nel passaggio dal generico riferimento inerziale I a quello $\bar{I}$ di riposo per $\mathcal{S}$. Successivamente molti Autori (cfr. ad es. VON LAUE [4], PAULI [5], DE BROGLIE [6], MØLLER [7], PATHRIA [8], GUESSOUS [9]) hanno aderito a tali formule di trasformazione, fornendo ulteriori argomentazioni a loro sostegno.

Soltanto nel 1923 EDDINGTON [10], per la prima volta, mise in discussione la validità delle suddette leggi di trasformazione di ΔU, $\mathcal{L}$ e Q obbiettando che, per l'equivalenza tra la massa e l'energia, queste grandezze dovevano trasformarsi tutte come la massa relativistica.

* Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.F.M. - C.N.R.

Nel 1963 OTT [11], con considerazioni relative alla dinamica di una particella di massa propria variabile, ha ritrovato la legge di trasformazione proposta da EDDINGTON per il calore. Successivamente ARZELIÉS, ponendosi sia nell'ambito della dinamica di una particella di massa propria variabile e sia in quello della dinamica dei sistemi continui, in [12], [13], [14], ha riottenuto tutte le leggi di trasformazione proposte da EDDINGTON.

Una posizione intermedia è assunta da KIBBLE in [15], che accetta la formula di trasformazione di *EINSTEIN* per ΔU, quella di EDDINGTON per Q e ne propone un'altra per $\mathfrak{L}$. Anche MØLLER, che in [7] aveva accettato le leggi di trasformazione di EINSTEIN, in [16] aderisce al complesso delle formule di trasformazione di KIBBLE.

Vanno ricordate infine l'invarianza di Q prospettata da LANDSBERG [17] e la proposta di riconciliazione tra le diverse leggi di trasformazione di Q dovuta a ROHRLICH [18], che prospetta la possibilità che la legge di EINSTEIN e quella di EDDINGTON siano compatibili. Recentemente CARRASSI ha chiarito in [19] che queste due leggi sono effettivamente compatibili nell'ambito della dinamica di una particella di massa propria variabile.

Scopo di questa Nota è di ricercare se le diverse leggi di trasformazione dianzi citate siano equivalenti.

A tal fine si adotterà l'assiomatica proposta da ROMANO in [20] per la determinazione, in Relatività ristretta, del tensore impulso-energia di un sistema isolato ed eventualmente carico. Questa assiomatica, richiamata al n. 2, comporta l'equivalenza, ai fini dell'evoluzione del sistema $\mathcal{S}$, delle infinite decomposizioni di $T^{\alpha\beta}$ in una parte « materiale » e in una parte « elettromagnetica »; inoltre, supposto $\mathcal{S}$ non carico, *sono altresì equivalenti tutte le decomposizioni del flusso di impulso* $\mathbf{t}$ *e del flusso di energia* $\mathbf{p}$ *intese a distinguere contributi di origine meccanica o termica in* $\mathbf{t}$ **e** $\mathbf{p}$. È appunto quest'ultimo risultato che ha un ruolo essenziale negli sviluppo della presente Nota.

Precisamente, dopo aver determinato al n. 3 le relazioni tra le componenti di $T^{\alpha\beta}$ nel generico riferimento inerziale I e in quello proprio $\hat{I}$ per la generica particella di $\mathcal{S}$, al n. 4, per mettere in evidenza come il carattere di trasformazione delle grandezze termodinamiche dipenda dalla *inessenziale* decomposizione adottata per $\mathbf{t}$ e $\mathbf{p}$, si prende in esame la seguente decomposizione:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{S} - \alpha \dfrac{1}{c^2} \mathbf{v} \otimes \mathbf{s}\,, \\ \mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{s}\,, \end{cases}$$

dove **S** è il « tensore degli sforzi », **s** il « vettore corrente di calore », **v** la velocità della generica particella di $\mathcal{S}$, c la velocità della luce nel vuoto e α una funzione di v^2/c^2. Se in particolare è $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$, le (I) si riducono rispettivamente alle decomposizioni di MØLLER e di ROMANO da questi riportate al n. 4 del suo citato lavoro. Sempre al n. 4 si deducono poi le leggi di trasformazione per **S** e **s**.

Ai nn. 5 e 6, supponendo che $\mathcal{S}$ sia un fluido perfetto e che i processi termodinamici siano quasistatici, si provano le seguenti formule di trasformazione:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Delta U_{qs} = \bar{\gamma}\left(\Delta \bar{U}_{qs} + \dfrac{\bar{v}^2}{c^2}\, p_0\, \Delta \bar{V}\right), \\ \mathfrak{L}_{qs} = \bar{\gamma}^{-1}\,\bar{\mathfrak{L}}_{qs} + \bar{\lambda}\,\bar{\mu}^{-1}\,\bar{\mathbf{v}}\cdot \Delta \mathbf{G}_{qs}\,, \\ Q_{qs} = \bar{\mu}\,\bar{Q}_{qs}\,, \end{cases}$$

ove le grandezze valutate lungo processi quasistatici sono denotate con l'indice *qs*, le grandezze termodinamiche soprasegnate sono relative ad $\bar{I}$, ΔV denota la variazione di volume, $\Delta \mathbf{G}$ la variazione di impulso totale, p_0 la pressione, $\bar{\mathbf{v}}$ la velocità di $\bar{I}$ rispetto ad I e γ, μ, λ sono espresse da

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \mu = \gamma^{-1}\left(1 - \alpha\,\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}, \quad \lambda = (1 - \alpha\,\mu\,\gamma^{-1})\,.$$

La $(\text{II})_1$ è la formula di trasformazione per ΔU adottata da EINSTEIN [1], PLANCK [2] ed HASENÖHRL [3] nonché dagli Autori [4], ..., [9] ed appare indipendente dalla decomposizione impiegata per **t** e **p**. Inoltre, quando si assuma $\alpha = 0$, e quindi $\mu = \gamma^{-1}$, $\lambda = \gamma$, le $(\text{II})_{2,3}$ si riducono anch'esse alle formule adottate dai suddetti Autori. Se invece, si pone $\alpha = 1$, $\mu = \gamma$ e $\lambda = 0$, il complesso delle (II) coincide con quello proposto da KIBBLE in [15]. Infine la scelta $\alpha = (\gamma - 1)\left(\gamma\,\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$, comporta l'invarianza di Q proposta da LANDSBERG in [17].

Si osservi che, benché scegliendo $\alpha = 1$ si ottenga la legge di trasformazione per Q di EDDINGTON ed ARZELIÉS, non esiste nessuna scelta di α che dia luogo al *complesso* delle loro formule. Ciò perché queste sono compatibili con l'assiomatica proposta da ARZELIÉS in [14], che non è equivalente a quella adottata in [20].

Stante la dipendenza da α di $(\text{II})_2$ e $(\text{II})_3$ e la citata [20] equivalenza delle diverse decomposizioni di **t** e **p**, si può concludere che *sono equivalenti ai fini dell'evoluzione del sistema (e pertanto*

prive di reale significato fisico) le diverse leggi di trasformazione per le grandezze termodinamiche globali contenute in $(II)_2$ *e* $(II)_3$, *ed appare quindi superflua la lunga, parzialmente citata, controversia sulla scelta di tali leggi di trasformazione.*

Si può osservare tuttavia che, in un eventuale confronto con l'esperienza, la scelta di α si riflette ovviamente sulla definizione operativa di calore e di lavoro.

2. - Richiami sul tensore impulso-energia totale e sull'inessenzialità fisica di ogni sua decomposizione.

Nel presente numero si richiameranno gli assiomi proposti da A. Romano [20] per la determinazione del tensore impulso-energia di un sistema continuo, eventualmente carico, nonché alcune loro conseguenze.

Siano $\mathcal{S}$ un sistema continuo isolato e non polare, X la generica particella di $\mathcal{S}$ ed $\mathbf{x}(X, t)$ la sua posizione all'istante t, valutata dal generico osservatore inerziale I. Inoltre, C denoti la configurazione attuale di $\mathcal{S}$[1], $v \subset C$ un volume materiale di bordo ∂v, $\mathbf{n}$ la normale esterna all'elemento di superficie $d\sigma$.

In [20] si assume, in analogia con il caso classico, che:

a) ad $\mathcal{S}$ siano associati, durante il moto, i campi

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, t),\ h(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \qquad \forall\ (\mathbf{x}, t) \in C \times \mathbb{R}\ , \tag{1}$$

— con $\mathbf{g}$ densità di impulso, $\mathbf{t}$ tensore corrente di impulso, h densità di energia totale, $\mathbf{p}$ vettore corrente di energia — soddisfacenti in ogni riferimento inerziale I le equazioni di conservazione dell'impulso, dell'energia e del momento angolare

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_v \mathbf{g}\, dc = -\int_{\partial v} \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma\ , \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_v h\, dc = -\int_{\partial v} \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma\ , \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_v \mathbf{x}\wedge\mathbf{g}\, dc = -\int_{\partial v} \mathbf{x}\wedge\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma\ , \qquad \forall\ v \subset C\ . \end{cases} \tag{2}$$

[1] Ossia l'insieme delle posizioni occupate dalle particelle di $\mathcal{S}$ *allo stesso istante rispetto ad* I.

b) nel passaggio da un riferimento inerziale I ad un altro I', la generica ψ^N (N = 1, . . . , 16) delle quantità (1) si trasforma con la legge

$$\psi'^N = f^N(\psi^M),$$

dove le f^N sono funzioni di classe C^1 nulle per $\psi^M = 0$, M = 1, . . . , 16.

Introdotta la matrice [2]

$$\| T^{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{array}{c|c} g^i v^k + t^{ik} & c\, g^k \\ \hline \frac{1}{c}(h v^i + p^i) & h \end{array} \right\|, \tag{3}$$

con v^k componenti della velocità della generica particella di $\mathcal{S}$ rispetto ad I, le equazioni di osservazione (2) si riducono alla seguente forma locale:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \tag{4}$$

Inoltre, *la matrice* $\| T^{\alpha\beta} \|$ *costituisce le componenti di un 4-tensore simmetrico del secondo ordine,* definito sullo spazio-tempo V_4 [3] della Relatività ristretta, che si denomina *tensore impulso-energia (totale) di* $\mathcal{S}$.

La simmetria di $T^{\alpha\beta}$ comporta, tra l'altro, *il teorema dell'equivalenza massa-energia*:

$$\frac{1}{c^2}(h v^i + p^i) = g^i. \tag{5}$$

Nel riferimento proprio $\hat{I}$ per la generica particella $X \in \mathcal{S}$, le componenti di $T^{\alpha\beta}$ si riducono a

$$\| \hat{T}^{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{array}{c|c} \hat{t}^{ij} & c\, \hat{g}^i \\ \hline \hat{p}^i/c & \hat{h} \end{array} \right\|, \tag{6}$$

essendo, per la simmetria di $T^{\alpha\beta}$, $\| \hat{t}^{ij} \|$ una matrice 3 x 3 simmetrica e

$$\hat{g}^i = \hat{p}^i/c^2. \tag{7}$$

[2] Gli indici latini variano da 1 a 3, quelli greci da 1 a 4; è sottintesa la somma sugli indici ripetuti.

[3] Nel seguito si supporrà che la segnatura di V_4 risulti (+, +, +, −).

Denotata poi con $u^\alpha \equiv (\gamma\, v^i,\ \gamma\, c)$ la 4-velocità d'universo della generica particelle $X \in \mathcal{S}$, e posto $\rho_o = \hat{h}/c^2$, si ha:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_o\, u^\alpha\, u^\beta + \Pi^{\alpha\beta} - (q^\alpha\, u^\beta + q^\beta\, u^\alpha), \tag{8}$$

dove il 4-tensore doppio simmetrico $\Pi^{\alpha\beta}$ ed il 4-vettore q^α hanno in $\hat{\mathcal{I}}$ componenti espresse da

$$\| \hat{\Pi}^{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{array}{c|c} \hat{\tau}^{ij} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\hat{q}^\alpha \equiv -(\hat{p}^i/c^2, 0) = -(\hat{g}^i, 0)\,,$$

e pertanto verificano le relazioni

$$\begin{cases} \Pi^{\alpha\beta}\, u_\beta = \Pi^{\beta\alpha}\, u_\beta = 0\,, \\ q^\alpha\, u_\alpha = 0\,. \end{cases} \tag{9}$$

La determinazione del tensore impulso-energia $T^{\alpha\beta}$ per uno specifico materiale è ottenuta mediante l'assegnazione di equazioni costitutive per $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{h}$, in funzione delle variabili fondamentali del sistema continuo $\mathcal{S}$.

Quando, accanto alle (4) ed alle equazioni costitutive per $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{h}$, si assegnino le eventuali equazioni di campo per le variabili fondamentali, si perviene ad un sistema completo di equazioni che contiene tutte le informazioni sul moto del sistema continuo $\mathcal{S}$.

In conseguenza di ciò risulta inessenziale ogni decomposizione del tensore impulso-energia totale $T^{\alpha\beta}$ basata su specifici modelli di interazione, essendo equivalenti ai fini dell'evoluzione del sistema le infinite decomposizioni di $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$ ed h. Infatti, essendo *le* t^{ij}, p^i, h funzioni di v^i, $\hat{\tau}^{ij}$, $\hat{p}^i$ ed $\hat{h}$ a parità di equazioni costitutive per $\hat{\tau}^{ij}$, $\hat{p}^i$ ed $\hat{h}$, il sistema differenziale che regola l'evoluzione di $\mathcal{S}$ resta inalterato e con esso l'evoluzione di $\mathcal{S}$ a parità di condizioni fisiche.

Si può pertanto concludere che *sono prive di reale significato fisico le conclusioni dipendenti da ogni particolare decomposizione adottata per* $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$ ed h.

3. — Relazioni tra le determinazioni di $\mathbf{g}$, h, $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$ in $\mathcal{I}$ ed $\hat{\mathcal{I}}$.

Al fine di determinare le relazioni di cui al titolo di questo numero, si cominci coll'osservare che, dal confronto della (3) con le (8),

quando si ricordi che $u^\alpha = (\gamma\,\mathbf{v},\ \gamma\,c)$, si ottiene:

$$(10)\qquad \begin{cases} g^i = \rho_0\,\gamma^2\,v^i + \dfrac{\Pi^{i4}}{c} - \gamma\,\dfrac{v^i}{c}\cdot q^4 - \gamma\,q^i\,, \\ g^i\,v^k + t^{ik} = \rho_0\,\gamma^2\,v^i\,v^k + \Pi^{ik} - \gamma\,q^i\,v^k - \gamma\,q^k\,v^i\,, \\ h\,v^i + p^i = \rho_0\,c^2\,\gamma^2\,v^i + c\,\Pi^{4i} - q^i\,c^2\,\gamma - q^4\,\gamma\,v^i\,, \\ h = \rho_0\,c^2\,\gamma^2 + \Pi^{44} - 2\,q^4\,c\,\gamma\,. \end{cases}$$

Inoltre le (9) comportano:

$$(11)\qquad \begin{cases} \Pi^{\alpha k}\,v_k = c\,\Pi^{\alpha 4}\,, \\ q^i\,v_i = c\,q^4\,. \end{cases}$$

Sostituendo $(10)_1$ in $(10)_2$ si ha

$$(12)\qquad \frac{\Pi^{i4}}{c}\,v^k - \frac{q^4}{c}\,\gamma\,v^i\,v^k + t^{ik} = \Pi^{ik} - q^k\,v^i\,\gamma\,,$$

da cui si deduce:

$$(13)\qquad t^{ik} = \Pi^{ik} - \frac{\Pi^{i4}}{c}\,\gamma\,v^k - q^k\,v^i\,\gamma + \frac{1}{c}\,q^4\,\gamma\,v^i\,v^k\,.$$

Sostituendo $(10)_4$ in $(10)_3$, segue poi

$$(14)\qquad \Pi^{44}\,v^i - q^4\,c\,\gamma\,v^i + p^i = c\,\Pi^{4i} - q^i\,c^2\,\gamma\,.$$

Scambiando i con k nella (12), saturando con v_k e tenendo conto di $(11)_1$, si ha

$$(15)\qquad \Pi^{44}\,v^i - \frac{q^4}{c}\,\gamma\,v^2\,v^i + t^{ki}\,v_k = c\,\Pi^{4i} - q^i\,v^2\,\gamma\,,$$

che, confrontata con (14) fornisce:

$$p^i - q^4\,c\,\gamma\,v^i + q^i\,c^2\,\gamma = t^{ki}\,v_k - \frac{q^4}{c}\,\gamma\,v^2\,v^i + q^i\,v^2\,\gamma\,.$$

Da questa relazione, tenuto conto di $(11)_2$ si ottiene intanto

$$(16)\qquad p^i = t^{ki}\,v_k + \frac{c^2}{\gamma}\left(\frac{v^i}{c^2}\,q^k\,v_k - q^i\right).$$

Ricordando poi che $\Pi^{\alpha\beta}$ è un 4-tensore, q^α è un 4-vettore, che la matrice di trasformazione da $\hat{\mathrm{I}}$ ad I risulta (cfr. [16], pag. 41):

$$\| \Lambda^\alpha{}_\beta \| = \left\| \begin{array}{c|c} \delta^m{}_n + \dfrac{v^m}{v^2} v_n (\gamma - 1) & \gamma \dfrac{v^m}{c} \\ \hline \gamma \dfrac{v_n}{c} & \gamma \end{array} \right\| , \tag{17}$$

e tenuto conto delle espressioni di $\hat{\Pi}^{\alpha\beta}$, $\hat{q}^\alpha$, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi^{ij} = \hat{t}^{ij} + \dfrac{\hat{t}^{i\ell} v_\ell v^j}{v^2} (\gamma - 1) + \dfrac{\hat{t}^{kj} v_k v^i}{v^2} (\gamma - 1) - \\ \qquad - \dfrac{\hat{t}^{k\ell} v_k v_\ell v^i v^j}{v^4} (\gamma - 1)^2 , \\ \Pi^{4j} = \dfrac{\gamma}{c} v_k \hat{t}^{kj} + \gamma (\gamma - 1) \dfrac{v_k v_\ell \hat{t}^{k\ell} v^j}{c v^2} , \\ \Pi^{44} = \dfrac{\gamma^2}{c^2} v_k v_\ell \hat{t}^{k\ell} , \\ q^j = - \left[\dfrac{\hat{p}^j}{c^2} + \dfrac{(v_\ell \hat{p}^\ell) v^j}{v^2 c^2} (\gamma - 1) \right] , \\ q^4 = - \gamma \dfrac{\hat{p}^j v^j}{c^3} , \end{array} \right. \tag{18}$$

da cui, sostituendo le (18) in (13), (16), $(10)_1$, $(10)_4$ consegue

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} = \left[\gamma^2 \hat{h} + \gamma (\gamma - 1) \dfrac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v})}{v^2} + \right. \\ \quad \left. + \left(2 \gamma^2 \dfrac{v^2}{c^2} - \gamma + 1 \right) \dfrac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}})}{v^2} \right] \dfrac{\mathbf{v}}{c^2} + \gamma \dfrac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}}{c^2} + \gamma \dfrac{\hat{\mathbf{p}}}{c^2} , \\ h = \gamma^2 \left(\hat{h} + \dfrac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}}{c^2} + \dfrac{2 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{c^2} \right) , \\ \mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}} + (\gamma - 1) \dfrac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}})}{v^2} - \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma} \dfrac{(\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}}{v^2} - \\ \quad - \dfrac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} \dfrac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{v^4} + \dfrac{\gamma}{c^2} \mathbf{v} \otimes \left[\hat{\mathbf{p}} - \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma} \dfrac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \mathbf{v}}{v^2} \right] , \\ \mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} + \dfrac{1}{\gamma} \left[\hat{\mathbf{p}} - \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma} \dfrac{\mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}})}{v^2} \right] . \end{array} \right. \tag{19}$$

Quando si tenga conto di $(19)_3$ in $(19)_4$ si perviene alla seguente espressione:

$$(20)\quad \mathbf{p} = \gamma\, \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{t}} - (\gamma - 1)\,\frac{(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{v^2} + \gamma\left[\hat{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{p}})}{v^2}\,\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\right].$$

Le $(19)_{1,2,3}$ e (20) costituiscono le ricercate relazioni tra le determinazioni di $\mathbf{t}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{g}$ ed h in I ed $\hat{\mathrm{I}}$.

4. - Decomposizioni di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{p}$ e relative formule di trasformazione nel caso termomeccanico.

Le considerazioni dei numeri precedenti sono relative ad un continuo del tutto generale, mentre in questo numero e nei successivi si supporrà che il continuo $\mathcal{S}$ sia *non carico ma conduttore di calore*.

Per un continuo siffatto sono state proposte delle equazioni di conservazione o per analogia con quelle classiche (cfr. [21]) oppure modificando, per l'equivalenza massa-energia, l'espressione classica del flusso di impulso con termini provenienti dal flusso termico (cfr. [16]). Tuttavia, in [20] si controlla che, adottando opportune decomposizioni per $\mathbf{t}$ e $\mathbf{p}$, tutte le suddette equazioni sono identiche alle $(2)_{1,2}$ e pertanto, quando si tengano presenti le considerazioni del n. 2, sono tra loro equivalenti.

Al fine di mettere in evidenza che il carattere di trasformazione di alcune grandezze termodinamiche dipende da tale scelta di equazioni, verrà qui introdotta una decomposizione di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{p}$ che tra l'altro comporta, come casi particolari, le equazioni proposte in [16] e [21].

Si supporrà precisamente che, conformemente alle (I) del n. 1, sia

$$(21)\quad \begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{S} - \dfrac{\alpha}{c^2}\,\mathbf{v}\otimes\mathbf{s}\,, \\[2ex] \mathbf{p} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{S} - \mathbf{s}\,, \end{cases}$$

dove $\mathbf{S}$ è il « tensore degli sforzi », $\mathbf{s}$ il « vettore corrente di calore » ed α un coefficiente reale, funzione del rapporto v^2/c^2.

La decomposizione (21) è interpretabile come segue: il flusso di impulso $\mathbf{t}$ non coincide con il solo tensore degli sforzi $\mathbf{S}$, ma differisce da questo per il termine $-\mathbf{v}\otimes\mathbf{s}/c^2$ (che rappresenta un « flusso di impulso derivante da trasferimento di energia termica, la cui presenza è suggerita dal teorema di equivalenza massa-energia) moltiplicato per un coefficiente di peso α. Tale interpretazione è però

soltanto *indicativa*, sia in quanto, per l'osservazione alla fine del n. 2, le diverse decomposizioni sono prive di reale significato fisico e sia in conseguenza del fatto che, quando si accetti in Relatività il *principio di equipresenza* [4], in ogni equazione costitutiva sono presenti variabili meccaniche e termiche sicché è impossibile distinguere i contributi meccanici da quelli termici.

Quando in (21) si sceglie $\alpha = 0$, le $(2)_{1,2}$ coincidono con quelle scritte da ROMANO in [21] [5], che rappresentano l'analogo esatto del modello classico, senza esplicite correzioni dovute all'equivalenza massa-energia. Quando invece si scelga $\alpha = 1$, le $(2)_{1,2}$ si riducono alle equazioni adottate da MØLLER in [16] [6], basate su considerazioni relative all'equivalenza massa-energia.

È utile rilevare che nel riferimento proprio $\hat{\mathcal{I}}$ per la generica particella di $\mathcal{S}$, le infinite decomposizioni (21) si riducono tutte a

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{S}}\,, \\ \hat{\mathbf{p}} = -\hat{\mathbf{s}}\,. \end{cases}$$

Sostituendo (21) e (22) in $(19)_3$ e $(19)_4$ e ricavando $\mathbf{S}$ e $\mathbf{s}$, si ottiene:

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} + (\gamma - 1)\,\dfrac{\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{S}})}{v^2} - \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma}\,\dfrac{(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}}{v^2} - \\ \qquad - \dfrac{(\gamma - 1)^2}{\gamma}\,\dfrac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{v})}{v^4}\,\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \lambda\,\dfrac{\mathbf{v}}{c^2} \otimes \\ \qquad \left(\hat{\mathbf{s}} - \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma}\,\dfrac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{s}})\,\mathbf{v}}{v^2}\right), \\ \mathbf{s} = \mu \left(\hat{\mathbf{s}} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{s}})\,\dfrac{\mathbf{v}}{v^2}\,\dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma}\right), \end{cases}$$

dove:

$$\text{(24)} \qquad \mu = \gamma^{-1}\left[1 - \alpha\,\frac{v^2}{c^2}\right]^{-1}, \qquad \lambda = \gamma\left[1 - \frac{\alpha\,\mu}{\gamma}\right].$$

[4] Cfr. ad es. [22].
[5] Cfr. [21], pag. 211, eq. $(2)_1$ e $(2)_2$, nel caso in cui $\mathcal{S}$ è isolato.
[6] Cfr. [16], pag. 230, eq. (7.147) e (7.148).

Quando si suppone $\alpha = 0$, si perviene alle seguenti determinazioni di λ e μ:

$$\mu = \frac{1}{\gamma} , \quad \lambda = \gamma ; \tag{25}$$

quando si sceglie $\alpha = 1$, in luogo delle (25) si ottengono le seguenti altre:

$$\mu = \gamma , \quad \lambda = 0 . \tag{26}$$

Le (23) e (26) mostrano che le equazioni di MØLLER sono formalmente le più semplici, in quanto sono le uniche che danno luogo a leggi di trasformazione in cui non compaiono contemporaneamente **S** e **s**.

5. - DEFINIZIONE DELLE GRANDEZZE TERMODINAMICHE GLOBALI ΔU, $\mathfrak{L}$, Q E PRIME OSSERVAZIONI RELATIVE ALLE LORO LEGGI DI TRASFORMAZIONE.

Si denoti con $\mathfrak{B}$ la regione occupata da $\mathfrak{S}$ nella configurazione attuale C; si dice *processo termodinamico* per $\mathfrak{S}$ un'applicazione χ definita in un intervallo temporale (O, T), che ad ogni istante $t \in (O, T)$ associa i campi che caratterizzano lo stato termodinamico del sistema, cioè ogni applicazione

$$\chi : t \in (O, T) \to [\mathbf{x}(\cdot, t), \vartheta(\cdot, t), \mathbf{t}(\cdot, t), \mathbf{p}(\cdot, t), h(\cdot, t), g(\cdot, t)]^{7},$$

sufficientemente regolare, e tale che, assegnate le equazioni costitutive, i suddetti campi verifichino le equazioni del moto (4); è evidente che, assegnate le equazioni costitutive, il processo χ è noto quando siano noti i campi $\mathbf{x}(X, t)$, $\vartheta(X, t)$.

Si dice *energia totale* di $\mathfrak{S}$ all'istante t, nel processo χ, la quantità

$$U(t) = \int_{\mathfrak{B}(t)} h \, d\, c . \tag{27}$$

[7] Con **t** e **p** eventualmente assegnati in termini del tensore degli sforzi e del vettore corrente di calore mediante (21). $\vartheta > 0$ rappresenta inoltre il campo di temperatura.

Fissato un processo χ ed integrando la $(2)_2$ sull'intervallo temporale (O, T), supponendo integrabili le funzioni che vi intervengono, stante $(21)_2$ si ottiene:

$$\Delta U = \mathcal{L} + Q , \tag{28}$$

dove

$$\Delta U = U(T) - U(O) , \tag{29}$$

$$\mathcal{L} = \int_0^T d t \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, d \sigma , \tag{30}$$

$$Q = \int_0^T d t \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d \sigma ; \tag{31}$$

ΔU prende il nome di *variazione di energia totale* nel processo χ ed $\mathcal{L}$, Q si denominano rispettivamente *lavoro compiuto* su $\mathcal{S}$ e *calore assorbito* da $\mathcal{S}$ durante il processo χ.

Il problema di determinare le formule di trasformazione di ΔU, $\mathcal{L}$, Q è completamente risolto dalle definizioni (27), (29), (30) e (31) assieme alle leggi di trasformazione dei campi h, $\mathbf{S}$, $\mathbf{s}$, che sono date da $(19)_2$, (23). È quindi chiaro che il carattere di trasformazione della energia totale è *intrinseco*, in quanto la sua legge di trasformazione non dipende dalla decomposizione prescelta; *non è invece intrinseco* il carattere di trasformazione di $\mathcal{L}$ e Q, dal momento che esso dipende esplicitamente dal coefficiente α, e quindi dalla decomposizione prescelta, cosicché per l'osservazione alla fine del n. 2 *sono prive di reale significato fisico le leggi di trasformazione di* $\mathcal{L}$ e Q.

6. - Processi omogenei quasistatici per un fluido non viscoso e relative leggi di trasformazione per le grandezze termodinamiche globali.

Le leggi di trasformazione di ΔU, $\mathcal{L}$, Q deducibili dalle considerazioni dei numeri precedenti, sono del tutto generali, ma non adatte al confronto con quelle proposte da altri Autori. Al fine di operare tale confronto, in questo numero ci si restringerà ad una classe particolare di materiali e, nell'ambito di questi, ad una particolare classe di processi.

Si supporrà che il continuo $\mathcal{S}$ sia un *fluido non viscoso*, ossia che nel riferimento proprio per la generica particella il tensore degli sforzi si riduca alla forma:

$$\hat{\mathbf{S}} = p_0 \mathbf{I}\,, \tag{32}$$

essendo p_0 la *pressione* ed $\mathbf{I}$ la matrice identica.

Si osservi che in questa ipotesi la legge di trasformazione $(23)_1$ si semplifica notevolmente, riducendosi a

$$\mathbf{S} = p_0 \mathbf{I} - \lambda \frac{\mathbf{v}}{c^2} \otimes \left[\hat{\mathbf{s}} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{s}})\, \mathbf{v}}{v^2} \right]; \tag{33}$$

quando poi la decomposizione prescelta sia quella di MØLLER, ossia $\alpha = 1$, stante $(26)_2$, il continuo $\mathcal{S}$ appare un fluido non viscoso anche rispetto al generico riferimento inerziale I.

L'ulteriore restrizione consiste nel limitarsi ai cosiddetti *processi omogenei quasistatici*, ossia a trasformazioni molto lente costituite da una successione di stati di $\mathcal{S}$ prossimi all'equilibrio.

Tale restrizione comporta che:

i) ad un fissato istante t, il campo di velocità $\mathbf{v}$, il campo di temperatura θ, la pressione p_0 sono praticamente omogenei.

ii) i vari campi che intervengono nel processo sono costanti temporalmente.

Pertanto, per i) ha senso introdurre un riferimento $\bar{\mathrm{I}}$ di riposo per l'intero sistema $\mathcal{S}$, che, per ii), è animato di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità $\bar{\mathbf{v}}$ rispetto al generico riferimento inerziale I; inoltre, sempre per i), si potrà ritenere praticamente nullo il flusso di calore nei punti interni a $\mathcal{B}$ [8].

L'ipotesi fatta sui processi è espressa in termini puramente qualitativi, come peraltro avviene, spesso implicitamente, nelle trattazioni correnti (cfr. ad es. [5], [7]). È evidente che le formule che in tal modo si ottengono risulteranno affette da un errore proporzionale alle grandezze di $\dot{\chi}$ e grad χ.

Si comincerà col determinare, indipendentemente dalla decomposizione (cfr. n. 5) la legge di trasformazione per l'energia interna. Poiché da ii) segue che le variazioni di energia cinetica sono trascurabili, si può identificare la variazione di energia interna con quella dell'energia totale. Da (33), (35) valutate in I lungo un pro-

[8] In ogni caso si suppone di mantenere una piccola differenza di temperatura tra l'interno e l'esterno di $\mathcal{S}$, in modo che vi sia effettivamente un flusso di calore attraverso $\partial\mathcal{B}$.

cesso quasistatico, tenendo conto di $(19)_2$ e del fatto che, per i), è, approssimativamente $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$, ossia $\hat{\mathrm{I}} \equiv \bar{\mathrm{I}}$, $\forall\, X \in \mathcal{S}$, si ha:

$$\Delta U_{qs} = \bar{\gamma}^2 \int_{\mathcal{B}} \bar{h}\, d\, c \Big|_0^T + \bar{\gamma}^2 \frac{v^2}{c^2} \int_{\mathcal{B}} p_0\, d\, c \Big|_0^T + 2 \frac{\bar{\gamma}^2}{c^2} \underline{\mathbf{v}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{s}\, d\, c \Big|_0^T ,$$

ove ΔU_{qs} denota che la variazione ΔU è valutata lungo processi omogenei quasistatici. L'omogeneità del campo di temperatura, supposta in ii) comporta che si possa trascurare l'ultimo termine nell'espressione di ΔU_{qs}. Inoltre, sostituendo all'evento $(\mathbf{x}, t)$ l'evento corrispondente in $\bar{\mathrm{I}}$, tenendo conto che, per ii), è irrilevante la perdita di simultaneità nel passaggio da I ad $\bar{\mathrm{I}}$ e che è $d\, c = \bar{\gamma}^{-1}\, d\, \bar{c}$, dalla precedente relazione segue

$$\Delta U_{qs} = \bar{\gamma} \left(\Delta \bar{U}_{qs} + \frac{v^2}{c^2}\, p_0\, \Delta \bar{V} \right) \tag{34}$$

dove

$$\Delta V = V(T) - V(O) \tag{35}$$

con $V(t)$ volume della regione $\mathcal{B}(t)$.

La (34), che rappresenta la formula di trasformazione dell'energia interna, *ha un carattere intrinseco* (cfr. n. 5) e coincide con quella (II) determinata dagli Autori [1], ..., [9] e non con quella proposta da EDDINGTON [10] ed ARZELIÉS [12].

Precedendo come si è innanzi mostrato si ottengono le formule di trasformazione del lavoro e del calore; difatti, sostituendo (33) e $(23)_2$ rispettivamente in (30) e (31), usando i) ed ii), e tenendo conto che, per il teorema di Gauss ed il teorema del trasporto è

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\, \sigma = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\, c = \frac{d}{d\, t}\, V(t) ,$$

si ha:

$$\mathfrak{L}_{qs} = \bar{\gamma}^{-1}\, \bar{\mathfrak{L}}_{qs} + \lambda/\mu \frac{\bar{v}^2}{c^2}\, Q_{qs} , \tag{36}$$

$$Q_{qs} = \mu\, \bar{Q}_{qs}\ ^{9} . \tag{37}$$

[9] Per dedurre la (37) si è tenuto conto della trasformazione

$$\mathbf{n}\, d\, \sigma = \frac{l}{\gamma} \left(\hat{\mathbf{n}} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}\, (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{v^2} \right) d\, \sigma$$

(cfr. [16], pag. 119, formula (i)).

Per meglio interpretare la (36) e confrontarla con le espressioni citate al n. 1, si osservi che, detto

$$\mathbf{G} = \int_{\mathfrak{B}} \mathbf{g}\, d\, c$$

l'*impulso totale* del sistema continuo $\mathfrak{S}$, da (5), utilizzando i) ed ii) si ha intanto

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{G}_{qs} = \frac{\bar{v}^2}{c^2} (\Delta U_{qs} + p_o \Delta V) .$$

Quando poi si tenga conto della (36), dell'espressione di $\bar{\mathcal{L}}_{qs}$ e della relazione $\Delta V = \bar{\gamma}^{-1} \Delta \bar{V}$, da (28) segue

$$\Delta U_{qs} + p_o \Delta V = \bar{\gamma}^2 Q_{qs}$$

e quindi

$$\frac{\bar{v}^2}{c^2} Q_{qs} = \bar{\gamma}^{-2} \bar{\mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{G}_{qs} . \tag{38}$$

La (36) diviene così

$$\mathcal{L}_{qs} = \bar{\gamma}^{-1} \mathcal{L}_{qs} + \bar{\lambda}/\bar{\mu}\, \bar{\gamma}^{-2} \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{G}_{qs} . \tag{39}$$

Le (37) e (39), che coincidono rispettivamente con le $(II)_3$ e $(II)_2$ del n. 1, mostrano esplicitamente il carattere *non intrinseco* delle leggi di trasformazione del calore e del lavoro. Inoltre in (39) figura esplicitamente un termine dovuto all'inerzia dell'energia.

Va rilevato altresì che *le* (37) *e* (39) *contengono, per un'opportuna scelta di* α, *tutte le formule di trasformazione proposte per* $\mathcal{L}$ *e per* Q [10]. Ad esempio, il caso $\alpha = 0$ (ROMANO [21]) comporta, per $(25)_{1,2}$,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{qs} = \bar{\gamma}^{-1} \bar{\mathcal{L}}_{qs} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{G}_{qs} , \\ Q_{qs} = \bar{\gamma}^{-1} \bar{Q}_{qs} , \end{cases} \tag{40}$$

che sono rispettivamente la formula di trasformazione per il lavoro e per il calore determinate dagli Autori [1], . . . , [9].

[10] Relativamente alle formule di EDDINGTON ed ARZELIÉS cfr. quanto detto al n. 1.

Il caso $\alpha = 1$ MØLLER [16] comporta, stanti $(26)_{1,2}$

$$(41) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_{qs} = \bar{\gamma}^{-1}\, \mathfrak{L}_{qs}\,, \\ \mathrm{Q}_{qs} = \bar{\gamma}\, \bar{\mathrm{Q}}_{qs}\,, \end{cases}$$

che sono rispettivamente la formula di trasformazione del lavoro determinata da KIBBLE [15] ed accettata da MØLLER [16] e la formula di trasformazione per il calore determinata dagli Autori [10], [11], [12], [15], [16]. Il complesso delle (34), (41) coincide con quello determinato da KIBBLE [15].

Come ulteriore esempio, si osservi che, in corrispondenza del seguente valore per α,

$$\alpha = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma\, \dfrac{v^2}{c^2}}$$

si ottiene

$$(42) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_{qs} = \bar{\gamma}^{-1}\, \overline{\mathfrak{L}}_{qs} + (\bar{\gamma} - 1)\, c^2\, \dfrac{\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{G}_{qs}}{v^2} \\ \mathrm{Q}_{qs} = \bar{\mathrm{Q}}_{qs} \end{cases}$$

di cui la $(42)_2$ esprime l'*invarianza del calore* proposta da LANDSBERG [17].

Si può pertanto concludere che è possibile unificare le svariate leggi di trasformazione proposte per le grandezze termodinamiche globali Q ed $\mathfrak{L}$, ottenendosi queste mediante opportune decomposizioni di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{p}$. Poiché, come rilevato alla fine del n. 2, *le diverse decomposizioni sono tutte equivalenti, e pertanto prive di reale significato fisico, tali risultano anche le leggi di trasformazione per* $\mathfrak{L}$ *e* Q.

Pertanto, *la dibattuta questione delle leggi di trasformazione per le grandezze termodinamiche globali non ha ragione di essere, essendo corrette tutte le leggi di trasformazione se deducibili da una opportuna decomposizione.*

È però evidente che la scelta di una decomposizione si riflette sulla scelta di una definizione operativa di calore e lavoro; pertanto, quando si effettuino delle misure, le formule di trasformazione da confrontare con i risultati sperimentali sono quelle corrispondenti alla decomposizione relativa alla definizione operativa adottata.

BIBLIOGRAFIA

[1] EINSTEIN A., Jahrb. Radiact. Electr., 1907, pag. 411.
[2] PLANCK M., Ann. der Phys., t. 26, 1908, pag. 1.
[3] HASENÖHRL F., S. B. Akad. Wiss. Wien, **116**, 1907, pag. 1391.
[4] VON LAUE M., « Die Relativitätstheorie », 1919, Viewgand Sohn, Braunschweig.
[5] PAULI W., « Theory of Relativity », Londra, 1958.
[6] DE BROGLIE L., Cahiers de Physique, genn. 1948, pag. 1.
[7] MØLLED C., « The theory of Relativity », Oxford Univ. Press, 1952.
[8] PATHRIA R. K., Proc. Phys. Soc., **88**, 1966, pag. 791.
[9] GUESSOUS A., « Thermodinamique Relativiste », Gauthier-Villars, Paris, 1970.
[10] EDDINGTON A. S., « The mathematical theory of Relativity », Cambridge, 1923.
[11] OTT H., Zeits. fur Phys., t. 175, 1963, pag. 70.
[12] ARZELIÉS H., Nuovo Cimento, vol. XXXV, 1965, pag. 792.
[13] ARZELIÉS, H., Nuovo Cimento, vol. XL B, 1965, pag. 333.
[14] ARZELIÉS H., Nuovo Cimento, vol. L, 1967, pag. 287.
[15] KIBBLE T. W. B., Nuovo Cimento, vol. XLI, 1966, pag. 72.
[16] MØLLER C., « The theory of Relativity », Oxford Univ. Press, 1972.
[17] LANDSBERG P. T., Proc. Roy. Soc. G. B., t. 306 A, 1966, pag. 1007.
[18] ROHRLICH F., Nuovo Cimento, vol. XLV, 1966, pag. 76.
[19] CARRASSI M., Meccanica, **6**, 1971, pag. 80.
[20] ROMANO A., Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Napoli, Serie IV, vol. XL, 1973, pag. 235.
[21] ROMANO A., Ann. di Matematica, Serie IV, t. XCX, 1973, pag. 211.
[22] TRUESDELL C., « Rational Thermodynamics », McGraw-Hill, 1969.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Tolotti, F. Stoppelli e G. Pannella.

Sintesi storica della risoluzione dell'equazione di Keplero per mezzo della serie di Lagrange

Nota di ENNIO BADOLATI
presentata dal socio ordinario TITO NICOLINI

(Adunanza del 3 aprile 1976)

RIASSUNTO. — Il problema della convergenza della serie di Lagrange relativa al problema kepleriano viene sintetizzato storicamente attraverso l'esame di alcune memorie scritte sull'argomento.

Inoltre si dà un complemento alla bibliografia sul problema kepleriano pubblicata da RADAU nel 1900.

ABSTRACT. — In this paper the author exposes the historical development of the solution of Kepler's equation by the Lagrange's series.

Furthermore the author brings up to date the RADAU's bibliography on Kepler's problem.

1. — Nel 1770 LAGRANGE presentava all'Accademia di Berlino una memoria dal titolo « Nouvelle méthode pour resoudre les équations littérales par le moyen des séries ». Questa memoria, rivelatasi poi come una delle più notevoli pubblicazioni di quel tempo, era divisa in quattro parti: nella prima si esprimevano le somme delle potenze di grado qualunque delle radici di un'equazione (algebrica), nella seconda si esponeva il ben noto sviluppo in serie [1], nella terza si spiegava come distinguere le radici di un'equazione e come rappresentarle per serie mentre nella quarta parte, infine, si studiava la convergenza delle serie medesime.

È importante sottolineare come in quest'ultima parte LAGRANGE si renda ben conto che una soluzione ottenuta in maniera formale possa non risultare una soluzione effettiva. Infatti così si esprime « Il ne suffit pas de pouvoir exprimer les racines ... par des séries

[1] L'enunciato dato da Lagrange, salvo le condizioni di convergenza, è sostanzialmente eguale a quello che si dà attualmente.

régulièrs . . . il faut surtout pouvoir reconnaître . . . si elles sont convergentes à l'infini ou non ».

2. — L'anno successivo LAGRANGE scriveva la memoria « Sur le problème de Képler » nella quale, applicando i risultati conseguiti precedentemente, otteneva gli sviluppi in serie di numerose funzioni interessanti la meccanica celeste. In particolare dall'equazione di Keplero [2]

$$M = E - \varepsilon \sin E \tag{1}$$

ricavava

$$E = M + \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\,M^{k-1}} \sin^k M \tag{2}$$

e similmente dall'equazione del raggio vettore

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos E \tag{3}$$

otteneva

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos M + \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{\varepsilon^{k+1}}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\,M^{k-1}} \sin^{k+1} M\,. \tag{4}$$

Stranamente, però, l'illustre matematico non esaminava la convergenza di tali sviluppi, trincerandosi dietro una generica convergenza per valori molto piccoli dell'eccentricità ε, e ciò costituisce veramente un fatto inspiegabile se si tiene presente quanto detto nell'ultima parte della precedente memoria.

Il problema di riconoscere l'insieme di convergenza della (2) e della (4) (per ogni valore reale di M) fu quindi affrontato da LAPLACE, il quale, pur avendo esposto nella sua « Mécanique Céleste » la (2) e la (4) col diplomatico commento « Cette série est fort convergente pour les planètes », nel 1823 scrisse la memoria « Sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique . . . » [3] nella quale, ser-

[2] Nella memoria di Lagrange al posto dei simboli M, ε, E, $\frac{r}{a}$ si adoperano rispettivamente, t, $-n$, x, r. Inoltre in queste considerazioni supporremo che M ed ε siano quantità reali ($\varepsilon \in [0,1]$) mentre E sarà una quantità variabile nel piano complesso.

[3] Fu pubblicata nel 1827. Inoltre essa fu inserita nella Mécanique Céleste tomo V (Supplement) (Parigi 1825).

vendosi di uno sviluppo asintotico del termine generico della (4), perveniva, primo fra tutti, a stabilire il confine superiore

$$\varepsilon_1 = 0.66$$

di convergenza delle (2) e (4).

3. — Sulla questione sollevata da LAPLACE tornò, qualche anno dopo, CAUCHY con la memoria « Sur divers points d'analyse » (del 1827 ma pubblicata nel 1829) e poi con molte altre ancora.

In esse egli indagava, più in generale, sulla convergenza di una qualsiasi serie di Lagrange e quindi, con i metodi delle funzioni di variabile complessa e con l'introduzione dei concetti di modulo massimo e di modulo principale di una funzione [4], giungeva ad un teorema del tutto generale. In particolare, per il problema di Keplero, il risultato era che ε_1 coincideva col più piccolo dei valori di ε per cui la (1) aveva una radice doppia ovvero il più piccolo dei valori di ε per cui le due equazioni

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} M = E - \varepsilon \sin E \\ 1 = \varepsilon \cos E \end{cases}$$

avevano una radice in comune.

Oltre a CAUCHY scrissero delle memorie su quest'argomento altri matematici tra i quali ricordiamo PUISEUX e SERRET: in sostanza i loro studi sulla convergenza delle serie (2) e (4) consistono nell'applicazione della regola (5) di CAUCHY, con opportune semplificazioni e con valutazioni numeriche della costante ε_1. In particolare SERRET, nella memoria « Sur l'équation dont dépend l'anomalie excentrique... », riusciva ad enumerare le radici (reali e complesse) del sistema (5) e dell'equazione (1), riconoscendo la radice della (1) alla quale convergeva la serie (2).

4. — E giungiamo così al 1862, anno in cui ROUCHÉ pubblicava la memoria « Sur la série de Lagrange », che, per comune consenso, è da annoverare fra le più importanti sull'argomento. In essa vengono date, in forma semplice e completa, le condizioni di validità di uno sviluppo in serie di Lagrange e si caratterizza l'insieme di con-

[4] Così la definizione di Cauchy: se $f(z)$ è una funzione della variabile complessa $z = \rho e^{i\theta}$, fissato ρ, il massimo di $|f(z)|$, sia R, si dirà modulo massimo di $f(z)$. Evidentemente R dipende da ρ: ora si dirà modulo principale di $f(z)$ il valore di R che corrisponde al valore di ρ che verifica l'equazione $f'(z) = 0$.

vergenza della stessa. Inoltre vengono considerate svariate applicazioni, tra cui quella relativa all'equazione di Keplero, ed una stima dell'errore che si commette troncando una serie di Lagrange all'm-mo termine. Di grande interesse è anche una sintesi del metodo usato precedentemente da CAUCHY.

Particolarmente interessante, per i nostri fini, è l'analisi fatta da ROUCHÉ sulla convergenza della (2) e della (4). Con qualche semplificazione la condizione di Rouché può riassumersi alla seguente maniera: se esiste (nel piano complesso della variabile E) un contorno S sul quale si abbia

$$\varepsilon \left| \frac{\sin E}{E - M} \right| < 1 \tag{6}$$

allora la (1) ammette all'interno di S una sola radice (quella cioè che per $\varepsilon \to 0$ ha per limite M) e la (2) converge ad essa [5].

Prendendo come contorno S il circolo γ di centro M e raggio ρ avremo

$$E = M + \rho e^{i\varphi} \qquad (\varphi \in [-\pi, \pi])$$

e quindi vi sarà convergenza per

$$\varepsilon < \frac{\rho}{H(\rho)} \tag{7}$$

dove $H(\rho)$ è il massimo di $|\sin E| = |\sin(M + \rho e^{i\varphi})|$ al variare di M lungo l'asse reale e al variare di φ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ (ma con ρ costante). Pertanto se cerchiamo il valore ρ_1 che rende massima l'espressione $\rho / H(\rho)$, avremo convergenza per tutti valori $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1$, essendo

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_1}{H(\rho_1)} . \tag{8}$$

5. — Il calcolo delle costanti ρ_1 ed ε_1 si può effettuare, come ci proponiamo di far vedere, per mezzo di procedimenti iterativi. Infatti dalla relazione di Rouché

$$H(\rho) = \frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{2}$$

[5] Più in generale risulta convergente la serie (con $f(E)$ funzione olomorfa)

$$f(E) = f(M) + \sum_1^{\infty}{}_k \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d M^{k-1}} [f'(M) \sin^k M] .$$

si riconosce subito che la (7) può scriversi [6]

$$\varepsilon < \frac{\rho}{\cosh \rho}$$

e quindi ρ_1 sarà radice dell'equazione

$$\rho = \operatorname{ctgh} \rho \tag{9}$$

che si può risolvere per iterazione. Si vede facilmente che le iterate formano una successione di valori approssimati alternativamente per eccesso e per difetto, onde, troncando il procedimento all'm-mo termine ρ_m, si può stimare l'errore commesso con la formula

$$| \rho_1 - \rho_m | < | \rho_{m-1} - \rho_m | .$$

Poiché dalle relazioni (8) e (9) segue la formula

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\rho_1^2 - 1} \tag{10}$$

da essa, nota una valutazione di ρ_1, possiamo ricavare un valore approssimato di ε_1, o meglio, delle limitazioni per il suo valore.

Infatti, per quanto detto, possiamo trovare delle limitazioni per ρ, e cioè

$$\rho' < \rho_1 < \rho''$$

da cui, per la (10), avremo con ovvie notazioni

$$\varepsilon' < \varepsilon_1 < \varepsilon'' . \tag{11}$$

Ora, poichè dalla (10) e dalla (8) si ricava che ε_1 è radice della equazione

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\cosh \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \tag{12}$$

possiamo, tenendo conto delle (11), calcolare il valore di ε_1 applicando alla (12) il metodo d'iterazione. Anzi il procedimento iterativo

[6] Curiosamente la maggior parte degli analisti del secolo scorso non fece uso di funzioni iperboliche in questo problema, forse per la mancanza di adeguate tavole.
I primi a farne cenno furono Briot e Bouquet nella loro « Théorie des fonctions elliptiques » (Parigi II ed. 1875) (lb. IV, cap. II).

definito dalla (12) risulta abbastanza rapido, per cui, dopo poche iterazioni, si è trovato [7]

$$\varepsilon_1 = 0.662\,743\,41\,.$$

Infine, per dare una stima sull'errore che si commette troncando l'iterazione all'm-ma iterata ε_m, ci si può servire, per note proprietà, della seguente diseguaglianza

$$|\,\varepsilon_1 - \varepsilon_m\,| \leq k^m\,(\varepsilon'' - \varepsilon')$$

ove k indica il massimo, nell'intervallo $[\varepsilon', \varepsilon'']$, della derivata della funzione che compare a secondo membro della (12).

6. — Con la memoria di ROUCHÉ si può ritenere chiuso il problema della convergenza della (2), sollevato circa un secolo prima: aperta, invece, restava la questione di trovare una soluzione realmente efficiente dell'equazione di Keplero, visto che la (2) non ha goduto di eccessivo favore presso gli astronomi, i quali le rimproveravano una scarsa utilità pratica. Così LEVERRIER [8] osservava che, nella pratica, l'uso della (2) era conveniente solo per $\varepsilon < 0.25$, mentre più drasticamente GAUSS e DE GASPARIS [9] ne respingevano l'uso.

Né si può dire che gli sviluppi (2) e (4) siano stati utili nelle ricerche teoriche della meccanica celeste (ad es. nella teoria delle perturbazioni) perché, come vedremo, in quegli studi sono stati preferiti altri tipi di sviluppi.

7. — Diamo ora un rapido cenno sulle ricerche di BESSEL sul problema kepleriano: questo valente astronomo (e matematico) intese di risolvere la (1) sviluppando la funzione E (M), che da essa si può dedurre, in serie trigonometrica in modo da avere

$$\mathrm{E} = \mathrm{M} + \sum_1^\infty{}_k\, \mathrm{A}_k \sin k\,\mathrm{M} \tag{13}$$

e poi, similmente,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_1^\infty{}_k\, \mathrm{B}_k \cos k\,\mathrm{M} \tag{14}$$

con i coefficienti A_k e B_k funzioni dell'eccentricità ε.

[7] Il calcolo di ε_1, come pure quello di ρ_1, si può effettuare facilmente adoperando una calcolatrice elettronica, anche tascabile.

[8] Annales de l'Observatoire - vol. I (1855) pag. 204.

[9] Si veda, all'uopo, l'interessante memoria del De Gasparis citata nella bibliografia o anche la celebre « Theoria motus . . . » di Gauss (Amburgo 1809 - pag. 10 e sgg.).

A dire il vero gli sviluppi in serie secondo i seni o i coseni degli angoli multipli di M erano già noti in precedenza e lo stesso LAGRANGE, nella memoria sul problema kepleriano, aveva notato che le (2) e (4), come serie doppie in ε ed M, si potevano ordinare [10] rispetto a sin k M e cos k M, in modo da ottenere serie del tipo (13) e (14); piuttosto il metodo di BESSEL risiede nell'aver analizzato a fondo le funzioni $A_k(\varepsilon)$ e $B_k(\varepsilon)$ e nell'aver introdotto, a questo riguardo, delle nuove funzioni che in suo onore vennero chiamate funzioni di Bessel [11].

Ovviamente non possiamo intrattenerci oltre sulla storia delle funzioni di Bessel, ma tanto bastava per chiarire quanto detto prima e cioè che alle (2) e (4) sono stati preferiti gli sviluppi del tipo (13) e (14), i quali, oltretutto, presentano il vantaggio di convergere per tutti i valori $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

8. — Pertanto sembrerebbe di poter concludere con un giudizio negativo sulla serie di Lagrange applicata al problema di Keplero, ma se consideriamo tutte le ricerche che essa ha stimolato ed i risultati che ne sono conseguiti, possiamo concludere con un giudizio largamente positivo e di grande interesse per la storia della matematica.

9. — Circa il valore numerico di ε_1 (e di ρ_1), come già detto, il primo a darne una valutazione fu LAPLACE, il quale riconobbe che se ω era radice dell'equazione

$$\frac{1-\omega}{\omega} = e^{\frac{2}{1-2\omega}}$$

allora veniva

$$\varepsilon_1 = \frac{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}{1-2\omega}.$$

Trovato $\omega = 0.08307$ [12] egli ottenne il valore

$$\varepsilon_1 = 0.66195$$

corretto sino alla 2ª cifra decimale.

[10] A quei tempi i concetti relativi alle serie doppie non erano ancora ben chiari In partitcolare si noti che le (2) e (4), come serie doppie in ε ed M, convergono semplicemente ma non assolutamente e quindi la convergenza dipende in maniera essenziale dal metodo di sommazione, ciò che spiega come le (13) e (14) possano convergere per $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

[11] O meglio coefficienti di Bessel (funzioni di Bessel di I specie e di ordine intero). Aggiungiamo che la locuzione « funzioni di Bessel » è dovuta ad Jacobi.

[12] In effetti si trova $\omega = 0.083\,221\,72\ldots$

Dopo LAPLACE anche CAUCHY (Exercices d'analyse - « Considérations nouvelles . . . » tomo I Parigi 1840) intraprese il calcolo di ρ_1 e di ε_1, trovando per ρ_1 l'equazione [13]

$$1 - \frac{\rho^2}{2!} - \frac{3\rho^4}{4!} - \frac{5\rho^6}{6!} - \ldots = 0 \tag{15}$$

da cui, per approssimazioni successive, ricavava

$$\rho_1 = 1.199\,678$$

e quindi

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\rho_1^2 - 1} = 0.662\,742 .$$

In seguito, basandosi sempre sulla (15), PUISEUX trovava (nel 1849)

$$\rho_1 = 1.1996$$

$$\varepsilon_1 = 0.662$$

ed analogamente SERRET nel 1856 otteneva i seguenti valori

$$\rho_1 = 1.1996$$

$$\varepsilon_1 = 0.66195$$

di cui il secondo manifestamente eguale a quello di LAPLACE.

Ma a queste considerazioni aveva buon gioco CATALAN nell'obiettare che alla (15) poteva sostituirsi la ben più semplice equazione [14]

$$2\rho = \log \frac{\rho + 1}{\rho - 1} \tag{16}$$

da cui ricavava

$$\rho_1 = 1.199\,678$$

$$\varepsilon_1 = 0.662\,742$$

con ε_1 corretto sino alla penultima cifra.

[13] Si può giungere alla (15) scrivendo la (9) nella forma $\rho \sin h\,\rho - \cos h\,\rho = 0$ e quindi sviluppando in serie le due funzioni iperboliche.

[14] La (16) era già nota a Cauchy. Essa si ottiene facilmente dalla (9) ricordando che $\operatorname{ctgh}\rho = \frac{e^{2\rho}+1}{e^{2\rho}-1}$.

Tre anni dopo SERRET tornava sull'argomento e, tenuto conto del suggerimento di CATALAN, determinava i valori di ρ_1 e di ε_1 rispettivamente con 8 e 7 cifre decimali.

Anche ROUCHÉ, nella sua ben nota memoria, si occupò della valutazione delle costanti ρ_1 ed ε_1. Servendosi dell'equazione (16) e del metodo di Newton, ottenne i valori

$$\rho_1 = 1.199\,678\,64$$

$$\varepsilon_1 = 0.662\,743\,4$$

identici a quelli trovati da SERRET.

Altre valutazioni di ρ_1 ed ε_1 furono date da SCHLÖMILCH [15].

Era chiaro, quindi, che il valore di ε_1 dato da LAPLACE era corretto solo parzialmente, tuttavia STIELTJES, per eliminare ogni dubbio, riprese il calcolo dei valori ρ_1, ω ed ε_1 ottenendo delle approssimazioni spinte sino alla 15ª e 13ª cifra decimale.

Egli comunicò questi valori ad HERMITE [16] senza indicare il metodo di calcolo seguito, ma si può congetturare che si sia servito, come la maggior parte dei suoi predecessori, del metodo delle tangenti insieme a qualche accorgimento pratico.

La questione fu ulteriormente ripresa dal CASALE che, nel 1939, servendosi del metodo di Newton con le modificazioni di CASSINA, calcolava dall'equazione (16) scritta nella forma ($x = 2\rho$)

$$e^x = -\frac{x+2}{x-2}$$

dei valori di ε_1 e ρ_1 con 21 cifre decimali.

BIBLIOGRAFIA

Testi di storia delle matematiche o comunque di interesse storico:

BERRY A., *A short history of astronomy* (1898 rist. New York 1961).
CAJORI F., *A history of mathematics* (New York 1919).
DUGAS R., *A history of mechanics* (Neuchatel 1955).
SMITH E. D., *History of mathematics* (vol. I) (Boston 1923).

[15] Compendium der Höheren Analysis. (Braunschweig 1866) (vol. II - pag. 108 e sgg.).
[16] Lettera del 13 maggio 1889. Nella stessa lettera sono riportati i valori ottenuti da Laplace e da Schlömilch.

TISSERAND F., *Traité de mécanique céleste* (vol. I) (Parigi 1888).
WATSON G. N., *Theory of Bessel functions* (2 ed. Cambridge, rist. 1966).
Correspondance d'Hermite et de Stieltjes (a cura di Baillaud e Bourget) (Parigi 1905).

Memorie sull'argomento:

LAGRANGE J. L., *Nouvelle méthode pour résoudre les équations* ... (Hist. Ac. Berlin 1768 [1770]).
LAGRANGE J. L., *Sur le problème de Képler* (Hist. Ac. Berlin 1769 [1771]).
BESSEL F. W., *Analytische Auflösung der Keplerschen Aufgabe* (Berliner Abh. 1819).
LAPLACE P. S., *Sur le développement de l'anomalie vraie* (Mem. Ac. Sc. Paris 1823 [1827]).
CAUCHY A. L., *Sur divers points d'analyse* (Mem. Ac. Sc. Paris 1827 [1829]).
CAUCHY A. L., *Exercices d'analyse et de physique mathématique* (t. I e II Parigi 1840-41).
PUISEUX V. A., *Seconde note sur la convergence des séries* ... (Jour. math. pures appl. 1849).
CAUCHY A. L., *Sur la transformation des variables* ... (Compt. Rendus t. 38° - 1854).
LE VERRIER U., *Annales de l'Observatoire* (vol. I 1855).
SERRET J. A., *Sur la condition de convergence des séries* (Compt. Rendus t. 42° - 1856).
CATALAN E., *Note a l'occasion d'un théorème de M. Serret* (Comp. Rendus t. 42° - 1856).
CEBIČEF P. L., *Sur la série de Lagrange* (Jour. math. pures appl. 1857).
SERRET J. A., *Sur l'équation dont dépend l'anomalie excentrique* (Ann. de l'Obs. (V) 1859).
ROUCHÉ E., *Sur la série de Lagrange* (Jour. Ec. Polyt. 1862).
DE GASPARIS A., *Altra soluzione numerica del problema detto di Keplero* (Rend. Acc. Sc. Napoli 1877).

Bibliografia del problema di Keplero:

RADAU R., *Bibliographie du problème de Képler* (Bull. Astr., 1900).

Aggiornamento della bibliografia sull'equazione di Keplero:

1) WEILER A., *Eine neue Lösung des Kepler'schen Problems* (Astr. Nach. (150) 1899).
2) GONGGRIJP B., *Uber eine graphometrische Lösung der Keplerischen Gleichung* ... (Astr. Nach. (155) 1901).
3) LE GRAND ROY E., *Résolution graphique de l'équation de Kepler d'après Radau* (Arch. Sc. Phys. 1903).
4) LEVI CIVITA T., *Sopra l'equazione di Kepler* (Rend. Acc. Lincei 1904).
5) RAMBAUT A. A., *A simple method of obtaining an approximate solution of Kepler's equation* (M.N.R.A.S. (66) 1906).
6) WITT G., *Zur numerischen Auflösung zweier Gleichungen in der Planetentheorie* (Astr. Nach. (172) 1906).
7) PLUMMER H. C., *On a mechanical solution of Kepler's problem* (M.N.R.A.S. (67) 1907).
8) MOULTON F. R., *Direct computation of the expression for the coordinates in the elliptic motions* (Astr. Journ. 1907).
9) CHRETIEN H., *Nouvel abaque du problème de Kepler* (Compt. Rend. Ass. fran. p. l'avancement des sciences 1907).
10) RUST F., *Proposal of a new method to compute a planet's anomaly and radius vector* (Pop. Astr. 1908).
11) LAVES K., *A reply to F. Rust's paper* (Pop. Astr. 1908).
12) MACHE H., *Uber die Anwendung des logarithmischen Rechenschiebers* ... (Astr. Nach. (186) 1910).

13) TROUSSET J., *Sur l'équation de Képler* (Bull. Astr. 1911).
14) RAMBAUT A. A., *The solution of Kepler's problem* (Astr. Journ. 1913).
15) DOLAINSKI F., *Graphisches Verfahren zur Lösung der Kepler'schen Gleichung* (Astr. Nach. (194) 1913).
16) LÀSKA V., *Ein Nomogramm zur Auflösung der Kepler'schen Gleichung* (Astr. Nach. (199) 1914).
17) HARTMANN J., *Zur Auflösung der Keplerschen Gleichung* (Astr. Nach. (205) 1918).
18) WILKENS A., *Zur Auflösung der Keplerschen Gleichung* (Astr. Nach. (206) 1918).
19) WEDEMEYER A., *Zur Auflösung der Kaplerschen Gleichung* (Astr. Nach. (206) 1918).
20) GAYTHORPE S. B., *An approximate solution of Kepler's equation* (Journ. British. Astr. Ass. 1919).
21) HOWE H. A., *A desideratum in solving Kepler's problem* (Pop. Astr. 1919).
22) VIARO B., *Sulla risoluzione della equazione di Keplero* (Atti R. Ist. Veneto 1920).
23) HOWE H. A., *Kepler's problem for high planetary eccentricities* (Pop. Astr. 1922).
24) LEVIN A. E., *The slide rule as an auxiliary to the solution of Kepler equation* (M.N.R.A.S. (82) 1922).
25) INNES R. T. A., *Elliptic expansions* (Astr. Journ. 1924).
26) UETA Y., *A mechanical solution of Kepler's equation* (M.N.R.A.S. (87) 1927).
27) WILLS J. E., *On facilitating the accurate solution ...* (Astr. Journ. 1929).
28) BOBONE J., *Resolucion de la eccuacion de Kepler* (Revista Astr. - Buenos Aires 1930)
29) MOULTON F. R., *Metodo grafico para resolver la eccuacion de Kepler* (Revista Astr. Buenos Aires 1930).
30) BROWN E. W., *On a method of solving Kepler's equation* (M.N.R.A.S. (92) 1932).
31) GERMAY R. H. J., *Sur une formule de Levi Civita ...* (Ac. R. de Belgique - Bull. classe des sciences - Bruxelles 1931).
32) PASQUALE S., *Sulla risoluzione dell'equazione di Kepler* (Atti Pont. Acc. Sc. Nuovi Lincei (86) 1933).
33) MÖLLER J. P., *Calculation of Ephemerides ...* (M.N.R.A.S. (93) 1933).
34) HUMBERT P., *Sur l'équation de Kepler pour les orbites hyperboliques* (Publ. de l'O. A. Belgrade - Memoires - 1934).
35) SCONZO P., *Sulla risoluzione dell'equazione di Kepler* (Acta Pont. Acc. Nuovi Lincei 1934).
36) DE JEKHOWSKI B., *Sur la résolution de l'équation de Keplér* (Journ. des Observateurs (22) 1939).
37) CASALE F., *Su di un'equazione collegata a quella di Keplero* (Rend. Ist. Lomb. 1939).
38) MÖLLER J. P., *On the solution of Kepler's equation* (Festschrift fur E. Strömgren-Kopenaghen 1940).
39) RAND W. C., *A graphical method for the approximate solution of Kepler's equation* (Journ. British Astr. Ass. 1942).
40) SCHÜRER M., *Die Keplersche Gleichung ...* (Astr. Nach. (274) 1944).
41) LANGEBARTEL R. G., *A note on Kepler's equation* (Astr. Journ. 1948).
42) WOOD H., *Kepler's problem* (Sidney Obs. Papers - n. 10 - 1950).
43) STRASSL H., *Nomogramme zur Auflösung der Keplerschen Gleichung* (Astr. Nach. (279) 1950).
44) CANDY M. P., *Solution of Kepler's problem for large eccentricities* (Observatory 1955).
45) WOOD H., CANDY M. P., *Kepler's problem for large eccentricities* (Observatory 1955).
46) BELORTZKY D., *Sur le calcul des coordonnés dans les orbites quasi paraboliques* (Journ. des Observateurs 1955).
47) DANJON A., *Sur la résolution de l'équation de Képler* (Journ. des Observateurs (39) 1956).

48) SMITH O. K., *Terminating the iterative solution of Kepler's equation* (American Rocket Soc. Journ. 1961).
49) FREDRICH J., *Zur Lösung der Keplerschen Gleichung* (Astr. Nach. (288) 1965).
50) BROUCKE R., *How to assemble a Keplerian processor* (Celestial Mechanics 1970).
51) SIEWERT C. E., BURNISTON E. E., *An exact closed-form solution of Kepler's equation* (Bull. Am. Astr. Ass. 1972).
52) FICHERA E., *Récherché du terme de n-ième ordre des développements de l'astrodynamique* (Celestial Mechanics 1974).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci T. Nicolini, C. Miranda e C. Tolotti.

Una formula di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione del quarto ordine

Nota di ANTONIETTA CIOFFI
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 3 aprile 1976)

SUMMARY. — In this paper an estimate for solutions $v(x_1, x_2)$ of the equation $(\Delta - a_1)(\Delta - a_2)\, v = 0 \quad 0 \leq a_1 \leq a_2$, is obtained.

SOMMARIO. — Si ottiene una formula di maggiorazione per le soluzioni $v(x_1, x_2)$ dell'equazione $(\Delta - a_1)(\Delta - a_2)\, v = 0 \quad 0 \leq a_1 \leq a_2$.

Scopo del presente lavoro è quello di stabilire una formula di maggiorazione per le soluzioni del problema, che indicheremo con $\mathrm{P}\,\psi$:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \mathrm{L}\, v \equiv (\Delta - a_1)(\Delta - a_2)\, v = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad 0 \leq a_1 \leq a_2 \\
&\qquad\quad v = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{su } \partial\Omega \\
&\qquad\quad \frac{d\, v}{d\, n} = \psi \qquad\qquad\qquad\qquad \text{su } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

dove $v(x_1, x_2) \in \mathrm{C}^{(4)}(\Omega) \cap \mathrm{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ e $\psi \in \mathrm{C}^{(0)}(\partial\Omega)$, essendo Ω un aperto piano limitato con frontiera sufficientemente regolare ed n la normale a $\partial\Omega$ in un suo punto generico orientata verso l'interno di Ω.

Dimostreremo i seguenti teoremi:

TEOREMA I. *Se* $v(x_1, x_2)$ *di classe* $\mathrm{C}^{(4)}(\Omega) \cap \mathrm{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *è soluzione del problema* $\mathrm{P}\,\psi$ *con* $\psi \in \mathrm{C}^{(0)}(\partial\Omega)$, *e se* $2\,d$ *è il diametro di* Ω, *si ha la maggiorazione*:

$$
(2) \qquad |v| \leq \mathrm{K} \max |\psi|
$$

con

$$K = \min\left[\frac{d}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{a_1 + a_2}}\right]. \tag{3}$$

TEOREMA II. *Nelle stesse ipotesi del teorema I e se inoltre* $a_1 d^2 < \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$, *posto*

$$B = \sqrt{\frac{\lambda}{[1 - \lambda(1 + 2 a_1 d^2)](2 - \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 8})}}$$

si ha:

$$\sqrt{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2} \leq \min_{\lambda} B \cdot \max|\psi| \tag{4}$$

il minimo essendo preso per $\lambda \in \left(3 - \sqrt{5}, \frac{1}{1 + 2 a_1 d^2}\right)$.

Il procedimento consiste nel dimostrare preliminarmente le formule (2) e (4) per funzioni di classe $C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$ che soddisfino un problema $P\varphi$ con $\varphi \in C^{(1,\alpha)}(\partial\Omega)$; successivamente mediante un procedimento di approssimazione si deducono (2) e (4) per le soluzioni v di classe $C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$ del problema $P\psi$ con $\psi \in C^{(0)}(\partial\Omega)$.

Se $a_1 = a_2 = 0$ la formula dimostrata si riduce a quella stabilita da C. MIRANDA in [1]. Nel caso generale non si può però dedurre dal risultato ottenuto il teorema di unicità per le soluzioni di $P\psi$ perché esso viene presupposto nella dimostrazione dei teoremi I e II.

1. - FORMULE DI RAPPRESENTAZIONE PER LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE.

In questo numero, supposto v di classe $C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$ soluzione dell'equazione (1), fissato un punto P in Ω e indicata con h la sua distanza da $\partial\Omega$, otteniamo, sviluppando un procedimento indicato da M. PICONE (cfr. [2]), uno sviluppo in serie di Fourier della v relativamente al cerchio Γ di centro in P e raggio h, i coefficienti di tale sviluppo potendosi valutare mediante i valori di v e della sua derivata normale sulla frontiera di Γ.

Espressa la $v(x_1, x_2)$ in coordinate polari (ρ, ϑ) con polo in P, osserviamo che, posto

$$v^{(s)}(\rho) = \int_0^{2\pi} v(\rho, \vartheta)\, e^{-is\vartheta}\, d\vartheta \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

si ha:

$$\int_0^{2\pi} (\Delta v - a_k v)\, e^{-is\vartheta}\, d\vartheta = \frac{d^2 v^{(s)}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{d v^{(s)}(\rho)}{d\rho} - \left(a_k + \frac{s^2}{\rho^2}\right) v^{(s)}(\rho) \qquad (k = 1, 2)$$

e pertanto, indicando con D_{ks} l'operatore besseliano

$$\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho} - \left(a_k + \frac{s^2}{\rho^2}\right),$$

otteniamo:

$$\int_0^{2\pi} (\Delta - a_1)(\Delta v - a_2 v)\, e^{-is\vartheta}\, d\vartheta = D_{1s}\, D_{2s}\, v^{(s)}(\rho);$$

quindi l'equazione (1) fornisce, per $\rho < h$:

$$D_{1s}\, D_{2s}\, v^{(s)}(\rho) = 0. \tag{5}$$

Ora, dette I_s e K_s le funzioni di Bessel modificate rispettivamente di prima e di seconda specie d'ordine s, l'equazione omogenea:

$$D_{ks}\, w \equiv \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{d w}{d\rho} - \left(a_k + \frac{s^2}{\rho^2}\right) w = 0,$$

ha, per $a_k \neq 0$, gli integrali fondamentali

$$W_{k1}^{(s)} = I_s(\sqrt{a_k}\,\rho), \qquad W_{k2}^{(s)} = K_s(\sqrt{a_k}\,\rho), \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

per $a_k = 0$ e $s \neq 0$

$$W_{k1}^{(s)} = \rho^{|s|}, \qquad W_{k2}^{(s)} = \rho^{-|s|}, \qquad (s = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

per $a_k = 0$ e $s = 0$

$$W_{k1}^{(0)} = 1, \qquad W_{k2}^{(0)} = \log \rho,$$

quindi dalla (5) con due successive quadrature otteniamo

$$D_{2s}\, v^{(s)}(\rho) = c_1\, W_{11}^{(s)}(\rho) + c_2\, W_{12}^{(s)}(\rho)$$

$$v^{(s)}(\rho) = c_3\, W_{21}^{(s)}(\rho) + c_4\, W_{22}^{(s)}(\rho) + w_1^{(s)}(\rho) + w_2^{(s)}(\rho) \tag{6}$$

con $w_k^{(s)}(\rho)$ integrale particolare dell'equazione

$$D_{2s}\, w = c_k\, W_{1k}^{(s)} \qquad (k = 1, 2),$$

e le c_i costanti.

Si ha allora dalla (6):

se $a_1 = a_2 = 0$

$$\text{(7a)} \quad \begin{cases} v^{(0)}(\rho) = c_1^{(0)} + c_2^{(0)} \log \rho + c_3^{(0)} \rho^2 + c_4^{(0)} \rho^2 \log \rho \\ v^{(\pm 1)}(\rho) = c_1^{(\pm 1)} \rho + c_2^{(\pm 1)} \rho^{-1} + c_3^{(\pm 1)} \rho^3 + c_4^{(\pm 1)} \rho \log \rho \\ v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} \rho^{|s|} + c_2^{(s)} \rho^{-|s|} + c_3 \rho^{|s|+2} + c_4^{(s)} \rho^{-|s|+2} \qquad (|s| \geq 2), \end{cases}$$

se $a_1 = 0,\ a_2 > 0$

$$\text{(7b)} \quad \begin{cases} v^{(0)}(\rho) = c_1^{(0)} + c_2^{(0)} \log \rho + c_3^{(0)} I_0(\sqrt{a_2}\,\rho) + c_4^{(0)} K_0(\sqrt{a_2}\,\rho) \\ v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} \rho^{|s|} + c_2^{(s)} \rho^{-|s|} + c_3^{(s)} I_s(\sqrt{a_2}\,\rho) + \\ \qquad + c_4^{(s)} K_s(\sqrt{a_2}\,\rho) \qquad (|s| \geq 1), \end{cases}$$

se $0 < a_1 = a_2$

$$\text{(7c)} \quad v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} I_s(\sqrt{a_1}\,\rho) + c_2^{(s)} K_s(\sqrt{a_1}\,\rho) + c_3^{(s)} \rho\, I_{s+1}(\sqrt{a_1}\,\rho) + \\ + c_4^{(s)} \rho\, K_{s+1}(\sqrt{a_1}\,\rho) \qquad (|s| \geq 0),$$

se $0 < a_1 < a_2$

$$\text{(7d)} \quad v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} I_s(\sqrt{a_1}\,\rho) + c_2^{(s)} K_s(\sqrt{a_1}\,\rho) + c_3^{(s)} I_s(\sqrt{a_2}\,\rho) + \\ + c_4^{(s)} K_s(\sqrt{a_2}\,\rho) \qquad (|s| \geq 0).$$

Ma si ha

$$\text{(8)} \quad \lim_{\rho \to 0} v^{(0)}(\rho) = \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} v(\rho, \vartheta)\, d\vartheta = 2\pi\, v(P)$$

$$(9) \qquad \lim_{\rho \to 0} v^{(s)}(\rho) = \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} v(\rho, \vartheta)\, e^{-is\vartheta}\, d\vartheta = v(\mathrm{P}) \quad \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} e^{-is\vartheta}\, d\vartheta = 0 \qquad (|s| \geq 1),$$

e devono pertanto, nei secondi membri delle (7), essere nulli tutti i coefficienti delle varie funzioni di ρ che divergono per $\rho \to 0$. Inoltre per ogni indice $k\,(\leq 2)$ di derivazione deve essere finito sia il minimo che il massimo limite, per $\rho \to 0$, dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^k v(\rho, \vartheta)}{\partial \rho^k} \right) e^{is\vartheta}\, d\vartheta$$

e quindi negli indicati secondi membri devono anche essere nulli i coefficienti di tutte le funzioni di ρ che contengono $\log \rho$ a fattore e il coefficiente di $\rho\, \mathrm{K}_1(\rho)$.

I secondi membri delle (7) si riducono allora nei vari casi rispettivamente a:

$$(7'\,\mathrm{a}) \qquad v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} \rho^{|s|} + c_2^{(s)} \rho^{|s|+2} \qquad (|s| \geq 0),$$

$$(7'\,\mathrm{b}) \qquad v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} \rho^{|s|} + c_2^{(s)} \mathrm{I}_s(\sqrt{a_2}\,\rho) \qquad (|s| \geq 0),$$

$$(7'\,\mathrm{c}) \qquad v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} \mathrm{I}_s(\sqrt{a_1}\,\rho) + c_2^{(s)} \rho\, \mathrm{I}_{s+1}(\sqrt{a_1}\,\rho) \qquad (|s| \geq 0),$$

$$(7'\,\mathrm{d}) \qquad v^{(s)}(\rho) = c_1^{(s)} \mathrm{I}_s(\sqrt{a_1}\,\rho) + c_2^{(s)} \mathrm{I}_s(\sqrt{a_2}\,\rho) \qquad (|s| \geq 0)$$

e si ha il teorema:

TEOREMA III. *Se* $v(x_1, x_2)$ *di classe* $\mathrm{C}^{(4)}(\Omega) \cap \mathrm{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *è soluzione dell'equazione* $\mathrm{L}\,v = 0$, *per ogni fissato punto* P *in* Ω *a distanza* h *da* $\partial\,\Omega$, *espressa la* $v(x_1, x_2)$ *in coordinate polari* (ρ, ϑ) *con polo in* P *si ha, all'interno del cerchio* Γ *con centro in* P *e raggio* h, *lo sviluppo*:

$$(10) \qquad v(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} v^{(s)}(\rho)\, e^{is\vartheta}$$

dove i coefficienti $v^{(s)}(\rho)$ *sono forniti nei vari casi dai secondi membri delle (7'); tale serie, insieme con quelle che da essa si ottengono per derivazione parziale termine a termine, rispetto a* ρ *e a* ϑ, *fino al terzo ordine, convergono assolutamente e uniformemente in ogni cerchio interno a* Γ.

Dalla (10) e dalle (7') abbiamo quindi:

a) nel caso $a_1 = a_2 = 0$

$$v(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_1^{(s)} \rho^{|s|} + c_2^{(s)} \rho^{|s|+2}) e^{is\vartheta} \tag{11 a}$$

$$\Delta v(\rho, \vartheta) = \frac{2}{\pi} c_2^{(o)} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{+\infty} c_2^{(s)} (|s| + 1) \rho^{|s|} e^{is\vartheta}$$

$$\Delta v(P) = \frac{2}{\pi} c_2^{(o)} \tag{12 a}$$

dove la costante $c_2^{(o)}$, per la prima delle (7' a) è data da

$$c_2^{(o)} = \frac{\int_0^{2\pi} v_\rho(h, \vartheta)\, d\vartheta}{2h}, \tag{13 a}$$

mentre, sempre per la prima delle (7' a) e per la (8), è $c_1^{(o)} = 2\pi v(P)$; si vede poi facilmente che le $c_i^{(s)}$ per $|s| \geq 1$, in questo come nei casi che seguono, mediante le (7') si possono valutare mediante i valori di v e della sua derivata normale sulla frontiera di Γ; non scriviamo la loro forma esplicita in quanto esse in nessuno dei casi che consideriamo intervengono nell'espressione di $\Delta v(P)$ che sarà quella di cui ci serviremo in seguito.

b) nel caso $a_1 = 0$, $a_2 > 0$

$$v(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_1^{(s)} \rho^{|s|} + c_2^{(s)} I_s(\sqrt{a_2}\,\rho)) e^{is\vartheta} \tag{11 b}$$

$$\Delta v(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_2^{(s)} a_2 I_s(\sqrt{a_2}\,\rho) e^{is\vartheta}$$

$$\Delta v(P) = \frac{1}{2\pi} a_2 c_2^{(o)} \tag{12 b}$$

dove per la prima delle (7' b) si ha

$$c_2^{(0)} = -\frac{\int_0^{2\pi} \nu_\varrho(h, \vartheta)\, d\vartheta}{\sqrt{a_2}\, I_1(\sqrt{a_2}\, h)} \tag{13 b}$$

mentre, sempre per la prima delle (7' b) e per la (8), è $c_1^{(0)} = 2\pi\nu(P) - c_2^{(0)}$.

c) nel caso $0 < a_1 < a_2$

$$\nu(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_1^{(s)} I_s(\sqrt{a_1}\,\varrho) + c_2^{(s)}\, \varrho\, I_{s+1}(\sqrt{a_1}\,\varrho))\, e^{is\vartheta} \tag{11 c}$$

$$\Delta\nu(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_1^{(s)} a_1 I_s(\sqrt{a_1}\,\varrho) + 2\, c_2^{(s)} \sqrt{a_1}\, I_s(\sqrt{a_1}\,\varrho) +$$

$$+ c_2^{(s)} a_1 \varrho\, I_{s+1}(\sqrt{a_1}\,\varrho))\, e^{is\vartheta}$$

$$\Delta\nu(P) = -\frac{1}{2\pi}(a_1 c_1^{(0)} + 2\sqrt{a_1}\, c_2^{(0)}) \tag{12 c}$$

dove $c_1^{(0)}$ e $c_2^{(0)}$, per la prima delle (7' c) e per la (8), sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} c_1^{(0)} = 2\pi\nu(P) \\ c_1^{(0)} \sqrt{a_1}\, I_1(\sqrt{a_1}\, h) + c_2^{(0)} \sqrt{a_1}\, h\, I_0(\sqrt{a_1}\, h) = \int_0^{2\pi} \nu_\varrho(h, \vartheta)\, d\vartheta\,. \end{cases} \tag{13 c}$$

d) nel caso $0 < a_1 < a_2$

$$\nu(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_1^{(s)} I_s(\sqrt{a_1}\,\varrho) + c_2^{(s)} I_s(\sqrt{a_2}\,\varrho))\, e^{is\vartheta} \tag{11 d}$$

$$\Delta\nu(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (c_1^{(s)} a_1 I_s(\sqrt{a_1}\,\varrho) + c_2^{(s)} a_2 I_s(\sqrt{a_2}\,\varrho))\, e^{is\vartheta}$$

$$\Delta\nu(P) = \frac{1}{2\pi}(a_1 c_1^{(0)} + a_2 c_2^{(0)}) \tag{12 d}$$

dove $c_1^{(o)}$ e $c_2^{(o)}$, per la prima delle (7' d) e per la (8), sono soluzioni del sistema

$$(13\,d)\qquad \begin{cases} c_1^{(o)} + c_2^{(o)} = 2\pi\,\nu\,(P) \\ c_1^{(o)}\,\sqrt{a_1}\,I_1(\sqrt{a_1}\,h) + c_2^{(o)}\,\sqrt{a_2}\,I_1(\sqrt{a_2}\,h) = \int_0^{2\pi} \nu_\varphi(h,\vartheta)\,d\vartheta\,. \end{cases}$$

2. - Alcuni lemmi preliminari.

Lemma I. *Se* $u(x_1,x_2)$ *di classe* $C^{(4)}(\Omega)\cap C^{(2)}(\overline{\Omega})$ *è soluzione del problema* $P\varphi$ *con* $\varphi\in C^{(1,\alpha)}(\partial\Omega)$, *sussistono le disuguaglianze*:

$$(14)\qquad u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - u\,\Delta u + \frac{a_1+a_2}{2}\,u^2 \le \max\varphi^2\,,$$

$$(15)\qquad \frac{a_1+a_2}{2}\,u^2 \le \max\varphi^2\,.$$

Infatti, posto

$$z(x_1,x_2) = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - u\,\Delta u + \frac{a_1+a_2}{2}\,u^2$$

tale funzione risulta continua in $\overline{\Omega}$ ed in Ω verifica l'equazione

$$\Delta z = (u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2})^2 + 4\,u_{x_1x_2}^2 + (a_1+a_2)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) + a_1\,a_2\,u^2 \ge 0\,,$$

mentre su $\partial\Omega$ si ha

$$z = \varphi^2\,.$$

Non potendo la $z(x_1,x_2)$ avere punti di massimo in Ω, la (14) è provata. La (15) segue dalla (14) e dal fatto che nei punti di massimo di u^2 si ha $u\,\Delta u \le 0$.

Lemma II. *Nelle stesse ipotesi del lemma I e per ogni* λ *tale che*

$$(16)\qquad 3-\sqrt{5} < \lambda \le 1$$

sussiste la disuguaglianza

$$(17)\qquad u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - \frac{\lambda}{2}\,u\,\Delta u \le \frac{\lambda}{2-\sqrt{\lambda^2-6\lambda+8}}\,\max\varphi^2\,.$$

Considerata infatti la funzione

$$\zeta(x_1, x_2, \lambda) = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 - \frac{\lambda}{2}\left(u\,\Delta u - \frac{a_1 + a_2}{2}\,u^2\right) \tag{18}$$

dove λ è un parametro reale positivo non superiore ad uno, tale funzione risulta continua in $\overline{\Omega}$ e uguale su $\partial\Omega$ a φ^2; pertanto si ha su $\partial\Omega$

$$\zeta \leq \max \varphi^2 . \tag{19}$$

La (19) vale anche nei punti di Ω nei quali è $u\,\Delta u \leq 0$, poiché in tali punti si ha

$$\zeta(x_1, x_2, \lambda) \leq z(x_1, x_2)$$

e quindi la (19) è conseguenza della (14).

Per maggiorare la ζ nei punti di Ω in cui è $u\,\Delta u > 0$, osserviamo che se in uno di tali punti la ζ ha un massimo relativo, deve risultare in tale punto

$$\zeta_{x_1} = 2\,(u_{x_1} u_{x_1 x_1} + u_{x_2} u_{x_1 x_2}) - \tag{20}$$
$$- \frac{\lambda}{2}\,[u_{x_1}\,\Delta u + u\,\Delta u_{x_1} - (a_1 + a_2)\,u\,u_{x_1}] = 0$$

$$\zeta_{x_2} = 2\,(u_{x_1} u_{x_1 x_2} + u_{x_2} u_{x_2 x_2}) - \tag{21}$$
$$- \frac{\lambda}{2}\,[u_{x_2}\,\Delta u + u\,\Delta u_{x_2} - (a_1 + a_2)\,u\,u_{x_2}] = 0$$

$$\Delta\zeta = 2\,(u_{x_1 x_1}^2 + 2\,u_{x_1 x_2}^2 + u_{x_2 x_2}^2) - \frac{\lambda}{2}\,(\Delta u)^2 + \tag{22}$$
$$+ 2\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)(u_{x_1}\,\Delta u_{x_1} + u_{x_2}\,\Delta u_{x_2}) +$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\,(a_1 + a_2)\,(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) + \frac{\lambda}{2}\,a_1 a_2 u^2 \leq 0$$

e sostituendo nella (22) i valori di Δu_{x_1} e Δu_{x_2} che si ricavano da (20) e (21), si giunge alla disuguaglianza

$$(4 - \lambda)\,u_{x_1 x_1}^2 - 2\lambda\,u_{x_1 x_1}\,u_{x_2 x_2} + (4 - \lambda)\,u_{x_2 x_2}^2 + 8\,u_{x_1 x_2}^2 + \tag{23}$$
$$+ \frac{2\,(2 - \lambda)}{\lambda\,u}\{[(4 - \lambda)\,u_{x_1}^2 - \lambda\,u_{x_2}^2]\,u_{x_1 x_1} +$$
$$+ [(4 - \lambda)\,u_{x_2}^2 - \lambda\,u_{x_1}^2]\,u_{x_2 x_2} + 8\,u_{x_1}\,u_{x_2}\,u_{x_1 x_2}\} \leq 0$$

dalla quale ricaviamo un limite superiore per il valore di

$$\sigma = u \Delta u$$

nel punto considerato.

Seguendo un procedimento di C. MIRANDA (cfr. [1]) si trova che il valore richiesto di σ coincide con la radice positiva dell'equazione di secondo grado in σ:

$$\sigma^2 + 2\sigma \frac{2-\lambda}{\lambda}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) - \frac{2(2-\lambda)}{\lambda^2}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^2 = 0 ;$$

pertanto, se ζ ha un massimo relativo in un punto di Ω in cui è $u \Delta u > 0$, in quel punto è anche

$$u \Delta u \leq \frac{\lambda - 2 + \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 8}}{\lambda}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)$$

e quindi per la (14)

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \frac{a_1 + a_2}{2} u^2 \leq \max \varphi^2 + \frac{\lambda - 2 + \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 8}}{\lambda}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) .$$

Ne segue che, se è

$$3 - \sqrt{5} < \lambda \leq 1$$

si ha, sempre nel detto punto,

$$\zeta \leq \frac{\lambda}{2 - \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 8}} \max \varphi^2 .$$

Ricordando che nei punti di Ω in cui è $u \Delta u \leq 0$ e su $\partial\Omega$ vale la (19) si ha l'asserto.

3. - FORMULE DI MAGGIORAZIONE.

Tenendo presente il lemma I dimostriamo il seguente

LEMMA III. *Se* $u(x_1, x_2)$ *di classe* $C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(2)}(\overline{\Omega})$ *è soluzione del problema* $P\varphi$ *con* $\varphi \in C^{(1,\alpha)}(\partial\Omega)$, *e se* $2d$ *è il diametro di* Ω, *si ha*

la maggiorazione:

$$|u| \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \max |\varphi| . \tag{24}$$

Si ha infatti

$$\Delta(u^2) = 2(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) + 2u\Delta u = 4(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) + \\ + (a_1 + a_2)u^2 - 2z \geq -2 \max \varphi^2$$

da cui, indicando con $\xi(x_1 x_2)$ l'integrale nullo su $\partial\Omega$ della equazione $\Delta\xi = -1$,

$$|u| \leq \sqrt{2\xi} \max |\varphi| ; \tag{25}$$

ora, essendo Ω contenuto in un cerchio di raggio d, detto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ il centro di tale cerchio, per tutti i punti di Ω si ha

$$(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 \leq d^2 ,$$

e pertanto la funzione armonica

$$4\xi + (x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 - d^2$$

risulta non positiva su $\partial\Omega$ e quindi anche in Ω, da cui

$$\xi \leq \frac{d^2}{4}$$

dopo di che la (24) è conseguenza della (25).

Maggioriamo ora le derivate prime della u, essendo u una funzione soddisfacente alle ipotesi del lemma III.

Intanto è ovvio che se $\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$ assume il suo massimo valore su $\partial\Omega$ si ha:

$$\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \leq \max |\varphi| ; \tag{26}$$

passiamo pertanto a considerare il caso in cui $\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$ assume il suo massimo valore μ in un punto P di Ω. Si ha allora, se 2δ è la distanza di P da $\partial\Omega$

$$|u(\mathrm{P})| \leq 2\delta\mu . \tag{27}$$

Dalle formule di rappresentazione del n. 1 segue poi che: nei casi a) e b), dalle (12) e dalle (13),

$$(28_1) \qquad |\Delta u(P)| \leq \frac{\mu}{\delta}$$

nei casi c) e d), dalle (12) e dalle (13),

$$(28_2) \qquad |\Delta u(P)| \leq \frac{\mu}{\delta} + a_1 |u(P)|,$$

quindi dalla (27) e dalle (28) ricaviamo che

$$(29) \qquad |u(P)\,\Delta u(P)| \leq (2 + 4 a_1 \delta^2)\,\mu^2 .$$

Scritta allora la (17) nel punto P, dalla (29) si ha

$$\mu^2 - \lambda (1 + 2 a_1 \delta^2)\,\mu^2 \leq \frac{\lambda}{2 - \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 8}} \max \varphi^2 ,$$

da cui, per

$$a_1 d^2 < \frac{\sqrt{5} - 1}{8}, \qquad 3 - \sqrt{5} < \lambda < \frac{1}{1 + 2 a_1 d^2}$$

si trae

$$(30) \qquad \mu \leq \sqrt{\frac{\lambda}{[1 - \lambda (1 + 2 a_1 d^2)]\,(2 - \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 8})}} \max |\varphi| .$$

Tenendo presente che per $3 - \sqrt{5} < \lambda < 1$ si ha

$$B = \sqrt{\frac{\lambda}{[1 - \lambda (1 + 2 a_1 d^2)]\,(2 - \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 8})}} > 1$$

e ricordando la (26) possiamo enunciare il seguente

LEMMA IV. *Nelle stesse ipotesi del lemma III e se* $a_1 d^2 < \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$ *si ha la maggiorazione*

$$(31) \qquad \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \leq \min_{\lambda} B \cdot \max |\varphi|$$

il minimo essendo preso per $\lambda \in \left(3 - \sqrt{5}, \frac{1}{1 + 2 a_1 d^2}\right)$.

4. - Procedimento di approssimazione.

Supposto $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ e considerata una successione $\{\varphi^k\}_{k \in N}$, $\varphi^k \in C^{(1,\alpha)}(\partial\Omega)$, che tende a ψ in $C^{(0)}(\partial\Omega)$, si ha che per ogni $k \in N$ il problema $P\varphi^k$ ammette una e una sola soluzione $u^k \in C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(1,\alpha)}(\bar{\Omega})$ [1].

Per la regolarità delle φ^k si ha che $u^k \in C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(2)}(\bar{\Omega})$ [2] e quindi per i lemmi I, III, IV

$$|u^k| \leq K \max |\varphi^k| \tag{32}$$

$$\sqrt{(u^k_{x_1})^2 + (u^k_{x_2})^2} \leq \min_{\lambda} B \cdot \max |\varphi^k| \tag{33}$$

con K dato dalla (3).

Sia ora v di classe $C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$ soluzione del problema $P\psi$ posto nell'introduzione;
$v - u^k$ è allora, per ogni $k \in N$, soluzione del problema $P(\psi - \varphi^k)$, e si ha [1]:

$$\max_{\bar{\Omega}} |v - u^k| + \sum_{i=1}^{2} \max_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (v - u^k) \right| \leq H \left[\max |\psi - \varphi^k| \right] \tag{34}$$

dove H è una costante opportuna.

Poiché $\{\varphi^k\}_{k \in N}$ tende a ψ in $C^{(0)}(\partial\Omega)$, dalla (34) segue che $\{u^k\}_{k \in N}$ tende a v in $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ e quindi da (32) e (33) seguono le (2) e (4).

BIBLIOGRAFIA

[1] Miranda C., *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili*, Giorn. Mat. Battaglini, **78**, 1948-1949, pp. 97-118.

[2] Picone M., *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica Matematica*, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **5**, 1936, pp. 213-288.

[3] Miranda C., *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili*, Ann. Mat. pura appl., **46**, 1958, pp. 265-311.

[4] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition. I*, Comm. Pure Appl. Math., **12**, 1959, pp. 623-727.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, C. Ciliberto e C. Tolotti.

[1] C. Miranda [3], teorema IV pag. 274.
[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [4], teorema 9.3 pag. 680.

Fixpoint: An Order Independent Property

Nota di FRANCESCO E. LAURIA *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 3 aprile 1976)

ABSTRACT. — We are concerned here with the fixpoints of operators projecting any set into itself. The study is based on the consideration of the sequence formed by the iterated application of each operator to itself, for any given value of the variable. We recognize the relevance of the concept of « cycle », the fixpoints being cycles of length one, give conditions for their existence and study their relations in respect to the composition and conversion of the operators, also in the particular case of their parwise commutativity.

RIASSUNTO. — Da un punto di vista algebrico sia un automa naturale, come il sistema nervoso centrale di un mammifero, sia un automa artificiale, come una macchina di Turing, sono caratterizzabili come operatori, che proiettano su se stesso un dato insieme. Proprio perciò è d'interesse lo studio di condizioni che garantiscano l'esistenza di punti uniti in tali trasformazioni. In questo lavoro si sottolinea l'importanza della nozione di « ciclo », i punti uniti essendo cicli di lunghezza unitaria, si danno condizoni per la loro esistenza e si studia il loro comportamento rispetto alle operazioni di composizione e d'inversione di operatori.

In this paper we shall present a new approach to the study of the fixpoints valid also for non-isotone operators defined over arbitrary sets. We shall suppose the reader familiar with the nomenclature of lattice theory as given in [1]. Given a set A and an operator on A to A, $f : A \to A$, we shall say that $f x$ has a « cycle of length m » if there exists a subset, and we shall call it « base » of the cycle, $C \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset A$ such that $f : C \to C$, i.e. such that $x_1 = f x_i$, $x_2 = f x_{i+1}, \ldots, x_{m-i+1} = f x_m$, $x_{m-i+2} = f x_1, \ldots, x_m = f x_{i-1}$. We shall indicate with $f^n x = \lambda x \underbrace{f f \ldots f}_{n} x$ and respectively $f f^{n-1} x = \lambda^{n-1} f \lambda x \underbrace{f f \ldots f}_{n} x$; moreover we shall call $a_i = \text{Inf } A_i$ and $b_i = \text{Sup } A_i$.

* Istituto di Fisica Teorica, Università di Napoli.

THEOREM I. Given the operator $f \quad A \to A$

i) iff there exists a k_o such that, for $k \geq k_o$, the sequence $\{f^k x_o\}$ takes only a finite number m of distinct values then

a) $f x$ has a cycle of length m, with base C

b) $f^m x$ has, at least, m fixed points, $f^m x_i = x_i$ with $x_i \in C$, such that $f^h x_i \neq x_i$. $(i = 1, 2, \ldots, m \text{ and } 1 \leq h < m)$

Let us prove that i) implies a) and b).

Let

$$f^{k_o} x_o = x_1$$

$$f^{k_o+1} x_o = f x_1 = x_2$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$f^{k_o+m-1} x_o = f^{m-1} x_1 = f^{m-2} x_2 = \ldots = f x_{m-1} = x_m$$

$$f^{k_o+m} x_o = f^m x_1 = f^{m-1} x_2 = \ldots = f^2 x_{m-1} = f x_m .$$

By i) $x_i \neq x_j$, whenever $i \neq j$; again by i) $i = 1, 2, \ldots, m$.

Thus the last one could be rewritten as:

$$f^{k_o} x_o = f^{k_o+m} x_o = f^m x_1 = f^{m-1} x_2 = \ldots = f^2 x_{m-1} = f x_m = x_1 ,$$

i.e.

$$f^m x_1 = x_1 .$$

Going on writing the successive relation for $f^{k_o+1} x_o$, $f^{k_o+2} x_o$, ... we obtain similar equality for $x_2, x_3, \ldots, x_m$. Thus a) and b) hold.

Let us prove the « only if » part.

If

$$f^m x_1 = x_1$$

then let us call $f x_1 = x_m$ and substituting in the preceding one:

$$f^{m-1} x_m = f^m x_1 = x_1$$

then let us call $f x_m = x_{m-1}$ and substituting in the preceding one:

$$f^{m-2} x_{m-1} = f^m x_1 = x_1$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

then let us call $f x_4 - x_3$ and substituting in the preceding one:

$$f^2 x_3 = f^m x_1 = x_1$$

then let us call $f x_3 = x_2$ and substituting in the preceding one:

$$f x_2 = f^m x_1 = x_1 .$$

From the last part of b) we have also

$$f^h x_i \neq x_i , \qquad 1 \leq h \leq m$$

then $x_i \neq x_j$, for $i \neq j$. Thus b) implies a).

If

$$x_1 = f x_2$$

$$x_2 = f x_3$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$x_{m-1} = f x_m$$

$$x_m = f x_1 ,$$

then substituting $f x_{i+1}$ for x_i as argument of $f x_i$ we obtain

$$x_1 = f x_2 = f^2 x_3 = \ldots = f^{m-1} x_m = f^m x_1$$

$$x_2 = f x_3 = f^2 x_4 = \ldots = f^{m-1} x_1 = f^m x_2$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$x_{m-1} = f x_m = f^2 x_1 = \ldots = f^{m-1} x_{m-2} = f^m x_{m-1}$$

$$x_m = f x_1 = f^2 x_2 = \ldots = f^{m-1} x_{m-1} = f^m x_m .$$

For any $i = 1, 2, \ldots, m$ it is immediate to see that $\{f^k x_i\}$, for each $k > k_o$, takes only the m distinct values x_i.

Thus i) hold.

Q.E.D.

For an operator $f : A \to A$ to haxe a fixpoint, it seems to us, is an intrinsic property independent of any structural, particularly order-dependent, hypothesis on A. In other words the assumptions, usually made, of isotonicity for $f x$ and of A being a complete lattice imply, the former, isotonicity and thus, by the latter, the existence of a limit for the sequence $\{f^k x_0\}$. This will be made more apparent by the following corollary.

COROLLARY.

Given an operator $f : A \to A$ iff sequence $\{f^k x_0\}$ assumes, for $k \geq k_0$, the only value $\bar{x}$ then $f \bar{x} = \bar{x}$.

« If » part. For any $k \geq k_0$, we have

$$f^k x_0 = \bar{x}$$

i.e.

$$\bar{x} = f^{k+1} x_0 = f f^k x_0 = f \bar{x} .$$

« Only if » part. Immediate by the very definition of a fixpoint.

Q.E.D.

The next theorem is the equivalent, for antitone operators, of Tarski's theorem [2] for isotone operators.

THEOREM II.

If

i) A is a set conotaining, at least, two points

ii) $\{A; \geq\}$ is a complete lattice

iii) $f : A \to A$ is an antitone operator on A to A then f has, at least, a cycle of length two (or equivalently: then f^2 has, at least, two fixpoints).

Because of i) and ii)

$$a = \operatorname{Inf} A \neq b = \operatorname{Sup} A .$$

Because f is on A to A there exists at least an $x \neq a$ such that

$$f x = a \leq x .$$

From

$$x \leq b$$

and because of antitonicity

$$f\,b \leq f\,x = a\,.$$

We conclude

$$f\,b = a\,.$$

With the same arguments, mutatis mutandis, we have also

$$f\,a = b\,.$$

The cases in which either

$$f\,a = a \quad \text{or} \quad f\,b = b\,,$$

or both, are excluded by antitonicity.

Q.E.D.

Because of the bases of the cycles of length $k \geq 2$ of an antitone operator belongs to the set of the fixpoints of the isotone operator f^2 they will form a complete lattice, with respect to the same ordering of A. From the proof of the Theorem II is also immediate to see that the fixpoints of an antitone operator are incomparable: if x and y are two such fixpoints, neither $x \geq y$ nor $x \leq y$ holds.

From this observations descend the following theorems for chains. We recall that a chain is a poset for any two elements of which either $x \geq y$ or $x \leq y$ holds.

THEOREM III. Given the chain $\{A;\ \geq\}$, the antitone operator $f : A \to A$ has, at most, one fixpoint.

Be x and y two fixpoints of f. Because of antitonicity

$$x \leq y \quad \text{implies} \quad f\,x \geq f\,y\,.$$

We have also

$$x = f\,x \leq f\,y = y\,.$$

Thus

$$x = f\,x = f\,y = y\,.$$

Q.E.D.

THEOREM IV. Given the chain $\{A;\ \geq\}$ the maximum length of the cycles of an antitone operator is two.

Be $\{x_1, x_2, x_3\}$ the base of a cycle of f.

Because of the antitonicity

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad \text{implies} \quad f x_1 \geq f x_2 \geq f x_3 .$$

We have also

$$x_1 = f x_2 \leq x_2 = f x_3 \leq x_3 = f x_1 .$$

Thus

$$x_1 = f x_2 = f x_3 = x_2 .$$

Q.E.D.

THEOREM V. Given the chain $\{A; \geq\}$ the maximum length of the cycles of an isotone operator is one.

Be $\{x, y\}$ the base of cycle of f. Because of the isotonicity

$$x \leq y \quad \text{implies} \quad f x \leq f y .$$

We have also

$$f x = y \leq f y = x .$$

Thus

$$f x = y = f y = x .$$

Q.E.D.

In the next theorem we examine the case of operators, defined on A, such that they are isotone in a subset of A and antitone in another one.

THEOREM VI. Given the operator $f : A \to A$, if:

i) $\{A; \geq\}$ is a complete lattice

ii) there exist $k \geq 2$ disjoint subsets of A such that

a) $A_i \subset A$ and $A_j \subset A$ implies $A_i \cap A_j = \varnothing$

b) $f A_i = A_{i+1}$ $\qquad i, j \leq k;\ k + 1 = 1$

c) for at least an i, say $i = 1$, is $a_i \in A_i$ and $b_i \in A_i$

iii) for $x \in A_i$ either $f x$ is isotone or antitone.

Then:

f has at least one cycle of length k, or $2k$, if it is even, or odd, the number of intervals A_i in correspondence of which f is antitone. Moreover the base of cycles of f form a complete lattice.

From part c) of ii), iii), part a) of ii) and i) we conclude that each A_i is a complete lattice.

From part b of ii) and because for each x it is $f^i x = f f^{i-1} x$ we conclude that $f^k x : A_1 \to A_1$ is on A_1 to A_1.

From ii) part b) and then part a) it follows that for $x \in A_k$ there are no fixpoints for $f^i x$, $i \leq k - 1$. Thus if it is even the number of A_i in correspondence of which f is antitone we can apply Tarski's first theorem and then theorem I to the operator $f^k : A_1 \to A_1$. Otherwise we can apply theorem II and then again theorem I.

Q.E.D.

Let us introduce now the notion of L-commutative operators.

A class $\mathfrak{F}$ of operators $f : A \to A$ is usually said to be commutative if for any $f, g \in \mathfrak{F}$

$$f g x = g f x \quad \text{for every} \quad x \in A .$$

A class $\mathfrak{L}$ of operators $f : A \to A$ will be said to be L-commutative if for any pair $f \in \mathfrak{L}$ and $g \in \mathfrak{L}$ either they commute or there exists a finite number l of operators $f_i \in \mathfrak{L}$ such that for every $x \in A$:

$$g f_1 x = f_1 g x \quad \text{and} \quad f_i f_{i+1} x = f_{i+1} f_i x \quad \text{and} \quad f f_1 x = f_1 f x .$$
$$i = 1, 2, \ldots, l - 1.$$

Clearly $\mathfrak{F}$ is a proper subclass of $\mathfrak{L}$: e.g. f and its iterates form a class $\mathfrak{F}$ of commutative operators. For any g which commutes with f both f and g belong to $\mathfrak{F}$, but that could be no more true for any h such that $f^n h = h f^n$, $n \geq 2$: that is $h \in \mathfrak{L}$ and $f \in \mathfrak{L}$.

Let us call P_f the subset of A such that $x \in P_f$ iff $x \in C$ for a cycle, of length $m \geq 1$, of the operator $f : A \to A$. It is worth to notice this definition implies that $f : P_f \to P_f$ is an onto 1-1 correspondence.

THEOREM VII. If

i) $f : A \to A$ and $g : A \to A$ both belong to the same class $\mathfrak{L}$ of L-commutative operators, with P_f and P_g finite

ii) $\varphi \in \mathfrak{L}$ implies $\varphi : P_g \to P_g$ and $\varphi : P_f \to P_f$ are both 1-1 correspondences then

$$P_f \equiv P_g .$$

By definition of L-commutativity and by ii) we can always suppose $f g = g f$: this not being the case, it is sufficient to apply the following proof to a finite number of pair-commuting operators, the first and the last being precisely f and g.

Let us suppose

$$\mathrm{P}_f \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}.$$

We observe that if

$$f x_i = x_i$$

then

$$f^m x_i = x_i ; \qquad m \geq 2$$

moreover in the « only if » part of theorem I we have proved that if

$$f^m x = x \qquad \text{and} \qquad f^h x \neq x \qquad h \leq m$$

then f has a cycle of length m. We can thus conclude

$$\mathrm{P}_{f^m} \equiv \mathrm{P}_f . \qquad m \geq 1 .$$

Because of this and from the observation that if

$$f g = g f$$

then

$$f^m g = g f^m . \qquad \forall_m$$

Thus we can always assume that if $x_i \in \mathrm{P}_f$ then

$$f x_i = x_i .$$

If we apply g to both sides we have

$$g f x_i = g x_i ,$$

and because of commutativity

$$f g x_i = g f x_i = g x_i .$$

In other words if $x_i \in \mathrm{P}_f$ then $g x_i \in \mathrm{P}_f$; because the elements of P_f are n and $g : \mathrm{P}_f \to \mathrm{P}_f$ is a 1-1- correspondence then each x_i will belong to the base of a cycle, of length $m \geq 1$, of the operator $g : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$, i.e. $x_i \in \mathrm{P}_g$.

From the arbitrariety of n, f and g we conclude

$$P_f \equiv P_g .$$

Q.E.D.

We note that hypothesis ii) of the theorem VII is an essential one: e.g. if the correspondence induced by g on P_f is many to one then $P_g \subset P_f$. An immediate consequence of Theorem VII is the following:

COROLLARY.

If all the operators belonging to a same class $\mathfrak{L}$ of L-commutativity are 1-1 correspondences then

$$P_f = P_g ,$$

for any $f \in \mathfrak{L}$ and $g \in \mathfrak{L}$, with P_f and P_g finite.

It is also easy to see that for correspondences belonging to a same class $\mathfrak{F}$ of commutative operators both Theorem VII and its Corollary hold. Inview of the theorem 7.1.4, cap. 7 of [3]: it is worth to stress that both our theorem VII and the last conclusion don't tell anything on the mutual relations of the length of the cycles of f and g: they simply state a relation between two subsets of A, namely P_f and P_g.

THEOREM VIII. If the operators $f : A \to A$ and $g : A \to A$ are such that

$$P_f \equiv P_g \equiv A$$

then f and g belong to the same class $\mathfrak{L}$ of L-commutative operators.

We can assume, at least for suitable iterated of finite order,

$$f x = x \quad \text{and} \quad g x = x ,$$

applying g to the first and f to the second we obtain

$$g f x = f g x .$$

Q.E.D.

It is worth to note the condition $P_f \equiv A$ is verified for the dual automorphisms of period two, the so called involutions. Another

class of operators for which theorem VIII holds is given by what could be called the « permutators ». The elements of A be n-sequences, that is

$$(x_1\, x_2 \ldots x_i \ldots x_n) \in \mathrm{A}\,,$$

with the x_i belonging to a possibl einfinite alphabet, for instance they are integers. The operator $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ could be said a permutator when

$$f\, x_1\, x_2 \ldots x_i \ldots x_n = x_{i_1}\, x_{j_2} \ldots x_{j_i}\, x_{i+1} \ldots x_n$$

with

$$j_k \in \{1, 2, \ldots, i\} \qquad 1 \leq k \leq i$$

and

$$j_h \neq j_k \qquad \text{for} \qquad h \neq k\,.$$

Let us now consider the converse of an operator.

