SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLII — ANNO CXIV

(gennaio - dicembre 1975)



GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1976

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLII — ANNO CXIV

(gennaio - dicembre 1975)



GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1976

12434



Sturm comparison theorems for systems of second order elliptic partial differential equations

Nota di COREEN METT
presentata dal socio ordinario MAURO PICONE

(Adunanza del 5 gennaio 1974) *

RIASSUNTO. — Teoremi di confronto sono ottenuti dall'analoga di una ben nota identità di Picone.

SUMMARY. — Comparison theorems are obtained from an analog of the well known Picone identity.

1. - INTRODUCTION.

The classical Sturm-Picone comparison theorem (see [6], pp. 225-226) asserts that if u is a nontrivial solution to the boundary value problem

$$(a(x)u')' + c(x)u = 0 \qquad \text{in } (0, l)$$
$$u(0) = u(l) = 0$$

and if v is a solution to the equation

$$(\mathrm{A}(x)v') + \mathrm{C}(x)v = 0 \qquad \text{in } (0, l)$$

where the coefficients satisfy the relationship

$$a \geq \mathrm{A} > 0, \qquad \mathrm{C} \geq c \qquad \text{in } (0, l)$$

then v must have a zero in $(0, l)$ unless u and v are linearly dependent. This fact follows readily from the Picone identity ([6], p. 266)

$$\left(aau' - \mathrm{A}u^2 \frac{v'}{v} \right) \Big|_0^l$$
$$= \int_0^l \left[u(au')' - u^2 \frac{(\mathrm{A}v')'}{v} + \mathrm{A}\left(u' - u\frac{v'}{v} \right)^2 + (a - \mathrm{A})(u')^2 \right] dx.$$

* Le bozze di stampa furono inviate all'Autore l'1 agosto 1974 e restituite per la stampa il 28 agosto 1975.

For the fourth order equations

$$(a(x)u'')'' - c(x)u = 0$$

$$(A(x)v'')'' - C(x)v = 0$$

the situation is somewhat more difficult as is evidenced by the following theorem of LEIGHTON and NEHARI ([10], p. 327).

Theorem. If v is a solution of

$$(A(x)v'')'' - C(x)v = 0 \tag{1}$$

with $A > 0$ and $C > 0$, and if the values of v, v', v'', and $(Av'')'$ are nonnegative but not all zero at $x = 0$, then the functions $v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$, and $(A(x)v''(x))'$ are all positive for $x > 0$.

Hence every equation of type (1) has at least one solution without zeros, and we cannot directly formulate comparison theorems mimicking those proved for second order problems. That is, for u a nontrivial solution of

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0,$$

$$(au'')'' - cu = 0 \qquad \text{in } (0, l)$$

it cannot be asserted that every solution v of (1) has a zero in $(0, l)$.

As a consequence, fourth order equations are studied either in the context of oscillatory behavior, as was done by LEIGHTON and NEHARI [10], or by considering classes of solutions which exclude those of the type occurring in the theorem, as was done by DIAZ and DUNNINGER [2, 3], DUNNINGER [5], KREITH [7, 8, 9], SWANSON [13], and WONG [14]. We shall follow the latter course.

2. - AN IDENTITY FOR SYSTEMS.

In this paper we consider systems of second order elliptic partial differential equations which will be shown to generalize the fourth order elliptic equations

$$\Delta(a\,\Delta u) - cu = 0$$

and

$$\left[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]$$

$$\Delta(A\,\Delta v) - Cv = 0.$$

And, motivated by an identity of DUNNINGER [5], we shall derive an identity from which Sturm comparison theorems follow for a particular class of solutions.

We consider all solutions to be classical and all coefficients to be sufficiently differentiable. No further mention of these facts will be made.

Consider the fourth order equations

$$\Delta(\alpha(x)\,\Delta u) + 2\,\mathrm{div}(\beta(x)\,\mathrm{grad}\,u) - \gamma(x)\,u = 0 \qquad \text{in G} \tag{2}$$

$$\Delta(A(x)\,\Delta v) + 2\,\mathrm{div}(B(x)\,\mathrm{grad}\,v) - C(x)\,v = 0 \qquad \text{in G} \tag{3}$$

for some open bounded G in E". Upon setting

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\alpha} & f &= \frac{1}{A} \\ b &= \frac{\beta}{\alpha} & d &= \frac{B}{A} \\ c &= -\left(\gamma + \frac{\beta^2}{\alpha} + \Delta\beta\right) & h &= -\left(C + \frac{B^2}{A} + \Delta\beta\right) \end{aligned} \tag{4}$$

it is easily show that equations (2) and (3) are equivalent to the systems

$$\begin{aligned} \Delta u + bu &= ew \\ \Delta w + bw &= -cu \end{aligned} \qquad \text{in G} \tag{5}$$

and

$$\begin{aligned} \Delta v + dv &= fz \\ \Delta z + dz &= -hv \end{aligned} \qquad \text{in G} \tag{6}$$

respectively when α and A, and hence e and f, never vanish in G.

In what follows we shall consider the systems (5) and (6) under somewhat less restrictive hypotheses. Namely, we do not require e and f to have fixed signs. Consequently systems (5) and (6) will be more general than equations (2) and (3).

To compare solutions of (5) and (6) we derive an identity which is closely related to the following identity of DUNNINGER [5]

$$\int_\Gamma \frac{u}{\nu}\left[\nu \frac{\partial (a\,\Delta u)}{\partial n} - u \frac{\partial (A\,\Delta \nu)}{\partial n}\right] ds + \int_\Gamma \frac{A\,\Delta \nu}{\nu}\left[\frac{u}{\nu}\left(\nu \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \nu}{\partial n}\right)\right] ds + \int_\Gamma \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial n} (A\,u\,\Delta \nu - a\,\nu\,\Delta u)\, ds$$

(7)

$$= \int_G \left[u\,\Delta (a\,\Delta u) - \frac{u^2}{\nu}\,\Delta (A\,\Delta \nu)\right] dx + \int_G (A - a)\,(\Delta u)^2\, dx$$

$$+ \int_G \left[2 \frac{A\,\Delta \nu}{\nu} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} \nu}{\nu} \right|^2 - A\left(\Delta u - u \frac{\Delta \nu}{\nu}\right)^2\right] dx$$

$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right.$ is a derivative in the direction of the outward normal and Γ is the boundary of G. $\Big)$.

Since the systems analogs of Δu and $\Delta \nu$ are w and z respectively, we substitute them in the boundary terms of identity (7) and apply the divergence theorem to obtain the following expression

$$\int_\Gamma \frac{u}{\nu}\left(\nu \frac{\partial w}{\partial n} - u \frac{\partial z}{\partial n}\right) ds + \int_\Gamma \frac{z}{\nu}\left[\frac{u}{\nu}\left(\nu \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \nu}{\partial n}\right)\right] ds$$

$$+ \int_\Gamma \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial n} (u\,z - \nu\,w)\, ds$$

(8)

$$= \int_G \operatorname{div}\left\{\frac{u}{\nu}(\nu \operatorname{grad} w - u \operatorname{grad} z) + \frac{z}{\nu}\left[\frac{u}{\nu}(\nu \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} \nu)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\nu} (\operatorname{grad} u)\,(u\,z - \nu\,w)\right\} dx.$$

Upon performing the differentiation under the integral, rearranging terms, and making use of equations (5) and (6) the right hand side of (8) becomes

$$\int_G \left\{ u \Delta w - w \Delta u + \frac{2z}{v} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \right|^2 - u^2 \frac{\Delta z}{v} \right.$$

$$\left. + 2u \Delta u \frac{z}{v} - u^2 z \frac{\Delta v}{v^2} \right\} dx$$

$$= \int_G \left\{ (h - c) u^2 + \frac{2z}{v} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \right|^2 + 2(d - b) u^2 \frac{z}{v} \right.$$

$$\left. - e w^2 + 2e \frac{uwz}{v} - f \frac{u^2 z^2}{v^2} \right\} dx.$$

Then completing squares on the last three terms and substituting back into (8) we obtain the following formal identity for solution pairs (u, w) and (v, z) of systems (5) and (6) respectively

$$\int_\Gamma \left\{ \frac{u}{v} \left(v \frac{\partial w}{\partial n} - u \frac{\partial z}{\partial n} \right) + \frac{z}{v} \left[\frac{u}{v} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial n} (uz - vw) \right\} ds = \int_G \left\{ (h - c) u^2 - e \left(w - u \frac{z}{v} \right)^2 \right.$$

(9)

$$\left. + \frac{2z}{v} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \right|^2 + 2(d - b) u^2 \frac{z}{v} \right.$$

$$\left. + (e - f) \left(\frac{uz}{v} \right)^2 \right\} dx.$$

3. - Comparison theorems.

Theorem 1. Suppose there exists a function w such that u is a nontrivial solution of system (5), and suppose there exists a function

z such that v satisfies system (6) and $v > 0$ at some point in G. If

$$(1)\ f \geq e \geq 0, \qquad d \geq b \text{ in } G$$

and either

$$\begin{cases} (2)\ \int_G (c-h)\,u^2\,dx \geq 0 \\ (3)\ z < 0 \text{ in } G \\ (4)\ u \neq kv, \qquad k \text{ a constant} \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} (5)\ \int_G (c-h)\,u^2\,dx > 0 \\ (6)\ z \leq 0 \text{ in } G, \end{cases}$$

then, under any boundary conditions on u, v, w, and z such that the left hand side of identity (9) is nonnegative, v must have a zero at some point in $G \cup \Gamma$.

Proof. Suppose v has no zero in $G \cup \Gamma$. Then since $v > 0$ at some point in G, we have $v > 0$ in $G \cup \Gamma$, and identity (9) is valid. Since the boundary term is nonnegative, in view of hypotheses (1), (2), and (3) identity (9) yields

$$(10)\qquad 0 \leq \int_G \frac{z}{v} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \right|^2 dx.$$

But hypothesis (3) and the fact that $v > 0$ in G imply that

$$(11)\qquad \int_G \frac{z}{v} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \right|^2 dx \geq 0.$$

Inequalities (10) and (11) together imply

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v}\left(\operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v}\right) = 0 \text{ in } G$$

which contadicts hypothesis (4).

In a similar manner hypotheses (5) and (6) lead to the contradiction

$$0 \leq \int_G (h - c)\, u^2\, dx < 0.$$

Hence, in either case v must vanish at some point in $G \cup \Gamma$.

Remark. Theorem 1 holds for a wide variety of boundary conditions. Of particular interest from a physical point of view are the boundary conditions

$$\text{(I)}\quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma$$

$$\text{(II)}\quad u = w = 0 \text{ on } \Gamma$$

which correspond to clamped edges and supported edges respectively in the boundary value problem of the vibrating plate (see [1], p. 251).

Furthermore, we note that under boundary conditions (I) or (II) the conclusion of Theorem 1 holds without hypothesis (4). Indeed, if v has no zero in $G \cup \Gamma$, then u and v cannot be linearly dependent since $u = 0$ on Γ while $v > 0$ in $G \cup \Gamma$.

We shall now show that under some additional hypotheses, namely that $d \leq 0$ in G, when boundary conditions (I) or (II) hold the conclusion of Theorem 1 can be sharpened to assert that v has a zero in the open region G. The major difficulty encountered is establishing the validity of identity (9) since v might vanish on Γ. While in one dimension the validity of (9) is gained simply by an application of l'Hospital's rule to the term $\frac{u}{v}$ (see [11]), we shall employ a lemma of DIAZ and MC LAUGHLIN [4] to establish the identity in n dimensions.

In order to apply DIAZ and MC LAUGHLIN's lemma we assume G has the following properties.

i) For every $P \in \Gamma$ there is an open ball in G with P on its boundary.

ii) There exists a sequence of open, bounded, regular sets G_j with boundary Γ_j such that $G_j \cup \Gamma_j \subset G$, and for all $x \in G_j$ there is an $\bar{x} \in \Gamma$ such that

$$|x - \bar{x}| = [\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2]^{1/2} < \frac{1}{j}.$$

iii) There is an $S < 0$ such that

$$S_j = \int_{\Gamma_j} ds < S \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Theorem 2. Suppose there exists a function w such that u is a nontrivial solution of system (5) and suppose there exists a function z such that v satisfies system (6) and $v > 0$ at some point in G. If

$$(1)\ f \geq e \geq 0, \qquad 0 \geq d \geq b \text{ in } G$$

and either

$$\begin{cases} (2) \int_G (c - h)\, u^2\, dx \geq 0 \\ (3)\ z < 0 \text{ in } G \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} (4) \int_G (c - h)\, u^2\, dx > 0 \\ (5)\ z \leq 0 \text{ in } G \end{cases}$$

and if u satisfies boundary condition

$$(I)\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma,$$

then v must vanish in G.