Given the operator, defined on A,

$$y = f\, x$$

we shall call, by definition, its converse

$$x = f^{-1}\, y \equiv_{\mathrm{def}} \bigcap_x \{\, x \in \mathrm{A} : f\, x = y\}\,.$$

It holds the following:

THEOREM IX. If the operator $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ admits a converse and for $x \in \mathrm{P}_f$ and $y \in \mathrm{A}$

$$\mathrm{x} \neq y \qquad \text{implies} \qquad f\, x \neq f\, y$$

then

$$\mathrm{P}_f \equiv \mathrm{P}_{f^{-1}}\,.$$

It must be observed that when the condition is fulfilled the composition of f and its converse gives an identity, thus the conclusion.

Q.E.D.

Let us remark that the said conodition is a fortiori verified for both isotone and antitone operators.

We now give a generalization of theorem I that could be useful in the search for the fixpoints. Namely we will focus our attention on the relation between the cycles of an operator $h = f_n\, f_{n-1} \ldots f_1$ and

some property of the operators $f_1, f_2, \ldots, f_n$ hopefully assuming the study of the latters simpler than that of the former.

Given

$$O \equiv \{f_i \mid 1 \leq i \leq n \wedge f_i : A \to A\}$$

the set

$$C \equiv \{x_i \mid 1 \leq i \leq m \leq p\,n \wedge x_i \in A \wedge i \neq j \to x_i \neq x_j\}$$

will be said base of a cycle O, of length pn, if it is

$$\ldots, f_i\,x_j = x_{j+\delta_i}, f_{i+1}\,x_{j+\delta_i} = x_{j+\delta_i+\delta_{i+1}}, \ldots, f_{pn}\,x_m = x_1$$

where

$$\delta_k = \begin{cases} 0 \text{ if } f_k\,x_j = x_j \\ 1 \text{ if } f_k\,x_j \neq x_j \end{cases}$$

and $f_{ki} \equiv f_i$, with both k and p finite integers and $1 \leq k \leq p$.

It should be noted that the base of a cycle is composed of m distinct points but the points actually needed are $pn \geq m$: in other words a cycle of O is composed of pn point not necessarily distincts.

THEOREM X. Given the sets A and $O \equiv \{f_i \mid 1 \leq i \leq n \wedge f_i : A \to A\}$ iff O has a cycle of length pn then the operators $h \equiv f_n f_{n-1} \ldots f_1 : A \to A$ has, at least, a cycle of length p.

« If » part. From the definitions of a cycle of O and of the operator h

$$h^p\,x_1 \equiv \underbrace{f_n f_{n-1} \ldots f_1 f_n \ldots f_1 f_n f_{n-1} \ldots f_1}_{p}\,x_1 = x_1 .$$

Theorem I, « if » part, will complete the proof.

« Only if » part. If it is

$$h^p\,x_1 = x_1$$

then from the definition of h we have

$$\underbrace{f_n f_{n-1} \ldots f_1 f_n \ldots f_1 f_n f_{n-1} \ldots f_1}_{p}\,x_1 = x_1 .$$

Applying the same argument used in the « only if » part of Theorem I we conclude that O has a cycle of length pn.

Q.E.D.

It is immediate the following:

COROLLARY.

If the $\bigcap_i P_{f_i}$ contains a finite subset $M \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ such that for each f_i a whole number of bases of cycles, not necessarily of the same length for $f_i \neq f_j$, coincides with M than $h \equiv f_n f_{n-1} \ldots f_1$ has, at least, k cycles of length $l_1, l_2, \ldots, l_k$ whose bases are the points of M, with $\sum_{j=1}^{k} l_j = m$. Moreover $k = m$ and $k = 1$ correspond respectively to

$$f_i x_j = x_j \qquad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

and to the case in which each $x_j \in M$ belong to a cycle of length m for each of the operators f_i.

If for all i and j is

$$f_i x_j = x_j$$

then

$$h x_j = x_j .$$

In the latter alternative each x_i will, for each f_j, appear only two times in the relations defining the cycle of f_i

$$\ldots, f_i x_q = x_j , \; f_i x_j = x_q , \ldots$$

Thus also in the relations defining the cycle of h each will appear only twice

$$\begin{array}{c} \vdots \\ h x_j = f_n f_{n-1} \ldots f_1 x_j = x_{q'} \\ \vdots \\ h x_{p'} = f_n f_{n-1} \ldots f_1 x_{p'} = x_j . \end{array}$$

Because in M there are only m points, it is immediate to see that h has a cycle of length m.

Any of the intermediate cases is easily resolved when we observe that from $x_j \in M$ it descends $f_i x_j \in M$. From this it follows that for

O the set M, or any permutation of its elements, is the base of a cycle. The previous theorem will complete the proof.

Q.E.D.

OPEN QUESTION.

If A is a complete lattice is P_h also a complete lattice?

AKNOWLEDGMENTS. - Thanks are due to dott. G. Criscuolo for his invaluable criticisms and suggestions.

BIBLIOGRAPHY

[1] BIRKOFF G., *Lattice theory,* Third ed., Am. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. XXV, Providence (R.I.), (1967).

[2] TARSKI A., *A Lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications,* Pacific J. Math. 5 (1955), 285-309.

[3] SMART D. R., *Fixed point theorems,* Cambridge tracts in Mathematics vol. 66, Cambridge Univ. Presse, (1974).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e V. Dalla Volta.

Algorithms, Algebraic Structures and Programs Equivalences

Nota di FRANCESCO E. LAURIA *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 3 aprile 1976)

ABSTRACT. — In this paper we present three elementary procedures as the generating set of a non-commutative group, namely the group of transformations of a tape onto itself, the product of procedures being their concatenation. We then prove the equivalence between the fixpoints existence and thus of a semantical notion of equivalence with a syntactical condition on the given algorithms. A second operation is introduced so as to preserve distributivity, in order to obtain also finite and infinite loops.

RIASSUNTO. — In questo lavoro vengono presentate tre istruzioni elementari come insieme generatore di un gruppo non commutativo, rispetto alle trasformazioni di un nastro in se stesso, ad esempio le trasformazioni operate da una macchina di Turing. L'esistenza di punti fissi, e perciò l'equivalenza semantica tra programmi, viene quindi completamente caratterizzata in termini puramente sintattici. Infine, conservando la distributività, viene introdotta una seconda operazione così da poter rappresentare anche funzioni ricorsive generali. Si pone in luce come i risultati raggiunti possano trovare applicazioni nello studio del problema della minimalizzazione e dell'equivalenza dei programmi.

INTRODUCTION.

In this paper we shall present an albebraic structure the elements of which could be interpreted as algorithms. One of the motivations for such a work is given by the hope that the abstract formalism here presented could be useful to study some of the activity of that portion of a natural automaton usually called a brain. As was suggested elsewhere [1] there is a portion of the brain the anatomy of which suggests a kind of processing of the information here presented as the multiplication of procedures, the other operation, namely the sum, being a simple translation of the logical if.

* Istituto di Fisica Teorica, Università di Napoli, Italy.

For a number of reason not last being the complete ignorance on how outside information is presented by the pattern of the nervous activity in the brain, we had to look for an abstract structure the less possible formally dependent on the input-output relationships.

It seems to us that there is a number of problems, in what could be called abstract programming theory, sharing with ours the need of such an abstract formalism, thus this could justify our use of the language and the given interpretation.

1. - THE GROUP $\mathfrak{F}_1$.

Let us call with P or Q any string or tape of undefined length of squares: each square is either blank or marked with a stroke, the marked ones being always finite in number. With the lower case letters p, or q, we shall indicate a string of length one: that is p, or q, shall represent either a marked square or an unmarked one. In case we should need more than two names for variables we shall use subscripts: e.g. p_1, p_2, p_3 etc. A lower pointer shall indicate the observed square: e.g. P $\underline{q}$ Q. Let us now define the following machines or instructions or procedures or algorithms:

scramble machine $\quad s : \begin{cases} \mathrm{P}\_\,\mathrm{Q} \to \mathrm{P}\,\underline{l}\,\mathrm{Q} \\ \mathrm{P}\,\underline{l}\,\mathrm{Q} \to \mathrm{P}\_\,\mathrm{Q}\,, \end{cases}$

left machine $\quad l : \quad Pq\underline{p}\,\mathrm{Q} \to \mathrm{P}\underline{q}\,p\,\mathrm{Q}\,.$

If a and b are the names of two variables defined over the set $\{s, l\}$ we shall call $a \circ b$, or simpler ab, the machine or instruction or algorithm obtained from the concatenation, also called the multiplication, of the machines a and b, in that order. In other words if

$$b : \mathrm{P}\underline{q}\,\mathrm{Q} \to \mathrm{P}_1\,\underline{q}_1\,\mathrm{Q}_1$$

and

$$a : \mathrm{P}_1\,\underline{q}_1\,\mathrm{Q} \to \mathrm{P}_2\,\underline{q}_2\,\mathrm{Q}_2$$

then

$$a \circ b \equiv ab : \mathrm{P}\underline{q}\,\mathrm{Q} \to \mathrm{P}_2\,\underline{q}_2\,\mathrm{Q}_2\,.$$

As is immediate to verify we have:

$$ss : \mathrm{P}\underline{q}\,\mathrm{Q} \to \mathrm{P}\underline{q}\,\mathrm{Q}$$

we can thus define a new machine i as:

identity machine i: $= _{\text{def.}}\, ss$.

Obviously we have

$$lss = ssl = l\,,$$

that is

$$li = il = l\,.$$

The last relation suggests the existence of a new machine r such that:

$$rl = lr = i\,.$$

In other words, if w econsider s as the inverse of itself, that is:

$$s = s^{-1}$$

then we can set

right machine $r: = _{\text{def.}} l^{-1}$: $\mathrm{P}\underline{q}\,p\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{P}q\,\underline{p}\mathrm{Q}$.

The four machines s, l, i, r shall be said elementary instructions, or machines, with the following multiplication table:

Multiplication Table

b \ a	i	s	l	r
i	i	s	l	r
s	s	i	ls	rs
l	l	sl	l^2	i
r	r	sr	i	r^2

Table I

We have given the semantical definition of the elements of the set $\mathrm{F} \equiv \{s, l, r\}$. Now we want to consider a syntactical approach: the elements of F be considered as primitive and F as the generating set of the group, with respect to the concatenation given in Table I of tapes transformations.

Let us call F_1 the set of all finite concatenations of elements of F: that is, $\mathrm{F}_1 \equiv \{a \mid a = a_1 \ldots a_n \wedge a_h \in \mathrm{F} \wedge 1 \leq h \leq n \wedge n \text{ finite}\}$.

We have thus the following:

THEOREM I. $\mathfrak{F}_1 = \{F_1, \circ, i\}$ is a group.

If $a, b, c \in F_1$ and $a = a_1 a_2 \ldots a_n$, $b = b_1 b_2 \ldots b_m$ with $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_m \in F$ then we have

i) the product ab is defined as $a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m$ and thus it belongs to F_1, the rules for the product being given in Table I.

ii) obviously the associative law holds:

$$(ab)\, c = a\,(bc)\,.$$

iii) there is an i such that:

$$ai = ia = a\,.$$

iv) for every a there is an a^{-1} such that:

$$a\, a^{-1} = a^{-1} a = i\,,$$

if $a \in F$ then Table I give us a^{-1}. If $a \in F_1$ then, from $a = a_1 a_2 \ldots a_n$, we have

$$a^{-1} = a_n^{-1} \ldots a_2^{-1}\, a_1^{-1}\,.$$

Q.E.D.

It is worth to remark explicitly the non-commutativity of $\mathfrak{F}_1$ according to Table I.

Let us initroduce some notational convention:

i) as usual the symbol Π shall indicate a finite number of concatenations, i.e. $\prod_1^n a_j = a_1 a_2 \ldots a_n$, or $\prod_n^1 a_j = a_n \ldots a_1$. We shall say a_j to be the j-th factor of the product.

ii) the power a^n of a machine is the concatenation of n equal factors: e.g. $a^n = \underbrace{a\, a \ldots a}_{n}$. By convention we set $a^o = i$, whatever the machine a.

iii) the symbol $N_a(k)$ shall indicate the number of elementary instructions of type k contained in a.

iv) Sometimes l and r shall be referred to as moving instructions and s as a writing instruction.

v) With an inverted omega, υ, we shall indicate the belonging of a machine to another, that is: $a = a_1 \ldots a_j \ldots a_{j_m} \ldots a_n$ then $a_{j_1} \ldots a_{j_m} \upsilon a$. With the notation $a \notin b$ we shall mean that a does not belong to b.

Now we need to define the proper subset f_1 of F_1 containing, roughly speaking, those machines reducible to i'', and hence to i, according to the rules given in Table I: that is:

$$f_1 \equiv \{a \mid a = \Pi a_j \wedge a_j \in \{i, l, r, s^2\} \wedge N_a(l) = N_a(r)\}.$$

It is thus possible to introduce the following equivalence relation R_1 between elements of F_1: we say $a R_1 b$, and read it « a is one-equivalent to b », iff a and b differ only for a finite number of factors belonging to f_1. E.g. if $a = s(s^2 l^3 r l^3 r^3 i s^2 r^2) l s$, $b = s l s$ and $c = s(s^2) l^2 (l r l^3 r^3 i s^2) s r (r l) s$, where the machines belonging to f_1 have been singled out between parenthesis, then $a R_1 b$ and $a R_1 c$, $b R_1 c$. The programs a and b of the last examples suggest the

THEOREM II. If $a R_1 b$ then there exists a unique c with the smallest number of elementary instructions, that is non containing factors belonging to f_1, such that $c R_1 a$ and $c R_1 b$.

To find the desired c it is sufficient to cancel out all the factors of a, or b, belonging to f_1: what remains is c.

Because c is composed, by definition, exactly of these factors for which a and b do not differ then c is unique.

Q.E.D.

At this point we can introduce the quotient group $\mathfrak{F}_1/R_1$: in the following, unless otherwise stated, every time we speak of $a \in \mathfrak{F}_1/R_1$ we shall intend the smallest a, that is the $a \in \mathfrak{F}_1$ with the minimum number of elementary instructions.

2. - SOME SYNTACTICAL PROPERTIES OF $\mathfrak{F}_1/R_1$.

In this paragraph we shall study some properties of $\mathfrak{F}_1/R_1$: both because they are important pro se, as the syntactical characterization of an essentially semantical notion of equivalence between two algorithms, and because they shall be useful later in dealing with the addition, of programs, and thus their loops.

To start with we prove the following

THEOREM III. The syntactical inverse of a program coincides with its semantical inverse, that is: $a a^{-1} = i$
implies both

$$a \cdot x = y \quad \text{and} \quad a^{-1} \cdot y = x ,$$

where $a \in \mathfrak{F}_1/R_1$ and x, y, is the initial, final, tape configuration.

Let us remember that if

$$a = \prod_{j=1}^{n} a_j$$

then

$$a^{-1} = \prod_{j=n}^{1} a_j^{-1} .$$

Let us proceed by induction on the number n of elementary instructions. For $n = 1$ it is immediate to verify that the theorem holds. Suppose it holds for n, that is:

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \cdot x = y \quad \text{and} \quad x = \prod_{j=n}^{1} a_j^{-1} \cdot y ;$$

because it holds for $n = 1$:

$$a_{n+1} \cdot z = x \quad \text{and} \quad z = a_{n+1}^{-1} \cdot x .$$

Combining the last two we have:

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \cdot x = \prod_{j=1}^{n} a_j a_{n+1} \cdot z = y \quad \text{and} \quad z = a_{n+1}^{-1} \cdot x = a_{n+1}^{-1} \prod_{j=n}^{1} a_j^{-1} \cdot y .$$

An alternative, very simple, proof of the same theorem runs as follows. Since

$$a\, a^{-1} = a^{-1} a = i ,$$

then x and y are fixpoints of $a^{-1} a$ and $a\, a^{-1}$ respectively, that is:

$$a^{-1} a \cdot x = x \quad \text{and} \quad a\, a^{-1} \cdot y = y .$$

Combining the first with $a \cdot x = y$
we have

$$a^{-1} \cdot y = x .$$

Q.E.D.

We must now look at the semantical aspect of the stop of our machines. Of course the syntactical one is trivial: a machine stops when it runs out of elementary instructions. Instead, in terms of tape configurations, how to fix the last scanned square? We can find an answer if we want to preserve extensionality for the fixed point of a machine a, that is if

$$a \cdot x = x$$

then it should be

$$b\,a \cdot x = b \cdot x$$

for any $b \in \mathfrak{F}_1/\mathrm{R}_1$. To preserve extensionality, it is sufficient to require the coincidence of the initial and final scanned square relatively to the pattern of marked and unmarked ones: irrispective of whether it is or not the same square. In an analogous way in the case of two programmes

$$a \cdot x = y$$
$$b \cdot x = y\,,$$

to preserve extensionality, we shall require that for both a and b the initial and final scanned square be intrinsically fixed relatively to the initial and final tape configuration.

In order to formulate the theorems giving a syntactical characterization of a fixpoint and of a, semantically given, notion of equivalence, we must go through some definitions. To start let us enumerate, from the rightmost in a leftward direction, the s-instructions beloging to $a \in \mathfrak{F}_1/\mathrm{R}_1$. Then be $d_{a,ij}$ the number along the tape of the squares lying between the squares onto which respectively $s_i \,\overline{\circ}\, a$ and $s_j \,\overline{\circ}\, a$ act. We shall consider $d_{a,ij}$ positive if the square are counted leftward when $i \leq i$. We shall drop the a, writing d_{ij} instead of $d_{a,ij}$, whenever no confusion can occur. The syntactical definition of d_{ij} is: d_{ij} is given by the difference between the number of i-instructions minus the number of i-instructions separating s_i from s_j when $i \leq j$.

It is trivial to verify that if $d_{ij} = 0$ then the pair $(s_i\,,\ s_j)$ shall have no effect whatever on the final tape configuration. Because of this, is convenient to distinguish the writing-instructions which have a permanent effect on the tape. To this end we shall mark with an asterisk the s-instruction s_i^* for which $d_{ij} \neq 0$, $\forall_j$. Instead, in the case $d_{ij} = 0$, we have to mark the leftmost writing instruction, s_i^*, belonging to the set $\mathrm{A}_i \equiv \{s_i \mid d_{ij} = 0 \wedge i \neq j\}$ only in the case A_i con-

tains an odd number of elements, otherwise no s-instructions has to be marked. As a shorthand notation for $d_{ij} \neq 0$ we shall write d_{ij}^* .

A programm a shall be said to have the property α) if the following condition is satisfied:

α) i) $N_a(s^*) = 2n, n = 0, 1, \ldots$ and

ii) for $n \geq 2$ each s^* belongs either to a set A or B, with $A \cap B = 0$, each set containing exactly n elements, and

iii) for fixed i and j, $s_i^* \in A$ and $s_j^* \in B$, and any h, $s_h^* \in A$, there exists one and only one k, $s_k^* \in B$, such that $d_{ih}^* = d_{jk}^*$.

The next theorem could be interpreted as a proof that fixpoints are an order-independent property.

THEOREM IV. A program a has the property α) iff it has a fixpoint.

Let us suppose that a hase the property α): we must find an initial tape configuration x such that

$$a \cdot x = x .$$

Be $i = 1 < h_1 < h_2 < \ldots < h_{n-1}$, $j < k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-1}$ and $d_{1h_m}^* = d_{jk_m}^*$. The desired initial tape configuration is the following: n marked squares, the m-th at the distance of $d_{1h_m}^*$ squares from the first one. The s^*-instructions belonging to A shall clear all the initial marked squares, those belonging to B shall mark the same initial configuration.

Let us now suppose

$$a \cdot x = x ,$$

where x is a configuration with just n marked squares.

Since x is a fixpoint then it has to be

$$N_a(s^*) < 2n ,$$

otherwise the final configuration should consist of more than n marked squares.

In the case

$$N_a(s^*) = 0$$

obviously the theorem and the property both hold.

In any other case, namely

$$0 < \mathrm{N}_a(s^*) \leq 2n\,,$$

the relations

$$d^*_{ih} = d^*_{jk}$$

are satisfied because of the peculiar properties of s^* and otherwise the initial and final configurations either don't have the same number of marked squares or aren't scattered on the tape with the same pattern, or both.

Q.E.D.

COROLLARY.

The square a^2 of any program a has at least a fixpoint.

The proof is an immediate consequence of the fact that a^2 as the property α), whatever a.

Q.E.D.

Now we shall characterize syntactically the class of programs for which any finite tape configuration is a fixpoint. Such a class is obviously the algorithmic counterpart of the, exstensionally given, relation: $x = y$.

THEOREM V. Any tape configuration is a fixpoint for a iff

$$N_a(s^*) = 0$$

and

$$\mathrm{N}_a(l) = \mathrm{N}_a(r)\,.$$

Clearly if the last two conditions are verified then any tape is a fixpoint for a and moreover extensionality is preserved. Conversely suppose all finite tapes are fixpoints for a. Let's consider a tape x: it shall have a rightmost x_r, and a leftmost x_l, marked square. Alongside x we consider also its complementary, that is the tape y obtained from x marking all the unmarked squares comprised between x_r and x_l and erasing all the marked ones. Since both relations $a \cdot x = x$ and $a \cdot y = y$ hold by hypothesis we must conclude that either a doesn't contain writing instructions or they insist an even number of times onto each square. In both cases it is $N_a(s^*) = 0$. Again extensionality requires

$$\mathrm{N}_a(l) = \mathrm{N}_a(r)$$

whatever the actual convention on the stop of a.

Q.E.D.

Now we can turn to the problem of characterizing syntactically the relation occurring between the programs a and b satisfying the conoditions

$$a \cdot x = y$$

$$b \cdot x = y$$

and for Theorem III, also the conditions:

$$a^{-1} \cdot y = x$$

$$b^{-1} \cdot y = x .$$

We say $a \simeq_x b$ and read it « a is equivalent on X to b », if the abovementioned conditions are true for any $x \in X$. We say $a \simeq b$, and read it « a is equivalent to b », if the given conditions are true for all x. As an example be

$$a \equiv s\, l\, s$$

$$b \equiv s\, l^3\, s$$

then $a \simeq_x b$,
where the tape

$$\ldots \square\, l\, \square \ldots$$

belongs to X but not so the tape

$$\ldots \square\, l\, l\, \square \ldots$$

As is easily verified and proved in Theorem VII, if

$$b \equiv l^2\, s\, r^2\, s\, l^2\, s\, r\, s$$

$$a \equiv s\, l\, s$$

then $a \simeq b$.

In the next two theorems we shall characterize syntactically respectively $\simeq_x$ and $\simeq$.

THEOREM VI. Two programs $a, b \in \mathfrak{F}_1/R_1$ are $a \simeq_x b$, respectively $a^{-1} \simeq_y b^{-1}$, *iff*

$$a^{-1} b \cdot x = b^{-1} a \cdot x = x , \qquad \forall\, x : x \in X$$

respectively

$$a\, b^{-1} \cdot y = b\, a^{-1} \cdot y = y , \qquad \forall\, y : y \in Y .$$

In other words $a \simeq_x b$, $a^{-1} \simeq_y b^{-1}$, *iff* X, Y, is the set of fixpoints of the program $a^{-1} b$, $a\, b^{-1}$, and therefore of its inverse $b^{-1} a$, $a^{-1} b$.

By definition $a \simeq_x b$ means

$$a \cdot x = b \cdot x = y\,, \qquad \forall\, x : x \in \mathrm{X}$$

and by Theorem III

$$a^{-1} \cdot y = b^{-1} \cdot y = x\,. \qquad \forall\, y : y \in \mathrm{Y}$$

Substituting for x in the first two and for y in the last two we have either the identity or

$$a\, b^{-1} \cdot y = b\, a^{-1} \cdot y = \mathrm{y} \qquad \forall\, y : y \in \mathrm{Y}$$

and

$$a^{-1} b \cdot x = b^{-1} a \cdot x = x\,. \qquad \forall\, x : x \in \mathrm{X}$$

Viceversa starting from the last four relations be:

$$b^{-1} \cdot y = x_1$$

$$a^{-1} \cdot y = x_2$$

$$b \cdot x = y_1$$

$$a \cdot x = y_2$$

and by Theorem III

$$b \cdot x_1 = y$$

$$a \cdot x_2 = y$$

$$b^{-1} \cdot y_1 = x$$

$$a^{-1} \cdot y_2 = x\,.$$

Combining these last eight equalities with the previous four:

$$a^{-1} \cdot y_1 = a^{-1} b \cdot x = x = b^{-1} a \cdot x = b^{-1} \cdot y_2$$

$$a \cdot x_1 = a\, b^{-1} \cdot y = y = b\, a^{-1} \cdot y = b \cdot x_2\,,$$

that is

$$a^{-1} \cdot y_1 = b^{-1} \cdot y_2 = x = b^{-1} \cdot y_1 = a^{-1} \cdot y_2$$

$$a \cdot x_1 = b \cdot x_2 = y = b \cdot x_1 = a \cdot x_2\,.$$

It is easy to verify, via an induction argument on the number n of elementary instructions a_i, that if $a \in \mathfrak{F}_1/\mathrm{R}_1$ then $a : x \to y$ is a

one-to-one mapping. Because of this and of Theorem III we have:

$$a \cdot x = b \cdot x = y_1 = y_2$$
$$a^{-1} \cdot y = b^{-1} \cdot y = x_1 = x_2 ,$$

combining these with the four initial equalities, we conclude:

$$a \cdot x = y$$
$$b \cdot x = y$$
$$a^{-1} \cdot y = x$$
$$b^{-1} \cdot y = x .$$

Q.E.D.

THEOREM VII. Two programs $a, b \in \mathfrak{F}_1/R_1$ are $a \simeq b$ iff

$$N_{a^{-1}b}(l) = N_{a^{-1}b}(r)$$

and

$$N_{a^{-1}b}(s^*) = 0 .$$

The proof is an immediate consequence of Theorem V and III.

Q.E.D.

COROLLARY I.

A programm $b \in \mathfrak{F}_1/R_1$ is $b \simeq i$ iff

$$N_b(l) = N_b(r)$$

and

$$N_b(s^*) = 0 .$$

It is sufficient to take, in Theorem VII, $a \equiv i$.

Q.E.D.

It should be noted that this last corollary is just another way to state Theorem V. Of a more applicative character are both the next corollary II and its consequence:

COROLLARY II.

Be $a \in \mathfrak{F}_1/R_1$ and $A \equiv \{b^{(h)} \mid a \simeq b^{(h)} \wedge b \in \mathfrak{F}_1/R_1\}$ if

$$N_a(s^*) = N_a(s) = n$$

then a is one of the $n!$ machines whith the smallest number of s-instructions. The proof is an immediate consequence of Theorem VII.

Q.E.D.

To find a programm with the smallest number of moving instructions we must distinguish six cases according to the relative positions of the initial I and final F scanned squares and of the rightmost R and leftmost L marked, or erased, squares.

Said s_1^* and s_h^* the s-instruction acting upon R and L that is the writing instructions for which $d_{1h}^* = \max_{ij} d_{ij}^*$, then the six cases are:

1) L R I F ; 2) L I R F
3) I L R F ; 4) I F L R
5) L I F R ; 6) I L R F .

Let us note that the relative position between I and F, or L and R, is inessential. What could be called a, relative, minimum component machine, m.c.m. for short, is any program for which $N(s^*) = N(s)$ and either there is just one s_h^* for which either

$$\ldots l\, s_h^*\, r \ldots$$

or

$$\ldots r\, s_n^*\, l \ldots$$

and $d_{1h}^* = \max_i d_{ih}^*$, that is the cases 1 to 4. Or as in case 5 we have two s^*-instructions of this kind, namely s_h^* and s_k^*, such that $d_{hk}^* = \max_{ij} d_{ij}^*$ and either

$$\ldots l\, s_h^*\, r \ldots \quad \text{and} \quad \ldots r\, s_k^*\, l \ldots$$

or

$$\ldots r\, s_n^*\, l \ldots \quad \text{and} \quad \ldots l\, s_k^*\, r \ldots$$

Or finally as in case 6) we have again just one s_h^* such that $d_{1h}^* = \max_i d_{ih}^*$ and either

$$\ldots r\, s_1^*\, r \ldots \quad \text{and} \quad \ldots r\, s_n^*\, r \ldots$$

or

$$\ldots l\, s_1^*\, l \ldots \quad \text{and} \quad \ldots l\, s_h^*\, l \ldots$$

Obviously case 6) is characterized by the relation $N(s^*) = N(s)$ together with either $N(l) = 0$ or $N(r) = 0$. It is immediately verified that, in general, only in case 6) the m.c.m. is unique, that is a true minimum.

3. - The algebra $\mathfrak{L}$.

We shall now introduce, alongside the concatenation, a second operation between programs, namely the addition. To this end we have to settle some notational matter. If $a \in \mathfrak{F}_1/R_1$ and a_j is an elementary instruction, then, the hk-factor belonging to a, a_{hk}, is the product of the k-1 elementary instructions belonging to a, beginning from the h-th and going leftward: that is if

$$a = \prod_{1}^{n} a_j$$

then

$$a_{hk} = \prod_{h-k+1}^{h} a_j \, .$$

It must be noted that from $a \in \mathfrak{F}_1/R_1$ it follows a $a_{hk} \in \mathfrak{F}_1/R_1$. We now have to introduce the so-called conditionals: that is syntactical propositions associated with a subset F_o of $\mathfrak{F}_1/R_1$ whose truth, or falsity, is decidible in finite terms, we shall write:

$$F_o \; \textit{if} \; \alpha \, .$$

By definition we shall say a conditional α referring to F_o is acceptable *iff* α is true for just one $\alpha \in F_o$ and false for any other $b \in F_o$.

Now we have to explain what it is intended for a conditional α to be true or false, for a machine a. A conditional is a proposition asserting the existence of syntactical properties for a. We have encountered such propositions in dealing, e.g., with the fixpoint properties of a machine, with the equivalence relations etc.

Thus *if* $N_a(l) = N_a(r)$, *if* $N_a(s^*) = 2n$, *if* $N_a(s^*) = N_a(s)$ could all be considered conditionals and also their combination with connectives « $\wedge$ », « or » and « $\neg$ »: their truth, or falsity, is easily verified once given a.

$$F_o \; \textit{if} \; a_{hk} \, ,$$

where the conditional is true for $a \in F_o$ *iff* $a_{hk} \;\; \Omega a$.

We have to introduce two objects: $\not\square$ and $\varnothing$; they shall be referred to respectively as the jolly and, the zero, or nul, element. The latter is the neutral element with respect to the addition, to be soon introduced. From a semantical point of view it is the action to be taken when all tests, i.e. the conditionals, are false. The jolly instead correspondsto the ground's notion in electronics or to that of sewage in a town: an action to be taken every time there isn't any clear-cut situation, a sort of escape clause. From a semantical point of view it corresponds to the meaningless case in which we should apply two, or more, parallel tests to our programs or when there are two, or more, true tests and we have no rules to chose between them. We can now introduce the addition of two, or more, programmes blending together Rosza Peter's « patched together definition » (2) and McCarty's « if then else » (3). As usual be

$$F_o \equiv \{a_j \mid a_j \in \mathfrak{F}_1/R_1 \wedge 1 \leq j \leq n\} \; if \; b \, ,$$

where b is an acceptable conditional relative to F_o. We shall set, for $1 \leq j_1 \leq n$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \; if \; b = \sum_1^n a_j \; if \; b \; := _{def} \begin{cases} a_{j_1} \; if \; b & if \; b \mathrel{\mho} a_j \text{ and } b \notin a_{j \neq j_1} \\ \varnothing & if \; b \notin a_{j_1} \\ \not\square & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In the next table we give the multiplication and addition rules for the jolly and null element, $a \in \mathfrak{F}_1/R_1$:

Table II - Rules for:

Product

$\overrightarrow{\downarrow b_o c}$	a	i	$\varnothing$	$\not\square$
a	*	a	$\varnothing$	$\not\square$
i	a	i	$\varnothing$	$\not\square$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\not\square$	$\not\square$	$\not\square$	$\varnothing$	i

Sum

$\overrightarrow{\downarrow b + c}$	a	i	$\varnothing$	$\not\square$
a	**	**	a	$\not\square$
i	**	**	i	$\not\square$
$\varnothing$	a	i	$\varnothing$	$\not\square$
$\not\square$	$\not\square$	$\not\square$	$\not\square$	$\varnothing$

*) see Table I. **) see the below given definition of the sum.

Let us now consider the sets:

$$F_0^{*'} \equiv \{a \text{ if } b | a \in \mathfrak{F}_1/R_1 \wedge b \notin a\}$$

$$F_1^{*'} \equiv \{a \text{ if } b | a \in \mathfrak{F}_1/R_1 \wedge b \ \mathfrak{V}\ a \text{ or } a = \not\emptyset \wedge b = \not\emptyset\}.$$

By convention we continue to write $\emptyset$ for the generic element of F_0^* and a *if* b for the generic element of F_1^*. Let us define the set $\mathfrak{F}_0 \equiv \{F_1^{*'} \cup F_0\}$ whose generic element, $a + \emptyset$ *if* $b \in \mathfrak{F}_0$, we continue to write as a *if* b, that is:

$$a \text{ if } b = (a + \emptyset) \text{ if } b \in \mathfrak{F}_0.$$

We now define the concatenation of a_1 *if* $b_1 \in \mathfrak{F}_0$ with a_2 *if* $b_2 \in \mathfrak{F}_0$ as:

$$a_1 \text{ if } b_1 \circ a_2 \text{ if } b_2 : =_{def} a_1 a_2 \text{ if } b_1 \wedge b_2 \in \mathfrak{F}_0$$

and

$$i \text{ if } i : =_{def} a_1 \text{ if } b_1 \circ a_1^{-1} \text{ if } b_1^{-1} = a_1 a_1^{-1} \text{ if } b_1 \wedge b_1^{-1}.$$

Both this and the rules given in Table II for the products involving the jolly and the zero together with the proof that $\{\mathfrak{F}_1, \circ, i\}$ forms a non-commutative group is clearly sufficient to prove the same for $\{\mathfrak{F}_0, \circ, i\}$.

We can now define addition between objects of the type a_j *if* b_j, that is we can introduce the second operation on $\mathfrak{F}_0$. Let be a_j *if* $b_j \in \mathfrak{F}_0$ and a_j *if* $b_j \neq \not\emptyset$ then for $1 \leq j_h \neq j_k \leq n$ we set

$$a_1 \text{ if } b_1 + \ldots + a_n \text{ if } b_n =$$

$$= \sum_n a_j \text{ if } b_j : =_{def} \begin{cases} a_{j_h} \text{ if } b_{j_h} & \text{iff } b_{j_h} = b_{j_k} \text{ and } b_{j_h} \ \mathfrak{V}\ a_{j_h} \text{ and } b_{j_k} \notin a_{j_k} \\ \emptyset & \text{iff } b_{j_h} = b_{j_k} \text{ and } b_{j_h} \notin a_{j_k} \text{ and } h = 1,2,\ldots,n. \\ \not\emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Now we can prove the following:

THEOREM VIII. $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{F}_0, \circ, +, i, \emptyset\}$ to be called an $\mathfrak{L}$-algebra, is a non-commutative group with respect to the multiplication, a commutative monoid with respect to addition. Moreover the distributive laws hold in $\mathfrak{L}$.

Let us suppose $a_j \; if \; b_j \in \mathfrak{L}$ then:

i) The sum is defined in $\mathfrak{L}$:

$$a_1 \; if \; b_1 + a_2 \; if \; b_2 \in \mathfrak{L} \; .$$

ii) The commutative law of addition holds:

$$a_1 \; if \; b_1 + a_2 \; if \; b_2 = a_2 \; if \; b_2 + a_1 \; if \; b_1 \; .$$

iii) The associative law of addition holds:

$$(a_1 \; if \; b_1 + a_2 \; if \; b_2) + a_3 \; if \; b_3 = a_1 \; if \; b_1 + (a_2 \; if \; b_2 + a_3 \; if \; b_3)$$

To see this we should distinguish three cases:

a) $b_j \not\subset a_j \; , \; j = 1, \ldots , \; 3$

then we have either

$$\varnothing = \varnothing \qquad if \;\; b_1 = b_2 = b_3$$

or $\not\varnothing = \not\varnothing$ otherwise

b) $b_j \; \mathfrak{V} \; a_j$ and $b_h \not\subset a_h$ and $b_k \not\subset a_k \; , \; j \neq h \neq k$ and $j, h, k = 1,2,3;$

then we have either

$$a_j \; if \; b_j = a_j \; if \; b_j \qquad if \; b_1 = b_2 = b_3$$

or $\not\varnothing = \not\varnothing$ otherwise

c) in any other case we have $\not\varnothing = \not\varnothing$.

iv) The set contains the neutral element for addition $\varnothing$ such that for every $a \; if \; b \in \mathfrak{L}$:

$$a \; if \; b \circ \varnothing = \varnothing \; .$$

i') The product is defined in $\mathfrak{L}$:

$$(a_1 \; if \; b_1) \circ (a_2 \; if \; b_2) = a_1 \, a_2 \; if \; b_1 \wedge b_2 \in \mathfrak{L}.$$

ii') The associative law of multiplication holds:

$$(a_1 \; if \; b_1 \circ a_2 \; if \; b_2) \circ a_3 \; if \; b_3 =$$

$$= a_1 \; if \; b_1 \circ (a_2 \; if \; b_2 \circ a_3 \; if \; b_3) = a_1 \, a_2 \, a_3 \; if \; b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 \in \mathfrak{L}.$$

iii') The set contins thte unit $i\ if\ i$, i.e. the neutral element for multiplication, such that for every $a\ if\ b \in \mathfrak{L}$

$$i\ if\ i \circ a\ if\ b = i \circ a\ if\ i \wedge b = a\ if\ b\ .$$

iv') Every $a\ if\ b \in \mathfrak{L}$, except $\varnothing$, has an inverse $a^{-1}\ if\ b^{-1} \in \mathfrak{L}$ such that

$$a\ if\ b \circ a^{-1}\ if\ b^{-1} = a^{-1}\ if\ b^{-1} \circ a\ if\ b = a\,a^{-1}\ if\ b \wedge b^{-1} = i\ if\ i\ .$$

As in Theorem I, iv) we simply obtain $a^{-1}\ if\ b^{-1}_{jh}$ from

$$a = a_1\, a_2 \ldots a_n$$

$$b = a_j\, a_{j-1} \ldots a_h$$

if we take

$$a^{-1} = a_n^{-1}\ a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}$$

$$b^{-1} = a_h^{-1}\ a_{h-1}^{-1} \ldots a_j^{-1}\ ,$$

where the inverse a_k^{-1} of the elementary instruction a_k is given in Table I.

vi) The distributive laws hold:

$$a_1\ if\ b_1 \circ (a_2\ if\ b_2 + a_3\ if\ b_3) = a_1\, a_2\ if\ b_1 \wedge b_2 + a_1\, a_3\ if\ b_1 \wedge b_3$$

$$(a_2\ if\ b_2 + a_3\ if\ b_3) \circ a_1\ if\ b_1 = a_2\, a_1\ if\ b_2 \wedge b_1 + a_3\, a_1\ if\ b_3 \wedge b_1\ .$$

In fact if $b_1 \not\subset a_1$ then we have:

$$\varnothing = \varnothing\ .$$

We must thus consider $b_1\ \mathfrak{O}\ a_1$. In the case $b_2 \not\subset a_2$ and $b_3 \not\subset a_3$ we have again:

$$\varnothing = \varnothing\ .$$

In the cases $b_3 \not\subset a_3$ and $b_2\ \mathfrak{O}$ or $b_2 \not\subset a_2$ and $b_3\ \mathfrak{O}\ a_3$ we have

$$a_1\, a_2\ if\ b_1 \wedge b_2 = a_1\, a_2\ if\ b_1 \wedge b_2$$

$$a_2\, a_1\ if\ b_2 \wedge b_1 = a_2\, a_1\ if\ b_2 \wedge b_1$$

or respectivley

$$a_1\, a_3\ if\ b_1 \wedge b_3 = a_1\, a_3\ if\ b_1 \wedge b_3$$

$$a_3\, a_1\ if\ b_3 \wedge b_1 = a_3\, a_1\ if\ b_3 \wedge b_1\ .$$

In any other case we have:

$$\not\emptyset = \not\emptyset \ .$$

Q.E.D.

A useful relation holding in an $\mathfrak{L}$-algebra is given in the following:

THEOREM IX. In an $\mathfrak{L}$-algebra we have $(\Sigma\, a_j \ if\ b_j)^m = \Sigma\, a_j^m \ if\ b_j$.

For every mixed product we have:

$$a_h^p\, a_k^q \ if\ b_h \wedge b_k = \varnothing \ ;$$

where $p + q = n$, because either $b_h \,\overline{\supset}\, a_h$ and $b_k \not\subset a_k$ or $b_h \not\subset a_h$ and $b_k \,\overline{\supset}\, a_k$.

Q.E.D.

COROLLARY.

In an $\mathfrak{L}$-algebra we have

$$(\sum a_j \ if\ b_j)^{-1} = \sum a_j^{-1} \ \ if\ b_j^{-1} \ .$$

It is sufficient to take $m = -1$ in Theorem IX.

Q.E.D.

To conclude we want to give a meaning to an infinite sum, or series,

$$\sum_1^\infty a_j \ if\ b_j \ .$$

We shall say a series convergent, and we will apply the same rules given for an ordinary sum, if it is possible to prove in finite terms whichever of the following cases is true for $\forall$ j :

i) $b_i \,\overline{\supset}\, a_i$ and $b_{j\neq j} \not\subset a_{j\neq i}$

ii) $b_j \not\subset a_j$

iii) otherwise.

4. - SOME PROPERTIES OF AN $\mathfrak{L}$-ALGEBRA.

Why we bothered to introduce such an algebra? The answer is very easy: the semantical interpretation of a sum is a loop. In other

words: starting from the generating set $F \equiv \{s, l, r\}$ and using two operations, namely concatenation and addition, we get an $\mathfrak{L}$-algebra. As we shall prove $\mathfrak{L}$-algebras enable us to calculate general recursive monadic functions and to tell something on their equivalence or on the length of their programmes.

We shall say that the series $\Sigma\, a_j \; if \; b_{o\,2n+3}$ converges to the function f or that $f = \Sigma\, a_j \; if \; b_{o\,2n+3}$ is calculable iff for every n the series converges and we have

$$f \cdot n = a_n \,,$$

where

$$a_n = r^{f \cdot n}\, c^{g \cdot n}\, l\, (l\, s)^{n+1}$$

and

$$b_{o\,2n+3} = l\, (l\, s)^{n+1}$$

with $c^{g \cdot n}$ a concatenation of a finite number, n-dependent, of elementary instructions.

The semantic interpretation of such a definition is quite obvious. Given a tape with the number n represented in the unary alphabet, i.e. with $n + 1$ consecutive marked squares, then the function f is said to be calculable if it is possible to choose effectively a machine a such that if it starts on the rightmost marked square then it stops on the rightmost marked square, the tape having just $1 + f \cdot n$ marked squares.

Since we shall use it in the proof of the next theorem, it is here recalled the main result, Theorem III, as given by J. Robinson in (4): « All general recursive functions of one variable can be obtained by starting with the two functions S (successor) and E ($E \cdot x = x - [x^{1/2}]^2$), and repeatedly using any of the formulas

$$F_1 \cdot x = A \cdot x + B \cdot x \,, \qquad F_2 \cdot x = B\, A \cdot x \,, \qquad F_3 \cdot x = B^{-1} \cdot x$$

to construct a new function from the known functions A and B. The third formula is used only when B assumes all values ».

THEOREM X. A monadic function $f = \Sigma\, a_j \; if \; b_j$ is calculable iff it is general recursive.

Because for every n there is just one true conditional, namely

$$l\, (l\, s)^{n+1} = b_{o\,2n+3}\; \Omega\; a_u = r^{f \cdot n}\, c^{g \cdot n}\, l\, (l\, s)^{n+1} \,,$$

then the given series is certainly convergent. Obviously it is surely

$$f \cdot n = a_n$$

if we take

$$c = s\,l$$

and

$$g \cdot n = 1 + f \cdot n\,.$$

It isthus sufficient for f to be general recursive to have $a_n \in \mathfrak{F}_1/\mathrm{R}_1$. Let us now set

$$b_{o\,2n+3} = l\,(l\,s)^{n+1}\,,$$

$$\mathrm{E} \cdot n = \sum_m r^{E\cdot m}\,(s\,l)^{1+E\cdot m}\,l\,(l\,s)^{m+1}\ \textit{if}\ b_{o\,2n+3}\,,\quad \mathrm{S} \cdot n = r\,s$$

$$\mathrm{F}_1 \cdot n = \sum_m r^{A\cdot m+B\cdot m}\,(s\,l)^{1+A\cdot m+B\cdot m}\ l\,(l\,s)^{1+A\cdot m}\ r^{A\cdot m}\,(s\,l)^{1+A\cdot m}$$

$$l\,(l\,s)^{1+B\cdot m}\,r^{B\cdot m}\,(s\,l)^{1+B\cdot m}\,l\,(l\,s)^{m+1}\ \textit{if}\ b_{o\,2n+3}$$

$$\mathrm{F}_2 \cdot n = \sum_m r^{B\,A\cdot m}\,(s\,l)^{1+B\,A\cdot m}\,l\,(l\,s)^{1+A\cdot m}\ r^{A\cdot m}\,(s\,l)^{1+A\cdot m}\,l\,(l\,s)^{m+1}\ \textit{if}\ b_{o\,2n+3}$$

and if

$$\mathrm{B} \cdot n = \sum_m r^{B\cdot m}\,(s\,l)^{1+B\cdot m}\,l\,(l\,s)^{m+1}\ \textit{if}\ b_{o\,2n+3}$$

then

$$\mathrm{F}_3 \cdot n = \sum_m r^m\,(s\,l)^{m+1}\,l\,(l\,s)^{1+B\cdot m}\ \textit{if}\ b_{o\,2n+3}\,.$$

Because E, S, F_1, F_2 and F_3 are calculable, provided such are A and B, then we have our theorem.

Q.E.D.

Except for the purpose of arriving at a new definition of general recursive functions, is there any other reason for an Σ-algebra? Of course: for one the application of the results given in Chapter 2 relative to the equivalence and to the problem of a program with the minimu mnumber of instructions.

Suppose Σ to be the name of a special purpose machine, such that it turns out the sequence of elementary instructions corresponding to the true conditional once we feed in the sequence of exponents and he value of n. Thus it immediately disappears any philosophical problem related to the necessity of an infinite memory, eventually needed to store the infinite addenda of a series. In other words, in order to minimize the length of a program it is sufficient to make each addendum of minimum length. The problem now is: with respect to which alphabet we have to find the shortest program? Let us consider the expressions given in Theorem X for E, F_1, F_2 and F_3. If we choose $\{s, l, r, i\}$ as our alphabet we can find programs shorter than

those given. But we have also some conventions to deal with: e.g. the convention on the stop; the new programs will they respect it? Not so in general. Instead let us assume {E, S} as th egiven alphabet: how can we obtain shorter expressions for F_1, F_2 and F_3 taking into account the conventions previously made? The proof given for the next theorem shall provide an answer.

THEOREM XI. A monadic general recursiv efunction could always be put in the form:

$$F \cdot n = \sum_m r^{F \cdot m} (s\, l)^{1+F \cdot m}\, l^h\, (l\, s)^{m+1} \; if \; b_{o\, 2n+3} ,$$

where h is constant.

Both E and F_3 are in this form. Moreover we have:

$$S \cdot n = \sum_m r^{m+1} (s\, l)^{m+2}\, l\, (l\, s)^{m+1} \; if \; b_{o\, 2n+3} .$$

Let us now consider the four programs

$$c_1 = (l\, s)^{1+A \cdot m}\, r^{A \cdot m}\, (s\, l)^{1+A \cdot m}\, \overline{o}\; F_1, F_2$$
$$c_2 = (l\, s)^{1+B \cdot m}\, r^{B \cdot m}\, (s\, l)^{1+B \cdot m}\, \overline{o}\; F_1$$
$$d_1 = (s\, l)^{A \cdot m}\, s\, r^{A \cdot m}\, s\, (l\, s)^{A \cdot m}\, \overline{o}\; F_1, F_2$$
$$d_2 = (s\, l)^{B \cdot m}\, s\, r^{B \cdot m}\, s\, (l\, s)^{B \cdot m}\, \overline{o}\; F_1 .$$

For $j = 1, 2$ we have

$$c_j = l\, d_j\, l$$

and

$$N_{c_j}(s^*) = N_{d_j}(s^*) = 0$$

that is they have the property α), thus for Theoremns IV ad VI

$$c_j = l\, d_j\, l \simeq_V l\, i\, l = l^2 ,$$

where V is the tape with zero marked squares.

Thus both F_1 and F_2 can be written in the given form, with $h = 7$ and respectively $h = 4$.

Q.E.D.

What isimportant to notice is the syntactical implementation of the given reduction. We observe that the form we arrived isn't the shortest: if we change, e.g. the convention on the stop of our machines we can, via a pure syntactical reduction, reach a minimum.

THEOREM XII. If a machine stops on the leftmost marked square then the programs for monadic general recursive functions have an unique minimal form.

The required form is

$$F \cdot n = \sum_{m} (s\, l)^{1+F\cdot m}\, l\, (l\, s)^{m+1}\ \textit{if}\ b_{\circ 2n+3}\,,$$

because $N(s^*) = N(s)$ and $N(r) = 0$, by the result given at the end of Chapter 2 we have proved the thesis.

Q.E.D.

We note that the given form isn't a minimum with respect to the generating set F it is just the shortest sequence of elementary instructions satisfying the given conventions. It should be stressed here that the chosen definition for a calculable function could be, quite naturally, modified so as to include the class polyadic, or more generally of sequence-to-sequence, functions. We have preferred the given above in order both to simplify our proofs and to stress the just given possibility of syntactical investigations.

Work is now in progress both on the axioms of $\mathfrak{L}$-algebra and on the questions related to the programs highlighted in the last couple of theorems. Namely, on the possibility of extending the given results to an arbitrarily given set of instructions in respect of which to minimize the length of programs. And on the search for more syntactically characterized conditions of a minimum.

ACNOWLEDGMENTS.

Thanks are due to Proff. G. Criscuolo, G. Germano, A. Maggiolo-Schettini and G. Trautteur for their decisive support, the lively and thorough discussions they had the patience to sustain, and the help they gave for the clarification of the subject.

BIBLIOGRAPHY

[1] LAURIA F. E., *On the automatic control of the logical activity in the cerebral cortex*, I.T.T. Jour. of Life Sciences, **3**, 11-13 (1973).

[2] ROZSA PETER, *Recursive functions*, Academic Press, New York (1967).

[3] MCCARTHY J., *A basis for a mathematical theory of computation. Computer programming and formal systems*, P. Baffort and D. Hirschberg eds. North-Holland Co., Amsterdam (1963).

[4] ROBINSON J., *General recursive functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **1**, 703-718 (1950).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e V. Dalla Volta.

Nonoscillation Generating Delay Terms in Odd Order Differential Equations *

Nota di LU-SAN CHEN ** e CHEH-CHIH YEH **
presentata dal socio corrispondente LUIGI SALVADORI

(Adunanza del 3 aprile 1976)

RIASSUNTO. — Si considera l'equazione differenziale

$$x^{(2n+1)}(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, x[g_i(t)] = f(t) \tag{1}$$

in ordine al seguente problema:

(I) Ricerca di condizioni sufficienti affinché le soluzioni limitate non oscillanti della (1) tendano a zero;

(II) Ricerca di condizioni sufficienti affinché nessuna soluzione non oscillante della (1) tenda a zero.

ABSTRACT. — In this paper we shall consider the differential equations (1) and accomplish the following problem:

(I) To find conditions which will ensure that bounded nonoscillatory solutions of equation (1) approach zero;

(II) To find conditions such that nonoscillatory solutions of equation (1) do not approach zero.

1. - INTRODUCTION.

In the last few years, there has been an increasing interest in the study of the oscillatory behavior of solutions of differential equations with retarded argument, which retarded differential equation provide a mathematical model for a physical system in which the rate of change of the system depends upon its past history. The oscillatory behavior of retarded differential equation of order larger than or equal to 2 has been the subject of many recent investigations [1-11] just to mention a few. Recently LADAS and LAKSHMIKANTHAM [5]

* This research was supported by the National Science Council.
** Department of Mathematics, National Central University, Chung-Li, Taiwan.

showed that if $p(t) > 0$, $p'(t) \leq 0$ and $\tau^2 p(t) \geq 2$, then the bounded solutions of the equation

$$(*) \qquad x''(t) - p(t)\, x(t - \tau) = 0$$

are oscillatory. Notice that (*) is nonoscillatory when $\tau = 0$. The question of whether equation (*) has oscillatory solutions or not was left unanswered in [5]. LADAS, LADDE and PAPPADAKIS [6] generalized results to a more general equation

$$(**) \qquad x''(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, x[g_i(t)] = 0$$

where $g_i(t) \leq t$, $i = 1, 2, \ldots, m$. More recently, DAHIYA [12] has discussed the nonoscillatory property of solutions of the following even order differential equation

$$(***) \qquad x^{(2n)}(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, x[g_i(t)] = f(t)$$

where $1 \leq n$ is an integer and accomplish the following problem:

(I) To find conditions which will ensure that bounded nonoscillatory solutions of equation (***) approach zero,

(II) To find conditions such that nonoscillatory solutions of equation (***) do not approach zero.

In this present paper, we consider the same problem for odd order differential equations of the following form

$$(1) \qquad x^{(2n+1)}(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, x[g_i(t)] = f(t)$$

where $0 \leq n$ is an integer.

2. - THEOREMS.

We shall consider the differential equations (1) and the following conditions:

(i) *The functions* $p_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *are continuous and nonnegative on* $[t_0, \infty)$, *and for some index* i_0, $1 \leq i_0 \leq m$, $p_{i_0}(t) > 0$ *for* $t \geq t_0$.

(ii) *The functions* $g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *are differentiable on* $[t_0, \infty)$ *and such that*

$$g_i(t) \leq t \text{ for every } t \geq t_0,$$
$$g_i'(t) \geq 0 \text{ for every } t \geq t_0,$$
$$\lim_{t\to\infty} g_i(t) = \infty .$$

(iii) *The function* $f(t)$ *is continuous and nonnegative on* $[t_0, \infty)$.

We shall restrict our attention to solution $x(t)$ of equation (1) which exist on a half-line $[t_0, \infty)$. Such a solution is called *oscillatory* if it has a sequence of zeros tending to infinity. Otherwise a solution is called *nonoscillatory*.

THEOREM 1. *Assume that the conditions* (i) - (iii) *are satisfied and in addition the following inequality holds*

$$(C_1) \qquad \liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \int_{g_*(t)}^{t} \frac{(g_i(t) - g_i(s))^{2n}}{(2n)!} p_i(s)\, ds > 1$$

where $g_*(t) \equiv \min_{1\leq i\leq m} g_i(t)$. *Then bounded nonoscillatory solutions of equation* (1) *are eventually positive.*

Proof: Let $x(t)$ be a bounded nonoscillatory solution of equation (1). Then $x(t)$ eventually assumes a constant sign. Suppose, to the contrary, that $x(t)$ is eventually negative. Let T be large enough so that for $t \geq T \geq t_0$, $x[g_i(t)] < 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Using conditions (i) - (iii), it follows from equation (1) that $x^{(2n+1)}(t) > 0$. In view of the boundedness and nonpositive of $x(t)$, the conclusion $x^{(2n+1)}(t) > 0$ implies the following

$$(2) \qquad (-1)^{j+1} x^{(j)}(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

for sufficiently large t. Without any loss of generality, we can assume that T is large enough so that for $t \geq T$, (2) holds. Applying Taylor's theorem to the function $x(s)$ about the point t we obtain

$$(3) \qquad x(s) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{x^{(j)}(t)}{j!} (s-t)^j + \frac{x^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} (s-t)^{2n+1}, \quad s, t \geq T$$

where ξ is a point between s and t.

Since $x^{(2n+1)}(\xi) > 0$, we have from (3)

$$x(s) \geq \sum_{j=0}^{2n} \frac{x^{(j)}(t)}{j!} (s-t)^j . \tag{4}$$

Since $g_i(t) \to \infty$ as $t \to \infty$ and $g_i'(t) \geq 0$, from (4) we get

$$x[g_i(s)] \geq \sum_{j=0}^{2n} \frac{(g_i(s) - g_i(t))^j}{j!} x^{(j)}[g_i(t)] , \quad i = 1, 2, \ldots, m , \tag{5}$$

from which

$$x^{(2n+1)}(s) = f(s) - \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, x[g_i(s)] \leq \tag{6}$$

$$\leq f(s) - \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \sum_{j=0}^{2n} \frac{(g_i(s) - g_i(t))^j}{j!} x^{(j)}[g_i(t)] .$$

Integrating (6) with respect to s from $g_*(t)$ to t, we obtain

$$x^{(2n)}(t) \leq \int_{g_*(t)}^{t} f(s)\, ds - \sum_{i=1}^{m} x[g_i(t)] \int_{g_*(t)}^{t} p_i(s)\, ds + \tag{7}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} x'[g_i(t)] \int_{g_*(t)}^{t} p_i(s)(g_i(t) - g_i(s))\, ds + \ldots$$

$$- \frac{x^{(2n)}[g_*(t)]}{(2n)!} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \int_{g_*(t)}^{t} p_i(s)(g_i(t) - g_i(s))^{2n}\, ds - (2n)! \right\} .$$

In view of condition (C_1), conclusion (2) and the fact that $g_i(t) - g_i(s) \geq 0$ (since $t \geq s$), each term to the right hand side of (7) is nonnegative while the left hand side is nonpositive. Since $p_{i_0}(t) > 0$, at least for one i_0, the right hand side of (7) is positive. This contradiction proves our theorem.

THEOREM 2. *Under the conditions* (i) - (iii) *and* (C_1). *Moreover, assume that*

(C_2) *for some index* j $(1 \leq j \leq m)$ *there exists* $d > 0$ *such that*

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t}^{t+d} p_j(s)\, ds \geq \epsilon > 0$$

and

$$(C_3) \qquad \int^{\infty} f(t)\, d\, t < \infty \ .$$

Then bounded nonoscillatory solutions of equation (1) *approach zero as* $t \to \infty$.

Proof: Let $x(t)$ be a bounded nonoscillatory solution of equation (1). By Theorem 1, $x(t)$ and $x[g_i(t)]$, $i = 1, 2, \ldots, m$ are positive for every $t \geq t_0$ where t_0 is large enough. In view of condition (C_2), we have

$$(8) \qquad \int_{t_0}^{\infty} p_i(t)\, d\, t = \infty \ .$$

Integrating (1) from t_0 to t, we obtain

$$(9) \qquad x^{(2n)}(t) - x^{(2n)}(t_0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} p_j(s)\, x[g_j(s)]\, d\, s = \int_{t_0}^{t} f(s)\, d\, s$$

or

$$(10) \qquad x^{(2n)}(t) - x^{(2n)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} p_j(s)\, x[g_i(s)]\, d\, s \leq \int_{t_0}^{t} f(s)\, d\, s \ .$$

Hence

$$(11) \qquad \int_{t_0}^{\infty} p_i(s)\, x[g_i(s)]\, d\, s < \infty \ .$$

In fact if

$$\int_{t_0}^{\infty} p_i(s)\, x[g_i(s)]\, d\, s = \infty \ ,$$

then, from (C_3), it follows from (9) that $x^{(2n)}(t) \to -\infty$ as $t \to \infty$. But this will force $x(t)$ to be unbounded, a contradiction. Hence (11) holds.

Next we show that

$$(12) \qquad \lim_{t \to \infty} x'(t) = 0 \ .$$

If $x^{(2n)}(t) \to c\ (\neq 0)$ as $t \to \infty$, then (11) implies $\int^{\infty} p_i(s)\, d\, s < \infty$,

a contradiction. Therefore

$$x^{(2n)}(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty . \tag{13}$$

We make use of Kolmogorov's general theorem that, if $|x(t)| \leq M_0$ and $|x^{(2n)}(t)| \leq M_{2n-1}$ on $(0, \infty)$, then

$$|x^{(i)}(t)| \leq C_{n,i} M_0^{1-\frac{i}{2n}} M_{2n}^{\frac{i}{2n}}, \tag{14}$$

where $C_{n,i}$ is a constant depending on n and i and $0 < i < 2n$. Thus if $x^{(2n)}(t) \to 0$ as $t \to \infty$ and $x(t)$ is bounded, then $x^{(i)}(t) \to 0$ $(0 < i < 2n)$ as $t \to \infty$. Hence (12) holds.

Now from (8) and (11) we obtain

$$\liminf_{t \to \infty} x[g(t)] = 0 . \tag{15}$$

The subscript j in (15) is dropped for convenience. If $\lim_{t \to \infty} x(t) \neq 0$, then let $\limsup_{t \to \infty} x(t) > r > 0$.

In view of (6), there exists a sequence $\{\beta_k\}$, $k \geq 0$ with the fol lowing properties (see [10]):

(a) $\lim_{k \to \infty} \beta_k = \infty$, $\beta_k \geq t_1$ for all k.

(b) For each k, $x[g(\beta_k)] > r$.

(c) For each $k \geq 1$, there exists a number β_k' *such that*

$$\beta_{k-1} < \beta_k' < \beta_k \text{ and } x[g(\beta_k')] < \frac{r}{2} .$$

Let α_k be the largest number less than β_k such that $x[g(\alpha_k)] = \frac{r}{2}$ and δ_k be the smallest number greater than β_k such that $x[g(\delta_k)] = \frac{r}{2}$ for $k \geq 1$. Now in the $[\alpha_k \beta_k]$, there exists a number α_k' such that

$$g'(\alpha_k') x'[g(\alpha_k')] = \frac{x[g(\beta_k)] - x[g(\alpha_k)]}{\beta_k - \alpha_k} > \frac{r}{2(\delta_k - \alpha_k)} \tag{16}$$

by the mean-value theorem. But $x'[g(\alpha_k')] \to 0$ as $g(\alpha_k') \to \infty$. Also $g'(\alpha_k')$ is bounded. Therefore from (16), it follows that $\lim_{k \to \infty} (\delta_k - \alpha_k) =$

$-\infty$. Also, because of the way α_k and δ_k were chosen $x[g(t)] \geq$ $\geq \frac{r}{2} > 0$ on $[\alpha_k, \delta_k]$. Now from (11), it follows

$$\infty > \int_{t_1}^{\infty} p_i(t)\, x[g_i(t)]\, dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\delta_k} p_i(s)\, x[g_i(s)]\, ds >$$

$$> \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\delta_k} p_i(s)\, ds = \infty ,$$

due to condition (C_2) of this theorem. This contradiction shows that $r = 0$ and the proof is complete.

Example 1. Consider the equation

$$x'(t) + e^{\frac{t}{2} - \pi}\, x(t - \pi) = e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}, \quad t > \pi ;$$

which has $x(t) = e^{-t}$ as nonoscillatory positive solution that approaches to zero as $t \to \infty$.

By condition (C_1) we have

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{g_i(t)}^{t} p_1(s)\, ds = \liminf_{t\to\infty} \int_{t-\pi}^{t} e^{\frac{s}{2} - \pi}\, ds > 1 .$$

From condition (C_2), it follows

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t}^{t+d} e^{\frac{s}{2} - \pi}\, ds = 2\, e^{-\pi} \liminf_{t\to\infty} e^{\frac{t}{2}} \left(e^{\frac{d}{2}} - 1 \right) = \infty ,$$

since $d > 0$, also $f(t) = e^{-t}\left(e^{\frac{t}{2}} - 1 \right) \geq 0$ which is integrable on (π, ∞) and

$$\int^{\infty} e^{-t} \left(e^{\frac{t}{2}} - 1 \right) dt < \infty .$$

Thus all the conditions of Theorem 1 and Theorem 2 are satisfied.

THEOREM 3. *Under the conditions* (i) - (iii) *and* (C_1), *moreover, assume that*

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \int^{t} p_i(s)\, ds = \infty \tag{C_4}$$

and

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\int^{t} f(s)\, ds}{\sum_{i=1}^{m} \int^{t} p_i(s)\, ds} \geq \beta > 0 . \tag{C_5}$$

Then no nonoscillatory solution of equation (1) *approaches zero.*

Proof. Let $x(t)$ be a nonoscillatory solution of (1) which approaches zero. Then $x(t)$ is bounded on $[t_1, \infty)$. By Theorem 1, $x(t)$ is eventually positive. Then, without loss of generality, $x(t) > 0$ for $t \geq t_1$.

From (1) we have

$$x^{(2n)}(t) - x^{(2n)}(t_1) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_1}^{t} p_i(s)\, x[g_i(s)]\, ds = \int_{t_1}^{t} f(s)\, ds . \tag{17}$$

Since $x(t) \to 0$ as $t \to \infty$ and is positive, then there exists a $t_2 \geq t_1$ such that

$$x[g_i(t)] < \frac{\beta}{2} , \quad i = 1, 2, \ldots, m \text{ for } t \geq t_2 .$$

Replacing t_2 for t_1 in (17), we obtain

$$x^{(2n)}(t) - x^{(2n)}(t_2) = -\sum_{i=1}^{m} \int_{t_2}^{t} p_i(s)\, x[g_i(s)]\, ds + \int_{t_2}^{t} f(s)\, ds \geq$$

$$\geq -\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_{t_2}^{t} p_i(s)\, ds + \int_{t_2}^{t} f(s)\, ds ,$$

which yields

$$(18)\qquad \frac{x^{(2n)}(t)}{\sum_{i=1}^{m}\int_{t_2}^{t} p_i(s)\,ds} - \frac{x^{(2n)}(t_2)}{\sum_{i=1}^{m}\int_{t_2}^{t} p_i(s)\,ds} \geq -\frac{\beta}{2} + \frac{\int_{t_2}^{t} f(s)\,ds}{\sum_{i=1}^{m}\int_{t_2}^{t} p_i(s)\,ds}.$$

Now as $t \to \infty$, the right hand side of (18) is bounded away from zero from condition (C_5). Since

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\int_{t_2}^{t} p_i(s)\,ds = \infty,$$

it follows from (18) that $x^{(2n)}(t) \to \infty$ which in term forces $x(t)$ to be infinite, a contradiction, since $x(t)$ is bounded on $[t_1, \infty)$. This contradiction proves our theorem.

Example 2. Conosider the equation

$$x'''(t) + x(t-\pi) = 3 + \sin t - \cos t$$

which has $x(t) = 3 + \cos t$ as positive nonoscillatory solution does not approach zero as $t \to \infty$. From conditions (C_4) and (C_5), we have respectively

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_1}^{t} p(s)\,ds = \infty,$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\int_{t_1}^{t} f(s)\,ds}{\int_{t_1}^{t} p(s)\,ds} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{3(t-t_1) + (\cos t_1 - \cos t) + (\sin t_1 - \sin t)}{t - t_1} = 3 > 0.$$

From condition (C_1) we have

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{2} \int_{g*(t)}^{t} (g(t) - g(s))^2 p(s)\, ds =$$

$$= \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{2} \int_{t-\pi}^{t} (t-s)^2\, ds = \frac{\pi^3}{6} > 1 .$$

Thus all the conditions of this theorem are satisfied.

REFERENCES

[1] BRADLEY J. S., *Oscillation theorem for a second order delay equation*, J. Differential Equations, **8** (1970), 397-403.

[2] BURKOWSKI F., *Oscillation theorems for a second order nonlinear functional differential equation*, J. Math. Anal. Appl., **33**, (1971), 258-262.

[3] GOLLWITZER H. E., *On nonlinear oscillations for a second order delay equation*, J. Math. Anal. Appl., **26** (1969), 385-389.

[4] LADAS G., *Oscillation and asymptotic behavior of differential equations with retarded argument*, J. Differential Equations **10** (1971), 281-290.

[5] LADAS G. and LAKSHMIKANTHAM V., *Oscillations caused by retarded actions*, Applicable Anal., **4** (1974), 9-15.

[6] LADAS G., LADDE G. and PAPADAKIS J. S., *Oscillation of functional differential equations generated by delay*, J. Differential Equations, **12** (1972), 385-395.

[7] LU-SAN CHEN, *Some oscillation theorem for differential equations with functional arguments*, (to appear in J. Math. Anal. Appl.).

[8] LU-SAN CHEN, *Note on asymptotic behavior of solutions of a second order non linear differential equations*, (to appear in J. Math. Anal. Appl.).

[9] LU-SAN CHEN, *On oscillatory property of bounded solutions of functional differential equations*, (to appear in Portugaliae Mathematica).

[10] LU-SAN CHEN, *On the nonoscillatory properties of solutions of a functional differential equations*, (to appear in Bull. Soc. Math. Gréce).

[11] LU-SAN CHEN, *Some remarks on oscsillation of second order differential equations*, (to appear in Portugaliae Mathematica).

[12] DAHIYA R. S., *Nonoscillation generating delay terms in even order differential equations*, Hiroshima Math. J., **5** (1975), 385-394.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci L. Salvadori, C. Miranda e C. Tolotti.

Modulo di Young e temperatura di transizione vetrosa di vetri inorganici

Nota di ALBERTO MAROTTA e ALBERTO BURI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 3 aprile 1976)

RIASSUNTO. — Utilizzando considerazioni termodinamiche è stata ricavata un'equazione che permette il calcolo del modulo di Young di vetri inorganici di cui sia nota la composizione chimica e la temperatura di transizione vetrosa.

Il calcolo del modulo elastico per diversi ossidi vetrosi ha messo in evidenza l'eccellente accordo con i valori sperimentali desunti dalla letteratura.

ABSTRACT. — On the basis of thermodinamic arguments an equation for the direct calculation of Young's modulus of inorganic glasses from their glass transition temperatures and chemical compositions, has been derived.

Excellent agreement is obtained between measured and calculated values of elastic modulus for a variety of oxide glasses .

INTRODUZIONE

L'uso sempre crescente di fibre di vetro per rinforzare materiali plastici ha focalizzato l'attenzione sul modulo elastico, una proprietà che varia con la composizione del vetro. Si è cercato pertanto di individuare quei parametri che influenzano il modulo di Young E con il proposito di preparare vetri con caratteristiche elastiche molto più elevate di quelle dei vetri attualmente in commercio.

Allo stato attuale non vi è alcuna soddisfacente teoria che metta in relazione il modulo di Young con la struttura e la composizione del vetro.

Tra i lavori più recenti vanno ricordati quelli di PHILLIPS [1] e WILLIAMS e SCOTT [2] che hanno proposto una relazione empirica tra modulo E e composizione chimica del vetro, cioè:

$$E = \sum_i c_i p_i \qquad (I)$$

in cui p_i è la percentuale in moli dell'ossido i e c_i un coefficiente ottenuto interpolando numerosi risultati sperimentali.

L'equazione (I), pur dando risultati soddisfacenti, non tiene in alcun conto la struttura del vetro che, come è noto, ne influenza profondamente le proprietà chimico-fisiche; inoltre i coefficienti della maggior parte degli ossidi hanno valori assai diversi a seconda della composizione del vetro.

MAKISHIMA e MACKENZIE [3] propongono l'equazione:

$$E = 83{,}6\, V_f \sum_i G_i X_i \qquad \text{(II)}$$

in cui V_f è la densità di impacchettamento che verrà definita in seguito, G_i l'energia di dissociazione dei legami M_i-O dei vari ossidi ed X_i la percentuale in moli di questi ultimi.

YAMANE e SAKAINO [4] partendo dal presupposto che le caratteristiche elastiche di un vetro siano da mettere in relazione con le energie di fusione dei singoli ossidi, piuttosto che con quella di dissociazione, formulano la seguente equazione:

$$E = 9{,}3 \frac{\rho}{M} - \sum_i T_{mi} X_i \qquad \text{(III)}$$

in cui ρ è la densità del vetro, M il suo peso molecolare, T_{mi} la temperatura di fusione dell'ossido i ed X_i la percentuale in moli di questo.

Le equazioni (II) e (III), presupponendo che le proprietà chimico-fisiche di un vetro possano essere valutate come media pesata delle proprietà dei singoli ossidi, non tengono conto delle interazioni esistenti nel vetro tra i vari ossidi, né della loro diversa funzione nel reticolo (ossidi formatori o ossidi modificatori).

Infine RAY [5], osservando che il modulo di Young di vetri a più componenti non differisce molto da quello dell'ossido formatore, ipotizza che l'energia necessaria alla deformazione del reticolo sia determinata principalmente dal numero e dall'ampiezza delle forze che tengono legati gli atomi di ossigeno nel reticolo e che quindi il modulo di Young debba crescere con la « densità » di tali atomi.

Nella presente nota viene proposta una relazione tra il modulo di Young, una proprietà meccanica nel caso dei vetri difficilmente misurabile sperimentalmente, e la temperatura di transizione vetrosa, una proprietà termodinamica caratteristica dello stato vetroso, che viceversa può essere rilevata da una semplice misura calorimetrica.

TEORIA E RISULTATI

Un vetro a temperatura ordinaria si comporta come un solido isotropo perfettamente elastico.

Il comportamento elastico è definito da quattro parametri: K (modulo di compressibilità), E (modulo di Young), G (modulo di rigidità), ν (coefficiente di Poisson).

Due soli di questi parametri sono però indipendenti essendo valide le seguenti relazioni:

$$E = \frac{9\,K\,G}{3\,K + G} = 3\,K\,(1 - 2\,\nu) = 2\,G\,(1 + \nu) \qquad (IV)$$

Il coefficiente di Poisson ha per la maggior parte dei vetri il valore di 0,25 ma può essere calcolato con buona approssimazione dalla composizione chimica del vetro [6]. Pertanto la determinazione del modulo E permette di caratterizzare completamente il comportamento elastico di un vetro.

In accordo con SMITH [7] il modulo di Young in un vetro di silice è dato da:

$$E = \frac{1}{6}\,\alpha\,N \qquad (V)$$

in cui α è l'energia di deformazione del legame Si-O-Si ed N il numero di legami per unità di volume.

In un vetro generico, detto Z il numero di legami per mole di vetro, ρ la densità ed M il peso molecolare, ed indicando con $\beta = Z\,\alpha$ l'energia di deformazione media per mole e con c una costante, la (V) può essere riscritta:

$$E = c\,\frac{\rho}{M}\,\beta \qquad (VI)$$

Ritenendo che la deformazione elastica di un vetro debba essere messa in relazione, piuttosto che con l'energia di dissociazione o di fusione degli ossidi, con l'energia che deve possedere il reticolo perché in corrispondenza della transizione vetrosa acquisti la mobilità necessaria per passare da un comportamento rigido ad uno plastico, tenendo presente che entrambi i processi possono essere rappresentati come variazioni del secondo ordine di funzioni di stato, si è formulata la seguente equazione:

$$E = k\,V_t\,T_g \qquad (VII)$$

L'equazione (VII) lega il modulo di Young E (K *bar*) alla temperatura di transizione vetrosa T_g (°K) attraverso i due parametri k e V_f.

La funzione k tiene conto dell'eccesso o del difetto di atomi di ossigeno rispetto a quelli necessari per un reticolo tridimensionale formato da tetraedri e può essere calcolata mediante la seguente equazione:

$$k = a\, exp\left(\frac{n_o}{n_f} - 2\right) \qquad \text{(VIII)}$$

in cui a (K *bar*/°K) è una costante alla quale è stato attribuito valore unitario, n_o il numero di grammo-ioni di ossigeno ed n_f il numero di grammo-ioni di formatore di reticolo.

V_f rappresenta la densità di impacchettamento che, come messo in evidenza da RAY [5] ha una notevole influenza sul modulo di Young, e può essere calcolata, note che siano la densità ρ, il peso molecolare M e la composizione molare X_i del vetro, con la seguente relazione:

$$V_f = \frac{\rho}{M} \sum_i V_i X_i \qquad \text{(IX)}$$

essendo $V_i = \mathfrak{N} \frac{4}{3} \pi (x R_M^3 + y R_O^3)$ il volume effettivamente occupato dall'ossido $M_x O_y$, avendo indicato con $\mathfrak{N}$ il numero di Avogadro ed R i raggi ionici di Pauling.

TABELLA I

Vetri	k	V_f	T_g	E_c	E_s
SiO_2	1,00	0,514	1463	752	730
B_2O_3	0,61	0,541	553	181	173
P_2O_5	1,65	0,548	537	485	500
GeO_2	1,00	0,499	800	400	420
$PbO \cdot SiO_2$	1,00	0,607	695	422	435
$Na_2O \cdot 2\,SiO_2$	1,65	0,523	732	632	571
$0{,}14\,Na_2O \cdot 0{,}11\,CaO \cdot 0{,}75\,SiO_2$	1,39	0,541	828	623	690

Sono stati presi in esame alcuni vetri molto differenti tra loro di cui si riportano in tabella I i parametri necessari per il calcolo del modulo di Young mediante l'equazione (VII).

I valori di E così calcolati (E_c) sono raffrontati in Fig. 1 con quelli ricavati dalla letteratura (E_s); l'accordo è più che soddisfacente tenuto conto anche dell'errore sui dati sperimentali.

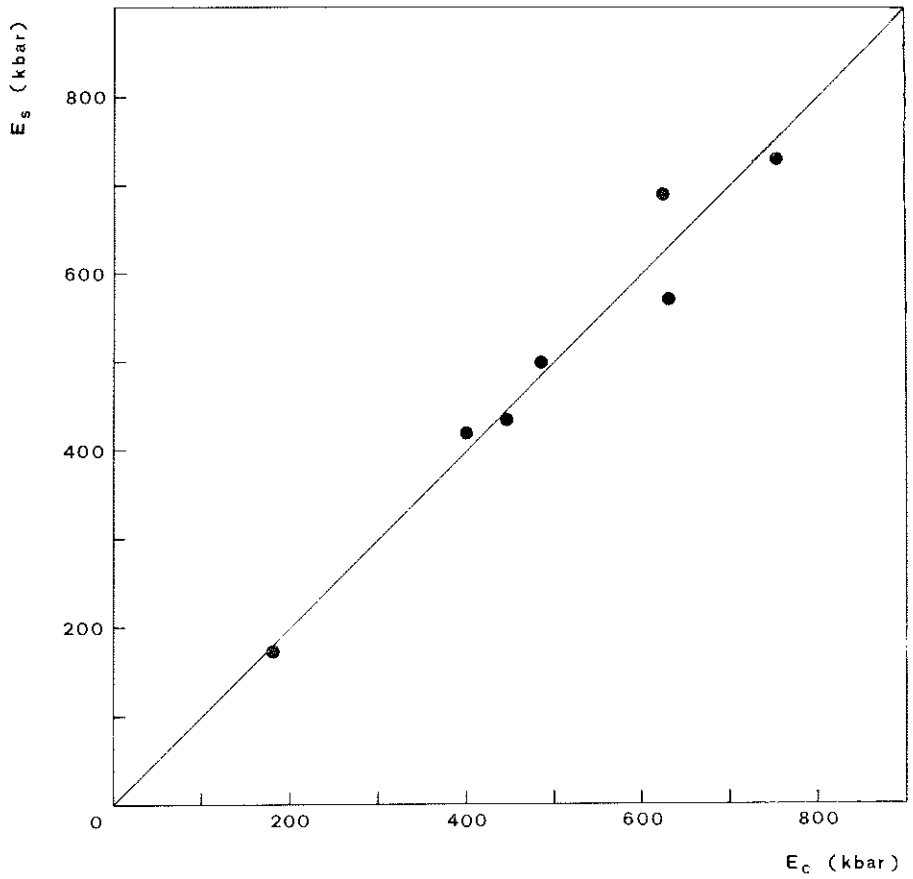


FIG. 1.

CONCLUSIONI

L'equazione proposta non pretende di dare risultati rigorosamente esatti, ma vuole essere un approccio preliminare per determinare una relazione tra modulo di Young e struttura del vetro. Essa comunque può fornire utili indicazioni sui parametri che influenzano il comportamento elastico, permettendo di prevedere quali composizioni chimiche diano origine a vetri con elevati valori del modulo elastico.

BIBLIOGRAFIA

[1] PHILLIPS C. J., *Calculation of Young's modulus of elasticity from composition of simple and complex silicate glasses.* Glass Tech. **5**, 216 (1964).

[2] WILLIAMS M. L., SCOTT G. E., *Young's modulus of alkali free glass.* Glass Tech. **11**, 76 (1970).

[3] MAKISHIMA A., MACKENZIE J. D., *Direct calculation of Young's modulus of glass.* J. Non-Cryst. Solids **12**, 35 (1973).

[4] YAMANE M., SAKAINO T., *Calculation of Young's modulus of glass from its chemical composition and density.* Glass Tech. **15**, 134 (1974).

[5] RAY N. H., *Composition property relationships in inorganic oxide glasses.* J. Non-Cryst. Solids **15**, 423 (1974).

[6] YAMANE M., MACKENZIE J. D., *Vicker's hardness of glass.* J. Non-Crist. Solids **15**, 153 (1974).

[7] SMITH H. T., *Elastic properties of glasses.* J. Am. Ceram. Soc. **42**, 276 (1959).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. Sersale, A. Scherillo e M. Covello.

Insetticidi cloroorganici: alcuni aspetti

Nota di Cosimo Pizza *
presentata dal socio ordinario Rodolfo A. Nicolaus

(Adunanza del 3 aprile 1976)

Riassunto. — In questa nota sono esaminati alcuni insetticidi cloroorganici, nei vari aspetti della chimica, del metabolismo, del loro effetto sull'ambiente, della tossicologia.

Alcuni insetticidi cloroorganici largamente usati in agricoltura, il DDT, l'Aldrin, il Dieldrin, l'Eptaclor, l'Eptacloroepossido, il Clordano, provocano il tumore nel fegato di alcune specie di animali.

Appare perciò urgente riconsiderare attentamente il pericolo per la salute umana e per l'ambiente che deriva dal largo uso degli insetticidi cloroorganici.

Summary. — In this paper some chlorinated insecticides are examined with respect to the different aspects of their chemistry, their metabolism, their toxicology and their effect on the environment.

Some chlorinated insecticides widely used in agriculture, e.g. DDT, Aldrin, Dieldrin, Heptachlor, Heptachlor epoxide, Chlordane, promote cancer in the liver of some animals.

It appears therefore urgent to consider with great attention the danger to the public healt and to the environment which result from an excessive use of these chlorinated insecticides.

Introduzione.

Secondo i dati forniti dal Chemical Abstracts, circa 2 milioni di differenti prodotti chimici sono stati sinora sintetizzati, mentre il loro numero aumenta di circa 250.000 ogni anno. Sempre ogni anno da 300 a 500 nuovi prodotti chimici entrano nell'uso commerciale, e ben 9.000 sono prodotti in quantità maggiori di ½ tonnellata ciascuno. Dal 1968 la produzione di composti organici sintetici è cresciuta di circa 55.000 tonnellate ogni anno, con un aumento di più del 160 % in un solo decennio [1].

* Contrattista quadriennale presso la Facoltà di Farmacia dell'Università di Napoli.

Tra gli ormai innumerevoli fattori responsabili del deterioramento ambientale (urbanizzazione, spopolamento delle campagne, distruzione indiscriminata della flora e della fauna) le sostanze chimiche immesse nell'ambiente rappresentano probabilmente l'aspetto più inquietante, poiché esse vanno ad interferire con i delicati equlibri chimici che si sono creati in natura assai lentamente. Nel corso della evoluzione, il mondo inorganico, fisico e biologico della superficie terrestre gradualmente hanno raggiunto uno stato di equilibrio in continua trasformazione, con processi che legano insieme in meravigliosa armonia i costituenti viventi e non viventi della terra.

L'industria chimica è un sistema di trasformazioni chimiche create dall'uomo che, come gli eventi della natura, hanno luogo sulla superficie terrestre. Quindi questo sistema deve essere perfettamente compatibile con ciò che accade in natura se si vuole che la tecnologia debba sopravvivere ed essere un fattore indispensabile per il miglioramento della qualità della vita degli uomini.

Purtroppo, la introduzione nell'ambiente di una nuova sostanza chimica non è stata mai fatta sinora in termini di una valutazione sia di costi e sia di benefici sociali. Piuttosto, sono state introdotte sempre nuove sostanze chimiche nell'uso comune, o nei luoghi di lavoro, o nella alimentazione, o nell'ambiente in genere in maniera indiscriminata e assai spesso irragionevole, semplicemente perché esse recavano più profitti di altre sostanze già usate o di altri sistemi di produzione [2]. Assieme agli aspetti estremamente inquietanti dell'inquinamento macroscopico dei prodotti chimici (basti pensare alle materie plastiche) e della loro tossicità semplice, quella cioè che si manifesta per esposizione breve o, relativamente, prolungata ad essi, è ora diventato evidente che gli effetti biologici a lungo diluiti nel tempo e tali da essere spesso difficilmente imputabili ad una sostanza specifica, sono ancora più dannosi. Le sostanze chimiche possono provocare negli organismi effetti estremamente gravi quali la cancerogenesi, la mutagenesi e la teratogenesi. In particolare, molti scienziati americani stimano che dei 650.000 casi di cancro che sono stati osservati nel 1973 negli U.S.A. il 60-90 % sono stati causati da fattori ambientali: in massima parte da prodotti chimici presenti sul posto di lavoro, nell'ambiente, nella alimentazione [3].

D'altra parte, mentre il numero di sostanze immesse nell'ambiente aumenta sempre più, a questo aumento non corrisponde una adeguata verifica della loro possibile attività cancerogena o teratogena o mutagena. Ad esempio, su 2.000.000 di composti noti solo 6.000 sono stati sperimentati per osservarne la cancerogenicità, e di questi 6.000 solo per una metà la sperimentazione è stata adeguata ed approfondita. Secondo Saffiotti, circa 1.000 dei 3.000 composti indicati prima

hanno mostrato un qualche segno di attività cancerogena, e di questi 1.000 alcune centinaia sono state dimostrate « chiaramente » cancerogene [1].

Il problema è ancor più complicato in quanto, quando anche si facessero degli esperimenti accurati prima di immettere i prodotti chimici sul mercato, di alcuni si evidenzierebbe relativamente presto la patogenicità, ma altri diventano tossici o, ancor più, concerogeni solo dopo che sono stati metabolizzati negli animali. A ciò devesi aggiungere che vi sono alcuni prodotti chimici che non sono cancerogeni da soli, ma che tuttavia possono aumentare l'azione di sostanze cancerogene [2, 4]. Dalle brevi osservazioni fatte, appare indispensabile una attenta riconsiderazione del ruolo che nella nostra civiltà hanno avuto ed hanno quei dott. Jekill dell'inerte che sono i prodotti chimici.

Il caso degli antiparassitari cloroorganici è senza dubbio significativo della dicotomia buono-cattivo che si presenta a chi volesse analizzare, senza facili catastrofismi, il problema dell'inquinamento chimico dell'ambiente, e trovare delle possibili soluzioni applicabili.

Esiste nella biosfera un delicato equilibrio tra le varie forme di vegetazione e gli insetti. Quando gli uomini, mettendo in atto le prime elementari pratiche agricole, determinarono la distruzione di piante spontanee (i boschi) e la creazione della uniformità vegetale (es. il grano), gli insetti non più in lotta equilibrata tra loro, poterono riprodursi con maggiore facilità. Dove non c'era più varietà di bosco e di prato, le specie di insetti nocivi adattate all'ambiente monocolturale potevano svilupparsi con un controllo naturale molto più attenuato di quello esistente precedentemente.

L'uomo ha tentato fin dai tempi più lontani di combattere i danni che gli insetti recavano alle colture: la soluzione più logica era quella di compensare equilibratamente l'uniformità colturale del campo con la presenza del prato e del bosco [5, 6]. La necessità di allargare la produzione e difendere i raccolti ha invece spinto i produttori a creare barriere artificiali allo sviluppo degli insetti.

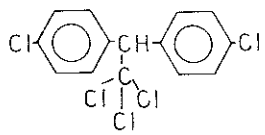
Già un certo numero di insetticidi organici, come ad esempio CH_3Br, CS_2, HCN, *p*-diclorobenzene, oltre ai prodotti naturali derivati dalle piante (elleboro, nicotina, piretro, derris, etc.) era noto nei primi decenni del nostro secolo. Ma è solo dalla scoperta del DDT come insetticida nel 1939 e del 2,4-D come erbicida che i prodotti organici sintetici sono venuti a dominare la scena. L'avvento di questi prodotti ha rivoluzionato i metodi di lotta antiparassitaria e ha dato un enorme impulso alla ricerca di nuove sostanze chimiche di più alta specificità d'azione. Al DDT hanno fatto seguito altri insetticidi clorurati, tra cui, importantissimi, l'esaclorocicloesano (1941-42) ed il clordano (1946). Dal fervore di ricerca suscitato dalle proprietà del DDT è scaturita la

scoperta di molti antiparassitari fungicidi organici, più efficaci e più specifici dei vecchi prodotti a base di rame e zolfo, rodenticidi più attivi e più sicuri da usare della stricnina. In più di trenta anni oltre duecentomila composti organici sono stati studiati per le loro possibili attività antiparassitarie. Attualmente sono più di 800 i composti chimici correntemente usati come pesticidi, comprendendo con questo termine prodotti utilizzati nella lotta contro gli animali dannosi, contro le malattie fungine degli animali e delle piante e contro le piante infestanti [7]. Solo alcuni di essi sono usati larghissimamente per la loro maggiore capacità d'azione e per il loro più basso costo. Le classi di composti più comunemente usati come insetticidi sono gli organofosforici, gli organoclorurati ed i carbammati; tra questi gli insetticidi organoclorurati rappresentano la classe usata per prima, usata ancora oggi larghissimamente e che ha posto il maggior numero di problemi.

I composti organoclorurati più importanti sono il DDT, aldrin, metossiclor, metilclor, dieldrin, endrin, eptaclor, clordano, esaclorocicloesano, toxafene. Di alcuni di essi considereremo le proprietà, il metabolismo, la tossicologia, il complesso problema della persistenza nell'ambiente.

1. CHIMICA (*e accenni sugli usi principali e sui principali nomi d'uso o di registrazione*) [8]. — Fra i composti clorurati di più frequente uso sono:

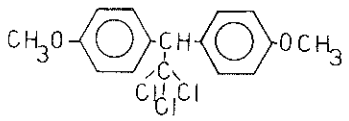
DDT 2,2-bis (*p*-clorofenil) 1,1,1-tricloroetano. — Agisce contro una grandissima quantità di insetti.



DDT

Metossiclor 2,2-bis (*p*-metossifenil) 1,1,1-tricloroetano. — Insetticida di contatto assai efficace contro mosche, coleotteri e parassiti di colture di frutta e legumi. Lo spettro di azione è paragonabile al DDT, col vantaggio di non dare accumulo nei lipidi (vedasi appresso) ma con lo svantaggio di costare troppo. Per questo motivo è usato solo limitatamente.

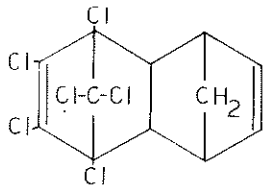
Altri nomi: metossi-DDT; DMDT; marlato; metossido.



METOSSICLOR

Aldrin (prod. comm. 95 %; HHDN puro) 1,2,3,4,10,10-esacloro-1,4, 4a,5,8,8a-esaidro-exo-1,4-endo-5,8-dimetanonaftalene. — Agisce contro una grandissima quantità di insetti; *nell'ambiente si trasforma in dieldrin.*

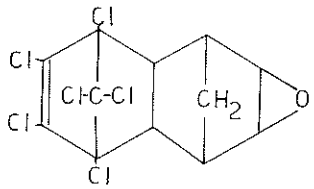
Altri nomi: octalene, composto 18.



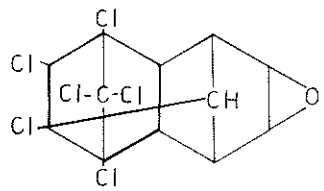
ALDRIN

Dieldrin (prod. comm. 85 %; HEOD puro) 1,2,3,4,10,10-esacloro--1,4,4a,5,8,8a-epossi-6,7-octaidro-exo-1,4-endo-5,8-dimetanonaftalene. — È stato usato assai largamente per sradicare il paludismo in America centrale e meridionale. Agisce contro una vastissima gamma di parassiti delle colture e delle foreste. È usato largamente nel controllo delle locuste. In questo caso non è il dieldrin ad agire come insetticida persistente ma il suo fotoisomero, il *fotodieldrin.* Quest'ultimo è molto più tossico sulle locuste del dieldrin e di ogni altro insetticida.

Altri nomi: composto 437.



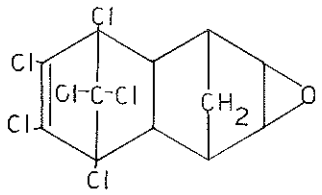
DIELDRIN



FOTODIELDRIN

Endrin 1,2,3,4,10,10-esacloro-1,4,4a,5,8,8a-epossi-6,7-octaidro-endo--1,4-endo-5,8-dimetanonaftalene. È uno stereoisomero del dieldrin. È

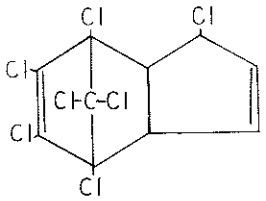
usato per proteggere le colture di tabacco e di cotone, per il trattamento delle sementi, per il trattamento insetticida del suolo e delle foglie.



ENDRIN

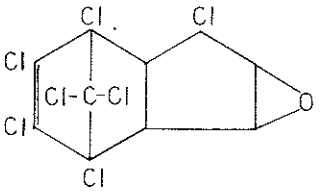
Eptacloro 1,4,5,6,7,8,8-eptacloro-3a,4,7,7a-tetraidro-4,7-endo-metanoindene. — È usato contro i parassiti del suolo, le mosche, i moscerini e i parassiti domestici. Nell'ambiente di trasforma in Eptacloroepossido.

Altri nomi: composto 106, E-3314.



EPTACLORO

Eptacloroepossido 1,4,5,6,7,8,8-eptacloro-2,3-epossido-3a,4,7,7a-tetraidro-4,7-endo-metanoindene.

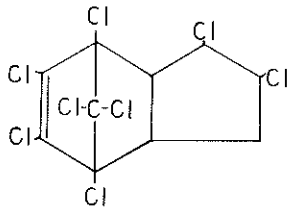


EPTACLOROEPOSSIDO

Clordano 1,2,4,5,6,7,8,8-octacloro-2,3,3a,4,7,7a-esaidro-4,7-metanoindene. — È usato largamente nella distruzione delle termiti e delle for-

miche. È stato molto usato nel Bacino Mediterraneo per lo sterminio delle mosche e dei moscerini, finché non è apparsa una qualche resistenza.

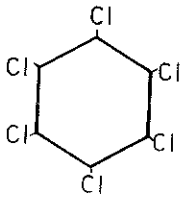
Altri nomi: Velsicol 1068, CD-68, Octa-Klor, Chlortox, orto-klor, Cloromulsion.



CLORDANO

Esaclorocicloesano HCH o BHC. Miscela degli stereisomeri dell'esacloro 1,2,3,4,5,6-cicloesano. — L'isomero attivo è l'isomero γ che, isolato, è noto come *Lindano* o *gammexano*. Si è rivelato efficace nello sterminio delle mosche e degli insetti resistenti al DDT. Ha trovato larga applicazione nella protezione delle piantagioni di cotone contro gli antonomi e gli insetti xilofagi.

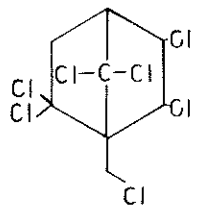
Altri nomi: Esano 666, Aphtizia, Benecida, Gambril, GBH, HCCH, HCH, Bentox, Gamtox, Luitox, Lexone.



ESACLORO-
CICLOESANO

Toxafene. — È una miscela complessa di ben 177 policloro derivati C_{10} con il cloro oscillante tra Cl_6-Cl_{10} e con composizione media $C_{10}H_{10}Cl_8$. Recentemente è stato isolato uno dei componenti più tossici della miscela il 2,2,5-endo-6-exo-8,9,10-eptaclorobornano, che è 6 volte più tossico del toxafene [9]. Gli altri non sono stati ideintificati. Uno dei composti non ancora identificati con formula minima $C_{10}H_{10}Cl_8$ è 14 volte più tossico del toxafene [10, 11, 12].

Altri nomi: Hercules 3956, Alltox, Toxamulsion.



2,2,5-endo-6-exo-8,9,10-eptaclorobornano

TABELLA 1

Proprietà fisiche

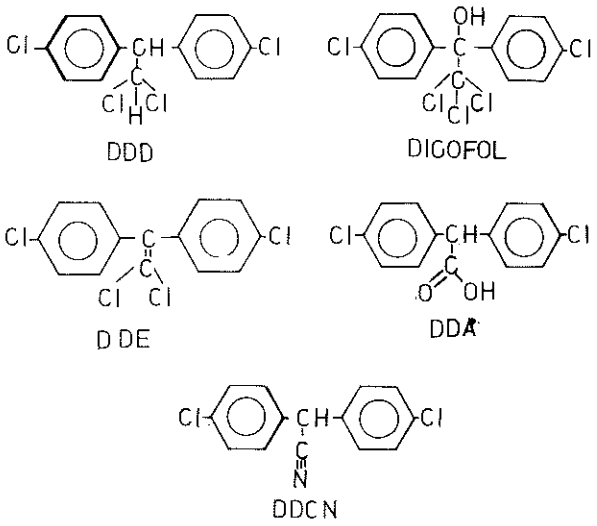
	sol. in H_2O in p.p.m.	Pressione di vap. mm. Hg
Aldrin	0,20	$2{,}3 \times 10^{-5}$
γ-clorocicloesano	7	$9{,}4 \times 10^{-6}$
DDT	0,0012	$1{,}9 \times 10^{-7}$
Dieldrin	0,25	$1{,}8 \times 10^{-7}$
Endrin	0,23	2×10^{-7}
Heptaclor	0,1	3×10^{-4}

2. METABOLISMO.

Il DDT negli animali a sangue caldo è metabolizzato ed escreto assai lentamente: il suo tempo di semivita nell'uomo [13] è di 115 giorni [14]. La serie di reazioni che portano alla degradazione del DDT nell'ambiente è stata ottenuta assai lentamente e non ancora completamente.

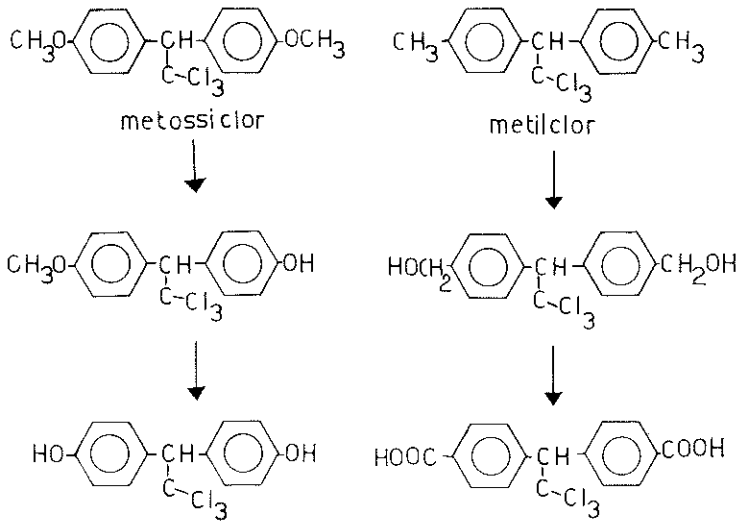
La ossidazione microsomale del DDT sul carbonio α a Dicofol (1,1-bis (*p*-clorofenil)-2,2,2-tricloroetanolo) è stata descritta per la prima volta nella drosofila melanogaster nel 1959. La via della declorurazione riduttiva per formare il DDD (2,2-bis (*p*-clorofenil)-1,1-dicloroetano) è stata osservata prima nel lievito e poi nel ratto. Un nuovo prodotto di degradazione DDCN (2,2-bis (*p*-clorofenil) 1,1-acetonitrile) è stato identificato solo negli ultimi anni [15].

Principali prodotti di degradazione del DDT nell'ambiente.



Uno studio sul metabolismo del DDT [14], usando DDT marcato con ^{14}C ha confermato quanto era stato stabilito in precedenza da altre ricerche.

Alcuni analoghi del DDT sono largamente usati per la loro maggiore degradabilità nell'ambiente. Essi possono essere trasformati ra-

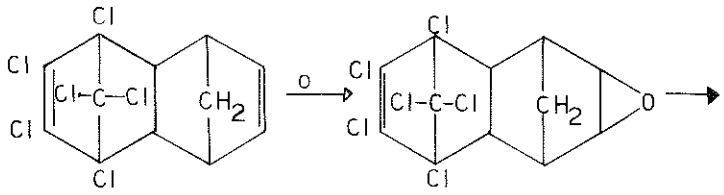


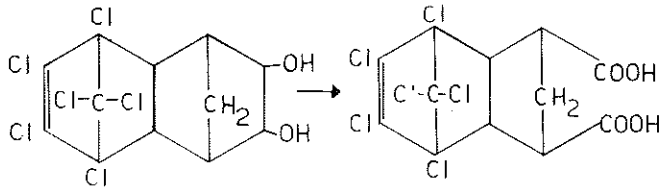
pidamente in prodotti polari, cioè più facilmente solubili in acqua, e quindi escreti più rapidamente di prodotti troppo solubili nei grassi,

grazie a gruppi chimici presenti sul nucleo benzenico. Questi gruppi agiscono come substrato per le ossidazioni multifunzionali e favoriscono il loro più rapido metabolismo [15].

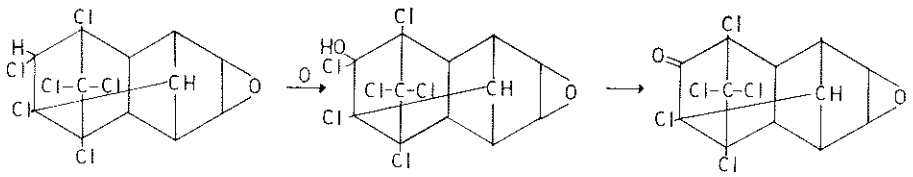
Il metossiclor infatti in un recente esperimento fatto su quattro generazioni successive di topi, non è stato trovato nei tessuti dei topi né del gruppo base né delle tre generazioni successive [16]. Nello stesso esperimento, durante il quale sono stati somministrati insieme numerosi insetticidi, tra i quali il DDT, è stato osservato invece un aumento di DDT, DDE e DDD nelle generazioni successive, anche se l'aumento è limitato e non continuo.

L'aldrin e il dieldrin sono metabolizzati ed escreti nel topo e nel ratto sotto forma di trans-4,5-diidrossi-4,5-diidroaldrin I [17] nelle feci e di 4,5-seco-aldrin-4,5-acido dicarbossilico II [18] nelle urine.





Un altro metabolita dell'aldrin, del dieldrin e del fotodieldrin, il 4-cheto-4-declorofotodieldrin III [19] è probabile che si formi per



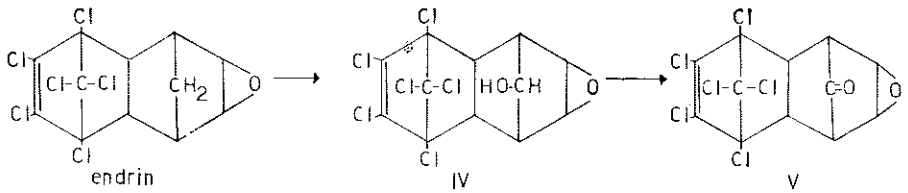
idrossilazione del gruppo $-C\begin{matrix}H\\Cl\end{matrix}$. Dal prodotto idrossilato instabile, si elimina HCl per formare il metabolita.

L'endrin è idrossilato nei mammiferi: si forma l'anti 12-idrossiendrin insieme a piccole quantità dell'isomero *sin* (IV).

Nei ratti l'isomero *anti* è escreto nelle feci, mentre nei conigli sia il *sin* che l'*anti* sono escreti come coniugati nelle urine [20].

Un terzo metabolita il 12-chetoendrin (V) è presente in piccole quantità nelle urine dei ratti ed è stato anche ritrovato nei loro tessuti [20]. Questi tre metaboliti sono stati sintetizzati da BEDFORD [21] e recentemente ne è stata studiata la tossicità anche sul ratto [22].

La osservazione che la tossicità acuta dei tre metaboliti dell'endrin è assai più grande dell'endrin stesso, fa pensare che la forte tossicità dell'endrin sia dovuta probabilmente alla sua trasformazione biologica in uno dei tre metaboliti. Quindi il metabolismo ossidativo dell'endrin, che è un sistema di eliminazione relativamente efficiente dal ratto di dosi subacute dell'endrin, può essere considerato il responsabile della sua tossicità acuta.

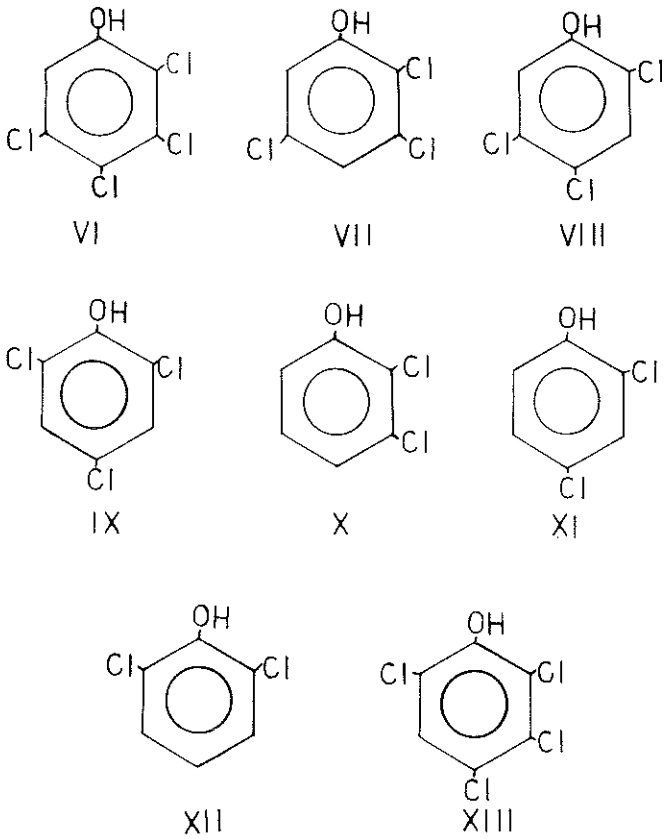


Dopo somministrazione nel coniglio di (U-^{14}C) lindano durante 26 settimane KARAPALLI e coll. hanno osservato la escrezione del lindano nelle urine (54 % della dose) e nelle feci (13 %) [23].

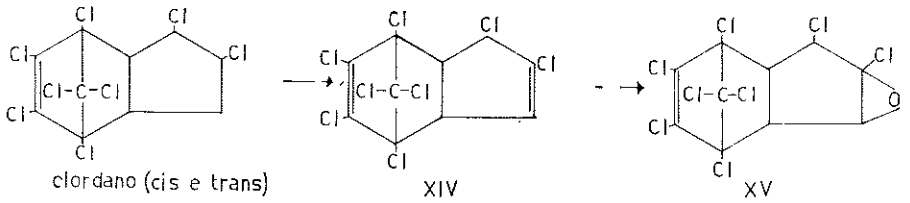
Nelle urine è stata trovata una miscela di 14 policloroderivati (19 % della dose) 3 policlorobenzene (2 %) e niente lindano. I maggiori metaboliti (> 1 % della dose) sono il 2,3,4,5-tetraclorofenolo (VI), il 2,3,5-, 2,4,5- e il 2,4,6-triclorofenolo (VII, VIII, IX rispettivamente), 2,3- e 2,4-diclorofenolo (rispettivamente X e XI) e l'o-diclorobenzene (XII). È stato anche identificato il 2,3,4,6-tetraclorofenolo in tracce (XIII).

Uno studio fatto sui ratti da FREAL e coll. [24] ha portato alla identificazione nelle urine di tracce di 3,4-diclorofenolo e quantità isolabili di 2,3,5-, 2,4,5- e 2,4,6-triclorofenolo; 2,3,4,5- e 2,3,4,6-tetraclorofenolo e 2,3,4,6-pentacloro-2-cicloesene-1-olo. Una parte dei meccanismi di degradazione del lindano è stato schematizzato da FREAL [24].

Uno dei metaboliti del *cis* e del *trans* clordano, l'ossiclordano (XV) si accumula nei tessuti adiposi di ratti sia maschi che femmine [25].



Questo metabolita si forma probabilmente attraverso il corrispondente 2,3-alchene (XIV), composto che è stato identificato [25].



La formazione di XIV dal *cis* e dal *trans* clordano si ha o per reazione di deidrogenazione o, più probabilmente, per disidratazione di prodotti di idrossilazione.

Nonostante siano state usate e si continuino ad usare quantità enormi di toxafene [26] erano abbastanza scarse le informazioni su alcuni aspetti della chimica, della persistenza, del metabolismo e della

tossicità di questo insetticida [12]. Alcune ricerche fatte recentemente hanno chiarito alcuni di quegli aspetti [9, 10, 11].

È stato studiato il metabolismo di questo insetticida somministrando a ratti il toxafene marcato con ^{36}Cl suddiviso in sette frazioni, ciascuna delle quali con contenuto uguale di cloro totale [11]. La escrezione del ^{36}Cl avviene per il 50-60 % nelle urine e per il 30-40 % nelle feci in 14 giorni. Nel complesso i costituenti della miscela sono metabolizzati abbastanza velocemente.

3. Effetti sull'ambiente.

Quando il DDT è stato introdotto durante la seconda guerra mondiale si è dimostrato uno strumento di eccezionale efficacia, superiore alle stesse attese, nella distruzione e nel controllo di un gran numero di parassiti e di vettori per malattie per l'uomo. È servito a scongiurare il tifo e a distruggere un gran numero di parassiti dell'uomo a Napoli nel 1943, a sradicare la malaria nella provincia di Latina, nella Piana del Sele e in Sardegna nel 1945. L'uso del DDT, fatto in maniera sistematica casa per casa, sulle persone, nei mezzi pubblici, nelle campagne, nelle paludi, nei boschi ebbe risultati eccezionali: per la prima volta nella storia si poté disporre di un mezzo sicuro, poco costoso e duraturo con cui poter non soltanto controllare, ma anche sradicare i vettori di malattie, alcune di esse endemiche.

L'Assemblea Mondiale della Salute del 1955 proposte l'uso degli insetticidi clorurati, aldrin, dieldrin, BHC, ma in particolar modo il DDT per la sua economicità, per sradicare la malaria nel mondo. Dal 1972 la malaria non è più praticamente presente in 37 nazioni che che nell'insieme hanno una popolazione totale di 728 milioni di abitanti ed è sotto controllo in altre 80 nazioni con 618 milioni di abitanti [27]. In India, per esempio, l'uso del DDT (e degli altri insetticidi organoclorurati) ha ridotto i casi di malaria da 100 milioni ogni anno nel 1933-35 a 150.000 nel 1966, ed ha diminuito la mortalità da 750.000 persone ogni anno a 1.500 nel 1968 [28]. Durante il programma anti-malaria, la vita media degli indiani è aumentata da 32 anni nel 1948 a 52 anni nel 1970 [29, 30]. In agricoltura l'uso del DDT ha procurato vantaggi di produzione eccezionali, stimolando, come si è già detto, un gran fervore nella ricerca di nuove sostanze chimiche da usare nella lotta contro gli insetti nocivi alle colture.

I vantaggi potenziali che derivano dalla difesa dei raccolti dagli insetti sono immensi, se la Food Agricultural Organization (F.A.O.) in una statistica indica nel 23 % la quantità dei raccolti perduti ogni anno. L'uso di prodotti chimici come insetticidi in agricoltura era sem-

brata perciò una manna dal cielo. In realtà l'insorgere di resistenze in alcune specie di insetti già negli anni immediatamente successivi alla loro prima utilizzazione (come nella provincia di Latina già nel 1946) ha posto una serie di problemi che si è creduto di risolvere puntando tutto sulla ricerca di sostanze chimiche insetticide più specifiche, meno tossiche e che non dessero resistenza. Si è trascurata così la ricerca e la utilizzazione di altri metodi di lotta contro gli insetti che solo oggi si sta tentando di introdurre. In effetti, seguendo la logica dei costi, il beneficio economico che deriva dal controllo degli insetti con mezzi chimici è tra le dieci e le venti volte il costo: basti confrontare tra loro le quantità di pesticidi (tutti insieme) adoperati per ettaro nei vari continenti e la resa in prodotti agricoli per rendersene conto.

	g pesticidi per ettaro	resa Kg [31, 32] raccolto
Giappone	10.790	5.480
Europa	1.870	3.420
USA	1.490	2.600
India	149	820
Africa	127	1.210

Se si tiene presente che la metà degli insetticidi usati nel mondo è costituita dal DDT e dagli altri composti organoclorurati che chiameremo tutti insieme POCI (Persistent Organochlorine Insecticides) si ha la misura della importanza che essi hanno. I POCI sono molto tossici per moltissimi insetti (resistenze a parte), hanno una tossicità *acuta* per l'uomo e i mammiferi abbastanza bassa, in più (e soprattutto) sono assai economici se si pensa che i più economici sostituti non POCI sono mediamente sei volte più costosi. Non dovrebbe sorprendere quindi se, solo di DDT, sono state usate sinora 2 milioni di tonnellate nel mondo, e attualmente, nonostante il suo declino, si continuano a produrre ancora 85.000 tonnellate ogni anno.

Il motivo per cui il DDT è un eccellente insetticida è dovuto alla sua bassa tensione di vapore ($1{,}9 \times 10^{-7}$ mm Hg. a 20 °C) alla stabilità alla fotoossidazione, all'alta solubilità nei grassi (ca. 10^5 ppm) e alla bassissima solubilità in acqua 0,0012 p.p.m. a 25 °C. Ma proprio a causa delle sue proprietà questo insetticida si è diffuso dappertutto nell'am-

biente, nel quale permane assai a lungo, tanto da essere ritrovato anche in regioni della terra nelle quali non è stato mai adoperato. Basti pensare che è stato ritrovato nelle acque degli oceani [33], nel grasso dei pesci, nei pinguini dell'Antartide, nel suolo, nell'aria, nella pioggia [34], nelle acque potabili addirittura [35], nelle foreste [34], negli uccelli, che hanno tra l'altro una particolare predisposizione all'accumulo del DDT nei loro grassi. Secondo alcuni studiosi i POCI sarebbero responsabili della diminuzione o della scomprasa delle popolazioni di molte specie di animali [34]. Essi provocherebbero infatti numerose morie di pesci, la drammatica diminuzione del pellicano bruno, del falcone e di altre specie di uccelli, attribuita quest'ultima alle alte concentrazioni di POCI nelle loro uova [34].

Esperimenti fatti su più generazioni di quaglia giapponese (*Coturnix Coturnix*) sembrano confermare questa possibilità [36]. A un gruppo di quaglie sono state somministrate con la dieta 15 ppm di DDT, quantità quindi relativamente basse, per osservarne gli effetti su più generazioni. Tra la prima e la terza generazione si è osservata una lenta diminuzione nella produzione di uova da parte di animali trattati con DDT. La percentuale di uova fertili è sostanzialmente diminuita, mentre è aumentata la produzione di uova anormali (con il guscio più piccolo o più sottile) e di uova contenenti DDT. Nella seconda generazione le uova anormali costituivano il 23,3 % della produzione totale di uova. Si è anche osservato un aumento di DDT e di DDD nelle generazioni successive di pulcini di quaglia: i livelli di DDT nelle uova della terza generazione sono significativamente più alti che nella prima generazione [37].

La maggiore fragilità delle uova potrebbe essere il fattore decisivo che in natura provoca una diminuzione tanto evidente di alcune specie di uccelli [38].

I POCI sono presenti nei grassi degli uomini di ogni parte del mondo. In media gli abitanti degli Stati Uniti hanno nei loro grassi 2,3-4 ppm di DDT e 4,3-8 ppm di DDE; mentre in India, dove come si è già detto, se ne è fatto un largo uso, si è a livelli di 16 ppm di DDT e 10 ppm di DDE [39]. Persino nei grassi degli esquimesi sono presenti 0,8 ppm di DDT e 2,2 ppm di DDE, pur non essendo stato usato il DDT nelle regioni da loro abitate.

È interessante notare come e quanto il DDT si vada accumulando nei grassi degli animali coinvolti nella catena alimentare. HARRISON e coll. [40] hanno osservato che, mentre nelle acque del lago Michigan il livello del DDT era di 0,000002 ppm, negli artropodi, crostacei di piccole dimensioni, era di 0,41 ppm, nei pesci come il salmone era già di 3-6 ppm, nel gabbiano di 99 ppm: la concentrazione del DDT dall'acqua al gabbiano era aumentata di 10^7!

Come si è già detto nell'uomo il tempo di semivita del DDT è di 115 giorni [14].

Pur essendo le concentrazioni di DDT nell'uomo e nell'ambiente molto al disotto dei livelli di tossicità acuta osservati per il DDT, la persistenza nell'ambiente e nei grassi umani e la tendenza a dare accumulo, già notati da alcuni anni, ha provocato in anni recenti un accesissimo dibattito sia a livello scientifico che di opinione pubblica mondiale quando si è accertato che il DDT provoca il tumore nel fegato di ratto.

Negli Stati Uniti e nella maggior parte dei paesi occidentali si è giunti così a vietare l'uso del DDT quasi completamente, tranne nei casi in cui il DDT è indispensabile nella salvaguardia della salute pubblica [41].

Poiché i prodotti usati in sostituzione del DDT, a loro volta, hanno mostrato un'alta residualità e la possibilità di provocare il cancro del fegato del topo (vedasi l'aldrin e il dieldrin) e poiché i prodotti che avrebbero dovuto essere usati in sostituzione di questi ultimi a loro volta sono potenti cancerogeni (vedasi l'eptaclor e il clordano) è diventato urgente riconsiderare tutto il problema. Non si può certo dimenticare d'un tratto la enorme dipendenza che ha avuto e che attualmente ha l'agricoltura dai prodotti chimici insetticidi, né dimenticare l'influenza che essi hanno avuto ed hanno sulla stessa salute umana. Occorre però che siano tenuti ben presenti gli effetti che tali sostanze hanno sull'ambiente.

4. Tossicologia.

La tossicità sia acuta che, relativamente, cronica dei POCI sui mammiferi è stata assai bene studiata, dato il loro larghissimo uso, sia sugli animali da esperimento che su lavoratori esposti sia durante il processo di fabbricazione sia durante il trattamento delle colture.

Esistono anche molti dati sulla tossicità dei POCI su volontari sottoposti ad alte dosi. Nelle varie nazioni sono stabilite per legge le concentrazioni di POCI che sono ammesse nell'aria del luogo di lavoro, la quantità massima di POCI che è consentito aspirare ogni giorno e la tolleranza, che è la massima quantità di insetticidi ammessa negli alimenti.

Noi ci soffermeremo su alcuni aspetti delle più recenti ricerche tossicologiche sui POCI e sulle ampie polemiche che alcune di queste ricerche hanno provocato, fino a determinare la drastica limitazione dell'uso o addirittura la totale eliminazione di alcuni di essi dal mercato.

SCHEMA

Valori di DL_{50}* *in mg/Kg di peso corporeo nei ratti*

DDT	≅ 115
Aldrin	40-60
Dieldrin	45-100
Endrin	10-40
γ-BHC	90-125
Clordano	280-430
Eptaclor	100-160
Metossiclor	5000

* Con DL_{50} (dose letale 50) si indica la dose somministrata che determina la morte del 50 % degli animali trattati.

Il DDT ed i suoi metaboliti passano, attraverso la barriera placentare, nel feto [42]: essi sono stati ritrovati in concentrazioni significative nei reni, nel muscolo cardiaco e nei tessuti adiposi di neonati umani.

HART e coll. [43] hanno analizzato la distribuzione del DDT e dei suoi metaboliti nei feti di coniglio e negli organi materni che regolano l'ambiente fetale, dopo aver somministrato a femmine di coniglio gravide DDT fino a 50 mg/Kg al 7°, 8° e 9° giorno di gravidanza. Quegli Autori hanno trovato DDT, DDD e DDE accumulato in notevoli quantità nel fegato delle madri, nell'utero, nelle ovarie, nei grassi perirenali e nei feti, in quantità minori nella placenta.

È stata osservata anche una più alta concentrazione di DDT nei tessuti fetali che nel plasma materno, una più alta incidenza di nascite premature, un incremento nel numero di riassorbimenti fetali, e una diminuzione nel peso dei feti.

JOHNSONN e coll. [44] hanno osservato nei topi aberrazioni cellulari cromosomiche somministrando DDT fino a 400 mg/Kg [45]. Le dosi superiori a 150 mg/Kg hanno provocato nelle cellule del midollo osseo un numero di aberrazioni cromosomiche significativamente più alto rispetto agli animali di controllo. Poiché la induzione di un danno cromosomico è strettamente associato con un effetto mutageno nei mammiferi, si può considerare, quindi, il DDT un potenziale mutageno, almeno nel topo. La possibilità che il DDT agisca come un agente mutageno nel topo è rafforzata da un altro lavoro sperimentale [46]: con dosaggi di 150 mg/Kg si è osservato un notevole incremento nel numero delle aberrazioni cromosomiche.

Gli effetti teratogeni e mutageni dell'aldrin, del dieldrin e dell'endrin sono stati assai poco studiati fino ad ora. Recentemente OT-

TOLENGHI e coll. [47] hanno osservato quali effetti teratogeni producessero quegli antiparassitari nei topi e nei criceti.

Gli Autori hanno somministrato a femmine di criceto e di topo gravide dosi corrispondenti al 50 % della dose letale dell'aldrin, del dieldrin e dell'endrin.

Fra i tre pesticidi il dieldrin ha provocato il maggiore incremento nella mortalità dei feti. Il trattamento con i tre pesticidi ha causato anche una significativa riduzione nel peso dei feti confrontati con il gruppo di controllo. Le anormalità congenite più frequentemente osservate nei feti di criceto e di topo sono: il palato spaccato, gli occhi aperti e il piede palmato, assai spesso in combinazione tra loro.

L'endrin ha provocato da solo un'altra anormalità, le costole fuse, mentre il dieldrin alcuni casi di micrognatia, di cranio appiattito e di ectrodattilia, associati alle anormalità comuni ai tre pesticidi.

Un gruppo di ricercatori della Shell Company non ha osservato alcun effetto mutageno nel topo e nel criceto dopo somministrazione di dieldrin [48]. Quei ricercatori hanno somministrato a topi dosi di 12,5-25-50 mg/Kg di dieldrin ed ai criceti 30-60 mg/Kg distribuendo le somministrazioni o in dosi singole o in piccole dosi successive (5 o 10 mg/Kg) distanziate tra loro. Essi hanno poi analizzato dopo 8, 24 e 120 ore dai dosaggi le cellule del midollo osseo femorale senza osservare alcun danno cromosomico. Gli stessi ricercatori hanno fatto ulteriori studi sui cromosomi di colture di linfociti di lavoratori attualmente e precedentemente impiegati in un impianto di fabbricazione di dieldrin. I risultati degli studi non hanno messo in evidenza alcun danno cromosomico, per cui, secondo gli Autori il dieldrin non rappresenta un pericolo di mutagenicità nei mammiferi.

Il primo lavoro sperimentale nel quale era riportata la cancerogenicità del DDT sul fegato di topo è stato pubblicato sul Food Cosm. Tox. nel 1969 [49]. Negli esperimenti gli Autori adoperavano quantità abbastanza basse di DDT nella dieta (2,8-3 ppm), inferiori a quelle cui sono esposti i contadini che usano quell'insetticida [50]. I risultati mettevano in evidenza una incidenza maggiore di leucemia e di tumori maligni del fegato nel gruppo di topi trattato con DDT che nel gruppo di controllo e gli effetti aumentavano nelle generazioni successive. Questa ultima conclusione fu criticata da TERRACINI [51] e lo stesso TARJÀN, coautore del lavoro, la ritrattò successivamente [52]. Ma la prima conclusione era così importante che il W.H.O. (World Health Organization) che aveva fatto e suggerito un larghissimo uso di DDT, fece ripetere gli esperimenti in alcuni Centri. Dai risultati di alcuni di quegli esperimenti non risulta che il DDT abbia effetti tumorigeni fino a dosaggi di 250 ppm. Altri esperimenti, che hanno riprodotto le più alte concentrazioni alle quali è esposto l'uomo, hanno dimostrato un signifi-

cativo aumento di tumori nei maschi e non nelle femmine. In nessun caso sono stati osservati negli esperimenti commissionati dal W.H.O. effetti cancerogeni significativi sulle successive generazioni [53].

Sulla scia delle preoccupazioni e delle indicazioni del W.H.O. si collocano gli studi di TERRACINI [54, 55], TURUSOV [56].

TERRACINI et coll. hanno somministrato a più gruppi di topi DDT tra 2-20 e 250 ppm nella dieta limitando le osservazioni a due generazioni successive. Dai risultati dello studio risulta che nel topo il fegato è l'unico organo « mirato » dal DDT per la cancerogenicità. Il cancro si manifesta solo per i dosaggi tra 20 e 250 ppm di DDT [57].

La più frequente presenza del tumore nel fegato dei topi della prima generazione (74 % per dosi di 250 ppm) rispetto alla generazione base (44 %) è dovuta probabilmente alla esposizione fetale e neonatale al DDT, ma questo fatto non è stato stabilito con esattezza.

Turusov ha studiato gli effetti del DDT su più generazioni, alimentando topi con livelli di DDT nella dieta di 2, 10, 50, 250 ppm per sei generazioni successive. La incidenza di tumori del fegato, che è di circa il 30 % nei gruppi di controllo, è del 50-56 % nei tre gruppi a più basso dosaggio e dell'86 % nel gruppo al quale sono state somministrate 250 ppm di DDT. Il DDT non aumenta la incidenza del tumore nelle generazioni successive e non ha un effetto significativo sulla incidenza di tumori su organi diversi dal fegato, sebbene sia stato notato dagli Autori un leggero aumento nel tumore del polmone nei topi cui nella dieta erano state somministrate 2-10 ppm di DDT.

Pur essendo discordanti i dosaggi del DDT che secondo vari autori provocano il tumore, pare confermato il non incremento nella incidenza di tumori o di malformazioni nelle generazioni successive, salvo che per gli alti dosaggi di DDT.

Assai più inquietanti sono i risultati di alcuni studi condotti su topi dopo somministrazione di dieldrin [58, 59, 60]. Il dieldrin [61] provoca il tumore nel fegato di topo. La incidenza di tumori aumenta all'aumentare della dose, ma è già statisticamente significativa per dosaggi di 0,1 ppm [59, 60, 62]. Quantità così basse sono tanto più allarmanti se si pensa che tutti possono avere quantità anche assai superiori nei loro grassi.

Cancerogeni sul topo sono anche l'eptaclor, il suo maggior metabolita, l'eptacloroepossido, e il clordano, come ha dimostrato già nel 1965 il Food and Drug Administration (FDA). Il cancro si sviluppa in tre animali su quattro trattati con eptaclor e nel 90 % di quelli trattati con eptacloroepossido.

Un acceso dibattito si è sviluppato negli Stati Uniti e nei paesi occidentali sull'uso dei POCI. Dal dicembre 1970, immediatamente dopo la sua costituzione, la Agenzia Nordamericana per la protezione

dell'ambiente (EPA, Environmental Protection Agency's) [63] ha chie sto il divieto per l'uso del DDT, dell'aldrin e del dieldrin e solo più recentemente, nel novembre 1974, dell'eptaclor e del clordano. Questo Ente ha ottenuto che fosse vietato l'uso del DDT (salvo che in alcuni casi) nel dicembre 1972. Non è ancora conclusa invece una causa civile aperta nei tribunali degli Stati Uniti per ottenere la messa al bando dell'aldrin e del dieldrin e che ha coinvolto finora centinaia di testimonianze.

Durante il processo nell'agosto del 1974, l'EPA ha richiesto la sospensione immediata della produzione dell'aldrin e del dieldrin, in quanto questi insetticidi rappresentano secondo l'EPA, un « pericolo imminente » per la salute umana. In contrapposizione a questa tesi la Shell Chemical Company, che è l'unica industria nel mondo produttrice di aldrin e di dieldrin, ha sostenuto e sostiene che i dati sulla cancerogenicità di quegli insetticidi sul topo non possono essere usati per prevedere la cancerogenicità nell'uomo. Il fegato del topo, sostiene la Shell, è così labile che perfino una modificazione nel contenuto dell'ossigeno dell'aria respirata o un aumento di proteine nella dieta può causare una incidenza di tumori più alta del normale. Quindi non si possono considerare gli esperimenti sul fegato di topo decisivi anche per l'uomo. A sostegno di questa tesi la Shell indica i risultati ottenuti in diverse e alcune di esse assai recenti ricerche epidemiologiche e biochimiche condotte su persone che per più di 15 anni hanno lavorato e lavorano in impianti che producono l'aldrin e il dieldrin (vedasi anche prima). In nessuna di esse sono state accertate alterazioni enzimatiche o ingrossamento del fegato o risposte biochimiche alterate del fegato, anche per esposizione a concentrazioni 300 volte maggiori dei livelli di esposizione della popolazione non esposta.

Gli esperti dell'EPA sostengono invece che le tesi avanzate dalla Shell non sono significative. Saffiotti sostiene infatti che su 58 prodotti chimici di cui è stata dimostrata la cancerogenicità nel fegato di topo. solo uno non produce il tumore nei ratti e nei criceti [64], mentre Farber ritiene che il cancro al fegato può svilupparsi senza alcuna precedente modificazione nella funzione epatica. I periodi di esposizione indicati dalla Shell per i lavoratori degli impianti che producono aldrin e dieldrin sono al disotto dei due decenni, mentre il periodo di latenza per il cancro può essere di 30 anni o più.

Conclusioni.

Il problema è indubbiamente assai complesso. Si può considerare cancerogena per l'uomo una sostanza che lo è sugli animali da esperi-

mento? [65]. È ragionevole generalizzare e trasferire all'uomo risultati ottenuti su animali da esperimento con dosi di prodotti chimici assai elevate, spesso vicine o superiori alla $D.L._{50}$? Si è sicuri che un composto, del quale si è stabilita la non patogenicità sugli animali da esperimento sia non patogeno anche sull'uomo?

Intanto è ormai accertato che la esposizione cronica della popolazione umana ai numerosissimi prodotti chimici sintetici presenti nell'ambiente rappresenta un notevole rischio per la salute umana. È necessario perciò, a nostro avviso, intervenire tempestivamente con strumenti legislativi quando si accerti che prodotti chimici largamente diffusi e con alta residualità, come i POCI, sono sicuramente o *probabilmente* patogeni per gli organismi superiori [66].

Occorre, d'altro canto, favorire lo studio sistematico degli effetti sull'ambiente di *tutti* i pesticidi presenti nell'uso commerciale, non soltanto di quelli sospettati. Per i prodotti non ancora nell'uso è necessario valutare attentamente *a priori* i danni che la loro introduzione può provocare, vietandola o limitandola quando si accertino una tossicità acuta troppo alta o quando sia messa in evidenza una qualche attività cancerogena, teratogena o mutagena *sugli animali da esperimento.*

Assieme ad un rigido controllo sui composti chimici insetticidi occorre porre le premesse perché l'agricoltura diminuisca gradualmente la dipendenza che attualmente ha dagli insetticidi chimici, favorendo lo sviluppo nella ricerca di altri metodi di lotta agli insetti. Alcuni di questi metodi, sperimentati, hanno dato risultati eccezionali, trovando però, come al solito, l'ostacolo dei costi nella loro utilizzazione pratica.

Gli attrattivi sessuali degli insetti, sostanze emesse da individui di uno dei due sessi, in genere dalle femmine vergini sessualmente mature, sono altamente specifici e attivi da distanze incredibili (spesso superiori al Km). In questi ultimi anni sono stati studiati attrattivi sessuali sintetici, selezionando sistematicamente un gran numero di sostanze chimiche e operando modifiche strutturali su quelle attive, fino ad ottenere il massimo potere attrattivo e la massima specificità.

Gli attrattivi sessuali possono essere usati per fuorviare i maschi, diminuendo così la probabilità di accoppiamenti e quindi il potenziale riproduttivo di una specie, oppure per catturarli e sterilizzarli.

La sterilizzazione coi raggi γ o con sterilizzanti chimici dei maschi permette di combattere quelle specie (che sono la maggioranza) nelle quali le femmine si accoppiano una sola volta nel loro ciclo vitale. La immissione di un maschio sterilizzato, capace di accoppiamenti non fecondi, corrisponde alla eliminazione di tante femmine riproduttive quanti sono gli accoppiamento di cui il maschio è capace (5-20).

L'uso degli attrattivi, associato a quello della sterilizzazione, può essere una via per risolvere il problema dei residui tossici sugli alimenti, della resistenza e della persistenza dei prodotti chimici nell'ambiente. Gli attrattivi chimici sono attivi infatti in quantità incredibilmente piccole (nanogrammi) ed è facilmente possibile controllare il loro uso.

La introduzione, in zone infestate da insetti nocivi alle colture, di una o più specie antagoniste alle specie che si vuol combattere è un altro possibile metodo di lotta estremamente efficace. L'entomologia è attualmente estremamente sofisticata, e potrebbe quindi essere utilizzata per metodi di lotta del tutto « naturali ».

BIBLIOGRAFIA E NOTE

[1] GILLETTE R., Science, **186**, 242 (1974).
[2] COMMONER B., Sapere, marzo-aprile 1975.
[3] MAUGH T. H., Science, **183**, 940 (1974).
[4] Inoltre il metabolismo cambia molto, non solo dal topo all'uomo per esempio, ma anche tra i singoli individui.
[5] PACCINO D., *L'imbroglio ecologico - L'ideologia della natura*. Ed. EINAUDI - Nuovo Politecnico (1972).
[6] GUIDUCCI R., *Una urbanistica per tutti*. Ed. Rizzoli (1975).
[7] La produzione mondiale di tutti gli antiparassitari si avvicina al milione di tonnellate ogni anno.
[8] a) Encyclopedie d'igiène du travail B.I.T. Ginevra (1974).
b) STOLMAN A., Progress in chemical toxicology, vol. 4 (1969).
[9] CASIDA J. E., HOLMSTEAD R. L., KHALIFA S., KNOX J. R., PALMER K. J., WONG R. J., OHSAWA T., Science, **183**, 520, (1974).
[10] HOLMSTEAD R. L., KHALIFA S., CASIDA J. E., J. Agric. Food Chem. **22**, 939 (974).
[11] OHSAWA T., KNOX J. R., KHALIFA S., CASIDA E., ibidem, **23**, 98, (1975).
[12] AUTORI VARI, Toxafene status report, E.P.A. Washington D.C. (1971).
[13] Il tempo che cioè impiega l'organismo a metabolizzare la metà del DDT presente in esso.
[14] ZATZ J. L., J. Pharm. Sci., **61**, 948, (1972).
[15] METCALF R. L., J. Agric. Food Chem., **21**, 511 (1973).
[16] ADAMS M., COON F. B., POLING C. E., ibidem, **22**, 69 (1974).
[17] BEDFORD C. T., Pesticide Sci., **5**, 473 (1974).
[18] BALDWIN M. K., ROBINSON J., PARKE D. V., Food Cosmet. Toxicol. **10**, 333 (1972).
[19] AUTORI VARI « Pesticides and the Environment: a continuing controversy » ed Deichmann Int. Medic. Book Corp. N. Y. p. 103 (1973).
[20] BALDWIN M. K., J. Agric. Foods Chem. **18**, 1117 (1970).
[21] BEDFORD C. D., HARRAD R. K., Chemosphere **2**, 163 (1973).
[22] BEDFORD C. T., HUTSON D. H., NATOFF J. F., Toxicol. Appl. Pharmacol. **33**, 115 (1975).
[23] KARAPALLI J. C., SAHA J. G., LEE Y. W., J. Agric. Food Chem. **21**, 811 (1973).
[24] FREAL J. J., CHAWICH R. W., ibidem, **21**, 424 (1973).
[25] STREET J. C., BLAUSE S. E., ibidem, **20**, 395 (1972).
[26] Negli ultimi 25 anni sono state usate 450 mila tonnellate di toxafene e se ne continuano ad usare 18000 all'anno.

[27] WHO - Chronicle **26**, 485 (1972).
[28] WHO - World Healt, Aprile 1968.
[29] D'altra parte all'aumento della vita media delle popolazioni che si è verificato a causa dei diversi fattori, ma anche indirettamente con l'uso del DDT, ha fatto riscontro una vera e propria esplosione demografica che non è stata assistita e tutelata da adeguati sistemi sociali e con una maggiore distribuzione delle ricchezze e tecnologie dei paesi cosiddetti progrediti.
[30] India News, Dicembre 1970, citato in METCALF R. L., J. Agric. Food Chem. **21**, 511 (1973).
[31] FAO Production Yearbook 1963.
[32] Bisogna tener presente però i vari fattori concomitanti: fertilizzanti, densità di popolazione ecc.
[33] BIDELMAN T. F., OLNEY C. E., Science, **183**, 516 (1974).
[34] AUTORI VARI in Foreign compound metabolism in mammals vol. 3, The Chemical Society (1975).
[35] MARX J. L., Science **186**, 809 (1974).
[36] CARNIO J. S., MC QUEEN D. J., Can. J. Zool. **51**, 1307 (1973).
[37] L'aumento del DDT e dei suoi metaboliti nelle generazioni successive di alcune specie di uccelli non si ripete o perlomeno non è ancora stato confermato nelle altre specie animali.
[38] Ci pare opportuno ricordare però che i problemi della conservazione dell'ambiente vanno analizzati e approfonditi nella loro globalità evitando la tentazione di indicare singoli fattori inquinanti come unici responsabili dei danni all'ambiente biologico. Nel caso della diminuzione di alcune specie di uccelli esistono certamente molti fattori concomitanti: alterate condizioni ambientali, bracconaggio eccetera (vedi 34).
[39] Citiamo il DDT poiché è il più frequentemente studiato, ma naturalmente le stesse considerazioni valgono anche per gli altri POCI.
[40] HARRISON H. L., LOUCKS O. L., Science, **170**, 503 (1970).
[41] In Italia ne è stato vietato l'uso nel 1972, in America nel giugno 1972.
[42] Citazione in Food Cosmet. Toxicol. **12**, 272 (1974).
[43] HART M. M., WANG PENG J., SIEBER S. M., FABRO S., ADAMSON R. H., Xenobiotica, **2**, 567 (1972).
[44] JHONSON G. A., JALAL S. M., J. Ered. **64**, 7 (1973).
[45] Dosaggi così alti, spesso superiori alla DL_{50} vanno naturalmente considerati con una certa prudenza. Le osservazioni riportate si riferiscono, nei casi di dosaggi superiori alla DL_{50}, agli animali sopravvissuti.
[46] CLARK J. M., AUSTR. J. Biol. Sci., **27**, 427 (1974).
[47] OTTOLENGHI A. D., HASEMAN J. K., SUGOS F., Teratology **9**, 11 (1974).
[48] DEAN B. J., DOAK S. M. A., SOMERVILLE H., Food Cosmet. Toxicol. **13**, 317 (1975).
[49] TARJÁN R., KEMÉNY T., Food Cosmet. Toxicol., **7**, 215 (1969).
[50] P.P.M. - Parti per Milione. L'introduzione colla dieta di 6,66 p.p.m. corrisponde all'introduzione nell'animale di 1 mg/Kg di peso corporeo.
[51] TERRACINI B., Food Cosmet. Toxicol., **8**, 479 (1970).
[52] TARIÁN R., ibidem, **8**, 478 (1970).
[53] « Safe use of Pesticides », WHO Technical Report Series n. 513 Ginevra 1973.
[54] COOPER P., Food Cosmetic. Toxicol., **12**, 764 (1974).
[55] TERRACINI B. e altri, Int. J. Cancer, **11**, 747 (1973).
[56] TURUSOV V. S., J. Natu. Cancer Institut., **51**, 983 (1973).
[57] Livelli che corrispondono ad un'introduzione giornaliera di 3 e 37,5 mg/Kg rispettivamente.

[58] WALKER A. I. T., THORPE E., STEVENSON D. E., Food Cosmet. Tox., **11**, 415 (1972).
[59] THORPE E., WALKER A. I. T., ibidem, **11**, 433 (1973).
[60] HUNT P. F., WALKER A. I. T., STEVENSON D. E., ibidem, **13**, 597 (1975).
[61] E quindi anche l'aldrin, che rapidamente si trasforma in dieldrin.
[62] Tra l'altro è il più basso dosaggio che provoca il cancro in una specie animale.
[63] L'E.P.A. è un organismo con la funzione di studiare analiticamente i danni arrecati all'ambiente, indicarne le cause, discuterne i rimedi e segnalarli agli Organi Pubblici.
[64] Tra l'altro questo prodotto non è stato adeguatamente sperimentato.
[65] Il loro metabolismo infatti è spesso molto diverso da quello dell'uomo.
[66] Basti pensare che negli ultimi 20 anni in Italia è raddoppiato il numero dei casi di tumore; si è passati infatti da 45000 a più di 92000 casi nel solo 1974 (Maltoni - Corriere della sera, Nov. 1975).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, L. Mangoni e R. Sersale.

Pseudoconnessioni affini

Nota di CLAUDIO DI COMITE *
presentata dal socio corrispondente VITTORIO DALLA VOLTA

(Adunanza del 15 maggio 1976)

RIASSUNTO. — Una pseudoconnessione affine generalizzata su una varietà differenziabile M è una pseudoconnessione nel fibrato dei riferimenti affini su M. Si studia in questo lavoro la relazione fra pseudoconnessioni affini generalizzate e pseudoconnessioni lineari; come per le connessioni affini, si definiscono le pseudoconnessioni affini e si studia lo spostamento parallelo che si deduce da una pseudoconnessione affine.

SUMMARY. — A generalized affine pseudoconnection of a differentiable manifold M is a pseudoconnection [2] in the bundle of affine frames over M. We study the relationship between generalized affine pseudoconnections and linear pseudoconnections; analogously to affine connections [6], we define affine pseudoconnections and we study the parallel displacement arising from an affine pseudoconnection.

INTRODUZIONE

Sia M una varietà reale differenziabile di classe C^∞. Tradizionalmente le parole « connessione lineare » e « connessione affine » su M esprimevano la stessa nozione. In [6] si fa una distinzione tra connessione affine e connessione lineare; precisamente, si chiama connessione lineare su M ogni connessione sullo spazio fibrato $L(M)$ dei riferimenti lineari su M, si chiama connessione affine generalizzata su M ogni connessione sullo spazio fibrato $A(M)$ dei riferimenti affini su M; ad ogni connessione affine generalizzata Γ su M sono associati canonicamente una connessione lineare Γ' su M ed un campo tensoriale T differenziabile di specie (1, 1) su M, quando T è il campo tensoriale di Kronecker Γ si dice una connessione affine su M.

In questo lavoro si sviluppano considerazioni analoghe relativamente alle pseudoconnessioni.

Nel n. 1, considerati due spazi fibrati principali differenziabili $P(M, G)$, $P'(M', G')$ ed un omomorfismo f di $P(M, G)$ in $P'(M', G')$

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni.

tale che l'applicazione indotta $M \to M'$ sia un diffeomorfismo, si dimostra che f determina un omomorfismo dello spazio vettoriale reale $\mathfrak{L}(P)$ delle pseudoconnessioni su P nello spazio vettoriale $\mathfrak{L}(P')$ delle pseudoconnessioni su P'.

Nel n. 2, indicati con $\mathfrak{F}(M)$ l'anello delle funzioni reali differenziabili su M, con $\mathfrak{Z}_1^1(M)$ l'$\mathfrak{F}(M)$ — modulo dei campi tensoriali differenziabili su M di specie (1, 1), con $\mathfrak{L}(L(M))$ l'$\mathfrak{F}(M)$ — modulo delle pseudoconnessioni su L(M) (pseudoconnessioni lineari su M) e con $\mathfrak{L}(A(M))$ l'$\mathfrak{F}(M)$ — modulo delle pseudoconnessioni su A(M) (pseudoconnessioni affini generalizzate su M), si definisce un $\mathfrak{F}(M)$ — isomorfismo di $\mathfrak{L}(A(M))$ sul modulo $\mathfrak{L}(L(M)) \oplus \mathfrak{Z}_1^1(M)$.

Nel n. 3, in modo analogo alle connessioni affini, si definiscono le pseudoconnessioni affini su M e si dimostra che l'insieme delle pseudoconnessioni affini su M è un sottomodulo di $\mathfrak{L}(A(M))$ isomorfo al modulo $\mathfrak{L}(L(M))$ delle pseudoconnessioni lineari su M.

Nel n. 4, infine, si studia come sono collegati il trasporto parallelo affine ed il trasporto parallelo lineare relativi ad una stessa curva su M e, rispettivamente, ad una pseudoconnessione affine ed alla pseudoconnessione lineare ad essa associata.

1. - Immagine di una pseudoconnessione per un omomorfismo

Sia $P(M, G, \pi)$ uno spazio fibrato principale differenziabile di base M, gruppo strutturale G e proiezione canonica $\pi : P \to M$.

Si indichino con $\mathfrak{F}(M)$ l'anello delle funzioni reali differenziabili su M, con $\mathfrak{X}(M)$ l'$\mathfrak{F}(M)$ — modulo (algebra di Lie sul campo dei reali R) dei campi vettoriali differenziabili su M, con $\mathfrak{Z}_1^1(M)$ l'$\mathfrak{F}(M)$ — modulo dei campi tensoriali differenziabili su M di specie (1, 1), con $T_p(M)$, per ogni $p \in M$, lo spazio vettoriale tangente in p ad M. Analogo significato, relativamente alla varietà differenziabile P, si attribuisca ai simboli $\mathfrak{F}(P)$, $\mathfrak{X}(P)$, $\mathfrak{Z}_1^1(P)$, $T_u(P)$, con $u \in P$. Inoltre si indichino con $\mathfrak{D}(P)$il sottomodulo di $\mathfrak{X}(P)$ dei campi vettoriali verticali, con R_a, per ogni $a \in G$, la trasformazione differenziabile di P definita, per ogni $u \in P$, da $R_a(u) = u\,a$, con $(R_a)_*$ l'automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}(P)$ definito, per ogni $X \in \mathfrak{X}(P)$ e per ogni $u \in P$, da

$$((R_a)_*(X))_u = ((R_a)_*)_{u'}(X_{u'}),$$

essendo $u' = u\,a^{-1}$ ed $((R_a)_*)_{u'}$ il differenziale di R_a in u'.

Si noti a tale proposito che, quando non vi sia possibilità di equivoco, il differenziale di R_a o di π in un punto u di P si indicherà semplicemente con $(R_a)_*$ o π_*

Si chiama pseudoconnessione su P (cfr. [2], n. 1, def. 1) ogni campo tensoriale $\Gamma \in \mathfrak{T}^1_1(P)$ tale che

(a) $$\Gamma(X) = 0\,, \qquad \forall X \in \mathfrak{D}(P)\,;$$

(b) $$\Gamma((R_a)_*(X)) = (R_a)_*(\Gamma(X))\,, \quad \forall a \in G\,, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(P)\,.$$

A Γ è associato un campo tensoriale $A \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ (cfr. [2], n. 1, prop. 1) tale che

$$\pi_*(\Gamma_u(X)) = A_{\pi(u)}(\pi_*(X))\,, \quad \forall u \in P\,, \quad \forall X \in T_u(P)\,.$$

Γ è una connessione su P (cfr. [2], n. 1, prop. 2) se e solo se A è il campo tensoriale di Kronecker.

Per ogni $u \in P$, $\Gamma_u(T_u(P)) = H_u(P)$ si chiama sottospazio orizzontale (cfr. [2], n. 5, def. 1).

Si chiama curvatura di Γ (cfr. [3], n. 2, def. 1) il campo tensoriale differenziabile Ω su P di specie (1, 2) definito, per ogni $(X, Y) \in \mathfrak{X}(P) \times \mathfrak{X}(P)$, da

$$\Omega(X, Y) = \frac{1}{2}\{\Gamma[\Gamma X, Y] + \Gamma[X, \Gamma Y] - [\Gamma X, \Gamma Y] - \Gamma^2[X, Y]\}\,.$$

Si consideri ora un altro spazio fibrato principale differenziabile $P'(M', G', \pi')$ relativamente al quale si useranno notazioni analoghe a quelle introdotte per $P(M, G, \pi)$. Si ha:

PROPOSIZIONE 1. *Siano* $f : P(M, G, \pi) \to P'(M', G', \pi')$ *un omomorfismo,* $h : G \to G'$ *l'omomorfismo di gruppi di Lie corrispondente ad* f *e* $g : M \to M'$ *l'applicazione indotta da* f.

Se g *è un diffeomorfismo, indicata con* Γ *una qualunque pseudoconnessione su* $P(M, G, \pi)$, *si ha:*

(a) *esiste un'unica pseudoconnessione* Γ' *su* $P'(M', G', \pi')$ *tale che*

$$f_*(\Gamma_u(X)) = \Gamma'_{f(u)}(f_*(X))\,^{1}\,, \quad \forall u \in P\,, \quad \forall X \in T_u(P)\,,$$

Γ' *dicesi l'immagine di* Γ *per* f;

[1] f_* è il differenziale di f in u; anche nel seguito, quando non vi sia possibilità di equivoco, il differenziale di una applicazione differenziabile in un punto si indicherà in modo analogo, senza menzionare il punto.

(b) *indicate con* Ω *e* Ω' *le curvature rispettivamente di* Γ *e* Γ', *risulta*

$$f_* (\Omega_u (X, Y)) = \Omega'_{f(u)} (f_* (X), f_* (Y)) , \quad \forall u \in P , \quad \forall (X, Y) \in (T_u (P))^2 ;$$

(c) *indicati con* A *ed* A' ($A \in \mathfrak{Z}^1_1 (M)$, $A' \in \mathfrak{Z}^1_1 (M')$) *i campi tensoriali associati rispettivamente a* Γ *e* Γ', *si ha*

$$g_* (A_p (X)) = A'_{g(p)} (g_* (X)) , \quad \forall p \in M , \quad \forall X \in T_p (M) ;$$

(d) *per ogni* $u \in P$, *detti* $H_u (P)$ *il sottospazio orizzontale di* $T_u (P)$ *rispetto a* Γ *ed* $H_{f(u)} (P')$ *il sottospazio orizzontale di* $T_{f(u)} (P')$ *rispetto a* Γ', *risulta*

$$f_* (H_u (P)) = H_{f(u)} (P') ;$$

(e) Γ' *è una connessione su* P' *se e solamente se* Γ *è una connessione su* P.

Si tralascia per brevità la dimostrazione, ci si limiterà soltanto ad osservare che per definire Γ' si procede al modo seguente:

siano $u' \in P'$, $X' \in T_{u'} (P')$, si indichino con u un punto di P tale che

$$g (\pi (u)) = \pi' (u')$$

e con X un vettore tangente in u a P tale che

$$g_* (\pi_* (X)) = \pi'_* (X')$$

e sia a' l'elemento di G' tale che

$$u' = f (u) a' ;$$

si definisce un campo tensoriale Γ' di specie (1, 1) su P', ponendo

$$\Gamma'_{u'} (X') = (R_{a'})_* (f_* (\Gamma_u (X))) .$$

Si verifica che Γ' è una pseudoconnessione su P' e che sono soddisfatte le (a), . . . , (e).

OSSERVAZIONE 1. Dalla proposizione precedente si ottiene in particolare la proposizione 6.1, pag. 79 [6] relativa alle connessioni.

Si indichi con $\mathfrak{F}^*(P)$ ($\mathfrak{F}^*(P')$) il sottoanello di $\mathfrak{F}(P)$ ($\mathfrak{F}(P')$) costituito dalle funzioni costanti su ogni fibra [2] e siano $\mathfrak{L}(P)$ l'$\mathfrak{F}^*(P)$ — — modulo delle pseudoconnessioni su P (cfr. [2], n. 1, prop. 3) ed $\mathfrak{L}(P')$ l'$\mathfrak{F}^*(P')$ — modulo delle pseudoconnessioni su P', si prova facilmente che:

PROPOSIZIONE 2. *Con le notazioni della proposizione 1, l'applicazione di* $\mathfrak{L}(P)$ *in* $\mathfrak{L}(P')$ *che ad ogni* $\Gamma \in \mathfrak{L}(P)$ *associa l'immagine di* Γ *per* f *è* R—*lineare.*

In particolare, se $M = M'$ *e* g *è la trasformazione identica di* M, *allora l'applicazione* $\mathfrak{L}(P) \to \mathfrak{L}(P')$ *che ad ogni* $\Gamma \in \mathfrak{L}(P)$ *associa l'immagine di* Γ *per* f *è* $\mathfrak{F}(M)$—*lineare* [3].

DEFINIZIONE 1. Con le notazioni della proposizione 1, se $P(M, G, \pi)$ è un sottofibrato ridotto di $P'(M', G', \pi')$, con riduzione f, si dice che la pseudoconnessione Γ' (immagine di Γ per f) su P' è *riducibile* alla pseudoconnessione Γ su P.

OSSERVAZIONE 2. La suddetta definizione è una generalizzazione di una ben nota definizione (cfr. [6], pag. 81) relativa alle connessioni.

2. - PSEUDOCONNESSIONI AFFINI GENERALIZZATE.

Siano M una varietà reale differenziabile di Classe C^∞ ad n dimensioni, $GL(n; R)$ il gruppo di Lie delle matrici reali quadrate non singolari di ordine n, $A(n; R)$ il gruppo di Lie delle matrici quadrate di ordine $n + 1$ della forma

$$\begin{pmatrix} a & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove $a = (a^i_j) \in GL(n; R)$ e $\xi = (\xi^i) \in R^n$,
$L(M)$ lo spazio fibrato principale dei riferimenti lineari su M, $A(M)$ lo spazio fibrato principale dei riferimenti affini su M, $\pi' : L(M) \to M$ e $\pi : A(M) \to M$ le proiezioni canoniche, $\mathfrak{L}(L(M))$ ed $\mathfrak{L}(A(M)$ gli $\mathfrak{F}(M)$ — moduli delle pseudoconnessioni rispettivamente su $L(M)$ ed $A(M)$.

Le pseudoconnessioni su $L(M)$ sono (cfr. [2], n. 12, def. 1) le pseudoconnessioni lineari su M; in accordo con [6], pag. 127, ove

[2] f appartiene ad $\mathfrak{F}^*(P)$ se e solamente se $f \in \mathfrak{F}(P)$ ed inoltre $f(u) = f(u\,a)$, per ogni $u \in P$ e per ogni $a \in G$.

[3] Si è identificato $\mathfrak{F}(M)$ con $\mathfrak{F}^*(P)$ mediante l'isomorfismo $f \to f \circ \pi$ e analogamente si è identificato $\mathfrak{F}(M)$ con $\mathfrak{F}^*(P')$.

vengono definite le connessioni affini generalizzate su M, si dà ora la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. Si chiama *pseudoconnessione affine generalizzata su* M ogni pseudoconnessione su A(M).

Sia $\alpha : A(M) \to L(M)$ l'omomorfismo che ad ogni riferimento affine $(X_0; X_1, \ldots, X_n)$ in un punto p di M associa il riferimento lineare $(X_1, \ldots, X_n)$ in p.

A norma della prop. 2, n. 1, l'applicazione di $\mathfrak{L}(A(M))$ in $\mathfrak{L}(L(M))$ che ad ogni pseudoconnessione Γ su A(M) associa l'immagine di Γ per α è $\mathfrak{F}(M)$ — lineare. Detta applicazione si indicherà con $\tilde{\alpha}$.

Dalla (e) della prop. 1 del n. 1 consegue che, per ogni $\Gamma \in \mathfrak{L}(A(M))$, $\tilde{\alpha}(\Gamma)$ è una connessione lineare su M se e solamente se Γ è una connessione affine generalizzata su M.

Si indichino con $\tilde{\mathfrak{Z}}_1^1(M)$ l'$\mathfrak{F}(M)$ — modulo delle 1 — forme tensoriali su L(M) di tipo $(GL(n; R), R^n)$ (cfr. [6], pag. 75) e con $\beta : A(M) \to R^n$ l'applicazione che ad ogni riferimento affine $(X_0; X_1, \ldots, X_n)$ in un punto p di M associa la n — pla delle componenti di X_0 rispetto al riferimento lineare $(X_1, \ldots, X_n) \cdot \beta$ è differenziabile e si ha:

PROPOSIZIONE 1. *Per ogni pseudoconnessione affine generalizzata* Γ *su* M, *esiste un'unica* 1*-forma tensoriale* ν *su* L(M) *di tipo* $(GL(n; R), R^n)$ *tale che*

$$(2.1) \quad \nu_{\alpha(u)}(\alpha_*(X)) = \beta_*(\Gamma_u(X)) \ [4], \quad \forall u \in A(M), \quad \forall X \in T_u(A(M)).$$

L'applicazione $\Gamma \to \nu$ *di* $\mathfrak{L}(A(M))$ *in* $\tilde{\mathfrak{Z}}_1^1(M)$ *è un* $\mathfrak{F}(M)$ — *omomorfismo surgettivo. Detta applicazione si indicherà con* $\tilde{\beta}$.

La dimostrazione si tralascia per brevità.

Sussiste la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2. *L'applicazione* $\Phi : \Gamma \to (\tilde{\alpha}(\Gamma), \tilde{\beta}(\Gamma))$ *di* $\mathfrak{L}(A(M))$ *in* $\mathfrak{L}(L(M)) \oplus \tilde{\mathfrak{Z}}_1^1(M)$ *è un* $\mathfrak{F}(M)$ — *isomorfismo.*

Poiché le applicazioni $\tilde{\alpha} : \mathfrak{L}(A(M)) \to \mathfrak{L}(L(M))$ e $\tilde{\beta} : \mathfrak{L}(A(M)) \to \tilde{\mathfrak{Z}}_1^1(M)$ sono $\mathfrak{F}(M)$ — lineari, l'applicazione Φ è $\mathfrak{F}(M)$ — lineare. Per provare che Φ è una bigezione si consideri il diffeomorfismo $\gamma : A(M) \to L(M) \times R^n$ definito da $\gamma(u) = (\alpha(u)), \beta(u))$, per ogni $u \in A(M)$.

[4] Lo spazio vettoriale tangente in ogni punto di R^n si considera identificato in modo naturale con R^n.

Assegnata la coppia $(\Gamma', \nu) \in \mathfrak{L}(L(M)) \oplus \widetilde{\mathfrak{Z}}_1^1(M)$, si definisce una pseudoconnessione Γ su $A(M)$ ponendo

$$\Gamma_u(X) = \gamma_*^{-1} (\Gamma'_{\alpha(u)} (\alpha_* (X)) + \nu_{\alpha(u)}(\alpha_* (X))), \tag{2.2}$$

$$\forall u \in A(M), \quad \forall X \in T_u(A(M)).$$

Si verifica che $\Phi(\Gamma) = (\Gamma', \nu)$ e quindi Φ è surgettiva; si verifica anche facilmente che Φ è ingettiva.

OSSERVAZIONE. Poiché $\widetilde{\mathfrak{Z}}_1^1(M)$ è canonicamente isomorfo all'$\mathfrak{F}(M)$ — — modulo $\mathfrak{Z}_1^1(M)$ dei campi tensoriali differenziabili di specie (1, 1) su M, dall'isomorfismo Φ di $\mathfrak{L}(A(M))$ su $\mathfrak{L}(L(M)) \oplus \widetilde{\mathfrak{Z}}_1^1(M)$ si deduce in modo ovvio un isomorfismo di $\mathfrak{L}(A(M))$ su $\mathfrak{L}(L(M)) \oplus \mathfrak{Z}_1^1(M)$.

Dalla precedente proposizione segue subito la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 3. *Si indichi con* $\mathfrak{L}'(A(M))$ *il sottomodulo di* $\mathfrak{L}(A(M))$ *immagine reciproca per* Φ *di* $\mathfrak{L}(L(M)) \times \{0\}$.

La restrizione di $\tilde{\alpha}$ *ad* $\mathfrak{L}'(A(M))$ *è un* $\mathfrak{F}(M)$ — *isomorfismo di* $\mathfrak{L}'(A(M))$ *su* $\mathfrak{L}(L M))$.

Si consideri l'omomorfismo $\rho : L(M) \to A(M)$ il quale ad ogni riferimento lineare $(X_1, \ldots, X_n)$ in un punto p di M associa il riferimento affine $(O_p; X_1, \ldots, X_n)$, ove O_p è il vettore nullo tangente in p ad M. Com'è noto ρ è una riduzione.

Sussiste la seguente proposizione di cui si omette la dimostrazione:

PROPOSIZIONE 4. *Per ogni* $\Gamma' \in \mathfrak{L}(L(M))$, *l'immagine* Γ *di* Γ' *per* ρ *appartiene ad* $\mathfrak{L}'(A(M))$ *e l'applicazione* $\widetilde{\rho} : \Gamma' \to \Gamma$ *di* $\mathfrak{L}(L(M))$ *in* $\mathfrak{L}'(A(M))$ *è l'isomorfismo inverso della restrizione di* $\tilde{\alpha}$ *ad* $\mathfrak{L}'(A(M))$.

Dalla proposizione precedente segue subito che:

PROPOSIZIONE 5. $\mathfrak{L}'(A(M))$ *è l'*$\mathfrak{F}(M)$ — *modulo delle pseudoconnessioni affini generalizzate su* M *che sono riducibili a pseudoconnessioni lineari su* M (*cfr. def. 1, n. 1*).

3. - PSEUDOCONNESSIONI AFFINI.

Com'è noto (cfr. [6], pag. 127) si chiama connessione affine generalizzata su M ogni connessione su A(M).

Sia Γ una connessione affine generalizzata su M e sia ω la sua 1-forma (a valori nell'algebra di Lie $a(n; R)$ di $A(n; R)$), siano inoltre Γ' la connessione lineare su M immagine di Γ per α ed ω' la 1-forma di Γ' (a valori nell'algebra di Lie $gl(n; R)$ di $GL(n; R)$); in [6] pag. 127 è provato che esiste un'unica 1-forma tensoriale φ su $L(M)$ di tipo $(GL(n; R), R^n)$ tale che

$$\rho^* \omega = \omega' + \varphi \quad [5]. \tag{3.1}$$

Si indichi con ψ l'applicazione $\Gamma \to \varphi$ dell'insieme delle connessioni affini generalizzate su M in $\tilde{\mathfrak{Z}}^1_1(M)$.

Si proverà la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1. *Per ogni connessione affine generalizzata* Γ *su* M *risulta*:

$$\psi(\Gamma) = -\tilde{\beta}(\Gamma). \tag{3.2}$$

Per ogni $u \in A(M)$ si indichi con ν_u l'isomorfismo del sottospazio verticale di $T_u(A(M))$ in $a(n; R)$ il quale ad ogni vettore verticale X tangente in u ad $A(M)$ associa il campo vettoriale $A \in a(n; R)$ tale che $A^*_u = X$, essendo A^* il campo vettoriale fondamentale su $A(M)$ corrispondente ad A.

Si ha:

$$\omega_u = \nu_u(X - \Gamma_u(X)) \quad [6], \quad \forall\, u \in A(M), \quad \forall\, X \in T_u(A(M)).$$

Ne consegue che

$$(\rho^* \omega)_{u'}(X') = \nu_{\rho(u')}(\rho_*(X') - \Gamma_{\rho(u')}(\rho_*(X'))), \tag{3.3}$$
$$\forall\, u' \in L(M), \quad \forall\, X' \in T_{u'}(L(M)).$$

Per la (2.2), posto $\Phi(\Gamma) = (\Gamma', \nu)$, risulta

$$\Gamma_{\rho(u')}(\rho_*(X')) = \gamma_*^{-1}(\Gamma'_{u'}(X') + \nu_{u'}(X')).$$

Applicando la formula di Leibniz si ottiene

$$\Gamma_{\rho(u')}(\rho_*(X')) = \rho_*(\Gamma'_{u'}(X')) + (\sigma_{\rho(u')})_*(\nu_{u'}(X')), \tag{3.4}$$

[5] $\rho^* \omega$ è la 1-forma su $L(M)$ definita da $(\rho^* \omega)_{u'}(X') = \omega_{\rho(u')}(\rho_*(X'))$, per ogni $u' \in L(M)$ e per ogni $X' \in T_{u'}(L(M))$.

[6] Si noti che Γ è qui definita come campo tensoriale differenziabile di specie (1, 1) su $A(M)$ secondo le considerazioni del n. 1. Si veda anche [2], n. 1.

ove con $\sigma_{p(u')}$ si indica l'applicazione di $A(n; R)$ in $A(M)$ definita da $\sigma_{p(u')}(a) = p(u')\,a$, per ogni $a \in A(n; R)$.

Per la (3.4), la (3.3) si scrive secondo la

$$(p^* \omega)_{u'}(X') = \nu_{p(u')}(p_* (X') - p_* (\Gamma'_{u'}(X')) - (\sigma_{p(u')})_* (\nu_{u'}(X')))\,,$$

da cui si ottiene

$$(p^* \omega)_{u'}(X') = \omega'_{u'}(X') - \nu_{u'}(X')\,. \tag{3.5}$$

Confrontando la (3.1) con la (3.5) si ha la (3.2).

In [6], pag. 129, ogni connessione affine generalizzata Γ su M (cioè ogni connessione su $A(M)$) tale che ψ (Γ) (cioè $-\tilde{\beta}(\Gamma)$) sia la 1-forma canonica θ su $L(M)$ viene chiamata connessione affine su M.

Si noti che se Γ è una connessione su $A(M)$, il campo tensoriale $A \in \mathfrak{Z}^1_1(M)$ ad essa associato (secondo la prop. 1, n. 1 [2]) è il campo tensoriale di Kronecker ed anche il campo tensoriale corrispondente a θ è il campo tensoriale di Kronecker; si ha allora che una connessione Γ su $A(M)$ è una connessione affine su M se e solo se $-\tilde{\beta}(\Gamma)$ è la 1-forma tensoriale su $L(M)$ di tipo $(GL(n; R), R^n)$ corrispondente al campo tensoriale $A \in \mathfrak{Z}^1_1(M)$ associato a Γ.

In accordo con ciò, si dà la definizione seguente:

DEFINIZIONE 1. Si chiama *pseudoconnessione affine su* M ogni pseudoconnessione affine generalizzata Γ su M tale che $-\tilde{\beta}(\Gamma)$ sia la 1-forma tensoriale su $L(M)$ di tipo $(GL(n; R), R^n)$ corrispondente al campo tensoriale $A \in \mathfrak{Z}^1_1(M)$ associato a Γ (secondo la prop. 1, n. 1, [2]).

OSSERVAZIONE 1. Le connessioni affini su M sono le pseudoconnessioni affini associate al campo tensoriale di Kronecker.

PROPOSIZIONE 2. *Indicato con* $\mathfrak{A}(M)$ *il sottoinsieme di* $\mathfrak{L}(A(M))$ *costituito dalle pseudoconnessioni affini su* M, *si ha che* $\mathfrak{A}(M)$ *è un sottomodulo di* $\mathfrak{L}(A(M))$ *isomorfo al modulo delle pseudoconnessioni lineari su* M.

Infatti la ridotta della restrizione di Φ ad $\mathfrak{A}(M)$ è una bigezione di $\mathfrak{A}(M)$ nel sottomodulo $\mathfrak{A}'(M)$ di $\mathfrak{L}(L(M)) \oplus \tilde{\mathfrak{Z}}^1_1(M)$ costituito dalle coppie (Γ', ν) tali che $-\nu$ sia la 1-forma su $L(M)$ corrispondente al campo tensoriale A associato a Γ'. Quindi $\mathfrak{A}(M)$ è un sottomodulo di $\mathfrak{L}(A(M))$ isomorfo ad $\mathfrak{A}'(M)$, a sua volta $\mathfrak{A}'(M)$

è isomorfo ad $\mathfrak{L}(L(M))$, l'isomorfismo essendo dato da $(\Gamma', \nu) \to \Gamma'$. Quindi l'applicazione $\Gamma \to \tilde{\alpha}(\Gamma)$ di $\mathfrak{Al}(M)$ in $\mathfrak{L}(L(M))$ è un isomorfismo.

OSSERVAZIONE 2. $\mathfrak{L}'(A(M)) \cap \mathfrak{Al}(M)$ è il sottomodulo di $\mathfrak{L}(A(M))$ costituito dalle pseudoconnessioni affini banali (cfr. [2], n. 1, def. 2).

4. - SVILUPPI.

Siano Γ una pseudoconnessione affine su M e Γ' la pseudoconnessione lineare su M immagine di Γ per α (cfr. n. 3, prop. 2) e sia $A \in \mathfrak{T}^1_1(M)$ il campo tensoriale associato a Γ e Γ'.

Posto $I = [0, 1]$, si consideri una curva $\gamma : I \to M$ differenziabile di classe C^1 ammissibile per Γ e Γ' (cfr. [2], n. 6) e sia $X : t \to X(t)$, con $t \in I$, un campo di vettori continuo lungo γ tale che:

$$A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t), \qquad \forall\, t \in I, \tag{4.1}$$

ove $\dot{\gamma}(t)$ è il vettore tangente a γ in $\gamma(t)$.

Sia $T(M)$ lo spazio fibrato tangente su M, cioè il fibrato vettoriale con base M, fibra tipo R^n, gruppo strutturale $GL(n; R)$, associato ad $L(M)$.

Per ogni $u' = (X_1, \ldots, X_n) \in L(M)$ si indichi con $\tilde{u}'$ l'isomorfismo di R^n sulla fibra $T_{\pi'(u')}(M)$ definito da

$$\tilde{u}'(\xi) = \xi^i X_i, \qquad \forall\, \xi = (\xi^i) \in R^n.$$

Si indichi inoltre con τ'^t_s, con $(t, s) \in I^2$, il trasporto parallelo rispetto a Γ' (trasporto parallelo lineare) di $T_{\gamma(t)}(M)$ in $T_{\gamma(s)}(M)$ associato alla curva γ ed al campo di vettori X (cfr. [2], n. 8); τ'^t_s è un isomorfismo.

Sia E lo spazio fibrato tangente affine su M, cioè lo spazio fibrato con base M, fibro tipo R^n, gruppo strutturale $A(n; R)$, associato ad $A(M)$.

Per ogni $u \in A(M)$, con $u = (X_0; u')$ e $u' = (X_1, \ldots, X_n) \in L(M)$, si indichi con $\tilde{u}$ l'applicazione affine di R^n nella fibra $E_{\pi(u)}$ (spazio affine tangente in $\pi(u)$ ad M), definita da

$$\tilde{u}(\xi) = X_0 + \xi^i X_i, \qquad \forall\, \xi = (\xi^i) \in R^n.$$

Si noti che quanto detto in [2], per il trasporto parallelo nei fibrati vettoriali associati, vale anche per i fibrati associati in generale.

Si indichi con τ_s^t, con $(t, s) \in I^2$, il trasporto parallelo rispetto a Γ (trasporto parallelo affine) della fibra $E_{\gamma(t)}$ in $E_{\gamma(s)}$ associato alla curva γ ed al campo di vettori X. Si verifica subito che τ_s^t è una applicazione affine

Per analogia con [6], pag. 131, si dà la definizione seguente:

DEFINIZIONE 1. Si chiama X-*sviluppo di* γ (o sviluppo di γ rispetto ad X) in $E_{\gamma(o)}$ la curva $c : I \to E_{\gamma(o)}$ definita da

$$c(t) = \tau_o^t(\gamma(t)), \qquad \forall\, t \in I, \tag{4.2}$$

ove $\gamma(t)$ è identificato con il vettore nullo tangente a M in $\gamma(t)$.

Si proverà la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Con le notazioni precedenti, posto*

$$Y(t) = \tau_o^{\prime t}(\dot{\gamma}(t)), \qquad \forall\, t \in I, \tag{4.3}$$

risulta

$$\dot{c}(t) = Y(t)\ ^{7}, \qquad \forall\, t \in I. \tag{4.4}$$

Siano $u_o = (0; u_o')$, con $u_o' = (X_1, \ldots, X_n) \in L(M)$, un riferimento affine in $\gamma(0)$, γ^* il sollevamento orizzontale di γ in $A(M)$, relativo al campo di vettori X ed alla pseudoconnessione Γ, tale che $\gamma^*(0) = u_o$ (cfr. [2], n. 6).

Si ponga

$$\gamma'^* = \alpha \circ \gamma^*, \qquad a = \beta \circ \gamma^*. \tag{4.5}$$

Si verifica che γ'^* è il sollevamento orizzontale di γ in $L(M)$, relativo al campo di vettori di X ed alla pseudoconnessione Γ', tale che $\gamma'^*(0) = u_o'$.

[7] Come di consueto $\dot{\gamma}(t)$ e $\dot{c}(t)$ indicano i vettori tangenti rispettivamente a γ e c in $\gamma(t)$ e $c(t)$.

Si verifica inoltre che

$$\gamma^*(t) = \gamma'^*(t)\, a(t), \qquad \forall\, t \in I \text{ [8]}.$$

Per la prop. 2, n. 8 [2], e per le (4.1), (4.3), risulta

$$Y(t) = \tilde{u}'_0 \circ \widetilde{\gamma'^*(t)}^{-1}(A_{\gamma(t)}(X(t))). \tag{4.6}$$

Si indichi con $\bar{X}'(t)$ un vettore tangente ad $L(M)$ in $\gamma'^*(t)$ tale che

$$\pi'_*(\bar{X}'(t)) = X(t).$$

Posto $\nu = \tilde{\beta}(\Gamma)$, essendo $-\nu$ la 1-forma tensoriale su $L(M)$ di tipo $(GL(n;R), R^n)$ corrispondente ad A (cfr. n. 3, def. 1), si ha:

$$-\nu_{\gamma'^*(t)}(\bar{X}'(t)) = \widetilde{\gamma'^*(t)}^{-1}(A_{\gamma(t)}(X(t))). \tag{4.7}$$

Per la (4.7), la (4.6) si scrive secondo la

$$Y(t) = -\tilde{u}'_0\,(\nu_{\gamma'^*(t)}(\bar{X}'(t))). \tag{4.8}$$

Si indichi con $\bar{X}(t)$ un vettore tangente ad $A(M)$ in $\gamma^*(t)$ tale che $\alpha_*(\bar{X}(t)) = \bar{X}'(t)$, per la (2.1) si ha:

$$\nu_{\gamma'^*(t)}(\bar{X}'(t)) = \beta_*(\Gamma_{\gamma^*(t)}\ \bar{X}(t))); \tag{4.9}$$

essendo $\pi_*(\bar{X}(t)) = X(t)$, risulta (cfr. [2], n. 6):

$$\Gamma_{\gamma^*(t)}\ (\bar{X}(t)) = \dot{\gamma}^*(t); \tag{4.10}$$

dalla seconda delle (4.5) consegue che

$$\beta_*(\dot{\gamma}^*(t)) = \dot{a}(t) \tag{4.11}$$

e per le (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), si ottiene

$$Y(t) = -\tilde{u}'_0\,(\dot{a}(t)). \tag{4.12}$$

[8] Si noti che ogni $(X_1, \ldots, X_n) \in L(M)$ si può identificare con $(0; X_1, \ldots, X_n) \in A(M)$; inoltre, identificando ogni $\xi \in R^n$ con la matrice $\begin{pmatrix} I_n & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ove con I_n si indica la matrice unitaria di ordine n, risulta $R^n \subset A(n;R)$.

D'altra parte si ha:

$$c(t) = \tilde{u}_o \circ \widetilde{\gamma^*(t)}^{-1}(\gamma(t)) \quad [9], \tag{4.13}$$

ed essendo

$$\widetilde{\gamma^*(t)}^{-1}(Z) = (a(t))^{-1}\ \widetilde{\gamma'^*(t)}^{-1}(Z), \qquad \forall\, Z \in T_{\gamma(t)}(M),$$

la (4.13) diviene

$$c(t) = \tilde{u}_o((a(t))^{-1}\, 0_{R^n}). \tag{4.14}$$

Dalla (4.14) consegue che

$$\dot{c}(t) = -\tilde{u}_o(\dot{a}(t)) \tag{4.15}$$

e dalle (4.12), (4.15) segue la (4.3).

Dalla proposizione precedente si ottiene subito la seguente:

PROPOSIZIONE 2. *Lo sviluppo della curva* γ *in* $E_{\gamma(o)}$ *rispetto ad* X *è un segmento di retta se e solo se il campo vettoriale* $t \to \dot{\gamma}(t)$, *con* $t \in I$, *lungo* γ *è parallelo rispetto ad* X e Γ' [10].

OSSERVAZIONE. Le proposizioni 1 e 2 generalizzano al caso delle pseudoconnessioni affini ben note proprietà relative al caso delle connessioni affini (cfr. [6], prop. 4.1, pag. 131, e cor. 4.2, pag. 132).

BIBLIOGRAFIA

[1] DI COMITE C., *Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe* C^∞, Annali di Mat. pura ed appl., Serie IV, T. LXXXIII (1969).

[2] DI COMITE C., *Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale*, Annali di Mat. pura ed appl., Serie IV, T. IC (1974).

[3] DI COMITE C., *Sulla curvatura delle pseudoconnessioni su uno spazio fibrato principale differenziabile*, Rend. Acc. Naz. dei XL, Serie IV, Vol. XXIV-XXV (1974).

[4] DI COMITE C., *Geodetiche rispetto ad una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile*, Le Matematiche, Vol. XXX, Fasc. 2 (1975).

[5] GIUBLESI D., *Connessioni affini generalizzate su varietà differenziabili e loro proprietà*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Polit. di Torino, **29** (1969-70).

[9] $\gamma(t)$ è identificato al vettore nullo tangente ad M in $\gamma(t)$.

[10] Cioè, per ogni $(t, s) \in I^2$, risulta $\tau_s^t(\dot{\gamma}(t)) = \dot{\gamma}(s)$.

[6] KOBAYASHY S., NOMIZU K., *Foundations of differential geometry*, Interscience tracts, n. 15, Vol. 1 (1963).

[7] PHAM MAU QUAN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris (1969).

[8] VAMANU E., *Cvasi-conexiuni pe varietati diferentiable*, An. Sti. Univ. « Al. I. Cuza » Iasi Sect. I a Mat. (N. S.) (1970).

[9] WONG Y. C., *Linear connections and quasi connections on a differentiable manifold*, Tôhoku, Math. Journ. **14** (1962).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci V. Dalla Volta, A. Franchetta e C. Tolotti.

Spazi di coomologia dei campi di 2-getti e coomologia 1-dimensionale a coefficienti nel fascio delle funzioni a gradiente parallelo su una varietà a connessione lineare *

Nota di PASQUALE MASTROGIACOMO (Bari)
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza del 5 giugno 1976)

RIASSUNTO. — In questo lavoro, considerata una varietà differenziabile reale n-dimensionale V_n dotata di una connessione lineare Γ, si definiscono due spazi di coomologia associati ad assegnati operatori. Si dimostra che essi sono isomorfi agli spazi di coomologia 1-dimensionale di Cěch a coefficienti l'uno nel fascio costante reale e l'altro nel fascio delle funzioni a gradiente parallelo rispetto a Γ, e quindi sono rispettivamente un invariante topologico di V_n ed un invariante di V_n dipendente in modo essenziale dalla connessione Γ.

SUMMARY. — A real n-dimensional differentiable manyfold V_n endowed with a linear connection Γ is considered and two cohomology spaces are defined, which are associated to given operators. It is proved that one of them is a topological invariant of V_n while the other one is a invariant of V_n essentially dependent on the connection Γ, since they are isomorphic to the Cěch one-dimensional cohomology spaces having the respective coefficients in the constant real sheaf and in the sheaf of functions whose gradient is parallel with respect of Γ.

INTRODUZIONE.

È nota l'importanza, nello studio di una varietà differenziabile reale n-dimensionale V_n, dello spazio di coomologia di De Rahm p-dimensionale ($1 \leq p \leq n$) $H^p(V_n)$ (delle p-forme differenziali). È noto altresì che $H^p(V_n)$ è isomorfo allo spazio di coomologia di Cěch p-dimensionale di V_n a coefficienti reali $\mathcal{H}^p(V_n)$ ed è, per ogni p, un invariante topologico di V_n.

In questo lavoro, considerata una V_n, si definiscono e si studiano due spazi di coomologia associati a certi operatori, ottenendo, tra

* Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

l'altro, un invariante di V_n dipendente in modo essenziale da una fissata connessione lineare di V_n.

Diamo un sunto dettagliato del lavoro per dare un'idea del suo contenuto. Dopo aver richiamato, nei nn. 1 e 2, nozioni e questioni introduttorie sui campi di 1-getti e di 2-getti differenziabili su V_n, nel n. 3, indicate con $\Omega(V_n)$ l'algebra delle funzioni differenziabili su V_n e con $G^2(V_n)$ l'algebra dei campi di 2-getti differenziabili su V_n, si considera l'operatore d^2: $\Omega(V_n) \to G^2(V_n)$, che alla funzione $f \in \Omega(V_n)$ associa il campo di 2-getti $d^2 f \in G^2(V_n)$ le cui componenti nella base naturale associata alla carta (U_a, c_a) dell'atlante universale di V_n sono

$$(\partial f_a/\partial x_a^i, \quad \partial^2 f_a/\partial x_a^{i_1} \partial x_a^{i_2} \text{ per } i_1 < i_2 \text{ e } \frac{1}{2} \partial^2 f_a/(\partial x_a^i)^2),$$

in cui $i, i_1, i_2 = 1, \ldots, n$, $f_a = f \circ c_a^{-1}$ e x_a^i sono le coordinate di un punto nella suddetta carta.

Dopo aver dato in maniera naturale la nozione di campo di 2-getti *esatto* o *chiuso* rispetto a d^2, definiamo lo spazio di coomologia (dei campi di 2-getti) associato a d^2, $H^2(V_n, G^2, d^2) = H^2$, e dimostriamo che esso è isomorfo allo spazio di coomologia di De Rahm 1-dimensionale $H^1(V_n)$ (delle 1-forme differenziali) e quindi isomorfo anche allo spazio di coomologia di Čech 1-dimensionale a coefficienti nel fascio costante reale, $\mathcal{H}^1(V_n)$.

Nel n. 4, indicata con $\Omega^2(V_n)$ l'algebra dei campi di 2-getti omogenei differenziabili su V_n e con Γ una assegnata connessione lineare simmetrica di V_n, otteniamo uno spazio di coomologia, sovraspazio (a meno di un isomorfismo) di $H^1(V_n)$ e dipendente in modo essenziale da Γ, considerando lo spazio di coomologia (dei campi 2-getti omogenei) $H^2_\Gamma(V_n, \Omega^2, \delta^2_\Gamma) = H^2_\Gamma$ associato all'operatore $\delta^2_\Gamma : \Omega(V_n) \to \to \Omega^2(V_n)$, che alla funzione $f \in \Omega(V_n)$ associa il campo di 2-getti omogenei $\delta^2_\Gamma f \in \Omega^2(V_n)$ le cui componenti nella base naturale associata alla carta (U_a, c_a) sono le funzioni

$$\overset{\Gamma}{\Delta}_{a i_1 i_2} f_a = \partial_{a i_1 i_2} f_a - \partial_{a t} f_a \cdot \Gamma^t_{a i_1 i_2},$$

in cui $\Gamma^t_{a i_1 i_2}$ sono i parametri in (U_a, c_a) dell'assegnata connessione lineare Γ.

Nei nn. 5 e 6, dopo aver studiato lo spazio di coomologia di Čech 1-dimensionale a coefficienti nel fascio delle funzioni a gradiente parallelo rispetto a Γ, $\mathcal{H}^1_\Gamma$, dimostriamo che esso è isomorfo all'anzidetto spazio di coomologia H^2_Γ.

Infine nel n. 7 diamo alcuni esempi di varietà a connessione lineare in cui lo spazio $H^2_\Gamma(\simeq \mathcal{H}^1_\Gamma)$ coincide (a meno di un isomorfismo) con lo spazio $H^1(\simeq \mathcal{H}^1)$ ed altri esempi in cui H^2_Γ è (sempre a meno di un isomorfismo) un sovraspazio *proprio* di H^1, mostrando in tal modo che in questi casi H^2_Γ dipende in maniera essenziale dalla connessione Γ.

In un lavoro in corso di stesura estendiamo i risultati succitati ai campi di k-getti ($k \geq 2$) differenziabili. In un prossimo lavoro intendiamo esaminare questioni analoghe relativamente ad altri tipi di operatori.

1. - Campi di 1-getti differenziabili.

Sia V_n una varietà differenziabile (reale) n-dimensionale.
Denotiamo con:

(A_P, f) la funzione f differenziabile nell'intorno aperto A_P del punto P di V_n (detta più semplicemente *differenziabile in* P);
$\mathfrak{F}_P$ l'insieme delle funzioni differenziabili in P;
Γ_P l'algebra dei germi di funzioni differenziabili in P;
$\gamma : \mathfrak{F}_P \to \Gamma_P$ la proiezione canonica di $\mathfrak{F}_P$ su Γ_P e quindi con $\gamma(A_P, f)$ il germe della funzione $(A_P, f) \in \mathfrak{F}_P$);
$\Gamma_{P,O}$ l'algebra dei germi nulli in P (ideale di Γ_P);
$\Gamma^k_{P,O}$, $\forall\ k$ intero ≥ 2, la potenza k-esima (ideale) di $\Gamma_{P,O}$.

È noto che (cfr. [6]) [1]:

I. - $\Gamma_{P,O} \supseteq \Gamma^2_{P,O} \supseteq \ldots \supseteq \Gamma^k_{P,O} \supseteq \ldots$

II. - $\Gamma_{P,O}$ *è l'unico ideale massimo di* Γ_P.

III. - $\Gamma^k_{P,O}$, $k \geq 2$, *è costituito da tutti, e soli, i germi di* $\Gamma_{P,O}$ *le cui derivate, fino a quelle di ordine* $k-1$ *incluso, sono tutte nulle in* P.

Sia Ω^1_P lo spazio degli 1-getti (cioè dei vettori covarianti) tangenti in P a V_n, ossia lo spazio ottenuto considerando la sottostruttura di spazio vettoriale dell'algebra quoziente $\Gamma_{P,O}/\Gamma^2_{P,O}$ (in cui il prodotto è sempre nullo). Dalla III segue senz'altro che:

IV. - *Lo spazio* $\Omega^1_P = \Gamma_{P,O}/\Gamma^2_{P,O}$ *è l'insieme delle classi di germi nulli in* P, *le cui derivate prime assumono gli stessi valori in* P.

[1] Le parentesi [ ] si riferiscono alla Bibliografia alla fine del lavoro.

Ricordiamo che si chiama *differenziale (primo) in* P della funzione $(A_P, f) \in \mathfrak{F}_P$ e si denota con $d_P f$ l'elemento di Ω^1_P :

$$d_P f = \gamma(A_P, f - f(P)) + \Gamma^2_{P,O} \ . \tag{1.1}$$

Dalla IV segue facilmente

$$d_P f = (\partial_{ai} f_a)_{y_a} d_P x^i_a \ , \tag{1.2}$$

in cui $f_a = f \circ c_a^{-1}$, $y_a = c_a(P)$, x^i_a $(i = 1, \ldots, n)$ sono le funzioni coordinate relative alla carta (U_a, c_a) dell'atlante universale di V_n e $\partial_{ai} f_a = \partial f_a / \partial x^i_a$.

Giacché gli n differenziali $d_P x^i_a$ risultano linearmente indipendenti, dalla (1.2) si ha che:

V. - *I differenziali* $d_P x^i_a$ $(i = 1, \ldots, n)$ *costituiscono una base (detta base naturale associata alla carta* (U_a, c_a)*) di* Ω^1_P .

Pertanto Ω^1_P ha dimensione n.

Denotiamo con $\Omega(V_n)$ (o semplicemente con Ω) l'algebra delle funzioni differenziabili su V_n e con $\Omega^1(V_n) = \Omega^1$ lo spazio vettoriale dei campi di 1-getti (o 1-forme) differenziabili su V_n. Se $\omega^1 \in \Omega^1$ è un campo di 1-getti differenziabili su V_n è noto che, nel riferimento naturale associato alla carta (U_a, c_a), esso è rappresentato da:

$$\omega^1 = \omega_{ai} \, d x^i_a \ , \tag{1.3}$$

in cui ω_{ai} sono le componenti di ω^1 nella suddetta carta.

Ricordiamo che se $f \in \Omega$ è una funzione differenziabile su V_n, considerato, per ogni punto P di V_n, il differenziale $d_P f$ della funzione $(V_n, f) \in \mathfrak{F}_P$, al variare di P su V_n si ottiene un elemento di $\Omega^1(V_n)$, cioè un campo di 1-getti differenziabile su V_n, che si chiama *il differenziale (primo) di f,* si denota con df e la cui rappresentazione in (U_a, c_a) è data, per la (1.2), da:

$$df = \partial_{ai} f_a \, d x^i_a \ . \tag{1.4}$$

Si ottiene così un R-omomorfismo (in generale non surgettivo) dello spazio vettoriale $\Omega(V_n)$ nello spazio vettoriale $\Omega^1(V_n)$

$$d: f \in \Omega \to df \in \Omega^1 \ , \tag{1.5}$$

detto *operatore di differenziazione di* Ω *in* Ω^1.

Ricordiamo che un elemento ω^1 di Ω^1 dicesi un campo di 1-getti *esatto* se appartiene a $d\,\Omega$ (cioè se esiste $f \in \Omega$ tale che $d f = \omega^1$) e che *condizione necessaria affinché* ω^1 *sia esatto è che si abbia*:

$$\partial_{a i_2}\, \omega_{a i_1} = \partial_{a i_1}\, \omega_{a i_2} \ , \qquad (i_1, i_2 = 1 , \ldots , n) \ , \tag{1.6}$$

in ogni carta dell'atlante universale di V_n.

Un campo $\omega^1 \in \Omega^1$ soddisfacente alla (1.6) si dice *chiuso*. Siano C^1 lo spazio vettoriale dei campi di 1-getti chiusi ed E^1 lo spazio vettoriale $d\,\Omega$ dei campi di 1-getti esatti. Si verifica facilmente che E^1 è un sottospazio di C^1.

Denotiamo con $H^1(V_n, \Omega^1) = H^1$ lo spazio quoziente $C^1/E^1 = C^1/d\,\Omega$, ossia il noto *spazio di coomologia di De Rahm* 1*-dimensionale di* V_n *o spazio di coomologia dei campi di* 1*-getti* (*o delle* 1*-forme*) *differenziabili di* V_n.

2. - Campi di 2-getti differenziabili.

Sia G^2_P l'algebra dei getti del secondo ordine (o 2-getti) tangenti in P a V_n ossia l'algebra quoziente $\Gamma_{P,O}/\Gamma^3_{P,O}$. Dalla III del n. 1 si ha che:

I. - *L'algebra* $G^2_P = \Gamma_{P,O}/\Gamma^3_{P,O}$ *è costituita dalle classi di germi nulli in* P, *le cui derivate prime e seconde assumono gli stessi valori in* P.

Chiamiamo *differenziale secondo in* P *della funzione* $(A_P, f) \in \mathfrak{F}_P$ il 2-getto tangente in P a V_n, che indicheremo con $d^2_P f$, determinato dal germe nullo in P $\gamma(A_P, f - f(P))$, ossia il 2-getto:

$$d^2_P f = \gamma\,(A_P\ , f - f\,(P)) + \Gamma^3_{P,O} \ . \tag{2.1}$$

Manifestamente gli elementi di G^2_P sono tutti, e soli, i differenziali secondi in P delle funzioni differenziabili in P. Dalla I segue facilmente:

$$d^2_P f = (\partial_{a i} f_a)_{y_a} \cdot d^2_P\ x^i_a + \frac{1}{2}\,(\partial_{a i_1 i_2}\, f_a)_{y_a}\ d^2_P\ x^{i_1}_a \cdot d^2_P\ x^{i_2}_a \ , \tag{2.2}$$

in cui

$$\partial_{a i_1 i_2}\ f_a = \partial^2 f_a / \partial\, x^{i_1}_a \cdot \partial\ x^{i_2}_a \ .$$

Essendo $d_P^2 x_a^i$, $d_P^2 x_a^{i_1} \cdot d_P^2 x_a^{i_2}$ $(i_1 \leq i_2)$ linearmente indipendenti, dalla (2.2) si ha che:

II. - *I 2-getti* $d_P^2 x_a^i$, $d_P^2 x_a^{i_1} \cdot d_P^2 x_a^{i_2}$ $(i_1 \leq i_2)$ *costituiscono una base (detta base naturale associata alla carta* (U_a, c_a)*) dell'algebra* G_P^2 .

Pertanto G_P^2 ha dimensione:

$$d_2 = n + \binom{n+1}{2} . \tag{2.3}$$

Per la (2.2) e per la II, le componenti nella suddetta base del 2-getto $d_P^2 f$ sono:

$$(\partial_{ai} f_a)_{y_a}, \quad (\partial_{ai_1 i_2} f_a)_{y_a} \text{ per } i_1 < i_2 \text{ e } \frac{1}{2} \cdot (\partial_{aii} f_a)_{y_a} . \tag{2.4}$$

Siano

$$x_b^i = x_b^i (x_a^i), \qquad x_a^i = x_a^i (x_b^i) \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

le equazioni dei cambiamenti di coordinate relativi alle carte (U_a, c_a) e (U_b, c_b) tali che $P \in U_a \cap U_b$. Per i corrispondenti cambiamenti delle basi naturali di G_P^2 associate a tali carte, per le (2.2), si hanno le equazioni:

$$d_P^2 x_b^i = (\partial_{ai} x_b^j)_{y_a} d_P^2 x_a^i + \frac{1}{2} (\partial_{ai_1 i_2} x_b^j)_{y_a} d_P^2 x_a^{i_1} \cdot d_P^2 x_a^{i_2} \tag{2.6}$$

$$d_P^2 x_b^{i_1} \cdot d_P^2 x_b^{i_2} = (\partial_{ai_1} x_b^{i_1} \cdot \partial_{ai_2} x_b^{i_2})_{y_a} d_P^2 x_a^{i_1} \cdot d_P^2 x_a^{i_2} . \tag{2.6'}$$

Ne seguono, per le trasformazioni delle componenti nelle suddette basi del 2-getto $d_P^2 f$, le equazioni:

$$(\partial_{bj} f_b)_{y_b} = (\partial_{ai} f_a)_{y_a} \cdot (\partial_{bj} x_a^i)_{y_b} , \tag{2.7}$$

$$(\partial_{bi_1 i_2} f_b)_{y_b} = (\partial_{ai_1 i_2} f_a)_{y_a} (\partial_{bi_1} x_a^{i_1} \cdot \partial_{bi_2} x_a^{i_2})_{y_b} + \tag{2.7'}$$

$$+ (\partial_{ai} f_a)_{y_a} \cdot (\partial_{bi_1 i_2} x_a^i)_{y_b} .$$

Sia Ω_P^2 lo spazio dei 2-getti *omogenei* tangenti in P a V_n, ossia lo spazio ottenuto considerando la sottostruttura di spazio vetto-

riale dell'algebra quoziente $\Gamma^2_{P,0}/\Gamma^3_{P,0}$ (in cui il prodotto è privo di interesse perché sempre nullo). Dalla III del n. 1 si ha che:

III. - *Lo spazio* $\Omega^2_P = \Gamma^2_{P,0}/\Gamma^3_{P,0}$ *è l'insieme delle classi di germi nulli in* P, *aventi in* P *derivate prime nulle e le stesse derivate seconde.*

Essendo Ω^2_P contenuto nell'algebra G^2_P (di cui è un ideale), i suoi elementi (ossia i 2-getti omogenei tangenti in P a V_n) sono i differenziali secondi in P delle funzioni differenziabili in P aventi derivate prime nulle in P. Se (A_P, f) è una funzione siffatta (cioè tale che $(\partial_{ai}\, f_a)_{y_a} = 0$), dalla (2.2) si ha

$$d^2_P f = \frac{1}{2}(\partial_{ai_1 i_2}\, f_a)_{y_a}\, d^2_P\, x^{i_1}_a \cdot d^2_P\, x^{i_2}_a \,. \tag{2.8}$$

Per la II si ha che:

IV. - *I 2-getti omogenei* $d^2_P x^{i_1}_a \cdot d^2_P x^{i_2}_a$ $(i_1 \leq i_2)$ *costituiscono una base (detta base naturale associata alla carta* (U_a, c_a)*) dello spazio vettoriale* Ω^2_P .

Pertanto Ω^2_P ha dimensione:

$$c_2 = \binom{n+1}{2} \,. \tag{2.9}$$

In virtù della (2.6'), per i cambiamenti fra le basi naturali di Ω^2_P associate alle carte (U_a, c_a) e (U_b, c_b) con $P \in U_a \cap U_b$, si hanno le equazioni:

$$d^2_P\, x^{i_1}_b \cdot d^2_P\, x^{i_2}_b = (\partial_{ai_1}\, x^{i_1}_b \cdot \partial_{ai_2}\, x^{i_2}_b)_{y_a}\, d^2_P\, x^{i_1}_a \cdot d^2_P\, x^{i_2}_a \,. \tag{2.10}$$

Dalle (2.7') (essendo ora $(\partial_{ai} f_a)_{y_a} = (\partial_{bj} f_b)_{y_b} = 0$) si ha che le componenti, $(\partial_{ai_1 i_2} f_a)_{y_a}$ e $(\partial_{bi_1 i_2} f_b)_{y_b}$, nelle suddette basi del 2-getto omogeneo $d^2_P f$ si trasformano con le equazioni:

$$(\partial_{bi_1 i_2} f_b)_{y_b} = (\partial_{ai_1 i_2} f_a)_{y_a} (\partial_{bi_1}\, x^{i_1}_a \cdot \partial_{bi_2}\, x^{i_2}_a)_{y_b} \,, \tag{2.11}$$

cioè come le componenti di un tensore doppio covariante simmetrico tangente in P a V_n. Ne segue allora che:

V. - *Lo spazio* Ω^2_P *dei 2-getti omogenei tangenti in* P *a* V_n *è canonicamente isomorfo allo spazio* S^2_P *dei tensori doppi covarianti simme-*

trici tangenti in P *a* V_n, *nell'isomorfismo canonico che associa ai 2-getti omogenei* $d_P^2 x_a^{i_1} \cdot d_P^2 x_a^{i_2}$ *i tensori doppi covarianti simmetrici* $d_P x_a^{i_1} \bigcirc d_P x_a^{i_2}$ (*essendosi denotato con* $d_P x_a^{i_1} \bigcirc d_P x_a^{i_2}$ *il simmetrizzato del prodotto tensoriale* $d_P x_a^{i_1} \otimes d_P x_a^{i_2}$).

Denotiamo con $\Omega^1_{P,a} = [d_P^2 x_a^i]$ il sottospazio dello spazio vettoriale G_P^2 generato dai 2-getti $d_P^2 x_a^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Esso varia, in generale, se si cambia la carta (U_a, c_a) tale che $P \in U_a$. Infatti se (U_b, c_b) è un'altra carta con $P \in U_b$, per la (2.6), si ha che lo spazio $\Omega^1_{P,b} = [d_P^2 x_b^i]$ coincide con $\Omega^1_{P,a}$ se, e soltanto se, risulta $(\partial_{a i_1 i_2} x_b^i)_{y_a} = 0$, per ogni $i_1, i_2, j = 1, \ldots n$. Inoltre $\Omega^1_{P,a}$ (e quindi anche $\Omega^1_{P,b}$) è canonicamente isomorfo allo spazio Ω^1_P, nell'isomorfismo canonico che associa ai 2-getti $d_P^2 x_a^i$ $(i = 1, \ldots n)$ gli 1-getti $d_P x_a^i$. Dalla (2.2) e dalla II segue allora che:

VI. - *L'algebra* G_P^2 *dei 2-getti tangenti in* P *a* V_n *è isomorfa alla somma diretta* (*strutturata ad algebra definendo in essa il prodotto alla Cauchy*) *degli spazi* Ω^1_P *degli 1-getti* (*covettori*) *tangenti in* P *a* V_n *e* Ω^2_P *dei 2-getti omogenei tangenti in P a* V_n.

Consideriamo ora l'algebra $\bigotimes_{P \in V_n} G_P^2$ dei campi di 2-getti tangenti a V_n (cioè il prodotto diretto della famiglia $\{G_P^2\}_{P \in V_n}$ delle algebre G_P^2 dei 2-getti tangenti in P a V_n) e lo spazio vettoriale $\bigotimes_{P \in V_n} \Omega_P^2$ dei campi di 2-getti tangenti a V_n. Se g^2 è un campo di 2-getti tangenti a V_n e se g_{ai}, $g_{a i_1 i_2}$ (con $g_{a i_1 i_2}$ simmetriche rispetto a i_1, i_2) denotano le sue componenti nella carta (U_a, c_a), per la (2.2), si ha:

$$g^2_{|U_a} = g_{ai}\, d^2 x_a^i + \frac{1}{2}\, g_{a i_1 i_2}\, d^2 x_a^{i_1} \cdot d^2 x_a^{i_2} \; ; \tag{2.12}$$

in particolare, se ω^2 è un campo di 2-getti omogenei e se $\omega_{a i_1 i_2}$ (simmetriche rispetto a i_1, i_2) sono le sue componenti nella suddetta carta, per la (2.8) si ha:

$$\omega^2_{|U_a} = \frac{1}{2}\, \omega_{a i_1 i_2}\, d^2 x_a^{i_1} \cdot d^2 x_a^{i_2} \; . \tag{2.13}$$

Le componenti relative a due carte (U_a, c_a) e (U_b, c_b) con $U_a \cap U_b \neq \varnothing$ del campo di 2-getti g^2 sono legate, per le (2.7) e (2.7'),

dalle relazioni:

$$g_{bj} = g_{ai}\,\partial_{bj}\,x_a^i \,, \tag{2.14}$$

$$g_{bi_1i_2} = g_{ai_1i_2}\;\partial_{bi_1}\,x_a^{i_1}\cdot\partial_{bi_2}\,x_a^{i_2} + g_{ai}\,\partial_{bi_1i_2}\,x_a^i \;; \tag{2.14'}$$

in particolare, se ω^2 è un campo di 2-getti omogenei, le sue componenti nelle suddette carte, per le (2.11), si trasformano con le equazioni

$$\omega_{bi_1i_2} = \omega_{ai_1i_2}\;\partial_{bi_1}\,x_a^{i_1}\cdot\partial_{bi_2}\,x_a^{i_2} \,, \tag{2.15}$$

cioè come le componenti di un campo di tensori doppi covarianti simmetrici tangenti a V_n.

Come per i campi di 1-getti (o più in generale di tensori), si dice che un campo di 2-getti tangenti a V_n è differenziabile su V_n se le sue componenti relative alla carta (U_a, c_a) sono funzioni differenziabili in $c_a(U_a)$, qualunque sia la carta (U_a, c_a) dell'atlante universale di V_n; e si ha che condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di 2-getti sia differenziabile su V_n è che esso sia localmente differenziabile su V_n.

Denotiamo con $G^2(V_n) = G^2$ l'algebra dei campi di 2-getti differenziabili su V_n e con $\Omega^2(V_n) = \Omega^2$ lo spazio vettoriale dei campi di 2- getti omogenei differenziabili su V_n. Manifestamente Ω^2 è un sottospazio dello spazio vettoriale G^2. Per la (2.15) (cfr. anche la V) si ha che:

VII. - *Lo spazio* $\Omega^2(V_n)$ *dei campi di 2-getti omogenei differenziabili su* V_n *è canonicamente isomorfo allo spazio* $S^2(V_n)$ *dei campi di tensori doppi covarianti simmetrici differenziabili su* V_n, *nell'isomorfismo canonico che associa fra loro elementi di tali spazi aventi le stesse componenti nelle rispettive basi naturali associate ad ogni carta dell'atlante universale di* V_n.

Dalla VI si ha inoltre che:

VIII. - *L'algebra* G^2 *dei campi di 2-getti differenziabili su* V_n *è isomorfa alla somma diretta (strutturata ad algebra definendo in essa il prodotto alla Cauchy) dei due spazi vettoriali* Ω^1 *dei campi di 1-getti (delle 1-forme) differenziabili su* V_n *ed* Ω^2 *dei campi di 2-getti omogenei differenziabili su* V_n.

Per i campi differenziabili di 2-getti valgono proprietà analoghe a quelle dei campi di tensori: sussiste per essi un teorema di prolungamento; si prova l'esistenza su ogni V_n di campi differenziabili di 2-getti *non* nulli e quella di campi differenziabili di 2-getti omogenei *mai* nulli (quest'ultima, conseguenza della VII e dell'esistenza su ogni V_n di campi di tensori doppi covarianti simmetrici *mai* nulli (cfr. [6])) ed infine si prova che su una V_n esistono campi differenziabili di 2-getti non omogenei *mai* nulli se, e solo se, vi esistono campi di 1-getti (cioè 1-forme) differenziabili *mai* nulli.

3. - Spazio H^2 di coomologia dei campi di 2-getti differenziabili associato ad un operatore $d^2 : \Omega(V_n) \to G^2(V_n)$.

Sia $g^1 \in \Omega^1(V_n)$ un campo di 1-getti (cioè una 1-forma) differenziabile su V_n. È noto che, se g_{ai} e g_{bj} sono le componenti di g^1 relative a due carte (U_a, c_a) e (U_b, c_b) con $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, si ha:

$$g_{bj} = g_{ai}\, \partial_{bj} x_a^i \,, \tag{3.1}$$

da cui segue facilmente:

$$S(\partial_{bi_1} g_{bi_2}) = S(\partial_{ai_1} g_{ai_2})\, \partial_{bi_1} x_a^{i_1} \cdot \partial_{bi_2} x_a^{i_2} + g_{ai} \cdot \partial_{bi_1 i_2} x_a^i \,, \tag{3.2}$$

ove con $S(\partial_{bi_1} g_{bi_2})$ si è denotato il simmetrizzato di $\partial_{bi_1} g_{bi_2}$ rispetto a j_1, j_2.

Le (3.1) e (3.2) provano che le funzioni $g_{ai}, S(\partial_{ai_1} g_{ai_2})$ sono le componenti in (U_a, c_a) di un campo differenziabile di 2-getti, che chiameremo il *differenziale (primo) del campo di 1-getti* g^1 e che denoteremo con $D^1 g^1$.

Resta così determinata l'applicazione:

$$D^1 : g^1 \in \Omega^1 \to D^1 g^1 \in G^2 \,, \tag{3.3}$$

che chiameremo *operatore di differenziazione di* Ω^1 *in* G^2 e che risulta un R-omomorfismo iniettivo (ed in generale non surgettivo) dello spazio Ω^1 nello spazio G^2.

Dal confronto delle (3.2) con le (2.12) segue immediatamente che *ad ogni campo* g^2 *differenziabile di 2-getti* $(\in G^2)$ *resta associato il campo differenziabile di 2-getti omogenei*

$$g^2 - D^1 \circ pr^1(g^2) \in \Omega^2 \,, \tag{3.4}$$

in cui pr^1 è la prima proiezione canonica di G^2 su Ω^1 (cfr. la VIII del n. 2). Si ha subito che:

I. - *Un campo* $g^2 \in G^2$ *di 2-getti differenziabile su* V_n *è il differenziale di un campo di 1-getti differenziabile su* $V_n (\in \Omega^1)$ *se, e solo se, risulta nullo il campo di 2-getti omogenei* (3.4) *ad esso associato.*

Sia ora $f \in \Omega(V_n)$ una funzione differenziabile su V_n. Per ogni punto di V_n si può considerare la funzione (V_n, f) differenziabile in P ed il corrispondente differenziale secondo in P : $d^2_P f \in G^2_P$. Facendo variare P su V_n si determina un elemento di $G^2(V_n)$, ossia un campo di 2-getti, differenziabile su V_n perché le sue componenti, $\partial_{ai} f_a$, $\partial_{ai_1 i_2} f_a$, relative alla carta (U_a, c_a) sono funzioni differenziabili in $c_a(U_a)$, qualunque sia la carta (U_a, c_a) dell'atlante universale di V_n.

Il campo differenziabile di 2-getti $d^2 f$ così ottenuto, rappresentato localmente da

$$d^2 f_{|U_a} = \partial_{ai} f_a \, d^2 x_a^i + \frac{1}{2} \partial_{ai_1 i_2} f_a \, d^2 x_a^{i_1} \cdot d^2 x_a^{i_2} , \tag{3.5}$$

sarà chiamato *differenziale secondo della funzione f.*

Chiameremo *operatore di differenziazione (seconda) di* Ω *in* G^2 l'applicazione:

$$d^2 : f \in \Omega \to d^2 f \in G^2 . \tag{3.6}$$

Si prova subito che d^2 è un R-omomorfismo (in generale né iniettivo e né surgettivo) dello spazio vettoriale Ω nello spazio vettoriale G^2. Evidentemente si ha:

$$d^2 = D^1 \circ d . \tag{3.7}$$

Assegnato un campo $g^2 (\in G^2)$ differenziabile di 2-getti, ci chiediamo se esiste una funzione f differenziabile su V_n tale che $d^2 f = g^2$. A questa domanda, come nel classico problema del potenziale, si può dare una risposta affermativa, nel qual caso diremo che g^2 è un campo *esatto* di 2-getti, facendo opportune ipotesi su g^2 e sulle proprietà topologiche del sostegno di V_n. Sia

$$g^2_{|U_a} = g_{ai} \, d^2 x_a^i + \frac{1}{2} g_{ai_1 i_2} \, d^2 x_a^{i_1} \cdot d^2 x_a^{i_2} \tag{3.8}$$

la rappresentazione locale del dato campo $g^2 \in G^2$. In base al teorema sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni e dal confronto della (3.8) con la (3.5) si hanno le seguenti *condizioni necessarie affinché* $g^2 \in G^2$ *sia esatto*:

$$\partial_{a i_1} g_{a i_2} = \partial_{a i_2} g_{a i_1} , \tag{3.9}$$

$$g_{a i_1 i_2} = S(\partial_{a i_1} g_{a i_2}) , \tag{3.10}$$

ossia:

$$pr^1 g^2 \in C^1 \quad (\textit{spazio dei campi di 1-getti chiusi}), \tag{3.9'}$$

$$g^2 = D^1 \circ pr^1(g^2) . \tag{3.10'}$$

Tali condizioni in generale non sono sufficienti perché g^2 sia esatto; lo sono certamente se il sostegno di V_n è omeomorfo ad R^n o ad un suo intorno sferico. Infatti, in tal caso, il campo di 1-getti $pr^1(g^2)$, chiuso in virtù della (3.9') è anche esatto per il lemma di Poincaré. Pertanto esiste una funzione f differenziabile su V_n tale che

$$pr^1(g^2) = d f .$$

Tenendo allora conto delle (3.10') e (3.7) si ha:

$$g^2 = D^1 \circ d(f) = d^2 f .$$

Diremo *chiuso* un campo di 2-getti $g^2 \in G^2$ *localmente esatto*, cioè (come è facile provare) soddisfacente alle condizioni (3.9) e (3.10) o (3.9') e (3.10'). Essendo tali condizioni lineari, l'insieme dei campi chiusi di 2-getti è un sottospazio, che indicheremo con C^2, dello spazio vettoriale G^2.

Essendo lo spazio $d^2\Omega$ dei campi esatti di 2-getti un sottospazio di C^2, possiamo considerare lo spazio quoziente $C^2/d^2\Omega$, che chiameremo lo *spazio di coomologia dei campi di 2-getti differenziabili su* V_n e che indicheremo con $H^2(V_n, G^2, d^2)$ o semplicemente con H^2.

Giacché gli spazi C^2 e $d^2\Omega$ risultano rispettivamente isomorfi, mediante D^1 (cfr. (3.3)), agli spazi C^1 dei campi di 1-getti chiusi e $d\Omega$ dei campi di 1-getti esatti, si ha che:

II. - *Lo spazio* $H^2(V_n, G^2, d^2) = C^2/d^2\Omega$ *di coomologia dei campi di 2-getti differenziabili su* V_n *è isomorfo allo spazio* $H^1(V_n, \Omega^1) = C^1/d\Omega$ *di coomologia dei campi di 1-getti differenziabili su* V_n.

4. - Spazio H^2_Γ di coomologia dei campi di 2-getti omogenei differenziabili su una varietà a connessione lineare Γ.

Lo spazio H^2 di coomologia dei campi di 2-getti introdotto nel numero precedente, essendo isomorfo allo spazio H^1 di coomologia 1-dimensionale di De Rahm dei campi di 1-getti, non può fornire informazioni sulle proprietà di V_n diverse da quelle che già fornisce H^1. In questo numero introdurremo su una varietà V_n dotata di una connessione lineare simmetrica Γ uno spazio di coomologia, che coincide (a meno di un isomorfismo) con H^1 soltanto in casi particolari e che in generale, a differenza di H^1, non dipende solo dalla struttura topologica di V_n ma essenzialmente dalla connessione Γ e quindi dalla struttura differenziabile di V_n.

A tal fine consideriamo una varietà differenziabile, che denoteremo con (V_n, Γ), dotata di una connessione lineare Γ, che per semplicità supporremo simmetrica. È noto (cfr. [1] e [5]) che, se (A_P, f) è una funzione differenziabile in un punto P di V_n e se $\Gamma^s_{a i_1 i_2}$ sono le componenti di Γ in una carta (U_a, c_a) tale che $P \in U_a$, il *derivato secondo covariante (o assoluto) rispetto a* Γ *di* (A_P, f), *calcolato in* P, è il tensore doppio covariante simmetrico tangente in P a V_n le cui componenti nella base naturale associata alla carta (U_a, c_a) sono uguali a

$$(4.1) \qquad (\overset{\Gamma}{\Delta}_{a i_1 i_2} f_a)_{y_a} = (\partial_{a i_1 i_2} f_a - \partial_{a s} f_a \, \Gamma^s_{a i_1 i_2})_{y_a} ,$$

ed il *differenziale secondo assoluto rispetto a* Γ *di* (A_P, f), *calcolato in* P, è l'invariante (rispetto alle trasformazioni di coordinate ammissibili su V_n) dato dall'espressione

$$(4.2) \qquad \overset{\Gamma}{\delta}{}^2_P f = (\overset{\Gamma}{\Delta}_{a i_1 i_2} f_a)_{y_a} \, d_P \, x^{i_1}_a \cdot d_P \, x^{i_2}_a .$$

Nel seguito per semplicità scriveremo $\Delta_{a i_1 i_2}$ invece di $\overset{\Gamma}{\Delta}_{a i_1 i_2}$ e δ^2 invece di $\overset{\Gamma}{\delta}{}^2$.

Consideriamo ora le seguenti funzioni definite in $U_a \cap U_b \cap A_P$:

$$\underset{a}{F}(x^i_a(Q)) = \frac{1}{2}(\Delta_{a i_1 i_2} f_a)_{y_a} (x^{i_1}_a(Q) - y^{i_1}_a)(x^{i_2}_a(Q) - y^{i_2}_a) ,$$

$$\underset{b}{F}(x^i_b(Q)) = \frac{1}{2}(\Delta_{b i_1 i_2} f_b)_{y_b} (x^{i_1}_b(Q) - y^{i_1}_b)(x^{i_2}_b(Q) - y^{i_2}_b) ,$$

con $Q \in U_a \cap U_b \cap A_P$, $y_a = c_a(P)$, $y_b = c_b(P)$ e (U_a, c_a) e (U_b, c_b) due carte tali che $P \in U_a \cap U_b$.

Tali funzioni, essendo differenziabili e nulle in P ed avendo in P derivate prime nulle e le stesse derivate seconde, per la III del n. 2, appartengono allo stesso 2-getto omogeneo tangente in P a V_n. Denotato con $\omega^2_P(f)$ l'elemento di $\Omega^2_P = \Gamma^2_{P,O}/\Gamma^3_{P,O}$ così ottenuto, si ha:

$$\omega^2_P(f) = \gamma(A_P \cap U_a, \underset{a}{F}) + \Gamma^3_{P,O} = \gamma(A_P \cap U_b, \underset{b}{F}) + \Gamma^3_{P,O} =$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta_{a i_1 i_2} f_a)_{y_a} d^2_P x^{i_1}_a \cdot d^2_P x^{i_2}_a = \frac{1}{2}(\Delta_{b j_1 i_2} f_b)_{y_b} d^2_P x^{j_1}_b \cdot d^2_P x^{j_2}_b .$$

Poiché nell'isomorfismo naturale (cfr. V del n. 2) fra Ω^2_P ed S^2_P a $\omega^2_P(f) \in \Omega^2_P$ corrisponde $\delta^2_P f \in S^2_P$, li identificheremo convenendo di adottare la seconda notazione $(\delta^2_P f)$ e la sua denominazione per entrambi.

Se $f \in \Omega(V_n)$ è una funzione differenziabile su V_n, per ogni punto P di V_n, si può considerare la funzione (V_n, f) differenziabile in P ed il suo differenziale secondo assoluto rispetto a Γ calcolato in P: $\delta^2_P f \in \Omega^2_P$. Facendo variare P su V_n resta determinato un elemento di $\Omega^2(V_n)$, cioè un campo di 2-getti omogenei, differenziabile su V_n perché le sue componenti, $\Delta_{a i_1 i_2} f_a$, relative alla carta (U_a, c_a) sono funzioni differenziabili in $c_a(U_a)$, qualunque sia la carta (U_a, c_a) dell'atlante universale di V_n. Il campo differenziabile di 2-getti omogenei così ottenuto, rappresentato localmente da

$$\delta^2 f_{|U_a} = \frac{1}{2} \Delta_{a i_1 i_2} f_a d^2 x^{i_1}_a \cdot d^2 x^{i_2}_a \text{ in } (U_a, c_a) \tag{4.3}$$

sarà chiamato *differenziale secondo assoluto rispetto a* Γ *della funzione* f.

Ciò premesso, considerato l'R-omomorfismo dello spazio Ω nello spazio Ω^2 (che chiameremo *operatore di differenziazione assoluta rispetto a* Γ *di* Ω *in* Ω^2):

$$\delta^2 : f \in \Omega(V_n) \to \delta^2 f \in \Omega^2(V_n) , \tag{4.4}$$

ci chiediamo quando un dato campo $\omega^2 \in \Omega^2$ di 2-getti omogenei differenziabile su V_n appartiene a $\delta^2\Omega$, cioè se esiste una funzione f differenziabile su V_n tale che $\delta^2 f = \omega^2$. Detto *esatto in* (V_n, Γ) un campo siffatto, diremo *chiuso in* (V_n, Γ) un campo differenziabile di 2-getti omogenei che sia *localmente esatto rispetto a* Γ, cioè tale che $\forall P \in V_n$ esista un intorno aperto di P in cui esso sia esatto rispetto a Γ. Ma-

nifestamente si ha che *ogni campo di 2-getti omogenei esatto in* (V_n, Γ) *è chiuso in* (V_n, Γ) e che la proprietà inversa è vera solo in casi particolari. Inoltre si prova facilmente che:

I. - *Gli insiemi* E^2_Γ *e* C^2_Γ *dei campi di 2-getti omogenei rispettivamente esatti e chiusi in* (V_n, Γ) *sono spazi vettoriali e* E^2_Γ *è un sottospazio di* C^2_Γ .

Pertanto ha senso considerare lo spazio quoziente C^2_Γ / E^2_Γ, che chiamiamo *spazio di coomologia dei campi di 2-getti omogenei di* (V_n, Γ) e che denotiamo con $H^2_\Gamma(V_n, \Omega^2, \delta^2_\Gamma)$ o semplicemente con H^2_Γ .

5. - Spazio $\mathcal{H}^1_\Gamma$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti nel fascio delle funzioni a gradiente parallelo rispetto ad una connessione lineare Γ.

Con l'intento di studiare lo spazio di coomologia H^2_Γ ottenuto nel numero precedente, consideriamo il fascio su (V_n, Γ) delle funzioni a gradiente parallelo rispetto alla connessione Γ, che denoteremo con $\mathcal{S}(V_n, \Gamma, i^A_B)$ o semplicemente con $\mathcal{S}_\Gamma$. Ricordiamo (cfr. [3], [4] e [7]) che esso è il fascio ottenuto associando ad ogni aperto A di V_n lo spazio vettoriale, che indicheremo con $\mathcal{S}_A$, delle funzioni p_A differenziabili in A e tali che:

$$\delta^2 p_A = 0 , \quad \text{in } A , \tag{5.1}$$

e ad ogni coppia di aperti A, B di V_n tali che $A \supseteq B$ l'omomorfismo di restrizione $i^A_B : \mathcal{S}_A \to \mathcal{S}_B$ che fa corrispondere ad ogni funzione $p_A \in \mathcal{S}_A$ la sua restrizione a B.

Ricordiamo inoltre (cfr. [3], [4] e [7]) che si chiamano 0-*cocatena* e 1-*cocatena di* V_n *relative ad un ricoprimento aperto* $U = \{U_i\}_{i \in I}$ *di* V_n *ed a valori in* $\mathcal{S}_\Gamma$ rispettivamente: una legge p^0_U che associa ad ogni $i \in I$ un elemento p_i di $\mathcal{S}_{U_i}$ ed una legge p^1_U che associa ad ogni coppia (i, j) di elementi di I tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ un elemento p_{ij} di $\mathcal{S}_{U_i \cap U_j}$. Talvolta scriveremo $p^0_U = \{p_i\}_{i \in I}$ e $p^1_U = \{p_{ij}\}_{(i,j) \in I^*}$, essendo $I^* = \{(i, j) \in I^2 / U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$.

Si chiama poi 1-*cociclo relativo ad* U *ed a valori in* $\mathcal{S}_\Gamma$ una 1-cocatena $p^1_U = \{p_{ij}\}_{(i,j)\in I^*}$ tale che

$$p_{ij} + p_{j\ell} + p_{\ell i} = 0 \qquad \text{in} \quad U_i \cap U_j \cap U_\ell \neq \varnothing \,. \tag{5.2}$$

Osserviamo che da tale relazione per $i = j = \ell$ si ha

$$p_{ij} = 0\,, \qquad \forall\, i \in I\,, \tag{5.3}$$

e per $j = \ell$

$$p_{ij} + p_{ji} = 0\,, \qquad \forall\,(i,j) \in I^*\,. \tag{5.4}$$

Denotiamo con $\mathcal{S}^0_\Gamma(U)$, $\mathcal{S}^1_\Gamma(U)$ e $Z^1_\Gamma(U)$ rispettivamente gli spazi vettoriali delle 0-cocatene, delle 1-cocatene e degli 1-cocicli relativi ad U ed a valori nel fascio $\mathcal{S}_\Gamma$. Giacché la (5.2) è lineare, $Z^1_\Gamma(U)$ è un sottospazio di $\mathcal{S}^1_\Gamma(U)$.

Si chiama *cobordo di una* 0-*cocatena* $p^0_U = \{p_i\}_{i\in I}$ la 1-cocatena

$$\partial\, p^0_U = \{p^j - p^i\}_{(i,j)\in I^*}\,. \tag{5.5}$$

Giacché i cobordi delle 0-cocatene sono 1-cocicli e l'applicazione

$$\partial : p^0_U \in \mathcal{S}^0_\Gamma(U) \to \partial\, p^0_U \in Z^1_\Gamma(U) \tag{5.6}$$

è un R-omomorfismo (detto *omomorfismo di cobordo*), si ha che *lo spazio dei cobordi,* $E^1_\Gamma(U) = \partial\, \mathcal{S}^0_\Gamma(U)$, *è un sottospazio dello spazio* $Z^1_\Gamma(U)$ *degli* 1-*cocicli.*

Denotiamo con $\mathcal{H}^1_\Gamma(U)$ lo spazio quoziente $Z^1_\Gamma(U)/\partial\, \mathcal{S}^0_\Gamma$, chiamato *lo spazio di coomologia* 1-*dimensionale di* (V_n, Γ) *relativo al ricoprimento* U *ed a valori nel fascio* $\mathcal{S}_\Gamma$.