Proof. Suppose v has no zero in G. Then $v > 0$ in G, and by continuity $v \geq 0$ in $G \cup \Gamma$. We establish the validity of (9) by considering the possible cases depending on the behavior of v on the boundary Γ.

Case I. $v \neq 0$ on Γ.

In this case identity (9) is obviously valid. Since the boundary term vanishes, the conclusion follows from Theorem 1.

Case II. $v(P) = 0$ for some $P \in \Gamma$.

Following the ideas of DIAZ and MC LAUGHLIN [4], we evaluate identity (9) over the region G_j and examine the limit as $j \to \infty$ of

$$\int_{\Gamma_j} \left(u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \int_{\Gamma_j} \frac{u}{v} \left(2z \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial z}{\partial n} \right) ds$$

$$- \int_{\Gamma_j} \left(\frac{u}{v} \right)^2 z \frac{\partial v}{\partial n} ds = \int_{G_j} (h - c) u^2 dx + \int_{G_j} \Big[(e - f) \left(\frac{uz}{v} \right)^2$$

(12)

$$- e \left(w - u \frac{z}{v} \right)^2 + 2 (d - b) u^2 \frac{z}{v} \Big] dx$$

$$+ \int_{G_j} \left\{ 2 \frac{z}{v} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \right|^2 \right\} dx.$$

Identity (12) is valid in G_j since $v > 0$ in $G_j \cup \Gamma_j$. From the first equation in system (6) and from the hypotheses that $f \geq 0$ and $z \leq 0$ in G, it follows that

$$\Delta v + d v \leq 0 \text{ in G.}$$

By a maximum principle of HOPF (see e.g., [12], p. 67) $v > 0$, $d \leq 0$ in G, and $v(P) = 0$ imply $\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_P < 0$. Consequently the result of DIAZ and MC LAUGHLIN ([4], p. 170) establishes that $\frac{u}{v} \leq k$ in G for some constant k. Hence the left hand side of identity (12) is easily shown to be arbitrarily small as $j \to \infty$.

In view of hypotheses (1), (2), and (3) each of the integrals on the right hand side of identity (12) is nonpositive. Furthermore, upon examining the integral

$$\int_{G_j} \frac{z}{v} \left| \operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \right|^2 dx \tag{13}$$

we see that either

(a) the integrand, and hence the integral (13), is eventually negative for large enough j,

or

(b) $\operatorname{grad} u - u \frac{\operatorname{grad} v}{v} \equiv 0.$

But case (a) yields a contradiction to the fact that the left hand side of (12) is arbitrarily small for large j. On the other hand, case (b) implies $u \equiv Kv$ for some costant K, which is also a contradiction since $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ on Γ while $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_P < 0$.

Finally, under hypotheses (1), (4), and (5) the term

$$\int_{G_j} (h - c)\, u^2\, dx$$

becomes negative for large enough j, which is again a contradiction to left hand side of (12) being arbitrarily small.

Hence, in any case we arrive at a contradiction unless v has a zero in G.

Corollary. Suppose there exists a function w such that u is a nontrivial solution of system (5), and suppose there exists a function z such that v satisfies system (6) and $v > 0$ at some point in G. If

(1) $f \geq e \geq 0, \qquad 0 \geq d \geq b$ in G

(2) $\int_G (c - h)\, u^2\, dx \geq 0$

(3') $z < 0$ at some point in G

and if u satisfies the boundary condition

$$\text{(I)}\quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma$$

then either v or z must vanish in G.

Remark. In Theorem 2 the hypothesis $d \leq 0$ in G was only used in conjunction with Hopf's maximum principle to obtain that $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_P < 0$ whenever $v(P) = 0$ for $P \in \Gamma$. However, this condition on the coefficient d can be removed if we assume the existence of a positive function ζ satisfying the hypotheses of a generalized maximum principle (see [12], p. 73).

That is, we assume the existence of a function $\zeta > 0$ in G such that

$$\Delta \zeta + d\zeta \leq 0 \text{ in G.}$$

The following analysis shows that under this new hypothesis we can again conclude that $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_P < 0$ whenever $v(P) = 0$ for $P \in \Gamma$.

Since $fz \leq 0$, we have from the first equation in (6) that

$$\Delta v + d v \leq 0 \text{ in } G.$$

Then by the generalized maximum principle,

$$\left.\frac{\partial (v/\zeta)}{\partial n}\right|_P < 0 \qquad \text{whenever } v(P) = 0.$$

But

$$\left.\frac{\partial (v/\zeta)}{\partial n}\right|_P = \left.\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{v}{\zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)\right|_P = \left.\frac{1}{\zeta}\frac{\partial n}{\partial v}\right|_P$$

and hence $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_P < 0$. Consequently Theorem 2 can be proved as before.

Theorem 3. Suppose there exists a function w such that u is a nontrivial solution of system (5), and suppose there exists a function z such that v satisfies system (6) and $v > 0$ at some point in G. If

$$(1)\ f \geq e \geq 0, \qquad 0 \geq d \geq b \text{ in } G$$

$$(2)\ z = 0 \text{ on } \Gamma$$

and either

$$\begin{cases} (3)\ h \leq 0, & h \not\equiv 0 \text{ in } G \\ (4)\ \int_G (c - h)\, u^2\, dx \geq 0 \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} (5)\ h \leq 0 \text{ in } G \\ (6)\ \int_G (c - h)\, u^2\, dx > 0, \end{cases}$$

and if u and w satisfy the boundary condition

$$(\mathrm{II})\ u = w = 0 \text{ on } \Gamma$$

then v must have a zero in G.

Proof. Suppose v does not vanish in G. Then $v > 0$ in G, and $v \geq 0$ in $G \cup \Gamma$. From the second equation in system (6) together with hypothesis (3)

$$\Delta z + dz = -hv \geq 0, \not\equiv 0 \text{ in G.}$$

Then hypothesis (2) and a maximum principle of HOPF (see [12], p. 64) imply $z < 0$ in G. Similarly under hypothesis (5)

$$\Delta z + dz = -hv \geq 0 \text{ in G,}$$

and hypothesis (2) and the maximum principle imply $z \leq 0$ in G. The remainder of the proof consists of showing that identity (9) is valid in G. The details are similar to those in the proof of Theorem 2, and hence are omitted.

Remark. In the special case when coefficients c, b, and e in system (5) are identically equal to h, d, and f respectively in system (6), the above theorems are separation theorems. That is, under the given hypotheses, the zeros of linearly independent solutions of (5) separate each other.

Remark. In the case $e, f > 0$ the systems (5) and (6) can be transformed back to the fourth order equations (2) and (3) by the substitutions indicated in (4). Consequently, our results contain some recent results of DUNNINGER [5].

Remark. Theorem 1 is also valid for the systems of differential inequalities.

$$\Delta u + bu = ew$$

$$u \Delta w + buw \leq -cu^2$$

and

$$z \Delta v + dvz \geq fz^2$$

$$v \Delta z + dvz \geq -hv^2.$$

Furthermore, if $z < 0$ in Theorem 2, and if $h \not\equiv 0$ in Theorem 3, these theorems also hold for the above systems of inequalities.

Remark. We can treat in the same manner nonlinear differential inequalities by allowing coefficients $c(x, u, w)$, $b(x, u, w)$, $e(x, u, w)$, $d(x, v, z)$, $f(x, v, z)$, and $h(x, v, z)$ as long as the coefficients are continuous in x for all values of the other variables.

Acknowledgement. The author wishes to thank Professor Dennis R. Dunninger for his guidance and suggestions throughout this work.

BIBLIOGRAPHY

[1] COURANT R. and HILBERT D., *Methods of Mathematical Physics*, **1**, Wiley (Interscience), New York (1953).

[2] DIAZ J. B. and DUNNINGER D. R., *Sturm separation and comparison theorems for a class of fourth order ordinary and partial differential equations (to appear).*

[3] DIAZ J. B. and DUNNINGER D. R., *Sturmian theorems for a class of elliptic equations of order 4m (to appear).*

[4] DIAZ J. B. and MC LAUGHLIN JOYCE R., *Sturm separation and comparison theorems for ordinary and partial differential equations*, Atti Reale Accad. Naz. Lincei, Mem. Ci. Sci. Fis. Mat. Nat., serie VIII, **9**, pp. 133-194 (1969).

[5] DUNNINGER D. R., *A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend., serie VIII, **50**, pp. 302-313 (1971).

[6] INCE E. L., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York (1956).

[7] KREITH K., *Comparison theorems for constrained rods*, SIAM Rev., **6**, pp. 31-36 (1964).

[8] KREITH K., *A comparison theorem for fourth order differential equations*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend., serie VIII, **46**, pp. 664-666 (1969).

[9] KREITH K., *A Picone identity for fourth order differential equations (to appear).*

[10] LEIGHTON W. and NEHARI Z., *On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order*, Trans. Amer. Math. Soc., **89**, pp. 325-377 (1958).

[11] METT C., *Some analogs of the Picone identity applied to fourth order differential equations*, Thesis, Michigan State University (1973).

[12] PROTTER M. H. and WEINBERGER H. F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1967).

[13] SWANSON C. A., *A generalization of Sturm's comparison theorem*, J. Math. Anal. Appl., **15**, pp. 512-519 (1966).

[14] WONG P. K., *Integral inequalities of Wirtinger-type and fourth-order elliptic differential inequalities*, Pacific J. Math., **40**, pp. 739-751 (1972).

Virginia Polytechnic Institute and State University
Blacksburg, Virginia 24061

On the operator equation $AX - XA = iB$

Nota di ANDREA SCHIAFFINO e ALBERTO TESEI *
presentata dal socio corrispondente LUIGI SALVADORI

(Adunanza del 18 gennaio 1975)

RIASSUNTO. — Si dimostra l'esistenza di un operatore simmetrico non limitato, soluzione debole dell'equazione $AX - XA = iB$ (A, B sono operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert, B è limitato). I risultati sono applicati ad esempi particolari.

SUMMARY. — An unbounded symmetric operator is shown to exist, solving the equation $AX - XA = iB$ in a weak sense (A, B are Hilbert space self-adjoint operators, B is bounded). Concrete examples are eventually considered.

1. - INTRODUCTION.

In the present paper we investigate the existence of unbounded solutions for the operator equation:

$$[*] \qquad AX - XA = iB$$

where A and B are self-adjoint operators. As it is well known, this problem is closely related to general questions originated by quantum theory: scattering theory, perturbation of continuos spectrum, similarity of operators (Ref. [1, 2]). In all these topics the operator equation $AX - XA = B$ (for not necessarily self-adjoint A and B) plays a central role, but only bounded solutions are of interest (see Ref. [3]).

Looking for unbounded solutions of problem [*] proves to be interesting in a different frame. In quantum field theory no rigorous link between the Hamiltonian and the Lagrangian approach is given;

* A. SCHIAFFINO, Istituto Matematico G. Castelnuovo, Università, Roma.
A. TESEI, G.N.A.F.A., C.N.R., Roma and Facoltà di Ingegneria, Università, Napoli.

then it is natural to ask whether a Hamiltonian exists, which implements the same time evolution one gets solving the field differential equations. As shown in Ref. [4], this foundational problem leads to looking for semibounded solutions of problem [*] with unbounded A and B.

Here we shall be concerned with a more particular case, i.e. we shall suppose B to be bounded. Under this assumption, we shall follow a method of solution which is quite similar to that proposed by FREEMAN for a general Banach space in Ref. [5]. There a necessary and sufficient condition for the existence of bounded solutions is derived (see also Ref. [6]). Here we follow a constructive approach, giving sufficient conditions in order that a symmetric operator exists, which solves the problem in a sense to be specified; under stronger assumptions, a bounded self-adjoint solution is also shown to exist. which solves the problem in a sense to be specified; under stronger assumptions, a bounded self-adjoint solution is also shown to exist.

In sect. 2 the method of solution is outlined. In sect. 3 a symmetric operator X is introduced, which solves the problem in a weak sense. An improvement of these results in the case of purely point spectrum is given in sect. 4. Sect. 5 is devoted to examples, sect. 6 to conclusions.

In the following we are given a complex Hilbert space V (scalar product $(\cdot, \cdot)$, norm $\|\cdot\|$; we denot by $H(V)$ the real Banach space of bounded self-adjoint operators acting on V, and by $\mathfrak{L}(H(V), H(V))$ the Banach algebra of linear continuos operators from $H(V)$ into itself (norm $|\cdot|$). As usual, we denot by $\rho(A)$ (resp. $\sigma(A)$, $\sigma_{pp}(A)$) the resolvent set (resp. the spectrum, the purely point spectrum) of the operator A, and by D_A its domain.

2. - GENERAL FRAME.

Let A be a self-adjoint operator on the Hilbert space V. Following DA PRATO (Ref. [7]), we consider the following sesquilinear form, defined for any bounded self-adjoint operator T:

$$\begin{cases} \omega_T : D_A \times D_A \to C & \{x, y\} \to \omega_T(x, y) \\ \omega_T(x, y) = i\,[(Ax, Ty) - (Tx, Ay)]\,, & T \in H(V)\,. \end{cases}$$

The form ω_T is hermitean; if it is continuous in the $V \times V$ topology, it admits a unique extension $\bar{\omega}_T$, due to the density of D_A in V.

Now we define a linear operator L on H (V) in the following way:

$$\begin{cases} D_L = \{T \in H(V) \mid \omega_T \text{ is } V \times V \text{ continuous}\} \\ (L(T)\, x, y) = \overline{\omega}_T(x, y) \qquad \forall x, y \in V\,. \end{cases}$$

We will need the following results, whose proof, although given already in Ref. [7], is repeated here in a slightly modified form for convenience of the reader.

LEMMA 2.1. *Let* $x \in D_A$, $T \in D_L$; *then* $Tx \in D_A$ *and*

$$L(T)\, x = i(AT - TA)\, x\,.$$

PROOF. For $x, y \in D_A$, $T \in D_L$ we have:

$$-i(Tx, Ay) = \omega_T(x, y) - i(Ax, Ty)\ ;$$

thus the mapping $D_A \to C$, $y \to -i(Tx, Ay)$ is continuos, $Tx \in D_A$ and

$$\omega_T(x, y) = -i(ATx, y) + i(TAx, y)$$

whence the result, due to the density of D_A.

THEOREM 2.2. (i) $\rho(L) \supseteq R_+$ *and*

$$(\lambda - L)^{-1}(T) = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t}\, e^{itA}\, T\, e^{-itA} \qquad \forall T \in H(V)\ ;$$

(ii) $$|(\lambda - L)^{-1}| \leq 1/\lambda \qquad \forall \lambda \in R_+\,.$$

PROOF. Let, for all $T \in H(V)$,

$$F(\lambda)(T) = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t}\, e^{itA}\, T\, e^{-itA}\ ;$$

the result will follow as soon as we prove that $F(\lambda) = (\lambda - L)^{-1}$, namely

a) $$F(\lambda)(\lambda T - L(T)) = T \qquad \forall T \in D_L\ ;$$

b) $$(\lambda - L)\, F(\lambda)(T) = T \qquad \forall T \in H(V)\,.$$

To prove a), let $T \in D_L$, $x \in D_A$; then $e^{-itA}\, x \in D_A$, and

$$F(\lambda)(\lambda T - L(T))\, x = \lambda \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t}\, e^{itA}\, T\, e^{-itA}\, x \; -$$

$$- \; i \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t}\, e^{itA}\, AT\, e^{-itA}\, x + i \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t}\, e^{itA}\, TA\, e^{-itA}\, x =$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t}\, e^{itA}\, T\, e^{-itA}\, x - \int_0^{+\infty} d(e^{itA})\, T\, e^{t(-iA-\lambda)}\, x \; -$$

$$- \int_0^{+\infty} e^{t(iA-\lambda)}\, T\, d(e^{-itA}\, x)\,,$$

where use is made of Lemma 2.1. Integrating by parts gives

$$F(\lambda)(\lambda T - L(T)\, x = Tx \qquad \forall x \in D_A\,,$$

whence the result.

To prove b), let $T \in H(V)$, $x \in D_A$; we have:

$$F(\lambda)(T)\, x = - \int_0^{+\infty} d\,[(\lambda - iA)^{-1}\, e^{t(iA-\lambda)}]\, T\, e^{-itA}\, x =$$

$$= (\lambda - iA)^{-1}\, Tx - i \int_0^{+\infty} dt\, (\lambda - iA)^{-1}\, e^{-\lambda t}\, e^{itA}\, TA\, e^{-itA}\, x\,;$$

it follows that $F(\lambda)(T)\, x \in D_A$ and

$$\lambda F(\lambda)(T)\, x - iAF(\lambda)(T)\, x + iF(\lambda)(T)\, Ax = Tx\,.$$

This in turn implies that $F(\lambda)(T) \in D_L$ and, according to Lemma 2.1,

$$(\lambda - L)\, F(\lambda)(T)\, x = Tx \qquad \forall x \in D_A\,;$$

thus the result follows.

If A is unbounded, D_L is not dense in H(V) and L is not the infinitesimal generator of a contraction semigroup on H(V).

According to Theorem 2.2, there exists in $H(V)$ a unique solution of the equation

$$\lambda X_\lambda - L(X_\lambda) = B \qquad \forall \lambda \in R_+ , \; B \in H(V) ,$$

which, according to Lemma 2.1, becomes on D_A

$$\lambda X_\lambda y - i(AX_\lambda - X_\lambda A) y = By \qquad y \in D_A .$$

This approximating problem has been already considered by Rosenblum in Ref. [6] in a slightly different procedure. Here we wish to show that, even if the set $\{ X_\lambda \mid \lambda > 0 \}$ is not bounded in the uniform topology on $H(V)$, taking the weak limit of the X_λ's when λ goes to zero gives a (unbounded) solution of the problem, in a sense to be specified.

3. - The main theorem.

Let us introduce the following operator X on V:

$$\begin{cases} D_X = \{ u \in V \mid \exists \; w\text{-}\lim_{\lambda \to 0} X_\lambda u \} \\ Xu = w\text{-}\lim_{\lambda \to 0} X_\lambda u \end{cases}$$

Before stating the main result of this section we add some other remarks.

According to the multiplication form of the spectral theorem (see Ref. [8]), there exists a measure space $(M, \mathfrak{M}, \mu)$, a unitary operator $U : V \to L^2(M, \mathfrak{M}, d\mu)$ and a real-valued measurable function $a(\cdot)$ on M such that:

a) $v \in D_A$ iff $a(\cdot)(Uv)(\cdot) \in L^2(M, \mathfrak{M}, d\mu)$;

b) $(UAU^{-1} v)(\cdot) = a(\cdot) v(\cdot)$ for all $v(\cdot) \in U[D_A]$.

We shall make the following assumption:

H) there exist a dense subset Y in V which is invariant under the group e^{itA}, and a complex-valued measurable function $b(\cdot, \cdot)$ on $M \times M$ such that, for all $u(\cdot) \in U[Y]$,

$$(UBU^{-1} u)(x) = \int_M b(x, y) u(y) \, d\mu(y) \qquad [\mu]\text{-a.e.}$$

We have $\overline{b(x, y)} = b(y, x)$ due to self-adjointness of B.
We can now state the following

THEOREM 3.1. *Let be satisfied the following assumptions:*

$$\text{(i)} \quad \int_M |b(x, y)|\,|u(y)|\,d\mu(y) \in L^2(M, \mathfrak{M}, d\mu) \qquad \forall u(\cdot) \in U[Y];$$

$$\text{(ii)} \quad \mu(\{ y \mid a(x) = a(y) \} \cap \{ y \mid b(x, y) \neq 0 \}) = 0 \quad [\mu]\text{-a.e.};$$

$$\text{(iii)} \int_M \frac{|b(x, y)|}{|a(x) - a(y)|}\,|u(y)|\,d\mu(y) \in L^2(M, \mathfrak{M}, d\mu)\ \forall u(\cdot) \in U[Y].$$

Then X *is a symmetric operator, which solves the problem in the sense that:*

$$(Au, Xv) - (Xu, Av) = i(Bu, v) \quad \forall u, v \in D_A \cap D_X .$$

The result will follow as soon as we prove the following lemma:

LEMMA 3.2. X *is densely defined.*

For any $u(\cdot) \in U[Y]$ and $v(\cdot) \in L^2(M, \mathfrak{M}, d\mu)$ we have, according to Theorem 2.2.,

$$(X_\lambda U^{-1}u, U^{-1}v) = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t}\,(B\, e^{-itA} U^{-1} u, e^{-itA} U^{-1} v) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t} \int_M d\mu(x)\, e^{-ita(x)} v(x) \int_M d\mu(y)\, e^{ita(y)}\, b(y, x)\, \bar{u}(y)\ , \forall \lambda \in R_+ .$$

Hypothesis (i) and a first application of Fubini's theorem give:

$$(X_\lambda U^{-1}u, U^{-1}v) = \int_M d\mu(x)\, v(x) \int_0^{+\infty} dt\, e^{-t(\lambda + ia(x))} \times$$

$$\times \int_M d\mu(y)\, e^{ita(y)}\, b(y, x)\, \bar{u}(y) \ ;$$

from hypothesis (i) it follows also that:

$$\int_M d\mu(y)\,|\,b(x,y)\,|\,|\,u(y)\,| < +\infty \qquad [\mu]\text{-a.e.}\ ,$$

so that using Fubini's theorem once again we get:

$$(X_\lambda\, U^{-1}u,\, U^{-1}v) = \int_M d\mu(x)\, v(x) \int_M d\mu(y)\, \frac{b(y,x)}{\lambda + i\,[a(x) - a(y)]}\, \bar{u}(y)\ .$$

Now, let λ go to zero. According to hypothesis (ii) and (iii) and Lebesgue's convergence theorem, we have:

$$\lim_{\lambda\to 0} (X_\lambda\, U^{-1}u,\, U^{-1}v) = -\,i \int_M d\mu(x)\, v(x) \int_M d\mu(y)\, \frac{b(y,x)}{a(x) - a(y)}\, \bar{u}(y)\ .$$

Thus $Y \subseteq D_X$ and:

$$(UXU^{-1}u)(x) = i \int_M d\mu(y)\, \frac{b(x,y)}{a(x) - a(y)}\, u(y) \qquad [\mu]\text{-a.e.}$$

PROOF OF THEOREM 3.1. According to the above lemma, X is densely defined.

Moreover, for all $u, v \in D_X$

$$(Xu, v) = \lim_{\lambda\to 0} (X_\lambda u, v) = \lim_{\lambda\to 0} (u, X_\lambda v) = (u, Xv)\ ,$$

due to the self-adjointness of X_λ. Let $u, v \in D_A \cap D_X$; according to Lemma 2.1, for $\lambda \to 0$ we have:

$$\lambda\,(X_\lambda u, v) - i\,(Au, X_\lambda v) + i\,(X_\lambda u, Av) = (Bu, v)\ .$$

By the definition of D_X, letting λ go to zero we obtain the result.

4. - PURELY POINT SPECTRUM.

Throughout this section we suppose the spectrum of A to be purely point. In this case the existence of a solution can be proved under weaker assumptions; moreover, the solution itself can be shown to exist in strong sense on a smaller subspace.

Let $\{ \mu_k \}$ $(k = 1, \ldots, m;\ m \leq +\infty)$ denothe the eigenvalues of A and $\{ u_k^i \}$ $(i = 1, \ldots, n_k;\ n_k \leq +\infty)$ a basis of the eigenspace of A related to μ_k; moreover, let us denote by W the dense subspace of V generated by the vectors u_k^i. In this hypothesis we can state the following:

THEOREM 4.1. *Let* B *satisfy the following conditions*:

(i) $\quad (\mathrm{B} u_k^i, u_k^i) = 0 \qquad k = 1, \ldots, m\ , \qquad i, j = 1, \ldots, n_k\ ;$

(ii) $$\sum_{\substack{l=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n_l}} \frac{|(\mathrm{B} u_l^j, u_k^i)|^2}{(\mu_l - \mu_k)^2} \qquad k = 1, \ldots, m\ , \qquad i = 1, \ldots, n_k\ .$$

Then X *is a symmetric operator.*

As in the general case, the proof is based on the following:

LEMMA 4.2. $\mathrm{D_X} \supseteq \mathrm{W}$.

PROOF. We have:

$$(\mathrm{X}_\lambda\, u_k^i, u_l^j) = \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\lambda t} (\mathrm{B}\, e^{-it\mathrm{A}} u_k^i,\ e^{-it\mathrm{A}} u_l^j) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dt\, e^{t(-\lambda + i(\mu_k - \mu_l))} (\mathrm{B} u_k^i, u_l^j) = \frac{(\mathrm{B} u_k^i, u_l^j)}{\lambda - i(\mu_k - \mu_l)}\ , \qquad \forall \lambda \in \mathrm{R}_+\ .$$

By hypothesis (i) above:

$$(\mathrm{X}_\lambda\, u_k^i, u_k^i) = 0 \qquad\qquad \forall \lambda \in \mathrm{R}_+\ ,$$

thus we obtain:

$$\lim_{\lambda \to 0+} (\mathrm{X}_\lambda u_k^i, u_l^j) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = l \\ \dfrac{i\,(\mathrm{B} u_k^i, u_l^j)}{\mu_k - \mu_l} & \text{if } k \neq l\ . \end{cases}$$

On the other hand, for any $v \in V$ we can write

$$(X_\lambda u_k^i, v) = \sum_{l,j} (X_\lambda u_k^i, u_l^j)(u_l^j, v),$$

so that the result will follow as soon as we prove that the last series is totally convergent. We have:

$$|(X_\lambda u_k^i, u_l^j)(u_l^j, v)| \leq \frac{1}{2}\left\{|(X_\lambda u_k^i, u_l^j)|^2 + |(u_l^j, v)|^2\right\},$$

$$\sum_{l,j} |(X_\lambda u_k^i, u_l^j)(u_l^j, v)| \leq \frac{1}{2}\left\{\|v\|^2 + \sum_{l,j} |(X_\lambda u_k^i, u_l^j)|^2\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{\|v\|^2 + \sum_{l,j} \frac{|(Bu_k^i, u_l^j)|^2}{(\mu_l - \mu_k)^2}\right\} < +\infty$$

the last series converging by (ii). Finally we get:

$$\lim_{\lambda \to 0} (X_\lambda u_k^i, v) = i \sum_{l,j} \frac{(Bu_k^i, u_l^j)}{\mu_k - \mu_l} (u_l^j, v)$$

and so

$$Xu_k^i = i \sum_{l,j} \frac{\overline{(Bu_k^i, u_l^j)}}{\mu_l - \mu_k} u_l^j .$$

Now we show that X is a solution of the problem even in strong sense on the smaller subspace W.