Sia ora $\mathfrak{A}$ l'insieme dei ricoprimenti aperti propri di V_n. Ricordiamo (cfr. [7]) che $U' = \{U'_{i'}\}_{i'\in I'}$ si dice un raffinamento di $U = \{U_i\}_{i\in I}$, e si scrive $U \geq U'$, se esiste un'applicazione (detta di *raffinamento* relativa ad U e U'):

$$t : i' \in I' \to t(i') \in I\,, \tag{5.7}$$

tale che:

$$i' \in I' \Rightarrow U'_{i'} \subseteq U_{t(i')}\,. \tag{5.8}$$

Giacché la relazione di raffinamento, $\geq$, così ottenuta in $\mathfrak{A}$ è notoriamente (cfr. [7]) riflessiva, transitiva e filtrante, l'insieme $\mathfrak{A}$, dotato di tale relazione, è un insieme preordinato e filtrante.

Se $U' = \{U'_{i'}\}_{i' \in I'}$ è un qualsiasi raffinamento proprio di U e t: $I' \to I$ è un'applicazione di raffinamento relativa ad U e U', sia

$$t^{U}_{U'} : p^1_U \in Z^1_\Gamma(U) \to t^{U}_{U'}(p^1_U) \in Z^1_\Gamma(U') \tag{5.9}$$

l'applicazione che all'1-cociclo $p^1_U = \{p_{ij}\}_{(i,j) \in I^*}$ relativo ad U fa corrispondere l'1-cociclo relativo ad U':

$$p'^{1t}_{U'} = t^{U}_{U'}(p^1_U) = \{p'^{t}_{i'j'} = p_{t(i')t(j')|U'_{i'} \cap U'_{j'}}\}_{(i',j') \in I'^*} \in Z^1_\Gamma(U') . \tag{5.9'}$$

Tale applicazione è ovviamente un R-omomorfismo (detto *omomorfismo di restrizione mediante t*) di $Z^1_\Gamma(U)$ in $Z^1_\Gamma(U')$ ed è tale che

$$t^{U}_{U'}(E^1_\Gamma(U)) \subseteq E^1_\Gamma(U') .$$

Pertanto essa induce l'omomorfismo quoziente

$$T^{U}_{U'} : [p^1_U] \in \mathcal{H}^1_\Gamma(U) \to [t^{U}_{U'}(p^1_U)] \in \mathcal{H}^1_\Gamma(U') , \tag{5.10}$$

essendo $[p^1_U]$ la classe di coomologia $\in \mathcal{H}^1_\Gamma(U)$ determinata dall'1-cociclo $p^1_U \in Z^1_\Gamma(U)$.

Proviamo che $T^{U}_{U'}$ è indipendente dall'applicazione di raffinamento t relativa ad U e U', cioè che se $\tau : I' \to I$ è un'altra applicazione di raffinamento relativa ad U e U' e se $\mathcal{T}^{U}_{U'} : \mathcal{H}^1_\Gamma(U) \to \mathcal{H}^1_\Gamma(U')$ è l'omomorfismo determinato da τ col procedimento sopra seguito, risulta $T^{U}_{U'} = \mathcal{T}^{U}_{U'}$.

Infatti, ponendo nella (5.2) (si ricordi che p^1_U è un 1-cociclo) prima $i = t(i')$, $j = \tau(i')$, $\ell = \tau(j')$ e poi $i = t(i')$, $j = t(j')$, $\ell = \tau(j')$, $\forall\, i', j' \in I'$ tali che $U'_{i'} \cap U'_{j'} \neq \varnothing$, si hanno le relazioni:

$$p_{t(i')\tau(i')} + p_{\tau(i')\tau(j')} + p_{\tau(j')t(i')} = 0 \quad \text{in} \quad U_{t(i')} \cap U_{\tau(i')} \cap U_{\tau(j')} \neq \varnothing$$

e

$$p_{t(i')t(j')} + p_{t(j')\tau(j')} + p_{\tau(j')t(i')} = 0 \quad \text{in} \quad U_{t(i')} \cap U_{t(j')} \cap U_{\tau(j')} \neq \varnothing ,$$

dalle quali si ha che

$$p_{t(i')t(j')} - p_{\tau(i')\tau(j')} = p_{t(i')\tau(i')} - p_{t(j')\tau(j')} \quad \text{in} \quad U'_{i'} \cap U'_{j'} .$$

Pertanto, giacché la famiglia di funzioni relativa ad U'

$$p'^{0}_{U'} = \{p_{i(i')\pi(i')}\}_{i' \in I'} \text{ appartiene a } \mathcal{F}^{0}_{\Gamma}(U'),\ \forall\, p^{1}_{U} \in Z^{1}_{\Gamma}(U)$$

si ha

$$t^{U}_{U'}(p^{1}_{U}) - \tau^{U}_{U'}(p^{1}_{U}) = \partial\, p'^{0}_{U'} \in \partial\, \mathcal{F}^{0}_{\Gamma}(U'),$$

da cui segue immediatamente che $T^{U}_{U'} = \mathcal{T}^{U}_{U'}$, e cioè che l'omomorfismo (5.10) non dipende dall'applicazione di raffinamento t relativa a U e U', ma soltanto da U e U'.

Si prova altresì che

$$T^{U}_{U} = \text{identità},\ \forall\, U \in \mathcal{U}\,; \tag{5.11}$$

$$T^{U'}_{U''} \circ T^{U}_{U'} = T^{U}_{U''},\quad \forall\, U \geq U' \geq U''.$$

Pertanto, se si associa ad ogni $U \in \mathcal{U}$ lo spazio di coomologia $\mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U)$ e ad ogni U, U' tali che $U \geq U'$ l'omomorfismo $T^{U}_{U'} : \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U) \to \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U')$, si ottiene il sistema diretto di spazi vettoriali $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U), T^{U}_{U'}\}$.

Denotiamo con $\mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(V_n, \mathcal{F}_{\Gamma}) = \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}$ lo spazio di coomologia 1-dimensionale di (V_n, Γ) a coefficienti in $\mathcal{F}_{\Gamma}$ (che chiameremo anche lo *spazio di coomologia 1-dimensionale delle funzioni a gradiente parallelo rispetto a* Γ), cioè il limite induttivo del suddetto sistema diretto, che notoriamente (cfr. [7]) è uno spazio vettoriale sul campo reale **R**, dipendente soltanto da V_n e dal fascio $\mathcal{F}_{\Gamma}$.

Ricordiamo infine (cfr. [3], [4]) che se, $\forall\, U \in \mathcal{U}$, con

$$T^{U} : \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U) \to \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}$$

denotiamo l'*omomorfismo canonico* di $\mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U)$ in $\mathcal{H}^{1}_{\Gamma}$, valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} T^{U'} \circ T^{U}_{U'} = T^{U}, \quad \forall\, U, U' \text{ con } U \geq U'\,; \\ T^{U}([p^{1}_{U}]) = T^{\bar{U}}([p^{1}_{\bar{U}}]) \Leftrightarrow \exists\, U'/U \geq U',\ \bar{U} \geq U', \\ T^{U}_{U'}([p^{1}_{U}]) = T^{\bar{U}}_{U'}([p^{1}_{\bar{U}}])\,; \\ \bigcup_{U \in \mathcal{U}} T^{U}(\mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U)) = \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}. \end{cases} \tag{5.12}$$

6. - Isomorfismo tra H^2_Γ e $\mathcal{H}^1_\Gamma$.

Ci proponiamo ora di dimostrare che

I. - *Lo spazio* H^2_Γ *di coomologia dei campi di 2-getti omogenei di* (V_n, Γ) *è isomorfo allo spazio* $\mathcal{H}^1_\Gamma$ *di coomologia 1-dimensionale delle funzioni a gradiente parallelo in* (V_n, Γ).

A tal fine consideriamo un campo di 2-getti omogenei $\omega \in C^2_\Gamma$. Dalla definizione di campo di 2-getti omogenei chiuso in (V_n, Γ) (v. n. 4) segue facilmente che esiste una famiglia di funzioni $f_U = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$, con $U = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto proprio di V_n ed $f_i\,(\forall\, i \in I)$ funzione differenziabile in U_i tale che

$$\delta^2 f_i = \omega \quad \text{in } U_i \,. \tag{6.1}$$

Diremo che una siffatta famiglia f_U è una *famiglia propria di funzioni relativa ad* U *associata ad* ω *in* (V_n, Γ). Ovviamente di famiglie di funzioni associate ad ω in (V_n, Γ) ne esistono infinite. I loro legami saranno posti in luce dalle considerazioni seguenti.

Fissata una di tali famiglie, poniamo $\forall\,(i, j) \in I^*$

$$f_{ij} = f_i - f_j \text{ in } U_i \cap U_j \neq \varnothing \,. \tag{6.2}$$

Per la (6.1) si ha

$$\delta^2 f_{ij} = 0 \quad \text{in} \quad U_i \cap U_j \,, \qquad \forall\,(i, j) \in I^* \,. \tag{6.3}$$

Giacché inoltre dalla (6.2) segue facilmente la (5.2), la famiglia $f^1_U = \{f_{ij}\}_{(i,j) \in I^*}$ è un 1-cociclo relativo ad U a coefficienti nel fascio $\mathfrak{F}_\Gamma$, si ha cioè

$$f^1_U = \{f_{ij}\}_{(i,j) \in I^*} \in Z^1_\Gamma(U) \,. \tag{6.4}$$

Sia

$$f^1 = T^U([f^1_U]) \in \mathcal{H}^1_\Gamma \tag{6.5}$$

il corrispondente nell'omomorfismo canonico T^U: $\mathcal{H}^1_\Gamma(U) \to \mathcal{H}^1_\Gamma$ (cfr. n. 5) della classe di coomologia $[f^1_U] \in \mathcal{H}^1_\Gamma(U)$ determinata dall'1-cociclo f^1_U dianzi ottenuto.

Per ogni famiglia di funzioni f_U associata al dato campo $\omega \in C^2_\Gamma$, resta così fissato un determinato elemento di $\mathcal{H}^1_\Gamma$. Proveremo che tale elemento non varia al variare di f_U, cioè che se $\bar{f}_{\bar{U}} = \{(\bar{U}_{\bar{i}}, \bar{f}_{\bar{i}})\}_{\bar{i} \in \bar{I}}$ è un'altra famiglia di funzioni associata ad ω risulta

$$f^1 = T^U([f^1_U]) = T^{\bar{U}}([\bar{f}^1_{\bar{U}}]) = \bar{f}^1, \tag{6.6}$$

ove si sono denotati con $\bar{f}^1_{\bar{U}}$ l'1-cociclo relativo ad $\bar{U}$ determinato da $\bar{f}_{\bar{U}}$ a norma della (6.2) e con $\bar{f}^1$ l'elemento di $\mathcal{H}^1_\Gamma$ determinato da $\bar{f}^1_{\bar{U}}$ mediante la (6.5).

A tal fine consideriamo un qualsiasi raffinamento aperto proprio $U' = \{U'_{i'}\}_{i' \in I'}$ sia di U che di $\bar{U}$ e siano

$$t\colon I' \to I, \quad \text{tale che} \quad \forall\, i' \in I' : U'_{i'} \subseteq U_{t(i')} \tag{6.7}$$

e

$$\bar{t}\colon I' \to \bar{I}, \quad \text{tale che} \quad \forall\, i' \in I' : U'_{i'} \subseteq \bar{U}_{\bar{t}(i')} \tag{6.7'}$$

due applicazioni di raffinamento relative rispettivamente a U e U' ed a $\bar{U}$ e U'.

Posto, $\forall\, i' \in I'$,

$$f'^{t}_{i'} = f_{t(i')|U'_{i'}} \quad \text{in} \quad U'_{i'} (\subseteq U_{t(i')}), \tag{6.8}$$

giacché risulta $\delta^2 f'^{t}_{i'} = \omega$ in $U'_{i'}$, la famiglia di funzioni relativa a U' $f'^{t}_{U'} = \{U'_{i'}, f'^{t}_{i'}\}_{i' \in I'}$ (che chiameremo la *restrizione di* f_U *ad* U' *mediante* t) è anch'essa associata ad ω in (V_n, Γ).

Naturalmente, posto $\forall\, i' \in I'$

$$\bar{f}'^{\bar{t}}_{i'} = \bar{f}_{\bar{t}(i')|U'_{i'}} \quad \text{in} \quad U'_{i'}, \tag{6.8'}$$

anche la famiglia $\bar{f}'^{\bar{t}}_{U'} = \{(U'_{i'}, \bar{f}'^{\bar{t}}_{i'})\}_{i' \in I'}$, restrizione di $\bar{f}_{\bar{U}}$ ad U' mediante $\bar{t}$, è associata ad ω in (V_n, Γ).

Osserviamo che $\forall\, (i', j') \in I'^*$ risulta:

$$f'^{t}_{i'j'} = f'^{t}_{i'} - f'^{t}_{j'} = f_{t(i')t(j')|U'_{i'} \cap U'_{j'}} \quad \text{in} \quad U'_{i'} \cap U'_{j'}, \tag{6.9}$$

e quindi (cfr. n. 5) che

$$(6.10) \qquad f'^{t1}_{U'} = \{f'^{i}_{i'j'}\}_{(i',j')\in I'^*} = \{f_{t(i')t(j')}|U'_{i'} \cap U'_{j'}\}_{(i',j')\in I'^*} = t^{U}_{U'}(f^1_U),$$

e cioè l'1-cociclo relativo ad U' determinato a norma della (6.2) dalla famiglia $f'^{t}_{U'}$, restrizione di f_U ad U' mediante t, coincide con l'1-cociclo relativo ad U' corrispondente nell'omomorfismo (5.9) $t^{U}_{U'} : Z^1_\Gamma(U) \to Z^1_\Gamma(U')$ dell'1-cociclo relativo ad U determinato dalla famiglia f_U a norma della (6.2).

Ne segue (cfr. n. 5) che

$$(6.11) \qquad f'^{t1} = T^{U'}([f'^{t1}_{U'}]) = T^{U'} \circ T^{U}_{U'}([f^1_U]) = T^{U}([f^1_U]) = f^1 \in \mathcal{H}^1_\Gamma,$$

cioè che *la classe di coomologia* $f'^{t1} \in \mathcal{H}^1_\Gamma$ *determinata, a norma della* (6.5), *dalla restrizione,* $f'^{t}_{U'}$ *di* f_U *ad* U' *mediante l'applicazione di raffinamento t relativa ad* U *e* U' *coincide con la classe di coomologia* $f^1 \in \mathcal{H}^1_\Gamma$ *determinata mediante la* (6.5) *da* f_U *e pertanto non varia al variare di t.*

Analogamente si ha che

$$(6.11') \qquad \bar{f}'^{\bar{t}1} = \bar{f}^1 \in \mathcal{H}^1_\Gamma .$$

Osserviamo ora che, posto $\forall\, i' \in I'$

$$p'_{t(i')\bar{t}(i')} = \bar{f}'^{\bar{t}}_{i'} - f'^{t}_{i'} = (\bar{f}_{\bar{t}(i')} - f_{t(i')})\,|\,U'_{i'} \quad \text{in} \quad U'_{i'},$$

giacché risulta

$$\delta^2\, p'_{t(i')\bar{t}(i')} = 0 \qquad \text{in} \quad U'_{i'}, \qquad \forall\, i' \in I',$$

la famiglia di funzioni relativa ad U' $p'^{o}_{U'}{}^{t\bar{t}} = \{p'_{t(i')\bar{t}(i')}\}_{i'\in I'}$ è una 0-cocatena relativa ad U' a coefficienti in $\mathcal{S}_\Gamma$, cioè

$$p'^{o}_{U'}{}^{t\bar{t}} \in \mathcal{S}^{\cdot}_\Gamma(U').$$

Giacché inoltre risulta $\forall\,(i', j') \in I'^*$

$$\bar{f}'^{\bar{t}}_{i'j'} - f'^{t}_{i'j'} = (\bar{f}_{\bar{t}(i')\bar{t}(j')} - f_{t(i')t(j')})\,|U'_{i'} \cap U'_{j'} =$$

$$= (p'_{t(i')\bar{t}(i')} - p'_{t(j')\bar{t}(j')})\,|U'_{i'} \cap U'_{j'} \qquad \text{in} \quad U'_{i'} \cap U'_{j'} \neq \varnothing,$$

e cioè

$$\tilde{f}'^{1}_{U'} - f'^{1}_{U'} = \partial\, p'^{0}_{U'} \in \partial\, \mathfrak{F}^{0}_{\Gamma}(U') ,$$

ne discende che

$$[\tilde{f}'^{1}_{U'}] = [f'^{1}_{U'}] \in \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}(U')$$

ed infine, per le (6.11) e (6.11'), che

$$\tilde{f}^{1} = f^{1} \in \mathcal{H}^{1}_{\Gamma} .$$

Si è così provata la (6.6), e cioè si è dimostrato che la *classe di coomologia* $\in \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}$ *determinata a norma della* (6.5) *da una famiglia di funzioni associata in* (V_n, Γ) *al dato campo di 2-getti omogenei* $\omega \in C^{2}_{\Gamma}$ *non varia al variare della famiglia di funzioni associata ad* ω. Resta allora determinata l'applicazione

$$\varphi: \ \omega \in C^{2}_{\Gamma} \to f^{1} \in \mathcal{H}^{1}_{\Gamma} , \tag{6.12}$$

che si verifica facilmente essere un R-omomorfismo.

Proviamo che il nucleo $\ker\varphi$ di tale omomorfismo coincide con lo spazio E^{2}_{Γ} dei campi di 2-getti omogenei esatti in (V_n, Γ): infatti se $\omega \in \ker\varphi$, cioè se $\omega \in C^{2}_{\Gamma}$ e $\varphi(\omega) = 0 \in \mathcal{H}^{1}_{\Gamma}$, l'1-cociclo $f^{1}_{U} = \{f_{ij}\}_{(i,j)\in I^*}$ determinato mediante la (6.2) da una famiglia di funzioni f_U associata in (V_n, Γ) a ω è il cobordo di una 0-cocatena p^{0}_{U} relativa ad U a coefficienti in $\mathfrak{F}_{\Gamma}$, per cui si ha, $\forall (i,j) \in I^*$:

$$f_{ij} = f_i - f_j = p_i - p_i \qquad \text{in } U_i \cap U_j \neq \varnothing , \tag{6.13}$$

e quindi

$$f_i + p_i = f_j + p_j \qquad \text{in } U_i \cap U_j . \tag{6.14}$$

Ponendo allora $f = f_i + p_i$ in U_i, $\forall\, i \in I$, si ottiene una ben determinata funzione differenziabile su V_n tale, per le (5.1) e (6.1), che $\delta^2 f_{|U_i} = \delta^2(f_i + p_i) = \delta^2 f_i = \omega_{|U_i}$. Pertanto $\omega \in E^{2}_{\Gamma}$ e quindi $\ker\varphi \subseteq E^{2}_{\Gamma}$. Essendo poi ovvia l'inclusione opposta si ha $\ker\varphi = E^{2}_{\Gamma} = \delta^2\Omega$.

Per il teorema fondamentale sugli omomorfismi tra spazi vettoriali, dall'omomorfismo φ si ottiene il monomorfismo

$$\Phi : [\omega] \in C^2_\Gamma / E^2_\Gamma = H^2_\Gamma \to \varphi(\omega) = f^1 \in \mathcal{H}^1 \ . \tag{6.15}$$

Ci proponiamo di dimostrare che Φ è un isomorfismo, per la qual cosa ci resta da provare solo che esso è surgettivo, ossia che dato un qualunque elemento $p^1 \in \mathcal{H}^1_\Gamma$ esistono un campo di 2-getti $\omega \in C^2_\Gamma$ ed una famiglia di funzioni f_U associata in (V_n, Γ) ad ω tali che, detto f^1_U l'1-cociclo determinato mediante la (6.2) da f_U, risulti

$$f^1 = T^U([f^1_U]) = p^1 \ .$$

A tal fine osserviamo che, $\forall\, p^1 \in \mathcal{H}^1_\Gamma$, per l'ultima delle relazioni (5.12), esiste almeno un $U = \{U_i\}_{i \in I} \in \mathfrak{A}$ tale che

$$p^1 \in T^U(\mathcal{H}^1_\Gamma(U)) \ ,$$

per cui $(T^U)^{-1}(p^1)$ è $\neq \emptyset$ ed è contenuto in $\mathcal{H}^1_\Gamma(U)$. Sia $[p^1_U]$, con $p^1_U = \{p_{ij}\}_{(i,j) \in I^*} \in Z^1_\Gamma(U)$, un qualsiasi elemento di $(T^U)^{-1}(p^1)$, cioè un elemento di $\mathcal{H}^1_\Gamma(U)$ tale che

$$p^1 = T^U([p^1_U]) \ .$$

Sia inoltre $\{\varphi_m\}_{m \in N}$ una partizione dell'unità di V_n relativa al ricoprimento U e sia h: $m \in N \to h(m) \in I$ un'applicazione (di raffinamento relativa ad U e $\{\sup \varphi_m\}_{m \in N}$) tale che $\forall\, m \in N$: $\sup \varphi_m \subseteq U_{h(m)}$. Consideriamo ora, $\forall\, i \in I$ e $\forall\, m \in N$, la funzione definita in U_i nel modo seguente:

$$f_{im} = \begin{cases} = 0 & \text{in } U_i - U_{h(m)} \\ = p_{ih(m)} \cdot \varphi_m & \text{in } U_i \cap U_{h(m)} \ . \end{cases} \tag{6.16}$$

Essa è differenziabile in U_i, essendo ivi localmente differenziabile (infatti se $P \in U_i \cap U_{h(m)}$ è differenziabile nell'aperto $U_i \cap U_{h(m)}$ di U_i come prodotto di funzioni differenziabili; se $P \in U_i - U_{h(m)}$, giacché $\sup \varphi_m \subseteq U_{h(m)}$, P appartiene anche all'insieme $U_i - \sup \varphi_m$, che è un aperto di U_i, in cui f_{im} è differenziabile perché ivi identicamente nulla).

Osserviamo che per la (6.16) risulta $\overset{\circ}{\sup} f_{im} \subseteq \overset{\circ}{\sup} \varphi_m$, per cui essendo $\{\overset{\circ}{\sup} \varphi_m\}_{m \in N}$ un ricoprimento localmente finito di V_n,

$\{\overset{\circ}{\sup} f_{im}\}_{m\in N}$ è un ricoprimento localmente finito di U_i. Perciò $\forall P \in U_i$ esistono un intorno aperto U_P di P ed una sottoinsieme finito N_P di N tali che in U_P si abbia $\sum_{m\in N} f_{im} = \sum_{m\in N_P} f_{im}$. Pertanto ha senso considerare la funzione definita in U_i

$$f_i = \sum_{m\in N} f_{im}\,, \tag{6.17}$$

che risulta differenziabile in U_i, essendolo ivi localmente (perché $\forall P \in U_i$ essa è differenziabile nell'aperto U_P dianzi citato come somma di un numero finito di funzioni differenziabili). Si è così ottenuta la famiglia di funzioni $f_U = \{U_i, f_i\}_{i\in I}$ relativa al ricoprimento U. Dalla (6.16), per le (5.2) e (5.4), si ricava, $\forall (i,j) \in I^*$,

$$f_{im} - f_{jm} = (p_{ih(m)} - p_{jh(m)}) \cdot \varphi_m = p_{ij} \cdot \varphi_m \quad \text{in} \quad U_i \cap U_j \cap U_{h(m)}\,,$$

per cui, essendo $f_{im} = f_{jm} = \varphi_m = 0$ in $U_i \cap U_j - U_{h(m)}$, si ha

$$f_{im} - f_{jm} = p_{ij} \cdot \varphi_m \qquad \text{in} \quad U_i \cap U_j\,, \tag{6.18}$$

da cui, sommando per m variabile in N e tenendo conto che $\sum_{m\in N} \varphi_m = 1$, si ottiene $\forall (i,j) \in I^*$

$$f_i - f_j = p_{ij} \qquad \text{in} \quad U_i \cap U_j \neq \varnothing\,. \tag{6.19}$$

Pertanto l'1-cociclo determinato mediante la (6.2) dalla famiglia di funzioni $f_U = \{f_i\}_{i\in I}$ dianzi ottenuta coincide con l'1-cociclo p^1_U. Inoltre dalla (6.19), essendo $\delta^2 p_{ij} = 0$, segue che

$$\delta^2 f_i = \delta^2 f_j \quad \text{in} \quad U_i \cap U_j \neq \varnothing\,,\ \forall (i,j) \in I^*\,. \tag{6.20}$$

Ponendo allora $\omega = \delta^2 f_i$ in U_i, $\forall i \in I$, si ottiene un campo ω di 2-getti omogenei differenziabile e chiuso in (V_n, Γ) a cui la suddetta famiglia di funzioni (relativa ad U) f_U risulta associata in (V_n, Γ).

Per la (6.19) l'1- cociclo f^1_U determinato da f_U mediante la (6.2) coincide con l'1-cociclo p^1_U. Ne segue che $\varphi(\omega) = f^1 = T^U([f^1_U]) = T^U([p^1_U]) = p^1$ e quindi che $\Phi([\omega]) = p^1$. Si è così provato che $\forall p^1 \in \mathcal{H}^1_\Gamma$ esiste $\omega \in C^2_\Gamma$ tale che $\Phi([\omega]) = p^1$. Pertanto il monomorfismo $\Phi : H^2_\Gamma \to \mathcal{H}^1_\Gamma$ definito dalla (6.15) è un isomorfismo e la I è completamente dimostrata.

7. - Esempi.

In questo numero ci proponiamo di mostrare che in generale lo spazio di coomologia H^2_Γ (e quindi anche lo spazio $\mathcal{H}^1_\Gamma \simeq H^2_\Gamma$) dipende in modo essenziale dalla connessione Γ e quindi dalla struttura differenziabile di V_n, a differenza dello spazio H^1 dei campi di 1-getti differenziabili, notoriamente dipendente soltanto dalla struttura topologica di V_n. Esamineremo, a tal fine, gli spazi di coomologia di alcune note varietà a connessione lineare simmetrica.

All'uopo, consideriamo il sistema:

$$\partial_{ars} f_a - \partial_{at} f_a \Gamma^t_{ars} = 0 \qquad \text{in} \quad (U_a, c_a)\,, \tag{7.1}$$

le cui condizioni di integrabilità, ricavate tenendo conto del teorema sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, sono:

$$\partial_{at} f_a \Gamma^t_{arsl} = 0 \qquad \text{in} \quad c_a(U_a)\,, \tag{7.2}$$

essendosi denotate con Γ^t_{arsl} le componenti relative alla carta (U_a, c_a) del tensore di curvatura della connessione Γ.

Osserviamo che se il sistema (7.2) è soddisfatto soltanto dalle funzioni localmente costanti, lo stesso accade per il sistema (7.1), onde lo spazio $\mathcal{H}^1_\Gamma$ (e quindi anche H^2_Γ) risulta isomorfo allo spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale di Cěch a coefficienti reali e quindi (cfr. la X di [7]) allo spazio H^1 di coomologia dei campi di 1-getti differenziabili su V_n.

Ciò accade, ad esempio, se su V_n esiste un tensore metrico riemanniano non degenere, le cui componenti, g_{ars}, relative ad ogni carta (U_a, c_a) dell'atlante universale di V_n, siano tali che:

$$\Gamma^t_{arsl} = k\,(\delta^t_l\, g_{ars} - \delta^t_s\, g_{arl})\,, \tag{7.3}$$

con k costante su V_n. Infatti, in tal caso, dal sistema (7.2), moltiplicandone ambo i membri per g^{rs}_a (elemento reciproco di g_{ars}), sommando per $r = 1, 2, \ldots, n$ e tenendo conto della (7.3), si ha:

$$n\,\partial_{at} f_a = \partial_{at} f_a\,,$$

da cui segue senz'altro che per $n > 1$ le funzioni f_a a gradiente parallelo in (U_a, Γ) sono tutte, e sole, le funzioni localmente costanti in U_a.

Si verifica facilmente che allo stesso risultato si perviene se Γ è la connessione di una metrica *localmente proiettivamente piatta* (cfr. [1] e [10]), cioè se esiste un tensore doppio covariante simmetrico non degenere le cui componenti, R_{aij}, in (U_a, c_a) siano tali che:

$$\Gamma^t_{arsl} = \frac{1}{n-1}(R_{ars}\,\delta^t_l - R_{arl}\,\delta^t_s)\,,$$

e, più in generale, se esiste un atlante in ogni carta del quale sia diverso da zero uno (almeno) dei determinanti aventi per elementi le componenti del tensore di curvatura con gli stessi valori di due fissati indici di covarianza.

Se invece il sistema (7.2), oltre che dalle funzioni localmente costanti, è soddisfatto anche da altre funzioni, lo stesso accade per il sistema (7.1), per cui lo spazio $\mathcal{H}^1$ (e quindi anche lo spazio H^1) risulta isomorfo ad un sottospazio *proprio* dello spazio $\mathcal{H}^1_\Gamma$ (e quindi anche ad un sottospazio *proprio* di H^2_Γ).

Ciò accade, ad esempio, se la connessione Γ è *localmente piatta* (cfr. [1] e [10]), cioè se il tensore di curvatura di Γ è identicamente nullo su V_n nel qual caso, come è noto, esiste un atlante $\{(U_a, c_a)\}_{a\in A}$, che non è restrittivo supporre numerabile e costituito da sferoidi, in ogni carta (U_a, c_a) del quale le componenti Γ^t_{ars} della connessione risultano identicamente nulle. Ne segue allora che in tale atlante i cambiamenti di coordinate sono lineari ed il sistema (7.1) diventa:

$$\partial_{ars} f_a = 0 \qquad \text{in} \quad (U_a, c_a)\,. \tag{7.4}$$

Pertanto, in tal caso, le funzioni f_a a gradiente parallelo in (U_a, Γ) sono le funzioni lineari, a coefficienti costanti in U_a, delle coordinate x^i_a relative alla carta (U_a, c_a) e quindi lo spazio vettoriale del fascio $\mathfrak{F}_\Gamma$ relativo a U_a, $\mathfrak{F}_{U_a}$, (cioè lo spazio delle funzioni a gradiente parallelo in (U_a, Γ)), risulta isomorfo a R^{n+1}, nell'isomorfismo determinato dall'omeomorfismo coordinato c_a. Giacché inoltre, $\forall\,(a, b) \in \in A \times A$ tale che $U_a \cap U_b \neq \varnothing$ ogni funzione f_{ab} a gradiente parallelo in $(U_a \cap U_b, \Gamma)$ è funzione lineare, a coefficienti localmente costanti in $U_a \cap U_b$, delle coordinate di un punto di $U_a \cap U_b$ in una qualunque delle carte (U_a, c_a) o (U_b, c_b), lo spazio vettoriale del fascio $\mathfrak{F}_\Gamma$ relativo a $U_a \cap U_b$, cioè $\mathfrak{F}_{U_a \cap U_b}$, risulta isomorfo a $\prod_{c\in C_{ab}} R^{n+1}_c$, essendosi denotato con C_{ab} l'insieme delle componenti connesse di $U_a \cap U_b$.

Ne consegue facilmente che, nel caso in esame, lo spazio H^2_Γ dei campi di 2-getti omogenei, come lo spazio $\mathcal{H}^1_\Gamma$ delle funzioni a gra-

diente parallelo in (V_n, Γ), è isomorfo alla potenza $(n+1)$-esima $(\mathcal{H}^1)^{n+1}$ dello spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti reali e quindi alla potenza $(n+1)$-esima $(H^1)^{n+1}$ dello spazio H^1 di coomologia dei campi di 1-getti differenziabili su V_n.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bishop R. L., Goldberg S. I., *Tensor Analysis on Manyfolds*, The MacMillan Company, New York 1968.

[2] De Rham G., *Variétés différentiables*, Act. Sci. et Ind. 1222, Paris, Hermann, 1960.

[3] Godement R., *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Act. Sci. et Ind. 1252, Paris, Hermann, 1958.

[4] Hirzebrucii F., *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1966.

[5] Tallini G., *Lezioni di Geometria Differenziale, Varietà riemanniane compatte*, Ist. Mat. Univ. Roma, 1962-63.

[6] Tallini G., *Lezioni di Istituzioni di Geometria Superiore*, Ist. Geom. Univ., Torino 1968.

[7] Tallini G., *Introduzione alla Coomologia a coefficienti in un fascio*, Conferenze del Sem. Mat. (117), Bari, 1969.

[8] Tallini G., *Una dimostrazione del teorema di De Rahm*, Conf. del Sem. Mat., Univ. (139), Bari, 1975.

[9] Weil A., *Variétés kählériennes*, Act. Sci. et Ind. 1267; Paris, Hermann, 1958.

[10] Yano K., Bochner S., *Curvature and Betti numbers*, Princeton, University Press, 1953.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, M. Curcio e V. Dalla Volta.

Rapporti tra i parametri cromatografici di iododerivati organici frazionati mediante le tecniche di adsorbimento e di ripartizione * - Nota II

Nota del socio ordinario MARIO COVELLO
e di ORESTE SCHETTINO, LYDIA FERRARA e PASQUALE FORGIONE

(Adunanza del 5 giugno 1976)

RIASSUNTO. — Si è studiata l'influenza della composizione di eluenti binari sui valori R_M di composti organici alogenati. Per ampi valori della composizione degli eluenti (in cui X_S indica la frazione molare del solvente polare — essendo il solvente diluente sempre esano) si è verificato l'andamento lineare dei grafici di R_M in funzione di log X_S.

La pendenza delle relative rette è connessa al meccanismo di adsorbimento molecolare ed alla natura dell'alogeno sostituente.

SUMMARY. — The effect of the composition of binary developing solvents on R_M values of alogenated organic compounds was investigated.

Linear Rm vs. (log X_S) relationships were obtained for wide composition ranges (X_S = mole fraction of polar solvent; diluting solvent: hexane).

The slope of the lines was related to the molecular mechanism of adsorption and to the halo-substituent.

La possibilità di correlare tra loro i diversi parametri che entrano in giuoco nel corso dello smistamento delle sostanze nella cromatografia su strato sottile è universalmente riconosciuta. Il frazionamento cromatografico rappresenta, in sostanza, la risultante dell'azione armonica di numerosi fattori, taluni agevolmente valutabili altri meno, altri ancora che sfuggono alla percezione del ricercatore.

La molteplicità di tali fattori spiega la molteplicità delle formule proposte dai numerosi studiosi che si sono prefissi di stabilire delle relazioni tra essi, onde pervenire a equazioni matematiche che possano essere utilizzate ai fini del calcolo e della interpretazione o previsione del comportamento cromatografico delle varie sostanze chimiche.

* Lavoro eseguito con il contributo del CNR.

Noi ci siamo occupati a più riprese dello studio di questo problema [1, 2, 3], focalizzando la nostra attenzione in modo speciale nelle indagini circa l'influenza esercitata dall'alosostituzione sul comportamento cromatografico delle sostanze organiche.

L'influenza dell'alogeno, infatti, sul comportamento cromatografico dei composti organici presenta aspetti peculiari per il notevole apporto connesso all'ingombro sterico considerevole, che si sovrappone alle varie altre azioni chimico-fisiche direttamente legate alla struttura della molecola organica.

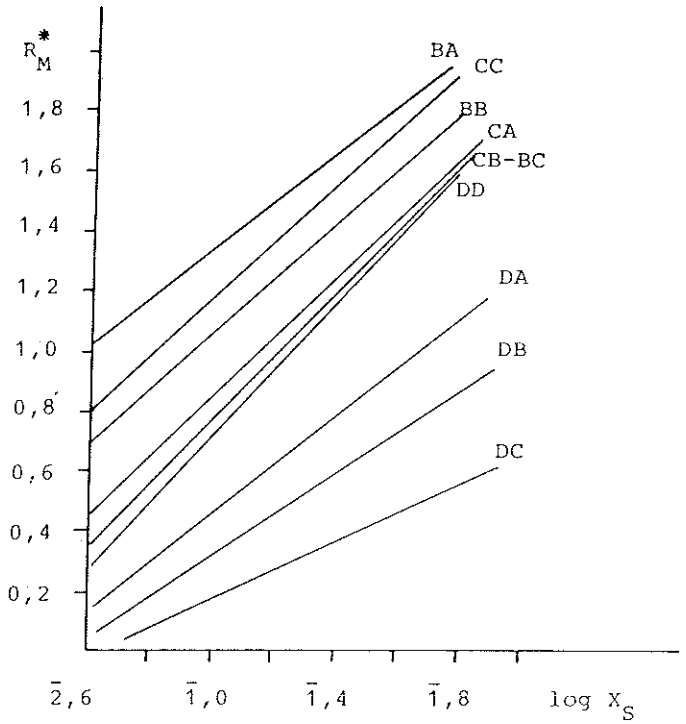


FIG. 1. - Variazione dell'R_M^o di alogenoderivati organici su strato sottile di gel di silice, in funzione di log X_S (S = metanolo) – diluente : esano.

In particolare nella più recente delle note citate ci siamo soffermati sull'influenza esercitata dall'alosostituzione sul meccanismo di interazione strato-sostanza particolarmente nei riguardi della correlazione tra i valori di R*m* misurati mediante cromatografia di adsorbimento e di partizione, relazione che, nei composti plurialogenati, si è visto approssimarsi piuttosto ad una equazione quadratica che a quella lineare proposta da OSCIK [5].

Altrettanto interessante ci è sembrato verificare i rapporti esistenti tra valore di R*m* e alogenosostituenti, in rapporto alla composizione di sistemi eluenti binari ed, eventualmente, a strati adsorbenti di composizione variabile.

All'influenza esercitata sullo smistamento di una data sostanza dal variare della composizione di un sistema eluente a più componenti, almeno limitatamente al caso più semplice di un sistema binario, fu data una formulazione matematica teorica da OSCIK e ROZYLO

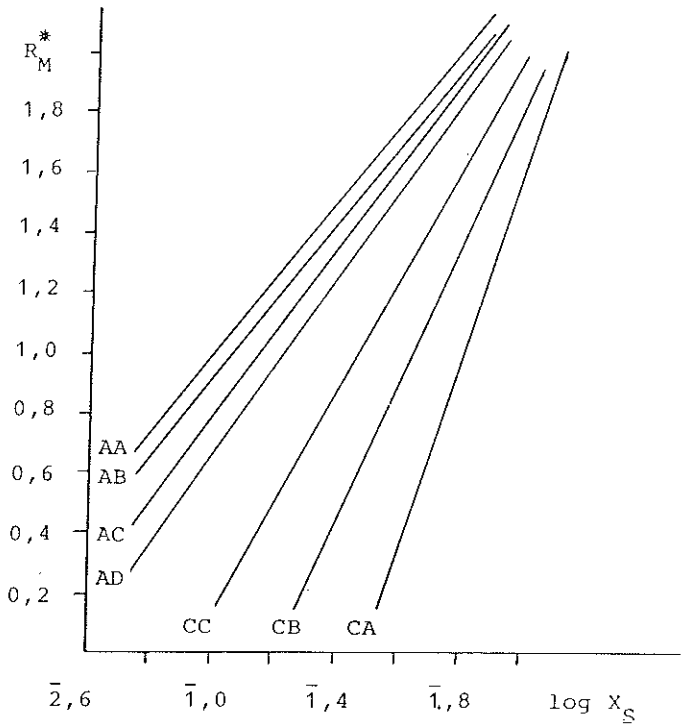


FIG. 2. - Variazione dell'R_M° di alogenoderivati organici su strato sottile di gel di silice, in funzione di log X_S (S = Acetato d'etile) – Diluente : esano.

[5]. Essi inoltre tennero conto delle interazioni tra soluto e solvente polare attraverso il parametro K, coefficiente di ripartizione ipotetico del soluto tra i due componenti della fase liquida.

SOCZEWINSCKI e coll. [7] d'altra parte, posero in rilievo la fondamentale importanza dei fenomeni di solvatazione, abbiano essi luogo alla superficie o nella massa della fase liquida, in quanto capaci di variare l'energia di adsorbimento della molecola del soluto. Tenendo conto di tali fenomeni essi pervennero a stabilire la seguente relazione,

che lega il valore di *Rm* al log. X_s (essendo X_s la frazione molare del componente polare di un solvente di sviluppo binario).

$$Rm = \frac{1 - R_m}{R_f} = \log \frac{K_{Az}\, X_{As}}{K_{As}\, K_{As}} - 2 \log X_s$$

in cui

$$K_{AZ} = \frac{X_{AZ}}{X_A\, X_Z} = \text{costante di adsorbimento del soluto}$$

$$K_{AS} = \frac{X_{AS}}{X_A\, X_S} = \text{costante di assorbimento del solvente}$$

La verifica sperimentale dell'equazione, eseguita dagli stessi AA., dimostrò l'esistenza di una linearità nella funzione $Rm = f(\log Xs)$ per

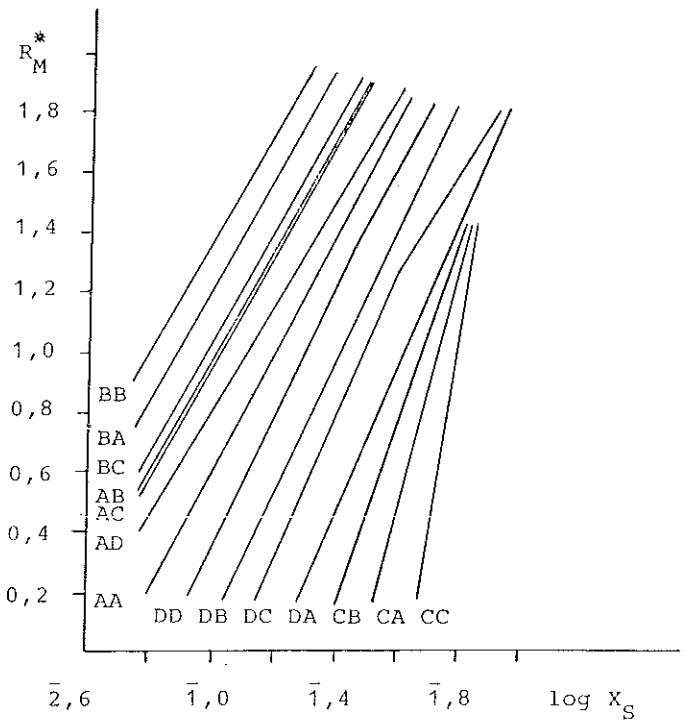


FIG. 3. - Variazione dell'R^*_M di alogenoderivati organici su strato sottile di gel di silice in funzione di log X_S (S = Diossano) – Diluente : esano.

ampi intervalli di composizione della miscela eluente, mentre le pendenze delle rette potevano essere poste in relazione al meccanismo molecolare dell'adsorbimento.

Ci è sembrato, perciò, che la medesima equazione potesse consentirci di ottenere valide indicazioni circa l'influenza esercitata dall'alogenosostituente in relazione ai rapporti contraibili con sistemi eluenti binari, secondo il quesito cui più sopra si è accennato. Abbiamo pertanto condotto una verifica sperimentale eseguendo il frazionamento

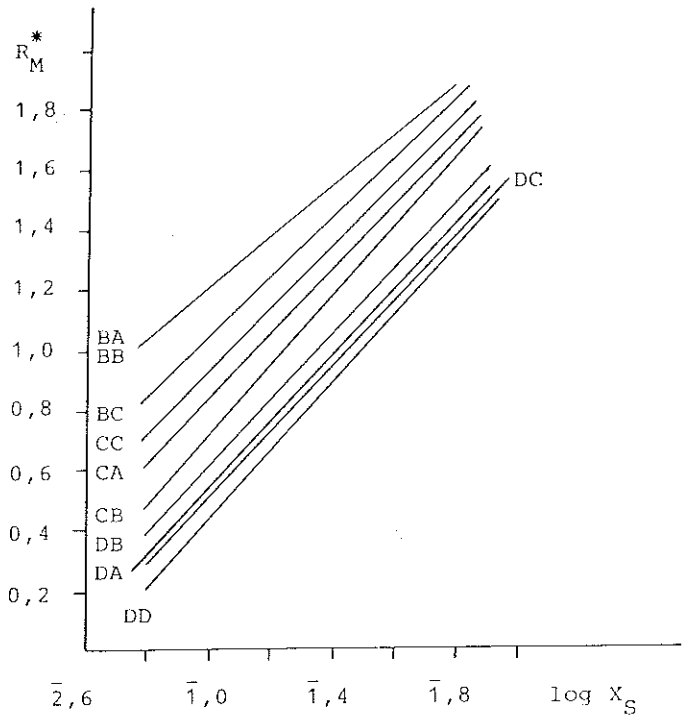


FIG. 4. - Variazione dell'R_M° di alogenoderivati organici su strato sottile di cellulosa, in funzione di log X_S (S = Metanolo) – Diluente : esano.

cromatografico di alogenoderivati organici, alcuni dei quali sintetizzati da uno di noi e coll. [4] operando su strati sottili a composizione uniforme o variabile al fine di valutare la possibilità di estensione per l'applicazione più generale possibile dei principi.

PARTE SPERIMENTALE.

Il frazionamento cromatografico su strati sottili è stato eseguito su lastre pronte all'uso Merck, limitatamente alle esperienze condotte su strato uniforme. Le lastre a composizione variabile sono state, invece preparate in laboratorio con la tecnica già descritta nella nota precedente [3]. Esse sono state sempre attivate per riscaldamento in stufa ad aria a 140 °C.

Nel corso della sperimentazione si è operato in modo da mantenere la massima uniformità delle condizioni sperimentali, particolarmente per quanto riguarda la temperatura ambiente, la sovrasatura-

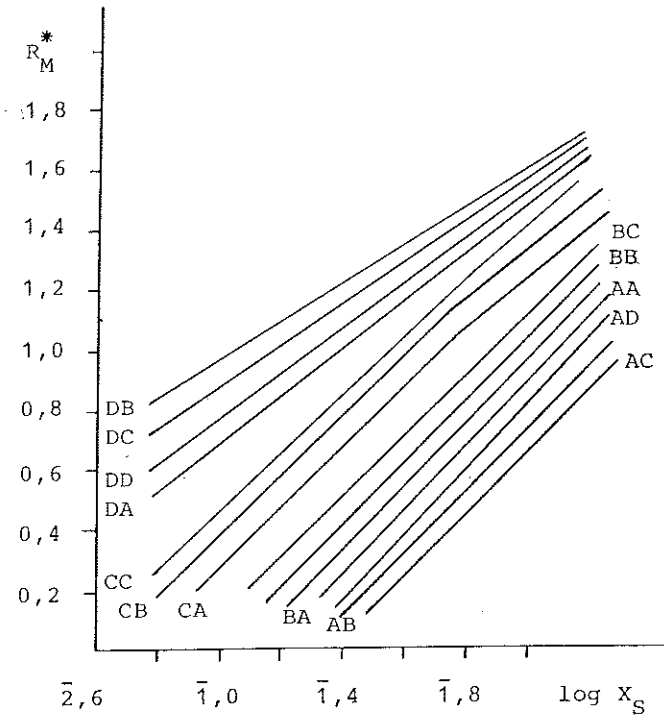


FIG. 5. - Variazione dell'R_M^o di alogenoderivati organici su strato sottile di cellulosa, in funzione di log X_S (S = Diossano) – Diluente : esano.

zione delle camera di sviluppo e la corsa del solvente che è stata sempre di circa 16 cm.

La tabella I raccoglie i dati relativi alla rivelazione delle macchie delle sostanze cromatografiche, contrassegnate con i simboli che le identificano nei grafici che seguono, e che sono elencati nella tabella II che riassume i principali parametri sperimentali.

TABELLA I

Reattivi rivelatori

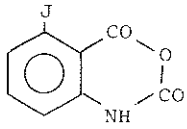
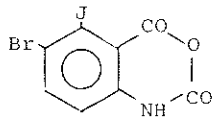
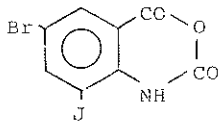
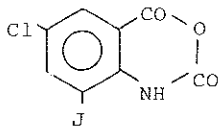
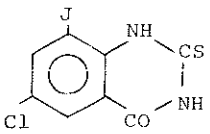
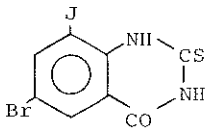
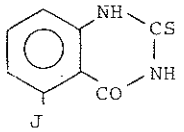
A) Nitroprussiato in soluzione alcalina (+ NaOH + H_2O_2): dà macchie con colorazione variante dal rosa al violetto intenso.

B) Verde bromocresolo + $AgNO_3$: dà macchie giallo-brune.

C) Verde bromocresolo, soluzione idroalcoolica: macchie gialle.

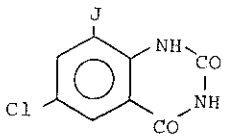
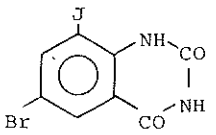
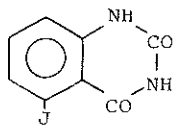
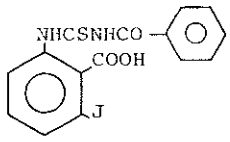
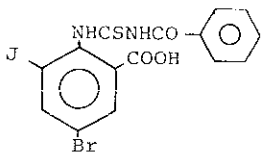
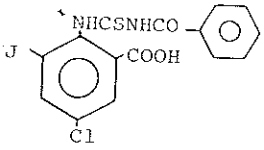
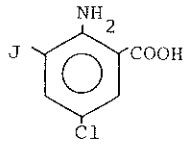
TABELLA II

*Coefficienti angolari delle rette rappresentanti la variazione dell'*Rm *in funzione di* log. Xs *per gli alogenoderivati studiati*

Prodotto	Simbolo	Gel di silice			Cellulosa		Allumina		Gel di silice Cellulosa
		Metanolo	Etile Acetato	Diossano	Metanolo	Diossano	Metanolo	Etile Acetato	Metanolo
	AA	—	1,2	2	—	1,0	2,3	0,9	1,0
	AB	—	1,5	2	—	1,0	2,0	0,8	1,0
	AC	—	1,3	2	—	1,0	2,2	0,8	1,0
	AD	—	1,2	1,8	—	1,0	2,3	0,8	1,1
	BA	0,8	—	2	0,8	1,0	1,8	0,8	2,0
	BB	1,0	—	2	0,8	1,0	2,0	0,8	1,3
	BC	1,1	—	2	1,0	1,0	2,2	0,9	1,3

Segue: TABELLA II

*Coefficienti angolari delle rette rappresentanti la variazione dell'*Rm *in funzione di* log. Xs *per gli alogenoderivati studiati*

Prodotto	Simbolo	Gel di silice			Cellulosa		Allumina		Gel di silice Cellulosa
		Metanolo	Etile Acetato	Diossano	Metanolo	Diossano	Metanolo	Etile Acetato	Metanolo
	CA	1,0	3,0	3	1,0	0,9	3,0	1,0	—
	CB	1,1	2,5	3	1,1	0,9	3,3	1,0	—
	CC	1,0	2,0	3	1,0	0,9	2,9	1,1	—
	DA	0,9	—	2,5	1,0	0,8	—	1,0	—
	DB	0,7	—	2,5	1,0	0,6	—	1,0	—
	DC	0,5	—	2,5	1,0	0,7	—	1,0	—
	DD	1,1	—	2,5	1,0	0,7	—	1,6	—

I risultati ottenuti sono riportati graficamente nei diagrammi delle Figg. 1-8, in cui compaiono in ascissa i valori di log X_s ed in ordinata i valori $R^*_m = -(Rm - 1)$.

Quest'ultima notazione è stata impiegata con finalità esclusivamente grafiche, al fine di rendere progressiva in senso positivo la scala dei valori figuranti in ordinate.

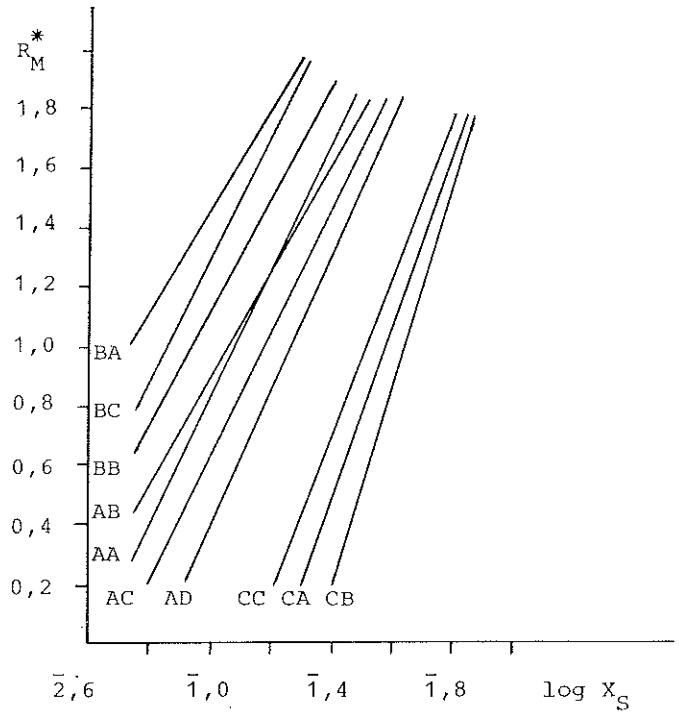


FIG. 6. - Variazione dell'R^*_M di alogenoderivati organici su strato sottile di allumina, in funzione di log X_s (S = Metanolo) – Diluente : esano.

RISULTATI E DISCUSSIONE.

I grafici delle figg. 1-8, ci consentono di constatare come, anche per i composti alosostituiti, la linearità della funzione $Rm = f(\log Xs)$ risulti in genere rispettata.

È altresì rilevabile come, in genere, al crescere del peso molecolare dell'alogeno, sia legato un abbassamento della pendenza della retta $Rm = f(\log Xs)$. Tenendo presente che, di solito un aumento della pendenza della retta rappresentativa della funzione suddetta viene interpretata come effetto di fenomeni di solvatazione nella fase mo-

bile, sembra agevole poter concludere che nel caso presente l'effetto sterico/ponderale dell'atomo dell'alogeno influisce nel senso di una azione di ostacolo nei riguardi degli stessi fenomeni di solvatazione. A parità della rimanente struttura chimica tende ad attenuarsi, ad esempio, la propensione a formarsi di complessi di solvatazione, con solventi donatori di elettroni del tipo *cicloesano-acqua* (fenomeno strettamente analogo a quello che si verifica al diminuire di gruppi idrofili in una molecola organica).

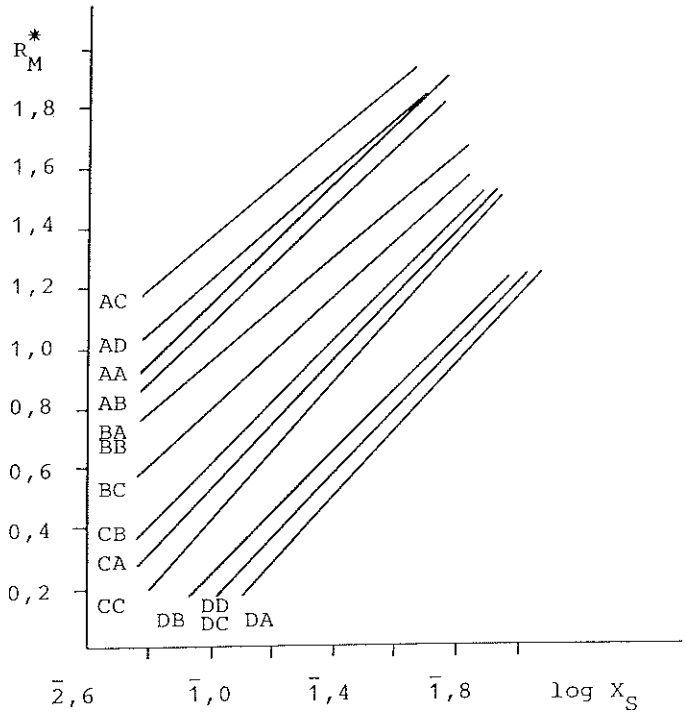


FIG. 7. - Variazione dell'$R_M^?$ di alogenoderivati organici su strato sottile di allumina, in funzione di log X_S (S = Etile acetato) – Diluente : esano.

La tendenza, pressoché generalizzata, ad una convergenza delle rette verso i valori più alti di R*m* (zona superiore dei grafici) è strettamente connessa alla variazione di pendenza delle rette medesime sopra sottolineata. Il fenomeno, peraltro, dà una immediata dimostrazione visiva dell'abbassamento di selettività che si verifica per i valori più bassi della frazione molare del componente polare del sistema eluente.

Al contrario, in taluni casi, si nota un brusco aumento della pendenza delle rette (v. fig. 8) per i valori elevati di log Xs il che va posto in relazione non solo all'aumento della frazione molare del solvente polare, in quanto il fenomeno in effetti non è generale ma occasionale.

È necessario invocare, in questi casi, in accordo con Soczewinscki, l'intervento di fenomeni di adsorbimento « multistrato ».

La variazione continua della composizione dello strato adsorbente, nei casi esaminati (fig. 8) pur comportando variazioni nella pendenza

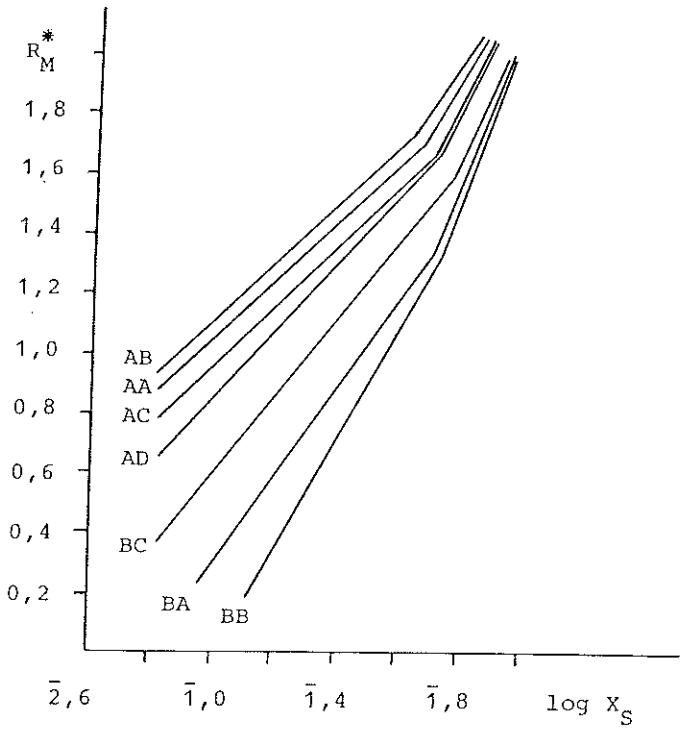


FIG. 8. - Variazione dell'R^*_M di alogenoderivati organici su strato sottile di gel di silice ⟶ cellulosa in funzione di log X_S (S = Metanolo) – Diluente : esano.

delle rette rispetto agli adsorbenti assoluti non pregiudica in generale l'applicabilità della relazione $R'm = f(Xs)$ che, salvo sporadiche eccezioni peraltro di dubbia interpretazione, rimane lineare.

Si può anche osservare, come del resto era prevedibile, che la influenza dell'alogeno è in genere tanto più marcata quanto minore è il peso molecolare della struttura ospitante. Ciò sembrerebbe, però, sotto certi aspetti, in contraddizione con l'osservazione di carattere generale formulata da Soczewinscky secondo cui l'effetto delle dimen-

sioni molecolari delle sostanze frazionate sui valori di R*m* risulti trascurabile. La contraddizione, tuttavia, può essere considerata solo apparente, ove si tenga conto che l'effetto sterico dell'alogeno non si riflette esclusivamente sui rapporti che la molecola del soluto è in grado di contrarre con lo strato adsorbente, ma anche, o forse soprattutto, sulle funzioni della stessa molecola ospitante.

BIBLIOGRAFIA

[1] Covello M., Piscopo E., Schettino O., Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. della Soc. Naz. di Scienze, lettere e Arti in Napoli, XXXI, 193 (1964).
[2] Covello M., La Rotonda M. I., Schettino O., *Ibid.*, XXXVIII, 151 (1971).
[3] Covello M., Schettino O., Ferrara L., Forgione P., *Ibid.*, XLI (1975).
[4] Covello M., Dini A., De Simone F., *Ibid.*, XXXVI, 61 (1969).
[5] Oscik J., Chojnacka G., Chem. Anal., **12**, 1213 (1967).
[6] Oscik J., Rozylo J. K., Chromatographia, **4**, 516 (1971).
[7] Soczewinski E., Anal. Chem., **41**, 199 (1969).

Accumulo di alcuni metalli pesanti nelle valve e nel corpo del *Mytilus galloprovincialis* *

Nota di MARIO D'AGOSTINO **, AUGUSTO BIONDI ***
e GIOVANNI SANSONE ***
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 5 giugno 1976)

RIASSUNTO. — Le concentrazioni di Cr, Cd e Pb, determinate nelle valve (Cv) e nel corpo del mollusco (Cc), mostrano che il potere disinquinante del *Mytilus galloprovincialis* rispetto ai suddetti elementi (Cv/Cc) cresce dal cromo al piombo, mentre l'indice di pericolosità degli stessi (Cc/Cv) aumenta in senso inverso. Viene messo in evidenza, inoltre, che la melanina che ricopre la superficie esterna delle valve non è coinvolta significativamente nel processo di incorporazione dei metalli pesanti.

SUMMARY. — The concentrations of Cr, Cd and Pb ions found in the valves (Cv) and the body (Cc) of the *Mytilus galloprovincialis* shows that the ratio Cv/Cc increases from Cr to Pb. Evidence is also presented that the melanin pigments covering the external surface of the valves is not significantly involved in the incorporation process of the aforesaid heavy metals.

Nell'ambito di ricerche tendenti a tracciare una mappa dell'inquinamento da metalli pesanti del Golfo di Napoli, sono state determinate le concentrazioni di cromo, cadmio e piombo, sia nelle valve (Cv) che nel corpo (Cc) di alcuni campioni di *Mytilus galloprovincialis*, prelevati tra Cuma e Bagnoli. I dati analitici raccolti in tabella I permettono di fare alcune considerazioni sia di ordine pratico che di ordine teorico. Prima di tutto, infatti, bisogna tener presente che il metallo inquinante incorporato nelle valve viene sottratto stabilmente all'ambiente, mentre quello che si accumula nel corpo rientra nella catena alimentare (piramide trofica) [1] e può giungere all'uomo sia

* Lavoro eseguito con il contributo della Regione Campania.
** Istituto di Chimica Organica della Facoltà di Scienze, Università di Napoli - Via Mezzocannone, 16, 80134 Napoli.
*** Istituto di Biorganica della Facoltà di Farmacia, Università di Napoli - Via L. Rodinò, 22, 80138 Napoli.

TABELLA I

Località	Concentrazione del metallo (μg/g di sostanza secca)						Potere disinquinante (Cv/Cc)			Indice di pericolosità (Cc/Cv)		
	Valve (Cv)			Corpo (Cc)								
	Cr	Cd	Pb	Cr	Cd	Pb	Cr	Cd	Pb	Cr	Cd	Pb
Cuma	11,5	5,0	60,6	7,8	1,4	19,7	1,5	3,6	3,1	0,7	0,3	0,3
Torre Gaveta	5,9	3,5	55,7	6,5	1,5	27,2	0,9*	2,3	2,0	1,1*	0,4	0,5
Punta Torre di Fumo	6,0	5,2	40,8	5,1	2,8	15,4	1,2	1,8	2,6	0,8	0,5	0,4
Marina di Vita Fumo	7,0	4,8	40,8	4,9	3,1	20,2	1,4	1,5	2,0	0,7	0,6	0,5
Miliscola	5,5	5,0	42,8	3,7	1,9	10,7	1,5	2,6	4,0	0,7	0,4	0,2
Capo Miseno	7,5	4,8	42,8	5,9	2,4	19,1	1,3	2,0	2,2	0,8	0,5	0,4
Porto di Miseno	6,0	3,0	65,0	3,2	1,8	18,6	1,9	1,7	3,5	0,5	0,6	0,3
Gerolomini	5,5	4,2	54,0	5,2	2,4	18,8	1,0	1,7	2,9	0,9	0,6	0,3
Bagnoli	10,9	3,6	80,9	7,5	1,7	85,0	1,4	2,1	0,9*	0,7	0,5	1,0*

* Di questi dati anomali non si è tenuto conto nel calcolo dei valori medi riportati in Tabella II.

direttamente, per ingestione dei mitili, che indirettamente, per ingestione di animali che a loro volta si nutrono di mitili. Ciò vuol dire che il rapporto Cv/Cc può essere preso come misura del potere disinquinante dei mitili rispetto ad un dato elemento e che il suo inverso (Cc/Cv) può essere considerato come un indice di pericolosità dell'elemento stesso.

L'esame della tabella II mostra che il potere disinquinante dei mitili cresce, mediamente, dal cromo al piombo, mentre l'indice di pericolosità di questi metalli, come è ovvio, aumenta in senso inverso. I valori anomali di Cv/Cc e di Cc/Cv per il cromo, nel campione di

TABELLA II

Metallo	Potere disinquinante medio (Cv/Cc)	Indice medio di pericolosità (Cc/Cv)
Cromo	1,4	0,7
Cadmio	2,1	0,5
Piombo	2,8	0,4

Torre Gaveta, e per il piombo, nel campione di Bagnoli (tabella I), si possono probabilmente attribuire ad un fenomeno di saturazione apparente. Come è noto gli ioni, prima di essere incorporati nelle valve, debbono diffondere, attraverso il mantello, nello strato di liquido extrapalleale [2]. Se, quindi, si preleva un campione di mitili poco dopo che questi si sono trovati in presenza di una forte carica inquinante (per eccessivo ristagno dell'acqua, conseguente a bonaccia, o per improvviso riversamento in mare di liquami), gli ioni inquinanti non hanno materialmente il tempo di raggiungere la cavità axtrapalleale e di partecipare alla formazione delle valve. Naturalmente è prevedibile che, anche in condizioni di equilibrio, debba esistere, per ogni metallo, una concentrazione di saturazione al disopra della quale il mitilo diventa inefficiente dal punto di vista dell'azione disinquinante ($Cv/Cc < 1$) e pericoloso per l'alimentazione ($Cc/Cv > 1$).

Per quanto concerne il meccanismo di accumulo è stata avanzata l'ipotesi che gli elementi in tracce potrebbero entrare a far parte della conchiglia anche come componenti di sostanze organiche [3]. Nell'ambito di questa ipotesi abbiamo preso in esame la possibilità che lo

strato di melanine che ricopre la superficie esterna delle valve giochi un ruolo significativo nell'incorporazione dei metalli pesanti. In effetti, però, l'analisi di valve private meccanicamente di tutto il pigmento ha fornito dati di concentrazione sostanzialmente analoghi a quelli delle valve integre. Una ulteriore prova della scarsa tendenza delle melanine a legare questi metalli si è avuta analizzando il « nero » di seppie pescate nelle stesse zone di prelevamento dei mitili. Il piombo, infatti, è risultato praticamente assente, mentre per cadmio e cromo si sono rilevate concentrazioni molto basse (rispettivamente 1,0 e 1,9 p.p.m.).

Parte sperimentale [4].

Preparazione e analisi dei campioni.

A) *Valve.* — Campioni di 10 g di valve, preventivamente seccate in stufa termoregolata a 100 °C e finemente polverizzate in mortaio di porcellana, vengono inceneriti per una notte in muffola a 450 °C in capsula di porcellana. Le ceneri vengono trattate con HNO_3 concentrato fino a completa dissoluzione del carbonato (circa 15 ml). A causa della violenta effervescenza che si manifesta durante la fase di acidificazione, si preferisce, prima dell'operazione, trasferire quantitativamente le ceneri dalla capsula in un beaker da 200-250 ml. A dissoluzione avvenuta si aggiungono 20-25 ml di acqua distillata, si riscalda per 5' a lenta ebollizione, si filtra attraverso un filtro di carta Whatman N. 42 e si porta a 100 ml con acqua distillata. Lo stesso procedimento si utilizza per i campioni di valve private dello strato di melanina mediante abrasione con carborundum.

B) *Molluschi.* — Campioni di circa 50 g di corpi di mollusco, accuratamente staccati dalle valve, privati del bisso e finemente triturati, vengono disposti in capsule di porcellana, preventivamente tarate, e seccati in stufa termoregolata a 100 °C fino a peso costante. La sostanza secca così ottenuta viene incenerita per una notte in muffola a 450 °C. Alle ceneri si aggiungono 5 ml di HNO_3 concentrato e, dopo breve digestione, 20-25 ml di acqua distillata. Si riscalda a lenta ebollizione per 5', si filtra con filtro di carta Whatman N. 42 e si porta a 100 ml con acqua distillata.

C) *Nero di seppia.* — Campioni di circa 10 g di nero di seppia, preventivamente seccato a peso costante in stufa termoregolata a

100 °C, vengono inceneriti in muffola, per una notte, a 450 °C. Si procede, poi, come per i campioni dei corpi di mollusco.

Nei campioni così ottenuti il piombo viene determinato con spettrofotometro monoraggio per assorbimento atomico Atomspek (Hilger e Watts); il cadmio e il cromo vengono determinati con spettrofotometro per assorbimento atomico a doppio raggio Perkin-Elmer (mod. 103). Le soluzioni standard di cadmio, cromo e piombo, preparate mediante opportune diluizioni dalle soluzioni concentrate (1000 μg/ml), contengono, rispettivamente, 2, 5 e 20 μg/ml in HNO_3 al 5 % (v:v).

Ringraziamento. — Si ringrazia il Prof. R. A. Nicolaus per le discussioni scientifiche, e il sig. G. Ferracane per l'assistenza tecnica.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Paoletti, *Oceanografia medica ed inquinamento*, pp. 13-32, Liguori, Napoli (1975).
[2] K. M. Wilbur, *Shell formation and regeneration* (in « Physiology of mollusca » di K. M. Wilbur e C. M. Yonge, pp. 243-276, Academic Press, New York, 1964).
[3] J. R. Dodd, *Magnesium and strontium in calcareous skeletons: a review*, J. Paleontol., **41**, 1313-1329 (1967).
[4] J. C. Meranger e E. Somers, Bull. Environ. Contam. Toxicol., **3**, 360 (1968).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci R. A. Nicolaus, L. Mangoni e R. Sersale.

Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche

Nota III. Scorie con rapporto $\frac{CaO+MgO}{SiO_2}$ costante *

Nota di ALFONSO NASTRO e GIUSEPPE MASCOLO
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 5 giugno 1976)

RIASSUNTO. — Gli Autori hanno studiato il comportamento idraulico di campioni di cemento d'alto forno confezionati con scorie sintetiche a rapporto molare $\frac{CaO + MgO}{SiO_2}$ costante e stagionati a vapore, nelle quali scorie il contenuto di MgO è stato aumentato a spese di quello di ossido di calcio.

Viene posto in risalto che l'MgO di costituzione della scoria esercita un'influenza positiva sulle resistenze meccaniche, influenza anche maggiore di quella derivante dal rapporto di basicità CaO/SiO_2.

Vengono altresì discusse le correlazioni tra temperatura di transizione vetrosa, natura delle fasi cristalline neoformate per devetrificazione e resistenze meccaniche dei relativi cementi.

SUMMARY. — The influence of MgO content on hydraulic behaviour of slag Portland cements, obtained by mixing Portland clinker with synthetic slags containing variable amounts of MgO, $\simeq 9.5\ \%$ Al_2O_3 with a molar ratio $(CaO + MgO)/SiO_2 = 1.4$, has been investigated.

The cements, stored under hydrotermal conditions at 175 °C for 24 hours, showed compressive strenghts enhanced more by the increase of MgO content than by the CaO/SiO_2 molar ratio of slags.

The relationships between compressive strenghts of cements prepared with various slags and the related glass transition and crystalline phases obtained during devetrification, have been at last discussed.

PREMESSA.

In lavori precedenti [1, 2] si è dato conto dei risultati ottenuti a seguito di ricerche rivolte a determinare l'influenza dell'ossido di

* Lavoro svolto con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche (C.N.R.).

magnesio, contenuto in scorie sintetiche, sul comportamento idraulico dei cementi d'alto forno.

In particolare è stata presa in esame una serie di cementi d'alto forno confezionati con scorie sintetiche, contenenti percentuali variabili di MgO fino al 20 %, con rapporto CaO/SiO_2 e contenuto di Al_2O_3 costanti. È stato rilevato — sia per stagionatura a temperatura ambiente, che in condizioni idrotermali — un miglioramento delle prestazioni meccaniche per i leganti confezionati con scorie contenenti percentuali di MgO intorno al 10 %.

Si è perciò ritenuto opportuno estendere le indagini ad un'altra serie di scorie sintetiche, nelle quali sono stati tenuti costanti sia il rapporto molare $(CaO + MgO)/SiO_2$ che il contenuto percentuale di Al_2O_3 ($\cong$ 9,5 %). Per questa serie di scorie infatti, il contenuto di MgO è stato aumentato a spese di quello di CaO. Tale scelta è stata fatta allo scopo di chiarire alcune discordanze, rilevabili in letteratura, sul ruolo svolto dall'ossido di magnesio di composizione delle scorie, sul comportamento idraulico dei cementi d'alto forno. Secondo VENUAT [3], infatti, il grado di basicità della scorie, determinato dal rapporto CaO/SiO_2, sembra avere un'influenza sulle resistenze meccaniche maggiore di quella attribuibile all'ossido di magnesio. CHERON e LARDINOIS [4] rilevano invece un effetto contrario attraverso una correlazione tra resistenze meccaniche e indice idraulico (Ih):

$$Ih = \frac{CaO + 1{,}4\,MgO + 0{,}56\,Al_2O_3}{SiO_2}$$

Tale correlazione evidenzia che l'indice idraulico cresce in misura maggiore all'aumentare del contenuto di MgO, che non con il rapporto CaO/SiO_2. Con tale indice crescono altresì le resistenze meccaniche.

PARTE SPERIMENTALE.

I leganti in esame sono stati stagionati in condizioni idrotermali, in quanto è stato ampiamente dimostrato [5, 6] che il trattamento a vapore « steaming » non determina un abbassamento delle proprietà meccaniche, rispetto a quelle che si ottengono per stagionatura a temperatura ambiente. Inoltre, le proprietà meccaniche dei cementi d'alto forno stagionati a vapore, risultano superiori a quelle ottenute da cementi Portland stagionati normalmente a temperatura ambiente [7].

Sei campioni di scorie sintetiche, le cui composizioni sono riportate nella tab. I, sono stati preparati con le modalità descritte nelle precedenti Note [1, 2].

Le scorie vetrose di cui alla Tab. I sono state macinate successivamente vagliate e raccolte in due frazioni granulometriche, di cui una compresa fra 280 e 300 mesh e la seconda fra 350-370 mesh. Le due frazioni granulometriche, miscelate in proporzioni del 50 %, sono state utilizzate quali aggiunte ad un clinker di Portland [1], nelle proporzioni impiegate nella pratica industriale per la confezionatura dei cementi d'alto forno (70 % di scoria e 30 % di clinker). Sono state preparate una serie di paste, stagionate in autoclave, in ambiente saturo di vapor d'acqua alla temperatura di 175 °C, osservando le stesse modalità descritte in un precedente lavoro [2].

TABELLA I

Composizione delle scorie sintetiche

Campione	Percentuali in peso					Rapporti molari	
	SiO_2	CaO	Al_2O_3	MgO	Fe_2O_3	$(CaO+MgO/SiO_2$	CaO/SiO_2
1	47,24	38,93	10,25	2,56	1,02	1,40	1,20
2	44,53	39,47	10,00	5,00	1,00	1,40	1,14
3	41,96	39,99	9,76	7,32	0,98	1,40	1,12
4	37,19	40,94	9,32	11,62	0,93	1,40	0,97
5	34,96	41,40	9,11	13,63	0,90	1,40	0,90
6	30,80	42,24	8,71	17,39	0,86	1,39	0,78

RISULTATI *e* DISCUSSIONE.

In Fig. 1 vengono mostrati i risultati delle resistenze a compressione dei cementi confezionati con le scorie in esame, in funzione del contenuto di MgO di queste ultime. Tali risultati si riferiscono a paste stagionate per 24 h in ambiente saturo di vapor d'acqua alla temperatura di 175 °C. Si rileva un netto miglioramento delle resistenze meccaniche al crescere del contenuto di MgO della scoria. Tale risultato, in contrasto con quanto esposto da VENUAT [3], si accorda perfettamente con i dati di CHERON e LARDINOIS [4]. L'accordo viene infatti posto in luce nella Fig. 2, che riporta i valori delle resistenze meccaniche in funzione dei valori dell'indice idraulico (Ih), calcolati a partire dalla formulazione proposta da Cheron e Lardinois. Si può pertanto affermare che l'ossido di magnesio di costituzione delle scorie esercita un'influenza positiva sulle resistenze meccaniche, influenza maggiore di quella che deriva dal rapporto di basicità CaO/SiO_2.

[1] La composizione del clinker di Portland è riportata nella Nota precedente [1].

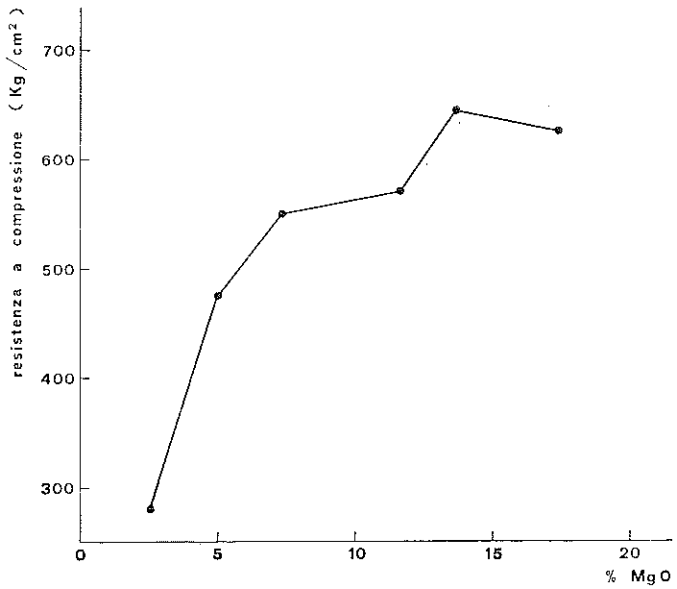


FIG. 1. - Resistenze meccaniche dei cementi d'alto forno in funzione del contenuto di MgO delle scorie.

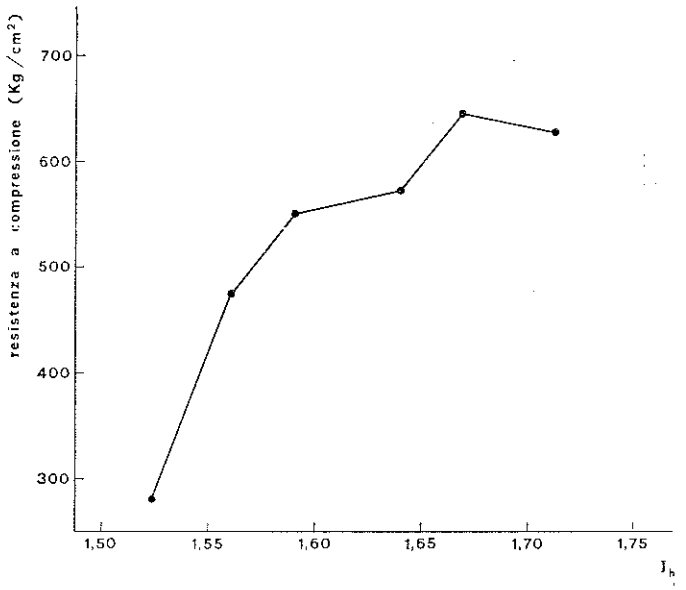


FIG. 2. - Resistenze meccaniche dei cementi d'alto forno in funzione dell'indice idraulico delle scorie.

Al fine di correlare le resistenze meccaniche dei cementi con il comportamento alla devetrificazione delle scorie in essi contenute, tali scorie sono state sottoposte ad analisi termica differenziale. L'indagine è stata effettuata su entrambe le frazioni granulometriche precedentemente indicate.

I risultati ottenuti sono riportati in Fig. 3: la curva *a* si riferisce alla temperatura di transizione vetrosa, la curva *b* alla temperatura di prima cristallizzazione e la curva *c* alla temperatura di cristallizzazione delle fasi finali, in funzione del contenuto di MgO.

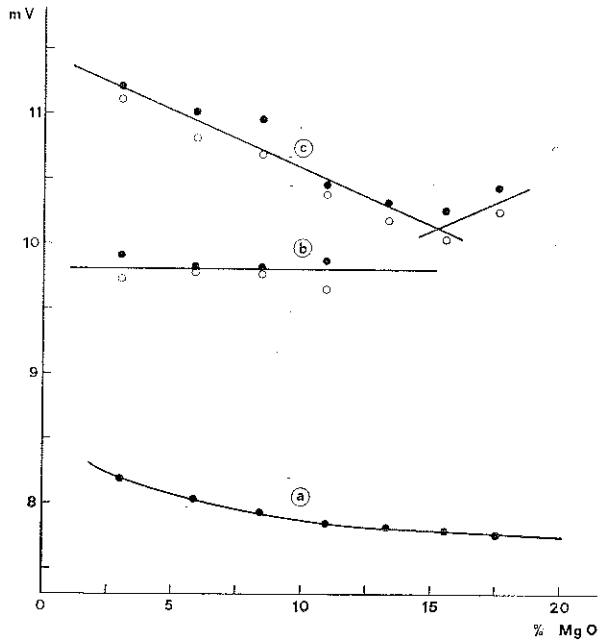


FIG. 3. - Variazione della temperatura di transizione vetrosa (curva *a*), di prima e successiva cristallizzazione (curve *b* e *c*) in funzione del contenuto di MgO delle scorie. (Le temperature sono state lette in corrispondenza del massimo dei picchi ottenuti dalle curve di analisi termica differenziale con velocità di riscaldamento di 20 °C/min, coppia termoelettrica Pt/Pt–Rh 13 %).

● frazione granulometrica compresa tra 280 ÷ 300 mesh;
○ frazione granulometrica compresa tra 350 ÷ 370 mesh.

Si deduce che la temperatura di transizione vetrosa si abbassa all'aumentare del contenuto di MgO nella scoria, benché resti costante il rapporto modificatore/formatore di ossidi costituenti i campioni di scoria vetrosa. Ciò dimostra che l'attività depolimerizzante del MgO nei sistemi vetrosi in esame risulta maggiore di quella dell'ossido di calcio. In linea generale si è constatato che le resistenze meccaniche, rilevate sui corrispondenti cementi, aumentano parallelamente con il

contenuto di MgO. Pertanto, in questa serie di provini, tali resistenze risultano maggiori al diminuire della temperatura di transizione vetrosa della scoria. È da sottolineare comunque che questa relazione da sola non può ritenersi determinante per una corretta previsione del comportamento idraulico delle scorie stesse.

TABELLA II

Fasi cristalline rilevate a seguito di trattamento termico

Campione	Temperatura del trattamento (°C)	C_3MS_2*	$(C_2S)_{5,6} \cdot (C_3MS_2)_{4,4}$	α-CS	β-CS	C_3S_2	$C_2MS_2 \cdot C_2AS$
1	800	–	++	–	–	–	–
	850	–	++	–	–	–	–
	900	–	+	–	–	+	++
	1000	–	–	–	–	+	++
2	800	–	–	–	–	–	–
	850	++	–	–	–	–	–
	900	++	–	–	–	–	+
	1000	–	–	+	–	–	++
3	800	–	–	–	–	–	–
	850	++	–	–	–	–	–
	900	+	–	–	–	–	+++
	1000	–	–	–	–	+	+++
4	800	–	–	–	–	–	–
	850	++	–	–	–	–	+
	900	–	–	–	–	–	++
	1000	–	–	–	+	–	+++
5	800	–	–	–	–	–	–
	850	+	–	–	–	–	++
	900	–	–	–	–	–	+++
	1000	–	–	–	+	–	+++
6	800	–	–	–	–	–	–
	850	++	–	–	–	–	–
	900	–	–	+	–	–	+++
	1000	–	–	++	–	–	+++

* C = CaO; M = MgO; S = SiO_2; A = Al_2O_3; +++ = presente in quantità notevole; ++ = presente in quantità media; + = presente in tracce; – = assente.

Risalta anche che la temperatura di I cristallizzazione, corrispondente a formazione di una fase intermedia, rimane costante con contenuto di MgO (curva *b* fig. 1), mentre la temperatura di II cristallizzazione (curva *c*) diminuisce, raggiungendo un minimo per la scoria a più alta attività idraulica.

Altre frazioni di scorie sono state sottoposte a trattamenti termici per due ore nell'intervallo di temperature 800 ÷ 1000 °C. Le fasi cristalline, desunte mediante l'analisi diffrattometrica, sono riportate nella Tab. II. L'esame dei risultati pone in evidenza che il prodotto ultimo della cristallizzazione, la *melilite* ($C_2MS_2 \cdot C_2AS$), aumenta con il contenuto di MgO della scoria. La melilite è presente inoltre in quantità maggiore, a parità di temperatura e di tempo del trattamento termico, in quei campioni di scoria che denotano altresì un migliore comportamento idraulico. Accanto a tale fase principale è stata riscontrata la presenza in tracce di fasi cristalline quali $\alpha - CS$, $\beta - CS$ e C_3S_2.

Conclusioni.

I risultati della presente indagine pongono in luce che il ruolo svolto dall'ossido di magnesio in scorie a rapporto molare $(CaO + MgO)/SiO_2$ costante risulta positivo, nel senso che il contenuto di MgO della scoria innalza le resistenze meccaniche dei relativi cementi più di quanto non faccia il rapporto CaO/SiO_2.

Le resistenze meccaniche più elevate si ottengono inoltre con scorie più depolimerizzate, i cui prodotti finali di cristallizzazione sono costituiti dalla melilite. Questa è presente in maggiore quantità, a parità di tempo e di temperatura del trattamento termico, così come è stato rilevato da Krüger [8].

Gli Autori desiderano ringraziare il Sig. A. Annetta per l'assistenza tecnica fornita al presente lavoro.

Istituto di Chimica Applicata - Facoltà d'Ingegneria - Piazzale Tecchio - 80125 Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Mascolo, G. Bisaccia, V. Sabatelli, *Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche.* Nota I. *Scorie con rapporto CaO/SiO_2 fisso.* Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Napoli, IV - Vol. XLII (1975).

[2] G. Mascolo, A. Nastro, V. Sabatelli, *Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche.* Nota II. *Leganti con rapporto scoria/clinker variabile, stagionati a vapore.* Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Napoli (in corso di stampa), 1976.

[3] M. Venuat, *Recherches sur quelques laitiers particuliers.* Rev. Mat. Constr. **602**, 494 (1965).

[4] M. Cheron, C. Lardinois, *The role of magnesia and alumina in the hydraulic properties of granulated blast furnace slags.* Proc. 5th Int. Symp. Chemistry of Cement. Tokyo (1968).

[5] P. Pirotte, *Hüttenzemente und ihre Anwendung in Belgien.* Tonindustrie-Zeitung 7/8, 155 (1965).

[6] V. L. Pankratov, V. P. Ignotova, R. Y. Chernes, *Super rapid-hardening slag Portland Cement.* Proc. of VII Tsement, n. 23, 79 (1968).

[7] V. I. Satarin, Y. M. Syrkin, L. P. Shatokina, A. G. Kholodny, D. R. Lyusunkina, *Fundamentals of production and some aspects of super rapid hardening slag Portland Cement.* Tekhnologiya i svoistva spetsialnykh tsementov, 314, Stroyizdat, 1967.

[8] J. E. Krüger, K. H. L. Sehlke and J. H. F. Van Aardt, *High temperature studies on blastfurnace slags I and II.* Cement Lime Manuf. 37, **63**, 89 (1964).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci Scherillo, Sersale e Corradini.

Generalized affine parameters and proper time in relativistic spacetimes *

Nota di FABIO ROSSO
presentata dal socio ordinario CARLO TOLOTTI

(Adunanza del 5 giugno 1976)

RIASSUNTO. — Si prova che il tempo proprio appartiene alla classe dei parametri affini generalizzati lungo una curva del genere tempo se e solo se questa è una geodetica, ma che la nozione di *b*-singolarità — che è basata su tali parametri — è fisicamente significativa anche per curve non geodetiche del genere tempo.

SUMMARY. — It is shown that proper time belongs to the class of generalized affine parameters on a timelike curve if and only if this is geodesic, but that the notion of *b*-singularity — which is based on these parameters — has physical meaning also for non-geodesic timelike curves.

1. - INTRODUCTION.

Generalized affine parameters, introduced by B. G. SCHMIDT [1], provide a length measurement on any curve γ of a relativistic spacetime M. By means of them, SCHMIDT characterized a singularity in M as any endless non-spacelike curve of finite generalized affine length (b-*singularity*) [1].

On the other hand — as R. PENROSE pointed out [2] [3] [4] — a singularity should be thought of as a particle or a light ray whose history does not exist after a finite *time* interval. In this connection, it seems to me natural to assume that the time measurement are provided, on a timelike non-geodesic curve γ, by *proper time*, which is just the relativistic time for an observer moving along γ [7] [8].

The aim of this paper is to compare SCHMIDT's parameters with proper time on timelike non-geodesic curves, bearing in mind that,

* This work was supported by « Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica » of C.N.R. (National Research Council).

[1] b- shortens ' bundle ', generalized affine parameters being provided by Schmidt's process for the bundle completation of M [1] [5] [6].

on timelike and null geodesics, any generalized affine parameter identifies with an usual affine parameter, whose physical meaning of time parameter is well-known [6] [9].

More precisely, after some preliminars (sec. 2), I show that (sec. 3), unless γ is geodesic, proper time does not belong to the class U_γ of generalized affine parameters on γ. Consequently a timelike non-geodesic b-singularity might be unphysical, i.e. its proper length might be infinite. Yet I show that (sec. 4) this never happens because the finiteness of the generalized affine length, for a timelike curve, implies the finiteness of proper length too. Therefore the finiteness of Schmidt's parameters has physical meaning also for timelike nongeodesic curves.

2. - Preliminars.

Let $M = (\mathfrak{M}, g)$ be the general relativistic spacetime model, where $\mathfrak{M}$ is a connected four-dimensional Hausdorff C^∞-manifold, and g is a Lorentz metric of signature $+++-$.

In the singular spacetime theory one usually requires the following *inextendibility condition*: $(\mathfrak{M}, g)$ is C^r-inextendible ($r \geq 1$), that is there are no pairs $(\mathfrak{M}', g')$ which $(\mathfrak{M}, g)$ can be strictly and isometrically C^r-imbedded in.

A point $p \in \mathfrak{M}$ is an *endpoint* of a C^r-curve $\gamma : t \in F \to \gamma(t) \in \mathfrak{M}$ (F is a connected interval of the real line R) if for any neighbourhood $\mathfrak{V}$ of p there is a $t^* \in F$ such that $\gamma(t) \in \mathfrak{V}$ for every $t \in F$ with $t \geq t^*$. A curve γ without one or both its endpoints is called *endless*.

The above inextendibility condition assures [5] that if γ is an endless curve in M, one cannot obtain its endpoints by a suitable isometric imbedding of M in a larger spacetime M'. In such a way the absence of an endpoint is an uneliminable intrinsic property of γ.

From now on, I shall consider only non-spacelike curves $\gamma(t)$, i.e. such that $g(X, X) \leq 0$ — where X is the tangent vector to $\gamma(t)$ —, and so parametrized that inf F = 0, sup F = 1.

If $\gamma(t)$ is such a curve [2] one says *generalized affine parameter* on $\gamma(t)$ the function

$$u = \int_0^t \left\{ \sum_1^4{}_i (X^i)^2 \right\}^{1/2} dt \qquad t \in F, \tag{2.1}$$

where X^i are the components of X evaluated in a family $\{e_i\}$ of parallely propagated orthonormal frames (*pp*-frames) along $\gamma(t)$.

[2] Generalized affine parameters are also defined on spacelike curves, which we are not here interested in.

As well-known, indeed, one says *proper time* on any timelike curve $\gamma(t)$ the function

$$\tau = \int_0^t \{ - g(X, X) \}^{1/2} \, dt \qquad t \in F . \tag{2.2}$$

3. - Generalized affine parameters and proper time.

All possible choices of $(e_i)_{\gamma(o)}$ provide the complete class U_γ of the generalized affine parameters on $\gamma(t)$.

These parameters, which are purely geometrical objects, should have a direct physical meaning if U_γ included — on a timelike non-geodesic curve $\gamma(t)$ — the proper time τ which is, as it is well-known [7] [8], just the physical time for an observer moving along γ. But this never happens as shown by the following.

Proposition I. *Proper time belongs to* U_γ *if and only if* γ *is a timelike geodesic.*

Proof: let us suppose $\tau \in U_\gamma$, that is a suitable *pp*-frame family $\{e_i\}$ exists along $\gamma(t)$ such that τ identifies with the generalized affine parameter u determined by $\{e_i\}$. From (2.1) and (2.2) it follows

$$- g(X, X) = \sum_1^4{}_i (X^i)^2 \qquad \forall t \in F , \tag{3.1}$$

but, as $\{e_i\}$ is orthonormal along $\gamma(t)$, it must be

$$g(X, X) = \sum_1^3{}_\alpha (X^\alpha)^2 - (X^4)^2 ,$$

so (3.1) becomes simply

$$\sum_1^3{}_\alpha (X^\alpha)^2 = 0 \qquad \forall t \in F ,$$

which implies

$$X^\alpha(t) = 0 , \quad \forall t \in F , \quad \forall \alpha = 1, 2, 3 .$$

Thus a function $\varphi(t)$ (the fourth component of X) exists such that

$$X = \varphi(t) \, e_4 \tag{3.2}$$

with $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in F$, otherwise it should not be $g(X, X) < 0$ everywhere along γ. From (3.2) it follows

$$\nabla_X X = < d\varphi, X > e_4 + \varphi(t) \nabla_X e_4 \ , \tag{3.3}$$

but being

$$\nabla_X e_4 = 0 \ ,$$

it must be

$$\nabla_X X = [\varphi^{-1}(t) < d\varphi, X >] X \ ,$$

that is $\gamma(t)$ is geodesic.

Vice versa, let us suppose that $\gamma(t)$ is a timelike geodesic. As X is parallely propagated along γ, one has, in a generic *pp*-frame family $\{e_i\}$,

$$X^i = c^i \qquad \forall t \in F \ , \qquad \forall i = 1, 2, 3, 4 \ , \tag{3.4}$$

where c^i are suitable real constants depending on the choice of $\{e_i\}$; therefore

$$u = \left\{ \sum_1^4{}_i (c^i)^2 \right\}^{1/2} t \ . \tag{3.5}$$

Moreover it is

$$g(X, X) = a \qquad \forall t \in F \ , \tag{3.6}$$

where a is a suitable negative real constant not depending on the choice of $\{e_i\}$. Therefore

$$\tau = (-a)^{1/2} t \ . \tag{3.7}$$

It is not obvious, also if one chooses t to be affine, that a family $\{e_i\}$ exists such as $(\sum_1^4{}_i (c^i)^2)^{1/2} = (-a)^{1/2}$, that is also varying $\{e_i\}$ in all possible manners, the class of functions (3.5) might not include the function (3.7). Let us consider, then, the following *pp*-frame family $\{e_i\}$:

$$\begin{cases} g(e_\alpha, e_\beta) = \delta^{\circ}_{\beta} & \forall \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ g(e_4, e_\alpha) = 0 & \\ e_4 = (-a)^{-1/2} X & ; \end{cases} \tag{3.8}$$

evaluating the components (3.4) in the family (3.8), one obtains

$$\begin{cases} X_4 = g(X, e_4) = (-a)^{-1/2}\, g(X, X) = -(-a)^{1/2} \\ X_\alpha = g(X, e_\alpha) = (-a)^{1/2}\, g(e_4, e_\alpha) = 0 \end{cases}$$

that is

$$\begin{cases} c^4 = g^{4j} X_j = (-a)^{1/2} \\ c^\alpha = g^{\alpha j} X_j = 0 \qquad\qquad \forall\, \alpha = 1, 2, 3\ . \end{cases} \tag{3.9}$$

Thus, from (3.5), (3.7), and (3.9), it follows that the generalized affine parameter u, defined by the family (3.8) identifies with τ, i.e.

$$\tau \in U_\gamma\ .$$

Q.E.D.

One can conclude saying that the class U_γ has, a priori, a direct physical meaning only on geodesics.

4. - On the physical meaning of generalized affine length finiteness for non-geodesic timelike curves.

In the singularity theory of a relativistic spacetime M, we are interested only in those endless curves γ which have, in some sense, finite *time*-length: in this case, in fact, γ could be thought of as a particle, freely falling or not, which, after a finite amount of time, is no longer represented by a point of M.

It is clear that we have as many definitions of singularities as the choices are to define parameters on γ which the time-length is measured by.

I am concerned here in Schmidt's choice, who, generalizing the affine measurement by the function (2.1), was driven to set the following

Definition. *A* b-*singularity of an inexendible spacetime* M, *is any non-spacelike endless curve of finite generalized affine length.*

The above definition is well-stated because, if $u, u' \in U_\gamma$, the boundedness of u implies — as it can easily shown [6] — the boundedness of u'.

This boundedness property of U_γ is the slightest one usually required to a « time » parameter, but, as I showed in the previous section, no generalized affine parameter identifies with proper time on timelike non-geodesic curves. Consequently a non-geodesic time-

like *b*-singularity γ might be unphysical, i.e. its proper length might be infinite.

Neverthless Prop. I does not exclude that some relation exists between τ and generalized affine parameters, i.e. these two different measurement processes might be in some way related on timelike non-geodesic curves.

This is actually the case because, in any *pp*-frames family $\{e_i\}$ along a timelike curve $\gamma(t)$, it is always

$$0 < \tau = \int_0^t \left\{(X^4)^2 - \sum_1^3{}_\alpha (X^\alpha)^2\right\}^{1/2} dt \leq \tag{4.1}$$

$$\leq \int_0^t \left\{(X^4)^2 + \sum_1^3{}_\alpha (X^\alpha)^2\right\}^{1/2} dt = u \qquad \forall t \in F,$$

where τ does not depend on $\{e_i\}$. Thus if u is bounded, also τ is.

Then (4.1) and the finiteness requirement itself in the definition of *b*-singularity assure that

PROPOSITION II. *Any timelike non-geodesic* b*-singularity of an inextendible spacetime* M *has always finite proper length.*

So Schmid's definition has physical meaning in order to the required finiteness of generalized affine length.

REFERENCES

[1] SCHMIDT B. G., *A new definition of singular points in General Relativity*. G.R.G. Jour., **1**, 269 (1970).

[2] PENROSE R., *Structure of spacetime*, in Battelle Recontres, Benjamin N. Y. (1968).

[3] PENROSE R. *Gravitational collapse: the role of General Relativity*, Riv. Nuovo cimento, **1**, 252 (1969).

[4] PENROSE R., *Gravitational collapse and spacetime singularities, Phys. Rev. Lett.*, **14**, 57 (1965).

[5] DEMIANSKI M., *Structure of singularities*, in Lecture Notes in Physics, 14 (1970).

[6] HAWKING S. W. & ELLIS G. R. F., *The large scale structure of spacetime*, Camb. Univ. Press (1973).

[7] KUNDT W., & HOFFMANN B., *Recent developments in General Relativity*, Pergamon N. Y. (1962).

[8] MARZKE R. F. & WHEELER J. A., in Relativity and gravitation, Benjamin N. Y. (1964).

[9] CARICATO G., *Sul significato fisico del parametro affine sulle geodetiche di lunghezza nulla in una V_4 einsteiniana*, Riv. Mat. Univ. Parma, **4**, 271 (1963).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Tolotti, T. Nicolini e V. Dalla Volta.

Materiali litoidi ottenibili per trattamento idrotermale di miscele di scoria d'alto forno e di idrossido di calcio *

Nota di VITTORIO SABATELLI
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 5 giugno 1976)

RIASSUNTO. — È stato esaminato il comportamento meccanico di provini confezionati con scoria d'alto forno, idrossido di calcio ed acqua e sottoposti, dopo formatura a pressione, a trattamento idrotermale, in differenti condizioni sperimentali.

È stato posto in evidenza che:

— la pressione di formatura e la finezza di macinazione favoriscono il raggiungimento di elevati carichi di rottura;
— più alte temperature del trattamento idrotermale non sempre determinano più elevati carichi di rottura;
— la quantità d'idrossido di calcio in miscela, che promuove il raggiungimento di valori più elevati del carico di rottura, non è costante, ma dipende da altri parametri, quali: la pressione del trattamento idrotermale e la finezza di macinazione.

È stato inoltre confermato che provini confezionati con sola scoria ed acqua, mostrano, in determinate condizioni sperimentali, valori significativi della resistenza meccanica.

SUMMARY. — Samples of blast furnace slag, calcium hydroxide and water in suitable amount have been formed under pressure and submitted to hydrothermal treatment; their mechanichal strenght was successively examinated.

The following conclusions may be drawn:

— the moulding pressure and the grinding fineness favourably influence the mechanical behaviour;
— higher temperatures during the hydrothermal treatment don't ever promote higher mechanical strenghts;
— the calcium hydroxide quantities corresponding to the best values of mechanical strenght is not constant, but depend on the other parameters, such as the autoclave pressure and the grinding fineness.

It has been moreover ascertained that samples made of blast furnace slag and water show, in some cases, noticeable compressive strenght.

* Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

PREMESSA

È noto che le scorie d'alto forno rappresentano un legante « potenziale », in quanto la loro reattività viene esaltata in ambiente basico. Ciò ne consente l'impiego, come aggiunta attiva al clinker di portland, per la produzione dei cementi d'alto forno. Il loro indurimento è infatti addebitabile alla reattività che la scoria acquista nell'ambiente basico determinatosi per effetto della presenza della calce d'idrolisi.

In tempi recenti si sono messi a punto, nel campo dell'ingegneria edile, tecnologie di produzione di manufatti ottenibili a seguito di stagionatura accelerata, realizzata a temperatura (e, a volte, a pressione) superiori all'ordinaria [1], [2], [3]. Come materiali di partenza, accanto a quelli tradizionali, si cerca di adoperare anche altri materiali reperibili in natura [4].

È anche noto che miscele calce aerea-scoria forniscono le cosidette calci idrauliche siderurgiche, dotate di resistenza meccanica non molto elevata; se la stagionatura viene condotta a temperatura supe-

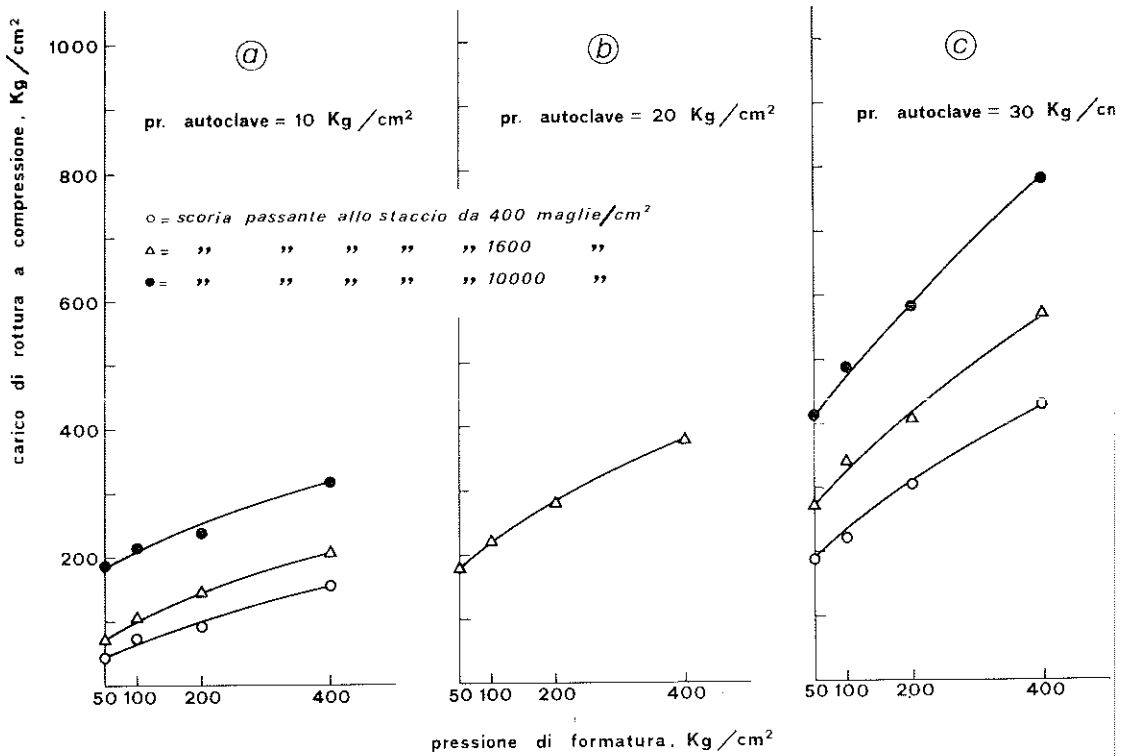


FIG. 1. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della pressione di formatura, di provini confezionati con scoria ed acqua.

riore a quella ambiente, si ottengono, però, prodotti dotati di buona resistenza meccanica, dell'ordine di quella dei cementi [5], [6], [7].

Si è pertanto ritenuto interessante intraprendere una ricerca rivolta alla individuazione dei valori ottimali dei parametri che influenzano il comportamento meccanico di cilindri costituiti da miscele di scorie d'alto forno, idrossido di calcio ed acqua, sottoposti, in svariate condizioni sperimentali, a trattamento idrotermale, previa formatura a pressione.

Dei risultati conseguiti e delle relative conclusioni, si riferisce nel corso di questa Nota.

Parte sperimentale

I parametri presi in considerazione sono stati:

a) finezza di macinazione della scoria;
b) concentrazione dell'idrossido di calcio;
c) pressione di formatura dei provini;
d) pressione del trattamento idrotermale.

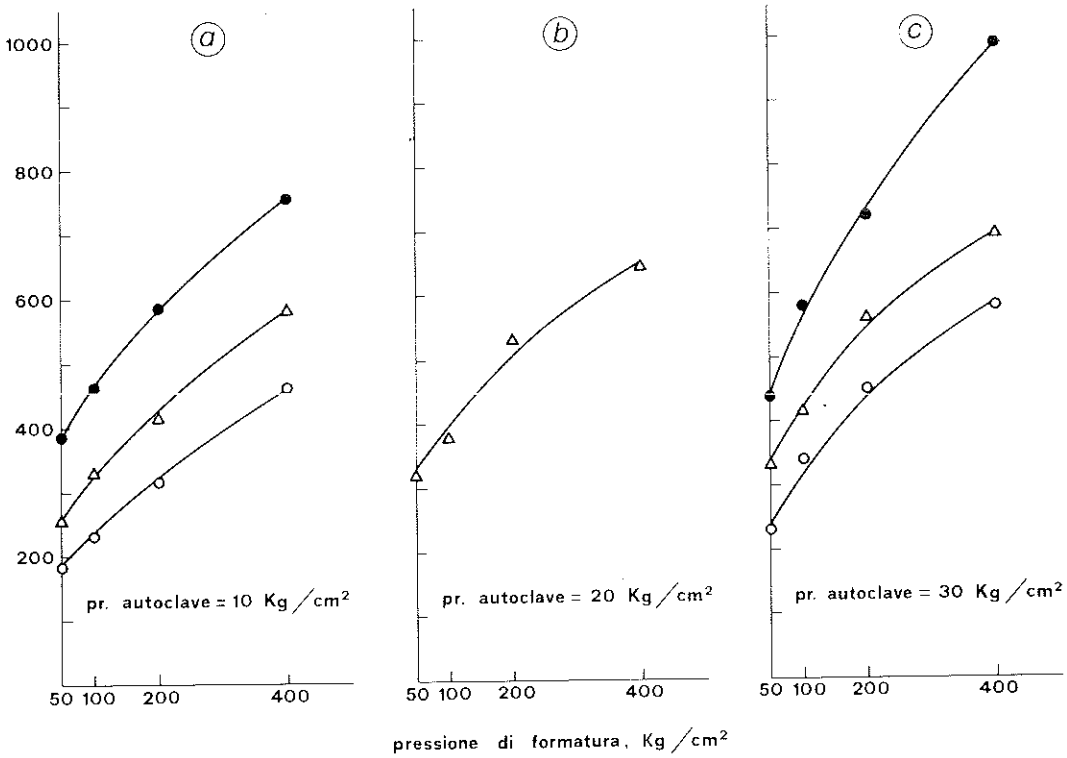


Fig. 2. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della pressione di formatura di provini confezionati con scoria, acqua e il 5 % di $Ca(OH)_2$.

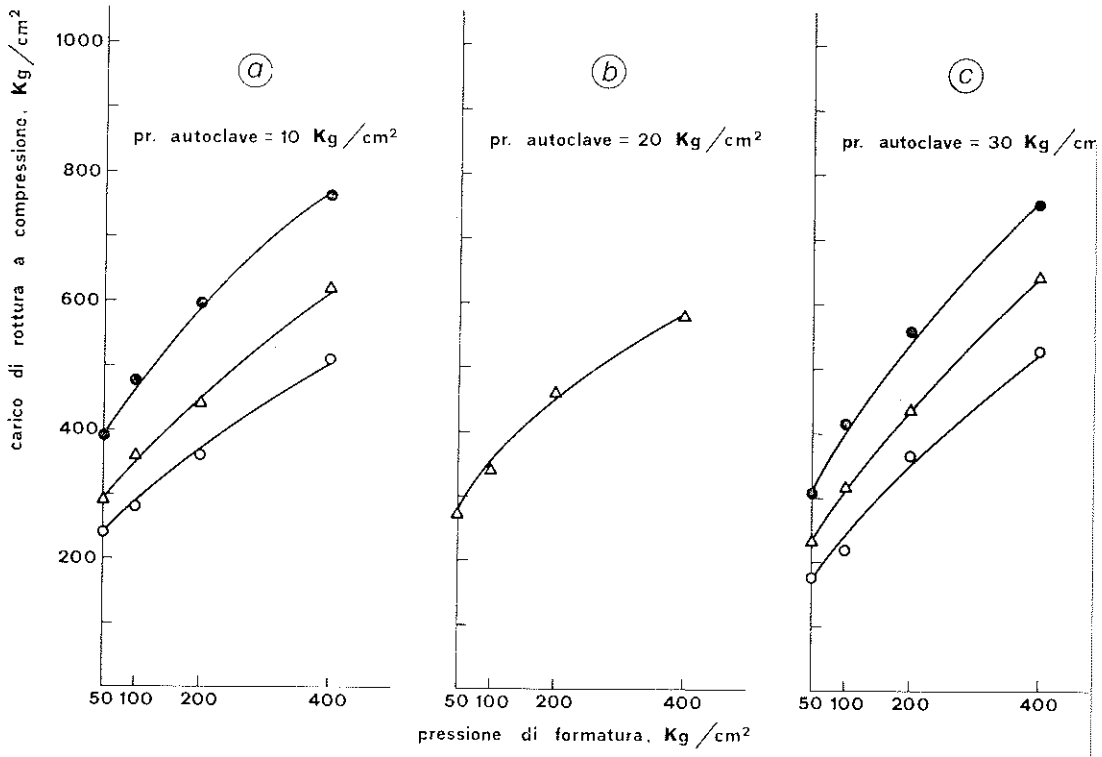


FIG. 3. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della pressione di formatura, di provini confezionati con scoria, acqua e il 10 % di $Ca(OH)_2$.