LEMMA 4.3. *If* $u \in W$, *then* $Au \in D_X$.

PROOF. A trivial consequence of Lemma 4.2.

LEMMA 4.4 *If* $u \in W$, *then* $Xu \in D_A$.

PROOF. By Lemma 4.2, $W \subseteq D_A \cap D_X$. According to Theorem 3.1, we have, for any $v \in W$,

$$|(Av, Xu)| \leq |(Au, Xv)| + |(Bu, v)| = |(XAu, v)| + |(Bu, v)| \leq$$

$$\leq (\|XAu\| + \|Bu\|)\|v\|,$$

where use has been made of Lemma 4.3, and of the symmetry of X.

Then the application $W \to C$, $v \to (Av, Xu)$ can be continuously extended to V and, by the Riesz lemma, there exists $z \in V$ such that:

$$(Av, Xu) = (v, z) \qquad \forall v \in W \ .$$

Moreover, W is a core for A, so that the same holds for all $v \in D_A$; thus $Xu \in D_A$ and $z = AXu$.

THEOREM 4.5. *If* $v \in W$ *we have*:

$$AXv - XAv = iBv \ .$$

PROOF. According to Theorem 3.1, Lemma 4.3 and 4.4, we have:

$$(u, AXv) - (u, XAv) = i(u, Bv)$$

for all $u \in D_A \cap D_X$. Because of the density of $D_A \cap D_X$ in V, the result follows.

In some cases the following criterion for the existence of a bounded self-adjoint solution can be of use.

THEOREM 4.6. *Let* B *satisfy the following conditions*:

(i) $(Bu_k^i, u_k^j) = 0 \qquad k = 1, \ldots, m \ , \quad i, j = 1, \ldots, n_k \ ;$

(ii') $|\mu_k - \mu_l| \geq \alpha_k > 0 \qquad \forall k, l \in N$ *and*

$$\sum_{k,i} \frac{(B^2 u_k^i, u_k^i)}{\alpha_k^2} < +\infty \ .$$

Then X *is a bounded self-adjoint operator.*

PROOF. We only need proving that $D_X = V$. We have:

$$|(u, X_\lambda u_k^i)|^2 \leq \|u\|^2 \sum_{i,j} \frac{|(u_i^j, Bu_k^i)|^2}{\lambda^2 + (\mu_k - \mu_l)^2} \leq \|u\|^2 \frac{\|Bu_k^i\|^2}{\alpha_k^2}$$

for any k, i and for $u \in V$, whence by hypothesis (ii'):

$$\sum_{k,i} |(X_\lambda u, u_k^i)|^2 \leq \|u\|^2 \sum_{k,i} \frac{(B^2 u_k^i, u_k^i)}{\alpha_k^2} < +\infty .$$

Then, for any $u, v \in V$:

$$\lim_{\lambda \to 0} (X_\lambda u, v) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k,i} (X_\lambda u, u_k^i)(u_k^i, v) = \sum_{k,i} (u, X u_k^i)(u_k^i, v) .$$

The last theorem is only a handy version of a general sufficient condition; an example where it applies will be given in Sect. 5.

5. - Examples.

Example 1. Let $V = L^2(0, 2\pi)$, $D_A = \{ u \in H^1(0, 2\pi) \mid u(0) = u(2\pi) \}$, $A = i \dfrac{d}{dt}$.

Let $b(\cdot)$ be a real-valued function in $L^\infty(0, 2\pi)$ and $(Bu)(t) = b(t)\, u(t)$.

In this case $\sigma(A) = \sigma_{pp}(A)$ and:

$$\mu_k = k, \quad n_k = 1, \quad u_k(t) = e^{ikt} , \qquad k \in Z .$$

Condition (i) of Theorem 4.1 becomes:

$$(Bu_k, u_k) = \int b(t)\, dt = 0 .$$

Condition (ii) follows by (i) because:

$$\sum_{l \neq k} \frac{|(Bu_l, u_k)|^2}{(k-l)^2} \leq \|Bu_k\|^2 \sum_{l \neq k} \frac{1}{(k-l)^2} < +\infty \qquad \forall k \in Z .$$

On the other hand, condition (ii') of Theorem 4.6 doesn't hold:

$$(B^2 u_k, u_k) = \int b^2(t)\, dt , \qquad \alpha_k = 1 .$$

Example 2. Let V and A as above, and

$$(Bu)(t) = \int b(t, s)\, u(s)\, ds$$

where $\overline{b(t, s)} = b(s, t)$ and $b(\cdot, \cdot) \in L^2([0, 2\pi]^2)$. Here condition (i) of Theorem 4.1 becomes:

$$\int b(s, t)\, e^{ik(s-t)}\, ds\, dt = 0 ,$$

and the stronger condition (ii') is satisfied:

$$\sum_k \frac{(B^2 u_k, u_k)}{\alpha_k^2} = \sum_k (B^2 u_k, u_k) = Tr(B^2) < +\infty$$

Example 3. Let $V = L^2(0, \pi)$, $D_A = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$ and $A = \dfrac{-d^2}{dt^2}$; let $b(\cdot)$ be a real-valued function in $L^\infty(0, \pi)$ and

$$(Bu)(t) = b(t)\, u(t) .$$

Here $\mu_k = k^2$, $n_k = 1$ and $u_k(x) = \dfrac{1}{\pi} \sin kt$, $\qquad k \in N$.

Condition (i) of Theorem 4.1 becomes:

$$\int b(t)\, dt = \int b(t) \cos(2kt)\, dt \qquad \forall k \in N ,$$

whence it follows that

$$\int b(t)\, dt = 0 = \int b(t) \cos(2kt)\, dt \qquad \forall k \in N ,$$

as $\{\cos(2kt)\}_{k \geq 0}$ is an orthonormal set in $L^2(0, \pi)$. On the other hand, $\alpha_k = k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$; then (ii') is satisfied.

Example 4. Let $V = L^2(0, \pi)$, B as in Example 3 and

$$D_A = \{ u \in H^2(0, \pi) \mid u'(0) = u'(\pi) = 0 \}$$

$$A = \frac{-d^2}{dt^2} .$$

In this case we find the condition

$$\int b(t)\ \cos^2(kt)\, dt = 0 \qquad k = 0 \text{ and } k \in \mathrm{N}\ ;$$

condition (ii') is again satisfied.

Example 5. Let $\mathrm{V} = \mathrm{L}^2(\mathrm{R})$, $\mathrm{D}_\Lambda = \mathrm{H}^1(\mathrm{R})$ and $\mathrm{A} = i\,\dfrac{d}{dt}$.

As it is well known, an example of spectral representation of A is given by the Fourier trasform $\mathfrak{F} : \mathrm{L}^2(\mathrm{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathrm{R})$ where:

$$(\mathfrak{F}\,\mathrm{A}u)(k) = k\,(\mathfrak{F}\,u)(k)\ .$$

Depending on the kernel $b(k, k')$, we can choose the dense subset $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{V}$ (see Sect. 3) in different ways so that the assumption H) and the hypotheses of Theorem 3.1 are satisfied. For instance, let $b(k, k') = \beta(k - k')$, where $\beta(k) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{R})$ and $\dfrac{\beta(k)}{k} \in \mathrm{L}^1(\mathrm{R})$; in this case we can set $\mathrm{Y} = \mathrm{V}$ and B is the multiplication operator by $(\mathfrak{F}^{-1}\beta)(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{R})$. Hypothesis (ii) of Theorem 3.1 is trivially satisfied.

6. - Conclusions.

It is worth comparing the present methods and results with those of other papers on the same subject and related topics. The method of solution we use, although independently derived in Ref. [7], is essentially the same as given by Freeman in Ref. [5] and Rosenblum in Ref. [6] (here, however, formulas for the resolvent of A, instead of the group e^{itA}, are used). The bounded solutions they prove to exist are weak operator points of accumulation of the set $\{ \mathrm{X}_\lambda \mid \lambda > 0 \}$, which is supposed to be bounded in the uniform topology; in this respect, Theorem 3.1 above seems to be a natural generalization of their results. On the other hand, using the spectral theorem in the proof of Theorem 3.1 is strongly reminiscent of standard methods employed when solving the Friedrichs equations in stationary scattering theory; here, however, approximations of a different kind than the X_λ's are used (this point is stressed in Ref. [5]).

Useful suggestions for further developments of the present work are to be found in the extensive literature raised by perturbation theory of continuos spectra and by general algebraic problems (chara-

terization and properties of derivations on a Banach algebra (Ref. [2], [9], [14])). In particular, weakening the general assumption for the existence should be connected with the theory of singular integrals, in the same way as when looking for a bounded solution.

Finally, we remark that the lack of self-adjointness for our unbounded solution — which would be required in the physical motivation of the present work outlined in Sect. 1 — is possibly connected whith the boundedness of the operator B, an assumption which is not met in physical cases.

REFERENCES

[1] C. R. PUTNAM, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators* (Springer, Berlin 1967).
[2] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer, Berlin 1966).
[3] K. O. FRIEDRICHS, *Spectral Theory of Operators in Hilbert Space* (Springer, New York 1973).
[4] P. DE MOTTONI and A. TESEI, Lett. Nuovo Cimento **5**, 341 (1972).
[5] J. M. FREEMAN, J. Math. Mech. **19**, 819 (1970).
[6] M. ROSENBLUM, Proc. Amer. Math. Soc. **20**, 115 (1969).
[7] G. DA PRATO, J. Math. Pures et Appl. **52** (1973).
[8] E. NELSON, *Topics in Dynamics I: Flows* (Princeton University Press, 1969).
[9] T. KATO, Math. Ann. **162**, 258 (1965).
[10] SUE-CHIN LIN, Trans. Amer. Math. Soc. **139**, 469 (1969).
[11] H. BAUMGAERTEL, Math. Nachr. **42**, 359 (1969).
[12] P. HESS and T. KATO, Comm. Math. Helv. **45**, 524 (1970).
[13] H. SUZUKI, Proc. Japan Acad. **47**, 173 (1971).
[14] J. G. STAMPFLI, *Derivations on* $B(\mathcal{H})$: *the Range* (preprint).

Contributo alla morfologia del Somma-Vesuvio

Il cratere anteriormente al parossismo del 79 d.C. *

Nota di VIRGILIO CATALANO
presentata dal socio ordinario GIUSEPPE IMBÒ

(Adunanza del 18 gennaio 1975)

RIASSUNTO. — Una ricerca analitica sul significato religioso e sul valore vulcanologico del dipinto di Larario rinvenuto a Pompei nella sontuosa *domus A. Rustii Veri* — la casa nel 79 era ancora in fase di restauro per i gravi danni causati dal vulcanosismo del 62 — consente all'autore di scoprire la sicura raffigurazione del monocipite *Vesuvius mons* e di ravvisare nel semiverdeggiante cratere la multisecolare culla genetica dell'odierno Gran Cono Vesuviano.

L'autore, inoltre, ritiene di poter riconoscere nell'area craterica, forse anche sul fianco occidentale del Somma, la documentazione della trascorsa attività eruttiva e la presenza di esalazioni mefitiche, segnalata dall'osservatore pompeiano poco prima del parossismo esplosivo del 79.

SUMMARY. — A carefull study on the religious and vulcanological meaning of the Larario's painting found in the rich « domus A. Rustii Veri » (which on 79 A.D. was being restored, given the serious damages suffered during the 62 A.D. earthquake) let the author evaluate the morfology of the one-headed « Vesuvius mons » and discover, within the green crater, the location of the future Vesuvian Great Cone.

Moreover the author thinks that is possible to recognize in the crateric area and on the « Somma » western slope the traces of the passed eruptive activity and the presence of gases exalations which were noticed by the Vesuvian observer few years before the explosive paroxism of 79 A.D.

1. - PREMESSA.