Si è adoperata una normale scoria d'alto forno, della seguente composizione chimica:

SiO_2	33,4 %
Al_2O_3	13,1 »
Fe_2O_3	1,4 »
Mn_3O_4	0,6 »
CaO	41,2 »
MgO	7,1 »
S da solfuri	1,5 »
Na_2O	0,6 »
K_2O	0,7 »

Con essa sono stati confezionati provini cilindrici del diametro di cm. 2,5 e di altezza di cm. 5, mediante formatura a pressione di miscele ottenute omogeneizzando accuratamente quantità opportune di scoria, idrossido di calcio e acqua.

Le pressioni di formatura dei provini sono state: 50-100-200-400 Kg/cm^2.

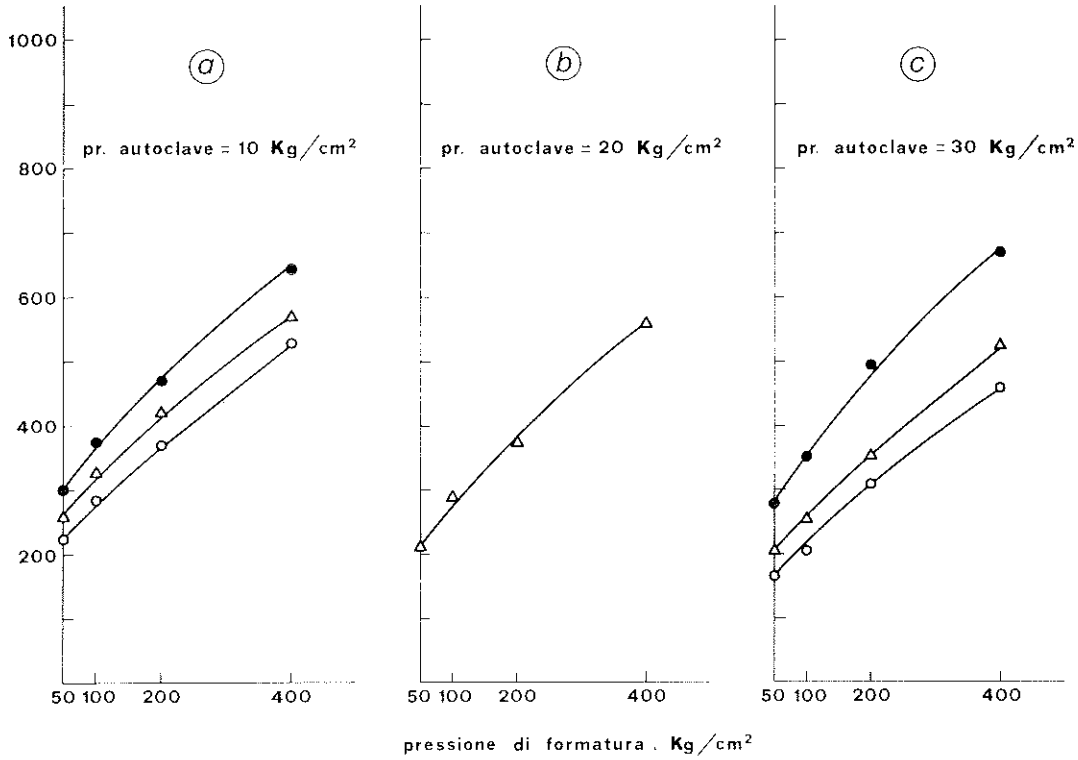


FIG. 4. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della pressione di formatura, di provini confezionati con scoria, acqua e il 15 % di $Ca(OH)_2$.

Per quanto riguarda la finezza di macinazione della scoria, si sono scelte tre diverse granulometrie e precisamente: il passante allo staccio da 400 maglie/cm²; il passante allo staccio da 1600 maglie/cm²; il passante allo staccio da 10.000 maglie/cm².

I quantitativi di idrossido di calcio aggiunti sono stati pari a: 0-5-10-15 %.

Per quanto riguarda le condizioni del trattamento idrotermale esse sono state così fissate: 10-20-30 Kg/cm², corrispondenti alle tensioni di vapore alle temperature di: 180°, 212°, 231° C rispettivamente. La durata del trattamento idrotermale è stata di 24 ore. Dopo il trattamento idrotermale i provini sono stati sottoposti a prove di resistenza meccanica a compressione, adottando come carico di rottura il valore mediato di tre determinazioni. Tenendo conto di ciò e del fatto che il trattamento idrotermale condotto alla pressione di 20 Kg/cm² è stato effettuato solo sui provini formati con scorie passanti allo staccio di 1600 maglie/cm², il numero totale dei provini sottoposti ad indagine è risultato essere di 336.

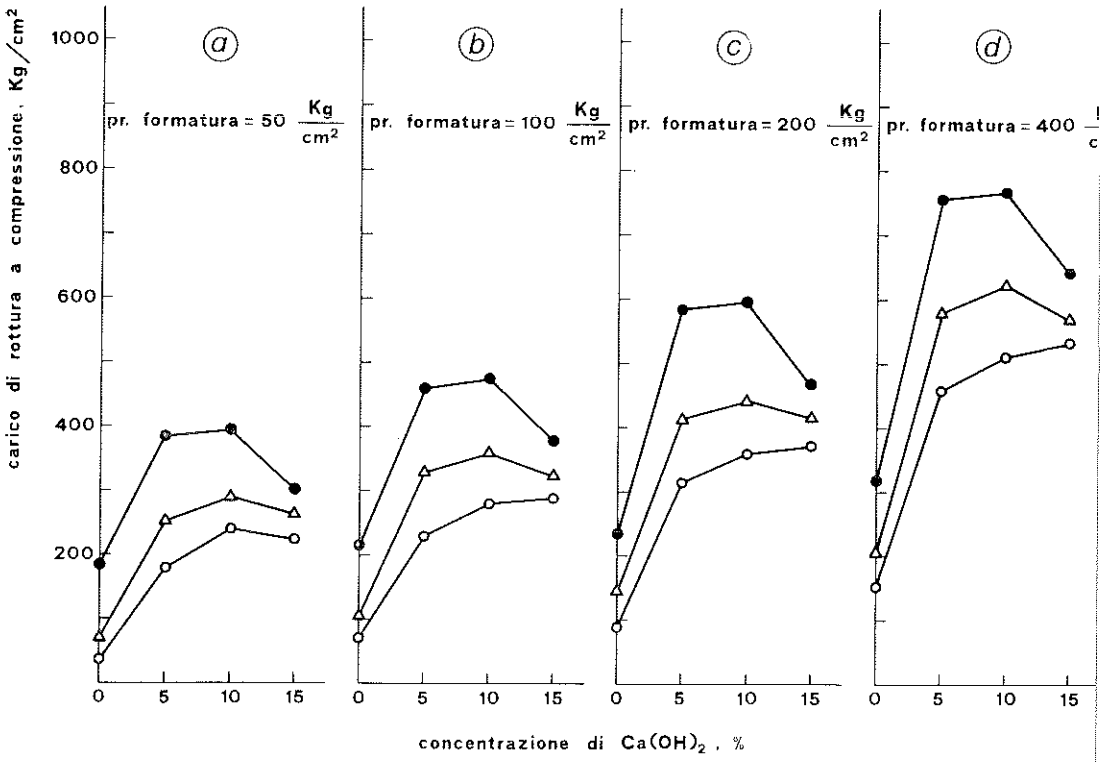


FIG. 5. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della concentrazione di $Ca(OH)_2$, di provini sottoposti a pressione del trattamento idrotermale di 10 Kg/cm².

ESPOSIZIONE DEI RISULTATI

I risultati ottenuti sono riassunti in una serie di grafici che pongono in evidenza l'influenza dei parametri esaminati sulle resistenze meccaniche.

In fig. 1 sono riportati i valori della resistenza meccanica a compressione, in funzione della pressione di formatura, per provini confezionati con sola scoria ed acqua: in a) sono raggruppati i dati relativi ai provini sottoposti a trattamento idrotermale alla pressione di 10 Kg/cm²; in b) quelli relativi a pressione di 20 Kg/cm²; in c) infine sono riportati i dati relativi alla pressione di 30 Kg/cm².

L'esame dei grafici in fig. 1 permette di rilevare che:

a) la resistenza meccanica cresce al crescere della pressione di formatura, con andamento quasi rettilineo;

b) i provini confezionati con scorie di maggiore finezza presentano valori più elevati della resistenza meccanica; l'influenza della granulometria è molto netta nel caso dei provini trattati in autoclave

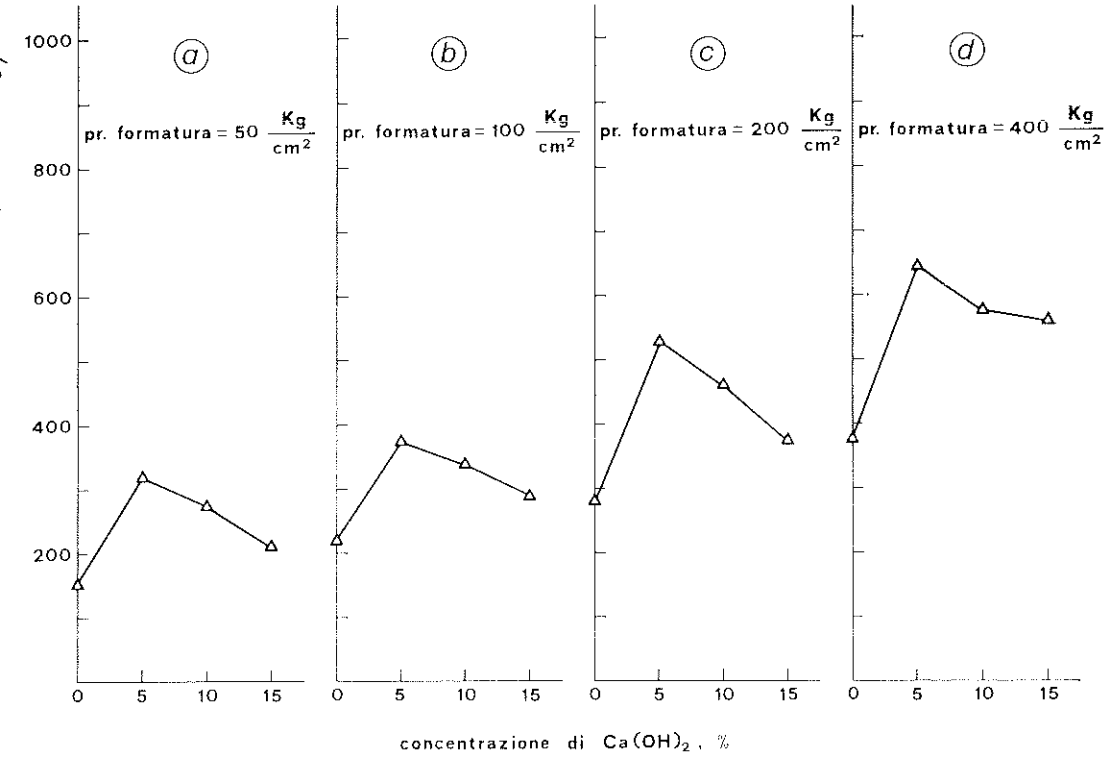


FIG. 6. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della concentrazione di $Ca(OH)_2$, di provini sottoposti a pressione del trattamento idrotermale di 20 Kg/cm^2.

alla pressione di 30 Kg/cm^2. Si riscontra infatti, a parità di altre condizioni, una differenza massima di 360 Kg/cm^2 tra il carico di rottura di un provino confezionato con scoria passante allo staccio di 10.000 maglie/cm^2 e quello di un provino formato con scoria passante allo staccio di 400 maglie/cm^2. Per pressioni inferiori del trattamento idrotermale, l'influenza della finezza di macinazione è meno sentita;

c) il carico di rottura dei provini confezionati con sola scoria ed acqua, generalmente modesto, in adatte condizioni sperimentali (elevate pressioni di formatura, elevata finezza di macinazione, elevata pressione del trattamento idrotermale) assume valori di tutto rilievo (intorno a 700 Kg/cm^2).

Nelle figg. 2, 3 e 4 sono riportati i valori dei carichi di rottura a compressione, sempre in funzione della pressione di formatura, di provini confezionati con scoria, acqua e idrossido di calcio (in ragione del 5 % per i campioni in fig. 2; del 10% per i campioni in fig. 3 e del 15 % per i campioni in fig. 4). Si nota che anche per i

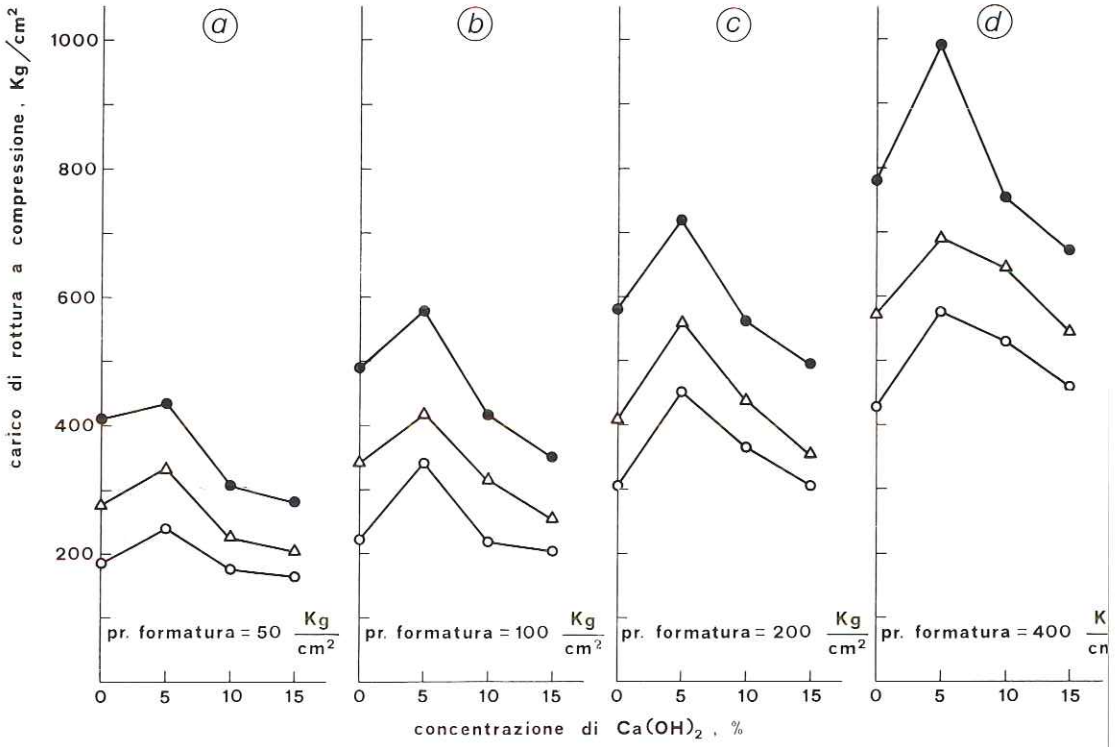


FIG. 8. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della concentrazione di $Ca(OH)_2$, di provini sottoposti a pressione del trattamento idrotermale di 20 Kg/cm².

provini confezionati con scoria, idrossido di calcio ed acqua, tanto la pressione di formatura, quanto la finezza di macinazione, favoriscono il raggiungimento di elevati carichi di rottura, particolarmente alti per provini confezionati col 5 % di idrossido di calcio e sottoposti a pressioni elevate di formatura e di trattamento idrotermale. Da notare che per i provini preparati con il 10 % ed il 15 % di idrossido di calcio, l'influenza della granulometria della scoria sul comportamento meccanico è piuttosto modesta, come risalta dai valori del carico di rottura di provini confezionati con scoria di differente granulometria, a parità di altri parametri.

L'influenza della concentrazione dell'idrossido di calcio, sempre nei riguardi del comportamento meccanico, è riassunta nei grafici delle figg. 5, 6 e 7.

In fig. 5 sono riportati i dati relativi ai provini sottoposti a trattamento idrotermale, alla pressione di 10 Kg/cm²; in fig. 6 sono riportati quelli relativi alla pressione di 20 Kg/cm², mentre in fig. 7 compaiono i dati relativi alla pressione di 30 Kg/cm².

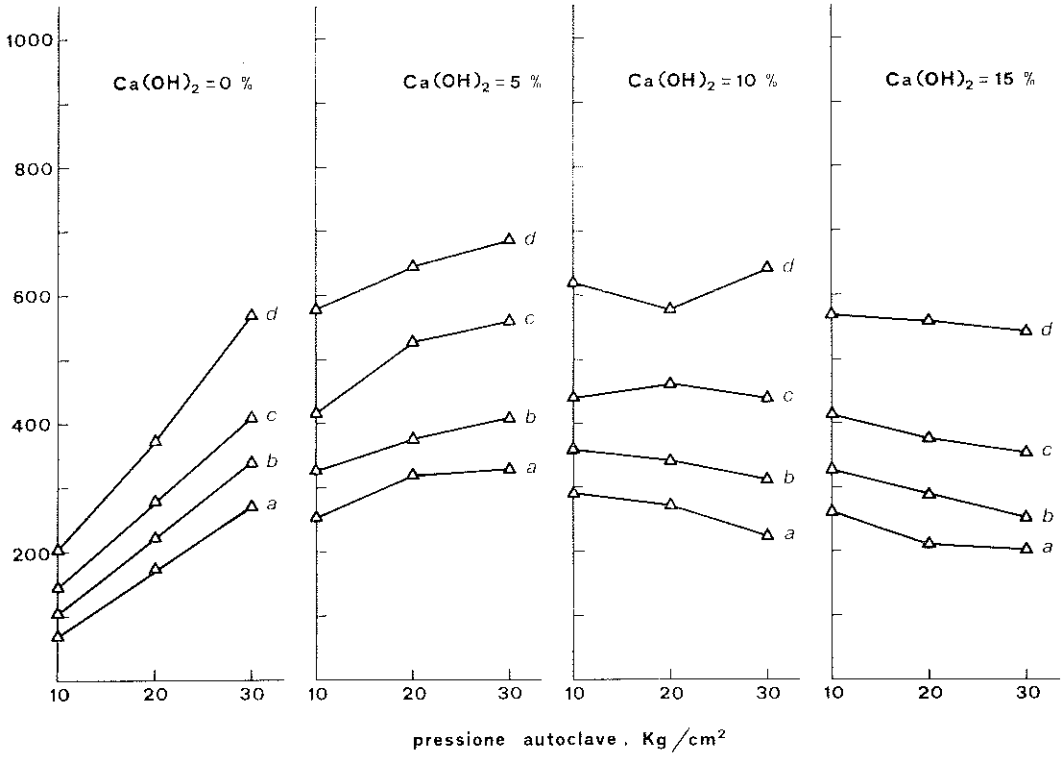


FIG. 8. - Andamento della resistenza meccanica in funzione della pressione del trattamento idrotermale di provini confezionati con scoria passante a 1600 maglie/cm², $Ca(OH)_2$ e acqua.

Dall'esame della fig. 5 si rileva che la resistenza meccanica cresce al crescere della concentrazione di idrossido di calcio, per raggiungere valori massimi in corrispondenza di provini confezionati con il 10 % di idrossido di calcio, per poi diminuire; in due casi, per provini confezionati con scoria passante al vaglio di 400 maglie/cm², il carico di rottura massimo si riscontra per un contenuto del 15 % di idrossido di calcio. Dai grafici in fig. 6 si rileva che i più alti valori del carico di rottura si riscontrano in corrispondenza di provini confezionati col 5 % di idrossido di calcio. Le stesse considerazioni si possono trarre dall'esame dei grafici di fig. 7, i quali mostrano che i valori della resistenza meccanica, per provini confezionati col 5 % di idrossido di calcio, sono ancora i più alti; si nota altresì in alcuni casi, che i provini confezionati con idrossido di calcio presentano valori del carico di rottura inferiori a quelli di provini confezionati con sola acqua.

Per quanto concerne l'influenza delle condizioni del trattamento idrotermale sul comportamento meccanico, in fig. 8 compaiono quat-

tro serie di grafici relativi a valori del carico di rottura, in funzione della pressione del trattamento, per provini confezionati con scoria passante al vaglio di 1600 maglie/cm^2; ogni serie è stata approntata con la stessa quantità di idrossido di calcio; le linee contrassegnate con la lettera *a* si riferiscono a provini formati a pressione di 50 Kg/cm^2, mentre le linee contrassegnate con le lettere *b*, *c*, *d* sono relative a provini formati a 100, 200, 400 Kg/cm^2, rispettivamente.

L'esame delle quattro serie di grafici permette di confermare alcuni aspetti interessanti, peraltro già emersi precedentemente: i provini confezionati con sola scoria ed acqua o con scoria, acqua e il 5 % di idrossido di calcio, presentano valori del carico di rottura che aumentano all'aumentare della pressione del trattamento. Tale aumento risulta maggiore nel caso di provini costituiti da sola scoria e acqua. Per quanto riguarda i provini confezionati col 10 % di idrossido si riscontra che, nel caso di campioni formati a 200 e 400 Kg/cm^2, all'aumentare della pressione del trattamento idrotermale, i carichi di rottura aumentano, ma in modo poco significativo; nel nel caso di campioni formati a 50 e 100 Kg/cm^2 l'aumento della pressione del trattamento idrotermale comporta invece un decremento dei carichi di rottura. Tale andamento viene confermato ed esaltato per i provini confezionati col 15 % di idrossido di calcio: in tal caso infatti, il loro comportamento meccanico peggiora all'aumentare della pressione del trattamento, qualunque sia stato il valore della pressione di formatura.

Conclusioni

L'insieme delle risultanze sperimentali indica che la resistenza meccanica a compressione di provini ottenuti a partire da miscele di scorie d'alto forno, idrossido di calcio ed acqua, successivamente formati a pressione e sottoposti a trattamento idrotermale, varia in ampio intervallo; i parametri che sostanzialmente la influenzano sono: la granulometria della scoria, la pressione di formatura del provino, la quantità di idrossido di calcio in miscela, le condizioni fisiche del trattamento idrotermale.

Per quanto concerne l'influenza della granulometria, si è riscontrato che la finezza della scoria migliora il comportamento meccanico specie per bassi contenuti di idrossido di calcio in miscela.

La sua presenza si è rivelata peraltro vantaggiosa, fino al contenuto del 10 (e talvolta del 15 %), per modeste pressioni del trattamento idrotermale (10 Kg/cm^2), e del 5 %, per più elevate pressioni (20 e 30 Kg/cm^2).

Risalta anche che, in opportune condizioni sperimentali, provini confezionati con sola scoria ed acqua esibiscono carichi di rottura abbastanza alti e superiori a quelli presentati, a parità di condizioni sperimentali, da provini confezionati con il 10 ed il 15 % di idrossido di calcio.

La pressione di formatura dei provini, poi, si rivela sempre fattore positivo.

Le condizioni fisiche del trattamento idrotermale esercitano infine una influenza notevole sulle resistenze meccaniche: tale influenza è risultata positiva per provini privi di idrossido di calcio, meno determinante per provini formati col 5 % di idrossido di calcio, negativa per i provini confezionati con il 10 ed il 15 % di idrossido di calcio.

BIBLIOGRAFIA

[1] TAYLOR H. F. W., *The chemistry of cements*. I-417; Acc. Press., London, 1964.

[2] A.C.I. COMMITTEE 516, *High pressure steamcuring: modern practice and properties of autoclaved products*. ACI Journal, Proceedings, **62**, 869 (1965).

[3] 2ND *International Symposium on autoclaved calcium silicate building materials*. Hannover 1969.

[4] SERSALE R., *Materiali litoidi ottenuti per trattamento in autoclave di miscele: pozzolana e calce*. Acc. Sci. Fis. e Mat. [4] - XXIX Napoli (1962).

[5] TAYLOR H. F. W., L. cit. a nota 1). 2-53.

[6] BRASEN U., *Idratazione di loppe ordinarie sottoposte a trattamento idrotermale*. Journal of the Britsh Ceramic Soc,**4**, 1, 19 (1967).

[7] MIDGLEY H. G., CHOPRA S. K., *Hydrothermal reactions between lime and aggregate fines*. Mag. Concr. Res., **12**, 73 (1960).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, R. Sersale e C. Corradini.

A proposito di una caratterizzazione delle funzioni reali derivabili quasi ovunque

Nota di CIRO ESPOSITO (a Napoli) *
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 6 novembre 1976)

RIASSUNTO. — Viene data una semplice dimostrazione di un teorema di B. PETTINEO che caratterizza le funzioni reali derivabili quasi ovunque.

SUMMARY. — The author gives a simple proof of PETTINEO's theorem concerning almost everywhere differentiable real functions.

È ben noto il seguente teorema (banale corollario di un classico teorema [1] di DENJOY [1], YOUNG [2], SAKS [3]) che fornisce alcune significative caratterizzazioni delle funzioni reali derivabili quasi ovunque:

Qualunque sia la funzione reale f definita nell'intervallo X *di* R, *le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *f è derivabile quasi ovunque;*

b) $D^+ f(x) \neq +\infty$ *e* $D_+ f(x) \neq -\infty$ *quasi ovunque;*

c) $D^+ f(x) \neq +\infty$ *e* $D^- f(x) \neq +\infty$ *quasi ovunque;*

d) $D_+ f(x) \neq -\infty$ *e* $D_- f(x) \neq -\infty$ *quasi ovunque;*

e) $D^- f(x) \neq +\infty$ *e* $D_- f(x) \neq -\infty$ *quasi ovunque.*

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni.

[1] Il teorema è il seguente:

Se f è una funzione reale definita nell'intervallo I *di R, per quasi ogni punto x di* I *le derivate superiore destra ed inferiore sinistra di f in x sono reali ed uguali o infinite e disuguali; più precisamente, nel secondo caso la prima è* $+\infty$ *e la seconda è* $-\infty$.

Naturalmente, analogo teorema sussiste per le derivate superiore sinistra ed inferiore destra.

Alquanto recentemente, B. PETTINEO [4] ha dato la seguente ulteriore caratterizzazione:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione reale f, definita nell'intervallo limitato X *di* R, *sia derivabile quasi ovunque è che f sia quasi a variazione limitata in* X [2].

In questa nota fornisco una semplice dimostrazione di tale teorema di G. PETTINEO fruendo dell'enunciato corollario del citato teorema di DENJOY-YOUNG-SAKS.

1. Allo scopo di provare la necessarietà della condizione di cui all'enunciato teorema di B. PETTINEO, denotato con σ un numero reale positivo, indichiamo con C una parte chiusa di X in cui f è derivabile, tale che [3]

$$\mu(X - C) < \frac{\sigma}{2}$$

Ciò premesso, qualunque sia il numero intero positivo n, desidesigniamo con C_n la parte di C costituita dagli elementi x per i quali è vera l'implicazione:

$$\left(y \in X \quad \text{e} \quad |y - x| < \frac{1}{n} \right) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq n\,|y - x| \ .$$

È immediato verificare che (C_n) è una successione crescente di insiemi chiusi convergente verso C [4].

[2] Si dice che f è a variazione limitata nel sottoinsieme chiuso C di X quando esistono due numeri reali positivi ℓ e δ tali che risulti:

$$\sum_i |f(y_i) - f(x_i)| < \ell$$

per ogni famiglia finita $([x_i, y_i])$ di intervalli chiusi non sovrapponentisi di lunghezza minore di δ aventi gli estremi in X e intersezione non vuota con C.

Si dice che f è quasi a variazione limitata in X se, qualunque sia il numero reale positivo σ, esiste un sottoinsieme chiuso C di X, in cui f sia a variazione limitata, tale che X − C abbia misura minore di σ (cfr. [4]).

[3] Con il simbolo μ denotiamo la misura di Lebesgue in R.

[4] La successione è ovviamente crescente in quanto, qualunque siano $n \in N$, $x \in C_n$ e $y \in X$, sussiste l'implicazione:

$$|y - x| < \frac{1}{n+1} \Rightarrow |y - x| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq n\,|y - x| \leq (n+1)\,|y - x| \ .$$

Allo scopo di verificare che l'insieme C_n è chiuso per ogni intero positivo n, basta far vedere che, qualunque siano il punto x di C d'accumulazione per C_n e il punto y di X tali che $|y - x| < 1/n$, risulta $|f(y) - f(x)| \leq n\,|y - x|$.

Detto allora m un numero intero positivo godente della proprietà:

$$\mu(C - C_m) < \frac{\sigma}{2},$$

f è a variazione limitata in C_m.

Invero, per ogni famiglia finita $([x_i, y_i])$ di intervalli chiusi aventi gli estremi in X, privi, a due a due, di punti interni comuni, ciascuno dei quali sia non disgiunto da C_m ed abbia lunghezza minore di $1/m$, risulta:

$$\sum_i |f(y_i) - f(x_i)| \leq \sum_i (|f(y_i) - f(z_i)| + |f(z_i) - f(x_i)|)$$

sempreché, per ogni i, z_i sia un punto di $[x_i, y_i] \cap C_m$, ciò che implica:

$$\sum_i |f(y_i) - f(x_i)| \leq m \sum_i (y_i - x_i) \leq m(\sup X - \inf X).$$

La condizione è sufficiente.

All'uopo, a norma del citato corollario del teorema di DENJOY-YOUNG-SAKS, basterà dimostrare che le parti di X:

$$A = \{x \in X : D^+ f(x) = +\infty\}, \qquad B = \{x \in X : D^- f(x) = +\infty\}$$

hanno misura nulla.

All'uopo, detta (x_k) una successione di punti di C_n convergente verso x e denotato con m un numero naturale tale che:

$$|y - x_k| < \frac{1}{n} \qquad \text{per ogni } k \geq m,$$

basta osservare che, risultando:

$$|f(y) - f(x_k)| \leq n |y - x_k| \qquad \text{per ogni } k \geq m,$$

si ha, per la continuità di f in x:

$$|f(y) - f(x)| \leq n |y - x|.$$

Infine, per completare la nostra verifica, basta osservare che, se x è un elemento di C, detto p un numero intero positivo maggiore di $|f'(x)|$, esiste un numero naturale q tale che:

$$\left(y \in X \text{ e } |y - x| < \frac{1}{q}\right) \Rightarrow \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| < p.$$

Invero, denotato con n il più grande dei numeri p e q, risulta $x \in C_n$.

A tale scopo, denotiamo con (C_n) una successione di parti chiuse di X, in ognuna delle quali f è a variazione limitata, tale che:

$$\mu(X - \bigcup_n C_n) = 0$$

e supponiamo, per assurdo, che esista un numero intero positivo k tale che $A \cap C_k$ abbia misura positiva.

Qualunque sia $x \in A \cap C_k$, per ogni coppia (ε, δ) di numeri reali positivi, esiste un punto y di X ta le che:

$$0 < y - x < \delta \qquad \text{e} \qquad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \varepsilon .$$

Conseguentemente, qualunque siano i numeri reali positivi ℓ e δ, l'insieme degli intervalli chiusi non degeneri $[x, y]$ aventi il primo estremo in $A \cap C_k$ e il secondo in X, tali che:

$$y - x < \delta \qquad \text{e} \qquad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{\ell}{\mu(A \cap C_k)} ,$$

è un ricoprimento di Vitali di $A \cap C_k$.

Detta allora $\mathcal{G}$ una parte finita o numerabile del suddetto insieme, i cui elementi siano, a due a due, disgiunti, verificante la condizione:

$$\mu(A \cap C_k - \bigcup_{I \in \mathcal{G}} I) = 0 ,$$

risulta ovviamente:

$$\sum_{I \in \mathcal{G}} |f(\sup I) - f(\inf I)| > \frac{\ell}{\mu(A \cap C_k)} \sum_{I \in \mathcal{G}} (\sup I - \inf I) \geq \ell .$$

Ciò è palesemente in contrasto con il fatto che f è a variazione limitata in C_k.

L'asserto, quando si rilevi che analogo ragionamento può essere fatto a riguardo di B, è dimostrato.

Lavoro svolto presso l'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze M., F. e N. della Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. DENJOY, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues,* Journal de Math., (7), **1** (1915), 105-240.

[2] G. C. YOUNG, *On infinite derivates,* Quaterly Journal of Math., **47** (1916), 148-153; *On the derivates of a function,* Proc. London Math Soc., (2), **15** (1916), 360-384.

[3] S. SAKS, *Sur les nombres dérivés des fonctions,* Fundamenta Math., **5** (1924), 98-104.

[4] B. PETTINEO, *Sulla derivabilità delle funzioni,* Atti dell'Accad. Naz. Lincei, Memorie, S. VIII, Vol. VII (6), (1965), 143-169.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, C. Tolotti e C. Miranda.

Sulla stabilità non lineare in media di una miscela convettiva termodiffusa binaria *

Nota di MICHELE MAIELLARO **
presentata dal socio ordinario CARLO TOLOTTI

(Adunanza del 6 novembre 1976)

RIASSUNTO. — Si applica la teoria della stabilità in media ad una miscela binaria con interazioni tra diffusione termica e conducibilità termica diffusiva, per domini limitati in almeno una direzione e nel caso generale di perturbazioni tridimensionali. Si determina un criterio di stabilità asintotica esponenziale, si dimostra un teorema di unicità e si applica il criterio ottenuto ai moti stazionari alla Reyleigh-Jeffreys in uno strato obliquo.

SUMMARY. — We apply the theory of stability in the mean to a binary mixture with interactions between thermal diffusivity and diffusive thermal conductivity, for in at least one direction bounded domains and for the general case of tridimensional perturbations. We establish a sufficient condition for the asymptotic exponential stability, we prove a uniqueness theorem and we apply the condition so obtained to the Rayleigh-Jeffreys staedy flows into a slant layer.

1. - INTRODUZIONE.

In un precedente lavoro [1] considerando tre classi di moti piani alla Couette-Benard di una miscela fluida binaria in uno strato piano, abbiamo studiato l'influenza delle interazioni tra la diffusione termica e la conducibilità termica diffusiva e l'influenza dell'orientamento dello strato sulla stabilità non lineare in media di tali moti rispetto a perturbazioni finite laminari *unidimensionali* (dipendenza da una sola variabile spaziale). Servendoci del metodo dell'energia e di un teorema stabilito in [2], [3], abbiamo determinato una condizione sufficiente per la stabilità asintotica in media in queste classi

* Lavoro eseguito nell'ambito della sezione n. 2 del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

** Istituto di Meccanica Razionale dell'Università di Bari.

ed abbiamo anche migliorato tale condizione dimostrando, con tecniche variazionali, la incondizionata stabilità asintotica di questi moti. Successivamente [4] abbiamo esteso questo studio al caso magnetoidrodinamico, dimostrando, con le tecniche della teoria dei semigruppi di trasformazioni lineari limitate ed in un opportuno spazio di Banach, l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di evoluzione per perturbazioni laminari unidimensionali finite ed accertando, anche in questo caso M.H.D., la incondizionata stabilità asintotica in norma di tali moti.

In questa Nota si riprende il problema e, in migliore accordo con la realtà fisica, si abbandona l'ipotesi della unidimensionalità.

Dopo aver richiamato (n. 2) le equazioni che governano i moti della miscela nello schema di Boussinesq ed in presenza di conducibilità termica diffusiva, si scrivono innanzitutto (n. 2) le equazioni che reggono i moti della miscela possibili in un dominio S dello spazio, di frontiera Σ, quando su Σ, oltre alla velocità, sono assegnate la temperatura e la concentrazione. Ottenute quindi (n. 2) in una opportuna forma adimensionale le equazioni di evoluzione delle perturbazioni ai moti sulle condizioni iniziali, applicando il metodo dell'energia ed il teorema dato in [3], si determina (n. 3) un criterio di stabilità asintotica esponenziale in media dei moti, stazionari o non, della miscela, rispetto *a perturbazioni tridimensionali,* per un dominio S limitato in almeno una direzione [5] [6] e si dimostra un teorema di unicità.

Successivamente (n. 4), dopo aver tradotto in termini variazionali il problema della stabilità [7], si determina la migliore condizione sufficiente per la stabilità asintotica esponenziale in media.

Infine (n. 5) si applica il criterio ottenuto al n. 3 al caso che il dominio sia costituito da uno strato piano obliquo limitato da due piani rigidi — di cui uno fisso e l'altro uniformemente traslante con assegnata velocità — e, nell'ipotesi che su tali piani siano assegnate inoltre temperatura e concentrazione, si mette in evidenza l'influenza dell'inclinazione dello strato sulla stabilità dei moti stazionari alla Rayleigh-Jeffreys.

2. - Formulazione del problema e preliminari analitici.

Le equazioni indefinite che reggono i moti convettivi termodiffusivi nella dinamica delle miscele fluide binarie, tenendo conto degli effetti delle interazioni tra la diffusione termica e la conducibilità termica diffusiva [8] [9] [10] nelle ipotesi della quasi incompressibilità, della variazione lineare della densità con la tempe-

ratura e la concentrazione e nell'ambito dello schema di Boussinesq [11] [12] sono:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p + \nu\,\Delta_2\,\mathbf{v} + [1-\beta_1(T-T_0) + s\,\beta_2(C-C_0)]\,\mathbf{g} \\ \dfrac{d\,T}{d\,t} = (K_T + N\,\lambda^2\,K_C)\,\Delta_2\,T + N\,\lambda\,k_C\,\Delta_2\,C \\ \dfrac{d\,C}{d\,t} = \lambda\,k_C\,\Delta_2\,T + k_C\,\Delta_2\,C \\ \rho = \rho_0\,[1 - \beta_1(T - T_0) + s\,\beta_2(C - C_0) \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{v}$, g, T, p sono rispettivamente il campo cinetico, l'accelerazione di gravità, la temperatura e la pressione della miscela; C è la concentrazione di uno dei componenti, ρ è la densità, misurate a partire da valori medi di riferimento T_0 e C_0. Le costanti positive ρ_0, β_1 e β_2 sono implicitamente definite dalla (1_4) ove s vale $+1$ o -1 secondo che la densità del soluto è maggiore o minore di quella del solvente. Le costanti positive ν, k_T, k_C e λ rappresentano, nell'ordine, il coefficiente di viscosità cinematica, di conducibilità termometrica, di diffusione e di termodiffusione; N infine è il coefficiente termodinamico positivo che definisce insieme a λ gli effetti della conducibilità termica diffusiva [8] [10].

Detto S un dominio variabile dello spazio, di frontiera Σ, sia J l'insieme dei moti della miscela dinamicamente possibili in S, regolari — ossia di classe C^1 rispetto a tutte le variabili, con derivate spaziali seconde generalmente continue in $S \times [0, \infty[$ e con grad T e grad C di modulo limitato in S — soluzioni delle (1) sotto le seguenti condizioni al contorno:

$$(2)\qquad \mathbf{v}(P,t) = \mathbf{v}_\Sigma\,,\qquad T(P,t) = T_0\,,\qquad C(P,t) = C_0\,,$$

$$\forall\,(P,t) \in \Sigma \times [0,\infty]\,,$$

con $\mathbf{v}_\Sigma$, T_0, C_0 funzioni assegnate.

Dal punto di vista fisico la (2_1) è la condizione di aderenza alle pareti rigide in moto prefissato, dovuta alla viscosità, mentre (2_2) e (2_3), assegnando temperatura e concentrazione su Σ, riguardano il caso di superficie ottime conduttrici.

Considerato un moto imperturbato $\mathfrak{M}$:

$$(3)\qquad [\mathbf{v}(P,t)\,,\quad p(P,t)\,,\quad T(P,t)\quad C(P,t)]\,,$$

soddisfacente alle seguenti condizioni iniziali

$$(4) \qquad \mathbf{v}(P,0) = \mathbf{V}_0(P), \quad T(P,0) = T^{(0)}(P), \quad C(P,0) = C^{(0)}(P), \qquad \forall P \in S(0),$$

con $T^{(0)}$ e $C^{(0)}$ funzioni assegnate, indicata con

$$(5) \qquad [\mathbf{u}(P,t), \quad \Delta p(P,t), \quad \vartheta(P,t), \quad \gamma(P,t)]$$

una qualsiasi perturbazione regolare di velocità $\mathbf{u}$, pressione Δp, temperatura ϑ e concentrazione γ, associata a variazioni delle condizioni iniziali (4), tale che il moto perturbato

$$(6) \qquad [\mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad p + \Delta p, \quad T + \vartheta, \quad C + \gamma],$$

sia un elemento della classe J, ed indicata con

$$(7) \qquad E(t) = \frac{1}{2} \int_S (a_1 u^2 + a_2 \vartheta^2 + a_3 \gamma^2)\, d\,S$$

l'energia totale della perturbazione, ci proponiamo di studiare la stabilità in media del moto (3) in J, rispetto alle perturbazioni (5), ossia di determinare un criterio atto ad assicurare che

$$(8) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni' E(0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow E(t) < \varepsilon, \qquad \forall t \geq 0;$$

e di studiare la stabilità asintotica esponenziale in media, ossia

$$(9) \qquad \forall E(0) \ \exists k > 0 \ni' (E(t) \leq E(0) \cdot \exp(-k\,t), \qquad \forall t \geq 0.$$

Il moto imperturbato (3) ed il moto perturbato (6) verificano entrambi le (1) e (2), pertanto la perturbazione (5) verifica il sistema

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} - (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \operatorname{grad} \mathbf{u} - \dfrac{1}{\rho_0} \operatorname{grad}(\Delta p) + \\ \qquad + \nu \Delta_2 \mathbf{u} + (\beta_1 \theta - s\,\beta_2 \gamma)\, g\, \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} T - (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \operatorname{grad} \theta + (k_T + N \lambda^2 k_c) \Delta_2 \theta + \\ \qquad + N \lambda k_c \Delta_2 \gamma \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C - (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \operatorname{grad} \gamma + \lambda k_c \Delta_2 \theta + k_c \Delta_2 \gamma \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

con le condizioni al contorno ed iniziali

$$(11)\quad \begin{cases} \mathbf{u}(P,t) = \theta(P,t) = \gamma(P,t) = 0\,, & \forall\,(P,t) \in \Sigma \times [0,\infty[\\ \mathbf{u}(P,0) = \mathbf{u}_0(P),\ \ \theta(P,0) = \theta^{(0)}(P),\ \ \gamma(P,0) = \gamma^{(0)}(P), & \forall P \in S(0) \end{cases}$$

con $\mathbf{u}_0(P)$, $\theta^{(0)}(P)$, $\gamma^{(0)}(P)$ funzioni regolari assegnate, e con $\mathbf{k}$ versore della verticale ascendente.

L'adimensionalizzazione

$$(x, y, z) \to (x'\,d, y'\,d, z'\,d),\quad t \to \frac{d^2}{\nu}\,t',\quad \mathbf{u} \to \frac{\nu}{d}\,\mathbf{u}',$$

$$\theta \to \frac{\nu\,\alpha_m\,d}{k_T}\,\theta',\quad \gamma \to \frac{\nu\,\beta_m\,d}{k_C}\,\gamma',\quad p \to \frac{\rho_0\,\nu^2}{d^2}\,p',$$

consente di scrivere le equazioni (10) nella forma adimensionale seguente (riscrivendo per comodità le nuove variabili senza apici):

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\,\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} - (\mathbf{v}+\mathbf{u})\cdot\operatorname{grad}\mathbf{u} - \operatorname{grad}(\Delta\,p) + \\ \qquad + \Delta_2\,\mathbf{u} + (R_a\,\theta - s\,R_c\,\gamma)\,\mathbf{k} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = -\,\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}T - (\mathbf{v}+\mathbf{u})\cdot\operatorname{grad}\theta + \dfrac{1}{P_r}\,(\lambda^2\,N\,r_D\,\Delta_2\,\theta + \\ \qquad + \lambda\,N\,\sigma\,\Delta_2\,\gamma + \Delta_2\,\theta) \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = -\,\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}C - (\mathbf{v}+\mathbf{u})\cdot\operatorname{grad}\gamma + \\ \qquad + \dfrac{1}{S_c}\left(\lambda\,\dfrac{r_D}{\sigma}\,\Delta_2\,\theta + \Delta_2\,\gamma\right) \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

con le condizioni al contorno ed iniziali (11), ovviamente nella versione adimensionale.

Nelle (12)

$$P_r = \frac{\nu}{k_T},\quad S_c = \frac{\nu}{k_C},\quad r_D = \frac{k_C}{k_T},\quad R_a = \frac{\beta_1\,g\,\alpha_m\,d^4}{\nu\,k_T},\quad R_C = \frac{\beta_2\,g\,\beta_m\,d^4}{\nu\,k_C}$$

sono rispettivamente i numeri adimensionali di Prandtl, di Schmidt, di Lewis, di Rayleigh e di Rayleigh associato alla concentrazione, con

$$\alpha_m = \sup|\operatorname{grad}T|\,,\qquad \beta_m = \sup|\operatorname{grad}C|\,.$$

Inoltre, nelle (12_2) e (12_3), $\sigma = \beta_m/\alpha_m$.
Considerata l'energia della perturbazione

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} (u^2 + r_{\mathrm{D}}^2\ \theta^2 + \mathrm{N}\,\sigma^2\,\gamma^2)\,d\,\mathrm{S}\,, \tag{13}$$

e nelle ipotesi che, nel caso di un dominio S non limitato, $\mathbf{u}$, ϑ, γ siano infinitesime in media, d'ordine maggiore di due, all'infinito, sommando le (12_1), (12_2), (12_3), dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\mathbf{u}$ (scalaramente), $r_{\mathrm{D}}^2\,\theta$, $\mathrm{N}\,\sigma^2\,\gamma$, ed integrando in S, per i teoremi del trasporto, della divergenza, di Gauss, e tenendo conto di (12_4) e (11_1), dopo agevoli calcoli, si ha:

$$\frac{d\,\mathrm{E}}{d\,t} = -\,(\mathfrak{D} + \mathfrak{I}) \tag{14}$$

con $\mathfrak{D}$ ed $\mathfrak{I}$ funzionali quadratici, rispettivamente definitivo positivo e indefinito, dati da:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \int_{\mathrm{S}} \Big[\,\mathrm{grad}\,\mathbf{u} : \mathrm{grad}\,\mathbf{u} + \frac{r_{\mathrm{D}}}{\mathrm{S}_c}\,\mathrm{grad}^2\,\theta + \\ &\quad + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}_c}\,(\lambda\, r_{\mathrm{D}}\,\mathrm{grad}\,\theta + \sigma\,\mathrm{grad}\,\gamma)^2\,\Big]\,d\,\mathrm{S} \\ \mathfrak{I} &= \int_{\mathrm{S}} [\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u} - (\mathrm{R}_a\,\theta - s\,\mathrm{R}_c\,\gamma)\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} + \\ &\quad + (r_{\mathrm{D}}^2\,\theta\,\mathrm{grad}\,\mathrm{T} + \mathrm{N}\,\sigma^2\,\gamma\,\mathrm{grad}\,\mathrm{C})\cdot\mathbf{u}]\,d\,\mathrm{S}\,, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ove $\mathbf{D}$ è il tensore velocità di deformazione del moto imperturbato.

Dalle (14) e (15) segue agevolmente che sussiste la seguente proposizione:

Per qualsiasi dominio, limitato o meno, ogni moto regolare (3), *stazionario o non, è stabile in media rispetto a perturbazioni puramente conduttive-diffusive.*

3. - UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE DI STABILITÀ INCONDIZIONATA PER DOMINI LIMITATI IN ALMENO UNA DIREZIONE.

Introdotti i funzionali

$$(16)\qquad X_1 = \left(\int_S u^2 \, d\,S \right)^{1/2}, \quad X_2 = \left(\int_S \theta^2 \, d\,S \right)^{1/2}, \quad X_3 = \left(\int_S \gamma^2 \, d\,S \right)^{1/2},$$

e nell'ipotesi che S sia limitato in almeno una direzione, per le diseguaglianze di Poincaré e Schwarz, si ha:

$$(17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_S (\operatorname{grad} \mathbf{u} : \operatorname{grad} \mathbf{u}) \, d\,S \geq \delta \, X_1^2 \\ \displaystyle\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \, d\,S \geq - R_e^{*} \, X_1^2 \\ \displaystyle\int_S \operatorname{grad}^2 \theta \, d\,S \geq \varepsilon \, X_2^2 \\ \displaystyle\int_S \operatorname{grad}^2 \gamma \, d\,S \geq \varepsilon \, X_3^2 \\ \displaystyle\int_S (\lambda \, r_D \operatorname{grad} \theta + \sigma \operatorname{grad} \gamma)^2 \, d\,S \geq \varepsilon \, (\lambda \, r_D \, X_2 - \sigma \, X_3)^2 , \end{cases}$$

e

$$\left| \int_S (R_a \, \theta - s \, R_c \, \gamma) \, \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \, d\,S \right| \leq R_a \, X_1 \, X_2 + R_c \, X_1 \, X_3$$

$$\left| \int_S (r_D^2 \, \theta \operatorname{grad} T + N \, \sigma^2 \, \gamma \operatorname{grad} C) \cdot \mathbf{u} \, d\,S \right| \leq$$

$$\leq \frac{r_D^2}{P_r} \, X_1 \, X_2 + \frac{N \, \sigma^2}{S_c} \, X_1 \, X_3 ,$$

con δ, R_e^{*} ed ε [1] opportune costanti adimensionali positive [2]. Da (14) e (15), per le (16) e (17) segue agevolmente:

$$(18)\qquad \frac{d\,E}{d\,t} \leq (P - 0) \cdot \mathbf{A} \cdot (P - 0)$$

con $P - 0 = X_i \, \mathbf{e}_i$, $\{0, \mathbf{e}_i\}$ riferimento ortonormale arbitrariamente

[1] $R_e^{*} = m \, d^2/\nu$, ove m è l'opposto dell'estremo inferiore dei valori caratteristici del tensore velocità di deformazione del moto imperturbato e d è l'estremo superiore

fissato in uno spazio E_3 ed il tensore doppio simmetrico **A** di componenti A^{ij}, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, date da:

$$(19)\qquad \begin{cases} a^{11} = R_e^* - \delta & a^{22} = -\dfrac{\varepsilon r_D}{S_c}(1 + N\lambda^2 r_D) \\ a^{33} = -\dfrac{\varepsilon N \sigma^2}{S_c} & a^{12} = \dfrac{1}{2}\left(R_a + \dfrac{r_D^2}{P_r}\right) \\ a^{13} = \dfrac{1}{2}\left(R_c + \dfrac{N\sigma^2}{S_c}\right) & a^{23} = \dfrac{\varepsilon N \lambda \sigma r_D}{S_c}\,. \end{cases}$$

Per un noto teorema sulla stabilità asintotica esponenziale in media [3], da (18) e (19) si ha quindi la seguente proposizione:

Nell'ipotesi che il dominio S *sia limitato in almeno una direzione, condizione sufficiente affinché il moto* $(\mathbf{v}, p, T, C) \in J$ *sia asintoticamente ed esponenzialmente stabile in media in* J *è che sia:*

$$(20)\qquad a^2 + b^2 < 1\,,$$

ove

$$a^2 = R_e^*/\delta\,, \qquad b^2 = (1/\varepsilon\delta)\max[\mathcal{R}^2 + \mathcal{S}^2, \mathcal{T}^2]\,,$$

con

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}^2 = \dfrac{S_c}{4N\sigma^2}\left(R_c + \dfrac{N\sigma^2}{S_c}\right)^2 \\ \mathcal{S}^2 = \dfrac{S_c}{4 r_D \sigma^2}\left[\sigma\left(R_a + \dfrac{r_D^2}{P_r}\right) + \lambda r_D\left(R_c + \dfrac{N\sigma^2}{S_c}\right)\right]^2 \\ \mathcal{T}^2 = \dfrac{S_c\left(R_a + \dfrac{r_D^2}{P_r}\right)^2}{4 r_D (1 + N\lambda^2 r_D)}\,. \end{cases}$$

del diametro di S; ε e δ dipendono dalla forma di S: per un dominio di forma generica si può assumere $\varepsilon = 3$ e $\delta \simeq 80$.

Avendosi inoltre da (14) e (15)

$$\frac{d\,\mathrm{E}}{d\,t} \leq -\,\mathfrak{I}\,,$$

per le (17_2), (17_6), (17_7) e la diseguaglianza di Cauchy, segue:

$$\frac{d\,\mathrm{E}}{d\,t} \leq \xi\,\mathrm{E}\,,$$

con

$$\xi = \max\left[\left(2\,\mathrm{R}_e^{*} + \mathrm{R}_a + \mathrm{R}_c + \frac{r_{\mathrm{D}}^2}{\mathrm{P}_r} + \frac{\mathrm{N}\,\sigma^2}{\mathrm{S}_c}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{\mathrm{P}_r} + \frac{\mathrm{R}_a}{r_{\mathrm{D}}^2}\right),\left(\frac{1}{\mathrm{S}_c} + \frac{\mathrm{R}_c}{\mathrm{N}\,\sigma^2}\right)\right],$$

da cui

$$\frac{d}{d\,t}\left[\mathrm{E}\cdot\exp\left(-\,\xi\,t\right)\right] \leq 0$$

e quindi, se $\mathrm{E}\,(\mathrm{O}) = 0$, il seguente

TEOREMA DI UNICITÀ: *Il moto* $\mathfrak{M}$ *determinato dalle* (1), (2), *e* (4), *se esiste, è unico.*

4. - FORMULAZIONE VARIAZIONALE DEL PROBLEMA DI STABILITÀ.

Dimostreremo ora una ulteriore notevole diseguaglianza della energia totale della perturbazione allo scopo di ottenere, con tecniche variazionali, il miglior limite di stabilità asintotica esponenziale in media per i moti regolari della miscela, stazionari o non, in un dominio limitato.

Indicato ancora con S tale dominio e detto ξ un parametro positivo arbitrario di accoppiamento, introduciamo, in variabili adimensionali ed omettendo gli apici, la famiglia di funzionali del tipo di Lyapounov:

$$\mathrm{E}\,(\xi, t) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \left(\xi\,u^2 + r_{\mathrm{D}}^2\,\theta^2 + \mathrm{N}\,\sigma^2\,\gamma^2\right) d\,\mathrm{S} \tag{22}$$

e definiamo i seguenti funzionali:

$$
(23)\quad \begin{cases}
\mathfrak{D}_1(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \int_S \operatorname{grad}^2 \mathbf{u}\, d\,S\,; \quad \mathfrak{D}_2(\mathfrak{M},\theta,\theta) = \\
= \dfrac{1}{P_r}(1 + N\lambda^2 r_D)\int_S \operatorname{grad}^2\theta\, d\,S\,; \quad \mathfrak{D}_3(\mathfrak{M},\gamma,\gamma) = \\
= \dfrac{1}{S_C}\int_S \operatorname{grad}^2\gamma\, d\,S\,; \quad \mathfrak{D}_\xi(\mathfrak{M},\xi,\mathbf{u},\theta,\gamma) = \xi\,\mathfrak{D}_1 + r_D^2\,\mathfrak{D}_2 + \\
+ N\sigma^2\mathfrak{D}_3;\ \mathfrak{F}_0(\mathfrak{M},\mathbf{u},\mathbf{u}) = -\int_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}\, d\,S\,; \quad \mathfrak{F}_1(\mathfrak{M},\theta,\gamma) = \\
= -\dfrac{2N\lambda\sigma r_D}{S_C}\int_S \operatorname{grad}\theta\operatorname{grad}\gamma\, d\,S;\ \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M},\theta,\mathbf{u}) = \\
= R_a\int_S \theta\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}\, d\,S\,;\ \mathfrak{F}_3(\mathfrak{M},\theta,\mathbf{u}) = -r_D^2\int_S \theta\,\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}T\, d\,S\,; \\
\mathfrak{F}_4(\mathfrak{M},\gamma,\mathbf{u}) = -s\,R_C\int_S \gamma\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}\, d\,S\,; \quad \mathfrak{F}_5(\mathfrak{M},\gamma,\mathbf{u}) = \\
= -N\sigma^2\int_S \gamma\,\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}C\, d\,S \\
\Phi_1 = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_5\,; \quad \Phi_2 = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_4\,; \\
\mathfrak{F}_\xi(\mathfrak{M},\xi,\mathbf{u},\theta,\gamma) = \Phi_1 + \xi\,\Phi_2\,.
\end{cases}
$$

Da (12) (14) (15) (22) (23) segue agevolmente:

$$
(24)\qquad \frac{\partial E(\xi,t)}{\partial t} = -\mathfrak{D}_\xi + \mathfrak{F}_\xi\,.
$$

Siano poi

$$
(25)\qquad \begin{cases}
\zeta_\xi = \sup_{\mathfrak{S}} \dfrac{\mathfrak{F}_\xi}{\mathfrak{D}_\xi} \\
\sigma_\xi = \sup_{\mathfrak{S}} \dfrac{\mathfrak{D}_\xi}{E_\xi}\,,
\end{cases}
$$

dove $\mathcal{S}$ è un opportuno spazio funzionale i cui elementi $\mathbf{f}$ sono definiti come segue:

$$\mathbf{f} = \{f_i\,,\ i \in \{1\,,\ldots,5\};\ f_i = u_j\,,\ j \in \{1,2,3\}\,,$$

$$f_4 = \vartheta\,,\ f_5 = \gamma\ ;\ \Sigma_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0\,,\ [f_i]_{as} = 0\}\,,$$

con le funzioni f_i sufficientemente regolari, e si noti esplicitamente che, nel caso di un campo di moto S limitato, con procedimenti del tutto analoghi a quelli seguiti in [7] si può provare l'esistenza di ζ_ξ. Quanto all'esistenza di σ_ξ, questa è assicurata dalla validità della diseguaglianza di Poincarè ed inoltre la positività di σ_ξ ne discende come diretta conseguenza.

Dalle (24), (25), posto che sia $\zeta_\xi < 1$, si deduce agevolmente:

$$\frac{\partial E}{\partial t} \leq -(1 - \zeta_\xi)\,\sigma_\xi\,E\,, \tag{26}$$

da cui, indicati con

$$\begin{cases} \bar{\zeta} = \max\limits_{\xi,t} \zeta(\xi, t) \\ \bar{\sigma} = \min\limits_{\xi,t} \sigma(\xi, t)\,, \end{cases} \tag{27}$$

segue la ulteriore diseguaglianza fondamentale dell'energia:

$$E \leq E_o \exp[\quad \bar{\sigma}(1 \quad \bar{\zeta}) \cdot t] \tag{28}$$

e sussiste pertanto la seguente proposizione:

Condizione sufficiente affinché il moto $\mathfrak{M}$ *sia asintoticamente ed esponenzialmente stabile in media nella propria classe è che*:

$$\bar{\zeta} < 1\,. \tag{29}$$

Dalla diseguaglianza dell'energia ora ottenuta appare chiaramente il legame esistente tra il massimo del rapporto funzionale (25_1) e la stabilità asintotica esponenziale in media [7]. Determinare $\zeta(\xi, t)$, al

variare di $(\mathbf{u}, \theta, \gamma)$ in $\mathcal{S}$ equivale a determinare il massimo del funzionale (23_7):

$$(30) \qquad \mathfrak{F}_\xi = \int_S \Big[- \frac{2\,N\,\lambda\,\sigma\,r_D}{S_C} \operatorname{grad}\theta \operatorname{grad}\gamma - r_D^2\,\theta\,\mathbf{u}\operatorname{grad}T - $$

$$- N\,\sigma^2\,\gamma\,\mathbf{u}\operatorname{grad}C - \xi\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{u} - R_a\,\theta\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{k} + s\,R_C\,\gamma\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\Big]\,dS\,,$$

sotto le seguenti condizioni al contorno, indefinita e di normalità

$$(31) \qquad \begin{cases} \mathbf{u} = \theta = \gamma = 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \\ \xi\,\mathfrak{D}_1 + r_D^2\,\mathfrak{D}_2 + N\,\sigma^2\,\mathfrak{D}_3 = 1\,. \end{cases}$$

Introdotti i moltiplicatori di Lagrange $-\ell_\xi$ e $2\,\ell_\xi\cdot\psi(x, y, z, t)$, ne consegue il problema variazionale:

$$(32) \qquad \begin{cases} \delta \int_S (\mathfrak{F}_\xi - \ell_\xi\,\mathfrak{D}_\xi + 2\,\ell_\xi\,\psi\operatorname{div}\mathbf{u})\,dS = 0 & \forall P \in S \\ \mathbf{u} = \theta = \gamma = 0 & \forall P \in \partial S \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \forall P \in S\,. \end{cases}$$

Dalla $(32_1$ si ottengono le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$(33) \qquad \begin{cases} 2\,\xi\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{u} + (r_D^2\operatorname{grad}T - \xi\,R_a\,\mathbf{k})\,\theta + (N\,\sigma^2\operatorname{grad}C + \xi\,s\,R_C\,\mathbf{k})\,\gamma = \\ \qquad = 2\,\ell_\xi\,(\xi\,\Delta_2\,\mathbf{u} - \operatorname{grad}\psi) \\ (r_D^2\operatorname{grad}T - \xi\,R_a\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{u} = 2\,r_D^2\,\ell_\xi\,\dfrac{1 + N\,\lambda^2\,r_D}{P_r}\,\Delta_2\,\theta + \\ \qquad + \dfrac{2\,N\,\lambda\,\sigma\,r_D}{S_C}\,\Delta_2\,\gamma \\ (N\,\sigma^2\operatorname{grad}C + \xi\,s\,R_c\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{u} = \dfrac{2\,N\,\lambda\,\sigma\,r_D}{S_C}\,\Delta_2\,\theta + \dfrac{2\,N\,\sigma^2}{S_C}\,\ell_\xi\,\Delta_2\,\gamma\,, \end{cases}$$

cui vanno aggiunte le condizioni (31).

Si osservi che tra gli autovalori e le autofunzioni del sistema (31), (33), normalizzate in modo che $\mathfrak{D}_\xi = 1$, sussiste la relazione

$$\ell_\xi = \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \xi, \mathbf{u}, \theta, \gamma) \tag{34}$$

che segue infatti agevolmente dalle equazioni di Eulero-Lagrange (33), sommandole dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\mathbf{u}, \theta, \gamma$ ed integrate in S. Dimostrato che — almeno nello spazio $W_2^{(1)}$ delle funzioni dotate di derivate generalizzate —, con procedimento del tutto analogo a quello seguito in [13] al n. 7, esistono, per ogni fissato $\xi > 0$ le funzioni $(\mathbf{u}^*, \theta^*, \gamma^*)$ estremanti il funzionale (30) sotto le condizionoi (31) ed ammesso che — come avviene in genere per i funzionali del tipo (30) — queste funzioni estremanti siano autofunzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange (33), posto che per tali equazioni esista un sistema completo di autofunzioni, dalle (25_1) e (34) segue:

$$\zeta_\xi = \sup \ell_\xi \tag{35}$$

ossia ζ_ξ è il massimo dell'insieme di tutti gli autovalori ℓ_ξ delle equazioni di Eulero-Lagrange relative al rapporto $\mathfrak{F}_\xi/\mathfrak{D}_\xi$ e, posto che si conosca un insieme di autovalori ℓ_ξ le cui corrispondenti autofunzionoi costituiscono un sistema completo, l'estremo superiore di tale insieme dà senz'altro ζ_ξ.

Avendosi inoltre $\bar{\zeta} = \max_{\xi, \ell} \sup \ell_\xi$, da (29) consegue infine che:

La migliore condizione sufficiente per la stabilità asintotica esponenziale in media di un moto $\mathfrak{M}$ (3) *nella classe* J *è data da:*

$$\max_{\xi, \ell} \sup \ell_\xi < 1 . \tag{36}$$

5. - Applicazione ad uno strato obliquo.

Sia $\{\mathbf{e}_i\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ la base ortonormale levogira associata ad un riferimento cartesiano $Oxyz$ nello spazio fisico, tale che $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \alpha$, con $\mathbf{k}$ versore della verticale orientata positivamente verso l'alto, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e sia S lo strato piano obliquo della miscela, la cui frontiera Σ è costituita dai due piani rigidi e perfetti conduttori termici che indicheremo rispettivamente con

$$\Sigma_1 : z = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma_2 : z = d \qquad (\text{cost} > 0) ,$$

il primo dei quali fisso e tenuto a temperatura T_o e concentrazione C_o costanti, il secondo fisso o traslante uniformemente con preassegnata velocità $V_o \mathbf{e}_1$ e tenuto a temperatura T_d e concentrazione C_d costanti.

Esiste, per un tale strato e sotto le condizioni al contorno assegnate, il moto $\tilde{\mathfrak{M}}$ del tipo Reyleigh-Jeffreys (detto anche alla Couette-Benard) imposto dall'inclinazione dello strato e dai gradienti trasversali costanti di temperatura e di concentrazione, soluzione stazionaria del sistema (1), dato da (in variabili adimensionali ed omettendo gli apici) [1]:

$$
(37)\qquad \begin{cases} \tilde{v}_1 = [2\,a_1\,(z^3 - z) - b_1\,(z^2 - z)]\,\operatorname{sen}\alpha + V_o\,z \\ \tilde{v}_2 = \tilde{v}_3 = 0 \\ \tilde{T} = T_o + \dfrac{\varepsilon}{P_r}\cdot z \\ \tilde{C} = C_o + \dfrac{\varepsilon}{S_c}\cdot z \\ \tilde{p} = p_o + (a_1\,z^2 - 2\,b_1\,z)\cos\alpha\ , \end{cases} \qquad z \in [0,\,1]
$$

con

$$
(38)\qquad \begin{cases} p_o = (p)_{z=0} \\ a_1 = \dfrac{\varepsilon}{12}\left(\dfrac{R_a}{P_r} - s\,\dfrac{R_c}{S_c}\right) \\ b_1 = \dfrac{d^3\,g}{2\,\nu^2} \end{cases}
$$

ed ove

$$
(39)\qquad \varepsilon = \begin{cases} -1 \quad s\,e \begin{cases} \Delta T < 0 \\ \Delta C < 0 \end{cases} \\ \\ \ \ 1 \quad s\,e \begin{cases} \Delta T > 0 \\ \Delta C > 0 \end{cases} \end{cases}
$$

ossia $\varepsilon = \mp 1$, secondo che lo strato è riscaldato ed è a maggiore concentrazione nel piano inferiore Σ_1 o in quello superiore Σ_2, rispettivamente.

Dalle (12), (14), (15), scritte per un moto (37), si ha intanto agevolmente la seguente proposizione:

Ogni moto stazionario alla Rayleigh - Jeffreys nello strato piano obliquo è stabile in media rispetto a perturbazioni iso-termoconcentrate.

Infine, per perturbazioni arbitrarie regolari (5) la condizione di stabilità asintotica esponenziale (20) si specializza in (cfr. [1], Introd . A-I):

$$\sqrt{a^2 + b^2(\alpha)} < 1 ,$$

con

$$\tilde{b}^2(\alpha) = (1/3\,\pi^2\,\delta)\ \max\ (\tilde{\mathcal{R}}^2 + \tilde{\mathcal{S}}^2, \tilde{\mathcal{C}}^2) ,$$

in cui

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}^2 = \dfrac{S_c}{4\,N\,\sigma^2}\left[R_c\,(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + \dfrac{N\,\sigma^2}{S_c} \right]^2 \\ \tilde{\mathcal{S}}^2 = \dfrac{S_c}{4\,\sigma^2\,r_D}\left\{ \sigma\left[R_a\,(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + \dfrac{r_D^2}{P_r} \right] + \right. \\ \qquad \left. + \lambda\, r_D \left[R_c\,(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + \dfrac{N\,\sigma^2}{S_c} \right] \right\}^2 \\ \tilde{\mathcal{C}}^2 = \dfrac{S_c\left[R_a\,(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + \dfrac{r_D^2}{P_r} \right]^2}{4\,r_D\,(1 + N\,\lambda^2\,r_D)} . \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Maiellaro, *Sulla stabilità non lineare in media dei moti alla Couette-Benard di una miscela fluida binaria*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **22** (1973).

[2] S. Rionero, *Sulla stabilità asintotica in media nella dinamica dei miscugli fluidi*, Boll. Un. Mat., It., (4), **4**, 364-373 (1971).

[3] S. Rionero, *Relazione tenuta nella Tavola Rotonda sulla Stabilità dei Sistemi Continui nel 2° Congr. Naz. A.I.M.E.T.A.*, Napoli, 16-19/10/1974.

[4] A. Belleni-Morante and M. Maiellaro, *On the stability of Couette-Benard M.H.D. Flows of Binary Mixtures*, Ann. Mat. Pura e Appl., **106**, (4) (1975).

[5] G. P. Galdi, *Sulla stabilità incondizionata asintotica in media dei moti stazionari idrodinamici e magnetoidrodinamici in domini limitati o meno*, Ricerche di Mat. Università di Napoli, (1), **24**, 137-151 (1975).

[6] G. P. Galdi, *Casi di non validità di una riformulazione del metodo dell'energia*, Arch. Rat. Mech. An., (1), **59**, 1-8 (1975).

[7] S. Rionero, *Metodi variazionali per la stabilità asintotica in media in magneto-idrodinamica non isoterma*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, (4), **35**, 100-116 (1968).

[8] I. G. SHAPOSHNIKOV, *On the theory of convectional phenomena in a binary mixture*, P.M.M., (5), **17**, 604-606 (1953).

[9] B. A. VERTHEIM, *On the conditions of appearance of convection in a binary mixture*, P.M.M., (6), **19**, 745-750 (1955).

[10] G. Z. GERSHUNI - E. M. ZHUKHOVITSKII, *On the convectional instability of a two-component mixture in a gravity field*, P.M.M. (2), (**27**), 441-452 (1963).

[11] SPIEGEL - VERONIS, *On the Boussinesq approximation for a compressible fluid*, Astrophys. J., **131**, 442-447 (1960).

[12] J. MIHALJAN, *A rigorous exposition of the Boussinesq approximation applicable to a thin layer of fluid*, Astrophys J., **136**, 1126-1133 (1962).

[13] S. RIONEOR, *Metodi variazionali per la stability asintotica in media in Magneto-idrodinamica*, Annali di Matematica, (IV), **78**, 339-364 (1968).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Tolotti, C. Miranda e S. Cafiero.

Γ- Convergenza negli spazi sequenziali *

Nota di GIOCONDA MOSCARIELLO **
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 6 novembre 1976)

RIASSUNTO. — Viene preso in considerazione un nuovo tipo di limite per successioni di funzioni reali definite in spazi sequenziali che, nel caso di convergenze provenienti da topologie verificanti il 1° assioma di numerabilità, coincide con la Γ-convergenza di DE GIORGI e FRANZONI [5]. Altrimenti le due nozioni sono diverse, come è mostrato da esempi.

SUMMARY. — A new kind of limit for sequences of real functions defined on spaces with a convergence structure is considered. In the particular case of topological spaces verifying the first countable axiom, this limit coincides with Γ-limit of DE GIORGI and FRANZONI [5]. Otherwise the two notions are different, as it is shown by examples.

INTRODUZIONE

In un recente lavoro [5], E. DE GIORGI e T. FRANZONI hanno introdotto una nozione di convergenza per successioni di funzioni reali definite in uno spazio topologico (Γ-convergenza), che si presta ad inquadrare da un lato vari risultati su limiti di integrali del Calcolo delle Variazioni contenuti in [4], [6], [13] e dall'altro diverse teorie astratte di convergenze di funzioni sviluppate precedentemente in [2], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14].

Una trattazione generale di questa teoria è contenuta in [3], ove viene considerato anche un Γ-limite sequenziale tramite una nozione di Γ-limite composto di funzioni.

Scopo di questa nota è di introdurre un tipo di convergenza variazionale per successioni di funzioni reali definite in uno spazio sequenziale (cfr. def. 0.1) (Γ-convergenza sequenziale) e di indagare su alcune sue proprietà.

* Lavoro eseguito con borsa di studio del CNR per laureandi per l'anno accademico 1975-76.

** Istituto Matematico « R. Caccioppoli », Via Mezzocannone 8, Napoli.

Tale convergenza, nel caso che lo spazio sequenziale provenga da una struttura topologica verificante il 1° assioma di numerabilità, risulta equivalente alla Γ-convergenza, rivelandosi altrimenti da da essa diversa, come viene messo in luce tramite esempi.

Un caso che ha interesse per le applicazioni a funzionali del Calcolo delle Variazioni è quello della convergenza debole in spazi di Banach.

Nel § 0 richiamiamo alcune definizioni e notazioni connesse con la nozione di spazio sequenziale e struttura di convergenza.

Nel § 1 diamo la definizione di Γ^--convergenza sequenziale e proviamo alcune sue proprietà seguendo una impostazione analoga a quella di [5].

Nel § 2 passiamo ad analizzare alcune applicazioni della Γ-convergenza sequenziale a questioni di minimo, e in tale studio rileviamo alcune differenze tra la teoria sequenziale e quella non sequenziale mostrando ad esempio che un Γ-limite sequenziale, pur potendo non essere sequenzialmente semicontinuo inferiormente, è tuttavia dotato di minimo su ogni insieme sequenzialmente compatto.

§ 0. - Premesse e richiami

Sia X un insieme, N l'insieme degli interi positivi e τ un sottoinsieme di $X^N \times X$.

0.1 Definizione. Diremo che τ è una struttura di convergenza su X se valgono le condizioni [9]:

(a) $\forall\, x \in X$, posto $x_h = x\ \forall\, h \in N$, $((x_h)_h, x) \in \tau$

(b) $((x_h)_h, x) \in \tau$ e $(h_k)_k$ strettamente crescente $\Rightarrow ((x_{h_k})_k, x) \in \tau$

(c) $((x_h)_h, x) \notin \tau \Rightarrow \exists\, (h_k) : \forall\, (k_n)$ [1], $((x_{h_{k_n}}), x) \notin \tau$

Diremo che x è limite della successione (x_h) nella struttura τ ($x = \tau - \lim_h x_h$) se e solo se $((x_h), x) \in \tau$.

Alla coppia (X, τ) si dà il nome di spazio sequenziale.

0.2 Definizione. Se X è uno spazio sequenziale e $Y \subseteq X$, definiamo chiusura sequenziale di Y, $\bar{Y}^{seq}$, l'insieme dei punti $x \in X$ che sono limiti di una successione di punti di Y. L'insieme Y si dice sequenzialmente chiuso se e solo se $Y = \bar{Y}^{seq}$.

[1] Qui e nel seguito le successioni di interi positivi saranno intese, salvo avviso contrario, strettamente crescenti.

0.3 OSSERVAZIONE. In generale l'operatore $K : Y \to \bar{Y}^{seq}$ non è un operatore di Kuratowski, per cui non si può definire sullo spazio X una topologia τ avente come famiglia C dei chiusi quella dei chiusi sequenziali.

0.4 OSSERVAZIONE. Se X e Y sono spazi sequenziali si conferisce all'insieme $X \times Y$ una struttura di spazio sequenziale, convenendo che la successione di punti (x_h, y_h) converge verso (x, y) quando $x = \lim_h x_h$ e $y = \lim_h y_h$.

0.5 DEFINIZIONE. Se (X, τ) è uno spazio sequenziale, l'insieme $K \subseteq X$ si dice sequenzialmente τ-compatto se ogni successione (x_h) di punti di K contiene un'estratta τ-convergente verso un punto di K.

0.6 DEFINIZIONE. Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi sequenziali.
Una funzione $f : X \to Y$ è sequenzialmente continua se e solo se

$$x = \tau - \lim_h x_h \Rightarrow f(x) = \sigma - \lim_h f(x_h).$$

0.7 DEFINIZIONE. Una funzione f di (X, τ) in $\bar{R}$, retta numerica ampliata, è sequenzialmente semicontinua inferiormente (superiormente) in x quando per ogni successione (x_h) di punti di X convergente a x risulta

$$f(x) \leq \liminf_h f(x_h) \qquad (f(x) \geq \limsup_h f(x_h)).$$

0.8 DEFINIZIONE. Sia X uno spazio topologico con topologia τ, e (f_h) una successione di funzioni da X in $\bar{R}$.
Si definiscono allora le seguenti funzioni da X in $\bar{R}$ (cfr. [5]):

$$\Gamma^-(\tau) \liminf_h f_h(x) = \sup_{U \in \mathfrak{U}_x(\tau)} \liminf_h \inf_{y \in U} f_h(y);$$

$$\Gamma^-(\tau) \limsup_h f_h(x) = \sup_{U \in \mathfrak{U}_x(\tau)} \limsup_h \inf_{y \in U} f_h(y);$$

$$\Gamma^+(\tau) \liminf_h f_h(x) = \inf_{U \in \mathfrak{U}_x(\tau)} \liminf_h \sup_{y \in U} f_h(y);$$

$$\Gamma^+(\tau) \limsup_h f_h(x) = \inf_{U \in \mathfrak{U}_x(\tau)} \limsup_h \sup_{y \in U} f_h(y);$$

ove $\mathfrak{U}_x(\tau)$ è l'insieme degli intorni del punto x per la topologia τ.

§ 1. - Definizioni e proprietà generali

1.1 Definizione. Indichiamo qui, come nel seguito, con X uno spazio sequenziale con convergenza τ e con (f_h) una successione di funzioni da X in $\bar{\mathbb{R}}$, retta reale estesa dotata della usuale struttura di insieme totalmente ordinato e di spazio topologico compatto.

Si definiscono allora le seguenti funzioni da X in $\bar{\mathbb{R}}$:

$$\Gamma^-_{seq}(\tau)\ \lim_h \inf f_h(x) = \operatorname{Inf}\{\lim_h \inf f_h(x_h):\ x_h \xrightarrow{\tau} x\}$$

$$\Gamma^-_{seq}(\tau)\ \lim_h \sup f_h(x) = \operatorname{Inf}\{\lim_h \sup f_h(x_h):\ x_h \xrightarrow{\tau} x\}$$

$$\Gamma^+_{seq}(\tau)\ \lim_h \inf f_h(x) = \operatorname{Sup}\{\lim_h \inf f_h(x_h):\ x_h \xrightarrow{\tau} x\}$$

$$\Gamma^+_{seq}(\tau)\ \lim_h \sup f_h(x) = \operatorname{Sup}\{\lim_h \sup f_h(x_h):\ x_h \xrightarrow{\tau} x\}$$

Quando non vi sarà possibilità di confusione ometteremo il riferimento alla convergenza τ e scriveremo semplicemente $\Gamma^-_{seq} \lim_h \inf f_h$ e analoghi. Se un punto $x \in X$ è tale che $\Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h \inf f_h(x) = \Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h \sup f_h(x)$ indicheremo tale valore $\Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h f_h(x)$ e diremo che esiste il Γ^- limite sequenziale della successione (f_h) nel punto x, ovvero che la successione (f_h) è Γ^- sequenzialmente convergente nel punto x. Analogo sarà il significato della scrittura $\Gamma^+_{seq}(\tau) \lim_h f_h(x)$. Se poi ancora un punto x è tale che esistono i due limiti $\Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h f_h(x)$, $\Gamma^+_{seq}(\tau) \lim_h f_h(x)$ e sono uguali, indicheremo il loro comune valore con $\Gamma_{seq}(\tau) \lim_h f_h(x)$ e diremo che esiste il Γ limite sequenziale della successione (f_h) in x; oppure che la successione (f_h) Γ converge sequenzialmente in x.

Nello stesso modo si possono definire $\Gamma_{seq}(\tau) \lim_h \inf f_h(x)$ e $\Gamma_{seq}(\tau) \lim_h \sup f_h(x)$.

1.2 Osservazione. Nel caso che la successione non dipenda da h, ossia $f_h = f$ per ogni h, si ha:

$$\Gamma^-_{seq} \lim_h \inf f_h(x) = \Gamma^-_{seq} \lim_h \sup f_h(x) \qquad \forall x \in X$$

e analogamente $\Gamma^+_{seq} \lim_h \inf f_h(x) = \Gamma^+_{seq} \lim_h \sup f_h(x)$.

(Invero per ogni successione (x_h) convergente a x esiste un'estratta (x_{h_p}) tale che:

$$\liminf_h f(x_h) = \lim_p f(x_{h_p}) \geq \Gamma^-_{seq} \limsup_h f_h(x))$$

In questo caso particolare per comodità di notazione porremo:

$$\Gamma^-_{seq} \lim f = \Gamma^-_{seq} \lim_h f_h.$$

1.3 OSSERVAZIONE. Se con δ indichiamo la convergenza discreta su X (cioè (x_h) converge ad x secondo δ se e solo se $x_h = x$ definitivamente) allora:

$$\liminf_h f_h(x) = \Gamma_{seq}(\delta) \liminf_h f_h(x)$$

$$\limsup_h f_h(x) = \Gamma_{seq}(\delta) \limsup_h f_h(x).$$

1.4 OSSERVAZIONE. Se τ e σ sono due convergenze su X con σ più fine di τ, (cioè $x = \sigma - \lim x_h$ implica $x = \tau - \lim x_h$), si ha, dalla definizione:

$$\Gamma^-_{seq}(\tau) \liminf_h f_h(x) \leq \Gamma^-_{seq}(\sigma) \liminf_h f_h(x) \leq \liminf_h f_h(x) \leq$$

$$\Gamma^+_{seq}(\sigma) \liminf_h f_h(x) \leq \Gamma^+_{seq}(\tau) \liminf_h f_h(x).$$

$$\Gamma^-_{seq}(\tau) \limsup_h f_h(x) \leq \Gamma^-_{seq}(\sigma) \limsup_h f_h(x) \leq \limsup_h f_h(x) \leq$$

$$\Gamma^+_{seq}(\sigma) \limsup_h f_h(x) \leq \Gamma^+_{seq}(\tau) \limsup_h f_h(x).$$

Un risultato di qualche utilità nelle applicazioni è il seguente che fornisce una condizione affinché coincidano limiti sequenziali rispetto a convergenze diverse.

1.5 PROPOSIZIONE. *Siano* $f_h : X \to [0, \infty]$, τ *una convergenza separata*[2] *e* σ *una convergenza più fine di* τ *tali che*:

$(f_h(x_h))_h$ *convergente* $\Rightarrow$ $(x_h)_h$ *sequenzialmente* σ*-compatta.*

Allora:

$$\Gamma^-_{seq}(\sigma) \liminf_h f_h = \Gamma^-_{seq}(\tau) \liminf_h f_h$$

$$\Gamma^+_{seq}(\sigma) \limsup_h f_h = \Gamma^+_{seq}(\tau) \limsup_h f_h$$

[2] Una convergenza è separata quando ogni successione convergente ha limite unico.

Dim. Posto $f(x)=\Gamma^{-}_{\mathrm{scq}}(\sigma)\liminf_h f_h(x)$ e $g(x)=\Gamma^{-}_{\mathrm{scq}}(\tau)\liminf_h f_h(x)$ per ogni $x \in X$, poiché σ è più fine di τ, si ha $f(x) \geq g(x)$.

Se per assurdo fosse $f(x) > g(x)$, per le proprietà dell'estremo inferiore, esisterebbe $x_h \xrightarrow{\tau} x$ tale che

$$f(x) > \liminf_h f_h(x) = \lim_p f_{h_p}(x_{h_p})$$

La successione $(f_{h_p}(x_{h_p}))$ converge, esiste allora un'estratta di (x_{h_p}) che, per comodità di notazione, denotiamo ancora con (x_{h_p}) tale che $x_{h_p} \xrightarrow{\sigma} \bar{x} \in X$. Per la separatezza della convergenza τ è $\bar{x} = x$ e quindi la successione $y_h = x_{h_p} \; \forall\, h \in [h_p, h_{p+1}[$ converge ad x secondo σ per cui

$$f(x) \leq \liminf_h f_h(y_h) \leq \lim_p f_{h_p}(x_{h_p}) < f(x).$$

L'altra uguaglianza si dimostra in maniera analoga.

1.6 Corollario. *Nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, se* $f = \Gamma^{-}_{\mathrm{scq}}(\sigma)\lim_h f_h$ *allora* $f = \Gamma^{-}_{\mathrm{scq}}(\tau)\lim_h f_h$.

1.7 Osservazione. Dalla definizione si ricava:

$$\Gamma^{-}_{\mathrm{scq}} \liminf_h f_h = -\,\Gamma^{+}_{\mathrm{seq}} \limsup_h (-f_h)$$

$$\Gamma^{-}_{\mathrm{scq}} \limsup_h f_h = -\,\Gamma^{+}_{\mathrm{seq}} \liminf_h (-f_h).$$

Ciò significa che ogni proprietà dei $\Gamma^{-}_{\mathrm{seq}}$ limiti ha una traduzione immediata in una proprietà dei $\Gamma^{+}_{\mathrm{seq}}$ limiti (e viceversa).

Ci limiteremo perciò da ora ad enunciare le proprietà solo per i $\Gamma^{-}_{\mathrm{scq}}$ limiti.

1.8 Osservazione. Se (X, τ) è uno spazio topologico dal lemma 2.2 di [5] e dalla definizione 1.1 segue

$$\Gamma^{-}(\tau) \liminf_h f_h \leq \Gamma^{-}_{\mathrm{scq}}(\tau) \liminf_h f_h$$

$$\Gamma^{-}(\tau) \limsup_h f_h \leq \Gamma^{-}_{\mathrm{scq}}(\tau) \limsup_h f_h.$$

1.9 PROPOSIZIONE. Se (f_{h_p}) *indica un'estratta arbitraria della successione* (f_h) *si ha*:

$$\Gamma^-_{\text{seq}} \lim_h \inf f_h \leq \Gamma^-_{\text{seq}} \lim_p \inf f_{h_p} \leq \Gamma^-_{\text{seq}} \lim_p \sup f_{h_p} \leq \Gamma^-_{\text{seq}} \lim_h \sup f_h$$

Dim. Se (x_p) è una successione convergente ad x, la successione (y_h) tale che $y_h = x_p$ per ogni $h \in [h_p, h_{p+1}[$ converge ancora ad x e inoltre

$$\lim_p \inf f_{h_p}(x_p) \geq \lim_h \inf f_h(y_h) \geq \Gamma^-_{\text{seq}} \lim_h \inf f_h(x).$$

Perciò la prima disuguaglianza è dimostrata. In quanto alla terza osserviamo che se (x_h) converge ad x, la successione (y_p) tale che $y_p = x_{h_p}$ per ogni p, converge ancora ad x e

$$\lim_h \sup f_h(x_h) \geq \lim_p \sup f_{h_p}(y_p) \geq \Gamma^-_{\text{seq}} \lim_p \sup f_{h_p}(\mathrm{x}).$$

1.10 LEMMA. *Sia* $\varphi : \bar{\mathrm{R}} \to \bar{\mathrm{R}}$ *continua e non decrescente e* $\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{R}}$. *Allora*

$$\varphi\ (\mathrm{Sup}\ \mathrm{A}) = \mathrm{Sup}\ \varphi\ (\mathrm{A})$$
$$\varphi\ (\mathrm{Inf}\ \ \mathrm{A}) = \mathrm{Inf}\ \ \varphi\ (\mathrm{A})$$

(Per la dimostrazione cfr. [5]).

1.11 PROPOSIZIONE. *Sia* $\varphi : \bar{\mathrm{R}} \to \bar{\mathrm{R}}$ *continua e non decrescente. Allora*

$$\varphi \circ \Gamma^-_{\text{seq}} \lim_h \inf f_h = \Gamma^-_{\text{seq}} \lim_h \inf (\varphi \circ f_h)$$

e valgono le formule analoghe per gli altri Γ *limiti.*

Dim. È sufficiente applicare più volte il lemma precedente, visto ad esempio che

$$\Gamma^-_{\text{seq}} \lim_h \inf f_h(\mathrm{x}) = \mathrm{Inf} \left\{ \sup_n \inf_{h \geq n} f_h(x_h) \qquad x_h \to x \right\}.$$

1.12 OSSERVAZIONE. Per la proposizione precedente non è in genere restrittivo ai fini della Γ-convergenza sequenziale, analogamente a quanto accade per la Γ-convergenza, considerare successioni di funzioni equilimitate.

1.13 LEMMA. *Sia* $\psi : \bar{\mathrm{R}} \times \bar{\mathrm{R}} \to \bar{\mathrm{R}}$ *continua e non decrescente in entrambe le variabili. Siano* (x_i), (y_i) (per $i \in \mathrm{I}$) *due famiglie di elementi di* $\bar{\mathrm{R}}$. *Si ha allora* (cfr. [5]):

$$\psi\,(\inf_{i\in I} x_i,\ \inf_{i\in I} y_i) \le \inf_{i\in I}\ \psi\,(x_i,\ y_i) \le \psi\,(\inf_{i\in I} x_i,\ \sup_{i\in I} y_i);$$

$$\psi\,(\sup_{i\in I} x_i,\ \inf_{i\in I} y_i) \le \sup_{i\in I}\ \psi\,(x_i,\ y_i) \le \psi\,(\sup_{i\in I} x_i,\ \sup_{i\in I} y_i).$$

La seguente proposizione trova applicazione nel calcolo di somme, prodotti, massimi e minimi fra Γ limiti sequenziali.

1.14 PROPOSIZIONE. *Sia* $\psi : \bar{\mathrm{R}} \times \bar{\mathrm{R}} \to \bar{\mathrm{R}}$ *continua e non decrescente in entrambe le variabili, e siano* (f_h), (g_h) *due successioni di funzioni da* X *in* $\bar{\mathrm{R}}$. *Poniamo per ogni* h $\psi_h(x) = \psi(f_h(x),\ g_h(x))$.

Valgono allora le seguenti disuguaglianze:

$$\psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \liminf_h\ f_h(x),\ \Gamma^-_{seq}\ \liminf_h\ g_h(x)) \le \Gamma^-_{seq}\ \liminf_h\ \psi_h(x) \le$$

$$\psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \liminf_h\ f_h(x),\ \Gamma^+_{seq}\ \limsup_h\ g_h(x));$$

$$\psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \limsup_h\ f_h(x),\ \Gamma^-_{seq}\ \liminf_h\ g_h(x)) \le \Gamma^-_{seq}\ \limsup_h\ \psi_h(x) \le$$

$$\psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \limsup_h\ f_h(x),\ \Gamma^+_{seq}\ \limsup_h\ g_h(x));$$

ed anche:

$$\Gamma^-_{seq}\ \liminf_h \psi_h(x) \le \psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \limsup_h\ f_h(x),\ \Gamma^+_{seq}\ \liminf_h\ g_h(x)).$$

In particolare, se esistono i limiti seguenti, si ha:

$$\psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \lim_h\ f_h(x),\ \Gamma^-_{seq}\ \lim_h\ g_h(x)) \le \Gamma^-_{seq}\ \lim_h\ \psi_h(x) \le$$

$$\psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \lim_h\ f_h(x),\ \Gamma^-_{seq}\ \lim_h\ g_h(x));$$

$$\Gamma^-_{seq}\ \lim_h\ \psi_h(x) = \psi\,(\Gamma^-_{seq}\ \mathit{lim}_h\ f_h(x),\ \Gamma_{seq}\ \mathit{lim}_h\ g_h(x)).$$

Dim. Invero per il lemma precedente basta osservare che se (x_h) e (y_h) sono due generiche successioni di punti di X si ha:

$$\psi\,(\liminf_h\ x_h,\ \liminf_h\ y_h) \le \liminf_h\ \psi\ (x_h,\ y_h);$$

$$\psi\,(\limsup_h x_h,\ \limsup_h y_h) \geq \limsup_h \psi\,(x_h,\ y_h);$$

$$\liminf_h \psi\,(x_h,\ y_h) \leq \begin{cases} \psi\,(\limsup_h x_h,\ \liminf_h y_h) \\ \psi\,(\liminf_h x_h,\ \limsup_h y_h) \end{cases} \leq \limsup_h \psi\,(x_h,\ y_h)$$

1.15 OSSERVAZIONE. Se (X, τ) è uno spazio topologico che verifica il 1° assioma di numerabilità le nozioni di Γ^- convergenza e Γ^- convergenza sequenziale coincidono (cfr. [5]). In generale però le due definizioni sono diverse. Invero se la funzione $f : X \to \bar{R}$ è τ - sequenzialmente semicontinua inferiormente, ma non semicontinua inferiormente, posto $f_h = f$ per ogni h si ha (cfr. [5]) $f = \Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h f$ mentre $\Gamma^-(\tau) \lim_h f_h = sc^-(\tau) f$, dove $sc^-(\tau) f$ è la più grande funzione semicontinua inferiormente, rispetto alla topologia τ, minore o uguale ad f.

Diamo a questo punto esempi di successioni (f_h) dotate di Γ^-_{seq} limite ma non di Γ^- limite in un punto e viceversa.

1.16 ESEMPIO. Sia R l'insieme dei numeri reali, τ la topologia co-numerabile su R, i cui aperti sono R, il $\emptyset$ e i sottoinsiemi A di R per cui $R - A$ è finito o numerabile.

Si verifica subito che $x_h \xrightarrow{\tau} x$ se e solo se $x_h = x$ definitivamente. Considerata la successione di funzioni (f_h) tali che

$$f_h(0) = 1 \qquad \forall\ h \in N$$

$$f_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } h \text{ pari} \\ 0 & \text{per } h \text{ dispari} \end{cases} \qquad \forall\ x \in R - \{0\}$$

si ha:

$$\Gamma^-(\tau) \liminf_h f_h(0) = 0 \tag{1.1}$$

$$\Gamma^-(\tau) \limsup_h f_h(0) = 1 \tag{1.2}$$

mentre

$$\Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h f_h(0) = 1. \tag{1.3}$$

Dim. La (1.3) segue immediatamente dall'osservazione 1.3. Per quanto riguarda la (1.1) e la (1.2) basta invece osservare che per ogni $U \in \tau(0)$ si ha:

$$\inf_U f_h = 1 \qquad \text{per } h \text{ pari}$$

$$\inf_U f_h = 0 \qquad \text{per } h \text{ dispari.}$$

1.17 ESEMPIO. Sempre in R dotato della topologia co-numerabile consideriamo la successione di funzioni

$$g_h(x) = \operatorname{sen} h x \qquad h \in N,\ x \in R.$$

Si ha

$$\Gamma^-(\tau) \lim_h g_h(x) = -1 \qquad \forall\, x \in R, \tag{1.4}$$

invece

$$\Gamma^-_{seq}(\tau) \liminf_h g_h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } \dfrac{x}{2\pi} \in R - Q \\ 0 & \text{se } \dfrac{x}{2\pi} \in Z \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\Gamma^-_{seq}(\tau) \limsup_h g_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \dfrac{x}{2\pi} \in R - Q \\ 0 & \text{se } \dfrac{x}{2\pi} \in Z \end{cases} \tag{1.6}$$

Dim. Le (1.5) e (1.6) risultano chiare grazie all'osservazione 1.3. Per provare la (1.4) basta osservare che per ogni $A \in \tau - \{\emptyset\}$ e per ogni $h \in N$ si ha:

$$\inf_A g_h = -1$$

Il precedente è allora un esempio in cui in ogni punto x tale che $\dfrac{x}{2\pi} \in R - Q$ esiste il Γ^- limite, ma non esiste il Γ^- limite sequenziale.

Dalle proposizioni che seguono, la differenza fra le nozioni di Γ^--convergenza e Γ^--convergenza sequenziale sarà ancora più evidente.

Ricordiamo anzitutto la definizione di limite inferiore e superiore di insiemi (rispetto alla convergenza τ) secondo Kuratowski:

$$K_{seq}(\tau) \lim_h \sup A_h = \{x \in X : \exists (h_r) \text{ e } x_r \in A_{h_r} \forall\, r, \text{ tale che } x = \tau - \lim_r x_r\}$$

$$K_{seq}(\tau) \lim_h \inf A_h = \{x \in X : \exists\, x_h \in A_h \forall\, h, \text{ tale che } x = \tau - \lim_h x_h\}$$

dove (A_h) è una successione di sottoinsiemi di X.

1.18 PROPOSIZIONE. *Sia* (A_h) *una successione di sottoinsiemi di* X, *per ogni* h *definiamo*

$$f_h : x \in X \to \begin{cases} 0 & x \in A_h \\ +\infty & x \in X - A_h \end{cases}$$

Si ha:

$$\Gamma^-_{seq} \lim_h \inf f_h = f'$$

$$\Gamma^-_{seq} \lim_h \sup f_h = f''$$

dove f' *ed* f'' *sono rispettivamente le applicazioni*

$$f' : x \in X \to \begin{cases} 0 & x \in K_{seq} \lim_h \sup A_h \\ +\infty & x \in X - K_{seq} \lim_h \sup A_h \end{cases}$$

$$f'' : x \in X \to \begin{cases} 0 & x \in K_{seq} \lim_h \inf A_h \\ +\infty & x \in X - K_{seq} \lim_h \inf A_h \end{cases}$$

Dim. È sufficiente provare che:

$$\begin{cases} \forall\, x, \forall\, x_h \xrightarrow{\tau} x & f'(x) \le \lim_h \inf f_h(x_h) \\ \forall\, x, \exists\, x_h \xrightarrow{\tau} x & : \quad f'(x) = \lim_h \inf f_h(x_h) \end{cases}$$

Se x appartiene al $K_{seq} \lim_h \sup A_h$ allora $f'(x) = 0$, e ovviamente per ogni successione (x_h) convergente ad x è $\lim_h \inf f_h(x_h) \ge 0$, inoltre esiste (h_p) strettamente crescente e $x_p \in A_{h_p}$ tale che $x_p \xrightarrow{\tau} x$, cioè per

ogni $p\, f_{h_p}(x) = 0$. Poniamo $y_h = x_p$ per ogni $h \in [h_p, h_{p+1}[$, allora

$$0 \leq \lim_h \inf f_h(y_h) \leq \lim_p \inf f_{h_p}(x_p) = 0.$$

Se invece x non appartiene al $K_{seq} \lim_h \sup A_h$ allora x non appartiene neppure al $K_{seq} \lim_h \inf A_h$ cioè per ogni $x_h \xrightarrow{\tau} x$ esistono infiniti indici h tali che $x_h \notin A_h$ e al più un numero finito di indici h tali che $x_h \in A_h$, per cui

$$\lim_h \inf f_h(x_h) = +\infty.$$

La seconda uguaglianza si dimostra in maniera analoga.

1.19 PROPOSIZIONE. *Il* Γ^-_{scq} lim inf *e* Γ^-_{scq} lim sup *di una successione di funzioni non sono in generale funzioni sequenzialmente semicontinue inferiormente.*

Dim. Sia $A \subset X$ tale che $\bar{A}^{scq} \subsetneq \bar{\bar{A}}^{scq}$ e $f(x)$ la funzione indicatrice di A cioè

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \in X - A \end{cases}$$

Dalla proposizione precedente segue immediatamente, per $f_h = f$ e $A_h = A$ per ogni h,

$$\Gamma^-_{scq} \lim_h f_h(x) = \bar{f}(x) : x \in X \to \begin{cases} 0 & x \in \bar{A}^{seq} \\ +\infty & x \in X - \bar{A}^{seq} \end{cases}$$

La $\bar{f}(x)$ non è sequenzialmente semicontinua inferiormente perché il suo epigrafico non è un insieme sequenzialmente chiuso.

1.20 DEFINIZIONE. Se f è una funzione da X in $\bar{R}$ denotiamo con $sc^-_{scq} f$ la massima funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente minore o uguale ad f.

1.21 OSSERVAZIONE. La definizione precedente ha senso perché per ogni famiglia $(f_i)_{i \in I}$ di funzioni sequenzialmente s.c.i. il $\operatorname{Sup}_{i \in I} f_i$ è una funzione sequenzialmente s.c.i.

1.22 OSSERVAZIONE. In uno spazio topologico (X, τ) risulta evidentemente:

$$sc^- f \leq sc^-_{scq} f \leq \Gamma^-_{seq} \lim f \leq f$$

Da cui si ricava:

$$\Gamma^- \lim_h \inf sc^- f_h = \Gamma^- \lim_h \inf sc^-_{seq} f_h =$$

$$\Gamma^- \lim_h \inf (\Gamma^-_{scq} \lim f_h) = \Gamma^-_{scq} \lim_h \inf f_h.$$

§ 2. - APPLICAZIONI AL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

In questo numero consideriamo i legami che intercorrono tra la Γ^- convergenza sequenziale e la convergenza degli estremi inferiori o degli eventuali punti di minimo di successioni di funzionali definiti in spazi sequenziali.

Se (X, σ) è uno spazio sequenziale, f_h, $f : X \to \bar{R}$, diremo che

$$f = \mathfrak{M}^-(\sigma) \lim_h f_h \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, g \in C^0_{seq}(X, \sigma)^3 \\ \inf_{x \in X} [f_h(x) + g(x)] \to \inf_{x \in X} [f(x) + g(x)]. \end{cases}$$

Proveremo, sotto ipotesi opportune, un risultato del tipo

$$(1) \qquad f = \Gamma^-_{scq}(\sigma) \lim_h f_h \Rightarrow f = \mathfrak{M}^-(\sigma) \lim_h f_h$$

che, in alcuni recenti lavori, è stato stabilito per classi di funzionali integrali del Calcolo delle Variazioni [13] e di funzionali convessi in spazi di Banach riflessivi [2] [10] con opportune scelte della convergenza σ.

Ci poniamo in un contesto generale, considerando una Γ^-_{seq} rispetto a due topologie diverse, situazione che si presenta molto spesso nelle applicazioni. In sostanza una relazione del tipo (1) può ottenersi con l'ipotesi dell'esistenza di un insieme K sequenzialmente σ-compatto tale che $\inf_K f_h = \inf_X f_h$, condizione che nei casi concreti corrisponde ad una maggiorazione a priori uniforme in h per soluzioni di successioni di problemi di minimo e che implica la

[3] Con $C^0_{seq}(X, \sigma)$ denotiamo l'insieme delle funzioni σ – seq. continue su X.

σ-convergenza dei punti di minimo delle f_h (supposti esistenti) verso punti di minimo di f.

2.1 PROPOSIZIONE. *Sia* (X, τ) *uno spazio sequenziale e* (f_h) *una successione di funzioni da* X *in* $\bar{\mathbb{R}}$ *dotato della usuale topologia.*

Si ha:

$$\operatorname*{Inf}_X \Gamma^-_{seq}(\tau) \liminf_h f_h \geq \liminf_h (\operatorname*{Inf}_X f_h)$$

$$\operatorname*{Inf}_X \Gamma^-_{seq}(\tau) \limsup_h f_h \geq \limsup_h (\operatorname*{Inf}_X f_h)$$

Dim. Basta osservare che fissato $x \in X$, per ogni successione (x_h) convergente ad x è:

$$\liminf_h f_h(x_h) \geq \liminf_h (\operatorname*{Inf}_X f_h).$$

2.2 PROPOSIZIONE. *Siano verificate le ipotesi della proposizione* 2.1. *Se* K *è un sottoinsieme di* X *sequenzialmente compatto, allora*:

$$\operatorname*{Inf}_K \Gamma^-_{seq} \liminf_h f_h \leq \liminf_h (\operatorname*{Inf}_K f_h)$$

Dim. Sia (f'_h) una sottosuccessione di (f_h) tale che

$$\lim_h (\operatorname*{Inf}_K f'_h) = \liminf_h (\operatorname*{Inf}_K f_h)$$

e sia (x_h) una successione di punti di K tale che

$$\lim_h f'_h(x_h) = \lim_h \operatorname*{Inf}_K f'_h.$$

Sia poi (x_{h_p}) una sottosuccessione di (x_h) convergente ad un punto x di K, si ha allora:

$$\Gamma^-_{seq} \liminf_h f_h(x) \leq \Gamma^-_{seq} \liminf_h f'_h(x) \leq \Gamma^-_{seq} \liminf_p f'_{h_p}(x)$$

$$\leq \liminf_p f'_{h_p}(x_{h_p}) = \lim_p f'_{h_p}(x_{h_p}) = \lim_h f'_h(x_h) = \lim_h \operatorname*{Inf}_K f'_h =$$

$$= \liminf_h \operatorname*{Inf}_K f_h.$$

2.3 DEFINIZIONE. Siano f_h, $f : X \to \bar{R}$, σ e τ convergenze su X. Allora poniamo

$$f = \Gamma^-_{seq}\ (\sigma, \tau) \lim_h f_h$$

se e solo se:

$$f = \Gamma^-_{seq}\ (\sigma) \liminf_h f_h = \Gamma^-_{seq}\ (\tau) \limsup_h f_h .$$

2.4 OSSERVAZIONE. Evidentemente $f = \Gamma^-_{seq}\ (\sigma, \sigma) \lim_h f_h$ se e solo se $f = \Gamma^-_{seq}\ (\sigma) \lim_h f_h$, inoltre, se τ è più fine di σ si ha:

$$f = \Gamma^-_{seq}\ (\sigma, \tau) \lim_h f_h \Leftrightarrow f = \Gamma^-_{seq}\ (\sigma) \lim_h f_h = \Gamma^-_{seq}\ (\tau) \lim_h f_h$$

Dimostriamo ora il risultato principale di questo paragrafo.

2.5. TEOREMA. *Siano* σ *e* τ *convergenze su* X, $f_h : X \to \bar{R}$, $f = \Gamma^-_{seq}\ (\sigma, \tau) \lim_h f_h$. *Se esiste* $K \subseteq X$ σ-seq. *compatto tale che.*

$$\inf_K f_h = \inf_X f_h \qquad \forall\, h,$$

allora:

$$\min_K f = \min_X f = \lim_h \inf_X f_h .$$

Se inoltre $x_h \xrightarrow{\sigma} x$ *e* $f_h(x_h) \to \inf_X f$, *allora* $f(x) = \min_X f$.

Dim. Per le proposizioni 2.1, 2.2 si ha

$$\inf_K f \le \liminf_h (\inf_K f_h) \le \limsup_h (\inf_K f_h) =$$

$$= \limsup_h (\inf_X f_h) \le \inf_X f,$$

da cui, essendo $\inf_X f \le \inf_K f$ si deduce

$$\inf_X f = \inf_K f = \lim_h \inf_X f_h$$

Sia $x_h \in K$ tale che $f_h(x_h) - Inf\, f_h \to 0$; allora esiste (h_p) strettamente crescente tale che $x_{h_p} \to x \in K$. Posto $\forall\, p \ge 1\ y_h = x_{h_p}\ \forall\, h \in [h_p, h_{p+1}[$, si ha

$$f(x) \le \liminf_h f_h(y_h) \le \liminf_p f_{h_p}(y_{h_p}) = \liminf_p f_{h_p}(x_{h_p}) = \inf_K f.$$

Se poi $x_h \overset{\sigma}{\to} x$ e $f_h(x_h) \to \operatorname{Inf} f$, allora

$$f(x) \leq \lim_h \inf f_h(x_h) = \operatorname*{Inf}_X f.$$

E il teorema è dimostrato.

2.6 OSSERVAZIONE. Nel precedente teorema, pur non essendo le f_h in generale dotate di minimo su X, si ha invece che f ha minimo; e ciò (a differenza di quanto accade per la Γ^--convergenza) nonostante f possa non essere sequenzialmente s.c.i. rispetto a σ o τ.

2.7 COROLLARIO. *Sia* X *sequenzialmente* σ*-compatto,* f *un'applicazione di* X *in* $\bar{\mathrm{R}}$ *e* $\bar{f} = \Gamma^-_{\mathrm{seq}}(\sigma) \lim f$. *Allora* $\bar{f}$ *ha minimo in* X.

Dim. Basta scegliere come (x_h) nell'enunciato del teorema 2.5 (considerato con $\sigma = \tau$) una successione minimizzante f, cioè tale che

$$f(x_h) \to \operatorname*{Inf}_X f.$$

2.8 COROLLARIO. *Nelle ipotesi del teorema* 2.5 *se* $x_h \in \mathrm{K}$ *sono tali che*

$$f_h(x_h) = \operatorname*{Min}_K f_h = \operatorname*{Min}_X f_h$$

e $x_h \overset{\sigma}{\to} x$, *allora*

$$f(x) = \operatorname*{Min}_K f = \operatorname*{Min}_X f$$

Nel corollario 2.8 non si ottiene in generale alcuna informazione sulla τ-convergenza dei punti di minimo x_h di f_h, com'è naturale essendo τ del tutto arbitraria.

Nelle applicazioni (cfr. [4]) si ha però spesso a che fare con il caso $\tau > \sigma$, ed è possibile ottenere in certe ipotesi la τ-convergenza delle x_h. Si ha ad esempio il seguente risultato per cui cfr. anche, in condizioni un po' diverse, [10]:

2.9 PROPOSIZIONE. *Sia* X *di Banach ed* $f_h : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{R}}$ *tali che*

$$f_h(y) + f_h(x) \geq 2 f_h\left(\frac{x+y}{2}\right) + \gamma(\|x - y\|_{\mathrm{X}}) \qquad \forall\, h \in \mathrm{N},\ \forall\, x,\ y \in \mathrm{X}$$

ove $\gamma : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+$ *è crescente, continua,* $\gamma(0) = 0$.

Se $f = \Gamma^{-}_{seq}\ (w, s) \lim_h f_h$ [4] e x_h *sono tali che*

$$f_h(x_h) = \operatorname*{Min}_X f_h = \operatorname*{Min}_K f_h \qquad (K\ w\text{-compatto})$$

allora:

$$x_h \xrightarrow{s} x \quad \text{e} \quad f(x) = \operatorname*{Min}_X f = \operatorname*{Min}_K f.$$

Dim. In primo luogo osserviamo che f verifica la condizione

$$f(y) + f(x) \geq 2 f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \gamma(\|x - y\|_X). \qquad \forall\ x,\ y \in X.$$

Infatti se $x_h \xrightarrow{s} x$ è tale che $f(x) = \lim_h \sup f_h(x_h)$ e $y_h \xrightarrow{s} y$ è tale che $f(y) = \lim_h \sup f_h(y_h)$, evidentemente

$$\gamma(\|x - y\|_X) + 2 f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \lim_h \gamma(\|x_h - y_h\|_X) +$$

$$+ \lim_h \inf 2 f_h\left(\frac{x_h + y_h}{2}\right) \leq f(x) + f(y).$$

Dalla formula precedente si vede facilmente che f ha al più un punto di minimo ed allora, grazie al teorema 2.5,

$$x_h \xrightarrow{w} x \qquad f(x) = \operatorname*{Min}_X f.$$

Proviamo che $x_h \xrightarrow{s} x$.

Se per assurdo esistesse (h_r) strettamente crescente e $\delta > 0$ tale che $\forall\ r \geq 1$

$$\|x_{h_r} - x\|_X > \delta$$

sia $y_r \xrightarrow{s} x$ tale che

$$\lim_r \sup f_{h_r}(y_r) = f(x).$$

[4] Con w indichiamo la convergenza debole in X e con s quella forte.
Ricordiamo (cfr. [12]) che nell'insieme delle funzioni $f \in R^X$ convesse e s.c.i. la $\Gamma^{-}_{seq}\ (w, s)$ definisce una struttura di convergenza.
In un prossimo lavoro esamineremo le condizioni perché valga più in generale un risultato analogo.

Allora

$$f_{h_r}(y_r) + f_{h_r}(x_{h_r}) \geq 2 f_{h_r}\left(\frac{x_{h_r} + y_r}{2}\right) + \gamma(\delta - o(r))$$

e, poiché

$$\frac{1}{2}(x_{h_r} + y_r) \overset{w}{\to} x,$$

si ha

$$2 f(x) \geq 2 f(x) + \gamma(\delta) > 2 f(x).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] AMBROSETTI A., SBORDONE C., *Γ-convergenza e G-convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico.* Boll. U.M.I., **5**, 13-A, pp. 352-362 (1976).

[2] BOCCARDO L., MARCELLINI P., *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali.* Ann. Mat. Pura Appl., 110, pp. 137-159 (1976).

[3] BUTTAZZO G. M., *Su un tipo di convergenza variazionale.* Tesi di laurea anno acc. 1975-76.

[4] DE GIORGI E., *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area.* Rend. Mat. Univ. Roma, **8**, pp. 277-294 (1975).

[5] DE GIORGI E., FRANZONI T., *Su un tipo di convergenza variazionale.* Rend. Acc. Naz. Lincei Roma, pp. 842-850 (1975).

[6] DE GIORGI E., SPAGNOLO S., *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del 2° ordine.* Boll. Un. Mat. Ital., **8**, pp. 391-411 (1973).