Il problema morfologico se prima del 79 il sistema Somma-Vesuvio fosse un cono monocipite oppure un 'bipartito giogo' è tuttora irrisolto per la mancata univocità nell'interpretazione delle esigue fonti antiche descriventi il vulcano e per l'eccessivo valore iconografico attribuito ad alcune discordanti raffigurazioni orografiche dipinte prima di quel cataclisma eruttivo.

* Le citazioni bibliografiche, necessariamente sintetiche nel testo, sono completate nell'aggiunta bibliografica.

Se si esclude il tentativo di ricostruire stratigraficamente l'intera attività del Somma-Vesuvio sulla base della diversificazione mineralogica dei magmi (JOHNSTON-LAVIS 1884, 1888; RITTMANN 1933; RITTMANN e IPPOLITO 1947), purtroppo non risolutivo del problema morfologico in questione, finora nei numerosi interventi di geologi, storici ed archeologici, si è quasi sempre limitato a consultare le scarse fonti antiche, talvolta in traduzioni non personali, forzandone l'esegesi per adattare le descrizioni greche e romane al più recente cono, e ad accettare o respingere alcune delle menzionate raffigurazioni a sostegno della tesi seguita.

La diversità delle soluzioni offerte al problema, limitato ad una visione orizzontale e non verticale, ossia alla esistenza di cime affiancate e non di coni sovrapposti, comportava necessariamente una differente attribuzione del parossismo del 79 ad uno dei due plurimillenari cicli di attività del Somma o del Vesuvio. Questi due cicli — nel primo dei quali comprendo i tre lunghi periodi evolutivi del Somma — sono visibilmente documentati, oltre che nei materiali magmatici e piroclastici stratificati sulle pendici e sulle falde del vulcano, anche nella diversità di mole e di asse eruttivo sia dell'edificio sommano che di quello vesuviano ad esso sovrapposto:

I) l'antico *Vesuvius mons*, convenzionalmente detto 'monte Somma', avente circa 40 km. di circonferenza alla base (calcolata a quota 50 sul l/m) ed un circuito craterico di c. km. 11, misurato sull'ancora riconoscibile piano inclinato dall'insellatura di 700 m. (alterato di qualche centinaio di metri per stratificazioni laviche) alla quota meridionale di c. 600 m., con pareti residue nell'arcata craterica settentrionale (lunga c. km. 6; alt. mass. m. 1132);

II) il Vesuvio, o più esattamente il Gran Cono Vesuviano, sviluppatosi sull'antica piattaforma craterica del c. d. Somma fino ad occupare orizzontalmente quasi tutto il vasto pianoro (escluso sotto la cresta sommana l'area a forma di falce denominata Valle del Gigante, distinta in Atrio del Cavallo e Valle dell'Inferno) ed a raggiungere nel 1944, con un circuito craterico di c. km. 1,5, l'altezza di m. 1.270 (IMBÒ 1959, p. 54).

Com'è noto, i due edifici vulcanici, tendenti in futuro a saldarsi completamente, calcolati alla quota del cratere sommano, non sono concentrici: l'asse eruttivo del Gran Cono Vesuviano risulta spostato di c. 250 m. a sud-ovest in direzione di Torre del Greco (MALLADRA 1933, pp. 8, 18).

In base alle sole testimonianze fisiche del vulcano mi sembra possibile ritenere che le deposizioni piroclastiche sulle necropoli del Sarno del IX-VII sec. a. C., il vicino banco lavico su cui venne co-

struito nell'VIII-VII sec. a. C. l'abitato di Pompei, i materiali vulcanici impiegati nell'edilizia vesuviana antica ed i grossi proietti di calcare metamorfico da me rivenuti a quattro metri di profondità sotto l'antico piano di calpestio in Ercolano (CATALANO 1957, p. 113 ss.), siano riferibili all'attività parossismale del Somma. Di questa attività vulcanica mancano fonti scritte, ma un'eco potrebbe riscontrarsi nell'episodio omerico dei Ciclopi e nella Theogonìa esiodea, che tesorizzano descrizioni marinaresche diffuse dal Tirreno all'Egeo, poiché la presenza ellenica presso il fiume pompeiano — una volta navigabile — è testimoniata con influssi geometrici e vasetti protocorinzi nella suppellettile delle ricordate necropoli sarnensi fin dal IX sec. a. C.

Dopo queste ultime spettacolari esplosioni del Somma, verificatesi prima dell'impianto urbanistico di Pompei, un'apparente fase di inattività precede il ciclo successivo che, con lo spostamento dell'asse eruttivo, porterà *magno aevi spatio* alla formazione del Gran Cono Vesuviano.

Il ciclo 'storico' del Vesuvio (II), finora quasi bimillenario, può suddividersi in sottocicli (II*a*, II*b*), facilmente rilevabili per alcune comunanze nei fenomeni iniziali del 79 e del 1631, parossismi questi tra i più catastrofici di tipo pliniano (il secondo, accomunato da paravulcaniche colate fangose, più effusivo che esplosivo), apparentemente improvvisi, preceduti da secolare quiescenza e conseguente progressione del mantello vegetativo:

II*a*) il primo sottociclo sembra caratterizzato da moderate discontinue eruzioni prevalentemente esplosive, intervallate da secolari riposi, per cui l'altezza raggiunta dal nuovo edificio vulcanico in quindici secoli fu ben modesta;

II*b*) il secondo sottociclo si distingue dal precedente per la multiforme notevole intensità eruttiva, comportante una indifferenziazione quasi completa del magma vesuvitico, intensità capace di condurre in poco più di tre secoli — ad un ritmo medio pressoché costante fino al 1944 — il Gran Cono Vesuviano a superare di 138 m. la più alta vetta della residua cresta settentrionale del recinto craterico del Somma.

Nel quadro di questa sommaria ricostruzione per cicli millenari dell'evoluzione geodinamica del Somma-Vesuvio si inserisce cronologicamente sicura la testimonianza storica di un dipinto di Larario, la cui importanza eccezionale mi è apparsa risolutiva ad un'analitica lettura vulcanologica per la questione in esame. Ai fini della mia esposizione ritengo utile riprendere ed aggiornare bibliograficamente detta questione.

2. - Riesame della questione morfologica.

Giuseppe De Lorenzo considerava « adhuc sub iudice » la questione se i cenni relativi a passate eruzioni in Diodoro Siculo (IV, 21), Vitruvio (II, 6) e quelli meno laconici in Strabone (V, 4,8), dovessero riferirsi al monte Somma o al Cono Vesuviano (1931, p. 51), cioè se il Vesuvio, che in antico era sempre indicato col solo oronimo « Vesvius », fosse stato monocipite o già 'bipartito giogo' prima dell'eruzione del 79.

Il problema morfologico era stato posto per la prima volta su basi scientifiche dal geologo Scipione Breislak (1798, p. 108) e la sbrigativa soluzione, offerta con indubbia certezza, aveva incontrato unanime accettazione tra gli studiosi (D'Ancora 1803, p. 15; Gervasi 1805, p. 6; Daubeny 1826, p. 144; Phillips 1869, p. 45; von Buch 1887, p. 524; Johnston-Lavis 1891, pp. 52, 54) ed una conferma esplicita, secondo il Palmieri, Direttore dell'Osservatorio Vesuviano, col dipinto raffigurante Bacco ed un monte monocipite, scoperto a Pompei nel decimottavo centenario del 79 (Palmieri 1880, p. 233 s). Ma l'entusiastica identificazione del Palmieri, che aveva convinto gli archeologi F. Lenormant (1880, p. 147) e L. Fivel (1880, p. 12), non i pompeianisti A. Mau (1881, p. 235) e A. Sogliano (1892, p. 167), oltre ad incontrare tenace opposizione nello storico tedesco K. J. Beloch (1879, p. 215 s), cui si aggiunse il collega H. Nissen (1883, p. 269 s), non venne debitamente valutata neppure dal più noto sostenitore della tesi monocipite, perché da questi ritenuta fondata su rapporti 'superficiali e sommari' (Cocchia 1901, p. 47). In merito va notato che il disinteresse dei geologi per questo dipinto — tuttora in ottimo stato di conservazione — può almeno in parte attribuirsi alla seguente segnalazione, indubbiamente fondata su pessime riproduzioni fotografiche del secolo scorso, di un noto vesuviologo e tenace monocipitista (Franco 1887, 1898, 1899), la cui tesi legata ad un dipinto ercolanese fu seguita dal geologo francese de Lapparent (1897): « l'affresco era molto sciupato, e in seguito lo divenne ancor di più e non si poté ravvisare più nulla » (Franco 1898, p. 76).

Il contributo del filologo Cocchia, che subito meritò l'adesione del Sogliano (1901, p. 81 ss), comprendeva un esame erudito dei testi antichi raffrontati con nuove fonti medievali e moderne ed una suggestiva quanto inverosimile comparazione iconografica del citato dipinto pompeiano con una stampa seicentesca vesuviana disegnata da Napoli: il pittore antico, supposto napoletano di nascita o di 'elezione' dall'imaginifico filologo, avrebbe completato la visione del vulcano da Pompei « coll'aspetto che il Vesuvio presentava dal mare, cioè da Napoli » (p. 56). A me, invero, sembra insostenibile che un

pittore antico — per il Cocchia non diverso da un paesaggista moderno (p. 52) — incominci a dipingere il *Vesuvius mons* da sud-sud-est e lo completi da ovest-nord-ovest: ne risulterebbe un dipinto assurdo, poiché da Pompei il monte Somma appare all'osservatore sulla destra del pianoro (sul quale si erge la mole maggiore del Gran Cono Vesuviano) e da Napoli, viceversa, osserviamo sulla sinistra un più massiccio e diverso profilo del Somma.

Nonostante l'oraziano atteggiamento prudenziale che la questione morfologica fosse nel 1931 ancora *sub iudice,* il De Lorenzo, illustre Maestro dell'Ateneo napoletano, senza abbandonare le giovanili argomentazioni geologiche sostenute in polemica col Franco (De Lorenzo 1897, p. 566 s; 1898, p. 258 s), ripetute nella monografia artistica (1931, p. 52 s), e affidandosi al cenno straboniano sulla trascorsa attività vulcanica — riferita però non al cratere sommano ma a quello vesuviano — riteneva ancora possibile sostenere: « Per conto mio inclino a credere che l'attuale focolare eruttivo del Vesuvio esistesse già prima della famosa eruzione pliniana del 79 dopo Cristo » (1931, p. 51). Purtuttavia pochi anni dopo, nella riedizione a cura del compianto G. D'Erasmo della magistrale sintesi *Geologia dell'Italia meridionale,* mi sembra possibile constatare nel brano che riporto per intero, con l'abbandono della riferita convinzione del ' focolare eruttivo del Vesuvio ', sostituita dall'ipotesi che il parossismo del 79 potesse addirittura considerarsi l'ultima eruzione del Somma, l'avvenuto accoglimento da parte del senatore De Lorenzo della tesi monocipite: « Il grande cono fu poi squarciato e obliquamente troncato da grandiose esplosioni alquanto eccentriche (l'ultima delle quali fu forse quella del 79 d. Cr., che seppellì Ercolano e Pompei); le quali crearono una beante caldera, l'attuale Atrio, nel cui grembo sorse quindi il cono del Vesuvio, formatosi per successivi sbocchi di lava o per successive eruzioni di ceneri, lapilli e scorie » (1937, pp. 234, 238).

Probabilmente il Direttore dell'Osservatorio Vesuviano di quel tempo, che non partecipò alla dibattuta questione, se avesse potuto leggere il brano riportato, non avrebbe più annoverato il De Lorenzo fra i sostenitore della tesi bicipite (Malladra 1933, p. 19 s).

Sulla questione morfologica in seguito non si sono avuti contributi decisivi. All'intervento del ' bicipitista ' P. Preusse (1936, p. 11 ss), egregiamente confutato dal mineralogista-vesuviologo A. Parascandola, nel cui lavoro — non privo di acute osservazioni — tuttavia si ammette di non possedere « nessun argomento principe che possa senz'altro far decidere per il monte Vesuvio bicipite ovvero no » (1938, p. 59), sono da aggiungere: la tardiva adesione alla tesi del Beloch del pompeianista G. Spano (1941, p. 25 s: il dipinto raffigurerebbe

« non il paesaggio per dir così vesuviano, ma il Vesuvio considerato qual dio », cioè il Gran Cono Ves. dissociato dal Somma con la personificazione dei vigneti; p. 31: forse Bacco); l'autonomo convincimento dell'illustre petrografo A. Rittmann per la tesi monocipite nel contesto della riferita schematica ricostruzione integrale del sistema Somma-Vesuvio (1947, p. 24 s; 1950, pp. 472-4; 1972, p. 110, fig. 90).

Alla questione si interessò anche il vesuviologo G. B. Alfano, ma del lavoro inedito e senza titolo non si ha che un cenno riassuntivo con una ricostruzione del cono monocipite prima e dopo il 79 nello studio bibliografico sulle eruzioni vesuviane tra il 79 ed il 1631 (1924, p. 3 s).