[7] JOLY J. L., *Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue.* J. Math. Pures Appl., **52**, pp. 421-441 (1973).

[8] JOLY J. L., *Une famille de topologies et des convergences sur l'ensemble des fonctionelles convexes.* These présentée a la Faculté de Sciences de Grenoble (1970).

[9] KURATOWSKI C., *Topologie.* Vol. I, Warszawa (1958).

[10] MARCELLINI P., *Su una convergenza di funzioni convesse.* Boll. U.M.I., **8**, pp. 137-158 (1973).

[11] MARCELLINI P., *Un teorema di passaggio al limite per la somma di funzioni convesse.* Boll. U.M.I., 11, pp. 107-124 (1975).

[12] MOSCO U., *On the continuity of the Young - Fenchel Transform.* J. Math. Anal. Appl., **35**, pp. 518-535 (1971).

[13] SBORDONE C., *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale.* Ann. Scuola Norm. Pisa IV, **2**, pp. 617-638 (1975).

[14] ZOLEZZI T., *On convergence of minima.* Boll. U.M.I., **8**, pp. 246-257 (1973).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, F. Cafiero e C. Ciliberto.

Una questione di conteggio di grafi

Nota di GIUSTINA PICA *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 6 novembre 1976)

RIASSUNTO. — Vengono date formule per il conteggio degli OM-grafi con quattro 2-vertici e con i due 3-cicli, i cui spigoli non appartengono al ciclo hamiltoniano, aventi uno spigolo in comune. Sono altresì date formule per particolari partizioni di un intero positivo in quattro addendi.

1. INTRODUZIONE

Diremo OM-grafo un grafo G esterno planare massimale (cfr. [3]). Dato un OM-grafo G, esiste un grafo piano GP, che supporremo fissato per ogni OM-grafo G, isomorfo a G, che ha la proprietà di avere un ciclo hamiltoniano c che divide il piano in due regioni, una finita, che indichiamo con R, ed una infinita, in modo tale che tutti gli spigoli di GP che non sono su c (che chiameremo *corde*) si trovano in R e dividono R in triangoli. Si ha inoltre che ogni GP ha almeno due 2-vertici (vertici di grado 2). Un OM-grafo GP che ha quattro 2-vertici ha due 3-cicli (cicli di lunghezza 3) che non hanno spigoli su c (cfr. [2]). Evidentemente i due 3-cicli possono avere, o non, uno spigolo in comune.

In questo lavoro procederemo al conteggio degli OM-grafi con quattro 2-vertici che hanno i due 3-cicli suddetti con uno spigolo in comune, spigolo che nel seguito chiameremo *diagonale*.

Per conteggio dei grafi di un certo tipo s'intende calcolare il numero degli elementi di un insieme I dei grafi di quel tipo, a due a due non isomorfi, tale che ogni grafo di quel tipo sia isomorfo ad uno, e ad un solo, elemento di I. All'insieme I si dà il nome di insieme *campione*.

Nel seguito con I viene indicato l'insieme campione dei grafi di ordine n, con quattro 2-vertici, e con i due 3-cicli suddetti aventi uno spigolo in comune.

Considerato un elemento G di I, nella sua rappresentazione piana GP le corde dei due 3-cicli, diverse dalla diagonale, formano un 4-ciclo

* Istituto di Matematica - Facoltà di Ingegneria - Università di Napoli.

che chiameremo t e che divide R in cinque regioni, una interna ad esso e quattro esterne. Denominiamo le regioni esterne a t con R_i in modo tale che, detto n_i il numero di corde interne ad ogni R_i, risulti:

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq 0 \tag{1}$$

ed indichiamo con A_i il 2-vertice di GP e con t_i la corda di t che appartengono ad R_i.

La scelta dei nomi da dare alle regioni esterne a t risulta non univoca nel caso che si ha l'uguaglianza tra due o più n_i, aventi indici consecutivi; in tal caso la scelta della denominazione delle R_i con numero di corde uguali verrà fatta in due o più modi diversi.

Scelta una corda t_m (il criterio di scelta verrà indicato in seguito) orientiamola in modo che il suo primo estremo è il vertice che essa non ha in comune con la diagonale ed associamo quindi al 4-ciclo t un verso che sia concorde con quello fissato su t_m.

Considerata, poi, la corda t_i ed indicati con T_u e T_p i suoi estremi, diremo che T_u (risp. T_p) è il primo estremo e T_p (risp. T_u) è il secondo estremo di t_i, se T_u (risp. T_p) precede T_p (risp. T_u) nel verso prescelto.

Indichiamo inoltre le corde interne alla regione R_i con a_{ir}, $1 \leq r \leq n_i$, e chiamiamo K_{ir} e K'_{ir} gli estremi di ognuna di esse. Posto, quindi, $a_{i0} = t_i$ e considerata la corda a_{ir}, $1 \leq r \leq n_i$, se essa ha in comune con a_{ir-1} il vertice K_{ir} (risp. K'_{ir}) orientiamola con il verso per cui K_{ir} (risp. K'_{ir}) risulta primo estremo e K'_{ir} (risp. K_{ir}) secondo estremo. Diremo inoltre che due corde a_{ir-1} ed a_{ir}, $1 \leq r \leq n_i$, sono consecutive se il secondo estremo di a_{ir-1} coincide con il primo estremo di a_{ir}.

Ciò premesso, fissata la denominazione delle regioni R_i, ad ogni corda a_{ir}, $1 \leq r \leq n_i$, associamo la coppia ordinata:

$$(s_i, s_{ir}) \text{ con } 1 \leq i \leq 4 \text{ e } 1 \leq r \leq n_i$$

nel seguente modo:

per $i = 1, 2, 3$

$$s_i = \begin{cases} 1 \text{ se } R_i \text{ ed } R_{i+1} \text{ sono consecutive (secondo il verso di } t) \\ 0 \text{ nel caso contrario} \end{cases}$$

per $i = 4$

$$s_4 = \begin{cases} 1 \text{ se } R_4 \text{ ed } R_1 \text{ sono consecutive} \\ 0 \text{ nel caso contrario} \end{cases}$$

$$s_{ir} = \begin{cases} 1 \text{ se } a_{ir-1} \text{ ed } a_{ir} \text{ sono consecutive} \\ 0 \text{ nel caso contrario} \end{cases}$$

In questo modo, in corrispondenza di ogni scelta di denominazione delle regioni R_i, ad ogni OM-grafo di I viene associata una quaterna del tipo:

$$
(2)\qquad
\begin{array}{l}
(s_1, s_{11})\ (s_1, s_{12})\ \ldots\ldots\ (s_1, s_{1n_1}) \\
(s_2, s_{21})\ (s_2, s_{22})\ \ldots\ldots\ (s_2, s_{2n_2}) \\
(s_3, s_{31})\ (s_3, s_{32})\ \ldots\ldots\ (s_3, s_{3n_3}) \\
(s_4, s_{41})\ (s_4, s_{42})\ \ldots\ldots\ (s_4, s_{4n_4})
\end{array}
$$

Nel caso che qualcuno degli n_i è uguale a zero, all'OM-grafo GP si associa una quaterna del tipo (2), ove al posto della riga i-esima si pone s_i. Nel seguito se x è un numero reale con il simbolo $[x]$ si indica il massimo intero $\leq x$; se $x \geq y$ sono due numeri interi positivi con il simbolo $d\,v\,(x, y)$ si indica il numero 1, se x è divisibile per y, il numero 0, nel caso contrario; in particolare se $y = 2$, si porrà $p\,(x) = d\,v\,(x, 2)$ e $\bar{p}\,(x) = 1 - d\,v\,(x, 2)$; con il simbolo $d\,v\,(x)$ si indica il numero k, tale che $x \equiv k \pmod 3$ con $0 \leq k \leq 2$.

2. Conteggio delle partizioni di un intero in quattro addendi

Dimostriamo il seguente

Teorema 1 - Il numero delle partizioni dell'intero N nei quattro addendi n_1, n_2, n_3, n_4 con $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq 0$, è dato da:

$$
\begin{aligned}
P_{N,4} = \sum_{x=0}^{[N/2]} \Bigg\{ & \sum_{h=0}^{[x/2]} [(h+2)/2] + \\
& + \lambda \sum_{h=\left[\frac{x+2}{3}\right]}^{\left[\frac{x-1}{2}\right]} \Big([(x-h+2)/2] - x + 2h \Big) \Bigg\} + \\
& + \lambda' \sum_{x=\left[\frac{N+2}{2}\right]}^{[3N/4]} \Bigg\{ \sum_{h=0}^{[x/2]} [(h+2)/2] + \\
& + \lambda \sum_{h=\left[\frac{x+2}{3}\right]}^{[(x-1)/2]} \Big([(x-h+2)/2] - x + 2h \Big) - \sum_{N-x+1}^{x} h\,[(x-h+2)/2] \Bigg\}
\end{aligned}
$$

ove $\lambda = 0$ se $\left[\frac{x-1}{2}\right] < \left[\frac{x+2}{3}\right]$; è uguale 1 nel caso contrario

e $\lambda' = 0$ se $\left[\frac{N+2}{2}\right] > \left[\frac{3N}{4}\right]$; è uguale 1 nel caso contrario.

Allo scopo di dimostrare il teorema 1 cominciamo con l'osservare che fissato n_1, il numero delle partizioni di N coincide con il numero delle partizioni di $x = N - n_1$ nei tre addendi n_2, n_3, n_4 con $n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq 0$, numero che è dato da (cfr. [2]):

$$(3) \qquad P_{x,3} = \sum_{k=0}^{[x/2]} [(h+2)/2] + \lambda \sum_{h=\left[\frac{x+2}{3}\right]}^{\left[\frac{x-1}{2}\right]} ([(x-h+2)/2] - x + 2h)$$

Evidentemente possono verificarsi i seguenti due casi:

$$a)\ x \leq n_1 \qquad b)\ x > n_1$$

Indichiamo allora con $P'_{N,4}$ le partizioni di N verificanti le (1) ed a), e con $P''_{N,4}$ quelle verificanti le (1) e b). Osservando che se vale la a), x varia tra 0 ed [N/2], si ha subito che:

$$P'_{N,4} = \sum_{x=0}^{[N/2]} P_{x,3}$$

Per il calcolo di $P''_{N,4}$ osserviamo che, fissato n_1, il numero delle partizioni di x è uguale a $P_{x,3}$ meno il numero $P'_{x,3}$ delle partizioni di x tali che $n_1 < n_2$. Tenendo presente che il numero delle partizioni di $x - n_2$ nei due addendi n_3 e n_4, con $n_3 \geq n_4 \geq 0$, fissato n_2, è dato da $[(x - n_2 + 2)/2]$ e che $n_1 + 1 \leq n_2 \leq x$ (sempre verificate per la b)), si ha che:

$$P'_{x,3} = \sum_{h=N-x+1}^{x} [(x-h+2)/2]$$

Inoltre valendo le (1) e b), si ha che x varia tra $[(N+2)/2]$ e $[3N/4]$ per cui esistono partizioni di questo tipo solo se $[(N+2)/2] \leq [3N/4]$; si ha quindi:

$$P''_{N,4} = \lambda' \sum_{x=\left[\frac{N+2}{2}\right]}^{[3N/4]} (P_{x,3} - P'_{x,3})$$

ove $\lambda' = 0$ se $\left[\frac{N+2}{2}\right] > \left[\frac{3N}{4}\right]$; $\lambda' = 1$ se $\left[\frac{N+2}{2}\right] \leq \left[\frac{3N}{4}\right]$

Si ha quindi facilmente la tesi essendo, evidentemente $P_{N,4} = P'_{N,4} + P''_{N,4}$.

Dimostriamo ora:

Teorema 2 - Detto $P^{(i)}_{N,4}$ il numero delle partizioni di N in quattro addendi verificanti l'i-esima delle seguenti relazioni, escludentesi a due a due:

1) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 \geq 0$ 2) $n_1 > n_2 = n_3 = n_4 \geq 0$

3) $n_1 = n_2 = n_3 > n_4 \geq 0$ 4) $n_1 = n_2 > n_3 = n_4 \geq 0$

5) $n_1 = n_2 > n_3 > n_4 \geq 0$ 6) $n_1 > n_2 = n_3 > n_4 \geq 0$

7) $n_1 > n_2 > n_3 = n_4 \geq 0$ 8) $n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \geq 0$

si ha che:

(4) $$P^{(1)}_{N,4} = d\,v\,(N, 4)$$

(5) $$P^{(2)}_{N,4} = [(N - 1)/4] + 1$$

(6) $$P^{(3)}_{N,4} = [(N - 1 - 4\,d\,v\,(N))/12] + 1$$

(7) $$P^{(4)}_{N,4} = ([(N - 1)/4] + 1)\,p\,(N)$$

(8) $$P^{(5)}_{N,4} = [(N - 2 - \bar{p}\,(N))/4] + 1$$

(9) $$P^{(6)}_{N,4} = [(N - 3)/4] + 1$$

(10) $$P^{(7)}_{N,4} = [(N - 2)/4] + 1$$

(11) $$P^{(8)}_{N,4} = P_{N,4} - \sum_{i=1}^{7} P^{(i)}_{N,4}$$

La (4) e la (11) sono evidenti. Per quanto riguarda la (5) basta osservare che una partizione di N che verifica le 2) è del tipo $N - 3h$, h, h, h con $N - 3h > h \geq 0$. La (6) segue facilmente dal fatto che le partizioni di N che verificano le 3) sono del tipo $(N - 3h)/3$, $(N - 3h)/3$, $(N - 3h)/3$, $3h$ se $d\,v\,(N) = 0$; $((N - 1) - 3h)/3$, $((N - 1) - 3h)/3$), $((N - 1) - 3h)/3$, $3h + 1$ se $d\,v\,(N) = 1$; $((N - 2) - 3h)/3$, $((N - 2) - 3h)/3$, $((N - 2) - 3h)/3$, $3h + 2$ se $d\,v(N) = 2$ e che il loro numero è, rispettivamente, dato da $[(N - 1)/12] + 1$, $[((N - 1) - 4)/12] + 1$, $[((N - 1) - 8)/12] + 1$. Per dimostrare la (7) osserviamo che

dovendo essere $N = 2(n_1 + n_3)$ esistono partizioni di N di questo tipo solo se $p(N) = 1$; in tal caso esse sono del tipo $(N - 2h)/2$, $(N - 2h)/2$, h, h ove $0 \leq h \leq [(N - 1)/4]$. Le partizioni di N che verificano le 5) sono del tipo $(N - (2h + 1))/2$, $(N - (2h + 1))/2$, $h + 1$, h se $p(N) = 0$; $(N - 2(h + 1))/2$, $(N - 2(h + 1))/2$, $h + 2$, h se $p(N) = 1$ ed il loro numero è, rispettivamente, dato da $[(N - 2)/4] + 1$, $[(N - 3)/4] + 1$, per cui tenendo presente il significato di $\bar{p}(N)$ si ha la (8). La (9) segue facilmente dal fatto che le partizioni di N che verificano le 6) sono del tipo $N - (3h + 2)$, $h + 1$, $h + 1$, h con $0 \leq h \leq [(N - 3)/4]$. Le partizioni di N che verificano le 7) sono del tipo $N - (3h + 1)$, $h + 1$, h, h con $0 \leq h \leq [(N - 2)/4]$ e da ciò segue facilmente la (10).

3. Calcolo di $|I|$

Indicando con I_i il sottoinsieme di I tale che gli n_i verificano le diseguaglianze *i*) riportate nell'enunciato del teorema 2, la famiglia $\{I_i\}_{i=1,\ldots,8}$ costituisce una partizione di I e quindi $|I| = \sum_{i=1}^{8} |I_i|$. Detto n l'ordine di un generico elemento di I, evidentemente gli n_i verificano l'uguaglianza:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n - 8 \tag{12}$$

Inoltre, poiché per ogni i il numero delle coppie (s_i, s_{ir}) è, per ogni fissato di valore di s_i, uguale al numero delle successioni

$$s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in_i} \text{ ove } 0 \leq s_{ir} \leq 1$$

numero che chiaramente è dato da 2^{n_i}, e poiché il numero delle quaterne ordinate (s_1, s_2, s_3, s_4) distinte è, in corrispondenza di ogni quaterna n_1, n_2, n_3, n_4 verificante le diseguaglianze *i*) del teorema 2 e l'uguaglianza (12), uguale al numero S delle possibili successioni delle corde t_i lungo il verso di t, si ha che il numero delle quaterne del tipo (2) associate ad elementi di I_i, è dato da:

$$S \sum' 2^{n_1} 2^{n_2} 2^{n_3} 2^{n_4} \tag{13}$$

ove la sommatoria va estesa a tutte le quaterne n_1, n_2, n_3, n_4 verificanti le diseguaglianze *i*) del teorema 2 e la (12).

Ciò premesso passiamo al calcolo degli $|I_i|$.

a) *Calcolo di* $|I_1|$

Gli OM-grafi di I_1 sono caratterizzati dall'avere i numeri di corde n_i verificanti le ipotesi:

$$(14) \qquad n_1 = n_2 = n_3 = n_4 \geq 0 \qquad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n - 8$$

Si chiami una delle regioni R_1, si fissi il verso su t scegliendo $t_m = t_1$ (cfr. n. 1), si chiamino le altre regioni in modo che la successione delle corde su t e $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$. Essendo quattro le regioni a cui si può dare il nome R_1, se per una certa scelta la quaterna associata ad un elemento di I_1 è la (2) con $s_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, per le altre scelte le quaterne sono:

$$\text{(A)} \quad \begin{matrix} (1, 1 - s_{41})\,(1, s_{42})\ldots(1, s_{4n_1}) \\ (1, 1 - s_{31})\,(1, s_{32})\ldots(1, s_{3n_1}) \\ (1, 1 - s_{21})\,(1, s_{22})\ldots(1, s_{2n_1}) \\ (1, 1 - s_{11})\,(1, s_{12})\ldots(1, s_{1n_1}) \end{matrix} \qquad \text{(B)} \quad \begin{matrix} (1, s_{31})\,(1, s_{32})\ldots(1, s_{3n_1}) \\ (1, s_{41})\,(1, s_{42})\ldots(1, s_{4n_1}) \\ (1, s_{11})\,(1, s_{12})\ldots(1, s_{1n_1}) \\ (1, s_{21})\,(1, s_{22})\ldots(1, s_{2n_1}) \end{matrix}$$

$$\text{(C)} \quad \begin{matrix} (1, 1 - s_{21})\,(1, s_{22})\ldots(1, s_{2n_1}) \\ (1, 1 - s_{11})\,(1, s_{12})\ldots(1, s_{1n_1}) \\ (1, 1 - s_{41})\,(1, s_{42})\ldots(1, s_{4n_1}) \\ (1, 1 - s_{31})\,(1, s_{32})\ldots(1, s_{3n_1}) \end{matrix}$$

Si ha che la (2) coincide con la (A), e quindi la (B) con la (C), se

$$(15) \qquad s_{11} = 1 - s_{4i},\ s_{1r} = s_{4r}\ ;\ s_{21} = 1 - s_{31},\ s_{2r} = s_{3r}\ ;\ r = 2, \ldots, n_1$$

Si ha che la (2) coincide con la (B), e la (A) con la (C), se

$$(16) \qquad s_{1j} = s_{3j} \quad \text{ed} \quad s_{2j} = s_{4j}, \quad j = 1, \ldots, n_1$$

Si ha che la (2) coincide con la (C), e la (A) con la (B), se

$$(17) \qquad s_{11} = 1 - s_{21},\ s_{1r} = s_{2r};\quad s_{31} = 1 - s_{41},\ s_{3r} = s_{4r};\quad r = 2, \ldots, n_1$$

Detti N_1 il numero delle quaterne del tipo (2) che non verificano le (15), (16), (17); N_2 il numero di quelle che verificano le (15) e non le (16), (17); N_3 il numero di quelle che verificano le (16) e non le (15), (17); N_4 il numero di quelle che verificano le (17) e non le (15),

(16); N_5 il numero di quelle che verificano le (15), (16), (17); si ha evidentemente che:

$$|I_1| = N_1/4 + (N_2 + N_3 + N_4)/2 + N_5$$

Poiché in base alla (13) ed al teorema 2 si ha:

$$N_5 = P^{(1)}_{n-8,4}\, 2^{(n-8)/4} \qquad N_2 = N_3 = N_4 = P^{(1)}_{n-8,4}(2^{(n-8)/2} - 2^{(n-8)/4})$$

$$N_1 = P^{(1)}_{n-8,4}\, 2^{n-8} - 3\, P^{(1)}_{n-8,4}\, (2^{(n-8)/2} - 2^{(n-8)/4}) - P^{(1)}_{n-8,4}\, 2^{(n-8)/4}$$

in definitiva

$$|I_1| = P^{(1)}_{n-8,4}\, 2^{(n-12)/2}\, (2^{(n-8)/2} + 3)$$

b) *Calcolo di* $|I_2|$ *e* $|I_3|$

Gli elementi di I_2 e di I_3 sono caratterizzati dall'avere i numeri di corde n_i verificanti la (12) e, rispettivamente, le relazioni:

(18) $\quad n_1 > n_2 = n_3 = n_4 \geq 0$ $\qquad$ (19) $\quad n_1 = n_2 = n_3 > n_4 \geq 0$

Si fissi il verso su t scegliendo $t_m = t_1$, per ogni GP isomorfo ad un elemento di I_2, e $t_m = t_4$, per ogni GP isomorfo ad un elemento di I_3 (cfr. n. 1), si scelgano i nomi delle altre regioni in modo che la successione delle corde su t sia $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$. Allora ad ogni elemento di I_2 (rispettivamente I_3) viene associata una sola quaterna del tipo (2), per cui $|I_2|$ (risp. $|I_3|$) coincide con il numero di tali quaterne, cioè, in base alla (13) ed al teorema 2, si ha:

$$|I_2| = P^{(2)}_{n-8,4}\, 2^{n-8} \qquad |I_3| = P^{(3)}_{n-8,4}\, 2^{n-8}$$

c) *Calcolo di* $|I_4|$

Gli elementi di I_4 sono caratterizzati dall'avere gli n_i che verificano la (12) e le diseguaglianze:

(20) $$n_1 = n_2 > n_3 = n_4 \geq 0$$

Chiamata R_1 una delle due regioni con n_1 corde, si fissi il verso su t scegliendo $t_m = t_1$ (cfr. l. c.), si chiamino le regioni con n_3 corde in modo che le possibili successioni, secondo il verso di t, siano:

(a) $R_1\, R_2\, R_3\, R_4$ $\qquad$ (b) $R_1\, R_3\, R_4\, R_2$ $\qquad$ (c) $R_1\, R_3\, R_2\, R_4$

In dipendenza della doppia scelta della regione da denominare R_1, nei casi (a) e (b), ad ogni elemento di I_4 vengono associate due quaterne, una è la (2) e l'altra è:

$$\text{(X)}\qquad \begin{array}{l} (s_1,\ 1-s_{21})\ (s_1,\ s_{22})\ \ldots\ldots\ (s_1,\ s_{2n_1}) \\ (s_2,\ 1-s_{11})\ (s_2,\ s_{12})\ \ldots\ldots\ (s_2,\ s_{1n_1}) \\ (s_3,\ 1-s_{41})\ (s_3,\ s_{42})\ \ldots\ldots\ (s_3,\ s_{4n_3}) \\ (s_4,\ 1-s_{31})\ (s_4,\ s_{32})\ \ldots\ldots\ (s_4,\ s_{3n_3}) \end{array}$$

con $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ nel caso (a), $s_1 = s_2 = 0$ $s_3 = 1$ $s_4 = 0$ nel caso (b).

Nel caso (c) ad ogni elemento di I_4 vengono ancora associate due quaterne, una è la (2) e l'altra è:

$$\text{(Y)}\qquad \begin{array}{l} (s_1,\ s_{21})\ (s_1,\ s_{22})\ \ldots\ldots\ (s_1,\ s_{2n_1}) \\ (s_2,\ s_{11})\ (s_2,\ s_{12})\ \ldots\ldots\ (s_2,\ s_{1n_1}) \\ (s_3,\ s_{41})\ (s_3,\ s_{42})\ \ldots\ldots\ (s_3,\ s_{4n_3}) \\ (s_4,\ s_{31})\ (s_4,\ s_{32})\ \ldots\ldots\ (s_4,\ s_{3n_3}) \end{array}$$

con $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ e $s_4 = 1$.

La (2) coincide con la (X) se:

$$s_{11} = 1 - s_{21},\ s_{1r} = s_{2r},\ r = 2, \ldots, n_1 \tag{21}$$

$$\text{ed}\quad s_{31} = 1 - s_{41},\ s_{3j} = s_{4j},\ j = 2, \ldots, n_3$$

La (2) coincide con la (Y) se:

$$s_{1r} = s_{2r},\ r = 1, \ldots, n_1 \quad \text{ed} \quad s_{3j} = s_{4j},\ j = 1, \ldots, n_3 \tag{22}$$

Indichiamo con J_1, J_2, J_3 gli insiemi delle quaterne che verificano, rispettivamente, le (21), le (22), e nessuna delle due; siano T_1, T_2, T_3 i sottoinsiemi di I_4 per gli elementi dei quali le successioni delle regioni sono, rispettivamente, le (a), (b), (c). Chiaramente si ha che gli insiemi J_i e gli insiemi T_i sono a due a due disgiunti; inoltre, per quanto detto, ad ogni elemento di T_1 o di T_2 (risp. T_3) resta associato

o uno (risp. due) elemento di J_1 o due (risp. uno) elementi di J_2 oppure di J_2. Da ciò, essendo:

$$I_4 = \bigcup_{i=1}^{3} T_i$$

si ha, posto $N_i = |J_i|$

$$|I_4| = \sum_{i=1}^{3} |T_i| = 2|T_1| + |T_3| = (2N_1 + N_1/2) +$$

$$+ (2N_2/2 + N_2) + 3N_3/2$$

Poiché in base alla (13) ed al teorema 2 si ha:

$$N_1 = N_2 = P^{(4)}_{n-8,4}\, 2^{(n-8)/2} \qquad N_3 = P^{(4)}_{n-8,4}(2^{n-8} - 2 \cdot 2^{(n-8)/2})$$

in definitiva si ottiene:

$$|I_4| = 3\, P^{(4)}_{n-8,4}\, 2^{(n-10)/2}(2^{(n-8)/2} + 1)$$

d) *Calcolo di* $|I_5|$, $|I_6|$, $|I_7|$

Gli elementi di I_5, I_6, I_7 sono corotterizzati dall'avere gli n_i che verificano la (12) e, rispettivamente, le diseguaglianze:

(23) $$n_1 = n_2 > n_3 > n_4 \geq 0$$

(24) $$n_1 > n_2 = n_3 > n_4 \geq 0$$

(25) $$n_1 > n_2 > n_3 = n_4 \geq 0$$

Fissato il verso su t scegliendo $t_m = t_4$, per ogni GP isomorfo ad un elemento di I_5, e $t_m = t_1$, per ogni GP isomorfo ad un elemento di I_6 o di I_7 (cfr. l. c.), essendoci due regioni che hanno lo stesso numero di corde, ad ogni elemento di I_i, $i = 5, 6, 7$, sono associate due quaterne, evidentemente distinte, del tipo (2) e quindi in base alla (13), in cui $S = 6$, ed al teorema 2 si ha:

$$|I_5| = 3\, P^{(5)}_{n-8,4} 2^{n-8} \qquad |I_6| = 3\, P^{(6)}_{n-8,4} 2^{n-8} \qquad |I_7| = 3\, P^{(7)}_{n-8,4} 2^{n-8}$$

e) *Calcolo di* $|I_8|$

Gli elementi di I_8 sono caratterizzati dall'avere i numeri di corde n_i verificanti la (12) e le diseguaglianze:

$$n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \geq 0 \tag{26}$$

Fissato il verso su t scegliendo $t_m = t_1$, ad esempio, (cfr. l. c.), per la unicità della scelta dei nomi delle regioni, ad ogni elemento di I_8 viene associata una, ed una sola, quaterna del tipo (2) e quindi in base alla 13, in cui $S = 6$, ed al teorema 2 si ha:

$$| I_8 | = 3 P^{(8)}_{n-8,4} 2^{n-7} .$$

Ringrazio il Prof. S. Antonucci per l'incoraggiamento e i suggerimenti datimi nello svolgimento del lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Antonucci, *Conteggio di grafi planari* (in corso di stampa).
[2] S. Antonucci, *Conteggio di OM-grafi con due o tre 2-vertici e con gruppo degli automorfismi dato* (in corso di stampa)..
[3] F. Harary, *Graph Theory*, Add.-Wesl. Publ. Comp., London, 1972.
[4] F. Harary, E. Palmer, *Graphical Enumeration*, Acad. Press, New York 1973.
[5] G. Polya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen*, Acta Math., **68**, pp. 145-254 (1937).
[6] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York, 1958.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, V. Dalla Volta e G. Panella.

On the boundedness of the 4-acceleration norm for timelike singularities in General Relativity *

Nota di FABIO ROSSO **
presentata dal socio ordinario CARLO TOLOTTI

(Adunanza del 6 novembre 1976)

RIASSUNTO. — Si analizza in Relatività Generale il significato fisico della limitatezza in norma della 4-accelerazione per una particella di vita propria finita e si segnalano conseguenze di tale analisi riguardo alla definizione di singolarità secondo Schmidt.

SUMMARY. — The physical meaning of the boundedness of the 4-acceleration norm for a particle with finite proper life is analyzed in General Relativity and consequences of this analysis related to Schmidt's definition of singularity are remarked.

1. - INTRODUCTION

As outlined by R. GEROCH [1] [2], any definition of singularity which should extend that of g-singularity in General Relativity, may be felt satisfactory from a physical viewpoint if it includes all timelike inextendible non-geodesic curves with finite proper length and 4-acceleration **A** which is bounded in some sense. In this connection in [1] he suggested just the intuitive physical meaning of this boundedness, namely that any particle which travers the abovementioned curves undergoes a *finite* thrust; in [2] he said that the boundedness of **A** must be referred to its Lorentz norm $\| \mathbf{A} \|$ but without a further explanation of whether or not this really means what he previously suggested in [1].

On the other hand, it is also worth remarking that the notion of thrust, considered by Geroch, necessarily requires a frame-dependent viewpoint; in fact such a notion cannot differ from that of

* This work was supported by the « Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica » of Italian C.N.R.

** Istituto di Matematica, Università di Napoli.

magnitude of a phenomenological 3-force which is essentially a frame-dependent object. In this connection it seems necessary to me to analyse what kind of boundedness for **A** may be equivalent to the boundedness of the 3-force magnitude, which is demanded to hold, as physically essential, in every reference frame.

Namely, after having recalled (sec. 2) the frame-dependent dynamic theory of a non-zero rest mass particle as provided by C. CATTANEO [3] and R. GRASSINI [4] [5], I show (sec. 3, 4) that *for any timelike curve* λ *with finite proper length the boundedness, in every frame of reference, of the norm of the frame-dependent phenomenological 3-force* $\mathcal{F}$*, acting on the particle which traverses* λ*, is completely equivalent to the boundedness of the 4-acceleration norm* $\| \mathbf{A} \|$. Therefore, it turns out that is the boundedness of $\| \mathbf{A} \|$ which really characterizes Geroch's suggestment about thrust finiteness.

On the ground of the above statement I precise (sec. 5) what Geroch emphasized in [1], by stating the criterion that any physically satisfactory definition of singularity must include all timelike inextendible non-geodesic curves with finite proper length and bounded $\| \mathbf{A} \|$ (which, for brevity, I shall call *Geroch timelike singularities*). By means of this criterion I analyse the present-day commonly accepted definition of singularity, due to B. G. SCHMIDT [6], by showing that, since any timelike Schmidt's singularity has always finite proper length [7], this definition partially includes the class of Geroch timelike singularities. The more complex problem of whether or not Schmidt's definition exhausts all Geroch timelike singularities will be the object of a forthcoming paper.

2. - THE FRAME-DEPENDENT DYNAMIC THEORY OF A NON-ZERO REST MASS PARTICLE

Let $(\mathfrak{M}, \mathbf{g})$ be a general relativistic time-orientable space-time, where $\mathfrak{M}$ and $\mathbf{g}$ respectively denote a 4-dimensional smooth manifold and a Lorentz metric of signature $+ + + -$.

Let us consider a particle with non-zero rest mass m_0 and let $\lambda(\tau)$ be its world line in $(\mathfrak{M}, \mathbf{g})$, where τ denotes particle's proper time. If $\mathbf{X}$ is the unit timelike tangent vector along $\lambda(\tau)$, one defines

$$\mathbf{P} = m_0 \mathbf{X} \qquad \textit{particle's 4-momentum,} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\nabla \mathbf{X}}{d\tau} \qquad \textit{particle's 4-acceleration.} \tag{2.2}$$

Particle's dynamics is completely characterized, as well-known, by the frame-independent law

$$\frac{\nabla \mathbf{P}}{d\tau} = \Phi \tag{2.3}$$

or, equivalently, as follows from (2.1) and (2.2),

$$m_0 \mathbf{A} = \Phi \tag{2.4}$$

where the spacelike[1] vector Φ, called *total 4-force*, depends on the particular problem one is considering.

A physical interpretation of eq. (2.3) in newtonian-type terms is usually obtained [8] considering a reference frame $\mathfrak{R}$ in $(\mathfrak{M}, \mathbf{g})$. This frame is regarded as a Cosserat continuum [9] [10], i.e. as a congruence Γ of timelike curves (or, equivalently, as a timelike unit vector field γ) together with the set B of all bases of 3-dimensional vector spaces $\sum_x$, **g**-orthogonal to γ_x, defining in every point x of the region occupied by Γ, the direct sum

$$T_x \mathfrak{M} = \sum_x \oplus \Theta_x \ , \tag{2.5}$$

where $T_x \mathfrak{M}$ denotes the tangent vector space in x, and Θ_x is the 1-dimensional vector space spanned by γ_x.

The direct sum (2.5) provides the following unique decomposition of an arbitrary vector field $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \mathfrak{F}_\Sigma \mathbf{Y} - g(\mathbf{Y}, \gamma)\gamma \ ; \tag{2.6}$$

$\mathfrak{F}_\Sigma$ is called *spatial projection operator* in $\mathfrak{R}$, while any vector belonging to $\sum_x$ is called *spatial* vector in $\mathfrak{R}$. Obviously $\mathbf{Y}$ is spatial in $\mathfrak{R}$ if and only if $\mathfrak{F}_\Sigma \mathbf{Y} = \mathbf{Y}$.

Along $\lambda(\tau)$ and in every reference frame, the following frame-dependent functions are defined[2] [8] [5]:

$$d\mathrm{T} = -g(\gamma, \mathbf{X})\, d\tau \qquad \textit{particle's standard time} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{p} = \mathfrak{F}_\Sigma \mathbf{P} \qquad \textit{particle's 3-momentum} \tag{2.8}$$

$$\mathrm{E} = -g(\gamma, \mathbf{P}) \qquad \textit{particle's energy} \tag{2.9}$$

[1] Φ is spacelike as follows from (2.4) and the well-known circumstance that $\mathbf{A}$ is spacelike.

[2] The speed of light is taken to be unity.

(2.10) $$\mathbf{v} = \frac{d\tau}{d\mathrm{T}}\, \mathfrak{F}_\Sigma\, \mathbf{X} \qquad \textit{particle's 3-velocity}$$

(2.11) $$m = \frac{d\mathrm{T}}{d\tau}\, m_0 \qquad \textit{particle's mass.}$$

It can be shown [8] that

(2.12) $$\mathrm{E} = m$$

(2.13) $$\frac{d\mathrm{T}}{d\tau} = (1 - \|\mathbf{v}\|)^{-1/2}$$

(2.14) $$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$$

where $\|\,.\,\|$ denotes the Lorentz norm $g(.\,,.)$.

It can be shown [9] that, if $\chi(\mathfrak{M})$ is the module of vector fields on $\mathfrak{M}$, then the set $\sum = \{\mathbf{Y} \in \chi(\mathfrak{M}) \,/\, g(\gamma, \mathbf{Y}) = 0\}$ is a vector bundle on $\mathfrak{M}$ with fibre $\sum_x$, whose linear frames form a principal fibre bundle B with structural group $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$. A linear *spatial connection* in $\mathfrak{R}$ is a connection on B.

In [10] [4] it is shown that it is physically meaningful to consider, in $\mathfrak{R}$, the spatial connection whose parallel transport law of a spatial vector field $\mathbf{u}$, along the integral curves of an arbitrary vector field $\mathbf{Y}$, is defined by equations

(2.15) $$\begin{cases} \mathfrak{F}_\Sigma\ \nabla_{\mathbf{Y}}\, \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{Y}\,(g\,(\gamma, \mathbf{u})) = 0\ , \end{cases}$$

that is the *Fermi mixed transport equations* of $\mathbf{u}$ in $\mathbf{Y}$-direction. Denote by

$$\frac{d_{\mathrm{F}}}{d\mathrm{T}} = \mathfrak{F}_\Sigma \frac{\nabla}{d\mathrm{T}} = \frac{d\tau}{d\mathrm{T}}\, \mathfrak{F}_\Sigma\, \nabla_{\mathbf{Y}}$$

the *mixed Fermi derivative* in the module of cross-sections of $\sum$, and spatially project eq. (2.3) in $\mathfrak{R}$. Thus we obtain the following balance equation for particle's 3-momentum

(2.16) $$\frac{d_{\mathrm{F}}\,\mathbf{p}}{d\mathrm{T}} = m\,\mathbf{G} + \mathfrak{F}$$

and, as a consequence, the following balance equation for particle's energy

$$\frac{d\,\mathrm{E}}{d\,\mathrm{T}} = g\,(\mathbf{v},\, m\,\mathbf{G}) + g\,(\mathbf{v},\, \mathfrak{F})\ , \tag{2.27}$$

where the spatial vectors

$$\mathbf{G} = -\frac{\nabla\,\gamma}{d\,\mathrm{T}} \tag{2.18}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{d\,\tau}{d\,\mathrm{T}}\cdot \mathfrak{F}_{\Sigma}\,\Phi \tag{2.19}$$

are called [3] [5] *gravitational* 3-*field* and *phenomenological* 3-*force respectively.*

3. - A DYNAMIC CONSEQUENCE OF THE BOUNDEDNESS OF THE 4-ACCELERATION NORM

Newtonian-type formulation of particle's dynamics, developed in previous section, leads us to identify the notion of thrust magnitude with $\| \mathfrak{F} \|$ in every frame of reference [3].

In this connection let us note that, from (2.13) and (2.19) we have

$$0 < \| \mathfrak{F} \| = \left(\frac{d\,\tau}{d\,\mathrm{T}}\right)^{2} \| \mathfrak{F}_{\Sigma}\,\Phi \| \leq \| \mathfrak{F}_{\Sigma}\,\Phi \|\ ; \tag{3.1}$$

moreover, from (2.6), since $\| \gamma \| = -1$ and by bilinearity of $\| \cdot \|$, we also get

$$\| \mathfrak{F}_{\Sigma}\,\Phi \| = \| \Phi + \mathrm{g}\,(\Phi, \gamma)\,\gamma \| = \| \Phi \| + \mathrm{g}^{2}\,(\Phi, \gamma)\ , \tag{3.2}$$

and, by definition of angle ϑ between two non-null vectors,

$$g\,(\Phi, \gamma) = |\,\| \Phi \|\,\| \gamma \|\,|^{1/2} \cos\,\vartheta\ . \tag{3.3}$$

Since $\| \Phi \|$ is positive, (3.3) implies

$$g^{2}\,(\Phi, \gamma) \leq \| \Phi \|\ , \tag{3.4}$$

[3] When acting on spatial vectors, the indefinite norm $\| \cdot \|$ behaves as a positive definite one [8].

and therefore, from (3.2) and (3.4), we obtain

$$\| \Phi \| \leq \| \mathcal{S}_\Sigma \Phi \| \leq 2 \| \Phi \| ; \tag{3.5}$$

thus inequalities (3.1) and (3.5), bearing in mind (2.4), show that

$$\| \mathbf{A} \| \leq \mathrm{H} \Rightarrow \| \mathcal{F} \| \leq 2 m_o^2 \mathrm{H} \tag{3.6}$$

where H is a suitable real constant. Since γ is completely arbitrary, the following proposition holds:

I) *If the 4-acceleration of a non-zero rest mass particle has bounded norm along particle's world line, then the frame-dependent phenomenological 3-force acting on the particle is also bounded in norm in every reference frame.*

Thus prop. I) proves that if $\| \mathbf{A} \|$ is bounded then the particle undergoes a finite thrust.

4. - The physical meaning of the boundedness of the 4-acceleration norm

In this section I shall prove that prop. I) can be inverted under the condition that a further assumption on the particle's world line be added.

To this end, suppose that

$$\| \mathcal{F} \| \leq \mathrm{K} \qquad (\mathrm{K} \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

in every reference frame $\mathcal{R}$, and, moreover, that the total proper length τ_{tot} of particle's world line $\lambda(\tau)$ is finite. Because of the frame-independent character of $\| \mathbf{A} \|$, it suffices to show the boundedness of $\| \mathbf{A} \|$ in a particular reference frame. In this connection we shall consider the frame of reference $\mathcal{R}^*$ defined by an arbitrary fixed extension γ^* ([11] p. 32) of the timelike unit vector field $\bar{\gamma}^*$ satisfying along $\lambda(\tau)$ the condition

$$\begin{cases} \dfrac{\nabla \bar{\gamma}^*}{\mathrm{d}\tau} = 0 \\ \bar{\gamma}^*_{\lambda(o)} = \mathbf{X}_{\lambda(o)} , \end{cases} \tag{4.2}$$

where $\lambda(o)$ is the initial point of $\lambda(\tau)$.

Since the inversion of prop. I) is trivial if $\lambda(\tau)$ is geodesic, we shall suppose it to be non-geodesic, which in turn implies that γ^* never identically identifies with $\mathbf{X}$ along $\lambda(\tau)$.

Let us observe now that, from equations (2.12), (2.17) and definition (3.3), it follows

$$\left|\frac{d\,m}{d\,\mathrm{T}}\right| = |\,g(\mathbf{v}, \mathfrak{F}) + g(\mathbf{v}, m\,\mathbf{G})\,| \leq \tag{4.3}$$

$$\leq \|\,\mathbf{v}\,\|^{1/2}\,(\,\|\,\mathfrak{F}\,\|^{1/2} + \|\,m\,\mathbf{G}\,\|^{1/2}\,) \leq \|\,\mathfrak{F}\,\|^{1/2} + \|\,m\,\mathbf{G}\,\|^{1/2}.$$

On the other hand, by definitions (2.11) and (2.18), we have

$$m\,\mathbf{G} = -\,m\,\frac{\nabla\,\gamma^*}{d\,\mathrm{T}} = -\,m_0\,\frac{\nabla\,\gamma^*}{d\,\tau} \tag{4.4}$$

so that, by construction, the frame-dependent gravitational 3-force vanishes identically along $\lambda(\tau)$. Then, from (4.3) and (4.1) it follows

$$\left|\frac{d\,m}{d\,\mathrm{T}}\right| \leq \|\,\mathfrak{F}\,\|^{1/2} \leq \mathrm{K}^{1/2} \tag{4.5}$$

and, consequently,

$$|\,m(\mathrm{T}) - m(\mathrm{T}_0)\,| \leq \mathrm{K}^{1/2}\,(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) \tag{4.6}$$

where T_0 is the value of T corresponding to $\tau = 0$.

Initial condition $(4.2)_2$ together with (2.6) and (2.10) imply that

$$\mathbf{v}(\mathrm{T}_0) = 0 \tag{4.7}$$

and therefore, from (2.11), we have $m(\mathrm{T}_0) = m_0$; since $m(\mathrm{T}) \geq m_0$, we obtain, from (4.6),

$$m(\mathrm{T}) \leq \mathrm{K}^{1/2}\,(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) + m_0 \tag{4.8}$$

that is, from (2.11),

$$\frac{d\,\mathrm{T}}{d\,\tau} \leq \frac{\mathrm{K}^{1/2}}{m_0}\,(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) + 1\,. \tag{4.9}$$

Integrating (4.9), we obtain

$$\mathrm{T} - \mathrm{T}_0 \leq \frac{m_0}{\mathrm{K}^{1/2}}\left(\exp\left(\frac{\mathrm{K}^{1/2}}{m_0}\,\tau\right) - 1\right), \tag{4.10}$$

and, bearing in mind that τ_{tot} is finite, from (4.9) and (4.10) it follows that, in $\mathfrak{R}^*$, $\frac{d\,T}{d\,\tau}$ has the following upper bound

$$\exp\left(\frac{K^{1/2}}{m_o}\,\tau_{tot}\right).$$

Therefore, from (3.5) and (2.19), we have

$$\| \Phi \| \leq \| \mathfrak{F}_\Sigma \Phi \| = \left(\frac{d\,T}{d\,\tau}\right)^2 \| \mathfrak{F} \| \leq K \exp^2\left(\frac{K^{1/2}}{m_o}\,\tau_{tot}\right)$$

and so, from (2.4), it follows

$$\| \mathbf{A} \| \leq \frac{K}{m_o^2} \exp^2\left(\frac{K^{1/2}}{m_o}\,\tau_{tot}\right),$$

which proves that $\| \mathbf{A} \|$ is bounded.

Collecting this result with prop. I), we obtain the following further proposition

II) *If the world line of a non-zero rest mass particle has finite total proper length, then the boundedness of the norm of its* 4*-acceleration* $\| \mathbf{A} \|$ *is completely equivalent to the boundedness of the norm of the phenomenological frame-dependent* 3*-force* $\mathfrak{F}$ *in every reference frame.*

This proposition provides, in terms of $\| \mathbf{A} \|$, a complete interpretation of Geroch's thought about thrust finiteness at least for timelike curves with finite proper length.

5. - A REMARK ON SCHMIDT'S DEFINITION OF SINGULARITY

Prop. II) allows us to precise what Geroch meant about a physically satisfactory definition of singularity in General Relativity. Namely, calling *Geroch timelike singularity* any timelike inextendible non-geodesic curve with finite proper length and bounded $\| \mathbf{A} \|$, we shall identify Geroch's idea with the following criterion:

III) *Any physically satisfactory definition of singularity in General Relativity must include all Geroch timelike singularities.*

On the ground of this criterion we shall analyse the present-day commonly accepted Schmidt's definition of singularity (b-*singularity*). This is essentially [4] any inextendible curve with finite length as measured by a *generalized affine parameter*

$$u = \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_1^4{}_i \, (X^i)^2 \right\}^{1/2} d\,t \tag{5.1}$$

where X^i are the components of the tangent vector as evaluated in an arbitrary family of parallely propagated orthonormal bases (pp-*bases*) along the curve.

As outlined in [7], for any timelike curve we have

$$\text{finite } u_{\text{tot}} \Rightarrow \text{finite } \tau_{\text{tot}} \; ; \tag{5.2}$$

moreover, since Schmidt's definition does not involve restrictions on $\| \mathbf{A} \|$, a timelike non-geodesic b-singularity λ may have either bounded or unbounded $\| \mathbf{A} \|$ along λ. Thus, from (5.2), it trivially follows that

IV) *Any timelike non-geodesic* b-*singularity with bounded* $\| \mathbf{A} \|$ *is also a Geroch timelike singularity.*

This simply shows that notion of Schmidt's singularity is not independent of that of Geroch timelike singularity, but the main question is of whether or not Schmidt's definition satisfies criterion III), i.e. of whether or not *all* Geroch timelike singularities are b-singularities. The only way to answer the question is just to study if implication (5.2) might be inverted under the addictional [5] assumption that $\| \mathbf{A} \|$ is bounded.

Although we shall devote a future paper to this problem, nevertheless we wish to emphasize here that Schmidt's statement « it is obvious that timelike curves with finite length and bunded acceleration determine points of spacetime b-boundary » ([6] p. 276) cannot be considered a complete answer to the above problem. In fact, in this statement it is not clarified in what sense the boundedness of $\mathbf{A}$ has to be meant; on the other hand, Schmidt's definition of singularity and the whole content of his original paper suggest that such a boundedness has to be referred not to the norm $\| \mathbf{A} \|$

[4] More precisely a b-singularity is a point of the space-time b-boundary, i.e. an equivalence class of inextendible curves with finite generalized affine length (details can be found in [6]).

[5] Implication (5.2) cannot be directly inverted since $u \geq \tau$, equality holding only in geodesic case [7].

but to the components A^i of **A** as evaluated in pp-bases along λ and, with this interpretation of the boundedness of **A**, Schmidt's statement is really obvious [6].

REFERENCES

[1] R. GEROCH, Ann. of Phys., **48**, 526 (1968).
[2] R. GEROCH, Art. in *Relativity*, ed. Carmeli, Fickler, and Witten, Plenum, New York (1970).
[3] C. CATTANEO, Comptes Rendus, Acc. Sc., **256**, 3964 (1963).
[4] R. GRASSINI, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. (Napoli), **40**, 152 (1973).
[5] R. GRASSINI, Ric. di Mat. (Napoli), **23**, 171 (1974).
[6] B. G. SCHMIDT, Journ. of Gen. Rel. and Grav., **1**, 269 (1971).
[7] F. ROSSO, Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. (Napoli), **43** (to appear) (1976).
[8] C. CATTANEO, *Introduzione alla teoria einsteiniana della Gravitazione*, Veschi, Roma (1963).
[9] R. GRASSINI, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. (Napoli), **41**, 201 (1974).
[10] R. GRASSINI, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. (Napoli), **38**, 188 (1971).
[11] S. HAWKING & G. ELLIS, *The Large Scale Structure of SpaceTime*, Cambridge, Univ. Press (1973).

[6] In fact, in pp-bases, A^i reduces to $\dfrac{d X^i}{d \tau}$ and so

$$|A^i| \leq K \Rightarrow |X^i| \leq K' \tau_{tot} \Rightarrow u \leq K'' \tau_{tot}$$

where K, K′, and K″ are suitable constants.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Tolotti, C. Nicolini e V. Dalla Volta.

Sulla regolarità di certi potenziali ellittici

Nota di RENATA SELVAGGI e IRENE SISTO
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 6 novembre 1976)

SUMMARY. — We investigate some regularity properties for integral transformation of the kind $f \to G * f$. Here G is a principal fundamental solution of an elliptic equation whose coefficients obey Dini's conditions.

INTRODUZIONE

Il presente lavoro trae origine da un problema posto da C. MIRANDA a conclusione della memoria [1]. Si tratta di estendere alcuni risultati riguardanti la continuità negli spazi $C^{(k,\lambda)}$ delle trasformazioni integrali del tipo $f \to G * f$ nel caso in cui G è soluzione fondamentale costruita col metodo di Levi di un'equazione ellittica a coefficienti variabili.

Se i coefficienti dell'equazione verificano condizioni di Hölder, servendosi delle tecniche adoperate da C. MIRANDA si ottengono teoremi analoghi a quelli contenuti in [1], § 5; su ciò non ci soffermiamo. Qui ci occupiamo invece del caso in cui G sia la soluzione fondamentale principale costruita in [4] col metodo di Levi per una equazione ellittica di ordine m con coefficienti soddisfacenti condizioni del Dini in $\mathbf{R}^\nu$. Alcuni risultati trovati, (cfr. ad es. Teor. 1.1), sono una generalizzazione di proprietà differenziali di potenziali ellittici trovate in piccolo da MATICUK-EIDEL'MANN in [3] (cfr. Property 4 di [3]).

Il risultato principale è contenuto nel Teorema 1.2 in cui si prova che la funzione $\int_\Omega G(x, y) f(y)\, dy$ ha prolungamento continuo a $\bar{\Omega}$ di classe $C^{(m)}$ con derivate di ordine m soddisfacenti condizioni del Dini, nell'ipotesi che sia f che le derivate delle funzioni che rappresentano localmente la frontiera di Ω soddisfino opportune condizioni del Dini.

Nel N. 1 si indicano le definizioni preliminari e si enunciano i teoremi fondamentali. Nel N. 2 vengono esposti i risultati necessari

per la dimostrazione dei teoremi suddetti. Gli stessi, con le relative dimostrazioni, saranno riportati in un lavoro più ampio di prossima pubblicazione.

N. 1. — Sia A un insieme aperto o la chiusura di un insieme aperto di $\mathbf{R}^\nu$. Si assumono le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1.1. *Se f è una funzione reale o complessa definita in* A, *si dice che f è di classe $\mathcal{H}^1(A)$ o che soddisfa la condizione del Dini in* A, *se essa è ivi continua e limitata e se il suo modulo di continuità*

$$\omega^f(h) = \sup_{|x-\xi|\leq h} |f(x) - f(\xi)| \tag{1.1}$$

soddisfa la condizione che esiste $r > o$ tale che l'integrale

$$F_1^f(r) = \int_o^r \frac{\omega^f(h)}{h}\, dh \tag{1.2}$$

converga.

DEFINIZIONE 1.2. *Se $n \in \mathbf{N}$ con $1 < n$ ed f è una funzione reale o complessa definita in* A, *si dice che f è di classe $\mathcal{H}^n(A)$ se essa è di classe $\mathcal{H}^{n-1}(A)$ e se esiste $r > o$ tale che l'integrale*

$$F_n^f(r) = \int_o^r \frac{F_{n-1}^f(h)}{h}\, dh \tag{1.3}$$

converga.

DEFINIZIONE 1.3. *Se m e k sono elementi di $\mathbf{N}$ con $1 \leq m$ ed f è una funzione reale o complessa definita in* A *si dice che f è di classe $\mathcal{H}^{k,m}(A)$ se essa è di classe $C^{(k)}(A)$ e se per ogni $\alpha \in \mathbf{N}^\nu$, con $|\alpha| = k$, $\partial^\alpha f$ è di classe $\mathcal{H}^m(A)$ (cfr. def. 1.1 e 1.2).*

Sia Ω un insieme aperto limitato di $\mathbf{R}^\nu$ di classe $A^{(1)}$.

Esiste, allora, $a > o$ tale che per ogni $x_o \in \partial\Omega$ l'insieme $\partial\Omega \cap \Gamma(x_o, a)$ è rappresentato mediante un'equazione della forma

$$\xi_\nu = \zeta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu-1}) \tag{1.4}$$

rispetto ad un sistema di assi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ con origine in x_o, dove ζ è una funzione almeno di classe $C^{(1)}$ nella proiezione $T = T(x_o, a)$ di

$\partial\Omega \cap \Gamma(x_0, a)$ sull'iperpiano $\xi_\nu = 0$, e inoltre, si annulla con le sue derivate prime in x_0. Denotato con π_0 l'iperpiano $\xi_\nu = 0$, π_0 risulta tangente a $\partial\Omega$ in x_0 e l'asse ξ_ν coincide con la normale interna a $\partial\Omega$ in x_0 (cfr. [1], pag. 304).

Un tale insieme aperto si dice *di classe* $\mathcal{H}^{k,r}$ se la funzione ζ è di classe $\mathcal{H}^{k,r}(T)$ (cfr. def. 1.3).

In quanto segue, se $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant \nu} \in \mathbf{R}^\nu$ dove è $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant \nu-1} \in T$, si pone

$$\xi = (\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant \nu-1},\ t = \xi_\nu,\ \zeta_i(\xi) = \partial_{\xi_i}\zeta \text{ per } i = 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Inoltre se $\Omega \in \mathcal{H}^{1,2}$, denotato con ω^3 il massimo modulo di continuità delle $\zeta_i(\xi)$, si pone:

$$(1.5)\qquad Z = \sup_{\xi', \xi'' \in T(x_0, a)} \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu-1} (\zeta_i(\xi') - \zeta_i(\xi''))^2\right)^{1/2}}{\omega^3(|\xi' - \xi''|)} - ,\ \varepsilon = Z \cdot \omega^3(a).$$

Si assume l'ulteriore

DEFINIZIONE 1.4. *Se Ω è un insieme aperto di $\mathbf{R}^\nu$ di classe $\mathcal{H}^{k,r}$ ed f è una funzione reale o complessa definita in $\partial\Omega$, si dice che f è di classe $\mathcal{H}^{k,r}(\partial\Omega)$ se per ogni porzione di $\partial\Omega$ che ammette una rappresentazione parametrica del tipo* (1.4) *risulta $f(\xi, \zeta(\xi))$ di classe $\mathcal{H}^{k,r}(T)$.*

Si consideri adesso, come in [4], l'equazione

$$(1.6)\qquad \sum_{|p|\leqslant m} a_p(x)\, \partial^p u(x) + a_0 \cdot \lambda^m u(x) = 0$$

Qui e nel seguito si suppone che i coefficienti $a_p(x)$ della (1.6) verifichino oltre alle ipotesi $\{2, a\}$ e $\{2, b\}$ di [4] l'ulteriore ipotesi

$\{2, c\}$ *i coefficienti $a_p(x)$ sono di classe $\mathcal{H}^3(\mathbf{R}^\nu)$ se $|p| = m$ e di classe $\mathcal{H}^2(\mathbf{R}^\nu)$ se $|p| < m$.*

Si denoti ora con ω^0 e ω^1 rispettivamente il massimo modulo di continuità dei coefficienti $a_p(x)$ con $|p| = m$ e il massimo modulo di continuità dei coefficienti $a_p(x)$ con $|p| < m$. Inoltre, per $k = 1, 2$, F_k^0 e F_k^1 indicano le funzioni definite in (1.2) e (1.3) relativamente a ω^0 e ω^1.

Il Teorema 3.1 di [4] assicura l'esistenza di un numero reale positivo λ_0 tale che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ l'equazione (1.6) abbia una soluzione fondamentale principale $G(x, y, \lambda)$. Tale soluzione fondamen-

tale è costruita col metodo di Levi ed ha una espressione del tipo (cfr. (3.1) di [4])

$$(1.7) \qquad G(x, y, \lambda) = F_1(y, x - y, \lambda) + \int_{\mathbf{R}^\nu} F_1(z, x - z, \lambda) \cdot Z(z, y, \lambda)\, dz.$$

Dopo ciò, se $\lambda \geq \lambda_0$ e Ω è un aperto di $\mathbf{R}^\nu$, si consideri la seguente trasformazione

$$(1.8) \qquad f \to T(\Omega, f)(x) = \int_{\Omega} G(x, y, \lambda) \cdot f(y)\, dy.$$

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA 1.1. *Se f è una funzione di classe $\mathcal{H}^2(\mathbf{R}^\nu)$ allora $T(\mathbf{R}^\nu, f)$ è una funzione di classe $\mathcal{H}^{m,1}(\mathbf{R}^\nu)$ (cfr. def. 1.1. e 1.2).*

TEOREMA 1.2. *Se Ω è un insieme aperto di classe $\mathcal{H}^{1,2}$ e se f è una funzione di classe $\mathcal{H}^3(\bar{\Omega})$, allora la restrizione di $T(\Omega, f)$ a Ω [$\mathbf{C}\,\bar{\Omega}$] ha prolungamento continuo a $\bar{\Omega}$ [$\mathbf{C}\,\Omega$] di classe $\mathcal{H}^{m,1}(\bar{\Omega})$ [$\mathcal{H}^{m,1}\mathbf{C}\,\Omega$] (cfr. def. 1.1 e 1.2).*

N. 2 - Per poter studiare la trasformazione (1.8) tenendo presente la (1.7), è sufficiente studiare separatamente le due trasformazioni

$$(2.1) \qquad f \to T_1(\Omega, f)(x) = \int_{\Omega} f(y)\, dy \int_{\mathbf{R}^\nu} F_1(z, x - z, \lambda) \cdot Z(z, y, \lambda)\, dz,$$

$$(2.2) \qquad f \to T_2(\Omega, f)(x) = \int_{\Omega} F_1(y, x - y, \lambda) \cdot f(y)\, dy.$$

Per quanto riguarda la (2.1) si prova la seguente

PROPOSIZIONE 2.1. *Se Ω è un aperto di $\mathbf{R}^\nu$ ed f è una funzione limitata e misurabile in Ω, allora $T_1(\Omega, f)$ è una funzione di classe $\mathcal{H}^{m,1}(\mathbf{R}^\nu)$.*

La dimostrazione della proposizione precedente si effettua provando la sommabilità in Ω rispetto a y delle derivate di ordine m rispetto a x della funzione

$$v(x, y, \lambda) = \int_{\mathbf{R}^\nu} F_1(z, x - z, \lambda) \cdot Z(z, y, \lambda)\, dz$$

e ciò come conseguenza dell'ipotesi $\{2, c\}$ e del seguente

LEMMA 2.1. *Esiste un numero reale positivo* $\lambda_1 \geq \lambda_0$ *tale che per ogni* $\lambda \geq \lambda_1$, *per ogni* $\mu \in]0, \mu_0[$ *e per ogni* $p \in \mathbf{N}^\nu$ *con* $|p| = m$ *risulti*

$$|\partial_x^p v(x,y,\lambda)| \leq C \cdot e^{-\mu \cdot \frac{\lambda}{16}|x-y|} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\omega^0(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \cdot \log \frac{1}{|x-y|} + \frac{F_1^0(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \right) \tag{2.3}$$

con C *costante indipendente da* x *e* y (cfr. lem. 2.2 di [4]).

Al fine di valutare l'incremento rispetto a x delle suddette derivate si prova l'ulteriore

LEMMA 2.2. *Con le notazioni del lemma* 2.1, *per ogni* $p \in \mathbf{N}^\nu$ *con* $|p| = m$, *per ogni* $\lambda \in [\lambda_1, +\infty[$ *e per ogni* $\mu \in]0, \mu_0[$, *risulta*

$$|\Delta_h \partial_x^p v(x,y,\lambda)| = |\partial_x^p v(x+h,y,\lambda) - \partial_x^p v(x,y,\lambda)| \leq \tag{2.4}$$

$$\leq C \cdot \left[\left(F_1^0(|h|) \log \frac{1}{|h|} + F_2^0(|h|) + F_1^1(|h|) \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \left(e^{-\mu \cdot \frac{\lambda}{16} \cdot |x+h-y|} \cdot \frac{F_1^0(|x+h-y|)}{|x+h-y|^\nu} + \right.$$

$$\left. + e^{-\mu \cdot \frac{\lambda}{16}|x-y|} \cdot \frac{F_1^0(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \right) +$$

$$\left. + (F_1^0(|h|) + \omega^1(|h|)) \cdot \left(\frac{e^{-\mu \cdot \frac{\lambda}{16}|x+h-y|}}{|x+h-y|^\nu} + \frac{e^{-\mu \cdot \frac{\lambda}{16}|x-y|}}{|x-y|^\nu} \right) \right].$$

Tenuto conto che per λ sufficientemente grande risulta (cfr. teor. 3.1 di [4])

$$Z(x,y,\lambda) = K(x,y,\lambda) + \sum_{l=1}^{\infty} K_l(x,y,\lambda) = K(x,y,\lambda) + \bar{K}(x,y,\lambda), \tag{2.5}$$

le (2.3) e (2.4) si ottengono studiando separatamente le funzioni

$$\int_{\mathbf{R}^\nu} F_1(z, x-z, \lambda) \cdot K(z,y,\lambda)\, dz \;, \quad \int_{\mathbf{R}^\nu} F_1(z, x-z, \lambda) \cdot \bar{K}(z,y,\lambda)\, dz$$

e risultano, di conseguenza, più fini di quelle ottenute in [3], pag. 159.

Per quanto riguarda la (2.2) nel caso in cui $\Omega = \mathbf{R}^\nu$ si prova la seguente:

PROPOSIZIONE 2.2. *Se f è una funzione di classe $\mathcal{H}^2(\mathbf{R}^\nu)$, allora $T_2(\mathbf{R}^\nu, f)$ è una funzione di classe $\mathcal{H}^{m,1}(\mathbf{R}^\nu)$.*

Nel caso, invece, in cui Ω è un insieme aperto limitato di $\mathbf{R}^\nu$ si segue l'ordine di idee indicato in [1].

Denotata con $H_1(x, y - t)$ la soluzione fondamentale dell'equazione

$$\sum_{|p|=m} a_p(x)\, \partial_y^p\, u(y) = 0$$

costruita in [5], si prova preliminarmente la

PROPOSIZIONE 2.3. *Se f è di classe $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ e Ω è di classe $\mathcal{H}^{1,2}$, la restrizione a Ω [$\complement\bar{\Omega}$] della funzione*

$$T_3^*(\partial\Omega, f)(x) = \int_{\partial\Omega} H_1(y, x - y) f(y)\, d_y\sigma$$

ha un prolungamento continuo a $\bar{\Omega}$[$\complement\Omega$] di classe $\mathcal{H}^{m-1,1}(\bar{\Omega})$ [$\mathcal{H}^{m-1,1}(\complement\Omega)$].

DIMOSTRAZIONE. Per provare l'asserto si segue un procedimento analogo a quello adoperato nel n. 4 di [1].

Siano, pertanto, $x_0 \in \partial\Omega$, $o < b < \dfrac{a}{2(1+\varepsilon)}$, $x \in \Omega \cap \Gamma(x_0, b)$, $|q| = m - 1$.

Servendosi del sistema di riferimento introdotto nel n. 1, si ponga

$$(\xi, t) = x, \quad w(\xi, t) = \int_{\partial\Omega} [\partial_x^q H_1(s, x - y)]_{s=x} f(y)\, d_y\sigma,$$

$$H(z, x) = \partial_x^q H_1(z, x).$$

Se f è una funzione a supporto compatto in $\partial\Omega \cap \Gamma(x_0, a)$, indicando con $J\, d\eta$ l'elemento di misura ipersuperficiale $d_\eta\sigma$ di $\partial\Omega$ risulta

$$w(\xi, t) = \int_T H(\xi, t, \xi - \eta, t - \zeta(\eta))\, \psi(\eta)\, d\eta$$

dove η è la proiezione di y su π_0 e $\psi(\eta) = f(y)\, J$.

Dopo ciò fissati x' e x'' in $\Omega \cap \Gamma(x_0, b)$ con $x' = (\xi', t')$, $x'' = (\xi'', t'')$ e $d = |x' - x''|$, si ha

$$(2.6) \qquad w(\xi'', t'') - w(\xi', t') =$$

$$= \int_T [H(\xi'', t'', \xi'' - \eta, t'' - \zeta(\eta)) - H(\xi', t', \xi'' - \eta, t'' - \zeta(\eta))]\psi(\eta)d\eta +$$

$$+ \int_T [H(\xi', t', \xi'' - \eta, t'' - \zeta(\eta)) - H(\xi', t', \xi' - \eta, t' - \zeta(\eta))]\psi(\eta)d\eta =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Posto, per $s > 0$,

$$G(s) = H(\xi'', t'', \xi'' - \eta, s) - H(\xi' t', \xi'' - \eta, s),$$

applicando a $G(s)$ la formula di Taylor di punto iniziale $t'' - \bar{\zeta}(\eta)$, dove $\bar{\zeta}(\eta) = \zeta(\xi'') + \sum_{i=1}^{\nu-1} \zeta_i(\xi'')(\eta_i - \xi_i'')$ è l'equazione del piano tangente a $\partial\Omega$ in $(\xi'', \zeta(\xi''))$, tenuto conto che $H(z, x)$ è omogenea di grado $1 - \nu$ rispetto a x per ogni x ed è, sempre per ogni fissato z, un nucleo di integrale a valor principale, si vede che

$$(2.7) \qquad |I_1| \leq C \cdot sup\, |f| \cdot \omega^0(d)$$

con un procedimento analogo a quello del lemma 2.1 di [1], risulta

$$(2.8) \quad |I_2| \leq C \cdot sup\, |f| \left[\omega^3(d) + \omega^t(d) + \int_0^d \frac{\omega^3(h) + \omega^t(h)}{h} d\,h \right]$$

in virtù del seguente

LEMMA 2.3. *Sia* ζ *di classe* $C^{(1)}$, $o < b < \dfrac{a}{2(1+\varepsilon)}$ *e* $f(\xi, t)$ *una funzione di classe* $C^{(1)}$ *per* $|\xi| \leq b$ *e* $t > \zeta(\xi)$. *Se, inoltre,* f *è tale che esistono una funzione* $\bar{\omega}$ *definita in* $\mathbf{R}$ *e di classe* $\mathfrak{R}^1([o, 1])$ *ed una costante* A *tale che*

$$\nabla_1 f(\xi, t) = \Big(\sum_{|\alpha|=1} |\partial^\alpha f(\xi, t)|^2\Big)^{1/2} \leq A \cdot \frac{\bar{\omega}(|\zeta(\xi) - t|)}{|\zeta(\xi) - t|}$$

allora per $x', x'' \in \Omega \cap \Gamma(x_0, b)$, *risulta*

$$|f(x') - f(x'')| \leq C(A) \cdot \left(\bar{\omega}(d) + \int_0^d \frac{\bar{\omega}(h)}{h}\, d\, h\right)$$

con $C(A)$ *costante dipendente da* A *e non da* x', x'', x_0 *e* $d = |x' - x''|$.

Infine, in aggiunta a quanto già provato da MATICUK-EIDEL'MANN in [3], pag. 160, si ha la

PROPOSIZIONE 2.4. *Se* f *è una funzione di classe* $\mathcal{H}^3(\bar{\Omega})$, *se* Ω *è di classe* $\mathcal{H}^{1,2}$, *allora la restrizione di* $T_2(\Omega, f)$ *a* Ω [$\mathbf{C}\,\bar{\Omega}$] *ha prolungamento continuo ad* $\bar{\Omega}$ [$\mathbf{C}\,\Omega$] *di classe* $\mathcal{H}^{m,1}(\bar{\Omega})$ [$\mathcal{H}^{m,1}(\mathbf{C}\,\Omega)$].

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto che col metodo di GEVREY (cfr. [2]) si vede che ogni funzione di classe $\mathcal{H}^2(\bar{\Omega})$ ha un prolungamento continuo di classe $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ per ogni sfera Γ contenente $\bar{\Omega}$, ci si limita a provare la tesi per la restrizione a Ω di $T_2(\Omega, f)$.

Essendo, a causa delle (2.6) e (2.8) di [4],

$$F_1(x, y, \lambda) = H_1(x, y) + H_2(x, y, \lambda) + W(x, y, \lambda)$$

con

$$H_2(x, y - t, \lambda) + W(x, y - t, \lambda) = O(|y - t|^{m+1-\nu}),$$

è sufficiente dimostrare che, se f è di classe $\mathcal{H}^2(\bar{\Omega})$, la restrizione a Ω della funzione

$$T_3(\Omega, f)(x) = \int_\Omega H_1(y, x - y)\, f(y)\, d\, y \tag{2.9}$$

ha un prolungamento continuo a $\bar{\Omega}$ di classe $\mathcal{H}^{m,1}(\bar{\Omega})$. Intanto si osservi che se $|p| = m$ e $x \in \Omega$, risulta (cfr. Property 2 e 3 di [3])

$$\partial^k T_3(\Omega, f)(x) = \int_\Omega [\partial_x^p H_1(y, x - y) f(y) - \partial_x^p H_1(s, x - y) f(x)]_{s=x}\, d\, y -$$

$$- f(x) \int_{\partial\Omega} [\partial_x^{p-1} H_1(s, x - y)]_{s=x} X_j'(y)\, d_y\, \sigma$$

dove $X_j'(y)$ designa il coseno direttore della normale esterna a $\partial\Omega$

in y. La tesi allora consegue dalla proposizione 2.3 e dal fatto che denotata con $w_1(x)$ la funzione

$$\int_{\Omega} [\partial_x^p H_1(y, x - y) f(y) - \partial_x^p H_1(s, x - y) f(x)]_{s=x} \, dy$$

per ogni $x', x'' \in \Omega$ si ha

$$| w_1(x') - w_1(x'') | \leq C \left[F_1^0(d) + F_1^f(d) + \omega^0(d) \log \frac{1}{d} + \omega^f(d) \log \frac{1}{d} \right]$$

con $d = | x' - x'' |$.

Per concludere, si noti che il teorema 1.1 consegue dalle proposizioni 2.1 e 2.2 mentre il teorema 1.2 consegue dalle proposizioni 2.1 e 2.4.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. MIRANDA, *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali* - Lincei - Memorie Sc. Fisiche, ecc. 1965 S. VIII, Vol. VII, Sez. I, 9.

[2] M. GEVREY, *Les quasi fonctions de Green et les systemes d'équations aux dérivées partielles du type elliptique*, Ann. Ec. N. Sup., **52** (1935), 296-298.

[3] MAITCUK-EIDEL'MANN, *On fundamental solution of elliptic systems*, American Mathematical Society Translation (1968).

[4] R. SELVAGGI, *Soluzioni fondamentali principali per equazioni ellittiche*, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste, Vol. V, fasc. I (1975).

[5] F. JOHN, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Intersc. tract. in Pure and Applied Math. (1955).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, F. Cafiero e C. Ciliberto.

Su una classe di problemi al contorno per le equazioni fortemente quasi-ellittiche in un rettangolo

Nota di LUCIANA SGAMBATI
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 6 novembre 1976)

RIASSUNTO. — In questo lavoro ci occupiamo dello studio, negli spazi di Sobolev ed in senso variazionale, di alcuni problemi al contorno relativi ad equazioni fortemente quasi-ellittiche in un rettangolo di R^2.

SUMMARY. — In this work we treat, in Sobolev spaces and in a variational sense, some boundary value problems relative to strongly quasi-elliptic equations in a rectangle of R^2.

Consideriamo il rettangolo $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 / a < x_1 < b, c < x_2 < d\}$ di cui indichiamo con $\partial_1 \Omega$ la porzione di frontiera unione dei due lati di equazioni $x_1 = a$ e $x_1 = b$, con $\partial_2 \Omega$ la porzione di frontiera unione dei due lati di equazioni $x_2 = c$ e $x_2 = d$.

Assegniamo una coppia (m_1, m_2) di interi positivi e poniamo $m = \max \{m_1, m_2\}$, $d = \text{m. c. d. } (m_1, m_2)$, $q_k = m/m_k$ $(k = 1, 2)$, $< \alpha, q > = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$ per $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in N_o^2$.

Indichiamo con $H^m(\Omega)$ il completamento di $C^\infty(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma:

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{<\alpha, q> \leqslant m} \int_\Omega | D^\alpha u |^2 \, d x \right)^{1/2}$$

e con $H_o^m(\Omega)$ la chiusura di $C_o^\infty(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.

Assegniamo inoltre una forma sesquilineare e continua su $H^m(\Omega) \, x \, H^m(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{\substack{<\alpha, q> \leqslant m \\ <\beta, q> \leqslant m}} a_{\alpha\beta}(x) \, D^\alpha u \, \overline{D^\beta v} \, d x$$

con $a_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$ per $< \alpha, q > = < \beta, q > = m$ e $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ per

$< \alpha + \beta, q > < 2m$ associata ad un operatore differenziale lineare:

$$A = \sum_{<\mu, q> \leqslant 2m} a_{\mu}(x) D^{\mu}$$

fortemente quasi-ellittico in $\bar{\Omega}$.

Ci proponiamo di individuare qualche spazio hilbertiano V, con $H_o^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ algebricamente e topologicamente, su cui la forma $a(u, v)$ sia *coercitiva.*

Assegniamo a tale scopo, per ogni $k \in \{1, 2\}$, un sistema $\{B_j^{(k)}\}_{j=0}^{m_k - 1}$ di m_k operatori differenziali lineari di frontiera su $\partial_k \Omega$, della forma:

$$B_j^{(k)} = \sum_{<\alpha, q> \leqslant j q_k} b_{j\alpha}^{(k)}(x) \partial^{\alpha},$$

a coefficienti $b_{j\alpha}^{(k)}$ reali « sufficientemente regolari » e soddisfacenti la condizione di *normalità*:

$$b_{j\alpha}^{(k)}(x) \neq 0 \text{ su } \overline{\partial_k \Omega} \text{ per } \alpha_k = j;$$

fissiamo due interi r_1 e r_2, con $r_k \in \{0, 1, 2, \ldots, m_k - 1\}$ indichiamo quindi con $H^m(\Omega; r_1)$ [risp. $H^m(\Omega; r_1, r_2)$] il sottospazio di $H^m(\Omega)$ costituito dalle $u \in H^m(\Omega)$ tali che $B_j^{(1)} u = 0$ su $\partial_1 \Omega$ per $j \in \{0, 1, \ldots m_1 - 1\} - \{r_1\}$ e $B_j^{(2)} = 0$ su $\partial_2 \Omega$ per $j \in \{0, 1, \ldots, m_2 - 1\}$ [rispett. $B_j^{(k)} u = 0$ su $\partial_k \Omega$ per $j \in \{0, 1, \ldots, m_k - 1\} - \{r_k\}$ $k = 1, 2$].

Con tecniche analoghe a quelle usate da M. TROISI in [4] [1], proviamo che se i numeri m_1/d e m_2/d sono dispari, allora $a(u, v)$ è coercitiva su $H^m(\Omega; r_1)$; se inoltre $r_1/m_1 + r_2/m_2 \geq, 1$, allora $a(u, v)$ è coercitiva su $H^m(\Omega; r_1, r_2)$.

Da tali risultati si deducono, con ben note considerazioni, dei teoremi di esistenza ed unicità e dei teoremi dell'alternativa per le soluzioni « deboli » in $H^m(\Omega)$ del problema:

$$A u + \lambda u = f \qquad q.o. \text{ in } \Omega$$

$$C_j^{(k)} u = 0 \qquad q.o. \text{ su } \partial_k \Omega;\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1;\ k = 1, 2;$$

nei seguenti due casi:

1) $C_j^{(1)} = B_j^{(1)}$ per $j \in \{0, 1, \ldots, m_1 - 1\} - \{r_1\}$ e $C_{r_1}^{(1)} = F_{2m_1 - r_1 - 1}^{(1)}$

[1] I numeri tra parentesi quadre si riferiscono, come al solito, alla bibliografia finale.

dove i $F_j^{(k)}$ sono gli operatori definiti dalla formula di Green (2, 9); $C_j^{(2)} = B_j^{(2)}$ per $j \in \{0, 1, \ldots, m_2 - 1\}$;

2) per ogni $k \in \{1, 2\}$: $C_j^{(k)} = B_j^k$ per $j \in \{0, 1, \ldots, m_k - 1\} - \{r_k\}$ e $C_{r_k}^{(k)} = F_{2m_k - r_k - 1}^{(k)}$.

Nel n. 1 vengono introdotte alcune notazioni e definizioni.

Nel n. 2 sono definiti i problemi che intendiamo studiare e sono enunciati i risultati.

Nel n. 3 vengono stabiliti alcuni lemmi.

Nel n. 4 vengono stabilite alcune limitazioni per forme $a(u, v)$ a coefficienti costanti.

Nel n. 5. vengono dimostrati i teoremi di coercitività enunciati al n. 2.

1. - Notazioni e definizioni.

Sia R^2 lo spazio euclideo a due dimensioni di punto $x = (x_1, x_2)$. In R^2 assegniamo il rettangolo aperto e limitato $\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2 / a < x_1 < b, c < x_2 < d\}$, di cui indicheremo: con $\partial\Omega$ la frontiera, con $\bar{\Omega}$ la chiusura, con $\partial_1\Omega$ l'unione dei due lati (aperti) verticali Ω e con $\partial_2\Omega$ l'unione degli altri due lati aperti di Ω. Porremo:

$S = \overline{\partial_1\Omega} \cup \overline{\partial_2\Omega}$, cioè indicheremo con S l'unione dei quattro vertici di Ω.

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ è una coppia di interi non negativi, porremo:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ; \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} ; \quad \partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \partial_{x_2}^{\alpha_2} ; \quad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdot D_{x_2}^{\alpha_2}$$

dove:

$$\partial_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_{x_k} = \frac{1}{i}\partial_{x_k} ; \quad k = 1, 2 ; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Fissiamo una coppia di interi positivi (m_1, m_2) e poniamo:

$$m = \max\{m_1, m_2\} ; \quad q_k = \frac{m}{m_k} (k = 1, 2) ; \quad q = (q_1, q_2)$$

e, per ogni coppia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ di interi non negativi $< \alpha, q > = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.

Se A è un sottinsieme aperto di R^2, per ogni intero di $k \geq 0$ indicheremo con $H^k(A)$ il completamento di $\mathfrak{D}(\bar{A})$ rispetto alla norma:

$$\| u \|_{H^k(A)} = \left(\int_A \sum_{<\alpha,q> \leq k} | D^\alpha u |^2 \, d x \right)^{1/2}$$

e porremo:

$$| u |_{H^k(A)} = \left(\int_A \sum_{<\alpha,q> = k} | D^\alpha u |^2 \, d x \right)^{1/2}$$

Inoltre indicheremo con $H^{r,s}(A)$, r ed s interi ≥ 0, il completamento di $\mathfrak{D}(\bar{A})$, rispetto alla norma:

$$\| u \|_{H^{r,s}(A)} = \left(\int_A \left(\sum_{k=1}^{r} | D_{x_1}^k u |^2 + \sum_{j=1}^{s} | D_{x_2}^j u |^2 \right) d x \right)^{1/2}.$$

Dal lemma 1.5 di M. Troisi [5] si ha:

Lemma 1.1 - *Per ogni* $k \in N$, *i due spazi* $H^{km}(\Omega)$ *e* $H^{km_1, km_2}(\Omega)$ *sono isomorfi algebricamente e topologicamente.*

Dal lemma 1.4 di M. Troisi [5] segue inoltre:

Lemma 1.2 - *Per ogni* $\varepsilon \in R^+$ *esiste una costante* $C(\varepsilon)$ *tale che*:

$$\sum_{<\alpha,q><m} \| D^\alpha u \|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \| u \|^2_{H^m(\Omega)} + C(\varepsilon) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall \; u \in H^m(\Omega).$$

Assegniamo due sistemi $\{B_j^{(1)}\}_{j=0}^{m_1-1}$ e $\{B_j^{(2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ di operatori differenziali lineari di *frontiera* definiti su $\partial_1 \Omega$ e $\partial_2 \Omega$ rispettivamente e soddisfacenti la seguente condizione:

a) per ogni $k \in \{1, 2\}$ e per ogni $j \in \{0,1, \ldots, m_k - 1\}$, $B_j^{(k)}$ ha la forma:

$$B_j^{(k)} = \sum_{<\alpha,q> \leq j q_k} b_{j\alpha}^{(k)}(x) \, \partial^\alpha, \tag{1.1}$$

dove i coefficienti $b_{j\alpha}^{(k)}(x)$ sono funzioni reali di classe $C^\infty(\overline{\partial_k \Omega})$ e tali che:

$$b_{j\alpha}^{(k)}(x) \neq 0 \quad \text{per} \quad \alpha_k = j \quad \text{e} \quad \forall \; x \in \partial_k \Omega. \tag{1.2}$$

[2] Facciamo tale ipotesi per comodità. Sarebbe sufficiente supporre $b_{j\alpha}^{(k)}(x) \in C^h(\overline{\partial_k \Omega})$ per un h intero sufficientemente grande.

Osserviamo che si può scrivere:

$$B_j^{(k)} = \sum_{h=0}^{j} \Gamma_{jh}^{(k)} \, \partial_{x_k}^h \, , \quad j = 0, 1, \ldots, m_k - 1; \quad k = 1, 2 \tag{1.3}$$

dove:

$$\Gamma_{jh}^{(1)} = \sum_{r \leqslant \frac{m_2}{m_1}(j-h)} b_{jhr}^{(1)}(x) \; \partial_{x_2}^r \tag{1.4}$$

$$\Gamma_{jh}^{(2)} = \sum_{r \leqslant \frac{m_1}{m_2}(j-h)} b_{jhr}^{(2)}(x) \; \partial_{x_1}^r \tag{1.5}$$

avendo posto:

$$b_{j\alpha_1\alpha_2}^{(k)} = b_{j\alpha}^{(k)} \quad (\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)).$$

Osserviamo che i $\Gamma_{jh}^{(k)}$, con $h < j$, sono degli operatori differenziali *tangenziali* su $\partial_k \Omega$ a coefficienti di classe $C^\infty(\overline{\partial_k \Omega})$ e che Γ_{jj} è una funzione reale di classe $C^\infty(\overline{\partial_k \Omega})$.

Osserviamo che con la posizione (1.3), la (1.2) si può scrivere nella forma:

$$\Gamma_{jj}^{(k)} \neq 0 \quad \text{su} \quad \overline{\partial_k \Omega}. \tag{1.6}$$

Dai risultati del n. 4 di M. Troisi [4] si deduce in modo ovvio il seguente:

Lemma 1.3 - *Se è verificata la condizione* a), *allora esistono degli operatori differenziali lineari tangenziali su* $\overline{\partial_k \Omega}$ *a coefficienti reali di classe* $C^\infty(\overline{\partial_k \Omega})$, che denotiamo con $\Lambda_{jh}^{(k)}$, *della stessa forma degli operatori* $\Gamma_{jh}^{(k)}$, con $\Lambda_{jj}^{(k)}$ *su* $\overline{\partial_k \Omega}$ *tali che sussiste la rappresentazione*:

$$\partial_{x_k}^j = \sum_{h=0}^{j} \Lambda_{jh}^{(k)} \, B_h^{(k)} \; ; \quad j = 1, 2, \ldots, m_k - 1; \quad k = 1, 2. \tag{1.7}$$

Fissati due interi non negativi $r_1 \leq m_1 - 1$ e $r_2 \leq m_2 - 1$, indicheremo: con $\mathcal{C}(\bar{\Omega}, r_1, r_2)$ se $r_1 \geq 1$ e $r_2 \geq 1$ la classe delle funzioni $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tali che:

$$B_j^{(k)} u = 0 \text{ su } \partial_k \Omega \text{ per ogni } j \in \{0, 1, \ldots r_k - 1\}; \; k = 1, 2;$$

con $C(\bar{\Omega}, r_h)$ ($h \in \{1,2\}$ fissato) la classe delle funzioni $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tali che:

$$B_j^{(k)} u = 0 \text{ su } \partial_k \Omega \text{ per } j \in \begin{cases} \{0,1,\ldots,m_k-1\} \text{ se } k \neq h \\ \{0,1,\ldots,m_k-1\} - \{r_k\} \text{ se } k = h\,; \end{cases}$$

con $C(\bar{\Omega}, r_1, r_2)$ la classe delle funzioni $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tali che:

$$B_j^{(k)} u = 0 \text{ su } \partial_k \Omega \text{ per ogni } j \in \{0,1,\ldots,m_k-1\} - \{r_k\};\ k = 1,2;$$

con $\mathcal{H}^m(\Omega, r_1, r_2)$, $H^m(\Omega, r_h)$ e $H^m(\Omega, r_1, r_2)$ le chiusure in $H^m(\Omega)$ rispettivamente di $\mathcal{C}(\bar{\Omega}, r_1, r_2)$, $C(\bar{\Omega}, r_h)$ e $C(\bar{\Omega}, r_1, r_2)$.

2. - Posizione del problema e risultati.

Assegniamo in Ω un operatore differenziale lineare A della forma:

$$A = \sum_{<\mu,q> \leqslant 2m} a_\mu(x)\, D^\mu. \tag{2.1}$$

Supporremo che i coefficienti $a_\mu(x)$ siano funzioni complesse definite in Ω tali che:

$a_\mu(x) \in C^0(\bar{\Omega})$ per $<\mu, q> = 2m$; $a_\mu(x) \in L^\infty(\Omega)$ per $<\mu, q> < 2m$;

e che A sia *fortemente quasi ellittico* in Ω, tale cioè che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e per ogni vettore $\xi \in R^2 - \{0\}$ si abbia:

$$R_e \sum_{<\mu,q>=2m} a_\mu(x)\, \xi^\mu > 0 \tag{2.2}$$

Assegniamo inoltre una forma sesquilineare e continua su $H^m(\Omega)\, x\, H^m(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{<\alpha,q> \leqslant m \\ <\beta,q> \leqslant m}} a_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u\, \overline{D^\beta v}\, dx \tag{2.3}$$

a coefficienti $a_{\alpha\beta}$ di classe $L^\infty(\Omega)$.

Supporremo che sia verificata la seguente ipotesi:

b) $a(u,v)$ è una forma sesquilineare associata all'operatore A, risulta cioè:

$$\int_\Omega A u\, \bar{\varphi}\, dx = a(u,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.4}$$

Dalla (2.3) si ha, integrando per parti:

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{<\alpha,q> \leqslant m \\ <\beta,q> \leqslant m}} D^{\beta}(a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\alpha} u)\, \bar{\varphi}\, d x, \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

e quindi la (2.4) implica la seguente decomposizione per l'operatore A:

$$A u = \sum_{\substack{<\alpha,q> \leqslant m \\ <\beta,q> \leqslant m}} D^{\beta}(a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\alpha} u). \tag{2.5}$$

Osserviamo esplicitamente che se vale l'ipotesi b) deve aversi in particolare:

$$\sum_{<\mu,q>=2m} a_{\mu}(x)\, \xi^{\mu} = \sum_{\substack{<\alpha,q>=m \\ <\beta,q>=m}} a_{\alpha\beta}(x)\, \xi^{\alpha+\beta} = \sum_{<\mu,q>=2m} \left(\sum_{\alpha+\beta=\mu} a_{\alpha\beta}(x) \right) \xi^{\mu}$$

da cui:

$$a_{\mu}(x) = \sum_{\alpha+\beta=\mu} a_{\alpha\beta}(x) \quad \text{per} \quad <\mu, q> = 2m \tag{2.6}$$

$$\text{e} \quad <\alpha, q> = <\beta, q> = m.$$

Sussiste il seguente:

LEMMA 2.1 - *Supponiamo siano verificate le ipotesi* a) *e* b) *e che i coefficienti* $a_{\alpha\beta}$ *siano di classe* $C^{\infty}(\bar{\Omega})$. *Allora per ogni* $k \in \{1, 2\}$ *esistono gli operatori differenziali lineari di frontiera su* $\partial_k \Omega$:

$$F_j^{(k)} = \sum_{<\alpha,q> \leqslant j q_k} f_{j\alpha}^{(k)}(x)\, D^{\alpha}, \quad j = 0, 1, \ldots, m_k - 1 \tag{2.7}$$

a coefficienti $f_{j\alpha}^{(k)}$ *di classe* $C^{\infty}(\overline{\partial_k \Omega})$ *e soddisfacenti la condizione*:

$$f_{j\alpha}^{(k)} \neq 0 \quad \text{per} \quad \alpha_j = j \quad \text{e} \quad \forall\, x \in \overline{\partial_k \Omega} \tag{2.28}$$

tali che si ha:

$$\int_{\Omega} A u \cdot \bar{v}\, d x = a(u, v) + \sum_{j=0}^{m_1 - 1} \int_{\partial_1 \Omega} F_{2m_1 - j - 1}^{(1)}\, u\, \overline{B_j^{(1)}\, v}\, d x_2 + \tag{2.9}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m_2 - 1} \int_{\partial_2 \Omega} F_{2m_2 - j - 1}^{(2)}\, u\, \overline{B_j^{(2)}\, v}\, d x_1$$

per ogni $u, \mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ *con* v *soddisfacente la condizione*:

$$D^\alpha v(x) = 0 \text{ per } x \in S \text{ e per } <\alpha, q> < m. \tag{2.10}$$

Dim. Infatti con delle integrazioni per parti si ha:

$$\int_\Omega A u \cdot \bar{v}\, dx = \sum_{\substack{<\alpha,q>\leqslant m \\ <\beta,q>\leqslant m}} \int_\Omega D^\beta (a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u) \bar{v}\, dx = \tag{2.11}$$

$$= a(u, v) + \sum_{\substack{<\alpha,q>\leqslant m \\ <\beta,q>\leqslant m \\ \beta_1>0}} \sum_{h=1}^{\beta_1} \frac{1}{i} \int_{+\partial_1\Omega} D_{x_1}^{\beta_1-h} D_{x_2}^{\beta_2} (a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u) D_{x_1}^{h-1} \bar{v}\, dx_2 +$$

$$+ \sum_{\substack{<\alpha,q>\leqslant m \\ <\beta,q>\leqslant m \\ \beta_2>0}} \sum_{h=1}^{\beta_2} \left(-\frac{1}{i}\right) \int_{+\partial_2\Omega} D_{x_2}^{\beta_2-h} (a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u) \overline{D_{x_1}^{\beta_1} D_{x_2}^{h-1} v}\, dx_1 .$$

Usufruendo della formula di rappresentazione (1.7), del lemma 1.3, operando delle integrazioni per parti e tenendo conto delle (2.10) dalla (2.11) si deduce facilmente la tesi.

Nella ipotesi che siano verificate le condizioni a) e b) e che i coefficienti $a_{\alpha\beta}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ poniamo i seguenti problemi.

Problema I. Assegnati $r_1 \in \{0, 1, \ldots, m_1 - 1\}$ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ determinare una funzione $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tale che verifichi le relazioni:

$A u + \lambda u = f$ $\quad$ $q.0.$ in Ω

$B_j^{(1)} u = 0$ $\quad$ $q.0.$ su $\partial_1\Omega$ per ogni $j \in \{0, 1, \ldots, m_1 - 1\} - \{r_1\}$

$F_{2m_1-r_1-1}^{(1)} u = 0$ $\quad$ $q.0.$ su $\partial_1\Omega$

$B_j^{(2)} u = 0$ $\quad$ $q.0.$ su $\partial_2\Omega$ per ogni $j \in \{0, 1, \ldots, m_2 - 1\}$

dove λ è un fissato numero complesso.

Problema II. Assegnati $r_k \in \{0, 1, \ldots, m_k - 1\}$ con $k \in \{1, 2\}$ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ determinare una funzione $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ che verifichi le relazioni:

$Au + \lambda u = f$ $\quad$ $q.0.$ in Ω

$B_j^{(k)} u = 0$ $\quad$ $q.0.$ su $\partial_k\Omega$ per ogni $j \in \{0, 1, \ldots, m_k - 1\} - \{r_k\}$, $k = 1, 2$

$F_{2m_k-r_k-1}^{(k)} u = 0$ $\quad$ $q.0.$ su $\partial_k\Omega$ $\quad$ $k = 1, 2.$

dove λ è un fissato numero complesso.

Poniamo inoltre le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 2.1 - Se sono verificate le ipotesi a) e b) diremo soluzione « debole » del problema I una funzione $u \in H^m(\Omega, r_1)$ che verifichi la relazione:

$$a(u, v) + \lambda \int_\Omega u \cdot \bar{v}\, d\,x = \int_\Omega f\, \bar{v}\, d\,x \tag{2.12}$$

per ogni $v \in H^m(\Omega, r_1)$.

DEFINIZIONE 2.2 - Se sono verificate le ipotesi a) e b) diremo soluzione debole del problema II una funzione $u \in H^m(\Omega, r_1, r_2)$ che verifichi la (2.12) per ogni $v \in H^m(\Omega, r_1, r_2)$.

Nel seguito porremo:

$$d = \text{m.c.d.}(m_1, m_2), \quad k_1 = \frac{m_1}{d}, \quad k_2 = \frac{m_2}{d}$$

Dimostreremo i seguenti teoremi:

TEOREMA 2.1 - *Se l'operatore* A *soddisfa le condizioni precisate all'inizio di questo numero, se* k_1 *e* k_2 *sono dispari e se valgono le ipotesi* a) *e* b), *allora qualunque sia* $r_k \in \{0, 1, \ldots, m_k - 1\}$ *la forma sesquilineare* $a(u, v)$ *è coercitiva su* $H^m(\Omega, r_k)$.

TEOREMA 2.2 - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 2.1, *qualunque siano* $r_1 \in \{0, 1, \ldots, m_1 - 1\}$ *e* $r_2 \in \{0, 1, \ldots, m_2 - 1\}$ *e tali che* $r_1/m_1 + r_2/m_2 \geq 1$, *la forma sesquilineare* $a(u, v)$ *è coercitiva su* $H^m(\Omega, r_1, r_2)$.

La dimostrazione di tali teoremi sarà data al n. 5.

Dai suddetti teoremi di coercitività si deducono, con ragionamenti ben noti, e che perciò tralasciamo di riportare, i seguenti risultati relativi alle soluzioni « deboli » dei problemi I e II sopra enunciati.

TEOREMA 2.3 - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 2.1, *esiste un* $\lambda_0 \in R_+$ tale che per ogni λ con $R_e\, \lambda \geq \lambda_0$ *il problema I ammette una ed una sola soluzione « debole »*.

TEOREMA 2.4 - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 2.1, *per il problema I in forma « debole » vale l'alternativa di Fredholm rispetto a parametro* λ.

TEOREMA 2.5 - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 2.2, *esiste un* $\lambda_o \in R_+$ *tale che per ogni* λ *con* $R_e\,\lambda \geq \lambda_o$, *il problema II ammette una ed una sola soluzione « debole ».*

TEOREMA 2.6 - *Nelle ipotesi del teorema* 2.2, *per il problema II in forma « debole » vale l'alternativa di Fredholm rispetto al pametro* λ.

Risolti in tal modo i problemi I e II in forma « debole », la risolubilità dei problemi I e II si riconduce ad un problema di regolarizzazione delle soluzioni « deboli » e cioè al problema di studiare le proprietà delle soluzioni « deboli » in dipendenza dei dati del problema. Noi tralasceremo di occuparci di tale questione.

3. - ALCUNI LEMMI PRELIMINARI.

LEMMA 3.1 - *Assegnati* $d \in N$ *e il polinomio*:

$$P(x, z) = \sum_{t=0}^{2d} a_t(x)\ z^{2d-t},\quad x \in \bar{\Omega}$$

se i coefficienti $a_t(x)$ *sono funzioni complesse continue (risp. costanti complesse) e se*

$$R_e\,P(x, z) > 0 \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega},\ \forall\, z \in R \tag{3.1}$$

allora esistono le funzioni complesse continue (risp. costanti complesse) a_{rs} *soddisfacenti le relazioni*:

$$a_{rs} = a_{sr}\ ;\ r, s = 0, 1, \ldots, d \tag{3.2}$$

$$\sum_{r+s=t} a_{rs} = a_t\ ;\ t = 0, 1, \ldots, 2d \tag{3.3}$$

e tali che:

$$R_e \sum_{r,s=0}^{d} a_{rs}(x)\, z_r\, \bar{z}_s > 0\ \ \forall\, x \in \bar{\Omega}\ \text{e}\ \forall\,(z_o, z_1, \ldots, z_d) \in C^{d+1} - \{0\} \tag{3.4}$$

Dim. Infatti, poniamo:

$$a_t(x) = b_t(x) + i\, c_t(x)\ ;\ b_t(x)\ \text{e}\ c_t(x)\ \text{reali}$$

Per ogni $z \in R$ risulta:

$$\sum_{t=0}^{2d} b_t(x)\, z^{2d-t} = R_e\,P(x, z) > 0\,, \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega}\ \text{e}\ \forall\, z \in R$$

e quindi per quanto noto nel caso reale (cfr. nota (5) di M. TROISI [4]), esistono $b_{rs}(x)$ tali che:

$$b_{rs} = b_{sr}\,, \quad \sum_{r+s=t} b_{rs} = b_t \tag{3.5}$$

in corrispondenza delle quali risulta:

$$\sum_{s+r=o}^{d} b_{sr}(x)\, y_r\, y_s > 0 \qquad \forall\, x \in \bar{\Omega},\ \forall\, (y_o, y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \tag{3.6}$$

D'altra parte si verifica facilmente che si possono costruire delle funzioni $c_{rs}(x) \in C^o(\bar{\Omega})$ tali che:

$$c_{rs} = c_{sr}\,, \quad \sum_{r+s=t} c_{rs} = c_t$$

Allora le a_{rs} date da:

$$a_{rs} = b_{rs} + i\, c_{rs}$$

soddisfano le (3.2) e (3.3).

Inoltre se $(z_o, z_1, \ldots, z_d) \in C^{d+1} - \{0\}$, posto:

$$z_r = x_r + i\, y_r$$

risulta:

$$\sum_{r,s=o}^{d} a_{rs}\, z_r\, \bar{z}_s = \sum a_{rs}\,(x_r + i\, y_r)\,(x_s - i\, y_s) =$$

$$= \sum a_{rs}\,(x_r\, x_s + y_r\, y_s) + i \sum a_{rs}\, x_s\, y_r - i \sum a_{rs}\, x_r\, y_s =$$

$$= \sum a_{rs}\,(x_r\, y_s + y_r\, y_s) = \sum b_{rs}\, x_r\, x_s + \sum b_{rs}\, y_r\, y_s +$$

$$+ i \sum c_{rs}\,(x_r\, y_s + y_r\, x_s)$$

e quindi:

$$\mathrm{R}_e \sum_{r,s=o}^{d} a_{rs}\, z_r\, \bar{z}_s = \sum b_{rs}\, x_r\, x_s + \sum b_{rs}\, y_r\, y_s > 0$$

Susssiste inoltre il seguente:

LEMMA 3.2 - *Se l'operatore* A *è fortemente quasi ellittico ed ha i coefficienti come precisato all'inizio del n.* 2, *allora esistono delle funzioni complesse e continue*:

$$a^{o}_{\alpha\beta}(x)\,; \quad <\alpha, q> = <\beta, q> = m$$

tali che:

$$a^{o}_{\beta\alpha}(x) = a^{o}_{\alpha\beta}(x)\,; \quad \sum_{\alpha+\beta=\mu} a^{o}_{\alpha\beta}(x) = a_{\mu}(x) \tag{3.7}$$

per le quali risulta:

$$\mathrm{R}_e \int_{\Omega} \sum_{\substack{<\alpha,q>=m \\ <\beta,q>=m}} a^{o}_{\alpha\beta}(x)\, \mathrm{D}^{\alpha} u\, \mathrm{D}^{\beta} v\, dx \geq c_o \int_{\Omega} \sum_{<\alpha,q>=m} |\, \mathrm{D}^{\alpha} u\,|^2\, dx$$

$$\forall\, u \in \mathrm{H}^{m}(\Omega).$$

dove c_o *è una costante positiva indipendente da* u.

Dim. Osserviamo preliminarmente che, per ogni $h \in \mathrm{N}$, risulta:

$$< \alpha, q > = h\, m \Leftrightarrow \exists\, / t \in \mathrm{N}_o \text{ con } t \leq h\, d \;\ni'\; \alpha = ((h\, d - t)\, k_1, t\, k_2)$$

Sussiste cioè in base a tale osservazione, una corrispondenza biunivoca tra i multiindici α per cui $< \alpha, q > = h\, m$ e i numeri interi $t \in \{0, 1, \ldots h\, d\}$; è quindi lecito scrivere per $< \mu, q > = 2\, m$, $\mu = ((2\, d - t)\, k_1, \mathrm{t}\, k_2)$, $a_{\mu} = a_t$ e per α e β tali che $<\alpha, q> = <\beta, q> = m$

$$\alpha = ((d - r)\, k_1, r\, k_2)\,; \quad \beta = ((d - s)\, k_1, s\, k_2) \qquad a_{\alpha\beta} = a_{rs}$$

e la (2.6) si trasforma in

$$\sum_{r+s=t} a_{rs} = a_t \quad \text{per} \quad t \in \{0, 1, \ldots, 2\, d\}$$

$$r, s \in \{0, 1, \ldots, d\}$$

Con tali notazioni la (2.2) si trasforma in:

$$\mathrm{R}_e \sum_{t=0}^{2d} a_t(x)\, \xi_1^{(2d-t)k_1}\, \xi_2^{tk_2} > 0 \tag{3.8}$$

Essendo k_1 e k_2 primi tra loro, uno di essi è sicuramente dispari; supponiamo che sia k_1 dispari, posto in tal caso nella relazione (3.8):

$$\xi_2 = 1 \;\text{ e }\; \xi_1^{k_1} = z$$

Essa si trasforma in

$$\mathrm{R}_e \sum_{t=0}^{2d} a_t(x)\, z^{2d-t} > 0 \qquad \forall\, z \in \mathrm{R}$$

Esistono allora, a norma della 3.1, delle funzioni complesse continue $a^{\circ}_{rs}(x)$ tali che

$$a^{\circ}_{rs}(x) = a^{\circ}_{sr}(x) \qquad r, s = 0, 1, \ldots, d$$

$$\sum_{r+s=t} a^{\circ}_{rs}(x) = a_t(x) \qquad t = 0, 1, \ldots, 2d$$

per cui risulta:

$$(3.9)\quad \mathrm{R}_e \sum_{r,s=0}^{d} a^{\circ}_{rs}(x)\, z_r\, \bar{z}_s > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \forall (z_0, z_1, \ldots z_d) \in \mathrm{C}^{d+1} - \{0\}$$

Dalla (3.9) si ha:

$$\mathrm{R}_e \sum_{r,s=0}^{d} a^{\circ}_{rs}(x)\, z_r\, \bar{z}_s \geq c_0 \sum_{s=0}^{d} |\, z_s\,|^2$$

Assegnato $u \in \mathrm{H}^m(\Omega)$, se poniamo per:

$$< \alpha, q > = < \beta, q > = m; \quad \alpha = ((d-r)\,k_1, r\,k_2), \quad \beta = ((d-s)\,k_1, s\,k_2)$$

$$z_r = \mathrm{D}^{\alpha} u \quad \text{e} \quad z_s = \mathrm{D}^{\beta} u$$

dalla precedente relazione segue

$$\mathrm{R}_e \sum_{\substack{<\alpha,q>=m \\ <\beta,q>=m}} a^{\circ}_{\alpha\beta}(x)\, \mathrm{D}^{\alpha} u\, \overline{\mathrm{D}^{\beta} u} \geq c_0 \sum_{<\alpha,q>=m} |\, \mathrm{D}^{\alpha} u\,|^2,$$

da cui integrando su Ω si deduce la tesi.

4. - Teoremi di coercitività per forme sesquilineari a coefficienti costanti.

Nel seguito di questo numero supporremo che i coefficienti a_{α} di A siano costanti e che $a(u, v)$, definita dalla (2.3), sia una forma sesquilineare a coefficienti costanti soddisfacenti la (2.6).

Porremo inoltre:

$$a_0(u, v) = \int\!\!\int_{\Omega} \sum_{r,s=0}^{d} a_{rs}\, \mathrm{D}_x^{(d-r)k_1}\, \mathrm{D}_y^{rk_2}\, u \cdot \overline{\mathrm{D}_x^{(d-s)k_1}\, \mathrm{D}_y^{sk_2}\, v}\; dx\, dy$$

$$\mathrm{F}(z_0, z_1, \ldots, z_d) = \sum_{r,s=0}^{d} a_{rs}\, z_r\, \bar{z}_s$$

e supporremo [3]:

$$(4.1) \qquad \sum_{r+s=k} a_{rs} = c_k \; ; \; r, s = 0, 1, \ldots d \; ; \; k = 0, 1, \ldots, 2\,d.$$

Sussiste il seguente:

LEMMA 4.1 - *Se è verificata la condizione* (4.1), *esistono una forma* $G(z_o, z_1, \ldots, z_d)$ *la cui parte reale è definita positiva e delle costanti* λ_{kr} *e* λ'_{kr} *tali che si ha, identicamente rispetto alle variabili complesse* $z_o, \ldots, z_d$:

$$(4.2) \qquad F(z_o, z_1, \ldots, z_d) = G(z_o, z_1, \ldots, z_d) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{d} \sum_{r=1}^{k-1} \lambda_{kr} (z_r \bar{z}_{k-r} - z_o \bar{z}_k) + \sum_{k=2}^{d-2} \sum_{r=1}^{d-k-1} \lambda'_{kr} (z_{k+r} \bar{z}_{d-r} - z_k \bar{z}_d)$$

Dim. Come abbiamo osservato al n. 3 la condizione (2.2) equivale all'esistenza di una forma quadratica:

$$G(z_o, z_1, \ldots, z_d) = \sum_{r,s=o}^{d} a'_{rs} \; z_r \bar{z}_s$$

la cui parte reale è definita positiva e tale che si abbia:

$$(4.3) \qquad \begin{cases} a'_{rs} = a'_{sr} & r, s = 0, 1, \ldots, d \\ \sum_{r+s=k} a'_{sr} = a_k & k = 0, 1, \ldots, 2\,d \end{cases}$$

tenuto conto delle (4.1) e (4.3) risulta:

$$F(z_o, z_1, \ldots, z_d) - G(z_o, z_1, \ldots, z_d) = \sum_{r,s=o}^{d} (a_{rs} - a'_{rs}) \, z_r \bar{z}_s =$$

$$= \sum_{k=1}^{2d-1} \sum_{r+s=k} (a_{rs} - a'_{rs}) \, z_r \bar{z}_s = \sum_{k=1}^{d} \sum_{r+s=k} (a_{rs} - a'_{rs}) (z_r \bar{z}_s - z_o \bar{z}_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{d-1} \sum_{r+s=d+k} (a_{rs} - a'_{rs}) \; (z_r \bar{z}_s - z_k \bar{z}_d).$$

e da quest'ultima relazione si deduce la (4.2).

[3] La condizione (4.1) è senz'altro verificata nell'ipotesi che sia soddisfatta la condizione b).

Osserviamo preliminarmente che se $d = 1$ esiste un'unica forma quadratica G associata alla forma sesquilineare $a(u, v)$ associata all'operatore A. Se è soddisfatta la (4.1) la forma quadratica G ha la parte reale definita positiva, da cui $a(u, v)$ è coercitiva:

$$\mathrm{R}_e \int\int_{\Omega} \mathrm{G}\,(\mathrm{D}_x^{dk_1} u,\ \mathrm{D}_x^{(d-1)k_1}\ \mathrm{D}_y^{k_2} u\ , \ldots ,\ \mathrm{D}_y^{dk_2} u)\ dx\ dy \geq c\,|\,u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}$$

e quindi

$$\mathrm{R}_e \int\int_{\Omega} \mathrm{F}\,(\mathrm{D}_x^{dk_1} u,\ \mathrm{D}_x^{(d-1)k_1}\ \mathrm{D}_y^{k_2} u\ , \ldots ,\ \mathrm{D}_y^{dk_2} u)\ dx\ dy = \mathrm{R}_e\, a_0(u, u) \geq$$

$$\geq c\,|\,u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}\ .$$

Se $d > 1$, facciamo le seguenti posizioni:

$$(4.4)\quad \mathrm{I}_1(u) = -\sum_{s=2}^{d}\sum_{r=1}^{s-1}\lambda_{sr}\sum_{j=1}^{rk_1}\binom{1}{i}\int_{\partial_1\Omega}(\mathrm{D}_x^{dk_1-j} u\ \overline{\mathrm{D}_x^{(d-s)k_1+j-1}\ \mathrm{D}_y^{sk_2} u})\ dy +$$

$$-\sum_{s=1}^{d-2}\sum_{r=1}^{d-s-1}\lambda'_{rs}\sum_{j=1}^{rk_1}\binom{1}{i}\int_{\partial_1\Omega}(\mathrm{D}_x^{(d-s)k_1-j}\ \mathrm{D}_y^{sk_2} u\cdot\overline{\mathrm{D}_x^{j-1}\ \mathrm{D}_y^{dk_2} u})\ dy$$

$$(4.5)\quad \mathrm{I}_2(u) = \sum_{s=2}^{d}\sum_{r=1}^{s-1}\lambda_{sr}\sum_{j=1}^{rk_2}\left(-\frac{1}{i}\right)\int_{\partial_2\Omega}(\mathrm{D}_x^{(d-r)k_1}\ \mathrm{D}_y^{j-1} u\cdot$$

$$\cdot\ \overline{\mathrm{D}_x^{(d-s+r)k_1}\ \mathrm{D}_y^{sk_2-j} u})\ dx +$$

$$+\sum_{s=1}^{d-2}\sum_{r=1}^{d-s-1}\lambda'_{sr}\sum_{j=1}^{rk_2}\left(-\frac{1}{i}\right)\int_{\partial_2\Omega}(\mathrm{D}_x^{(d-(s+r))k_1}\ \mathrm{D}_y^{sk_2+j-1} u\cdot\overline{\mathrm{D}_x^{rk_1}\ \mathrm{D}_y^{dk_2-j} u})\ dx$$

$$(4.6)\qquad \mathrm{I}(u) = \mathrm{I}_1(u) + \mathrm{I}_2(u)$$

Possiamo ora stabilire il seguente:

LEMMA 4.2 - *Esiste una costante positiva c tale che:*

$$\mathrm{R}_e\,(a_0(u, u) - \mathrm{I}(u)) \geq c\,|\,u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} \qquad \forall\, u \in \mathrm{C}^\infty(\bar{\Omega})$$

dove $\mathrm{I}(u)$ *non figura se* $d = 1$.