Per l'inesistenza del Gran Cono Vesuviano prima del 79, già affermata dal geografo M. Baratta (1897, pp. 7-10; 1935, pp. 209-12) e, in modo lapidario, dal Mercalli (1907, p. 67: « Prima dell'era volgare il Gran cono vesuviano non esisteva »), si è di recente dichiarato in un articolo di divulgazione scientifica anche il Direttore dell'Osservatorio Vesuviano (Imbò 1967).

3. - Osservazioni critiche.

A) Senza entrare ulteriormente nel merito delle opposte tesi — considerate più a lungo nei citati lavori del Cocchia e del Parascandola — mi limito a ribadire le mie riserve sulle presunte omologie riscontrate nei seguenti dipinti assunti come prove nella questione morfologica con entusiasmo eccessivo, benché lavori di mero artigianato, privi di un sicuro valore iconografico e quindi d'interesse vulcanologico.

1°) Nel quadretto marino raffigurante in prospettiva a volo d'uccello, alquanto empirica e non priva di errori grossolani, architetture quasi irreali (due torri congiunte ma diverse, senza finestre e con altissime porte; strano edificio religioso ad archi), costruite su di un oblungo roccioso isolotto presso la terraferma di cui si scorge soltanto un monte senza linea costiera (Gell 1832, I, p. 83), il Cocchia credeva di riconoscere il Foro di Pompei ed il profilo del Somma (1901, pp. 41-4). Ma, se vogliamo considerare questo paesaggio animato (cinque figurine umane sulle rive e, sullo scoglio antistante il roccioso fronte minore dell'isolotto, capra con capretta e albero inaridito) una libera interpretazione pittorica di una località pompeiana, il menzionato profilo orografico non può essere identificato con quello del *Vesuvius mons*, anche se il meno aspro pendio di sinistra sembra accreditare la visione pompeiana da sud-est del Somma. Difatti l'iso-

lotto, se riproduce una località reale, dovrebbe corrispondere a quel prezioso documento geologico della conca sinclinale del Somma-Vesuvio che è Rovigliano, ormai eroso dagli agenti atmosferici e marini (De Lorenzo 1904, pp. 3, 4), perché esso costituisce l'unico approdo insulare nelle acque pompeiane a circa 500 m. dalla foce del Sarno. L'odierna Rovigliano, cioè la medievale *Insula Robiliani* denominata in antico *Petra Herculis*, comprende — come nel dipinto — uno scoglio situato ad ovest del vicino isolotto, che si allunga perpendicolarmente alla costa (Sogliano 1937: cfr. tav. III dell'ing. L. Jacono), sul quale doveva sorgere un faro per il vicino porto di Pompei e un'*Aedes Herculis*, edifici che potrebbero ravvisarsi in quelli dipinti nel piccolo paesaggio pompeiano utilizzato dal Gell come 'vignetta'. Poiché il monte raffigurato quasi a coronamento delle architetture e nello sfondo dello scoglio e del retrostante isolotto calcareo è da localizzarsi non a nord-nord-ovest, bensì a nord-est, in direzione del corso del Sarno, l'autore del quadretto avrebbe inteso rappresentare semmai una cima appenninica (Pizzo d'Alvano?), non certamente quella del Somma.

2°) Nel piccolo paesaggio marino rinvenuto a Ercolano (cm. 24,8 per cm. 8,9), parimenti animato e riprodotto come 'vignetta' all'inizio di due capitoli nel quinto volume delle « Pitture » (Accademici Ercolanesi 1779, pp. 161, 343) con il laconico commento « In questa vignetta è una veduta di mare con una barchetta, e di campagna con figure » (p. 393), le due *pergulae* stilizzate presso la costa ed un gigantesco albero, i due alberelli sull'opposta alta sponda e il sovrastante monte costituiscono gli elementi essenziali per disegnare un ambiente, vivacizzato da tre figurine e da una barchetta con due rematori, ma non rappresentano con certezza il panorama vesuviano ritratto da un posto tra Mergellina e Posillipo (Franco 1898, p. 79) o addirittura « dai dintorni di Resina » (Cocchia 1901, p. 17), come — pur dubitando — aveva per primo lasciato intendere l'Helbig (1873, p. 105: « in dem wir vielleicht eine Darstellung des Vesuvs anzunehmen haben »), anche se il versante illuminato del monte — in contrasto con la libera fantasia attestata nel dipinto — consente di immaginare la piattaforma craterica con la soprastante arcata del Somma e perfino il Colle del Salvatore tra il Fosso della Vetrana ed il Fosso Grande (Franco 1887, p. 12 s).

Ben lungi dal pretendere da un decoratore parietale antico una fedeltà fotografica in un paesaggio lungo meno di un palmo (mancherebbero gli abitati di *Neapolis* e di *Herculaneum*, le colline di Poggioreale e Capodimonte, la catena appenninica), oltre a notare che alla base del supposto Somma sia delineata una strada così

larga da dover valutarne l'altezza non superiore ad una collina, non mi sembra possa spiegarsi la vicinissima presenza del retrostante monte, che non corrisponde al profilo del monte Faitaldo (FRANCO 1898, p. 79) e tanto meno a quello del Gran Cono Vesuviano (SPANO 1941, p. 27 s), perché avrebbe dovuto occupare gran parte della piattaforma in piena luce, se non vogliamo accettare l'ipotesi che l'appena accennato profilo scuro di un secondo monte sia voluto soltanto per far meglio risaltare la parte illuminata del supposto Somma.

Anche a voler escludere che si tratti di un lavoro di mera fantasia, il quadretto potrebbe raffigurare un panorama parziale dei Lattari, osservato a sud della foce del Sarno, oppure un paesaggio vesuviano delineato a memoria, come sembra esserlo quello della precedente ' vignetta '. Ma non bisogna dimenticare che nessuno dei sostenitori delle opposte tesi mono-bicipitiste ha mai potuto osservare il dipinto originale, scomparso dopo il 1779, e che finora si è discusso su di un disegno calligrafico che potrebbe essere stato alterato anche non intenzionalmente, come ad esempio si può notare nella copia fatta disegnare nel 1887 dal vesuviologo Pasquale Franco: in questa i remi della ricordata barchetta risultano inclinati in senso opposto a quello risultante dall'incisione settecentesca ed i rematori, non più a capo scoperto, portano inspiegabili cappelli da preti. Pertanto la discussa omologia col Somma, per quanto suggestiva, è quindi una testimonianza improponibile per l'impossibilità di una verifica sul dipinto originale, nel sospetto che l'incisore del 1779, non diversamente dal disegnatore del 1887, abbia potuto accentuare o addirittura inventare vaghe somiglianze morfologiche tra la piccola raffigurazione ercolanese del monte (alta circa cm. 3) e il ben noto profilo del monte Somma.

3°) Nel dipinto pompeiano scoperto nel 1826 nella ' Casa di Bacco ', erroneamente ritenuto di Marte e Venere (GELL 1832, II, p. 60, t. XII), la semplice linea del profilo orografico ai lati di Adone e Afrodite, assisi presso l'albero di Myrrha tra quattro eroti, viene interpretata per quella del bicipite Somma-Vesuvio (osservata da Pompei) ora globalmente, ora nel solo tratto di sinistra (PREUSSE 1936, p. 12). Questa duplice interpretazione del Preusse, ritenuta ' arditamente arbitraria ' anche dal Parascandola (1938, p. 94), è di per sé assurda, poiché — nell'ipotesi globale — il profilo del Somma con dolci pendii risulta molto più alto di quello del sinuoso Cono Vesuviano, invece — nell'ipotesi parziale — il profilo del Somma è più acuto e più basso, anzi il più recente edificio vesuviano — non più così decisamente sinuoso — avrebbe quasi raggiunto prima del 79

l'altezza dell'attuale Gran Cono. Considero, pertanto, l'identificazione omologica del Preusse, tentata due volte in questa calligrafica riproduzione di sir William Gell a sostegno della tesi bicipite del Vesuvio nel 79, del tutto priva di credibilità.

B) Nel tentativo di risolvere la questione mono-bicipite del nostro vulcano anteriormente al 79, poiché le ricerche di fonti, documenti, raffigurazioni del Vesuvio si sono arrestate al parossismo del 1631, non è stato preso nella dovuta considerazione un dipinto napoletano del 1648 di notevole valore per la ricostruzione geomorfologica vesuviana, se non di sfuggita dal Cocchia che, senza riprodurlo, si limitava a constatare « il livello del Vesuvio come di molto inferiore a quello del Somma » (p. 64), e dal De Lorenzo, che pubblica soltanto la foto del quadro (1931, p. 42).

Domenico Gargiulo, più noto come Micco Spadaro, dipingendo dall'alto la napoletana piazza Mercato durante la sommossa antispagnola di Masaniello (1647), riproduceva nello sfondo il Somma-Vesuvio così come gli appariva dal posto di osservazione, situato di fronte al campanile di S. Maria del Carmine: sulla fedeltà del profilo orografico si può riporre una motivata fiducia, poiché — indipendentemente dalla sua bravura artistica — il Gargiulo, dovendo dipingere l'agile campanile, ha dovuto avere continuamente davanti agli occhi, subito dopo l'aggettante cornicione terminale della parte quadrata, quasi all'inizio della costruzione ottagonale, la bassa linea orizzontale dell'orlo craterico del recente Cono Vesuviano. Secondo il dato geomorfologico offerto dal pittore napoletano diciassette anni dopo l'eruzione del 1631, il recente Cono Vesuviano risulta appena distaccato dal vasto Atrio del Cavallo, cioè dal più antico fondo craterico, e bassissimo nei confronti della vetta del Somma. Pertanto, anche a voler supporre che l'attività esplosiva durante quel parossismo abbia notevolmente decapitato il più recente Cono (m. 168 precisa il Baratta, 1897, p. 37 s; m. 107 dopo l'eruzione del 1906), mi sembra possibile ritenere acquisito un nuovo elemento di conferma dell'altezza modesta raggiunta dal Cono Vesuviano per la scarsa frequenza dei fenomeni costruttivi verificatisi nell'arco di tempo fra il 79 ed il 1631 dopo lunghissimi riposi intervallanti le poche e malnote eruzioni (sicure nel 205, 472, 512, 685, 1036, 1139).

L'equiparazione delle due vette prima del 1631 nel disegno pubblicato dal Giuliani (1632, tav. riprod. in Parascandola t. III n. 1), ingiustificata anche rispetto alla stampa del Duca della Torre (ripubblicata in Cocchia p. 53 e in De Lorenzo 1931, p. 41), è da ritenersi, quindi, una ricostruzione posteruttiva del tutto arbitraria.

C) Per ragioni di brevità mi limito a segnalare soltanto due gravi inesattezze nelle quali sono incorsi gli studiosi che hanno consultato le fonti antiche con danno non piccolo delle opposte tesi sostenute o — quello che più conta — della verità.

Allorché Dione Cassio sale al Vesuvio, proveniente dall'antica Capua (oggi S. Maria Capua Vetere, celebre per l'anfiteatro romano), sua abituale sede nei soggiorni italiani dove aveva avvertito i « muggiti potentissimi » (μυκήματα μέγιστα) dei fenomeni eruttivi del 205 (*Hist. Rom.* LXXVI 2,1), forse nella primavera dello stesso anno, la visione dell'intera sommità del vulcano (LXVI 21,2: τὸ ὄρος σύμπαν) — dopo la felice intuizione che in passato il ciglione craterico doveva essere stato uguale in ogni parte (21,1: ἦν μέν ποτε πᾶν ὁμοίως ὑψηλόν) — gli suggerisce l'immagine di un enorme cavea di teatro (21,2: θεάτρῳ). La precisazione dionea del teatro adattato a spettacolo venatorio coi cani (κυνηγετικῷ), cioè con orchestra recintata come lo erano in età imperiale i teatri di Atene e Pompei, era forse voluta per rendere più icastica la visione del piano accidentato del cratere coi bordi appena rialzati della fossa craterica centrale dove scaturiva il fuoco (21, 1: ἀπ' αὐτοῦ μέσον τὸ πῦρ ἀνέτελλε).

Questa grandiosa immagine di teatro, ispirata nello storico Dione Cassio dall'arcata settentrionale delle pareti crateriche del Somma, formante il gigantesco curvilineo muro di sostegno della imaginifica cavea, è facilmente ricostruibile eliminando con la fantasia dalla visuale moderna il Gran Cono Vesuviano e, sulla sinistra, le cupole laviche dei colli Umberto e Margherita, ponendoci cioè alla periferia meridionale dell'ancora riconoscibile vastissima caldera del Somma.

Ben diversa topografia ci offrirebbe invece il paragone con l'anfiteatro, come purtroppo tutti hanno finora tradotto (anche il Cocchia, che però a p. 34 tenta di precisare: « specie di anfiteatro »): un recinto craterico a pianta ellittica con pareti uguali in ogni settore, il che, oltre a non trovare riscontro nel testo greco e nella realtà geomorfologica, non può neppure adattarsi al supposto cratere del nuovo Cono Vesuviano per l'esplicita affermazione di Dione Cassio che il paragone col teatro venatorio è da riferirsi al monte nella sua totalità (21, 2: ὥστε κυνηγετικῷ τινι θεάτρῳ τὸ ὄρος σύμπαν ἐοικέναι). Sul vasto pianoro craterico all'inizio del III sec. d.C., centoventisei anni dopo l'eruzione del 79, non esisteva quindi alcun Cono Vesuviano, perché altrimenti la sua presenza avrebbe impedito alla fantasia di Dione Cassio l'immagine del ' teatro venatorio '. Lo storico greco precisa inoltre che ai suoi tempi la parte centrale risultava concava perché ogni anno consumata dal fuoco (21, 3-4 e 22, 1) e che sulle pareti più alte (dove in basso ora sono gli abitati di Somma e Ottaviano) erano alberi e molti vigneti (21, 3: δένδρα καὶ ἀμπέλους πολλάς): una situa-

zione geomorfologica ed agricola non diversa da quella descritta da Strabone nel 2 a.C. e da Procopio di Cesarea, consigliere giuridico di Belisario a Napoli dal 536, se si esclude la maggiore profondità della bocca craterica (*De bello gothico* II, 4: σπήλαιον κατά μέσον μάλιστα βαθύ).

Per Strabone, Dione e Procopio l'escursione vulcanologica si arresta al vastissimo cratere sommano, nella cui parte centrale essi osservano i segni della trascorsa o presente attività nel fondo di fosse crateriche più o meno profonde e le retrostanti residue pareti crateriche che, per risultare esternamente ricoperte anche in alto di vegetazione, non potevano essere che quelle del Somma. Eppure questa semplice verità geomorfologica non sempre è apparsa evidente ai sostenitori della tesi bicipite, tetragoni nel convincersi che nessuno di questi scrittori greci, né il naturalista Plinio, né il nipote, autore delle famose epistole sul parossismo del 79 (VI, 16 e 20), abbiano mai considerato il monte bicipite e che il primo esplicito riferimento al 'bipartito giogo' si ha solo col Petrarca, che del Vesuvio *biceps* ricorda anche l'oronimo *Summa*, documentato come toponimo per la prima volta verso il 937 (Capasso 1881, p. 39; Cocchia 1901, p. 7).

4. - Significato, finalità e datazione del dipinto religioso pompeiano dedicato al genio del « Vesuvius Mons » da A. Rustio Vero.

Il presente contributo alla morfologia ed allo stato del sistema Somma-Vesuvio anteriormente al 79 d.C. scaturisce dall'osservazione diretta di una testimonianza artistica divenuta famosa senza essere stata esaminata in modo analitico e pertanto scientificamente inedita, anche dal punto di vista vulcanologico, dopo la folgorante intuizione del Palmieri che, commosso per aver 'divinato' la forma monocipite del vulcano prima della catastrofe eruttiva abbattutasi sulle note città costiere, in una breve citata comunicazione si limitava a riconoscere il Vesuvio nel monte monocipite con Bacco (1880, p. 233 s; Elia 1932, n. 99 con bibl. essenziale).

La pittura in esame — ora esposta al primo piano del Museo archeologico di Napoli, sala LXXVII, n. 119286 (cm. 101 × 142) — era stata eseguita nell'atrio del quartiere servile di una vastissima abitazione pompeiana sulla via di Nola (*reg.* IX, *ins.* VIII, nn. 1, 3, 6), una delle poche in città ad essere dotata di ξενών (*hospitium*), rimessa per animali da soma (*stabulum*), ninfeo e bagno completo di un grande recente *frigidarium*.

Per amore di esattezza è doveroso precisare subito che detta abitazione, scoperta nel decimottavo centenario dell'eruzione del 79 e pertanto denominata 'Casa del Centenario' anche dagli studiosi

del dipinto in questione, andrebbe indicata col nome del proprietario *Aulus Rustius Verus*, candidato alla massima magistratura di Pompei molto probabilmente dopo il terremoto, poiché nel programma elettorale da lui fatto dipingere sull'ingresso principale (n. 6) egli chiedeva l'appoggio dell'ex duumviro in carica nel 62 (DELLA CORTE 1954, p. 107 s).

Questa pittura, che per la resa a macchie del volto di Bacco, per le luci ed il rapido impiego del colore considero di tecnica 'impressionistica', ossia *compendiaria*, come sprezzantemente la definiva Petronio nel 65 d.C. (*Satyricon* II, 9), unitamente a molti altri dipinti parietali della stessa casa ad impianto sannitico, appartiene al così detto 'quarto stile' (pochi al vecchio 'terzo stile'), diffuso nell'ultimo ventennio di vita a Pompei. Risulta pertanto del tutto erronea — a mio avviso — la tardiva apodittica datazione del Sogliano, che riteneva il dipinto da lui illustrato subito dopo la scoperta (1879*b*, p. 14) e la descrizione di Strabone del 2 a.C. « testimonianze quasi sincrone » (1937, p. 15).

La determinazione cronologica del dipinto può essere ulteriormente precisata poiché in questa grandiosa dimora erano ancora in riparazione le vecchie strutture perimetrali e parietali, gravemente danneggiate dal terremoto del 5 febbraio 62 (TACITO *Ann.* XIV, 48; XV, 22), ed in particolare l'intonaco dell'atriolo veniva rifatto dopo il sismo (sulla parete nord detto intonaco risulta sovrapposto ad opera mista, blocchi di calcare o tufo alternati con doppia fila di laterizi). Pertanto, indipendentemente dalla sintetica indagine stilistica, la decorazione murale religiosa sulla faccia occidentale del muro del disastrato peristilio mi sembra possa datarsi a pochi anni prima della catastrofe vesuviana del 79, negli anni in cui anche nella vicina casa ad impianto sannitico IV, I, 26, dopo le necessarie sarciture, ricostruzioni e restauri, il ricco banchiere L. Cecilio Giocondo faceva inserire nel nuovo Larario i due rilievi marmorei descriventi gli effetti più disastrosi del terremoto, che a Pompei più che altrove *magna ex parte proruit* (TACITO *Ann.* XV, 22), e cioè: il crollo del Tempio di Giove e quello della vicina Porta Vesuvio (MAIURI 1942, p. 10 s).

Nel clima di fervore religioso conseguente al terremoto che a Pompei, dove l'urto sismico raggiunse la massima intensità del IX grado della scala Mercalli (ALFANO e FRIEDLAENDER 1929, p. 10; IMBÒ 1974, pp. 136-41), aveva causato il crollo del *Capitolium* e l'arresto della ricostruzione del tempio di Venere, patrona della città, il desiderio di essere protetti da future disastrose calamità fu così estremamente avvertito da suggerire la costruzione di una grande *Aedes* in marmo nel Foro per i Lari pubblici ed il restauro o la riedificazione di Larari compitali e domestici.

Il nostro candidato al duumvirato A. Rustio Vero (ignoriamo se riuscì a ricoprire la massima carica cittadina), oltre a curare probabilmente il restauro dell'ara compitale sul quadrivio all'angolo occidentale del prospetto del suo isolato, invece di un nuovo massiccio Larario in marmo come quello del menzionato banchiere, preferì rivestire di marmi l'antica edicola scavata nel muro meridionale dell'atriolo (visibile dal lungo corridoio dell'atrio n. 3) e, dopo averlo fatto recintare con un basso muretto aperto a nord, esternamente dipinto in nero (internamente ad imitazione di policromo marmo venato), ricoperto superiormente in legno, di cui non trovo più tracce e così dell'ara in pietra posta nel piccolo recinto (SOGLIANO 1879*a*, p. 286), volle arricchirlo di significative pitture religiose quasi a farne un sacello votivo. Difatti, oltre ai soliti festoni, serpente *agathodaimon* presso l'ara 'ardente' (fiamme evanide), alberelli coi due Lari versanti vino dal *rhytòn* nella *situla* (dipinto asportato), si rinvenne sulla parete ad angolo, proprio di fronte alla porta d'ingresso (n. 1), ampliata contemporaneamente (nuovo stipite meridionale in mattoni di tufo alternati con doppia fila di laterizi), il grande pannello votivo con la discussa figura di Bacco (Fig. 1), emergente in chitone verde a maniche lunghe da un artistico colossale grappolo d'uva rossigna (non 'nera'!), presso la non meno discussa raffigurazione del Vesuvio, cioè del Somma, che subito dopo la scoperta veniva descritta dal Sogliano come « una rupe molto scoscesa in forma conica » (1879*a*, p. 285), quindi come « montagna scoscesa » (1880, p. 232).

Non è arbitrario supporre — come si noterà meglio fra poco — che il proprietario di questa sontuosa abitazione disponesse di molti terreni coltivati a vigneti sul Vesuvio se fece raffigurare non dal solito pittore artigianale di Larario ma da un artista, nel recinto a podio e vicinissimo all'edicola coi Lari, il dio della viticoltura, definito da Esiodo χρυσοκόμης (tale appare nel dipinto con solari fulve chiome coronate di pampini), e la « montagna scoscesa », sul cui fianco occidentale figurano molti filari di viti. Che Bacco, protettore della vinifera Campania (PLINIO, *Nat. Hist.*, III, 5, 60), preferisse risiedere sul verdeggiante Vesuvio è risaputo dall'epigramma IV, 44 di Marziale: risulta estremamente evidente che il monte vinifero col gigantesco Bacco poggiato al tirso nell'atto di versare vino dal *kàntharos* e in compagnia dell'animale a lui sacro, una giallastra pantera maculata del tipo *Felis nebulosa*, non può essere che il Vesuvio, anche se non disponessimo di ragioni ancora più solide per una indiscutibile identificazione.

D'ora in poi la lettura del testo sarà indubbiamente più proficua se ci si avvarrà della documentazione fotografica e grafica: l'invito mi consente di evitare continui richiami al materiale illustrativo.

Il monte viene raffigurato senza le più basse pendici e le falde: il piano craterico comprende sulla sinistra un'alta vetta e, sulla destra, un vasto pianoro quasi circolare, incompleto nella parte meridionale per ottenere uno stacco dalla sottostante figurazione religiosa del gigantesco serpente *agathodàimon* presso l'ara.