Dim. A motivo della corrispondenza biunivoca tra gli indici t e i multiindici α data da $\alpha = ((d-t)k_1, t\,k_2)$, la relazione (4.2), ponendo $z_t = D_x^{(d-t)k_1} D_y^{tk_2} u$, si può scrivere nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
(4.7)\qquad & F(D_x^{dk_1} u, D_x^{(d-1)k_1} D_y^{k_2} u, \ldots, D_y^{dk_2} u) = \\
& = G(D_x^{dk_1} u, D_x^{(d-1)k_1} D_y^{k_2} u, \ldots, D_y^{dk_2} u) + \\
& + \sum_{s=2}^{d} \sum_{r=1}^{s-1} \lambda_{sr} (D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} u \cdot \overline{D_x^{(d-s+r)k_1} D_y^{(s-r)k_2} u} - \\
& \qquad - D_x^{dk_1} u \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u}) + \\
& + \sum_{s=1}^{d-2} \sum_{r=1}^{d-s-1} \lambda'_{sr} (D_x^{(d-(s+r))k_1} D_y^{(s+r)k_2} u \cdot \overline{D_x^{rk_1} D_y^{(d-r)k_2} u} - \\
& \qquad - D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u \cdot \overline{D_y^{dk_2} u}) .
\end{aligned}
$$

Tenendo presente l'ovvia relazione:

$$
(4.8)\qquad D_{x_k}^{p+r} u \cdot \overline{D_{x_k}^{q-r} v} = D_{x_k}^{p} u \cdot \overline{D_{x_k}^{q} v} + \sum_{j=1}^{r} D_{x_k} (D_{x_k}^{p+j-1} \overline{D_{x_k}^{q-j} v})
$$

che può anche scriversi ponendo al posto di p e di q, $p-r$ e $q+r$ rispettivamente:

$$
(4.9)\qquad D_{x_k}^{p-r} u \cdot \overline{D_{x_k}^{q+r} v} = D_{x_k}^{p} u \cdot \overline{D_{x_k}^{q} v} - \sum_{j=1}^{r} D_{x_k} (D_{x_k}^{p-r+j-1} u \cdot \overline{D_{x_k}^{q+r-j} v})
$$

ciascuna delle due differenze interne ad ognuna delle due sommatorie nella relazione (4.7) si trasforma opportunamente:

$$
\begin{aligned}
(4.10)\qquad & D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} u \cdot \overline{D_x^{(d-s+r)k_1} D_y^{(s-r)k_2} u} - D_x^{dk_1} u \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u} = \\
& = \sum_{j=1}^{rk_2} D_y [D_x^{(d-r)k_1} D_y^{j-1} u \cdot D_x^{(d-s+r)k_1} \overline{D_y^{sk_2-j} u}] - \\
& - \sum_{j=1}^{rk_1} D_x [D_x^{dk_1-j} u \, \overline{D_y^{(d-s)k_1+j-1} D_y^{sk_2} u}].
\end{aligned}
$$

$$
(4.11)\qquad D_x^{(d-(s+r))k_1} D_y^{(s+r)k_2} u \cdot \overline{D_x^{rk_1} D_y^{(d-r)k_2} u} - D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u \cdot \overline{D_y^{dk_2} u} =
$$

$$= \sum_{j=1}^{rk_2} D_y \left[D_x^{(d-(s+r))k_1} D_y^{sk_2+j-1} u \cdot \overline{D_x^{rk_1} D_y^{dk_2-j} u} \right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{rk_1} D_x \left[D_x^{(d-s)k_1-j} D_y^{sk_2} u \cdot \overline{D_x^{j-1} D_y^{dk_2} u} \right] (4).$$

In virtù delle (4.10) e (4.11) la relazione (4.7) si trasforma in

$$(4.12) \qquad F(D_x^{dk_1} u, D_x^{(d-1)k_1} D_y^{k_2} u, \ldots, D_y^{dk_2} u) =$$

$$= G(D_x^{dk_1} u, \ldots\ldots\ldots\ldots, D_y^{dk_2} u) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{d} \sum_{r=1}^{s-1} \lambda_{sr} \left\{ \sum_{j=1}^{rk_2} D_y (D_x^{(d-r)k_1} D_y^{j-1} u \cdot \overline{D_x^{(d-s+r)k_1} D_y^{sk_2-j} u}) + \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{rk_1} D_x (D_x^{dk_1-j} u \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1+j-1} \cdot D_y^{jk_2} u}) \right\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{d-2} \sum_{r=1}^{d-s-1} \lambda'_{sr} \left\{ \sum_{j=1}^{rk_2} D_y [D_x^{(d-(s+r))k_1} D_y^{sk_2+j-1} u \cdot \overline{D_x^{rk_1} D_y^{dk_2-j} u}] + \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{rk_1} D_x [D_x^{(d-s)k_1-j} D_y^{sk_2} u \cdot \overline{D_x^{j-1} D_y^{dk_2} u}] \right.$$

Dalla (4.12) integrando su Ω risulta:

$$a_0(u, u) = \int\int_{\Omega} G(D_x^{dk_1} u, \ldots, D_y^{dk_2} u) \, dx \, dy + I(u)$$

e per il fatto che sussiste la relazione:

$$R_e \int\int_{\Omega} G(D_x^{dk_1} u, \ldots, D_y^{dk_2} u) \, dx \, dy \geq c \, |u|^2_{H^m(\Omega)}$$

risulta:

$$R_e (a_0(u, u) - I(u)) \geq c \, |u|^2_{H^m(\Omega)}$$

TEOREMA 4.1 - *Se $d > 1$, r_1 e r_2 sono tali che $r_h \geq (d-1) k_h$, $h = 1,2$; allora la forma sequilineare $a_0(u, v)$ è coercitiva su $\mathcal{C}(\bar{\Omega}; r_1, r_2)$.*

Dim. Essendo in $\mathcal{C}(\bar{\Omega}; r_1, r_2)$ $B_j^{(h)} u = 0$ per $j \in \{0, 1, \ldots, r_h - 1\}$ risulta anche per la condizione (1.7) del lemma 1.3 $\partial_{x_h}^l u = 0$ per $l \in \{0, 1, \ldots, r_h - 1\}$ dove le ∂_{x_h} sono le derivate normali di u rispetto

(4) Nelle (4.10) e (4.11) abbiamo usato la (4.9) ponendo $j - 1$ al posto di $r - j$.

a $\partial_h \Omega$. Se $r_h \geq (d-1)\,k_h$ si ha che $I(u) = 0$ in quanto in ognuno degli integrali che compaiono in $I_h(u)$ $(h = 1, 2)$ figura un fattore contenente derivate in direzione normale a $\partial_h \Omega$ di ordine minore di $(d-1)\,k_h$.

Utile per il seguito è il seguente:

LEMMA 4.3 - *Per ogni* $w \in H^m(\Omega)$, *posto* $w = u + iv$ *con* u *e* v *funzioni reali, si ha*:

$$a_0(w, w) = a_0(u, u) + a_0(v, v).$$

Dim. Infatti, per le posizioni fatte:

$$D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2}(u + iv) \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2}(u + iv)} =$$

$$= (D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} u + i D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} v)\,(\overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u} - i \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} v}) =$$

$$= D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} u \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u} + D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} v \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} v} +$$

$$+ i\,(D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} v \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u} - D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} u \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} v}).$$

D'altra parte risulta:

$$D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} v \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u} - D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} u \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} v} =$$

$$= (-i)^{(d-r)k_1 + rk_2} \cdot (i)^{(d-s)k_1 + sk_2} [\partial_x^{(d-r)k_1} \partial_y^{rk_2} v \cdot \partial_x^{(d-s)k_1} \partial_y^{sk_2} u -$$

$$- \partial_x^{(d-r)k_1} \partial_y^{rk_2} u \cdot \partial_x^{(d-s)k_1} \partial_y^{sk_2} v].$$

e per la simmetria dei coefficienti a_{rs} si ha:

$$\sum a_{rs}\, \partial_x^{(d-r)k_1} \partial_y^{rk_2} v \cdot \partial_x^{(d-s)k_1} \partial_y^{sk_2} u =$$

$$= \sum a_{sr}\, \partial_x^{(d-r)k_1} \partial_y^{rk_2} v \cdot \partial_x^{(d-s)k_1} \partial_y^{sk_2} u =$$

$$= \sum a_{rs}\, \partial_x^{(d-s)k_1} \partial_y^{sk_2} v \cdot \partial_x^{(d-r)k_1} \partial_y^{rk_2} u$$

da cui segue:

$$\sum a_{rs} D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} v \cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} u} - \sum a_{rs} D_x^{(d-r)k_1} D_y^{rk_2} u \cdot$$

$$\cdot \overline{D_x^{(d-s)k_1} D_y^{sk_2} v} = 0$$

e quindi:

$$a_o(w, w) = a_o(u, u) + a_o(v, v).$$

Dal lemma 4.3 risulta inoltre che posto:

$$a_o^*(u, u) = \int\int_\Omega G(D_x^{dk_1} u, \ldots, D_y^{dk_2} u)\, dx\, dy$$

si ha:

$$a_o(u, u) = a_o^*(u, u) + I(u)$$

ed anche

$$a_o(v, v) = a_o^*(v, v) + I(v)$$

Ovvero sommando membro a membro queste ultime due relazioni risulta:

$$a_o(u, u) + a_o(v, v) = a_o^*(u, u) + a_o^*(v, v) + I(u) + I(v)$$

essendo anche:

$$a_o(w, w) = a_o^*(w, w) + I(w)$$

si ha:

$$I(w) = I(u) + I(v).$$

Osserviamo che dall'ipotesi che gli operatori $B_j^{(k)}$ sono a coefficienti reali segue che se w è una funzione complessa, posto $w = u + iv$ con u e v reali si ha:

$$B_j^{(k)} w = 0 \Rightarrow B_j^{(k)} u = 0 \quad \text{e} \quad B_j^{(k)} v = 0$$

TEOREMA 4.2 - *Se $d > 1$ e k_1 e k_2 sono dispari allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c(\varepsilon) > 0$ tale che:*

$$(4.13) \qquad |I(w)| \leq \varepsilon \|w\|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \|w\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in C(\bar{\Omega}, r_1).$$

Dim. Osserviamo che se $r_1 = m_1 - 1$, come per la dimostrazione del teorema 4.1, si prova che $I(w) = 0$ per ogni $w \in C(\bar{\Omega}, r_1)$.

Possiamo perciò limitarci a trattare il caso che sia $r_1 \leq m_1 - 2$.

Assegnata $w \in C(\bar{\Omega}, r_1)$, poniamo $w = u + iv$ con u e v reali. Proviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c(\varepsilon) > 0$ tale che:

$$|I(u)| \leq \varepsilon \|u\|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$|I(v)| \leq \varepsilon \|v\|^2_{H^m(\Omega)} + c'(\varepsilon) \|v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Risulta $B_j^{(2)} u = 0$ su $\partial_2 \Omega$ per ogni $j \in \{0, 1, \ldots, m_2 - 1\}$ e quindi per la relazione (1.7) del lemma 1.3 anche $\partial_y^j u = 0$ per ogni j: in tal caso si ha $I_2(u) = 0$. Per dimostrare la tesi basta dimostrare che essa è soddisfatta per $I_1(u)$ al posto di $I(u)$.

Essendo $u \in C(\bar{\Omega}, r_1)$ si ha:

$$\partial_x^j u = \begin{cases} 0 & \text{per } j < r_1 \\ \displaystyle\sum_{t \leq \frac{k_2}{k_1}(j - r_1)} b_{jt}\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^t\, u & \text{per } j \geq r_1 \end{cases}$$

e quindi $I_1(u)$ è una somma di integrali del tipo:

$$\int_{\partial_1 \Omega} c_{pt}\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^p\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^t u \, d y$$

dove la somma è estesa ai valori di p e di t tali che:

$$\frac{2 r_1 + 1}{m_1} + \frac{p + t}{m_2} \leq 2 \tag{4.14}$$

Se nella (4.14) c'è il segno di uguaglianza si ha:

$$\frac{2 r_1 + 1}{k_1} + \frac{p + t}{k_2} = 2 d \text{ cioè } k_2 (2 r_1 + 1) + k_1 (p + t) = 2 d k_1 k_2 \tag{4.15}$$

quindi $p + t$ è dispari per il fatto che k_1 e k_2 sono entrambi dispari; ovvero la somma degli indici di derivazione rispetto a y deve risultare un numero dispari.

$I_1(u)$ risulta quindi una somma di integrali del tipo:

$$\int_{\partial_1 \Omega} a\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{h - \tau}\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{h + \tau + 1}\, u \, d y$$

Quest'ultimo integrale, dopo τ integrazioni per parti, per il fatto che agli estremi di $\partial_1 \Omega$ è $\partial_x^{r_1}\, \partial_y^s\, u = 0$ si trasforma in

$$\int_{\partial_1 \Omega} (a\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^h\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{h+1}\, u)\, d y + \tag{4.16}$$

$$+ \sum_{q, r \leq h} \int_{\partial_1 \Omega} b_{qr}\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^q\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^r\, u \, d y$$

Il primo integrale dell'ultima relazione si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\int_{\partial_1\Omega} a\,\frac{d}{d_y}\,(\partial_x^{r_1}\,\partial_y^{h}\,u)^2\,d\,y \;=\; \frac{1}{2}\int_{\partial_1\Omega} a'\,(\partial_x^{r_1}\,\partial_y^{h}\,u)^2\,d\,y \;=\; \mathrm{M}_h(u)$$

In questo ultimo integrale, per il fatto che vale la (4.15), si ha:

$$\frac{2\,r_1+1}{m_1}+\frac{2\,h}{m_2}<2$$

e quindi anche:

$$h<\frac{m_2}{m_1}\left(m_1-r_1-\frac{1}{2}\right)$$

Relativamente agli integrali indicati con $\mathrm{M}_h(u)$, posto:

$$\vartheta=\frac{m_2}{m_1}\left(m_1-r_1-\frac{1}{2}\right)-h>0$$

si ha (Cfr. Lions-Magenes, I Teorema 16.3 pag. 102)

$$|\,\mathrm{M}_h(u)\,|\le c\,\|\,\partial_x^{r_1}\,u\,\|^2_{\mathrm{H}^{\vartheta}([c,d])}\le\varepsilon\,\|\,\partial_x^{r_1}\,u\,\|^2_{\mathrm{H}^{h+\vartheta}([c,d])}+c(\varepsilon)\,\|\,\partial_x^{r_1}\,u\,\|^2_{\mathrm{L}^2([c,d])}$$

d'altra parte (Cfr. Lions-Magenes [2], Teorema 2.1 del v. II pp. 10-11):

$$\|\,\partial_x^{r_1}\,u\,\|_{\mathrm{H}^{h+\vartheta}([c,d])}\le c\,\|\,u\,\|_{\mathrm{H}^{m_1,m_2}(\Omega)}\le c'\,\|\,u\,\|_{\mathrm{H}^m(\Omega)}$$

Inoltre (Cfr. note (6) e (7) di Troisi [3])

$$\|\,\partial_x^{r_1}\,u\,\|_{\mathrm{L}^2([c,d])}\le\varepsilon\,\|\,\partial_x^{r_1+1}\,u\,\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}+c(\varepsilon)\,\|\,u\,\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

Poiché infine è noto che (si tenga presente che $r_1\le m_1-2$)

$$\|\,\partial_x^{r_1+1}\,u\,\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\le\|\,u\,\|_{\mathrm{H}^{m_1,m_2}(\Omega)}\le c_1\,\|\,u\,\|_{\mathrm{H}^m(\Omega)}$$

si ha:

$$|\,\mathrm{M}_h(u)\,|\le\varepsilon\,\|\,u\,\|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}+c(\varepsilon)\,\|\,u\,\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\ .$$

Inoltre ognuno degli integrali della sommatoria nella (4.16) si maggiora allo stesso modo di $\mathrm{M}_h(u)$ in quanto applicando la disuguaglianza di Schwartz risulta:

$$\left|\int_{\partial_1\Omega}(b_{qr}\,\partial_x^{r_1}\,\partial_y^{q}\,u\cdot\partial_x^{r_1}\,\partial_y^{r}\,u)\;d\,y\right|\le\mathrm{M}\,\|\,\partial_x^{r_1}\,\partial_y^{q}\,u\,\|_{\mathrm{L}^2(\partial_1\Omega)}\ .$$

$$\| \partial_x^{r_1} \partial_y^{q} u \|_{L^2(\partial_1\Omega)} \leq M \| \partial_x^{r_1} u \|_{H^q(\partial_1\Omega)} \| \partial_x^{r_1} u \|_{H^r(\partial_1\Omega)} \leq$$

$$\leq M \| \partial_x^{r_1} u \|^2_{H^p(\partial_1\Omega)} .$$

Possiamo a questo punto concludere che se gli operatori di frontiera sono a coefficienti reali e le derivate che ivi intervengono sono ordinarie, in corrispondenza di ogni funzione reale $u \in C(\bar{\Omega}, r_1)$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c(\varepsilon)$ tale che

$$| I(u) | \leq \varepsilon \| u \|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Per dimostrare ora la tesi basta tener presente che, in base alle osservazioni fatte precedentemente, si ha:

$$I(w) = I(u) + I(v)$$

e quindi anche:

$$(4.17) \quad | I(w) | \leq | I(u) | + | I(v) | \leq \varepsilon (\| u \|^2_{H^m(\Omega)} + \| v \|^2_{H^m(\Omega)}) +$$

$$+ c(\varepsilon) (\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v \|^2_{L^2(\Omega)}).$$

D'altra parte risulta:

$$\| u \|^2_{H^m(\Omega)} + \| v \|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{<\alpha,q> \leq m} \int | \partial^\alpha u |^2 \, dx +$$

$$+ \sum_{<\alpha,q> \leq m} \int | \partial^\alpha v |^2 \, dx = \sum_{<\alpha,q> \leq m} \left(\int (| \partial^\alpha u |^2 + | \partial^\alpha v |^2) \, dx \right) = \| w \|^2_{H^m(\Omega)}$$

Osservazioni analoghe valgono per l'ulteriore termine della (4.17), da cui la tesi.

TEOREMA 4.3 - *Se* $d > 1$, k_1 *e* k_2 *sono dispari e risulta* $r_1/k_1 + r_2/k_2 \geq d$, *allora per ogni* $\varepsilon \in R^+$ *esiste una costante* $c(\varepsilon) \in R^+$ tale che:

$$(4.18) \quad | I(w) | \leq \varepsilon \| w \|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \| w \|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in C(\bar{\Omega}; r_1, r_2)$$

Dim. Si verifica facilmente che, nelle ipotesi poste, per ogni $w \in C(\bar{\Omega}; r_1, r_2)$ e per ogni $\alpha = (\alpha_1 \, \alpha_2)$ tale che $< \alpha, q > < m$ risulta:

$$D^\alpha w = 0 \qquad \forall x \in S$$

Dopo tale osservazione la tesi del teorema si consegue con maggiorazioni del tutto analoghe a quelle viste per il teorema 4.2 tenendo presente che, in tal caso, la relazione (4.18) è soddisfatta sia da $I_1(w)$ che da $I_2(w)$.

TEOREMA 4.4 - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 4.2, *per ogni funzione reale* ξ *di classe* $C^\infty(\bar{\Omega})$, *la* (4.13) *sussiste anche se al primo membro si sostituisce* $I(w)$ *con* $I(\xi w)$.

Dim. Osserviamo preliminarmente se $w \in C(\bar{\Omega}, r_1)$ posto $w = u + iv$ anche u e $v \in C(\bar{\Omega}, r_1)$ ed inoltre si ha:

$$I(\xi w) = I(\xi u) + I(\xi v).$$

È perciò sufficiente stabilire la tesi con una funzione reale u al posto di w.

Assegnata allora u reale di classe $C(\bar{\Omega}, r_1)$ osserviamo che essendo:

$$I(\xi u) = I_1(\xi u) + I_2(\xi u)$$

si ha che: $I(\xi u) = I_1(\xi u)$ per il fatto che $u \in C(\bar{\Omega}, r_1)$.

Infatti $u \in C(\bar{\Omega}, r_1) \Rightarrow B_j^{(2)} u = 0$ per $j = 0, 1, \ldots, m_2 - 1$ e cioè $\partial_{x_2}^j u = 0$ per $j = 0, 1, \ldots, m_2 - 1$. D'altra parte:

$$\partial_{x_2}^j (\xi u) = \sum_{t=0}^{j} \binom{j}{t} \partial_{x_2}^{j-t} \xi \, \partial_{x_2}^t u = 0$$

essendo

$$\partial_{x_2}^t u = 0 \qquad t = 0, 1, \ldots, j$$

da cui anche:

$$I_2(\xi u) = 0$$

Si tratta allora di provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c(\varepsilon)$ per cui risulta:

$$|I_1(\xi u)| \leq \varepsilon \| u \|^2_{H^{m_1}(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Osserviamo che $I_1(\xi u)$ risulta una combinazione lineare di integrali del tipo:

$$\int_{\partial_1 \Omega} \partial^\alpha (\xi u) \cdot \partial^\beta (\xi u) \, d y$$

dove $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ sono tali che:

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1 + 1}{m_1} + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{m_2} = 2$$

Essendo:

$$\partial^\alpha (\xi u) = \sum_{\sigma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \partial^{\alpha - \sigma} \xi \, \partial^\sigma u = \xi \, \partial^\alpha u + H_\alpha (u)$$

dove:

$$H_\alpha (u) = \sum_{\sigma < \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \partial^{\alpha - \sigma} \xi \, \partial^\sigma u$$

In base a questa ultima posizione risulta:

$$\int_{\partial_1 \Omega} \partial^\alpha (\xi u) \, \partial^\beta (\xi u) \, d y = \int_{\partial_1 \Omega} (\xi \, \partial^\alpha u + H_\alpha (u)) \, (\xi \, \partial^\beta u + H_\beta (u)) \, d y =$$

$$= \int_{\partial_1 \Omega} \xi^2 \, \partial^\alpha u \, \partial^\beta u \, d y + \int_{\partial_1 \Omega} \xi \, \partial^\alpha u \, H_\beta (u) \, d y + \int_{\partial_1 \Omega} \xi \, \partial^\beta u \, H_\alpha (u) \, d y +$$

$$+ \int_{\partial_1 \Omega} H_\alpha (u) \, H_\beta (u) \, d y .$$

Essendo $u(x)$ un elemento di $C(\bar{\Omega}, r_1)$ analogamente a quanto osservato nella dimostrazione del teorema 4.2 risulta che posto:

$$I_{1,1} (\xi u) = \int_{\partial_1 \Omega} \xi^2 \, \partial^\alpha u \, \partial^\beta u \, d y$$

$I_{1,1} (\xi u)$ è una somma di integrali del tipo:

$$\int_{\partial_1 \Omega} a (x) \, \partial_x^{r_1} \, \partial_y^t \, u \cdot \partial_x^{r_1} \, \partial_y^\tau \, u \, d y$$

con

$$\frac{2 r_1 + 1}{m_1} + \frac{t + \tau}{m_2} \leq 2$$

e quindi procedendo come nel corso della dimostrazione del teorema 4.2 si prova che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c(\varepsilon) > 0$ tale che

$$| I_{1,1} (\xi u) | \leq \varepsilon \| u \|^2_{H^m(\Omega)} + c (\varepsilon) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Inoltre il secondo e terzo integrale che intervengono nell'espressione di $I_1(\xi u)$ sono tali che per ognuno di essi risulta:

$$\int_{\partial_1\Omega} b(x)\, \partial^{\alpha} u\, \partial^{\sigma} u\, dy \qquad \text{con} \quad b(x) \text{ reale e } \sigma < \beta$$

e quindi:

$$\frac{\alpha_1 + \sigma_1 + 1}{m_1} + \frac{\alpha_2 + \sigma_2}{m_2} < \frac{\alpha_1 + \beta_1 + 1}{m_1} + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{m_2}$$

E sempre per il fatto che $u \in C(\bar{\Omega}, r_1)$ tale integrale si trasforma in

$$\int_{\partial_1\Omega} c(x)\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{t+\alpha_2}\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{\tau+\sigma_2} u\, dy$$

con:

$$\frac{2r_1 + 1}{m_1} + \frac{\alpha_2 + \sigma_2}{m_2} + \frac{t + \tau}{m_2} \leq \frac{\alpha_1 + \sigma_1 + 1}{m_1} + \frac{\alpha_2 + \sigma_2}{m_2} < 2$$

Ovvero l'integrale in questione è della forma:

$$\int_{\partial_1\Omega} c(x)\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{p}\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{q}\, u\, dy \tag{4.14}$$

dove p e q sono tali che:

$$\frac{2r_1 + 1}{m_1} + \frac{p + q}{m_2} < 2$$

Se $p + q = 2h$, operando delle integrazioni per parti si ha che tale integrale diventa somma di integrali del tipo:

$$\int_{\partial_1\Omega} d(x)\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{h_1}\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{h_2} u\, dy \quad \text{dove:} \quad h_1 \leq h,\ h_2 \leq h$$

con

$$\frac{2r_1 + 1}{m_1} + \frac{h_1 + h_2}{m_2} \leq \frac{2r_1 + 1}{m_1} + \frac{2h}{m_2} < 2$$

Se $p + q = 2h + 1$, operando delle integrazioni per parti l'integrale (4.14) si trasforma in:

$$\int_{\partial_1\Omega} (c(x)\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{h}\, u\ \ \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{h+1}\, u)\, d\, y\ +$$

$$+ \sum_{q,r \leq h} \int_{\partial_1\Omega} (b_{qr}\, \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{q}\, u \cdot \partial_x^{r_1}\, \partial_y^{r}\, u)\ d\, y$$

In ognuno dei due casi considerati ($p + q$ pari e $p + q$ dispari) l'integrale di partenza si trasforma in integrali che, per quanto visto nella dimostrazione del teorema 4.2, sono tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c(\varepsilon) > 0$ tale che:

$$\left| \int_{\partial_1\Omega} b(x)\, \partial^{\alpha} u\, \partial^{\sigma} u\, d\, y \right| \leq \varepsilon \| u \|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Da cui anche il secondo e terzo integrale che intervengono nell'espressione di $I_1(\xi u)$ soddisfano la maggiorazione richiesta dalla tesi.

Dal momento che il quarto ed ultimo integrale che compare nell'espressione di $I_1(\xi u)$ è una somma di integrali del tipo:

$$\int_{\partial_1\Omega} d(x)\, \partial^{\gamma} u\, \partial^{\delta} u\, d\, y \quad \text{con} \quad d(x) \text{ reale e } \gamma < \alpha,\ \delta < \beta$$

in cui:

$$\frac{\gamma_1 + \delta_1 + 1}{m_1} + \frac{\gamma_2 + \delta_2}{m_2} < \frac{\alpha_1 + \beta_1 + 1}{m_1} + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{m_2} = 2$$

si ha che anche a tale integrale sono applicabili le maggiorazioni valide per gli altri integrali da cui:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, c(\varepsilon) > 0 \qquad \text{tale che:}$$

$$| I_1(\xi u) | \leq \varepsilon \| u \|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \ ; \qquad \forall\, u \in C(\bar{\Omega}, r_1)$$

TEOREMA 4.5 - *Nelle stesse ipotesi del teorema* 4.3, *per ogni funzione reale* ξ *di classe* $C^{\infty}(\bar{\Omega})$, *la maggioranza* (4.18) *sussiste anche se a primo membro si sostituisce* $I(w)$ *con* $I(\xi w)$.

Dim. Tale teorema si prova tenendo presente il teorema 4.3 con considerazioni analoghe a quelle tenute per la dimostrazione del teorema 4.4.

5. - Dimostrazione dei teoremi 2.1 e 2.2.

Le notazioni di questo numero saranno quelle dei nn. 1. e 2. Inoltre porremo:

$$(5.1) \qquad a'(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{<\alpha, q> = m \\ <\beta, q> = m}} a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\alpha} u\, D^{\beta} v\, dx$$

e, per ogni $x^k \in \bar{\Omega}$

$$(5.2) \qquad a'_k(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{<\alpha, q> = m \\ <\beta, q> = m}} a_{\alpha\beta}(x^k)\, D^{\alpha} u\, \overline{D^{\beta} v}\, dx$$

Per dimostrare i teoremi 2.1 e 2.2 basterà far vedere che nelle ipotesi del teorema 2.1 la forma sesquilineare $a(u, v)$ è coercitiva su $C(\bar{\Omega}, r_1)$ e che nelle ipotesi del teorema 2.2 la forma sesquilineare $a(u, v)$ è coercitiva su $C(\bar{\Omega}, r_1\, r_2)$.

Supponiamo dunque che siano verificate le ipotesi del teorema 2.1 [risp. le ipotesi del teorema 2.2].

Per la compattezza di $\bar{\Omega}$ e per la continuità in $\bar{\Omega}$ dei coefficienti $a_{\alpha\beta}(x)$ con $<\alpha, q> = <\beta, q> = m$, in corrispondenza di $\varepsilon \in R^+$ esiste un insieme finito $\{x^k\}_{k=1}^{p}$ di punti di $\bar{\Omega}$ godenti della proprietà che ogni x^k ha un intorno 2-dimensionale $I(x^k)$ tale che $\{I(x^k)\}_{k=1}^{p}$ sia un ricoprimento di $\bar{\Omega}$ e tale inoltre che:

$$(5.3) \qquad |a'(v, v) - a'_k(v, v)| \leq \varepsilon |v|^2_{W^m(\Omega)}$$

per ogni $v \in H^m(\Omega)$ con supp $v \subset I(x^k) \cap \bar{\Omega}$.

Consideriamo una partizione dell'unità in $C^{\infty}(\bar{\Omega})$, subordinata al ricoprimento $\{I(x^k)\}_{k=1}^{p}$ mediante le funzioni $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ tali che:

$$\xi_k \in C^{\infty}(R^2),\ \xi_k \geq 0,\ \text{supp}\ \xi_k \subset I(x^k) \cap \bar{\Omega},\ \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2(x) = 1,\ \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Assegnata $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ e denotato, per ogni $k \in \{1, 2, , \ldots, p\}$, con $I^{(k)}$ l'operatore I definito dalle (4.4), (4.5) e (4.6) in corrispondenza

dei coefficienti $a_{\alpha\beta}(x^k)$, in conseguenza del lemma 4.2 si ha evidentemente:

$$\text{(5.4)} \qquad \mathrm{R}_e\ (a_k'\ (\xi_k u, \xi_k u) - \mathrm{I}^{(k)}(\xi_k u)) \geq c\,|\,\xi_k u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}$$

dove c è una costante positiva indipendente da k e da u.

Dalla (5.3) e dalla (5.4) con $\varepsilon \leq c/2$ segue:

$$\text{(5.5)} \qquad \mathrm{R}_e\,(a'\,(\xi_k u, \xi_k u) - \mathrm{I}^{(k)}(\xi_k u)) \geq c/2\,|\,\xi_k u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}$$

e quindi:

$$\text{(5.6)} \qquad \mathrm{R}_e\left(\sum_{k=1}^{p} a'(\xi_k u, \xi_k u) - \sum_{k=1}^{p} \mathrm{I}^{(k)}(\xi_k u)\right) \geq c/2 \sum_{k=1}^{p} |\,\xi_k u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}$$

D'altra parte si verifica facilmente che si ha:

$$\text{(5.7)} \qquad \sum_{k=1}^{p} a'\,(\xi_k u, \xi_k u) = a'\,(u, u) + \mathrm{R}\,(u)$$

dove:

$$\mathrm{R}\,(u) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{<\alpha, q> = m \\ <\beta, q> = m}} \left(\sum_{\delta < \beta} \binom{\beta}{\delta} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x)\, \xi_k\, \overline{\mathrm{D}^{\beta-\delta}\, \xi_k}\, \mathrm{D}^{\alpha} u\, \overline{\mathrm{D}^{\delta} u}\, dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma < \alpha} \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\delta} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x)\, \mathrm{D}^{\alpha-\gamma}\, \xi_k\, \overline{D^{\beta-\delta}\ \xi_k} \cdot \mathrm{D}^{\gamma} u\, \overline{\mathrm{D}^{\delta} u}\, dx \right.$$

pertanto:

$$\text{(5.9)} \qquad \mathrm{R}_e\ (a'\,(u, u)\ +\ \mathrm{R}\,(u) - \sum_{k=1}^{p} \mathrm{I}^{(k)}(\xi_k u) \geq c/2 \sum_{k=1}^{p} |\,\xi_k u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)}$$

Nel seguito converremo di indicare con $c_1, c_2, \ldots, c_{12}$ delle costanti positive e indipendenti da u.

Osserviamo che risulta:

$$\| u \|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} = \| \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2\, u \|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} \leq c_1 \sum_{k=1}^{p} \| \xi_k^2\, u \|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{k=1}^{p} \| \xi_k u \|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} \leq c_2 \sum_{k=1}^{p} |\,\xi_k u\,|^2_{\mathrm{H}^m(\Omega)} + c_3 \sum_{<\alpha q> < m} \int_{\Omega} |\,\partial^{\alpha} u\,|^2\, dx.$$

Da quest'ultima relazione e dal lemma 1.2 si deduce:

$$\sum_{k=1}^{p} | \xi_k u |^2_{H^m(\Omega)} \geq c_4 \| u \|^2_{H^m(\Omega)} - c_5 \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.10}$$

Posto allora:

$$M(u) = R(u) + a'(u, u) - a(u, u),$$

dalle (5.9) e (5.10) segue

$$R_e \left(a(u, u) + M(u) - \sum_{k=1}^{p} I^k(\xi_k u) \right) \geq \tag{5.11}$$

$$c_6 \| u \|^2_{H^m(\Omega)} - c_7 \| u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Evidentemente risulta:

$$| M(u) | \leq c_8 \| u \|_{H^m(\Omega)} \left(\sum_{<\alpha,q><m} \int_{\Omega} | D^\alpha u |^2 \, dx \right)^{1/2} . \tag{5.12}$$

Dalle (5.11), (5.12) e dal lemma 1.2 si deduce facilmente la limitazione:

$$R_e \left(a(u, u) - \sum_{k=1}^{p} I^k(\xi_k u) \right) \geq c_q \| u |^2_{H^m(\Omega)} - \tag{5.13}$$

$$- c_{10} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

D'altra parte, applicando il teorema 4.4 se valgono le ipotesi del teorema 2.1 ed il teorema 4.5 se valgono le ipotesi del teorema 2.2, si ha che per ogni $\varepsilon \in R^+$ esiste una costante $c(\varepsilon) \in R^+$ tale che:

$$| I^{(k)}(\xi_k u) | \leq \varepsilon \| u \|^2_{H^m(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{5.14}$$

Dalle (5.13) e (5.14) si deduce in modo ovvio la relazione:

$$R_e \, a(u, u) \geq c_{11} \| u \|^2_{H^m(\Omega)} - c_{12} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.15}$$

e quindi si ha la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. GIUSTI, *Equazioni quasi ellittiche e spazi* $L^{p,\lambda}(\Omega, \delta)$ *(I)*. Ann. di Matem., **75** (1967).

[2] J. L. LIONS e E. MAGENES, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. I e II.

[3] E. MAGENES e G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa (3), 12, (1958).

[4] M. TROISI, *Su alcuni problemi misti per un'equazione ellittica di ordine superiore in due variabili*. Ric. di Matematica, **14** (1965).

[5] M. TROISI, *Un problema al contorno per una classe di equazioni lineari quasi ellittiche*. Ric. di Matematica, **17** (1968).

Istituto di Scienze dell'informazione - Università di Salerno.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci C. Miranda, F. Cafiero e C. Ciliberto.

Subgraph enumerating polynomial and reconstruction conjecture

Nota di LUIGI BORZACCHINI *
presentata dal socio ordinario ALFREDO FRANCHETTA

(Adunanza del 4 dicembre 1976)

RIASSUNTO. — In questo articolo si propone una nuova caratterizzazione per multigrafi non orientati. Si congettura che una tale caratterizzazione (un polinomio) è differente per multigrafi non isomorfi; poi si mostrano alcuni metodi di calcolo di tale polinomio e i legami con la congettura di ricostruzione.

SUMMARY. — In this paper we propose a new characterization for (not-oriented) multigraphs. We conjecture that such a characterization (a polynomial) is different for not-isomorphic multigraphs; then we show some methods for the calculus of such polynomial and the links with the reconstruction conjecture.

1. - THE RECONSTRUCTION CONJECTURE.

A well-known conjecture in graph theory is the reconstruction conjecture (RC) known also as Ulam conjecture. A form of the RC is the following: RC: « If G and H are graphs with vertices sets $\{v_1, \ldots, v_n\}$ and $\{u_1, \ldots, u_n\}$ $n \geq 3$, and if for all i, the subgraphs $G - v_i$ and $H - u_i$ are isomorphic, then G and H are themselves isomorphic ».

In the last fifteen years many papers have been published about this conjecture: we can find many contributions but the conjecture is up to today unproved (for a survey and a bibliography cfr. [1]).

The purpose of this paper is the proposal of a new, to the RC connected, characterization for (not oriented) multigraphs. The very conjecture shows the course to be followed: it seems that somehow all the point-deleted subgraphs preserve a « memory » of the graph. The hypothesis that this paper analyses is that the graph can be caracterized by a limited group of invariants of all the subgraphs. The second section of the paper defines this new characterization and the third section develops some properties and connections with RC.

* Istituto di Geometria. Università di Bari.

2. - SUBGRAPH ENUMERATING POLYNOMIAL (SEP)

If $G = (U, V)$ is a multigraph, let's associate to G the following polynomial

$$P_G(u, v) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} C_{jk}\, u^j\, v^k \tag{1}$$

where C_{jk} is the number of subgraphs of G formed with j vertices, with k edges. In the following we will call P_G « subgraphs enumerating polynomial » (SEP).

We can list some obvious properties:

1. $\sum_{k=0}^{m} C_{jk} = \binom{n}{j}$ for every j
2. If G has p connected components $G_1, \ldots, G_p$ then

$$P_G(u, v) = P_{G_1}(u, v) \cdot \ldots \cdot P_{G_p}(u, v)$$

3. The u-degree of the SEP is n, the v-degree is m
4. $P_G(O, v) = 1$
5. $P_G(u, O)$ enumerates the indipendent sets of G
6. If G is a tree then in $P_G(u, v)$

$$C_{nk} = O \qquad \text{for } k \geq n$$

$$C_{nk} = 1 \qquad \text{for } k = n \quad 1$$

and for every $i < n$ $C_{ik} = O$ for $k \geq i$

7. If $V = \emptyset$ then

$$P_G(u, v) = (1 + u)^n$$

8. If G is K_n (complete graph with n vertices)

$$P_G(u, v) = \sum_{i=0}^{n} u^i \binom{n}{j} v^{\binom{j}{2}}$$

3. - Expansions of the SEP

We want now to show some methods of calculus of the SEP associated to a graph G with n vertices and m edges by SEP's of graphs with $n' < n$ vertices or with $m' < m$ edges.

THEOREM 1. « If v_t is a vertex of a graph G, $(G - v_t)$ the v_t-deletion subgraph of G, $(G - v_t)\hat{}$ the graph obtained from $(G - v_t)$ adding to the vertices $v_i \neq v_t$ a number of self-loops equal to the number of edges connecting v_t and v_i.

$$P_G(u, v) = P_{(G-v_t)}(u, v) + u\, v^{r_{tt}}\, P_{(G-v_t)\hat{}}$$

where $R = \{r_{ij}\}$ is the adjacency matrix of G ».

Proof. In (1) for every (j, k) let's distinguish in C_{jk} two parts: the first assembling the subgraphs not including v_t, the second assembling the subgraphs including v_t.

$$C_{jk} = C'_{jk} + C''_{jk}$$

so $$P_G(u, v) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k} C'_{jk}\, u^j\, v^k + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} C''_{jk}\, u^j\, v^k$$

but $$P_{(G-v_t)}(u, v) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k} C'_{jk}\, u^j\, v^k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k} C'_{jk}\, u^j\, v^k$$

because for every k: $C'_{nk} = 0$ (the subgraph with n vertices includes v_t)

Now we must show that

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k} C''_{jk}\, u^j\, v^k = u\, v^{r_{tt}}\, P_{(G-v_t)\hat{}}(u, v)$$

A subgraph of C''_{jk} includes v_t and other vertices $v_{s_1}, \ldots, v_{s_{j-1}}$, it has j vertices and $k = r_{s_1 s_1} + \ldots + r_{s_{j-1} s_{j-1}} + r_{tt} + r_{s_1 s_2} + \ldots + r_{s_1 s_{j-1}} + \ldots + r_{s_t s_t} + \ldots + r_{s_1 t} + \ldots + r_{s_{j-1} t}$ edgs.

if we write

$$P_{(G-v_t)\hat{}}(u, v) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k} D_{jk}\, u^j\, v^k$$

and if we remember that

$$\hat{r}_{s_i s_j} = r_{s_i s_j} + r_{s_i t} \quad \text{and} \quad \hat{r}_{s_i s_t} = r_{s_i s_t} \quad \text{for} \quad i \neq j$$

where $\hat{R} = \{\hat{r}_{ij}\}$ is the adjacency matrix of $(G - v_t)\hat{}$,

we have

$$C''_{jk} = v^{r_{tt}} D_{j-1,k}$$

and so

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k} C''_{jk} u^j v^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} v^{r_{tt}} D_{j-1,k} u^j v^k =$$

$$= u v^{r_{tt}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} D_{j-1,k} u^{j-1} v^k$$

C.V.D.

Applying theorem 1 more than once we obtain other results; for example applying twice we obtain a result useful to compute the SEP:

Corollary 1.1 « If (v_s, v_t), $s \neq t$, is an edge of G, $G - (v_s, v_t)$ the partial graph of G by deletion of (v_s, v_t), $(G - v_s - v_t)\hat{}$ the graph obtained from $(G - v_s - v_t)$ adding to the vertices v_i, $i \neq s$, $i \neq t$, a number of self-loops equal to the number of edges connecting v_s with v_i plus the number of edges connecting v_t with v_i.

$$P_G(u, v) = P_{G-(v_s, v_t)}(u, v) + u^2 (v^{r_{st}} - 1) P_{(G - v_s - v_t)\hat{}}(u, v) v^{r_{ss} + r_{tt}}$$

and if (v_s, v_s) is a self-loop

$$P_G(u, v) = P_{G-(v_s, v_s)}(u, v) + u (v^{r_{ss}} - 1) P_{(G - v_s)\hat{}}(u, v) \text{ ».}$$

THEOREM 2. « If G is a graph with SEP $P(u, v)$, and $\{G_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ are his point-deleted subgraphs with SEP's $P_i(u, v)$, *then*

$$n P(u, v) = \sum_{i=1}^{n} P_i(u, v) + \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} u \text{ ».}$$

Proof. Let's be

$$P(u, v) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k} C_{jk} u^j v^k$$

$$P_i(u, v) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k} C^{(i)}_{jk} u^j v^k$$

where $C_{jk}^{(i)}$ is the number of subgraphs with j vertices and k edges in G_i then

$$u \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} = u \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} j C_{jk} u^{j-1} v^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} j C_{jk} u^j v^k$$

so

$$n P(u, v) - u \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} = n + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} (n - j) C_{jk} u^j v^k$$

but on the other hand

$$\sum_{n}^{i=1} P_i(u, v) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k} u^j v^k \sum_{i=1}^{n} C_{jk}^{(i)}$$

a subgraph of G with j vertices and k edges is then a subgraph of $(n - j)$ pointdeleted subgraphs of G: so

$$\sum_{i=1}^{n} C_{jk}^{(i)} = (n - j) C_{jk}$$

hence

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(u, v) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k} u^j v^k (n - j) C_{jk}$$

but for $j = n$

$$\sum_{k} (n - j) C_{jk} u^j v^k = 0$$

and for $j = 0$

$$\sum_{k} (n - j) C_{jk} u^j v^k = n$$

and so

$$n P(u, v) - u \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} P_i(u, v)$$

C.V.D.

From theorem 2 we can compute, known the SEP's of his point-deleted subgraphs (is sufficent their summation), the SEP of the graph.

If

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(u, v) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k a_k(v)$$

$$P(u, v) = \sum_{k=0}^{n} u^k b_k(v)$$

from theorem 2, for $k < n$:

$$b_k(v) = \frac{a_k(v)}{n - k}$$

for $k = n$ we can observe that $b_n(v) = v^m$, where m is the number of edges of G and we know that (cfr. [1])

$$m = \frac{\sum m_i}{n-2}$$

The theorem 2 doesn't enable us to say that the RC has been proofed because it would can be two not-isomorphic graphs with the same SEP. Hence we propose the following.

CONJECTURE - « If two multigraphs G and G' have the same SEP $P(u, v)$ they are isomorphic ». It's obvious that such a conjecture implicates the RC; but we can tell something more: if the conjecture is true the knowledge of all poin-deleted subgraphs is redundand; namely is sufficent to know the sum of their SEP's to calculate the SEP of the graph and hence to know the graph. Otherwise is sufficent when the graph has not isomorphic 2-points-deleted subgraphs for $n > 3$, to know $(n-1)$ point-deleted subgraphs: the we calculate all their 2-points-deleted subgraphs; every 2-points-deleted subgraph must appear in two point-deleted subgraphs and so must appear two times; we can single out the $(n-2)$ 2-points-deleted subgraphs that appear an odd number of times and so we can calculate the unknown point-deleted subgraph.

REFERENCE

[1] F. HARARY, *A survey of the reconstruction conjecture.* GRAPHS AND COMBINATORICS (A. Dold and B. Eckmann eds.) Springer-Berlin, 1974, 18-28.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, V. Dalla Volta e G. Panella.

Pirosseno fassaitico in alcuni proietti del Somma-Vesuvio *

Nota di MAURIZIO DE' GENNARO e ENRICO FRANCO
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 4 dicembre 1976)

RIASSUNTO. — Viene studiato un pirosseno di tipo fassaitico rinvenuto in un proietto del Somma Vesuvio e se ne forniscono i dati ottici, le costanti della cella elementare, la densità e la composizione chimica.

SUMMARY. — The AA. have studied optical data, lattice parameters, density and chemical composition of a piroxene, fassaitic type, found in a block eiected from Somma Vesuvius volcano.

Le ricerche condotte su alcuni proietti metamorfici del Somma-Vesuvio hanno permesso di individuare in alcuni di essi, la presenza di minerali alquanto rari quali la tetrakalsilite, la kalsilite e un pirosseno di tipo fassaitico.

Oggetto del presente studio è appunto quest'ultimo minerale che è stato rinvenuto in un proietto avente le caratteristiche qui di seguito illustrate:

La roccia macroscopicamente si presenta di colore verde chiaro a grana molto minuta con frequenti cavità tappezzate da cristallini di dimensioni un po' maggiori che raggiungono, talvolta, il millimetro di lunghezza.

Sono anche frequenti tracce di frattura orlate da bordi di ossidazione di colore rosso-bruno.

In genere anche le cavità si presentano arrossate, e l'orlo di ossidazione penetra per qualche millimetro all'interno.

In queste cavità si rinviene la kalsilite in tozzi prismi esagoni con spigoli arrotondati e spesso ricoperti da una lieve patina bruna.

Microscopicamente la roccia si presenta come un fitto aggregato di grani cristallini a spigoli arrotondati delle dimensioni tra 0,2-0,5 mm. per gli individui più allungati.

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.

Questa matrice microcristallina è costituita da pirosseno che in sezione è di colore grigio chiaro e non pleocroico con evidente sfaldatura prismatica.

Le dimensioni del pirosseno tendono ad aumentare verso i bordi delle cavità fino ad assumere, sulle pareti di queste, un abito cristallino ben netto.

Nella matrice fondamentale spiccano cristalli di spinello di colore verde bottiglia in genere arrotondati e corrosi, di biotite di

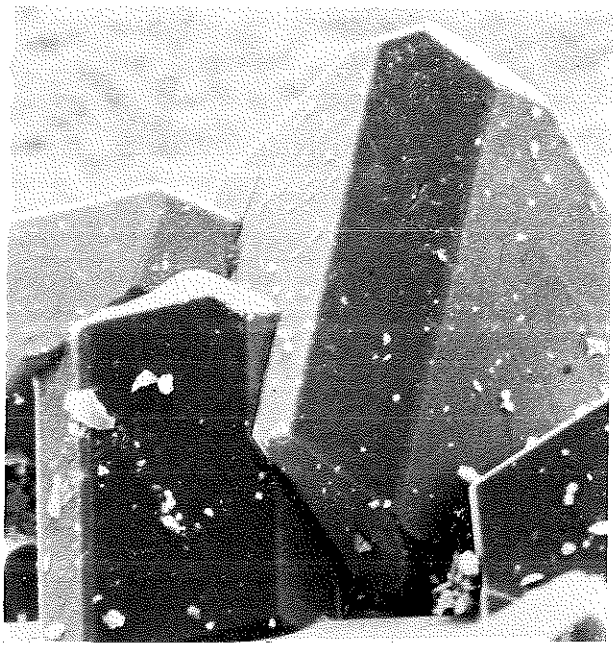


FIG. 1. - Microfotografia elettronica di alcuni cristalli di fossaite che evidenzia il notevole sviluppo delle facce del prisma {110} - × 160.

colore bruno chiaro, con leggero pleocroismo tra il grigio-bruno chiaro e il bruno e di magnetite più subordinatamente.

Sulle pareti delle cavità si osserva spesso kalsilite in cristalli incolori ed a spigoli arrotondati.

I pirosseno è stato isolato dalle altre fasi presenti utilizzando un separatore isodinamico di Frantz previa riduzione in polvere, a granulometria compresa tra 80 e 100 mesh, di tutto il campione e quindi ulteriormente purificato con liquidi pesanti; le ultime tracce di minerali estranei sono state eliminate con osservazione diretta al microscopio binoculare.

I risultati dell'analisi chimica vengono riportati nella tabella A e confrontati con quelli di pirosseni di altra provenienza.

L'alto contenuto in CaO (25,38 %) corrisponde a circa uno ione Ca per formula unitaria, l'altrettanto elevato contenuto in Al_2O_3 e un relativamente alto rapporto tra Fe^{+3} e Fe^{+2} sembrano far rientrare il pirosseno in esame nel campo dei termini fassaitici.

Sono stati eseguiti diffrattogrammi di polveri del minerale con diffrattometro Philips, radiazione Cu Kα, 35 kV, 15 mA, velocità

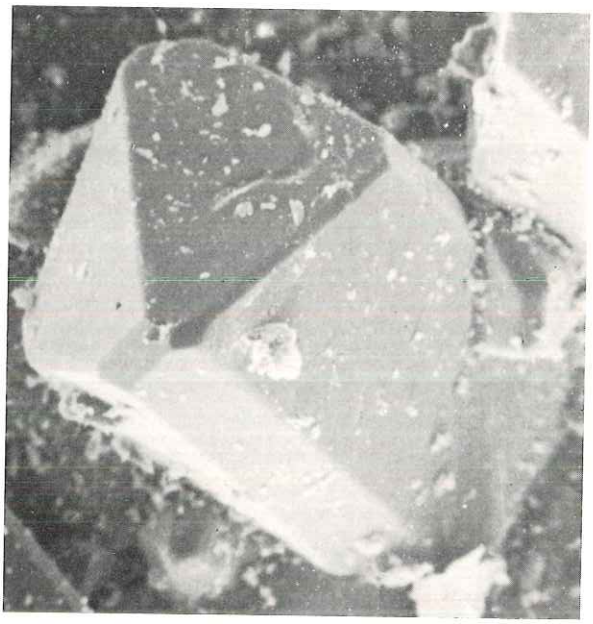


FIG. 2. - Microfotografia elettronica di un cristallo di fassaite - × 240.

del goniometro 1/2° 2 θ/min e fenditura di 1° usando silicio in polvere come standard interno. I dati sono riportati nella tabella B.

Le costanti della cella, misurate su cristallo singolo al diffrattometro automatico del centro di cristallografia del CNR di Pavia sono risultate:

a = 9.728 ± 0,002	β = 105° 92′
b = 8.859 ± 0,002	a sen β = 9.355
c = 5.284 ± 0,002	V (Å)^3 = 437.91

dal confronto di questi valori con quelli di un diopside (a = 9.73; b = 8.91; c = 5.25; β = 105.50) si nota il decremento del parametro b e un relativo aumento di c e dell'angolo β.

TABELLA A

	1	2	3	4
SiO_2	43.90	41.36	47.04	48.09
TiO_2	0.65	0.76	0.28	0.49
Al_2O_3	12.87	15.75	12.43	7.61
Fe_2O_3	4.06	6.10	0.63	3.09
FeO	1.19	0.24	1.23	0.42
MgO	11.17	10.34	12.80	15.11
MnO	0.15	0.03	0.24	0.03
CaO	25.38	25.27	24.34	25.34
Na_2O	0.42	0.06	0.32	0.00
K_2O	0.37	0.03	0.19	0.00
H_2O^+	—	0.10	0.50	0.41
H_2O^-	—	—	0.06	0.00
	100.06	100.04	100.06	100.59

Numero degli ioni per 6 di ossigeno

Si	1.625	2.00	1.537	2.00	1.721	2.00	1.760	2.00
Al	0.375		0.463		0.279		0.240	
Al	0.187		0.226		0.257		0.088	
Ti	0.018		0.021		0.009		0.013	
Fe^{+3}	0.113	0.976	0.170	1.00	0.018	1.024	0.084	1.02
Fe^{+2}	0.037		0.007		0.037		0.013	
Mg	0.616		0.576		0.697		0.824	
Mn	0.005		0.001		0.006		0.001	
Ca	1.007		1.006		0.954		0.994	
Na	0.030	1.054	0.004	1.01	0.022	0.985	—	0.99
K	0.017				0.009			
Ca	57.80		57.25		56.50		51.90	
Mg	33.70		32.65		40.00		43.00	
Fe	8.50		10.10		3.50		5.10	

$\alpha = 1.696 \pm 0.001$
$\beta = 1.699 \pm 0.001$
$\gamma = 1.711 \pm 0.001$

$2\,V_\gamma = 53°$
$\gamma/z = 45°$
$D_{calc.} = 3.36$
$D_{oss.} = 3.32$

1) Fassaite Somma-Vesuvio; 2) Fassaite Helena (Montana) [5]; 3) Fassaite calc. silicate skarn, Gondivalasa [8]; 4) Fassaite, Monzoni (Tirolo) [11].

Si ritiene opportuno riportare i dati relativi allo spinello presente nell'incluso, anche in considerazione delle possibili relazioni con la composizione del pirosseno, che evidenziano come il minerale in questione abbia composizione e caratteristiche fisiche comprese tra lo spinello nobile e l'hercynite.

SiO_2	—	Si	—	
TiO_2	0.25	Ti	0.036	
Al_2O_3	67.95	Al	15.614	16.08
Fe_2O_3	2.90	Fe'''	0.426	
FeO	4.00	Fe''	0.652	
MnO	0.10	Mn	0.016	7.87
CaO	0.41	Ca	0.086	
MgO	24.28	Mg	7.112	
	100.09			

$n = 1.737 \pm 0.001$ $\quad D = 3.75$

I/I_1	d Å	hkl
m	4.691	111
mf	2.864	200
ff	2.434	311
dd	2.345	222
mf	2.028	400
md	1.657	422
mf	1.562	511
f	1.434	440
dd	1.374	531
d	1.283	620
md	1.238	533
d	1.171	444
dd	1.137	711

$a = 8.116$

Nei clinopirosseni naturali l'alto contenuto in Al ed i relativamente alti valori di Fe^{+3} e Ti vengono posti in relazione con una

riduzione dei parametri b, sen β e di c rispetto ai termini diopsidici ed in generale ai termini poveri di detti elementi.

TABELLA B

d Å	I/I_1	hkl	d Å	I/I_1	hkl
4.414	3	020	1.7369	19	150
3.689	1	111	1.6653	7	042
3.336	5	021	1.6366	1	223
3.218	40	220	1.6300	4	531
2.991	100	221	1.6195	24	440
2.938	43	310	1.6055	9	530
2.887	30	311	1.5788	1	600
2.551	24	002	1.5570	3	350
2.544	20	221	1.5464	1	602
2.506	19	112	1.5370	3	402
2.378	5	131	1.5210	3	532
2.339	1	400	1.5076	3	242
2.299	14	311	1.4890	1	060
2.223	1	222	1.4742	1	333
2.202	3	022	1.4525	3	422
2.139	18	331	1.4435	1	513
2.123	20	421	1.4180	22	531
2.102	12	420	1.4057	9	223
2.030	12	402	1.3928	3	243
1.9856	1	132	1.3747	1	711
1.9653	1	241	1.3660	1	043
1.8538	1	222	1.3387	1	712
1.8294	7	132	1.3280	4	533
1.7957	1	241	1.3191	4	512
1.7729	1	421			

SAKATA [10], CLARK [2] e COLEMANN [3] hanno messo in evidenza che una aggiunta di alluminio nel diopside determina la diminuzione dei parametri a, b e sen β del volume della cella e, in concomitanza, un aumento di c.

In particolare, date le dimensioni degli ioni Mg, Al a Si, ci si deve aspettare che sostituzioni Alluminio-Magnesio influenzano i parametri *a* e *b* e sostituizioni Al—Si in coordinazione tetraedrica determinino l'incremento di *c*.

Coleman per di più ha posto in evidenza che l'aggiunta di piccole quantità di altri elementi come Fe, Ti e Cr esacoordinati determina variazioni dei parametri della cella del diopside. Sostituzioni del tipo Fe^{+3} Al^{+3}—Mg^{+2} Si^{+4} producono decrementi di *b* e incrementi di *c* mentre i restanti parametri rimangono pressocché immutati.

Le osservazioni fatte dagli autori citati su clinopirosseni sintetici trovano perfetto riscontro nei dati della letteratura su pirosseni naturali [4, 5, 7, 12] e confermano l'appartenenza del pirosseno in istudio al tipo fassaitico.

La paragenesi riscontrata fa ritenere che il proietto derivi dal metamorfismo di contatto di calcari e calcari dolomitici come osservato anche da TILLEY [11] che sottolinea come nell'associazione spinello pirosseno si possa prevedere in quest'ultimo un rilevante contenuto in alluminio e che pertanto la composizione del pirosseno in equilibrio con lo spinello sia un punto di particolare interesse.

Come osservato da vari autori [2, 3, 6] l'alto contenuto in Al_2O_3 in soluzione solida nei clinopirosseni viene ritenuto sintomo di ambiente di alta pressione.

Nel caso presente la relativa abbondanza di $CaAl_2SiO_6$ senza escludere l'influenza di alte pressioni può mettersi in relazione anche con processi metasomatici.

Gli Autori ringraziano il Prof. G. Rossi del Centro di Cristallografia del CNR di Pavia e la dottoressa R. Munno dell'Istituto di Mineralogia di Napoli per la collaborazione nella esecuzione delle misure su cristallo singolo.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALFANI M., *L'augite pneumatolitica raccolta sulle lave del fondo del cratere vesuviano nel 1929.* Per. Min., **5** (1934).

[2] CLARK S. P., SCHAIRER J. F., DENEUFVILLE J., *Phase relations in the system* $CaMgSi_2O_6$—$CaAl_2SiO_6$—SiO_2 *at low and high pressure.* Carnegie Inst. Wash, Year Book, **61** (1962).

[3] COLEMAN L. C., *Effect of ionic substitution on the unit-cell dimensions of synthetic diopside.* Geol. Soc. Am. Buddigton Vol. (1963).

[4] HUCKENHOLZ H. G., LINDHUBER W., SPRINGER J., *The join* $CaSiO_3$—Al_2O_3 Fe_2O_3 *of the* CaO—Al_2O_3—SiO_2 *quaternary system and its bearing on the formation of granditic garnets and fassaitic pyroxenes.* N. Jh. Miner. Abb., **121** (1974).

[5] KNOPF A., LEE D. E., *Fassaite from near Helena, Montana.* Amer, Min., **52** (1957).
[6] KUSHIRO I., *Clinopyroxene solid solutions - Part. I The* $CaAl_2SiO_6$ *component.* Jap. J. Geol. Geogr., **33** (1962).
[7] LEWIS F. J., *Unit-cell dimensions of some aluminous natural clinopyroxenes.* Amer. Mineral., **52** (1967).
[8] RAO A. T., VISHNUVARDHANA RAO M., *Fassaite from a calc-silicate Skarn vein near Gondivalasa, Orissa, India.* Amer. Min., **55** (1970).
[9] SCHERILLO A., *Nuovo contributo allo studio dei prodotti dell'eruzione vesuviana del 1944.* Bull. Volc. Séries II - T. XIII (1955).
[10] SAKATA Y., *Unit cell dimensions of synthetic aluminian diopsides.* Jap. Journ. Geol. Geogr., **28** (1957).
[11] TILLEY C. E., *Aluminous piroxenes in metamorphosed limestones.* Geol. Mag., **75** (1938).
[12] TRÖGER E., *Über den Fassait über die Einteilung der Klinopyroxene.* N. Jb. Min. (1951).
[13] ZAMBONINI F., CAROBBI G., *Contributo allo studio dei minerali vesuviani. Ricerche sulla fosterite e sullo spinello.* Boll. Soc. Nat. Napoli, **41** (1930).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, R. Sersale e P. Corradini.

Sull'esistenza degli estremi di un insieme di funzioni additive in un clan

Nota di IMMACOLATA DEL PRETE
presentata dal socio ordinario FEDERICO CAFIERO

(Adunanza del 4 dicembre 1976)

RIASSUNTO. — Si approfondisce lo studio del problema dell'esistenza degli estremi, nell'insieme delle funzioni finitamente o numerabilmente additive in un clan $\mathcal{C}$, di un insieme di funzioni finitamente o numerabilmente additive in $\mathcal{C}$.

SUMMARY. — The author studies the existence problem of extrema, in the class of finitely or countably additive set functions on a clan $\mathcal{C}$, of a finitely or countably additive set functions' family.

Un ben noto teorema [1] assicura l'esistenza dell'estremo superiore (risp. inferiore), nell'insieme $\mathcal{A}$ delle funzioni finitamente additive in un clan, di una qualunque parte $\mathcal{I}$ di $\mathcal{A}$ alla quale appartenga una funzione inferiormente (risp. superiormente) limitata.

Tale teorema è completato dall'osservazione che, ferma restando la condizione dichiarata, l'estremo superiore (risp. inferiore) di $\mathcal{I}$ in $\mathcal{A}$ è numerabilmente additivo nella ipotesi che ogni funzione di $\mathcal{I}$ sia numerabilmente additiva.

In questa nota approfondisco lo studio del problema dell'esistenza degli estremi di un insieme di funzioni finitamente o numerabilmente additive in un clan e pervengo a teoremi più generali.

Uno dei teoremi qui acquisiti implica banalmente un teorema di YOSIDA-HEWITT concernente la decomposizione di una funzione non negativa finitamente additiva in un clan nella somma di una funzione numerabilmente additiva e di una funzione puramente finitamente additiva [2].

1. In questo lavoro denotiamo con $\mathcal{C}$ un clan di parti di un insieme S, e con $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{N}$ rispettivamente l'insieme delle funzioni finitamente additive in $\mathcal{C}$ e quello delle funzioni numerabilmente

[1] Cfr. K. KRICKEBERG e C. PAUC [4], pp. 460-462; C. A. HAYES e C. PAUC [2], pp. 125-127. Cfr. anche S. BOCHNER e R. S. PHILLIPS [1], p. 319.
[2] Cfr. K. YOSIDA e E. HEWITT [5], p. 52.

additive in $\mathcal{C}$. Tali insiemi si intendono ordinati per mezzo delle relazioni d'ordine indotte dalla relazione di ordine usuale nell'insieme delle funzioni numeriche definite in $\mathcal{C}$.

Ciò premesso, andiamo a dimostrare la proposizione seguente:

(1.1) *Siano*: $\mathfrak{I}$ *una parte non vuota di* $\mathfrak{A}$, ψ *l'applicazione definita in* $\mathcal{C}$:

$$X \to \sup_{\alpha \in \mathfrak{I}} \alpha(X) \qquad (\text{risp. } X \to \inf_{\alpha \in \mathfrak{I}} \alpha(X)),$$

φ *l'applicazione, anch'essa definita in* $\mathcal{C}$:

$$X \to \sup \Sigma_i \alpha_i(X) \qquad (\text{risp. } X \to \inf \Sigma_i \alpha_i(X_i)),$$

dove (X_i) *e* (α_i) *sono rispettivamente una partizione finita di* X *con gli elementi in* $\mathcal{C}$ *ed una famiglia finita di funzioni di* $\mathfrak{I}$ *tali che la soprascritta somma abbia senso. Allora*:

a) φ *è l'estremo superiore (risp. inferiore) di* $\mathfrak{I}$ *in* $\mathfrak{A}$, *sempreché non assuma entrambi i valori* $-\infty$ *e* $+\infty$;

b) φ *coincide con* ψ *sempreché ogni famiglia finita di funzioni di* $\mathfrak{I}$ *sia maggiorata (risp. minorata) da una funzione di* $\mathfrak{A}$ *minore o uguale (risp. maggiore o uguale) di* ψ *(in particolare se ogni coppia di funzioni di* $\mathfrak{I}$ *è maggiorata (risp. minorata) in* $\mathfrak{I}$*).*

DIM. Dimostriamo il teorema relativamente alla esistenza dell'estremo superiore, un ragionamento analogo si potrà fare nel caso dell'estremo inferiore.

Dimostriamo la a). Qualunque siano gli insiemi disgiunti X e Y di $\mathcal{C}$, risulta ovviamente:

$$\varphi(X \cup Y) = \sup(\Sigma_i \alpha_i(X_i) + \Sigma_j \beta_j(Y_j)),$$

dove (X_i) e (Y_j) sono partizioni finite, con gli elementi in $\mathcal{C}$, rispettivamente di X e Y, mentre (α_i) e (β_j) sono famiglie finite di funzioni di $\mathfrak{I}$ tali che le soprascritte somme abbiano senso.

Pertanto, poiché si ha:

$$\varphi(X) + \varphi(Y) = \sup \Sigma_i \alpha_i(X_i) + \sup \Sigma_j \beta_j(Y_j),$$

la funzione φ è finitamente additiva [3].

[3] All'uopo basta invocare la seguente ovvia proposizione:
Qualunque siano le parti A *e* B *di* $\hat{\mathbb{R}}$, *risulta*:

$$\sup_{\substack{(a,b)\in A\times B \\ a+b\in\hat{\mathbb{R}}}} (a+b) = \sup A + \sup B, \qquad \inf_{\substack{(a,b)\in A\times B \\ a+b\in\hat{\mathbb{R}}}} (a+b) = \inf A + \inf B$$

sempreché il secondo membro abbia senso.

È ovvio che φ è un maggiorante di $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{A}$, d'altra parte, se β è un maggiorante di $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{A}$, qualunque sia l'elemento X di $\mathfrak{C}$ risulta:

$$\beta(X) = \Sigma_i \beta(X_i) \geq \Sigma_i \alpha_i(X_i),$$

per ogni partizione finita (X_i) di X con gli elementi in $\mathfrak{C}$ e per ogni famiglia finita (α_i) di funzioni di $\mathfrak{I}$ tali che la somma $\Sigma_i \alpha_i(X_i)$ abbia senso.

Conseguentemente è $\beta \geq \alpha$ e la a) è acquisita.

Dimostriamo la b). Poiché per ogni $\alpha \in \mathfrak{I}$ e per ogni $X \in \mathfrak{C}$ è

$$\varphi(X) \geq \alpha(X),$$

si ha anche, per ogni $X \in \mathfrak{C}$,

$$\varphi(X) \geq \sup_{\alpha \in \mathfrak{I}} \alpha(X) = \psi(X).$$

Ora, se ogni famiglia finita (α_i) di funzioni di $\mathfrak{I}$ è maggiorata da una funzione $\bar{\alpha}$ di $\mathfrak{A}$ minore o uguale a ψ, per ogni $X \in \mathfrak{C}$ si ha

$$\Sigma_i \alpha_i(X_i) \leq \Sigma_i \bar{\alpha}(X_i) = \bar{\alpha}(X) \leq \psi(X)$$

e quindi, ciò che dimostra la b), $\varphi = \psi$.

La proposizione ora acquisita implica in modo ovvio le seguenti:

(1.2) *Ogni insieme $\mathfrak{I}$ non vuoto di funzioni finitamente additive in $\mathfrak{C}$ e non negative è dotato di estremo inferiore e di estremo superiore in $\mathfrak{A}$.*

(1.3) *Una parte non vuota $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{A}$ è dotata di estremo superiore (risp. inferiore) sempreché per ogni elemento X di $\mathfrak{C}$ esista una funzione di $\mathfrak{I}$ assumente in X valore maggiore di $-\infty$ (risp. minore di $+\infty$).*

(1.4) *Ogni insieme $\mathfrak{I}$ non vuoto di funzioni reali finitamente additive in $\mathfrak{C}$ è dotato di estremo superiore e di estremo inferiore in $\mathfrak{A}$.*

(1.5) *Una parte non vuota $\mathfrak{I}$ di $\mathfrak{A}$ è dotata di estremo inferiore e di estremo superiore in $\mathfrak{A}$ sempreché esista un maggiorante di $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{A}$ non assumente il valore $+\infty$, oppure esista un minorante di $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{A}$ non assumente il valore $-\infty$.*

(1.6) *Una parte* $\mathfrak{I}$ *di* $\mathfrak{A}$ *è dotata di estremo superiore in* $\mathfrak{A}$ *se è reale l'estremo superiore in* $\mathfrak{A}$ *dell'insieme delle variazioni delle funzioni di* $\mathfrak{I}$.

2. Relativamente all'esistenza in $\mathfrak{N}$ degli estremi superiore ed inferiore di una parte di $\mathfrak{N}$ sussiste la proposizione seguente:

(2.1) *Qualunque sia la parte* $\mathfrak{I}$ *non vuota di* $\mathfrak{N}$ *l'applicazione* φ, *menzionata nella* (1.1), *è l'estremo superiore* (*risp. inferiore*) *di* $\mathfrak{I}$ *in* $\mathfrak{N}$ *sempreché non assuma il valore* $-\infty$ (*risp.* $+\infty$).

DIM. A norma della proposizione (1.1), basta ovviamente far vedere che φ è numerabilmente additiva, e a tale scopo basta dimostrare che qualunque sia la successione crescente (Y_n) di insiemi di $\mathfrak{C}$ avente per limite un insieme Y di $\mathfrak{C}$ risulta

$$\lim_n \varphi(Y_n) = \varphi(Y)$$

Evidentemente, se la partizione finita (Z_i) di Y con gli elementi in $\mathfrak{C}$ e se la famiglia finita (α_i) di funzioni di $\mathfrak{I}$ sono tali che la somma

$$\Sigma_i \alpha_i(Z_i)$$

ha senso, ha anche senso, per ogni $n \in \mathfrak{N}$, la somma

$$\Sigma_i \alpha_i(Z_i \cap Y_n)\ [4].$$

Conseguentemente risulta per ogni $n \in \mathfrak{N}$:

$$\varphi(Y_n) \geq \Sigma_i \alpha_i(Z_i \cap Y_n),$$

e quindi anche

$$\lim_n{}' \varphi(Y_n) \geq \lim_n \Sigma_i \alpha_i(Z_i \cap Y_n) =$$

$$= \Sigma_i \lim_n \alpha_i(Z_i \cap Y_n) = \Sigma_i \alpha_i(Z_i),$$

[4] Infatti, se per due valori i_1 e i_2 dell'indice i risultasse ad esempio:

$$\alpha_{i_1}(Z_{i_1} \cap Y_n) = -\infty \quad \text{e} \quad \alpha_{i_2}(Z_{i_2} \cap Y_n) = +\infty$$

sarebbe anche, contro il supposto

$$\alpha_{i_1}(Z_{i_1}) = -\infty \quad \text{e} \quad \alpha_{i_2}(Z_{i_2}) = +\infty$$

ciò che implica:

$$\lim_n{}' \varphi(Y_n) \geq \varphi(Y). \tag{1}$$

Pertanto se $\varphi(Y) = +\infty$ necessariamente si ha

$$\lim_n \varphi(Y_n) = \varphi(Y).$$

Supponiamo ora che $\varphi(Y)$ sia reale.
Se dimostriamo che:

$$\lim_n{}' \varphi(Y - Y_n) \geq 0,$$

risultando

$$\lim_n{}' \varphi(Y - Y_n) = \varphi(Y) - \lim_n{}'' \varphi(Y_n)$$

in quanto $\varphi(Y_n)$ è reale per ogni $n \in \mathfrak{N}$, avremo

$$\lim_n{}'' \varphi(Y_n) \leq \varphi(Y)$$

e quindi, a norma di (1), anche in questo caso si avrà

$$\lim_n \varphi(Y_n) = \varphi(Y).$$

Orbene, poiché $\varphi(Y)$ è reale, esistono una partizione finita (Z_i) di Y con gli elementi in $\mathcal{C}$, ed una famiglia finita (α_i) di funzioni di $\mathfrak{I}$ tali che la somma:

$$\Sigma_i \alpha_i(Z_i)$$

sia reale.

Conseguentemente, reale è anche, per ogni $n \in \mathfrak{N}$, la somma

$$\Sigma_i \alpha_i(Z_i \cap (Y - Y_n)),$$

e ciò implica:

$$\varphi(Y - Y_n) \geq \Sigma_i \alpha_i(Z_i \cap (Y - Y_n)),$$

e quindi anche

$$\lim_n{}' \varphi(Y - Y_n) \geq \lim_n \Sigma_i \alpha_i(Z_i \cap (Y - Y_n)) =$$

$$= \Sigma_i \lim_n \alpha_i(Z_i \cap (Y - Y_n)) = 0$$

in quanto ogni funzione α_i è reale sulla traccia di $\mathcal{C}$ su Z_i. L'asserto è così provato.

La proposizione (2.1) implica evidentemente le seguenti, alcune delle quali sono ben note:

(2.2) *Una parte $\mathcal{I}$ di $\mathfrak{M}$ è dotata di estremo superiore in $\mathfrak{M}$ se è reale l'estremo inferiore in $\mathcal{A}$ dell'insieme delle variazioni inferiori delle funzioni di $\mathcal{I}$.*

DIM. Poiché, per ogni funzione α di $\mathcal{I}$, risulta:

$$-\alpha \leq \alpha^{-},$$

l'applicazione definita in $\mathcal{C}$:

$$\varphi : X \to \inf \Sigma_i (-\alpha_i (X_i)),$$

dove (X_i) e (α_i) sono rispettivamente (al solito) una partizione finita di X con gli elementi in $\mathcal{C}$ ed una famiglia finita di funzioni di $\mathcal{I}$ tali che la soprascritta somma abbia senso, è maggiorata dall'estremo inferiore in $\mathcal{A}$ dell'insieme delle variazioni inferiori delle funzioni di $\mathcal{I}$. Conseguentemente, essendo quest'ultimo estremo inferiore reale, la funzione φ non assume il valore $+\infty$, epperò, a norma di (2.1), l'insieme delle opposte delle funzioni di $\mathcal{I}$ è dotato di estremo inferiore in $\mathfrak{M}$. Poiché ciò implica evidentemente che l'insieme $\mathcal{I}$ è dotato di estremo superiore in $\mathfrak{M}$, l'asserto è acquisito.

Analogamente si dimostra che:

(2.3) *Una parte $\mathcal{I}$ di $\mathfrak{M}$ è dotata di estremo inferiore in $\mathfrak{M}$ se è reale l'estremo inferiore in $\mathcal{A}$ dell'insieme delle variazioni superiori delle funzioni di $\mathcal{I}$.*

(2.4) *Ogni insieme non vuoto di funzioni numerabilmente additive in $\mathcal{C}$ e ivi non negative è dotato di estremo superiore in $\mathfrak{M}$.*

(2.5) *Una parte non vuota $\mathcal{I}$ di $\mathfrak{M}$ è dotata di estremo superiore (risp. inferiore) in $\mathfrak{M}$ sempreché per ogni elemento X di $\mathcal{C}$ esista una funzione di $\mathcal{I}$ assumente in X valore maggiore di $-\infty$ (risp. minore di $+\infty$).*

(2.6) *Ogni insieme non vuoto di funzioni reali numerabilmente additive in $\mathcal{C}$ è dotato di estremo superiore e di estremo inferiore in $\mathfrak{M}$.*

(2.7) *Il limite di una successione crescente (risp. decrescente) di funzioni numerabilmente additive in* $\mathcal{C}$ *è numerabilmente additivo in* $\mathcal{C}$ *sempreché non assuma il valore* $-\infty$ *(risp.* $+\infty$*).*

3. L'insieme delle funzioni numerabilmente additive e non negative in $\mathcal{C}$ maggiorate da una funzione λ non negativa e finitamente additiva in $\mathcal{C}$ è dotato di massimo (cfr. teor. (2.1)), se tale massimo è la funzione identicamente nulla, la funzione λ dicesi *puramente finitamente additiva.*

Ora, se $\bar{\lambda}$ è una funzione non negativa numerabilmente additiva in $\mathcal{C}$ maggiorata dalla funzione reale λ finitamente additiva in $\mathcal{C}$, la differenza $\lambda - \bar{\lambda}$ è puramente finitamente additiva se e solo $\bar{\lambda}$ è la più grande funzione numerabilmente additiva in $\mathcal{C}$ maggiorata da λ.

Conseguentemente:

Ogni funzione reale λ *non negativa e finitamente additiva in* $\mathcal{C}$ *è decomponibile, in modo unico, nella somma di una funzione numerabilmente additiva non negativa e di una puramente finitamente additiva.*

Si ritrova così molto facilmente il già citato teorema di YOSIDA-HEWITT.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCHNER S. and R. S. PHILLIPS, *Additive set functions and vector lattices.* Annals of Math., **42**, pp. 316-324 (1941).

[2] HAYES C. A. and C. PAUC, *Derivation and Mortingales.* Springer-Verlag. Berlin (1970).

[3] KRICKEBERG K., *Convergence of martingales with a directed index set.* Trans. Amer. Math. Soc., **83**, pp. 313-337 (1956).

[4] KRICKEBERG K. and C. PAUC, *Martingales et derivations.* Bull. Soc. Math. France, **91**, pp. 455-543 (1963).

[5] YOSIDA K. and E. HEWITT, *Finitely additive measure.* Trans. Amer. Math. Soc., **72**, pp. 46-66 (1952).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci F. Cafiero, A. Franchetta e C. Miranda.

Prima segnalazione di Kalsilite tra i minerali vesuviani

Nota di Enrico Franco e Maurizio de' Gennaro
presentata dal socio ordinario Antonio Scherillo

(Adunanza del 4 dicembre 1976)

Riassunto. — Si segnala il ritrovamento di kalsilite in proietti a fassaite e spinello provenienti dal Somma-Vesuvio e se ne forniscono le costanti della cella elementare, la densità e la composizione chimica.

Summary. — Kalsilite has been found in blocks eiected from Somma Vesuvius Volcano, together with fassaite and spinel. Lattice parameters, density and chemical composition and optical data have been studied.

La kalsilite fu rinvenuta in natura per la prima volta nel 1942 in Uganda da Holmes [7] e fu studiata nello stesso anno da Bannister e Hey [2] ed in seguito fu ritrovata da Combe e Holmes [6], da Sahama [9] nel Congo e in Italia a S. Venanzo (Umbria) da Bannister ed altri [3].

È un minerale piuttosto raro caratteristico di rocce alcaline basiche ricche in potassio in cui sembra che si formi nei primi stadi della cristallizzazione ad alta temperatura.

Le indagini condotte sui proietti del Somma-Vesuvio hanno permesso di individuare tale minerale in un tipo particolare di proietto i cui costituenti mineralogici principali sono pirosseno fassaitico e spinello e subordinamento biotite e kalsite [5].

Quest'ultimo minerale si osserva principalmente nelle cavità della roccia sotto forma di tozzi prismi esagoni delle dimensioni massime di circa 2 mm.

In sezione sottile le sue dimensioni sono tali da distinguerla dalla massa microcristallina fondamentale costituita quasi esclusivamente dal pirosseno; i cristalli si presentano perfettamente limpidi e incolori salvo una leggera patina giallo-rossastra che spesso penetra anche nelle fratture e negli spazi intracristallini.

Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.

Non è stata rilevata la presenza di associazioni pertitiche o micropertitiche con nefelina, come osservava SAHAMA molto frequentemente per le lave del Nyiragongo [10, 11], dovute a fenomeni di smistamento fra le due fasi. Si può dedurre, altresì, che manchino anche associazioni criptopertitiche poiché non è stata osservata nefelina negli spettri di polveri ai raggi X.

Gli indici di rifrazione osservati sono:

$$\omega = 1{,}539 \pm 0.001 \qquad \varepsilon = 1{,}534 \pm 0.001$$

La sostanza da analizzare è stata ottenuta piuttosto facilmente in quanto, come detto, i cristalli sono presenti in gran numero sulle pareti delle piccole cavità della roccia avendo cura di eliminare tutti quei cristalli che si presentavano incrostati da spesse patine. Ulteriori purificazioni si sono ottenute al separatore magnetico e con i liquidi pesanti dopo preventivo trattamento agli ultrasuoni.

In tabella A si riportano i risultati dell'analisi chimica e del numero di ioni delle basi per 32 ossigeni confrontate con quelli di alcune classiche kalsiliti riportate in letteratura.

I diffrattogrammi di polveri sono stati realizzati con diffrattometro PHILIPS, radiazione Cu Kα, 35 kV, 15 mA velocità del goniometro 1/2° 2 θ/min. e fenditure di 1° usando silicio in polvere come standard interno; i valori ottenuti si riportano in tabella B.

Dal diagramma di polveri si sono ottenute le costanti della cella raffinate utilizzando un programma di raffinamento con i minimi quadrati di A. ALBERTI [1]

$$a = 5{,}156 \pm 0{,}001 \qquad c = 8{,}629 \pm 0{,}002 \qquad c/a = 1.673$$

La densità è risultata D = 2.60

L'insieme delle analisi chimiche e roentgenografiche porta a considerare che la kalsilite analizzata, prescindendo da eventuali possibili impurità quali microscopiche inclusioni di pirosseno, spinello, etc., presenta un contenuto di Ne del 12,24% che è da ritenere in soluzione solida nella kalsilite.

TUTTLE e SMITH [14], d'altro canto hanno osservato contenuti di Ne in kalsiliti sintetiche fino al 25 % senza riscontrare smistamenti delle due fasi presenti.

Il metodo di SAHAMA ed altri [10] per determinare la composizione di kalsiliti utilizzando i dati roentgenografici, attraverso l'applicazione della equazione $Ks = 100\ K/(K + Na + Ca) = 100 - 227{,}27\ (\Delta - 6{,}264)$ dove $\Delta = 2\theta_{(10\bar{1}2)} - 2\theta_{(10\bar{1}1)}$ per la radiazione Cu Kα non

TABELLA A

	1	2	3
SiO_2	38.36	38.47	38.48
TiO_2	—	—	0.05
Al_2O_3	31.84	30.81	31.01
Fe_2O_3	0.77	1.63	1.12
FeO	0.35	0.26	—
MgO	0.58	0.63	—
MnO	—	—	0.01
CaO	0.23	0.20	0.03
Na_2O	2.36	2.09	0.30
K_2O	25.49	25.65	28.33
BaO	0.02	—	—
Rb_2O	0.02	—	—
SrO	0.01	—	—
$H_2O\pm$	0.22	0.20	0.67
	100.25	99.94	100.00
	Numero degli ioni per 32 ossigeni		
Si	7.981	8.044	8.125
Al	7.806	7.596	7.720
Fe^{3+}	0.120	0.256	0.178
Fe^{2+}	0.060	0.045	—
Mg	0.180	0.196	—
Ca	0.051	0.045	0.006
Na	0.951	0.847	0.123
K	6.763	6.846	7.635
Ba	0.001	—	—
Rb	0.002	—	—
Sr	0.001	—	—
Ks	87.05		
Ne	12.24		
Q	0.71		

1) Kalsilite Somma-Vesuvio; 2) Kalsilite S. Venanzo [3]; 3) Kalsilite Nyiragongo [11].

Analisi del proietto in toto.

SiO_2 42.12 - TiO_2 0.50 - Al_2O_3 13.81 - Fe_2O_3 2.20 - FeO 1.10 - MnO 0.15 - MgO 12.08 CaO 24.20 - Na_2O 0.64 - K_2O 0.86 - BaO 0.09 - P_2O_5 0.20 - H_2O^- 0.66 - H_2O^+ 0.84.

ha fornito un accordo soddisfacente avendosi: Ks calcolato = 91.82 e Ks osservato = 87.05; ma d'altra parte gli autori stessi, data l'esiguità di analisi di kalsiliti naturali disponibili, non assicurano la precisione del metodo.

Il proietto pirossenitico esaminato si può ritenere tipico di ambiente di contatto tra il magma originario alcalitrachitico e rocce

TABELLA B

Kalsilite Somma-Vesuvio			Kalsilite Sintetica [14]		
d Å	I/I_1	hkl	d Å	I/I_1	hkl
4.30	mf	002	4.3512	12	002
3.96	f	101	3.9733	45	101
3.10	ff	102	3.1184	100	102
2.58	f	110	2.5789	50	110
2.47	m	111	2.4724	15	111
2.41	md	103	2.4319	10	103
2.22	d	112	2.236	3	200
2.16	md	004	2.2183	10	112
1.981	d	202	2.1753	17	004
1.941	dd	104	2.164	5	201
1.922	d	113	1.9868	5	202
1.768	d	203	1.9546	3	104
1.657	md	211	1.9270	4	113
1.630	md	105	1.7703	3	203
1.570	m	212	1.6621	4	114
1.550	dd	204	1.6580	4	211
1.490	mf	300	1.6220	6	105
1.457	d	213	1.5742	9	212
1.367	d	205	1.5588	3	204
1.289	d	220	1.4895	10	300
1.258	d	116	1.4598	3	213
1.227	d	304	1.3734	3	205
1.206	d	215	1.2902	3	220
1.189	md	312	1.2645	4	116
1.139	dd	313	1.2293	2	304
			1.227	1	311
			1.2124	2	215
			1.1921	4	312
			1.140	1	313

calcaree e dolomitiche probabilmente marnose tenuto conto, in particolare, della presenza di spinello.

La paragenesi e la struttura osservata nella roccia suggeriscono la successione: spinello-pirosseno-biotite-kalsilite.

La kalsilite, per la prima volta osservata nei proietti del Somma-Vesuvio, come già detto, non presenta tracce dei complessi fenomeni di exoluzione o di diffusione di sodio nella kalsilite che si manifestano, molto di frequente, nel sistema Ne – Ks e pertanto non è possibile precisare, trattandosi di blocchi eiettati, se ciò è dovuto ad una brusca interruzione del fenomeno assimilativo o per il raggiunto stadio di equilibrio con l'ambiente circostante.

Allo stato attuale le conoscenze sui proietti metamorfici del Somma-Vesuvio farebbero propendere per la prima ipotesi soprattutto per la relativa abbondanza dei proietti a nefelina cui si associa a volte kaliophillite o leucite.

Si ritiene, pertanto, interessante uno studio sistematico di questi tipi di proietti per meglio definire i rapporti tra nefelina e kalsilite nel contesto generale dell'evoluzione del magma vesuviano.

Gli Autori ringraziano il Prof. Achille Panunzi per aver cortesemente fornito i proietti studiati.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERTI A., *The use of structure factors in the refinement of Unit-cell parameters from powder diffraction data.* J. Appl. Cryst., **9** (1976).

[2] BANNISTER F. A., *Kalsilite, a polimorph of* $KAlSiO_4$ *from Uganda.* Min. Mag., **26** (1942).

[3] BANNISTER F. A., SAHAMA TH. G., WITK H. B., *Kalsilite in Venanzite from San Venanzo, Umbria, Italy.* Min. Mag., **30** (1953).

[4] DEBRON G., *Contribution a l'étude des rèactions d'èchange des ions alcalins et alcalino-terreux dans les feldspathoides.* Bull. Soc Franc Miner. Crist, **88** (1965).

[5] DE' GENNARO M., FRANCO E., *Pirosseno fassaitico in alcuni proietti del Somma-Vesuvio.* (In corso di stampa) (1976).

[6] COMBE A. D., HOLMES A., *The Kalsilite-bearing lavas of Kabirenge and Lyakanli, south-west Uganda.* Trans. Roy. Soc. Edin., **61** (1945).

[7] HOLMES A., *A suite of volcanic rock from south-west Uganda containing Kalsilite (a polimorph of* $KAlSiO_4$*).* Min. Mag., **26** (1942).

[8] LUTH W. C., INGAMELLS C. O., *Gel preparation of starting materials for hydrotermal experimentation.* Am. Min., **50** (1965).

[9] O'NEIL J. R. TAYLOR H. P., *The oxygen isotope and cation exchange chemistry of feldspars.* Am. Min., **52** (1967).

[10] SAHAMA TH. G., *Kalsilite in the lavas of Mt. Nyiragongo (Belgian Congo).* J. Petr., **1** (1960).

[11] SAHAMA TH. G., NEUVONEN K. J., HITONEN K., *Determination of the composition of Kalsilite by an X-ray method.* Min. Mag., **31** (1956).

[12] SIPPLE R. F., *Sodium self-diffusion in natural minerals.* Geochim. Cosmochim. Acta, **27** (1963).

[13] SMITH J. V., SAHAMA, Th. G., *Order-disorder in Kalsilite.* Amer. Min., **42** (1957).

[14] SMITH J. V., TUTTLE O. F., *The nepheline kalsilite Sistem; I: X Ray data for the crystalline phases.* Am. Jour. of Sc., **255** (1957).

[15] TUTTLE O. F., SMITH J. V., *The nepheline kalsilite System; II: Phase relations.* Amer. Jour. of Sc., **256** (1958).

[16] YUND R. A., MCCALLISTER H. R., SAVIN S. M., *An experimental study of Nepheline-Kalsilite exolution.* Journ. Petr., **13** (1972).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una Commissione composta dai soci A. Scherillo, R. Sersale e C. Corradini.

Valutazione dell'idrossido di calcio, in presenza di silicati di calcio idrati, mediante estrazione con solvente e mediante analisi termogravimetrica *

Nota di ALBERTO PERULLO, VITTORIO SABATELLI
e GIAN LORENZO VALENTI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 4 dicembre 1976)

RIASSUNTO. — È stato valutato il contenuto di idrossido di calcio, sia in miscele di silicato di calcio idrato e idrossido di calcio, sia in paste di silicato tricalcico, mediante analisi termogravimetrica e mediante estrazione con solvente.

L'insieme dei risultati sperimentali converge nell'indicare che il contenuto di idrossido, valutato mediante analisi termogravimetrica, risulta sistematicamente più basso di quello determinato mediante estrazione con solvente.

Viene pertanto presa in considerazione l'ipotesi di una parziale reazione dell'idrossido di calcio con il silicato di calcio idrato, nel corso del ciclo di riscaldamento.

SUMMARY. — The amount of calcium hydroxide both in calcium silicate hydrate-calcium hydroxide mixtures and in tricalcium silicate pastes has been evaluated by means of thermogravimetric analysis and solvent extraction method.

The thermogravimetric analysis of the calcium hydroxide yelded values systematically lower than those obtained by the solvent extraction method.

It has been supposed that the calcium hydroxide reacted in part with the calcium silicate hydrate during the heating cycle.

1. - INTRODUZIONE

L'estrazione con solvente costituisce il metodo di analisi più diffusamente impiegato nella valutazione dell'idrossido di calcio prodotto per idratazione dei silicati di calcio del cemento Portland. I risultati dipendono, però, in buona misura da parametri difficilmente standardizzabili quali: la durata del trattamento di estrazione, le modalità di raffreddamento della soluzione, il rapporto solvente/solido, ecc., il che spiega l'esistenza dei numerosi metodi di analisi

* Lavoro svolto con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

proposti e delle svariate modifiche suggerite a quelli originali [1] [2] [3] [4].

Per contro, l'analisi termogravimetrica può offrire vantaggi quali: maggiore rapidità e semplicità operative, quantità più modeste di campione per l'indagine [5], minor suscettibilità alle fluttuazioni statistiche.

Si è creduto pertanto interessante confrontare i dati dell'analisi termogravimetrica con quelli dell'analisi chimica, iniziando una sperimentazione rivolta ad effettuare misure di concentrazione di $Ca(OH)_2$ sia in miscele di idrossido di calcio e silicati di calcio idrati, sia in paste di silicato tricalcico puro e di sue soluzioni solide.

In questa nota si dà conto dei risultati di una prima serie di determinazioni sperimentali effettuate mediante entrambe le metodologie.

2. - Parte sperimentale

Sono stati preparati tre campioni di silicato di calcio idrato con rapporto calce/silice pari a 0,8; 1,0; 1,5, per sintesi idrotermale in autoclave, a 10 atm. e 175°C, a partire da idrossido di calcio e silice cristallina, verificando successivamente la completezza della reazione mediante diffrazione dei raggi X.

Sono stati sottoposti alle indagini, qui di seguito descritte, sia tre campioni di silicato di calcio idrato tal quale, sia sei campioni ottenuti per addizione agli stessi del 10 % e del 20 % di $Ca(OH)_2$ in peso, rispettivamente.

Sono stati altresì preparati e sottoposti alle medesime indagini campioni costituiti da paste di silicato tricalcico puro e di tre sue soluzioni solide stagionate per 16; 20; 24 ore, che danno luogo a silicati di calcio idrati di neoformazione di composizione differente [6].

L'analisi termogravimetrica è stata eseguita impiegando una termobilancia Stanton Mod. MF-H5, atta ad apprezzare una variazione relativa di peso pari allo 0.1 %; il riscaldamento è stato condotto fino alla temperatura di 1.000°C con una velocità di 5°C al minuto. Si è tenuto conto della carbonatazione di una piccola parte dell'idrossido di calcio, verificatasi durante il riscaldamento, nonostante le precauzioni prese.

Per l'estrazione chimica è stato adottato il metodo di Franke modificato [3], che prevede l'impiego, come solvente, di una miscela di alcool isobutilico e di acetacetato di etile, addizionata ad una soluzione alcoolica di idrossido di sodio. Il procedimento consiste nella ebollizione per un'ora e mezzo della sospensione, condotta in pallone

munito di refrigerante a ricadere, raffreddamento a temperatura ambiente e successiva filtrazione e titolazione con soluzione di acido perclorico in alcool isobutilico. Come indicatori si sono impiegate soluzioni alcooliche, per alcool isobutilico, di blu di metilene e blu timolo.

3. - Risultati e discussioni

In tabella I sono elencate, unitamente agli scarti rispetto al valore teorico, le percentuali di idrossido di calcio, ricavate con l'analisi termogravimetrica e con il metodo di estrazione con solvente, nelle miscele di silicato di calcio idrato e idrossido di calcio. Come è agevole constatare, mentre i valori desunti in base all'estrazione chimica oscillano in un intervallo assai ristretto intorno al valore

Tabella I

Dati ricavati con analisi termogravimetrica ed analisi chimica, per concentrazioni di idrossido di calcio in miscela con silicati di calcio idrati.

Rapporto molare calce/silice nel silicato	% di $Ca(OH)_2$ aggiunto al silicato	Analisi termogravimetrica $Ca(OH)_2$, % sul totale	Scarto rispetto al teorico, %	Analisi chimica $Ca(OH)_2$, % sul totale	Scarto rispetto al teorico, %
	0	—	—	—	—
0.8	10	6.08	− 33.1	9.60	+ 5.6
	20	13.64	− 18.2	16.19	− 2.9
	0	—	—	—	—
1.0	10	7.15	− 21.3	8.70	− 4.3
	20	13.93	− 16.4	16.39	− 1.7
	0	—	—	—	—
1.5	10	7.28	− 19.9	9.26	+ 1.9
	20	14.04	− 15.8	16.20	− 2.8

teorico, quelli ricavati dall'analisi temogravimetrica sono notevolmente e sistematicamente inferiori ai valori previsti. È interessante notare come gli scarti si riducono progressivamente al crescere sia del rapporto calce/silice nel silicato di calcio idrato, per pari contenuto di $Ca(OH)_2$, sia del tenore di $Ca(OH)_2$ addizionato ad uno stesso silicato di calcio idrato.

In tabella II sono riportati i valori delle concentrazioni di idrossido di calcio nelle paste di silicato tricalcico puro e di sue soluzioni solide.

Si nota come i valori ricavati per via termogravimetrica siano ancora inferiori, per tutti i campioni esaminati, a quelli ottenuti per estrazione chimica e che l'ordine di grandezza dello scarto sia, nella maggior parte dei casi, piuttosto considerevole.

Analisi quantitative mediante raggi X [7] per la determinazione di idrossido di calcio in paste di silicati di calcio, hanno indicato valori della concentrazione di $Ca(OH)_2$ invariabilmente inferiori a quelli

TABELLA II

Dati ricavati con analisi termogravimetrica ed analisi chimica per concentrazioni di idrossido di calcio in paste di silicato tricalcico puro e di sue soluzioni solide.

Campione	Tempo di stagionatura, ore	Analisi termogravimetrica $Ca(OH)_2$, %	Analisi chimica $Ca(OH)_2$, %	Scarto relativo fra i due metodi di analisi, %
	16	10.16	13.19	23.0
C_3S puro	20	11.53	14.83	22.2
	24	12.01	15.87	24.3
	16	8.92	11.41	21.8
C_3S + 1% MgO	20	10.12	12.71	20.4
	24	10.94	13.12	16.6
	16	5.36	6.55	18.2
C_3S + 1% Al_2O_3	20	9.34	11.33	17.6
	24	11.53	11.64	0.9
	16	7.04	8.42	16.4
C_3S + 1% Fe_2O_3	20	9.88	11.06	10.7
	24	12.20	12.26	0.5

dedotti con i metodi di estrazione con solvente. Ciò induce ad ipotizzare che parte dell'idrossido di calcio prodotto nella reazione di idratazione dei silicati di calcio sia amorfo; una conferma indiretta a questa ipotesi è venuta da una serie di risultati sperimentali [8] i quali risultavano in accordo con la supposizione che la fra-

zione mancante di $Ca(OH)_2$ fosse legata, sia pure debolmente, ai silicati di calcio idrati. I medesimi ricercatori [9] hanno ottenuto dati termogravimetrici in accordo con quelli desunti mediante analisi quantitativa via raggi X; ciò li ha indotti a ritenere che l'idrossido di calcio desunto in base all'analisi termogravimetrica fosse solo la frazione cristallina e che quella amorfa desse luogo ad una perdita di peso distribuita e non localizzata entro un ristretto intervallo di temperatura e pertanto non evidenziabile mediante un segnale netto.

LOCHER [10] in uno studio sulla stechiometria di idratazione del silicato tricalcico puro ha ottenuto mediante il metodo di estrazione con solvente, per l'idrossido di calcio, valori di circa il 35 % più alti di quelli ricavati con l'analisi termogravimetrica senza però avanzare alcuna ipotesi giustificativa.

PRESSLER, BRUNAUER e KANTRO [11] in uno studio condotto su di un silicato tricalcico in pasta, stagionato due anni e mezzo riscontrarono che il riscaldamento a 540°C provocava una riduzione dell'idrossido di calcio non combinato e supposero che il silicato di calcio idrato reagisse con l'idrossido di calcio secondo il seguente schema di reazione:

$$Ca_3 Si_2 O_7 \cdot 3 H_2O + 3 Ca(OH)_2 \rightarrow 2 Ca_2SiO_4 + 2 CaO + 6 H_2O$$

Nell'ipotesi che tale reazione vada ad integrale compimento un terzo dell'idrossido di calcio verrebbe rimosso dal sistema. La circostanza che, come si evince dalla tabella I, al crescere del rapporto calce/silice e dell'aggiunta di idrossido di calcio diminuisca lo scarto fra i valori delle percentuali di idrossido di calcio stimate con il metodo di analisi termogravimetrica e quello di estrazione con solvente, induce a ritenere possibile una reazione secondo lo schema succitato. Infatti è da presumere che i silicati di calcio idrati a più basso rapporto calce/silice abbiano maggior attitudine a combinarsi con l'idrossido di calcio libero, trasformandosi in silicati di più alta basicità.

La differenza tra i due metodi può pertanto essere imputata ad una parziale reazione dell'idrossido di calcio libero con il silicato di calcio idrato, in un intervallo di temperatura precedente quello in cui si verifica la decomposizione termica dell'idrossido di calcio.

Pertanto il difetto di $Ca(OH)_2$ che si registra all'analisi termogravimetrica non necessariamente deve ritenersi connesso con la presenza di una frazione amorfa.

La prova sperimentale del meccanismo di reazione indicato e l'analisi del comportamento termico dell'idrossido di calcio amorfo, costituiscono oggetto di ulteriori indagini.

CONCLUSIONI

I valori delle percentuali di idrossido di calcio ricavabili mediante analisi termogravimetrica risultano sistematicamente inferiori a quelli desunti con il metodo di estrazione con solvente, sia nelle miscele di idrossido di calcio e di silicato di calcio idrato, sia nelle paste di silicato tricalcico puro e sue soluzioni solide stagionate a 16; 20; 24 ore.

Le differenze riscontrate sono probabilmente imputabili ad una parziale reazione di combinazione dell'idrossido di calcio con il silicato di calcio idrato, in un intervallo di temperatura che precede quello di decomposizione termica dell'idrossido di calcio.

Gli Autori desiderano ringraziare il Prof. R. SERSALE per le utili discussioni e il Sig. A. ANNETTA per l'assistenza tecnica ricevuta.

Istituto di Chimica Applicata - Facoltà di Ingegneria - Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] FRANKE B., Z. Anorg. Allg. Chem., **247**, 180, (1941).
[2] SCHLAEPFER P., BUKOWSKI R., Eidgenossische Materialprüfungsanstalt an der E.T.H. Zurich, **63**, (1933).
[3] PRESSLER E. E., BRUNAUER S., KANTRO D. L., WEISE C. H., Anal. Chem. **33**, 877, (1961).
[4] MASAZZA F., FRANCARDI M. T., Il Cemento, **2**, 55, (1970).
[5] VALENTI G. L., SABATELLI V., Il Cemento, **3**, 141 (1974).
[6] VALENTI G. L., SABATELLI V., Annali di Chimica (in corso di stampa).
[7] BRUNAUER S., KANTRO D. L., COPELAND L. E., J. Amer. Chem. Soc., **80**, 761 (1958).
[8] KANTRO D. L., BRUNAUER S., WEISE C. H., J. Colloid Sci., **14**, 363 (1959).
[9] BRUNAUER S., KANTRO D. L., The chemistry of Cements, I, **7**, 287 (1964).
[10] LOCHER F. W., « Symp. on structure of Port. Cem. paste and Concr ». Washington, 300 (1966).
[11] PRESSLER E. E., BRUNAUER S., KANTRO D. L., Anal. Chem., **28**, 896 (1956).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, M. Covello e R. Sersale.

Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico. Nota III. Relazione fra idrossido di calcio e resistenza meccanica *

Nota di VITTORIO SABATELLI e GIAN LORENZO VALENTI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 4 dicembre 1976)

RIASSUNTO. — È stato studiato il comportamento idraulico del silicato tricalcico puro e di alcune soluzioni solide dopo stagionatura di 1; 2; 3; 7; 28 giorni, valutando le concentrazioni d'idrossido di calcio e le resistenze meccaniche a compressione.

Nell'ambito di una stessa stagionatura è stata notata una correlazione tra resistenza meccanica e concentrazione dell'idrossido di calcio, nel senso che i campioni che ne sono più ricchi esibiscono carichi di rottura più elevati; è stato inoltre osservato che, sempre ad una medesima stagionatura, i campioni esaminati mostrano valori distinti del rapporto resistenza meccanica/idrossido di calcio.

SUMMARY. — The hydraulic behaviour of the tricalcium silicate and some its solid solutions has been investigated after 1; 2; 3; 7; 28 days of aging, by evaluating the amounts of calcium hydroxide and the compressive strength.

At the same age, specimens richer in calcium hydroxide yelded higher mechanical strength; moreover, all samples showed different mechanical strength/calcium hydroxide ratios.

1. - INTRODUZIONE

In due precedenti Note [1] e [2] è stato studiato il comportamento idraulico del silicato tricalcico e di alcune sue soluzioni solide, prendendo il quantitativo di idrossido di calcio prodotto ad indice del grado di reattività con l'acqua, per un tempo di stagionatura pari a tre giorni.

Il presente lavoro ha per oggetto lo studio delle relazioni intercorrenti tra idrossido di calcio presente nei prodotti di idratazione e resistenza meccanica relativamente a campioni di silicato tricalcico e sue soluzioni solide, stagionati in un intervallo compreso tra 1 e 28 giorni.

* Lavoro svolto con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

2. - Parte sperimentale

Sono stati preparati 4 campioni costituiti da:

1) silicato tricalcico puro;
2) alite contenente l'1 % di MgO;
3) alite contenente l'1 % di Al_2O_3;
4) alite contenente l'1 % di Fe_2O_3.

Per la sintesi e la caratterizzazione dei campioni si rimanda alle precedenti Note [1] [2].

L'idratazione dei campioni è stata condotta alla temperatura di 20°C, adottando un rapporto acqua/solido pari a 0.5. Sono state preparate quattro serie di paste, una per ogni campione, costituite ciascuna da un numero di provini corrispondenti al numero delle stagionature prescelte, fissate in: 1; 2; 3; 7; 28 giorni.

Per quanto attiene alla preparazione ed alla conservazione delle paste, all'arresto della idratazione ed ai successivi trattamenti di macinazione ed essiccamento si rimanda a quanto descritto in una precedente Nota [1]. Il grado di essiccazione [3] è stato controllato

Tabella I

Determinazione del grado di essiccamento.

Campione	Tempo di stagionatura (giorni)	Primo controllo		Ultimo controllo	
		perdita relativa (mg/g)	velocità di perdita (m/g/giorno)	perdita relativa (mg/g)	velocità di perdita (m/g/giorno)
C_3S	1	14,40	3,60	1,88	0,94
	2	12,32	3,08	1,24	0,62
	3	17,84	4,46	1,16	0,58
	7	10,22	2,55	1,60	0,80
	28	13,28	3,32	1,40	0,70
C_3S + 1 % MgO	1	12,20	3,05	1,42	0,71
	2	17,22	4,30	1,66	0,83
	3	11,46	2,86	1,80	0,90
	7	13,89	3,47	1,82	0,91
	28	18,96	4,74	0,88	0,44
C_3S + 1 % Al_2O_3	1	17,24	4,31	1,22	0,61
	2	11,08	2,77	0,76	0,38
	3	19,22	4,80	0,88	0,44
	7	15,66	3,91	1,64	0,82
	28	19,24	4,81	1,56	0,78
C_3S + 1 % Fe_2O_3	1	18,28	4,57	1,50	0,75
	2	20,06	5,01	1,70	0,85
	3	18,02	4,50	1,90	0,95
	7	15,16	3,79	1,96	0,98
	28	12,12	3,03	1,98	0,99

mediante successive pesate, ritenendo realizzata un'efficace essiccazione allorché la velocità di perdita di peso non superava 1 mg/g giorno [4], (cfr. tab. I). La concentrazione dell'idrossido di calcio è stata determinata mediante analisi termoponderale, nell'intervallo 20-1000°C [5].

Le prove di resistenza meccanica a compressione sono state eseguite su provini di dimensioni 40 × 40 × 40 mm., confezionati con 92 % di C_3S o di sue soluzioni solide, e l'8 % di una miscela gesso-quarzo in rapporto 3 a 5.

3. - Risultati e discussione

In tab. II sono riportati i valori delle percentuali di idrossido di calcio riferite all'anidro e delle resistenze meccaniche dopo 1; 2; 3; 7; 28 giorni di stagionatura.

Tabella II

Percentuali di idrossido di calcio e resistenze meccaniche a compressione in funzione del tempo di stagionatura.

Campione	Tempo di stagionatura (giorni)	$Ca(OH)_2$ % sull'anidro	Carico di rottura (Kg/cm^2)
C_3S	1	13,80	112
	2	16.70	146
	3	18.25	160
	7	21.25	230
	28	24.75	439
C_3S + 1 % MgO	1	12.20	71
	2	14.60	112
	3	17.00	130
	7	20.00	208
	28	23.60	378
C_3S + 1 % Al_2O_3	1	12.80	104
	2	17.40	165
	3	18.40	214
	7	20.40	320
	28	25.40	570
C_3S + 1 % Fe_2O_3	1	13.60	82
	2	17.60	172
	3	18.80	235
	7	22.00	339
	28	25.25	512

L'esame della tabella consente di rilevare quanto segue:

1) in corrispondenza del primo giorno di stagionatura i valori più elevati sia del carico di rottura che dell'idrossido di calcio prodotto spettano al silicato tricalcico puro, mentre quelli più bassi sono presentati dall'alite contenente MgO;

2) a due giorni di stagionatura si verifica un cambiamento nella sequenza dei valori della resistenza meccanica e dell'idrossido di calcio, nel senso che quelli più alti competono all'alite contenente Fe_2O_3, seguita, nell'ordine, da quella contenente Al_2O_3, dal silicato tricalcico puro e dall'alite contenente MgO;

3) tale sequenza viene conservata anche alla scadenza del terzo giorno di stagionatura [1];

4) a sette giorni di stagionatura viene mantenuta ancora la stessa sequenza registrata dopo due e tre giorni; si rileva un cambiamento nella sequenza in corrispondenza della stagionatura di 28 giorni, nel senso che i valori massimi del carico di rottura e dell'idrossido di calcio spettano ora all'alite contenente Al_2O_3.

Da quanto sopra esposto si può constatare che, a tutte le stagionature considerate, l'alite contenente MgO presenta i più bassi valori del carico di rottura mentre i più elevati spettano, a partire dal secondo giorno di stagionatura, alle aliti contenenti Fe_2O_3 ed Al_2O_3, a conferma [6] dell'influenza esercitata dalle specie presenti in soluzione solida nel silicato tricalcico.

La coincidenza delle sequenze dei valori dei carichi di rottura e delle percentuali di idrossido di calcio nell'ambito di una stessa stagionatura, testimonia inoltre l'esistenza di una correlazione tra i suddetti valori.

I rapporti R = resistenza meccanica/contenuto d'idrossido di calcio risultano differenti da alite ad alite, com'è evidenziato nel grafico in fig. 1 che riporta i valori del carico di rottura in funzione della concentrazione dell'idrossido di calcio. Il valore di R, per un ampio campo di stagionature, risulta più alto per l'alite contenente Al_2O_3; seguono, nell'ordine, l'alite contenente Fe_2O_3, quella contenente MgO ed infine il silicato tricalcico puro.

Conclusioni

In base a quanto sopra esposto si può affermare che esiste, nell'ambito di una stessa stagionatura, una correlazione tra idrossido di calcio prodotto nel corso della reazione di idratazione del silicato tricalcico e di sue soluzioni solide e la resistenza meccanica a com-

pressione esibita da provini confezionati con detti prodotti; infatti provini di più alta resistenza meccanica presentano anche più elevati tenori di idrossido di calcio: tale circostanza si ripete per tutte le stagionature prescelte.

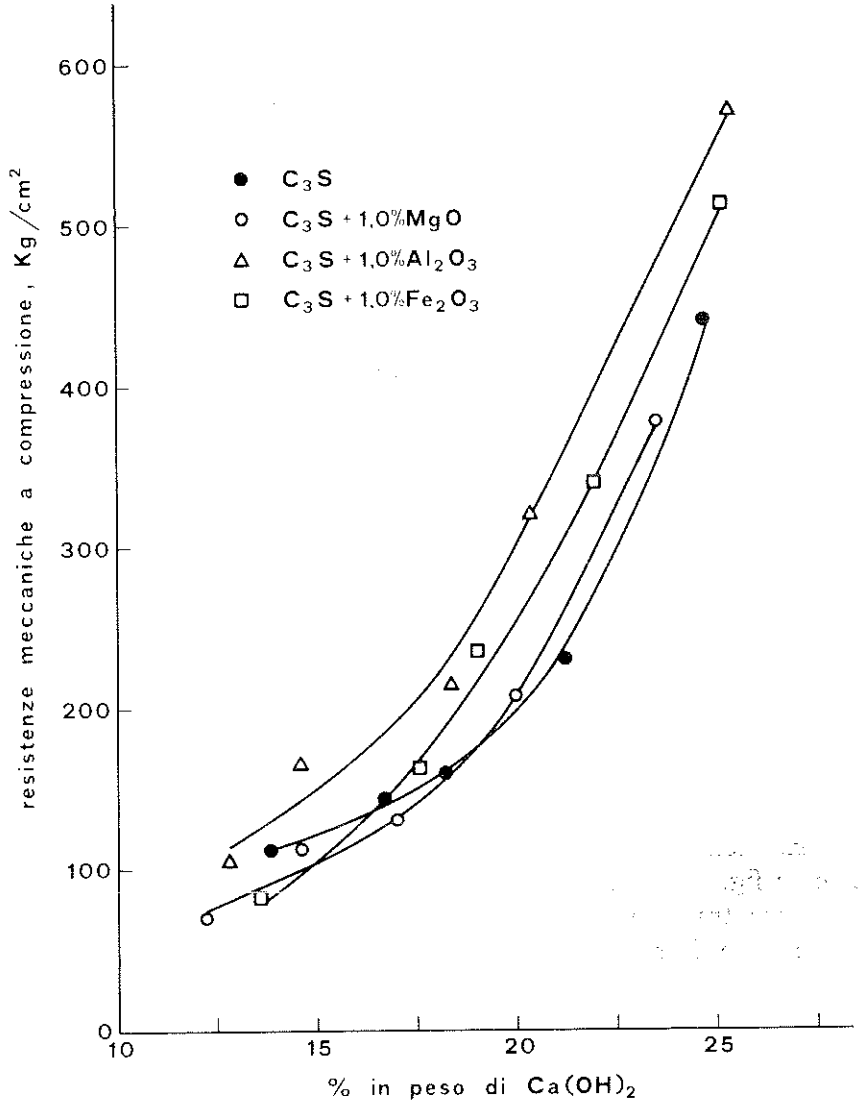


FIG. 1 - Andamento delle resistenze meccaniche in funzione della percentuale di idrossido di calcio.

Si è anche evidenziato che i campioni esaminati presentano differenti valori del rapporto resistenza meccanica/idrossido di calcio, a parità di stagionatura.

Le conclusioni sopra esposte rappresentano una conferma dei risultati ottenuti nelle due precedenti Note [1] [2] e ne costituiscono una estensione ad un intervallo di stagionatura compreso tra 1 e 28 giorni.

Gli Autori desiderano ringraziare il Prof. Sersale per le utili discussioni e il Sig. A. Annetta per l'assistenza tecnica ricevuta.

Istiuto di Chimica Applicata - Facoltà di Ingegneria - Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] SABATELLI V., VALENTI G. L., *Comportamento di soluzioni solide di silicato tricalcico.* Nota I *Aliti ad un componente estraneo,* Rend. Accad. Sc. Fis. e mat. [4], XLII, Napoli, 1975.

[2] VALENTI G. L., SABATELLI V., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico.* Nota II *Aliti a due componenti estranei.* Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. [4], XLII, Napoli, 1975.

[3] COPELAND L. E., HAYES J. C., *Determination of non evaporable water in the portland cement paste,* ASTM Bull. No. 194 (1953).

[4] KANTRO D. L., WEISE C. H., BRUNAUER S., *Paste hydration of betadicalcium silicate, tricalcium silicate and alite,* Symp. Struct. Portland Cement, Spec. Rep. 90, Highway Res. Board, Washington, 309 (1966).

[5] VALENTI G. L., SABATELLI V., *Contributo dell'analisi termoponderale allo studio della stechiometria di idratazione del silicato tricalcico.* Il Cemento, **3** (1974).

[6] SERSALE R., *Hydraulic behaviour of Al, Fe, Mg - bearing Alites,* 6th Int. Symp. Chem. of Chem., Moscow, 1974.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, R. Sersale e C. Corradini.

Tricometrogrammi da modelli di sezione traversa di capelli

Parte I. - Modelli di forma circolare, a segmento di retta, ellittica, fusiforme o « *cis* », « *trans* », ovale bisimmetrica e reniforme

Nota del socio ordinario MARIO GÀLGANO

(Adunanza del 4 dicembre 1976)

RIASSUNTO. — Per quanto riguarda questa prima parte del lavoro (tricometrogrammi da modelli di forma circolare, a segmento di retta, ellittica o « *cis* », « *trans* », ovale bisimmetrica e reniforme di sezioni trasverse di capelli), viene ampiamente dimostrato che negli studi scientifici e nelle ricerche di medicina legale è meglio attenersi alle sezioni istologiche dei capelli e abbandonare l'uso del tricocicloforo.

SUMMARY. — In this first part of our study, which concerns trichometrograms from models of circular, linear, elliptical, fusiform or « *cis* », « *trans* » bisimmetrically oval and reniform shape, drawn from transverse sections of human hair, it is clearly shawn that, in the scientific investigations and in those of forensic medicine, it is better to hold on the histological sections of hair and to drop the use of trichocyclophore.

1. - INTRODUZIONE.

La forma dei capelli è uno dei caratteri antropologici più importanti per la classificazione delle razze umane, ed è usato pure per distinguere le persone fra loro, tanto che viene preso in seria considerazione anche in Medicina legale.

Ritengo quindi non inutile esporre con maggiore ampiezza le mie ricerche intorno ai tricometrogrammi che si ottengono da modelli di sezione trasversa dei capelli, come già mi ero proposto di fare ed avevo esplicitamente annunziato nella nota preliminare del 1975.

In tale nota avevo dimostrato che solo limitate prestazioni si possono ottenere dal tricocicloforo, un apparecchio ideato e descritto da S. SERGI (1936, 1940), e usato largamente in lavori antropologici ed anche in indagini di natura medico-legale, con il quale invece si riteneva di poter facilmente misurare al microscopio gli assi di un

qualunque piano trasverso di un capello, tenuto teso orizzontalmente e ruotato sul suo asse longitudinale con tale apparecchio, e di poter costruire con le misure prese delle figure poligonali, i tricometrogrammi, che sarebbero stati con buona approssimazione l'espressione morfometrica schematica delle sezioni trasverse dei capelli.

Pertanto il presente lavoro è stato fatto con lo scopo di mettere in evidenza, con l'impiego di modelli di forma varia, ma regolare, quali sono gli errori che si commettono con l'uso del tricociclòforo, e di quale o di quali assi si può prendere l'esatta misura, sia come avvertenza per chi volesse usare l'apparecchio in questione, sia come premessa di base per un eventuale altro lavoro (nel quale personalmente non credo), mirante a trovare metodi, i quali consentano, almeno in alcuni casi, di utilizzare le misure ottenute mediante l'uso del tricociclòforo, per costruire curve che approssimino sufficientemente bene la forma delle sezioni trasverse dei capelli.

*
* *

Il presente lavoro sarà svolto soprattutto dal punto di vista antropologico; tuttavia gli argomenti in discorso possono essere trattati anche da un punto di vista puramente matematico, e questo sarà accennato in appendice.

Ringrazio vivamente il Prof. A. FRANCHETTA per il valido aiuto datomi nello svolgimento della parte matematica e il Prof. R. VINCIGUERRA per il suo costante interessamento durante l'elaborazione del lavoro.

2. - USO DEL TRICOCICLÒFORO E COSTRUZIONE DEI TRICOMETROGRAMMI.

Per la comprensione del presente lavoro è necessario dire, sia pur brevemente, come viene usato il tricociclòforo, e come si costruiscono i tricometrogrammi.

Il tricociclòforo permette di far ruotare sul suo asse longitudinale un tratto di capello sufficientemente teso e disposto orizzontalmente (con una estremità a destra e l'altra a sinistra dell'osservatore) sotto l'obiettivo di un microscopio provveduto di micrometro oculare, il che consente di misurare durante la sua rotazione i vari assi — veri o presunti tali, come vedremo — in uno stesso piano trasverso e, con lo spostamento longitudinale, in qualsiasi altro piano parallelo al precedente.

Nell'uso corrente anzitutto si cerca e si misura, mediante il micrometro oculare, l'asse minore (a. m.), vero o presunto del ca-

pello; in questa posizione il capello si dice « azzerato ». Successivamente si ruota il capello di 30° in 30° in senso orario, e si leggono al micrometro oculare le misure a 30°, 60°, 90°, 120° e 150° dall'asse minore;si prendono quindi in tutto sei misure. L'asse maggiore (A. M.), vero o presunto del capello, è di regola ortogonale al minore; ma può trovarsi (cfr. D'AMORE e GÀLGANO, 1963) anche in posizione assai diversa.

Per costruire il tricometrogramma si adopera un modulo, in pratica un cerchio, con sei diametri incrociantisi a 30° fra loro. I diametri si possono suddividere, volendo, in parti uguali, equivalenti ciascuna al valore di 5 μ.

Il modulo viene disegnato con il diametro a 0°-180° disposto orizzontalmente sul foglio. Si suppone [1] che il capello sia simmetrico rispetto all'asse di rotazione, e quindi che il presunto centro della sezione del capello corrisponda al centro del modulo. I valori misurati vengono perciò riportati sopra i corrispondenti diametri del modulo, in modo che ciascuna metà di un valore giaccia sul raggio corrispettivo. L'a. m. viene riportato sul ∅ a 0°-180°; la misura presa a 30° dall'asse minore sul ∅ a 30°-210°; quella a 60° sul ∅ a 60°-240°; quella a 90°, che di regola è l'A. M., sul ∅ a 90°-270°; quella a 120° sul ∅ a 120°-300°, e quella a 150° sul ∅ a 150°-330° del modulo. Si uniscono infine con una linea spezzata i punti che sul modulo rappresentano le estremità delle misure prese sul capello, e si ottiene così una figura poligonale, chiamata tricometrogramma, la quale si credeva finora che rappresentasse schematicamente, sempre con buona approssimazione, la forma della sezione del capello.

3. - FORME DELLE SEZIONI TRASVERSE DEI CAPELLI E MODELLI USATI.

La forma delle sezioni trasverse dei capelli, ottenute con il microtomo, è varia: può essere all'incirca non solo rotondeggiante, ellittica, ovale, reniforme, ma anche affusolata, lobulare, quadrangolare, rettangolare, triangolare con angoli smussati, ecc.; vi sono inoltre forme del tutto asimmetriche (cfr. ad es. LANDRA, 1935-37).

Nelle forme all'incirca rotondeggianti e quadrangolari l'indice $\left(I = \frac{\text{a. m.} \times 100}{\text{A. M.}} \right)$ è più o meno alto (p. es. fino a 99); nelle altre può essere vario (p. es. da un minimo di 29 per le forme ellittiche, a un massimo di 94 per le forme lobulari (da LANDRA, lav. cit.).

[1] Supposizione generalmente errata, sufficiente da sola a far dubitare dell'esattezza del metodo.

Per le ricerche, allo scopo di avere dati confrontabili, ho usato solo modelli di forma regolare, con uno o più assi di simmetria, come gli ellittici, gli ovali bisimmetrici, i reniformi, il quadrato e, fra i triangoli, l'equilatero e quelli isosceli.

Come modelli ovali bisimmetrici ho usato quelli costruiti con due coppie di archi di circonferenza.

Inoltre, per chiarire meglio il mutare della figura dei tricometrogrammi con il variare dell'Indice dei modelli ellittici e ovali bisimmetrici, mi sono servito di forme opposte estreme, come il cerchio e il segmento di retta, e, per gli ovali suddetti, anche delle forme a fuso e di quelle formate da due archi di circonferenza di $r = \frac{\text{a. m.}}{2}$ agli estremi dell'A. M., congiunti da due segmenti di retta paralleli all'A. M.

4. - Impiego dei modelli.

I modelli sono stati talvolta ritagliati su cartoncino e poi posti e ruotati sul modulo, segnandone su di esso il contorno; ma più spesso, per maggiore esattezza, sono stati disegnati direttamente sul modulo. Poiché i modelli erano di forma regolare, simmetrica, non era necessario disegnarli in tutte le sei posizioni indicate al paragrafo 2, il che avrebbe troppo appesantito il disegno, e pertanto sono stati disegnati solo nelle quattro posizioni indispensabili seguenti: dapprima azzerata, con l'a. m. sul ∅ a 90°-270°, e poi ruotata di 30° in 30° in senso orario con l'a. m. successivamente sopra il ∅ a 120°-300°, a 150°-330° e a 180°-0°, e quindi rispettivamente con gli assi a 30°, a 60° e a 90° dall'a. m. sul ∅ a 90°-270°. Nel testo, però, sono stati riprodotti di regola soltanto i tricometrogrammi, talora con il loro modello disegnato per confronto in posizione verticale. Tutti i disegni sono stati eseguiti dall'autore.

Per costruire il tricometrogramma, seguendo l'uso adottato dagli A.A. per i capelli, ho riportato la misura dell'a. m. (vero o presunto tale) del modello sul ∅ a 0°-180° del modulo e le misure successive rispettivamente sopra ∅∅ del modulo a 30°-210°, a 60°-240° e a 90°-270°, ossia nelle posizioni indicate come I, II, III e IV nella mia nota preliminare del 1975.

Dato che il tratto di capello montato sul tricociclòforo si dispone orizzontalmente sotto l'obiettivo del microscopio con una delle sue estremità a sinistra e l'altra a destra dell'osservatore, e dato che si comincia ad azzerarlo, per misurarne prima l'a. m., che si trova in posizione ortogonale rispetto allo sguardo dell'osservatore, e poi,

ruotando il capello in senso orario di 30° in 30°, i successivi assi (veri o apparenti) dello stesso piano trasverso del capello, si può dire che le misurazioni al microscopio vengono tutte eseguite come se si guardasse in direzione del ∅ a 0°-180° del modulo, e che tutte le misure prese sono quelle delle lunghezze di assi disposti sul ∅ a 90°-270° o delle lunghezze di proiezioni di assi (veri o presunti tali), i quali non sono disposti sul ∅ 90°-270°, ma su di una retta parallela al ∅ a 90°-270° e contenuta nel piano ad essa ortogonale, passante per questo ∅ e per il ∅ a 0°-180°. *Pertanto, i disegni del contorno di un modello, nelle posizioni dalla* I *alla* IV, *vanno guardati in direzione del ∅ a* 0°-180° *del modulo, con l'occhio disposto con la palpebra superiore verso il raggio a* 90° *e quella inferiore verso il raggio a* 270° *del modulo,* affinché ci si possa rendere conto di quello che si vede in realtà al microscopio, e se le misure prese sono quelle vere degli assi che si volevano conoscere, o soltanto quelle di proiezioni di assi, per di più non corrispondenti a quelli che si desiderava misurare (si vedano le figg. I 1, I 5 e I 9).

TRICOMETROGRAMMI DEL CERCHIO E DEL SEGMENTO DI RETTA.

Per facilitare la comprensione dei tricometrogrammi risultanti dai modelli ellittici e ovali bisimmetrici, è utile renderci conto anzitutto dei tricometrogrammi che si ottengono dalle due forme estreme ed opposte del cerchio e del segmento di retta.

Il cerchio può rappresentare al limite la forma rotondeggiante della sezione di capelli fortemente lissotrichi, grossi, diritti e pressiché cilindrici, come quelli, ad es., dei Cinesi. Poiché ha simmetria raggiata ad assi, i diametri, tutti eguali, ha I = 100 e il suo tricometrogramma non è altro che il dodecagono regolare inscritto in esso, pure a simmetria raggiata, con 12 assi, di cui, però, soltanto 6 uguali al ∅ della circonferenza (rappresentanti le misure, in questo caso tutte corrispondenti a quelle vere cercate, che si prendono per costruire il tricometrogramma) e gli altri 6 uguali a $d - 2\,s$ (d = diametro; s = saetta). I suoi angoli sono di 150°; esso dà una rappresentazione schematica alquanto approssimata, ma ancora accettabile di una circonferenza, sebbene con area un po' inferiore, pari all'incirca al 95,4935 % di quella del cerchio.

Nel caso di una circonferenza con d = cm 10; lunghezza = cm 31,4159... e area = cm² 78,5398 circa, il dodecagono inscritto in essa ha lati di cm 2,5882, un perimetro di cm 31,0584, un apotema di cm 4,82965 e un'area di cm² 75,00060078, corrispondente a circa il 95,4935 % di quella del cerchio che lo circoscrive.

Il segmento di retta può teoricamente rappresentare la forma della sezione di una lamina sottilissima. Poiché si può immaginare come una forma avente l'A. M. eguale al segmento e l'a. m. ridotto a un solo punto, il mediano, ad esso si può attribuire l' I = 0. Ruotato come già detto sul modulo, facendo coincidere il suo punto mediano col centro di questo, dalle misure che di esso si prendono guardandolo in direzione del ∅ a 0°-180° nelle posizioni della I alla IV, si ottiene un tricometrogramma (fig. I 1) all'incirca a forma di 8, composto da due esagoni regolari ed uguali, disposti lungo il ∅

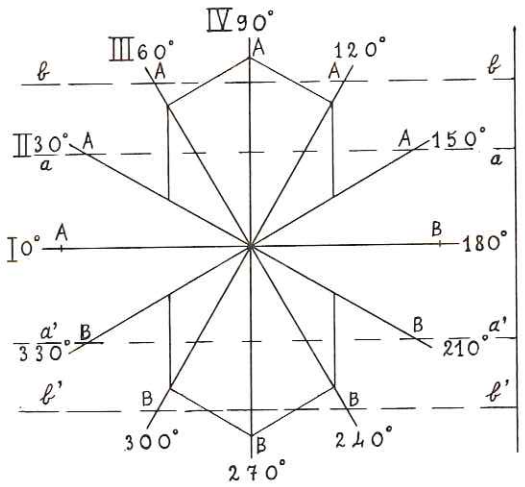


FIG. I 1. - Riproduzione 1 : 2. - Segmento di retta e suo tricometrogramma formato da due esagoni regolari ed uguali, disposti lungo il ∅ a 90° - 270° del modulo e congiunti fra loro per un vertice al centro del modulo.
Dato il segmento AB = cm 10, quand'esso è ruotato in senso orario di 30° e di 150°, guardando il disegno in direzione del ∅ a 0° - 180° del modulo (come si guarda al microscopio un capello montato sul tricociclòforo), si vede e si misura di esso la sua proiezione *a a'*, lunga cm 5, di cui ogni metà, a partire dal centro del modulo, si riporta sopra i ∅∅ a 30° - 210° e a 150° - 330°. Quando il segmento AB è ruotato in senso orario di 60° e di 120°, si vede e si misura di esso la proiezione *b b'*, lunga cm 8,660254..., di cui ogni metà si riporta (come dianzi detto) sopra i ∅∅ a 60° - 240° e a 120° - 300° del modulo. Il segmento *a a'* risulta eguale al cateto A (150°) B (210°) del triangolo rettangolo A (30°) A (150°) B (210°), ossia = AB sen 30° = cm 5; il segmento *b b'* risulta eguale al cateto A (120°) B (240°) del triangolo rettangolo A (60°) A (120°) B (240°), ossia = AB cos 30° = cm 8,660254... Quando il segmento AB è disposto sul ∅ a 0° - 180° del modulo, si vede di esso soltanto un punto, che si riporta al centro di questo ∅. Quando il segmento AB è ruotato di 90°, esso si vede e si misura in tutta la sua lunghezza, ogni metà della quale (= cm 5) si riporta sopra i raggi 0 - 90° e 0 - 270° del modulo. Il tricometrogramma si costruisce riunendo il punto centrale con gli estremi delle misure riportate sopra i raggi del modulo. Si può dimostrare facilmente che i lati dei due esagoni così ottenuti sono tutti = cm 2,5. L'area complessiva dei due esagoni è = cm² 32,47·59...
L'area del tricometrogramma ottenibile da un segmento di retta corrisponde a circa il 41,34·95... % di quella di un cerchio con diametro uguale alla lunghezza del segmento considerato.

a 90°-270° e uniti fra loro per un vertice al centro del modulo. Gli unici dati veri che in questo caso si ottengono sono il punto di unione dei due esagoni, che rappresenta l'a. m. = 0 riportato sul ∅ a 0°-180° del modulo, e la lunghezza del segmento, che rappresenta l'A. M. riportato sul ∅ a 90°-270° del modulo. Si noti, invece, che le misure prese quando il segmento è ruotato sul ∅ a 30°-210° e sul ∅ a 60°-240° del modulo, e quindi meno o più obliquo rispetto all'osservatore, sono quelle, improprie, delle lunghezze delle sue proiezioni sopra una retta virtuale, parallela al ∅ a 90°-270° e contenuta nel piano passante per questo ∅ e per quello a 0°-180°, in direzione del quale guarda l'osservatore.

Il tricometrogramma ottenuto è una rappresentazione del tutto aberrante di un segmento di retta, non solo perché ha una forma del tutto diversa, ma anche perché i due esagoni contengono un'area, la quale, per di più, è piuttosto estesa nel suo insieme.

Gli esagoni hanno angoli di 120° e lati uguali a ¼ della lunghezza del segmento considerato. Per un segmento = cm 10, i lati sono = cm 2,5 e l'area complessiva dei due esagoni è = cm² 32,475952612 50..., essendo l'apotema = cm 2,1650635075... e il perimetro complessivo dei due esagoni = cm 30. La somma delle aree di due esagoni corrisponde a circa il 41,3495 % di quella di un cerchio con d = cm 10.

Tricometrogrammi da modelli ellittici.

Le ellissi hanno due assi ortogonali di simmetria, che s'incrociano nel punto mediano, e che sono di lunghezza più o meno differente fra loro; sono perciò forme bisimmetriche, in cui i quadranti opposti sono uguali e quelli adiacenti speculari, e il loro Indice può variare da < 100 a > 0.

Dal confronto con i dati ricavabili da un cerchio con $d = x$ e da un segmento di retta = x, risulta che le ellissi con A. M. = x e a. m. decrescente hanno un'area variabile da < 100 % a > 0 % di quella di un cerchio, con un rapporto percentuale — lo si noti — corrispondente al valore dell'Indice delle ellissi [2]; mentre i loro tricometrogrammi vanno circa da un'area $< 95{,}4935$% a circa un'area $> 41{,}3495$% di quella del cerchio suddetto.

Se facciamo, ad esempio, x = cm 10, le aree delle ellissi con a. m. decrescente vanno da circa un valore $<$ cm² 78,5398... a circa

[2] Per esempio, le ellissi con I = 80 hanno un'area = 80 %, le ellissi con I = 50 un'area = 50% e le ellissi con I = 20 un'area = 20% di quella del cerchio nel quale si possono inscrivere.

un valore > cm² 0; mentre le aree dei loro tricometrogrammi vanno da circa un valore < cm² 75,00060078 a circa un valore > cm² 32.475 95261250.

Da quanto ho sopra detto, risulta che le aree dei tricometrogrammi, rispetto a quelle delle ellissi corrispondenti, saranno dapprima un po' inferiori (ellissi con Indice molto elevato), a un determinato Indice eguali, e poi tanto più superiori e con un errore tanto più notevole quanto più l'Indice delle ellissi sarà vicino a 0.

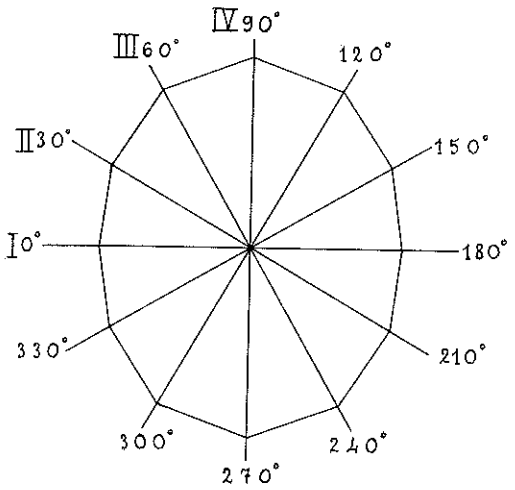


FIG. I 2. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma da ellissi con I = 80. Il tricometrogramma è un dodecagono « ovaloide ».
Con A. M. = cm 10, e quindi con a. m. = cm 8, i suoi vertici distano dal centro del modulo di cm 4 $\left(= \frac{\text{a. m.}}{2} \right)$ sul ∅ a 0° - 180°, di cm 4,27·20... sopra i ∅∅ a 30° - 210° ed a 150° - 330° [cordinate: x (30°) cm 3,69·96... $< \frac{\text{a. m.}}{2}$; y (30°) = cm 2,13·50...], di cm 4,76·96... sopra i ∅∅ a 60° - 240° ed a 120° - 300° [coordinate: x (60°) = cm 2,38·48...; y (60) = cm 4,13·06...] e di cm $5 = \frac{\text{A. M.}}{2}$ sul ∅ 90° - 270°. L'area della ellisse è = cm² 62,83·18...; l'area del tricometrogramma è = cm² 61,29·50..., con una differenza in suo sfavore di cm² 1,53·67... L'area del tricometrogramma è = ≃ 97,55·41... % di quella della sua ellisse, ed è = ≃ 78,04·33... % di quella del cerchio con d = A. M.; mentre l'ellisse ha un'area pari all'80 % di quella del cerchio nel quale è inscrivibile. Si noti che la % dell'area del tricometrogramma rispetto all'area della sua ellisse è già superiore alla % dell'area del tricometrogramma del cerchio (= 95,49·35...%) rispetto a quella (= 100 %) di quest'ultimo.

L'eguaglianza delle due aree si ha con la forma ellittica avente I = ≃ 72,11138 (si veda in Appendice), e ciascuna delle due aree corrisponde al 72,11138... % di quella del cerchio nel quale è inscrivi-

bile l'ellisse con un dato A. M.; per esempio, con A. M. = cm 10, e quindi con a. m. = ≒ cm 7,211138, ciascuna delle due è = ≒ cm² 56,636142 [3] e corrisponde a circa il 72,11138 % di quella del cerchio con d = cm 10 (fig. I 3).

Poiché le ellissi tanto più somigliano ad una circonferenza quanto più il loro Indice è vicino a 100, e tanto più somigliano a una lamina sottilissima e teoricamente ad un segmento quanto più il loro Indice è vicino a 0, nel primo caso dànno tricometrogrammi dodecagoni,

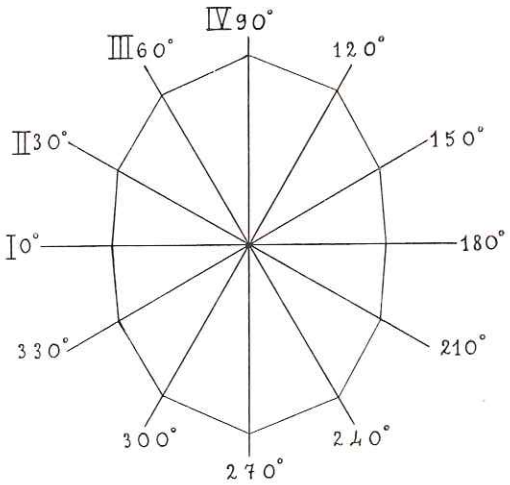


FIG. I 3 - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma da ellisse con I = ≒ 72,11·13·8. - Il tricometrogramma è un dodecagono leggermente « ovaloide », con area uguale a quella della sua ellisse.
Con A.M. = cm 10, e quindi con a. m. = ≒ 7,21·11·38, i suoi vertici distano dal centro del modulo di ≒ cm 3,60·55·69 $\left(= \frac{\text{a. m.}}{2} \right)$ sul ∅ a 0° - 180°, di ≒ cm 4,00·00·11... sopra i ∅∅ a 30°-210° ed a 150°-330° [coordinate: x (30°) = = ≒ cm 3,46·41·11... < $\frac{\text{a. m.}}{2}$; y (30) = ≒ cm 2,00·00·05...], di ≒ cm 4,69·04·19... sopra i ∅∅ a 60° - 240° ed a 120° - 300° [coordinate: x (60°) = ≒ cm. 2,34·52·09...; y (60°) = ≒ cm 4,06·20·22...] e di cm 5 = $\frac{\text{A. M.}}{2}$ sul ∅ a 90° - 270°. Le aree dell'ellisse e del tricometrogramma sono ciascuna = ≒ cm² 56,63·61·42.
Le due aree sono dunque uguali, ossia l'area del tricometrogramma corrisponde al 100 % di quella della sua ellisse; ciascuna di ambedue corrisponde al 72,11·13·8 % di quella del cerchio in cui sono inscrivibili.

[3] Ringrazio il Prof. R. VINCIGUERRA per aver elaborato elettronicamente i dati qui sopra riportati, usando cifre con otto decimali, come era necessario per risolvere con la maggior precisione la formula (si veda in Appendice)
$2\,a\,\sqrt{3\,a^2 + b^2} + 2\,b\,\sqrt{a^2 + 3\,b^2} + \sqrt{(a^2 + 3\,b^2)\,(3\,a^2 + b^2)} \gtrless 4\,\pi\,a\,b$, e aver trovato l'I = ≒ $\frac{\text{cm } 7{,}211138 \times 100}{\text{cm } 10}$ cercato.

che chiamerò « *ovaloidi* », i quali tanto più somigliano al dodecagono inscritto in una circonferenza, quanto più alto è l'Indice dell'ellisse da cui sono stati tratti, mentre nel secondo caso dànno tricometrogrammi dodecagoni, che chiamerò « *con falsa rientranza* », i quali tanto più si avvicinano a quello di un segmento di retta, formato da due esagoni regolari, quanto più basso è l'Indice dell'ellisse da cui sono stati tratti. L'appellativo « con falsa rientranza » deriva dal

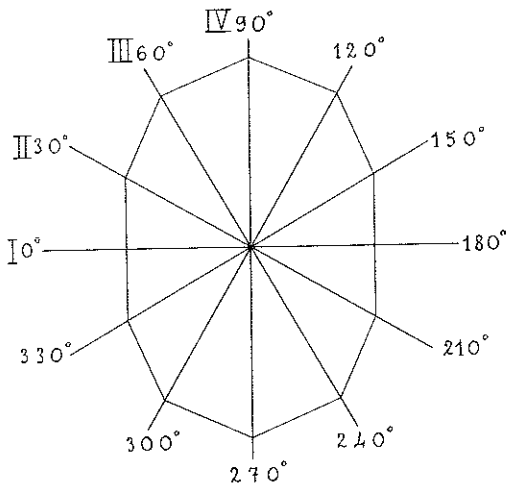


FIG. I 4. - Riproduzione 1 : 2. - Tricometrogramma da ellisse con I = ≏ 65,46·53·67... - Il tricometrogramma ha soltanto 10 lati, e pertanto l'indice della sua ellisse segna il punto di passaggio dai tricometrogrammi dodecagoni « ovaloidi » a quelli dodecagoni con « falsa rientranza ».
Con A. M. = cm 10, e quindi con a. m. = ≏ cm 6,54·65·36·70..., i suoi vertici distano dal centro del modulo di ≏ cm 3,27·32·68... $\left(= \frac{\text{a. m.}}{2} \right)$ sul ∅ a 0° - 180°, di ≏ cm 3,77·96·44... sopra i ∅∅ a 30° - 210° ed a 150° - 330° [coordinate: $x\,(30°)$ = ≏ cm 3,27·32·68... = $\frac{\text{a. m.}}{2}$; $y\,(30°)$ = ≏ cm 1,88·98·22...], di ≏ cm 4,62·91·... sopra i ∅∅ a 60° - 240° ed a 120° - 300° [coordinate: $x\,(60°)$ = ≏ cm 2,31·45·51...; $y\,(60°)$ = ≏ cm. 4,00·89·18...] e di cm. 5 $\left(= \frac{\text{A. M.}}{2} \right)$ sul ∅ a 90° - 270°. L'area dell'ellisse è = ≏ cm² 51,41·63·79...
L'ellisse ha un'area = ≏ 65,46·53.67 % di quella del cerchio nel quale è inscrivibile. L'area del tricometrogramma è un po' superiore al 100 % rispetto a quella della sua ellisse.

fatto che questi tricometrogrammi dodecagoni sono più stretti in corrispondenza del ∅ a 0°-180° del modulo, sul quale viene riportata la misura esatta dell'a. m., mentre sono più larghi — come verrà spiegato in séguito — in corrispondenza di parallele opposte a tale ∅, congiungenti gli estremi delle misure prese quando il modello si tro-

vava con l'A. M. disposto sopra i ∅∅ del modulo a 30°-210° e a 60°-240° (figg. I 2 e I 5).

Abbiamo dunque due serie di tricometrogrammi dodecagoni di figura opposta: quelli ovaloidi da più a meno somiglianti al dodecagono regolare inscritto in una circonferenza, man mano che l'Indice diventa meno alto, e quelli con falsa rientranza da più a meno accentuata, man mano che l'Indice diventa meno basso. Tra le due serie, in ciascuna delle quali la caratteristica principale, ovaloide e con falsa rientranza, si va attenuando man mano che il divario fra gli Indici delle ellissi va diminuendo, esiste — com'era logico supporre — un tricometrogramma di figura intermedia, a 10 lati soltanto, che si ottiene (si veda in Appendice) dalla forma ellittica con Indice $= \sqrt{\frac{3}{7}} \times 100 = \div 65{,}465367$ (per A. M. = cm 10, a. m. = ÷ cm 6.546...) (fig. I 4).

Pertanto, tutte le ellissi con I > ÷ 65,46... dànno tricometrogrammi ovaloidi, e tutte le ellissi con I < ÷ 65,46... dànno tricometrogrammi con falsa rientranza (figg. I 2, I 3 e I 5).

Ciò avviene, perché le sole misure esatte che di esse si possono prendere con l'uso del tricociclòforo sono l'a. m., i cui estremi si vedono quando il modello è in I posizione (ossia con l'A. M. sul ∅ a 0°-180° e l'a. m. sul ∅ a 90°-270°), e perciò vengono riportati, secondo l'uso, sul ∅ a 0°-180° del modulo (corrispondente alla direzione dello sguardo dell'osservatore), e l'A. M., i cui estremi si vedono quando il modello è in IV posizione, e perciò vengono riportati sul ∅ a 90°-270° del modulo; mentre le altre misure, quelle prese quando il modello è in II e in III posizione (e ugualmente quelle prese nelle posizioni VI e V corrispondenti), sono più grandi degli assi a 30°, 60°, 150° e 120° dall'a. m., che si desiderava conoscere, come ora cercherò di spiegare (si veda la fig. I 5).

Si noti anzitutto che le misure esatte dell'a. m. e dell'A. M. si prendono quando questi assi giacciono sul ∅ a 90°-270° del modulo, con il modello rispettivamente in I e in IV posizione, ossia in posizione ortogonale rispetto all'osservatore, che guarda in direzione del ∅ a 0°-180°. L'errore in cui è caduto l'ideatore del tricociclòforo è stato in questo caso di ritenere di poter misurare gli assi a 30°, 60°, 120° e 150° dall'a. m., quando questi venivano successivamente portati sul ∅ a 90°-270°, ruotando il capello di altrettanti gradi, ossia portandolo con l'A. M. nelle posizioni II, III, V e VI, mentre in queste posizioni (si veda la fig. I 4) uno degli estremi degli assi cercati suddetti (quello giacente sul raggio a 90° del modulo nelle posizioni II e III e quello giacente sul raggio a 270° del modulo nelle posizioni V e VI) non è visibile, perché coperto dal contorno del

modello sporgente verso l'osservatore, e l'altro estremo, pur restando allo scoperto, non si può individuare, specialmente al microscopio, nel lungo tratto visibile del contorno del modello, che va dalla parte sporgente di esso fin oltre il raggio a 270° del modulo per le posizioni II e III e fin oltre il raggio a 90° del modulo per le posizioni V e VI. In loro vece si prendono erroneamente i punti opposti e più distanti visibili del contorno, i quali corrispondono ad assi del modello più lunghi e a ∅∅ del modulo più o meno obliqui rispetto al ∅ a 90°-270° di quest'ultimo, sul quale si sarebbero dovute effettuare le misurazioni, e al tempo stesso meno o più obliqui rispetto al ∅ a 0°-180° di osservazione.

Data l'obliquità di tali assi rispetto all'osservatore, non viene misurata la loro lunghezza, ma la lunghezza della loro proiezione sopra una retta virtuale, parallela al ∅ 90°-270° e contenuta nel piano passante per questo ∅ e per quello a 0°-180° di osservazione (si veda la fig. I 5). Non solo la lunghezza degli assi in questione, ma

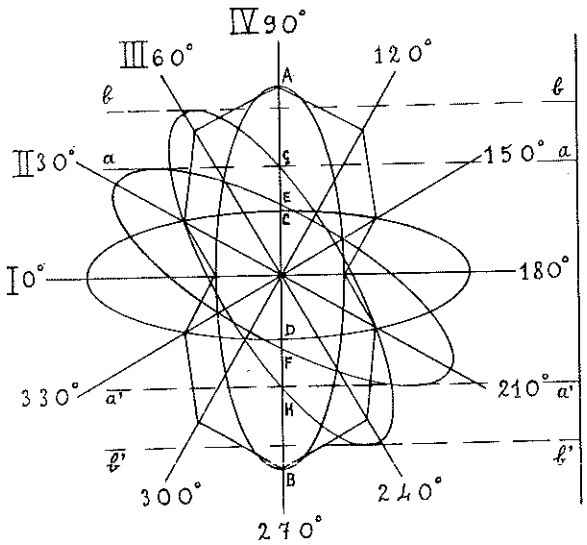


FIG. I 5.

anche quella delle loro proiezioni è sempre maggiore di quella degli assi che si credeva di misurare, ed è tanto maggiore quanto più basso è l'Indice delle ellissi.

Le misure delle proiezioni di tali assi, improprie (non essendo di assi) e maggiori di quelle che si sarebbero volute conoscere, vengono riportate, per costruire il tricometrogramma, sopra i diametri del modulo a 30°-210°, 60°-240°, 150°-330° e 120°-300°, ossia su diame-

tri del modulo in posizioni più oblique, rispetto al ∅ a 90°-270°, di quelle che in realtà si sono potute osservare (si veda la fig. I 5). Pertanto, anche in conseguenza di questo riporto errato, con il diminuire dell'Indice delle ellissi, la figura dei tricometrogrammi si altera progressivamente, di modo che da una serie di forme ovaloidi sempre meno somiglianti a un dodecagono regolare, si passa, attraverso a una figura a 10 lati soltanto, a una serie di forme con falsa rientranza sempre più accentuata. Queste ultime specialmente, essendo tanto diverse dalle ellissi, dànno una rappresentazione schematica non congrua con la forma dei modelli ellittici a basso Indice e con quella delle sezioni trasverse simili dei capelli.

TRICOMETROGRAMMI DA MODELLI « CIS » E « TRANS ».

Prima di passare ad esaminare i modelli ovali bisimmetrici, sarà utile prendere in considerazione modelli di forme estreme opposte non ovali: le forme a fuso, che chiamerò « *cis* », aventi soltanto un

FIG. I 5. - Riproduzione $\simeq$ 1 : 2. - Ellissi con I = 33,(3), nelle posizioni dalla I alla IV, e suo tricometrogramma dodecagono con « falsa rientranza » molto accentuata.
Con A.M. = cm 10, e quindi con a. m. = cm 3,(3), i vertici del tricometrogramma distano dal centro del modulo di cm 1,(6) = $\frac{\text{a. m.}}{2}$ sul ∅ a 0° - 180°, di cm 2,88·48... sopra i ∅∅ a 30° - 210° ed a 150° - 330° [coordinate: x (30°) = = cm 2,49·(99) > $\frac{\text{a. m.}}{2}$; y (30°) = cm 1,44·33...], di cm 4,41·51... sopra i ∅∅ a 60°-240° ed a 120°-300° [coordinate: x (60°) = cm 2,16·61...; y (60°) = cm 3,74·44...] e di cm $5\left(= \frac{\text{A. M.}}{2} \right)$ sul ∅ a 90° - 270°. Quando l'ellisse è disposta con il suo A. M. sul ∅ a 0° - 180° del modulo, si vede e si misura di essa l'a. m., C D, = cm 3,(3), di cui ogni metà (= cm 1,(6); vedi qui sopra) si riporta, a partire dal centro del modulo, sullo stesso ∅. Quando l'ellisse è ruotata in senso orario di 30° e di 150°, si vede e si misura di essa la sua proiezione *a a'*, lunga cm 5,76·92·52... (> dell'asse a 30°, E F, dell'ellisse), di cui ogni metà (= cm 2,88·48...; vedi qui sopra) si riporta, come già detto, sopra i ∅∅ a 30° - 210° e a 150° - 330°. Quando l'ellisse è ruotata in senso orario di 60° e di 120°, si vede e si misura la sua proiezione *b b'*, lunga cm 8,83·02·51... (> dell'asse a 60°, G H, dell'ellisse), di cui ogni metà (= cm 4,41·51...; vedi qui sopra) si riporta, come già detto, sopra i ∅∅ a 60° - 240° e a 120° - 300° del modulo. Quando l'ellisse è ruotata di 90° si vede e si misura l'A. M., A B, = cm 10, ogni metà del quale si riporta sopra i raggi 0 - 90° e 0 - 270° del modulo. Da quanto è stato sopra detto, risulta che il tricometrogramma ha necessariamente la figura di un dodecagono con « falsa rientranza » molto accentuata ed area assai maggiore di quella della sua ellisse. L'area dell'ellisse è = cm² 26,17·99·38...; l'area del tricometrogramma è cm² 39,21·49·25..., con una differenza a suo favore di cm² 13,03·49·86...
L'area del tricometrogramma è circa il 149,78·99·80... % di quella della sua ellisse. L'ellisse ha un'area pari al 33,(3) % di quella del cerchio nel quale è inscrivibile, mentre l'area del tricometrogramma è il 49,92·99·93... % di quella del cerchio suddetto.

raggio R [4] di lunghezza determinata per ogni Indice (r essendo = 0), nelle quali l'A. M. fa da corda a comune dei due archi di raggio R agli estremi dell'a. m., dato dalle saette, e le forme, che chiamerò « *trans* », in cui agli estremi dell'A. M. vi sono due semicirconferenze di $r = \frac{\text{a. m.}}{2}$, congiunte per i loro estremi da due segmenti di retta, più o meno lunghi, passanti per gli estremi dell'a. m. e paralleli fra loro e all'A. M. (R essendo = ∞).

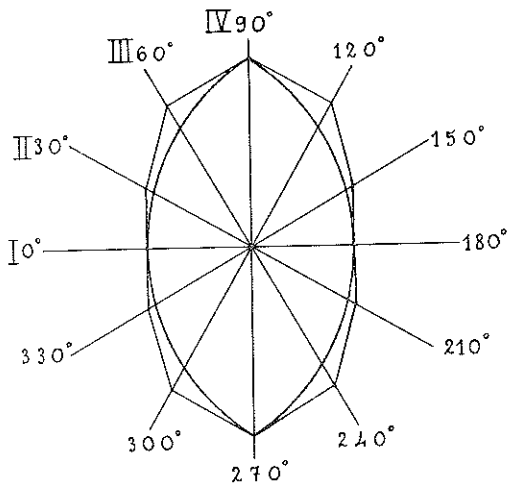


FIG. I 6. - Riproduzione 1 : 2. - Modello fusiforme o « *cis* », disegnato in posizione IV, e suo tricometrogramma. Poiché il modello qui raffigurato ha I = 54,96·99..., il suo tricometrogramma risulta a soli 10 lati e con area un po' superiore a quella della forma da cui è stato ottenuto.
Con A. M. = cm 10, e quindi con a. m. = cm 5,49·69..., la forma « *cis* » in questione ha un R = cm 5,92·21... e un'area = $\simeq$ cm² 38,72·58·91...
L'angolo dal centro di R agli estremi dell'A. M. è = 115°11'1"34"'...; l'angolo discriminante (vedi in Appendice) è la sua metà: 57°35'30"47"'...

Le forme « *cis* » a indice molto elevato, ossia con a. m. di poco inferiore all'A. M., si avvicinano alla forma della circonferenza, e quindi dànno, ruotandole sul modulo, misure poco diverse fra loro e tricometrogrammi nettamente ovaloidi, con minori errori e più simili al dodecagono inscrivibile in una circonferenza. Anche nel caso delle forme « cis » le sole misure vere ed esatte sono quelle che si prendono dell'a. m. e dell'A. M., e che si riportano rispettivamente sul ∅ a 0°-180° e su quello a 90°-270° del modulo; per le altre misu-

[4] $R = (0{,}5 \times s) + \left(0{,}125 \times \frac{C^2}{s}\right)$, in cui s è la saetta e C è la corda.

razioni si può ripetere in via generale quanto è stato già detto per le ellissi e per il segmento di retta (per maggiori precisazioni si veda in Appendice).

Lentamente, con il diminuire dell'Indice, le forme « cis » dànno tricometrogrammi di forma ovaloide sempre meno accentuata, finché quella con Indice = 54,96·99... (fig. I 6) dà un tricometrogramma a soli dieci lati [5]. Le forme « cis » successive, ad Indice ancora più basso, forniscono di nuovo un tricometrogramma dodecagono, ma con falsa rientranza sul ∅ a 0°-180° del modulo e sempre più somigliante a una specie di 8.

I modelli di forma « *trans* », invece, poiché della loro costruzione fan parte due semicerchi di raggio r della massima grandezza possibile $\left(= \frac{\text{a. m.}}{2}\right)$, forniscono solo con Indici notevolmente alti dei tricometrogrammi ovaloidi, e già quello con Indice = 76,37·07... dà un tricometrogramma a soli 10 lati (fig. I 7); al di sotto di questo Indice si ottengono dalle forme « trans » soltanto tricometrogrammi con falsa rientranza sempre più accentuata.

Posto A. M. = x e a. m. decrescente, nei modelli di forma « *cis* » (nei quali $r = 0$) l'a. m. può variare da $< x$ a > 0 e l'R da $> \frac{x}{2}$ a $< \infty$; mentre nei modelli di forma « trans » (nei quali R = ∞) l'a. m. può variare da $< x$ a > 0 e l'r da $\frac{\text{a. m}}{2} < \frac{x}{2}$ ad $\frac{\text{a. m}}{2} > 0$. Ad esempio, con A. M. = cm 10, la forma « cis » con I = 54,96·99... ha l'a. m. = cm 5,49·69..., l'$\frac{\text{a. m}}{2} = s$ = cm 2,74·84... e l'R = cm 5,92·21...; mentre la forma « trans » con I = 76,37·07... ha l'a. m. = cm 7,63·70... e l'$r = \frac{\text{a. m}}{2}$ = cm 3,81·85... Sempre con A. M. = cm 10, nelle forme « cis » quando più sarà I > 54,96·99..., tanto più sarà R < cm 5,92·21... (fino a R > cm 5), e viceversa (R > cm 5,92·21... fino a R < ∞); mentre nelle forme « trans » quanto più sarà I > 76,37·07..., tanto più

[5] Nelle forme « *cis* » e « *trans* » si ha un tricometrogramma a soli 10 lati quando, rispettivamente (si veda in Appendice), $I = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}-3}{13}} \times 100 = \div 54$ e $I = \frac{3+4\sqrt{3}}{13} \times 100 = \div 76$.

Soltanto nelle forme « *cis* » con tricometrogramma a 10 lati sussiste la relazione $\left(R - \frac{a.\,m.}{2}\right) \cos 30° = \frac{a.\,m.}{2}$.

sarà $r >$ cm 3,81·85... (fino a $r <$ cm 5), e viceversa ($r <$ cm 3,81·85... fino a $r > 0$).

Le forme « *cis* » e « *trans* » sono bisimmetriche, come gli ovali che ora esamineremo, i quali si possono considerare come forme intermedie fra tali forme estreme opposte, ossia come forme « cis » ancora più alterate, rispetto alla circonferenza, dall'inserimento di un arco di raggio r agli estremi dell'A. M.

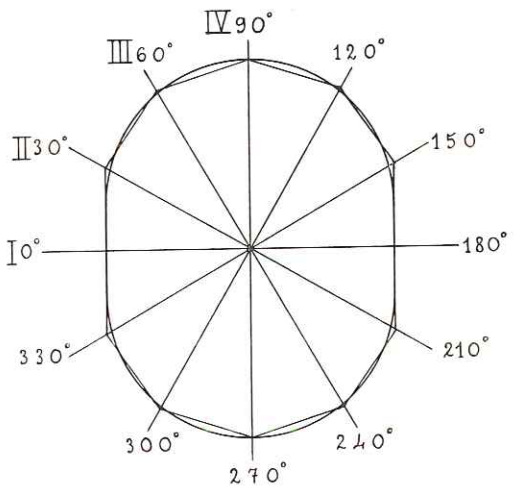


FIG. I 7. - Riproduzione 1 : 2. - Modello di forma « *trans* », disegnato in posizione IV, e suo tricometrogramma. Poiché il modello qui raffigurato ha I = 76,37·07..., il suo tricometrogramma risulta a soli 10 lati e con area leggermente inferiore a quella della forma dalla quale è stato ottenuto.

Con A.M. = cm 10, e quindi con a.m. = cm 7,63·70... ed $r = \frac{\text{a. m.}}{2}$ = cm 3,81·85..., la forma « *trans* » presenta un'area $\doteq$ cm² 63,85·41...

TRICOMETROGRAMMI DA MODELLI OVALI BISIMMETRICI.

Quanto è stato detto per le ellissi vale anche, in linea di massima, per gli ovali bisimmetrici; ma in questi vi è in più un elemento disturbatore, rappresentato dalla maggiore o minore curvatura in prossimità degli estremi dell'A. M.

Per avere dei dati confrontabili, ho usato come modelli quelli costruiti con archi di raggio r in prossimità degli estremi dell'A. M. e con archi di raggio R in prossimità degli estremi dell'a. m.[6] Negli

[6] Ho scelto le due lettere r ed R, essendo sempre $r <$ R e sempre $< \frac{a.\,m.}{2}$, mentre R è sempre $> \frac{a.\,m.}{2}$.

ovali così costruiti il raggio r può variare da > 0 a $< \frac{\text{a. m}}{2}$, e quanto più r è lungo, tanto più il raggio R deve essere correlativamente più lungo di quello che occorrerebbe per raggiungere gli estremi dell'A. M.: questo è appunto il disturbo arrecato dalla presenza e dalla varia curvatura degli archi di raggio r; esso si ripercuote sui tricometrogrammi, in modo da essere — come vedremo — perfino determinante per la loro forma.

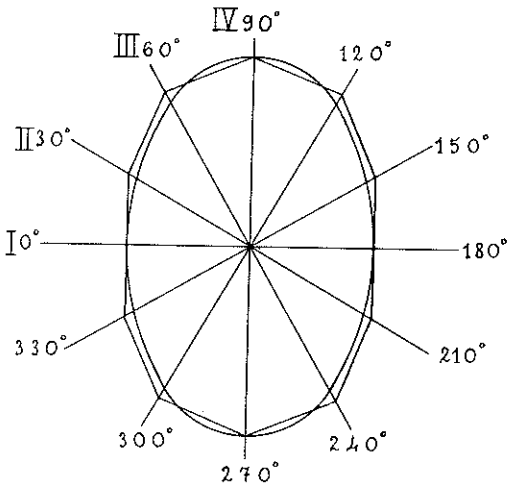


FIG. I 8. - Riproduzione 1 : 2. - Ovale bisimmetrico, disegnato in posizione IV, e suo tricometrogramma. Il modello qui raffigurato ha I = 65,67·03..., e poiché ad esso è stato dato, con un A. M. = cm 10, un r = cm 2,57·33... (R = cm 7,07·49...), il suo tricometrogramma risulta a soli 10 lati e con area un po' superiore a quella dell'ovale dal quale è stato ottenuto.

Dopo l'esame delle forme « cis » e « trans », è facile comprendere perché gli ovali bisimmetrici forniscono tricometrogrammi tutti ovaloidi dall'Indice < 100 fino all'Indice $= 76{,}37{\cdot}07...$ compreso e tricometrogrammi tutti con falsa rientranza dall'Indice $= 54{,}96{\cdot}99...$ fino all'Indice > 0, qualunque sia la grandezza del loro $r\left(\text{da} > 0 \text{ a} < \frac{\text{a. m.}}{2}\right)$: evidentemente nei primi, per la scarsa differenza tra A. M. e a. m., gli archi di raggio r non rappresentano ancora un elemento tanto disturbatore da provocare nei tricometrogrammi un cambiamento di foma da ovaloide a decagona; mentre nei secondi il notevole squilibrio fra la lunghezza dei due assi, con conseguente notevole diminuzione della curvatura degli archi di raggio R (il quale aumenta) agli estremi dell'a. m., è già sufficiente a determinare da solo la forma dodecagona con falsa rientranza dei tricometrogrammi (figg. I 8 e I 9).

Tra i valori dell'Indice sopra indicati, invece, per ciascun Indice avremo una serie di modelli ovali, che daranno ancora tricometrogrammi ovaloidi fino a un certo valore di r, quindi un tricometrogramma a 10 lati soltanto, e successivamente, con valori di r sempre più alti $\left(\text{ossia più vicini al rispettivo } \frac{\text{a. m.}}{2}\right)$, tricometrogrammi

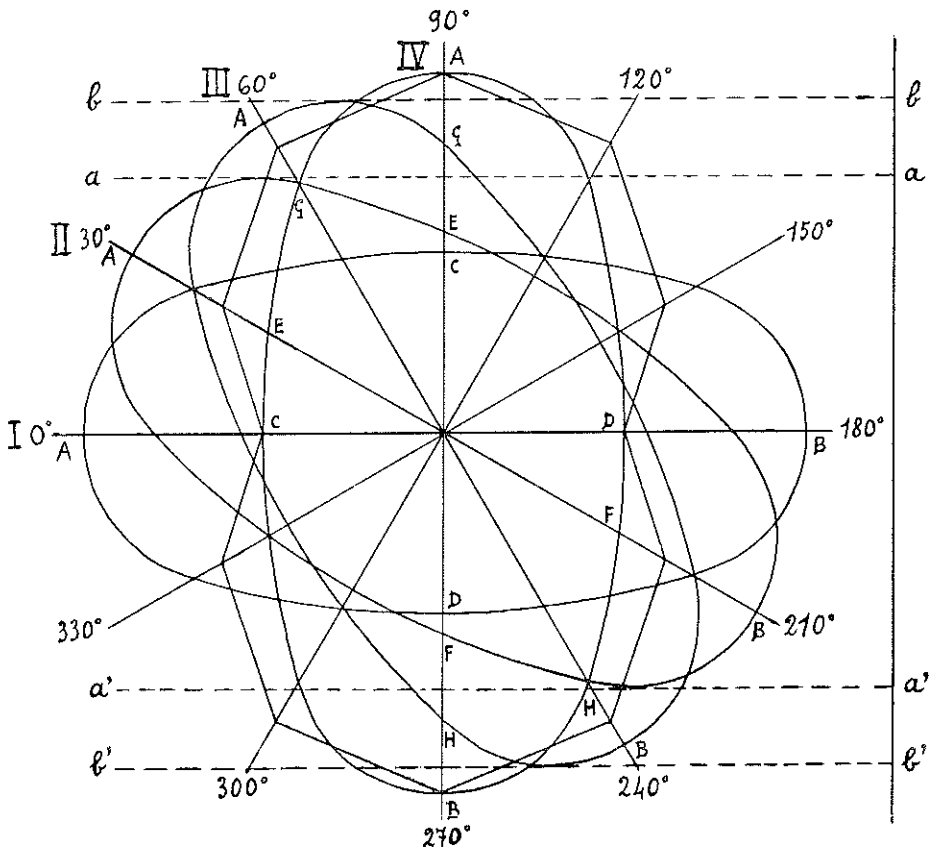


FIG. I 9. - La figura è stata leggermente rimpiccolita. - Ovale bisimmetrico, disegnato nelle quattro posizioni, e suo tricometrogramma. Poiché il modello ha I = 50, il suo tricometrogramma risulta un dodecagono con « falsa rientranza » e con area nettamente superiore a quella dell'ovale.
Il modello è stato costruito con A. M. = cm 10, a. m. = cm 5, r = cm 2,08(3) ed R = cm 12.
Per altre spiegazioni si rimanda al testo sulle ellissi e alla fig. I 5.

con falsa rientranza. Ciò significa che fra i suddetti termini, per ogni Indice, il raggio r, una volta raggiunta e superata una certa lunghezza correlativamente al valore dell'$\frac{\text{a. m.}}{2}$, diventa egli stesso

responsabile (avendo ormai fatto talmente diminuire la curvatura degli archi di raggio R) della modificazione della forma dodecagona ovaloide del tricometrogramma dapprima a decagona e poi a dodecagona con falsa rientranza sempre più accentuata.

Man mano che l'Indice da 76,3707... si va abbassando a 54,9699..., l'effetto di *r* si somma a quello del sempre più alterato rapporto fra la lunghezza dei due assi M. ed m., per cui, prendendo in considerazione serie di modelli ovali d'Indice sempre più piccolo, vedremo che con l'aumentare di *r* più presto si passerà dai tricometrogrammi di forma ovaloide a quelli con falsa rientranza, mentre il modello che dà per tricometrogramma un decagono avrà un *r* sempre più piccolo. Ad esempio, tenendo costante A. M. = cm 10, con l'Indice = 71,0205... avremo a. m. = cm 7,1020... e un tricometrogramma a 10 lati quando *r* = cm 3,1551... (e R = 7,6514...); con l'Indice = 65,6703... avremo a. m. = cm 6,5670... e un tricometrogramma a 10 lati quando *r* = cm 2,5733... (e R = cm 7,0749...) (fig. I 8), e con l'Indice = 60,3201... avremo a. m. = 6,0320... e un tricometrogramma a 10 lati quando *r* = cm 1,7027... (e R = cm 6,4985...).

Tricometrogrammi da modelli reniformi.

I modelli regolarmente reniformi hanno un solo asse di simmetria bilaterale trasversale, dalla concavità alla convessità del contorno, che è l'a. m., e un A. M. ortogonale al precedente, non di simmetria, diviso in due parti uguali dall'a. m., mentre quest'ultimo è di regola intersecato dal primo in un punto più vicino alla concavità. Nei modelli e nei capelli a sezione trasversa siffatta il punto d'intersezione fra i due assi non coincide, di regola, con il centro del modulo.

In questi modelli (ugualmente come nei capelli a sezione reniforme) si può misurare con esattezza solo l'A. M. (in posizione IV), mentre l'a. m. (in posizione I) non si può misurare, perché il suo estremo nella parte più interna della concavità resta nascosto, coperto alla vista dalla parte sporgente ricurva su di esso, la quale è rivolta verso l'osservatore, essendo disposta sul raggio a 0° del modulo [7]. Al posto dell'a. m. si prende sempre una misura che è più grande di quella vera, andando dall'estremo visibile dell'a. m., disposto sull'uno o sull'altro raggio del ∅ a 90°-270° del modulo fino

[7] Soltanto dopo la pubblicazione della mia prima nota ho potuto prendere visione del lavoro del Dott. Massa E. Rabino (1969), nel quale l'A. aveva già rilevato, pur senza entrare in alcun particolare, che non si può misurare, mediante l'uso del tricociclòforo, l'*a. m.* nei capelli a sezione reniforme.

al punto più sporgente sull'insenatura del modello, nella parte di questo disposta sul raggio a 0° (fig. I 10).

Inoltre, poiché le sezioni reniformi hanno al massimo simmetria bilaterale, mentre il modulo ha una simmetria raggiata ad assi tutti eguali, i tricometrogrammi presentano simmetria superiore a quella del modello, e sono pertanto figure ben diverse dalla reniforme: dodecagoni ovaloidi, decagoni e dodecagoni con falsa rientranza, simili

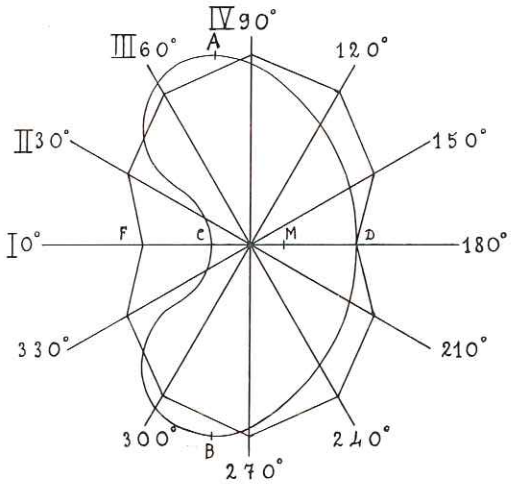


FIG. I 10. - Riproduzione ≏ 1 : 2. - Modello reniforme e suo tricometrogramma. - Il modello ha I = 38; A B è il suo A. M., ma non di simmetria; C D è il suo a. m., di simmetria bilaterale, il cui punto mediano è indicato con M. Il suo tricometrogramma, dato l'Indice del modello, è un dodecagono con « falsa rientranza », in pratica indistinguibile (si confronti ad esempio con la figura precedente), specialmente trattandosi di capelli montati sul tricociclòforo, dai tricometrogrammi ottenibili da forme di sezioni differenti, come le ellittiche, le ovali, le « *cis* » e le « *trans* » aventi un indice adeguato. La sua superficie è assai maggiore di quella del modello, soprattutto perché il suo apparente a. m. F D, errato, risulta assai più lungo di quello vero C D. È inoltre da segnalare che il modello suddetto, ruotato sopra i ∅∅ a 30° - 210° e a 60° - 240°, dà coordinate diverse, nel senso che *y* (30°) e *y* (60°) del quadrante superiore II sono minori (di ≏ cm 1, con un A. M. = cm 10) rispetto a *y* (210°) e *y* (240°) del quadrante inferiore IV, di modo che risulta del tutto arbitrario il riporto in parti uguali sui raggi del modulo 0 - 30° e 0 - 210°, 0 - 60° e 0 - 240° delle misure ottenute dal modello nelle posizioni II e III. Il tricometrogramma ha I = ≏ 56.
Si noti infine che la simmetria del tricometrogramma è superiore a quella soltanto bilaterale del modello.

a quelli ottenibili da modelli ellittici e ovali bisimmetrici, secondo l'Indice più alto o più basso, secondo l'accentuazione maggiore o minore della concavità e secondo la posizione del punto in cui l'asse di simmetria bilaterale, ossia l'a. m., è incrociato dall'A. M.

CONSIDERAZIONI E CONCLUSIONI INTORNO ALLA PRIMA PARTE DEL LAVORO.

Nelle pagine precedenti abbiamo visto che dai modelli ellittici, fusiformi e ovali bisimmetrici al di sotto di un certo Indice si ottengono tricometrogrammi con falsa rientranza, di forma ben diversa da quella che dovrebbero rappresentare e di area più o meno alquanto superiore a quella dei modelli. E purtroppo i tricometrogrammi con falsa rientranza appaiono con una certa frequenza nei lavori degli AA. che hanno usato il tricociclòforo.

Solo dai capelli a sezione rotondeggiante possiamo ottenere tricometrogrammi di forma abbastanza attendibile, se pur con area un po' minore di quella vera.

Per altro esistono e sono abbastanza frequenti nell'umanità i capelli a sezione reniforme, difficilmente individuabili sotto il microscopio con l'uso del tricociclòforo. Inoltre forniscono tricometrogrammi errati, di forme incongrue rispetto alle reniformi, e per di più eguali o simili a quelle dei tricometrogrammi ottenibili dai capelli a sezione all'incirca ellittica, fusiforme od ovale.

I tricometrogrammi delle sezioni reniformi sono quindi in pratica indistinguibili da quelli che si ottengono dalle sezioni di forma rotondeggiante, ellittica, fusiforme ed ovale.

Pertanto dobbiamo concludere che è meglio attenersi, negli studi scientifici e nelle ricerche di Medicina legale, alle sezioni istologiche dei capelli e abbandonare l'uso del tricociclòforo.

*
* *

APPENDICE

Saranno qui presi in esame dal punto di vista puramente matematico tutti i modelli studiati in precedenza dal punto di vista antropologico, eccetto i reniformi, per i quali è sufficiente quanto è stato già scritto intorno ad essi, poiché i loro tricometrogrammi risultano sempre non somiglianti, di forma incongrua, ed hanno simmetria maggiore di quella soltanto bilaterale dei modelli reniformi.

A) - TRATTAZIONE ANALITICA INTORNO ALLE ELLISSI.

1. - *Notazioni e considerazioni preliminari.*

Indichiamo con z l'asse del capello, con α un piano perpendicolare a z, con O il punto d'intersezione di z con α.

Detto C il contorno della sezione del capello con α, supporremo, nelle considerazioni che seguono, che: 1) C intersechi ogni sua tangente soltanto nel punto di contatto; 2) che C possieda due assi di simmetria ortogonali fra loro, passanti per O. Chiameremo assi di C i segmenti intercettati da C su x e y. Ove i due assi siano disuguali, supporremo che l'asse maggiore sia quello situato su x.

Assumiamo O come origine e x, y come assi di un riferimento levogiro del piano α, e su un piano α' (foglio del disegno) fissiamo un riferimento cartesiano levogiro di origine O' e assi x', y'.

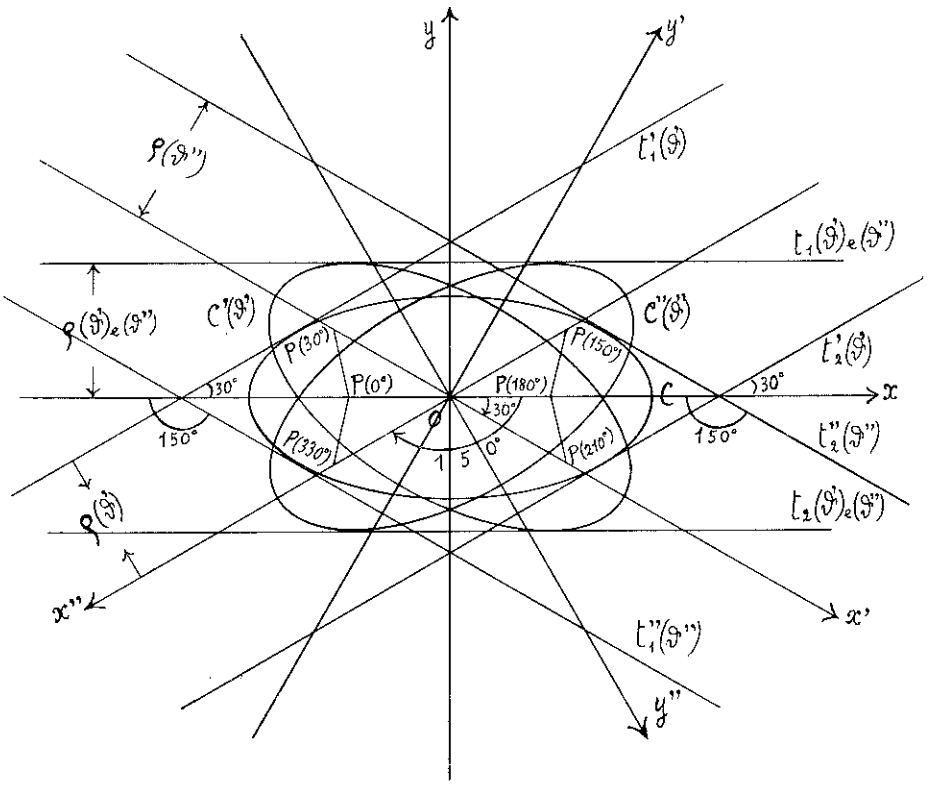


FIG. A 1. - Ellisse con I = 50, A. M. = cm 10 e a. m. = cm 5; riproduzione $\doteq$ 1 : 2. - L'ellisse C, disposta con l'A. M. lungo l'asse x, viene ruotata in senso orario prima di 30° (= ϑ') in C' e poi di 150° (= ϑ'') in C'', ossia in posizione simmetrica a C'. - C', ruotata in senso antiorario di 30° (= ϑ'), si riporta in C e le tangenti t_1, t_2 si portano t'_1, t'_2; C'' ruotata in senso antiorario di 150° (= ϑ'') si riporta ugualmente in C e le tangenti t_1, t_2 (a comune con C') si portano in t_1'', t_2''. Pertanto la distanza ρ è $\doteq$ cm 3,30 sia per 30° che per 150°. Tale distanza viene riportata, a partire da 0, rispettivamente sopra i semiassi negativi di x' (30°) e x'' (150°); gli estremi dei due segmenti ottenuti sono P (30°) e P (150°). Questi due punti sono simmetrici fra loro e, rispettivamente, con P (330°) e P (210°), essendo pure la loro distanza da $0 = \rho = \doteq$ cm 3,30.
Nella figura sono stati segnati anche i punti P (0°) e P (180°), rappresentanti gli estremi dell'a. m., e sono stati riuniti P (0°) con (P (30°) e P (330°), P (180°) con P (150°) e P (210°), per mostrare che da una ellisse con I $<$ $\doteq$ 65,46 si ha un tricometrogramma con « falsa rientranza ».

Ciò posto, fissato comunque un angolo ϑ, consideriamo il punto $P(\vartheta)$ del piano α' ottenuto nel modo seguente.

Si fa ruotare C intorno ad O dell'angolo ϑ in senso destrogiro. Detta $C(\vartheta)$ la curva così ottenuta, si conducono le tangenti $t_1(\vartheta)$, $t_2(\vartheta)$ a $C(\vartheta)$ parallele all'asse x. Si misura la distanza $\rho(\vartheta)$ di una delle due rette $t_1(\vartheta)$, $t_2(\vartheta)$ dall'asse x (da O). Sulla semiretta ottenuta ruotando il semiasse negativo di x' dell'angolo ϑ intorno ad O' in senso orario si segna il punto $P(\vartheta)$ avente distanza $\rho(\vartheta)$ da O' (fig. A 1).

Il tricometrogramma è la poligonale Δ che ha per vertici $P(0°)$, $P(30°)$, $P(60°)$, $P(90°)$, $P(120°)$, $P(150°)$, $P(180°)$, $P(210°)$, $P(240°)$, $P(270°)$, $P(300°)$, $P(330°)$.

Se D è la curva descritta da $P(\vartheta)$ al variare comunque di ϑ, Δ è ovviamente inscritta in D.

Per lo studio della curva D e della poligonale Δ sono utili le osservazioni seguenti.

Osservazione 1ª - $\rho(\vartheta)$ è uguale alla distanza di O da una delle tangenti $t_1'(\vartheta)$, $t_2'(\vartheta)$ a C, formante angolo ϑ con l'asse x.

Infatti, facendo ruotare $C(\vartheta)$ dell'angolo ϑ in senso antiorario intorno ad O, $C(\vartheta)$ si riporta in C e le rette $t_1(\vartheta)$, $t_2(\vartheta)$ si portano in $t_1'(\vartheta)$, $t_2'(\vartheta)$ (fig. A 1).

Osservazione 2ª - Se s'immagina α' sovrapposto ad α, in modo che gli assi x', y' siano sovrapposti agli assi x, y, il punto $P(\vartheta)$ è il simmetrico del piede della perpendicolare condotta da O alla tangente $t(\vartheta)$ (formante angolo ϑ con l'asse x) rispetto alla seconda bisettrice degli assi.

Ne segue che D è la curva simmetrica, rispetto alla detta bisettrice degli assi, della podaria di O rispetto a C (luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da O alle tangenti di C).

2. - *Caso in cui C sia l'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $(a \geq b)$.

Procediamo anzitutto al calcolo di $\rho(\vartheta)$, facendo uso dell'osservazione 1ª.

Una retta formante angolo ϑ con l'asse x ha equazione normale della forma

$$x \operatorname{sen} \vartheta - y \cos \vartheta + \delta = 0 \tag{1}$$

ove δ è uguale, in valore assoluto, alla distanza della retta da 0. Se la retta è tangente a C, si ha pertanto

$$\rho(\vartheta) = |\delta| .$$

Per imporre la tangente della retta a C, ricavo y dalla (1) e sostituisco nell'equazione di C. Si ottiene l'equazione in x

$$(a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)\, x^2 + 2 a^2 \delta x \operatorname{sen} \vartheta + a^2 \delta^2 - a^2 b^2 \cos^2 \vartheta = 0 .$$

La retta è tangente a C se il discriminante di questa equazione è zero. Si ottiene così la relazione

$$\delta^2 a^4 \operatorname{sen}^2 \vartheta - (a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)(a^2 \delta^2 - a^2 b^2 \cos^2 \vartheta) = 0$$

dalla quale si ricava

$$\delta^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta .$$

Si ha quindi

$$\rho(\vartheta) = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}\,. \tag{2}$$

Ne segue, ovviamente, che le coordinate di $P(\vartheta)$ sono date da

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= -\cos\vartheta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}\,, \\ y(\vartheta) &= \operatorname{sen}\vartheta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} \end{aligned} \tag{3}$$

e, in particolare, che i vertici della poligonale Δ contenuti nel secondo quadrante hanno coordinate

$$\begin{aligned} x(0^\circ) &= -b & , \quad y(0^\circ) &= 0 \\ x(30^\circ) &= -\frac{\sqrt{3(a^2 + 3b^2)}}{4} & , \quad y(30^\circ) &= \frac{\sqrt{a^2 + 3b^2}}{4} \\ x(60^\circ) &= -\frac{\sqrt{3a^2 + b^2}}{4} & , \quad y(60^\circ) &= \frac{\sqrt{3(3a^2 + b^2)}}{4} \\ x(90^\circ) &= 0 & y(90^\circ) &= a \end{aligned} \tag{4}$$

Si osservi ora che il lato $P(0^\circ)P(30^\circ)$ di Δ formerà con l'asse x un angolo $\gtreqless 90^\circ$ secondo che

$$|x(30^\circ)| \gtreqless |x(0^\circ)|\,,$$

ossia, per la (4),

$$-\frac{\sqrt{3(a^2 + 3b^2)}}{4} \gtreqless b$$

o ancora, ponendo

$$I = \frac{b}{a}\,,$$

secondo che

$$I \gtreqless \sqrt{\frac{3}{7}} = \sim 0{,}65465367\,.$$

Pertanto Δ ha soltanto 10 lati se

$$I = \sim 0{,}65465367\,,$$

e presenta in $P(0^\circ)$ e in $P(180^\circ)$ la concavità volta verso l'esterno se

$$I < \sim 0{,}65465367\,.$$

Dalla (4) si deduce poi immediatamente che l'area di Δ è data da

$$\frac{1}{4}\left(2a\sqrt{3a^2 + b^2} + 2b\sqrt{a^2 + 3b^2} + \sqrt{(a^2 + 3b^2)(3a^2 + b^2)}\right);$$

ed essendo $\pi a b$ l'area dell'ellisse, il confronto fra l'area del tricometrogramma e quella della rispettiva ellisse si può eseguire con la formula

$$2a\sqrt{3a^2 + b^2} + 2b\sqrt{a^2 + 3b^2} + \sqrt{(a^2 + 3b^2)(3a^2 + b^2)} \gtreqless 4\pi a b\,.$$

Passiamo ora allo studio della curva D. Per l'osservazione 2ª, essa è la simmetrica, rispetto alla seconda bisettrice degli assi, della podaria dell'ellisse C rispetto al suo centro O. Le proprietà di D si riportano quindi senz'altro a quelle, ben note, della detta podaria

Volendo procedere direttamente, si osserverà che, dette x, y le coordinate di $P(\vartheta)$, si ha

$$\rho(\vartheta) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\vartheta = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen}\vartheta = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene per D l'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2 \tag{5}$$

Dalla (5) si deduce che, se $a = b$, e quindi C è una circonferenza, D è la curva rappresentata dall'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$$

che, eliminando il fattore $x^2 + y^2$, si scrive nella forma

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Pertanto, D coincide con C.

Se poi $b = 0$, sicché C si riduce al segmento di lunghezza $2a$ dell'asse x, simmetrico rispetto ad O, l'equazione (5) diventa

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2,$$

ossia

$$x^2 + y^2 = \pm a y,$$

per cui D risulta spezzata nelle due circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 = a y \quad , \quad x^2 + y^2 = -a y,$$

il che spiega come da un segmento di retta, pensabile al limite come una ellissi ridotta al solo A. M., si ottenga un tricometrogramma formato da due esagoni regolari.

Esaminiamo ora l'andamento di D nei punti $P(0°)$ e $P(180°)$. Intersecando la D con la retta $x = -b$ si ottiene l'equazione

$$(b^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 + b^4$$

ossia

$$2 b^2 y^2 + y^4 = a^2 y^2 \tag{9}$$

le cui soluzioni forniscono le ordinate dei punti d'intersezione.

La (9) ha la soluzione $y = 0$ doppia, e ciò significa che D è tangente in P (0°) alla retta $x = -b$.

Eliminata questa soluzione, la (9) si riduce a

$$y^2 = a^2 - 2b^2 .$$

Pertanto, se

$$a^2 - 2b^2 \leq 0$$

non si hanno altre intersezioni fra D e la retta $x = -b$, ossia la D ha l'andamento 1 (vedi fig. A 2). Se invece

$$a^2 - 2b^2 > 0$$

si hanno altre intersezioni e quindi la D ha l'andamento 2 (vedi fig. A 2).

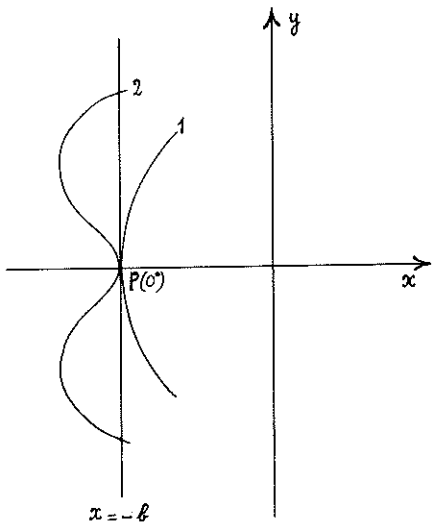


FIG. A 2. - Riproduzione 1 : 2. - Spiegazione nel testo.

Quindi D ha l'andamento 1 o 2 secondo che

$$I = \frac{b}{a}$$

sia non minore o minore di

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \div 0{,}70710670 .$$

B) TRATTAZIONE ANALITICA INTORNO AGLI ALTRI CASI CONSIDERATI (forme « *cis* », « *trans* » e ovali bisimmetriche).

1. - *Premessa*[8].

Osserviamo che se γ è un arco della circonferenza di centro nel punto $\Omega(o, -c)$ e raggio $r\,(c > 0,\ r > 0)$, si ha, con le notazioni della fig. B 1,

$$\rho(\vartheta) = \overline{OS}\,.$$

Ma

$$\overline{OS} = \overline{QT} = \overline{\Omega T} - \overline{\Omega Q}\,.$$

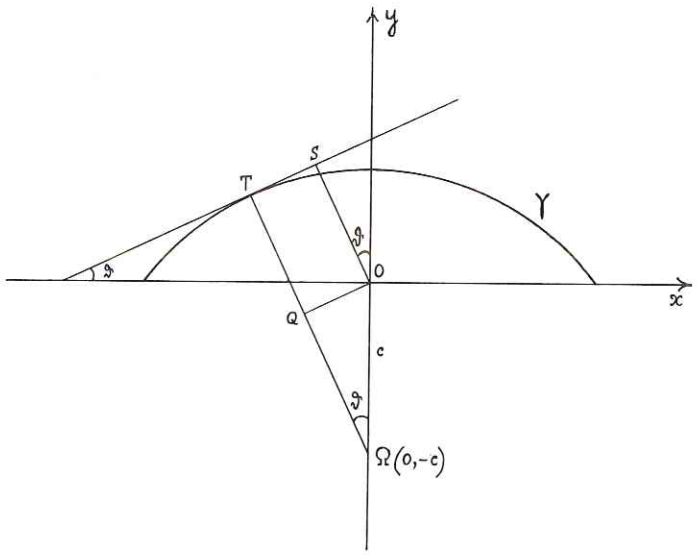


FIG. B 1. - Riproduzione 1 : 2. - Spiegazione nel testo.

Essendo $\Omega T = r$, $\Omega Q = c \cos \vartheta$, si conclude che

$$\rho(\vartheta) = r - c \cos \vartheta \tag{1}$$

e conseguentemente

$$x(\vartheta) = -(r - c \cos \vartheta) \cos \vartheta\,,\ y(\vartheta) = (r - c \cos \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta\,. \tag{2}$$

Osserviamo, in secondo luogo, che se γ' è un arco della circonferenza di centro nel punto $\Omega'(-c',\ o)$ e raggio r' (con $c' > 0$) si ha, con le notazioni della fig. B 2,

$$\rho(\vartheta) = \overline{OS} = \overline{OQ} + \overline{QS} = \overline{OQ} + \Omega' T\,.$$

[8] Si tenga presente quanto è stato scritto nel § 1 intorno alle ellissi.

Ma

$$O\overline{Q} = c' \text{ sen } \vartheta\,, \quad \overline{\Omega' T} = r'.$$

Quindi

$$\rho(\vartheta) = r' + c' \text{ sen } \vartheta \tag{3}$$

e conseguentemente

$$x(\vartheta) = -(r' + c' \text{ sen } \vartheta) \cos \vartheta\,, \quad y(\vartheta) = (r' + c' \text{ sen } \vartheta) \text{ sen } \vartheta\,. \tag{4}$$

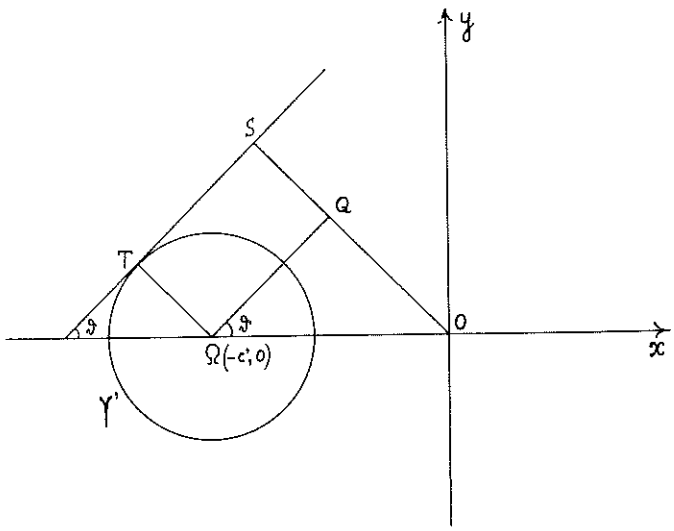


FIG. B 2. - Riproduzione 1 : 2. - Spiegazione nel testo.

2. - *Caso « cis »*.

Nelle forme a fuso o « *cis* », a causa della mancanza di una curva agli estremi dell'asse maggiore, man mano che il modello viene ruotato in senso orario dal ∅ a 0°-180° (sul quale era stato dapprima disposto con il suo asse maggiore) a quello a 90°-270° del modulo, l'effetto sulla forma del tricometrogramma dei due archi di circonferenza, dei quali è costituito, va attenuandosi e alfine si annulla, tanto più tardi quanto più alto è il suo Indice, e viceversa.

L'angolo di rotazione discriminante è dato da arc sen $\frac{a}{R}$ (ossia dall'angolo che ha per seno $\frac{a}{R}$, in cui a indica il semiasse maggiore ed R il raggio dei due archi di circonferenza del modello). Per una rotazione del modello minore di tale angolo il tricometrogramma risente dell'effetto dei due archi di circonferenza; per una rotazione uguale o maggiore di tale angolo il modello « *cis* » si comporta, nei confronti del suo tricometrogramma, come un semplice seg-

mento di retta, lungo quanto il suo asse maggiore, centrato con il suo punto mediano sul modulo.

L'angolo discriminante è di circa 77°,19'... per un modello d'Indice percentuale = 80, di circa 57°,35'... per un modello con I = $\div$ 54,96·99... e di circa 28°,4'... per un modello con I = 25. — Il valore dell'angolo discriminante in gradi coincide con quello dell'Indice per I = $\div$ 69,23... —

Quando l'angolo di rotazione del modello è < arc sen $\frac{a}{R}$, valgono le considerazioni e le formule qui di séguito indicate.

In questo caso sono da considerare tangenti alla curva C non solo le tangenti ai due archi che costituiscono C, ma anche le rette per gli estremi dell'asse su *y*, comprese negli angoli disegnati nella fig. B 3.

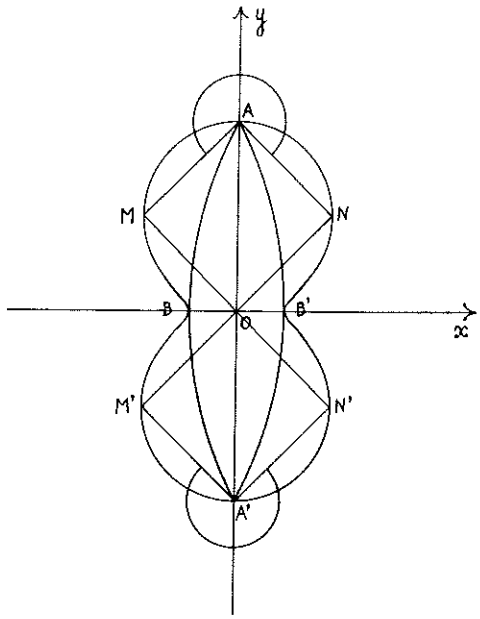


FIG. B 3. - Riproduzione 1 : 2. - Spiegazione nel testo. Il modello a fuso o « *cis* » qui rappresentato ha I = 25. In analogia con questo Indice, le circonferenze del diametro A O, A' O (uguale al semiasse maggiore) sono incomplete; esse vanno rispettivamente dal raggio 0 - 25° del II quadrante al raggio 0 - 155° del I quadrante e dal raggio 0 - 205° del IV quadrante al raggio 0 - 335° del III quadrante (se l'Indice fosse stato = 0, le due circonferenze sarebbero state complete: vedi il caso del segmento di retta). Per le restanti parti la curva D presenta una forte rientranza.
Con un modello avente A. M. = cm 10, e quindi a. m. = cm 2,5, R è uguale a cm 10,625. Le misure per il raggio 0 - 20° sono: ρ (20°) = cm 1,81·53...; x (20°) = cm 1,70·58..., e y (20°) = cm 0,62·08·92... Le misure per il raggio 0 - 15° sono ρ (15°) = cm 1,56·94...; x (15°) = cm 1,51·59..., e y (15°) = cm 0,40·62... Le misure per il raggio 0-7°30' sono: ρ (7°30') = cm 1,33·01...; x (7°30') = cm 1,31·88, e y (7°30') = cm 0,17·36...

Conseguentemente, la podaria di C rispetto ad O sarà costituita dalle podarie M B M', N B N' dei due archi di C e dagli archi M A N, M' A' N' delle circonferenze di diametri A O, A' O.

La curva D è la simmetrica della detta podaria, rispetto alla seconda bisettrice degli assi.

Indichiamo con a, b i semiassi di C, con $\Omega(o, -c)$ il centro dell'arco di C situato al di sopra dell'asse x, con R il raggio di tale arco. Si ha allora (vedi fig. B 4).

$$\overline{\Omega A}^2 = \overline{\Omega O}^2 + \overline{O A}^2.$$

Essendo

$$\overline{\Omega A} = R\,, \quad \overline{\Omega O} = R - b\,, \quad \overline{O A} = a\,,$$

si ha dunque

$$R^2 = a^2 + (R - b)^2.$$

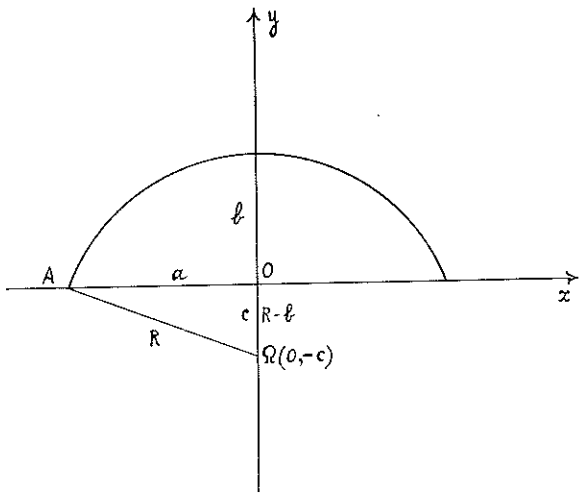


FIG. B 4. - Riproduzione 1 : 2. - Spiegazione nel testo. Il modello a fuso qui rappresentato ha I = $\doteq$ 69,23...
Con A. M = cm 10, e quindi con a. m. = $\doteq$ cm 6,923..., R = $\doteq$ cm 5,34...
L'angolo discriminante è = $\doteq$ 69°,23'...

Di qui segue che

$$R = \frac{a^2 + b^2}{2\,b}$$

mentre

$$c = R - b = \frac{a^2 + b^2}{2\,b}$$

Dalla (1) della Premessa si ottiene allora

$$\rho(\vartheta) = \frac{a^2(1 - \cos\vartheta) + b^2(1 + \cos\vartheta)}{2\,b}$$

e dalla prima delle (2)

$$|x(\vartheta)| = \frac{a^2(\cos\vartheta - \cos^2\vartheta) + b^2(\cos\vartheta + \cos^2\vartheta)}{2\,b}$$

Da quest'ultima relazione, si ha, per $\vartheta = 30°$,

$$|x(30°)| = \frac{(2\sqrt{3}-3)a^2 + (2\sqrt{3}+3)b^2}{8b}. \tag{5}$$

Il tricometrogramma sarà ovaloide, a 10 lati, o con falsa rientranza, secondo che

$$|x(30°)| \lesseqgtr b,$$

ossia, tenendo conto della (5), secondo che

$$(2\sqrt{3}-3)a^2 + (2\sqrt{3}+3)b^2 \lesseqgtr 8b^2$$

o, ancora, secondo che

$$\frac{b^2}{a^2} \gtreqless \frac{2\sqrt{3}-3}{-2\sqrt{3}+5} = -\frac{4\sqrt{3}-3}{13}.$$

Si conclude che si presenterà l'uno o l'altro dei casi anzidetti secondo che

$$I \gtreqless \sqrt{\frac{4\sqrt{3}-3}{13}} \doteq 0{,}549699.$$

Quando invece l'angolo di rotazione del modello è uguale o maggiore di arc sen $\frac{a}{R}$, per la restante parte del suo tricometrogramma la distanza degli altri vertici dal centro del modulo e le loro coordinate sugli assi x e y vanno calcolate con le formule trigonometriche per i triangoli rettangoli, di cui si conosce l'ipotenusa e l'angolo al centro del modulo, ossia con le formule seguenti: $\rho(\vartheta) = a$ sen ϑ; $x(\vartheta) = \rho(\vartheta)$ cos ϑ, e $y(\vartheta) = \rho(\vartheta)$ sen ϑ.

3. - *Caso « trans »*.

In questo caso la podaria di C rispetto ad O è costituita dalle podarie delle due semicirconferenze che fanno parte di C, giacché le podarie dei due segmenti che completano C si riducono ai punti B e B′ della fig. B 5.

Detti: r il raggio delle due semicirconferenze, c la distanza dei loro centri da O, a e b i semiassi di C, si ha

$$a = r + c, \quad b = r.$$

D'altra parte, dalla (4) della Premessa, si ha, per $\vartheta = 30°$,

$$|x(30°)| = \left(r + \frac{1}{2}c\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r + c) = \frac{\sqrt{3}}{4}(a + b).$$

Ne segue che

$$|x(30°)| \lesseqgtr b$$

secondo che

$$I = \frac{b}{a} \cong \frac{3 + 4\sqrt{3}}{13} = \div 0{,}763707 .$$

Nei tre casi, il tricometrogramma ha forma ovaloide, o possiede solo 10 lati, o presenta una falsa rientranza.

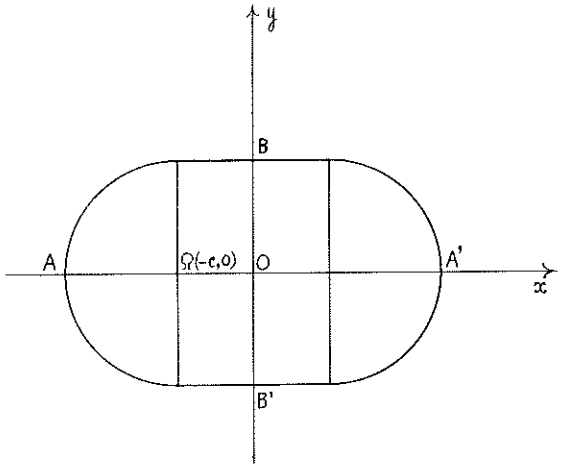


FIG. B 5. - Riproduzione 1 : 2. - Spiegazione nel testo. Il modello « trans » qui rappresentato ha un I di poco inferiore a 60.

4. - *Ovali bisimmetrici.*

In questo caso la podaria di C rispetto ad O è formata dalle podarie dei due archi aventi centro sull'asse y e dei due archi aventi centro sull'asse x, che compongono C. I due archi della podaria si raccordano nel punto M della fig. B 6 e negli analoghi situati negli altri quadranti.

Detti: a, b i semiassi di C, R ed r i raggi degli archi anzidetti, con le notazioni della fig. B 6 si ha

$$\Omega\overline{\Omega'}^2 = O\Omega^2 + \overline{O\Omega'}^2 .$$

Ma

$$\overline{\Omega\Omega'} = \overline{\Omega T} - \overline{\Omega' T} = R - x$$

$$\overline{O\Omega'} = a - r , \quad O\Omega = R - b .$$

Pertanto

$$(R - r)^2 = (a - r)^2 + (R - b)^2$$

ossia

$$2 r R - 2 a r - 2 b R + a^2 = 0 .$$

Da questa relazione fra r, R, a, b si può ricavare uno di questi numeri, quando siano noti gli altri tre.

L'angolo α della fig. B 6 è determinato dalla relazione

$$tg\ \alpha = \frac{a - r}{R - b}$$

Se $\alpha < 30°$, ossia se

$$\frac{a - r}{R - b} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

la tangente a C formante angolo di 30° con l'asse x toccherà l'arco A T, e quindi $x(30°)$ si calcolerà con la formula (4) della Premessa.

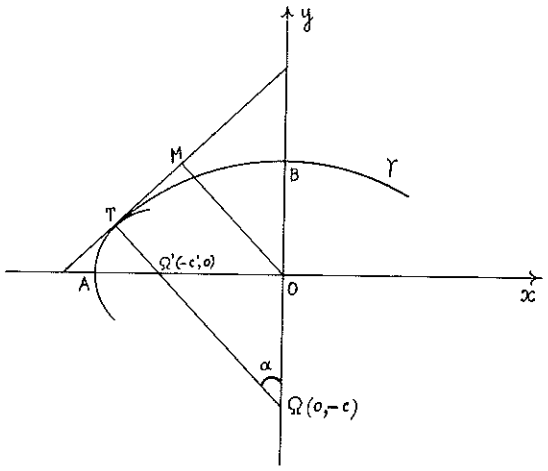


FIG. B 6. - Riproduzione 1 : 2. - Spiegazione nel testo. Il modello ovale bisimmetrico qui rappresentato ha I = $\approx$ 60,32·01...
Con A. M. = cm 10, e quindi con a. m. $\approx$ = cm 6,032..., il modello è stato costruito con r = cm 1,70·27... ed R = cm 6,49·85... Il suo tricometrogramma è decagono.

Se invece $x > 30°$, ossia

$$\frac{a - r}{R - b} > \frac{\sqrt{3}}{3},$$

la detta tangente a C toccherà l'arco T B, e quindi $x(30°)$ si calcolerà con la formula (2) della Premessa.

Come negli altri casi, il confronto tra $|x(30°)|$ e b permetterà di stabilire se il tricometrogramma è ovaloide, o ha 10 lati soltanto, o presenta una falsa rientranza.

BIBLIOGRAFIA

ASCARELLI A., *Citato da S. Sergi in « Il tricociclòforo »*. Riv. di Antropologia, **31**, pp. 409-410. Roma, 1935-1937.

ASCENZI A. e SERGI M., *Ricerche ed osservazioni sui caratteri morfologici ed istologici dei capelli del cuoio capelluto in una serie di Daiacchi dell'isola di Borneo*. Riv. di Antropologia, Vol. XLVI, pp. 37-64. Roma, 1959.

CANUTO G., *La diametria del pelo come elemento della sua identificazione individuale*. Relazione svolta al IX Congr. Naz. di Med. Leg. e delle Assic., Siena, 25-27 Sett., 1947.

CANUTO G., *La diametria del pelo come elemento della sua identificazione individuale*. Riv. di Antropologia, Vol. XXXVI, pp. 152-158. Roma, 1948.

CAPITANIO M., *Sezioni di capelli e condizioni di esperienza*. Arch. Antrop. e Etnol., Vol. C, pp. 295-296 dei « Rendiconti ». Firenze, 1970.

CORRENTI V. e MARGIOTTA G., *Saggio metodologico per lo studio della variabilità dei diametri dei capelli*. Riv. di Antropologia, Vol. LI, pp. 99-122. Roma, 1964.

D'AMORE C. e GÀLGANO M., *Osservazioni sulla variabilità dei capelli cimotrichi*. Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Ser. 4ª, Vol. XXX, pp. 253-270. Napoli, 1963.

GÀLGANO M., *Il tricociclòforo, apparecchio dalle limitate prestazioni*. Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Ser. IV, Vol. XLII, pp. 177-182. Napoli, 1975.

JUNGKLAASS F. K., *Mikroscopische Untersuchungen zur Variabilität und Vererbung des Haupthaares*. Homo, **9**, pp. 75-85. 1958.

LANDRA G., *Il tricociclòforo di Sergio Sergi e la sua prima applicazione*. R. Accad. Naz. dei Lincei. Classe Scienze Fis. Mat. e Nat., Serie 6ª, Vol. XXIII, pp. 802-806, Roma, 1936.

LANDRA G., *Sulla morfologia dei capelli presso alcune popolazioni Africane (Acioli dell'Uganda; Dauada, Tebu e Tuaregh della Libia)*. Riv. di Antropologia, Vol. XXXI, pp. 299-337. Roma, 1935-1937.

MASSA E. RABINO, *Studio mediante il « tricociclòforo » dei capelli di Egiziani antichi e rilevanza di questi a fini etnici*. Riv. di Antropologia, **56**, pp. 261-274. Roma, 1969.

SERGI S., *Il tricociclòforo*. Riv. di Antropologia, Vol. XXXI, pp. 409-410. Roma, 1935-37.

SERGI S., *Il tricociclòforo (Apparecchio per la misura dei diametri dei capelli e dei peli)*. Arch. Antrop. Criminale, Psichiatria e Medicina legale, Serie 5ª, Vol. LX, pp. 113-117. 1940.

SERGI S., *Capelli di Tasmaniano misurati con il tricociclòforo*. Act. IV Congrès Internat. Sc. Anthrop. et Ethnolog., Vienne, 1-8 Sept; Anthropologica, Tom. I, pp. 62-64. Wien, 1954.

SERGI S., *Capelli di Tasmaniano e di Boscimano: saggio tricometrografico di tecnica applicata alla misurazione dei capelli mediante il tricociclòforo*. Riv. di Antropologia, Vol. XLIV, pp. 285-316. Roma, 1957.

SERGI S., *The Genetic Indipendence in Human Hair of the Degree of Curvature and the Shape of the transverse Section*. Proceedings of the Second International Conference of Human Genetics. Roma, Sept. 6-12, 1961.

ZAVATTARI E., *Citato da S. Sergi in « Il tricociclòforo »*. Riv. di Antropologia, 31, pp.409-410. Roma, 1935-1937.

Dall'Istituto di Antropologia con annesso Museo dell'Università degli Studi di Napoli.

RELAZIONE SUI LAVORI COMPIUTI DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

durante l'anno 1976, letta nell'adunanza plenaria del 28 gennaio 1977

dal socio VINCENZO LEONE

Segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

Nel 1976 la nostra Accademia ha svolto, con la Presidenza del Prof. Mario Curzio, una vita proficua ed attiva, come è testimoniato dalle numerose comunicazioni effettuate dai Soci, complessivamente 37, di cui 17 presentate dai Soci della Sezione di Scienze Naturali e 20 dai Soci della Sezione di Scienze Matematiche, che saranno tutte pubblicate nel nuovo Volume dei Rendiconti, il 43° della Serie IV.

Per le Scienze geomineralogiche, contributi originali, tutti presentati dal Socio A. Scherillo, sono stati portati da A. Albini, D. De Cillis, e D. Stanzione con dati preliminari sull'analisi di terre rare in campioni di rocce forniti dall'U.S. Geological Service, da P. Di Girolamo, G. Nardi e D. Stanzione con uno studio di alcune andesiti dei Campi Flegrei, da E. Franco e M. De Gennaro con ricerche sulla composizione di minerali vesuviani e di alcuni proietti del Somma-Vesuvio.

La maggior parte delle comunicazioni presentate alla Sezione di Scienze Naturali ha avuto per oggetto ricerche di natura chimica. Un gruppo di studi, presentati dal Socio R. Sersale ed effettuati da G. Mascolo, A. Nastro e V. Sabatelli, riguarda le proprietà delle scorie d'alto forno sintetiche; altro gruppo, anche presentato dal Socio Sersale, si riferisce agli studi di A. Perullo, V. Sabatelli e G. L. Valenti sulla determinazione dell'idrossido di calcio in presenza di silicati di calcio idrati e sulle relazioni tra idrossido di calcio e resistenza meccanica; è anche da segnalare una nota di A. Marotta e A. Buri, presentata come le precedenti dal Socio Sersale, su alcuni fenomeni della transizione vetrosa dei vetri inorganici. Il Socio R. Nicolaus ha presentato un lavoro di E. Ramundo sull'inquinamento atmosferico da radicali liberi, e un altro, suo e di E. Novellino e A. Biondi, su virus, batteri, radicali liberi e molecole patogene. Lo stesso socio Nicolaus ha anche presentato una comunicazione di C. Pizza su alcuni aspetti degli insetticidi cloroorganici, e una di M. D'Ago-

stino, A. Biondi e G. Sansone sull'accumulo di alcuni metalli pesanti nei mitili. Una nota di P. A. Crooks, F. De Simone e A. Dini è stata dedicata alle condensazioni intramolecolari dei sistemi 3-ossi-fenaloni. Il Socio M. Covello ha riferito un lavoro suo e dei collaboratori O. Schettino, L. Ferrara e P. Forgione sulle caratteristiche cromatografiche di iododerivati organici.

Infine il Socio M. Galgano ha presentato una nota sulla elaborazione di tricometrogrammi da modelli di sezioni di capelli.

Note riguardanti problemi di geometria sono state presentate dal Socio Dalla Volta, con i lavori di L. Parlato sull'esistenza di certi piani regolari, e di C. Di Comite sulle pseudoconnessioni affini; e dal Socio Franchetta, con un lavoro di P. Mastrogiacomo sugli spazi di coomologia dei campi di 2-getti relativi ad una varietà differenziale. Il Socio Tolotti ha presentato note di R. Esposito e di F. Rosso su alcuni problemi di relatività. Il Prof. Lauria, in due note presentate dal Socio M. Curzio, ha approfondito argomenti di informatica teorica; il Socio Miranda ha presentato note di A. Cioffi, R. Selvaggi, I Sisto e G. Moscariello su problemi di analisi funzionale. Una nota di Lu-San Chen e Cheh-Chi Yeh, presentata dal Socio Corrispondente Salvadori, e una di M. Maiellaro, presentata dal Socio Miranda, approfondiscono temi della teoria della stabilità. Una nota di L. Sgambati, presentata dal Socio Miranda, verte su un aspetto importante delle equazioni differenziali a derivate parziali, mentre due note presentate dal Socio Cafiero, una di C. Esposito e un'altra di I. Del Prete, si riferiscono ad alcune elaborazioni nell'ambito della teoria della misura. Aspetti specifici della teoria dei grafi sono stati affrontati in una nota di G. Pica, presentata dal Socio Curzio, e in un'altra di L. Borzacchini, presentata dal Socio Franchetta. Infine, problemi di astronomia sono stati l'argomento di una nota di E. Badolati, presentata dal Socio Nicolini, e di altra nota dello stesso Socio Nicolini.

Nel corso dell'anno si è proceduto alla nomina di tre Soci Emeriti nelle persone dei Soci Ordinari Antonio Carrelli, Antonio Scherillo e Carlo Miranda. Sono inoltre stati nominati, nella seduta del 17 Gennaio 1976, Soci Corrispondenti il Prof. Paolo Corradini per la Sezione di Scienze Naturali e il Prof. Gianfranco Panella per quella di Scienze Matematiche.

Su proposta di Soci dell'Accademia sono stati nominati Soci Stranieri nella Sezione di Scienze Naturali il Prof. Edgar Lederer, Professore di Chimica Biologica all'Università di Parigi Sud (Centre d'Orsay), Direttore dell'Istituto di Chimica delle Sostanze Naturali del C.N.R.S. a Gif-sur-Yvette, e il Prof. Stanford Moore, premio Nobel per la Chimica, Professore alla Università Rockefeller di New York.

Si è anche proceduto alla nomina di nuovi Soci Ordinari e Corrispondenti a coprire le vacanze verificatesi. Il Professore Carlo Ciliberto, già Socio Corrispondente nella Sezione di Scienze Matematiche, è stato nominato Socio Ordinario nella stessa Sezione; e i Professori Gianfranco Ghiara e Paolo Corradini, già Soci Corrispondenti nella Sezione di Scienze Naturali, sono stati nominati Soci Ordinari, mentre i Professori Giovanni Chieffi, Mario Rigutti e Bruno D'Argenio sono stati nominati Soci Corrispondenti nella stessa Sezione.

I figli del compianto Prof. Domenico Montesano, Socio Ordinario della Sezione di Scienze Matematiche e Presidente della stessa nel 1921, hanno messo a disposizione dell'Accademia la somma di Lit. 3.000.000 per l'istituzione di due premi, ognuno di Lit. 1.500.000, da assegnare per concorso a giovani studiosi di matematica che abbiano recato un contributo rilevante allo sviluppo delle discipline geometriche. L'Accademia, accettando la nobile offerta, ha provveduto al bando del relativo concorso, per il quale è stato fissato al 31 Dicembre 1976 il termine ultimo di presentazione delle proposte e designazioni di candidati. Intanto è anche stata formata la Commissione giudicatrice del concorso, formata dai Professori Francesco Gherardelli della Università di Firenze, Ermanno Marchionna della Università di Milano, e dai Soci della nostra Accademia Professori Franchetta, Dalla Volta e Curzio. I lavori della Commissione sono in corso.

Per l'anno 1977 il Consiglio di Classe risulta costituito come segue: Presidente il Socio Rodolfo Nicolaus, Vice Presidente il Socio Carlo Miranda, Tesoriere il Socio Riccardo Sersale, Segretario il Socio Vincenzo Leone.

INDICE

T. NICOLINI — Sull'andamento secolare dell'attività solare . . . . . pag. 1

A. ALBINI, D. DE CILLIS, D. STANZIONE — Dati preliminari sull'analisi strumentale mediante attivazione neutronica delle terre rare in campioni di rocce fornite dall'USGS . . . . . » 13

L. PARLATO — Sull'esistenza di certi piani regolari . . . . . » 27

P. A. CROOKS, F. DE SIMONE, A. DINI — The intramolecolar condensation of 2-acylamino-3-hydroxyphenalene-1-ones and related compound . . » 37

P. DI GIROLAMO, G. NARDI, G. ROLANDI, D. STANZIONE — Occurrence of calc-alkaline two-pyroxene andesites from deep bore-holes in the Phlegraean Fields. I. Petrographic and petrochemical data . . . . . » 45

G. MASCOLO, A. NASTRO, V. SABATELLI — Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche . . . . . » 74

E. RAMUNDO — Inquinamento atmosferico da radicali liberi . . . . » 81

R. A. NICOLAUS, E. NOVELLINO, A. BIONDI — Virus, batteri, radicali liberi, molecole patogene . . . . . » 104

R. ESPOSITO — Sull'equivalenza di alcune leggi relativistiche di trasformazione concernenti grandezze termodinamiche globali . . . . . » 111

E. BADOLATI — Sintesi storica della risoluzione dell'equazione di Keplero per mezzo della serie di Lagrange . . . . . » 128

A. CIOFFI — Una formula di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione del quarto ordine . . . . . » 140

F. E. LAURIA — Fixpoint: An Order Independent Property . . . . » 153

F. E. LAURIA — Algorithms, Algebraic Structures and Programs Equivalences » 166

LU-SAN CHEN, CHEH-CHIH YEH — Nonoscillation Generating Delay Terms in Odd Order Differential Equations . . . . . » 189

A. MAROTTA, A. BURI — Modulo di Young e temperatura di transizione vetrosa di vetri inorganici . . . . . » 199

C. PIZZA — Insetticidi cloroorganici: alcuni aspetti . . . . . » 205

C. DI COMITE — Pseudoconnessioni affini . . . . . » 229

P. MASTROGIACOMO — Spazi di coomologia dei campi di 2-getti e coomologia 1-dimensionale a coefficienti nel fascio delle funzioni a gradiente parallelo su una varietà a connessione lineare . . . . . » 243

M. Covello, O. Schettino, L. Ferrara, P. Forgione — Rapporti tra i parametri cromatografici di iododerivati organici frazionati mediante le tecniche di adsorbimento e di ripartizione - Nota II . . . . . pag. 270

M. D'Agostino, A. Biondi, G. Sansone — Accumulo di alcuni metalli pesanti nelle valve e nel corpo del *Mytilus galloprovincialis* . . . . . » 282

A. Nastro, G. Mascolo — Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche - Nota III. Scorie con rapporto $\frac{CaO + MgO}{SiO_2}$ costante . . . . . » 287

F. Rosso — Generalized affine parameters and proper time in relativistic spacetimes . . . . . » 295

V. Sabatelli — Materiali litoidi ottenibili per trattamento idrotermale di miscele di scoria d'alto forno e di idrossido di calcio . . . . . » 301

C. Esposito — A proposito di una caratterizzazione delle funzioni reali derivabili quasi ovunque . . . . . » 312

M. Maiellaro — Sulla stabilità non lineare in media di una miscela convettiva termodiffusa binaria . . . . . » 317

G. Moscariello — Γ-Convergenza negli spazi sequenziali . . . . . » 333

G. Pica — Una questione di conteggio di grafi . . . . . » 351

F. Rosso — On the boundedness of the 4-acceleration norm for timelike singularities in General Relativity . . . . . » 362

R. Selvaggi, I. Sisto — Sulla regolarità di certi potenziali ellittici . . . » 372

L. Sgambati — Su una classe di problemi al contorno per le equazioni fortemente quasi-ellittiche, in un rettangolo . . . . . » 381

L. Borzacchini — Subgraph enumerating polynomial and reconstruction conjecture . . . . . » 411

M. de' Gennaro, E. Franco — Pirosseno fassaitico in alcuni proietti del Somma-Vesuvio . . . . . » 417

I. Del Prete — Sull'esistenza degli estremi di un insieme di funzioni additive in un clan . . . . . » 425

E. Franco, M. de' Gennaro — Prima segnalazione di Kalsilite tra i minerali vesuviani . . . . . » 432

A. Perullo, V. Sabatelli, G. L. Valenti — Valutazione dell'idrossido di calcio, in presenza di silicati di calcio idrati, mediante estrazione con solvente e mediante analisi termogravimetrica . . . . . » 438

V. Sabatelli, G. L. Valenti — Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico. Nota III. Relazione fra idrossido di calcio e resistenza meccanica . . . . . » 444

M. Galgano — Tricometrogrammi da modelli di sezione traversa di capelli » 451

Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli durante l'anno 1976 . . . . . » 485

TERMINATO DI STAMPARE OGGI
XXII MARZO MCMLXXVII NELLE
OFFICINE GRAFICHE NAPOLETANE
« FRANCESCO GIANNINI & FIGLI »

Direttore responsabile: *Prof. MICHELE FUIANO*

Autorizzazione del Tribunale di Napoli, B/2315 del 14 agosto 1954