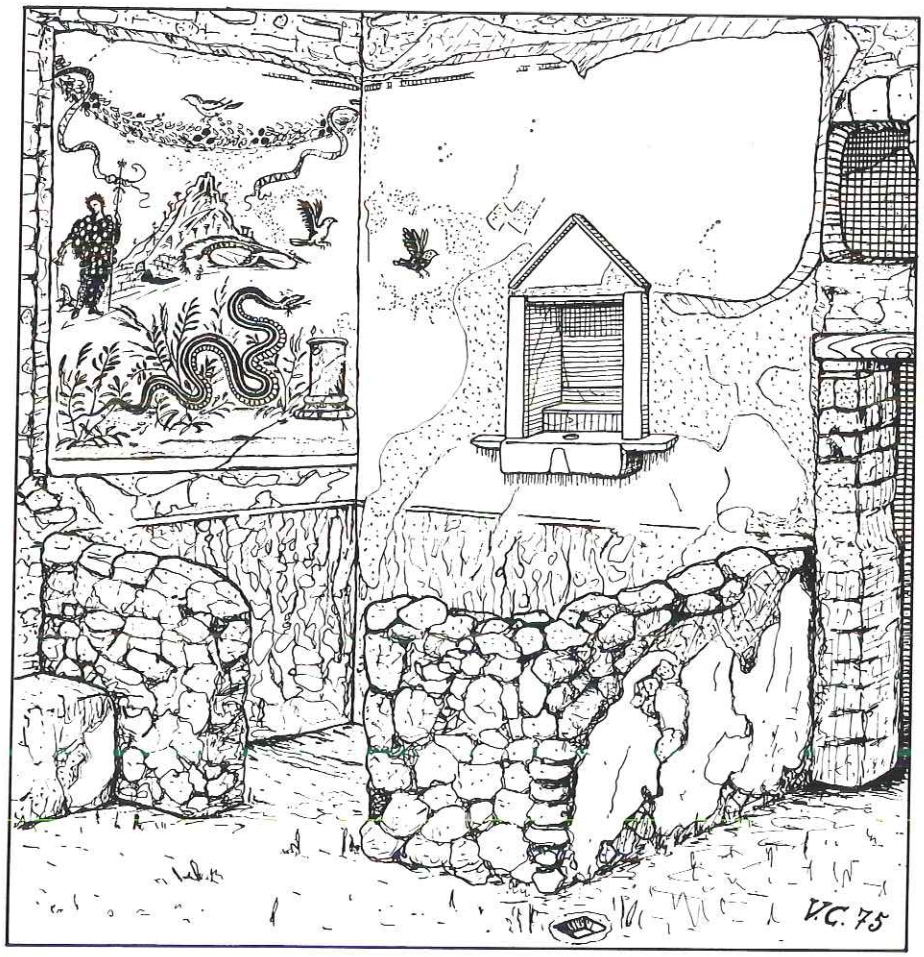
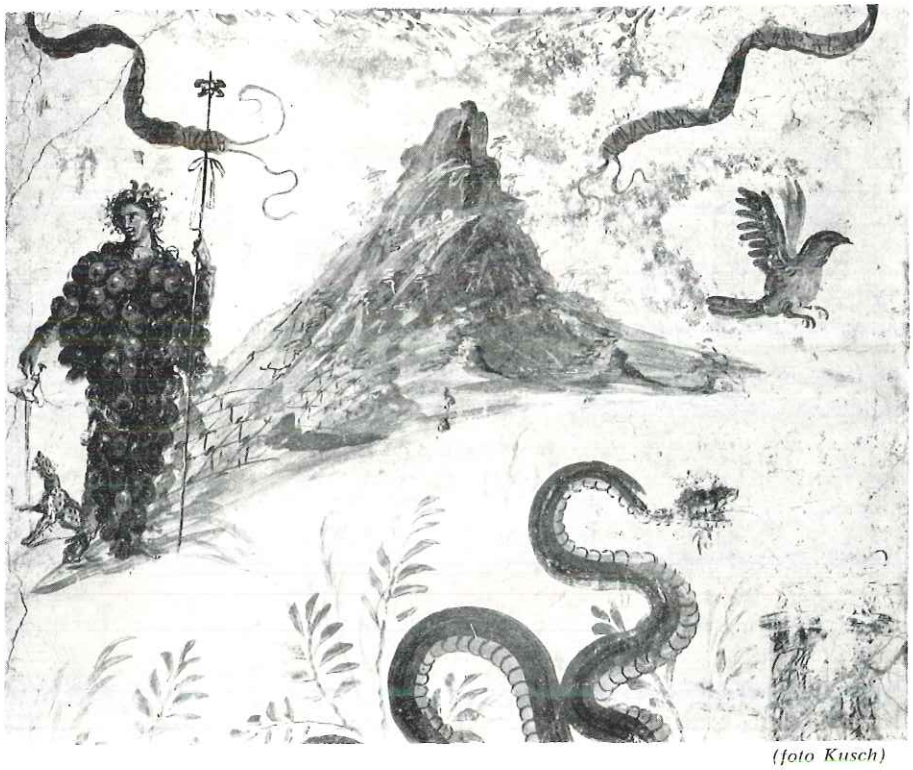


FIG. 1. - Larario pompeiano inedito di A. Rustio Vero.

La vetta laterale appare dentata, oserei dire seghettata, specie nel versante di destra, arida soltanto nella cima (lo rivelano le pennellate in marrone scuro e l'assenza di vegetazione); la parete esterna della vetta risulta ricoperta di alberi fin quasi a livello del pianoro, quindi seguono i vigneti, rappresentati in forme schematiche e — per ragioni di spazio — solo nell'area occidentale sulla quale si erge nel

colossale grappolo d'uva rossigna la ieratica figura di Bacco. La parete interna, a differenza di quella esterna, appare quasi precipite ed incavata, non soltanto per effetto delle tinte scure, ma anche perché — digradante nei versanti di ponente e levante — discende sul pianoro incurvandosi per un emiciclo con ombre e alberature stilizzate in linee chiare sul fondo scuro. Ci troviamo, a mio avviso, di fronte a un audace tentativo di rappresentare di scorcio la residua arcata



(foto Kusch)

FIG. 2. - Fascia centrale del dipinto di larario di A. Rustio Vero.

craterica del Somma, lunga circa 6 km., ed il fianco occidentale del vulcano coperto di vigneti.

Nel pianoro quasi circolare, in un'area alquanto spostata dal centro verso la più alta vetta della parete craterica, si apre una larga fossa (nel dipinto diam. di oltre 17 cm.), di cui sono visibili avanzi dei bordi e le precipiti pareti settentrionali, dipinte in marrone chiaro (profond. di c. 3 cm.) con alcune più scure cavità; sull'opposta digradante sponda si delineano nettamente grossi scuri macigni, che confermano la testimonianza straboniana delle pietre fuliginee di cavernose concavità (V, 4, 8: κοιλάδας φαίνει σηραγγώδεις πετρῶν αἰθαλωδῶν).

All'interno di questa fossa alcune sottili chiare rettilinee pennellate su fondo verdastro indicano una superficie liquida. L'orlo superiore di questo bacino si ripete in modo da formare — *si parva licet componere magnis* — il segno aritmetico di « 8 », visto in posizione orizzontale prospettica, ma il secondo recinto offre una superficie pianeggiante in colore verde e marrone-chiaro con alcune macchioline scure sollevate dal bordo estremo. Se la mia lettura vulcanologica è esatta ci troveremmo di fronte alla preziosa documentazione di un antico gigantesco cratere di esplosione del diametro di oltre un chilometro.

Sul fianco occidentale del monte, quasi all'ingresso del pianoro craterico, poche e minute pennellate sembrano accennare più che un motivo-firma del pittore, un comune termine di confine di proprietà in forma di impressionistica erma priapica al limite dell'area coltivabile. A notevole distanza da questa indicazione e dal punto in cui le pareti crateriche sembrano abbassarsi quasi al livello del cratere, una massa verde-scuro s'incurva ingrossandosi gradualmente in basso tra i filari dei vigneti, che bruscamente la interrompono verso la fine. Poiché l'attenta osservazione dei chiaroscuri del dipinto porta ad escludere per sagomatura, intensità cromatica e assenza di sfumature marginali che detta massa sul vitifero pendio possa indicare una mera accidentalità del terreno, come l'imprecisa prospettiva sembra suggerire a prima vista per l'eccessiva inclinazione, inesattezza non infrequente anche in dipinti antichi di maggior impegno, non escludo la possibilità che questa particolare segnalazione topografica, voluta dal pittore per rendere riconoscibile la proprietà vinifera del committente A. Rustio Vero e per meglio intendere — come si indagherà fra poco — la finalità del dipinto di Larario, possa costituire un'interessante testimonianza inedita dell'attività effusiva prima del 79.

Indubbiamente l'osservazione diretta dell'intonaco pompeiano, sul quale il nostro vulcano viene rapidamente dipinto con tavolozza avara (ad es. manca l'azzurro) ma non trascurata per la notevole grandezza di oltre 63 cm. di base e 35 cm. d'altezza, renderebbe più evidente questa descrizione geomorfologica che ho corredato di una essenziale documentazione (Figg. 1-4: Larario inedito, fascia centrale del dipinto, fotointerpretazione, volatile inedito).

Per valutare meglio questa sicura raffigurazione pompeiana del *Vesuvius mons* si rende necessario considerare la degradazione ad opera degli agenti atmosferici, certamente subìta in circa diciannove secoli dalle residue pareti scoscese del cratere preistorico e tener conto degli immancabili crolli dovuti all'azione dirompente durante le fasi esplosive, a partire da quelli del 79 (annotati in forma generica da Plinio il Giovane in *Ep.* VI, 16: *ruinaque montis*), nonché ai

fenomeni di assestamento posteruttivo ed a quelli conseguenti alla frequente attività sismica. Ma questa arcata craterica del Somma che nel dipinto pompeiano appare contratta e notevolmente più alta, anche perché il livello dell'Atrio del Cavallo si è sollevato per le plurisecolari stratificazioni magmatiche e per le cupole laviche del 1891-3 e 1895-9 (Colli Margherita e Umberto), costituisce una visione da interpretare considerando la tettonica vulcanica e la particolare

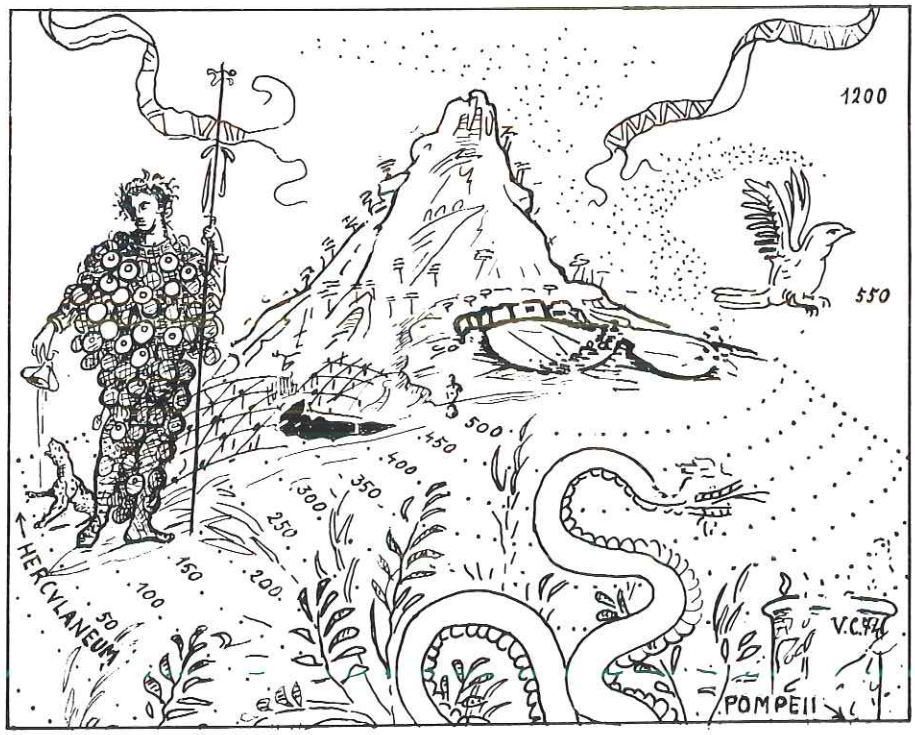


FIG. 3. - Fotointerpretazione della Fig. 2 a cura di V. Catalano.

concezione dell'arte antica in tema di paesaggio, non vedutistica e tecnicamente imperfetta.

Le correzioni apportate dal pittore nel versante occidentale del monte, per due volte ampliato verso la figura di Bacco, mi inducono a ritenere che l'artista — indubbiamente conoscitore dei luoghi — abbia lavorato a memoria, con o senza appunti grafici *in situ*, su impressioni forse ricevute dall'alto (per es. dal Colle dei Canteroni): egli avrà così potuto ottenere panoramiche del vasto cratere con la grandiosa gemina concavità, nonché osservare e segnalare sulla sinistra l'arida massa verde-scuro che interrompeva la continuità dei

vigneti del committente. La residua cresta craterica del Somma viene rappresentata in prospettiva sfuggente, di scorcio da nord-ovest a sud-est, sulla sinistra del grande pianoro dal quale ora si eleva la possente mole del Gran Cono Vesuviano: il pittore che dipinge sulla parete dell'atriolo pompeiano di A. Rustio Vero fruga nella memoria un'immagine sintetica, diretta a descrivere, più che la vetta, il cratere ed il fianco occidentale del vulcano, interessato a localizzare le proprietà del committente, estese in quel tempo fin quasi all'orlo soprastante il pianoro craterico.

A questo punto potrebbe tornare utile ribadire il concetto che l'arte antica pone al centro del massimo interesse la figura umana e che il paesaggio, mai inteso come fedele riproduzione dal vero, solitamente viene rappresentato quale scenario naturale da inventare per umani protagonisti, se si escludono quei ricordati quadretti artigianali di pochi centimetri quadrati, spesso lunghi meno di un palmo, dipinti nei corridoi o per riempire spazi secondari delle pareti.

Ma in questa pittura di grande modulo (cm. 102 per cm. 142 il *Vesuvius mons* assume un valore preminente in via del tutto eccezionale — anche se la figura di Bacco assorbe il maggior impegno pittorico — e costituisce il soggetto principale non soltanto per lo spazio dedicatogli (cm. 63 × 35; nel cit. quadretto ercolanese il supposto Somma misura cm. 9,07 × 2,56 circa) e per essere collocato a centro della raffigurazione religiosa, come nei Larari Compitali dominava il *Genius Augusti*, ma anche perché raffigurato nella sua inconfondibile sommità craterica e produttività vinifera, così — ad esempio — nell'erma ritratto del *Genius* di L. Cecilio Giocondo sono raffigurati soltanto la testa e gli organi genitali del banchiere. Il Penate, difatti, è il solare fecondo dio della riproduzione vegetativa e della vigna in particolare, invocato a mio avviso quale mediatore — tale era per le libagioni di vino βάκχος nei misteri Eleusini — tra il devoto A. Rustio Vero ed il *Genius Vesuvii montis* perché proteggesse i suoi vigneti vesuviani. Forse per mera suggestione della riscontrata centralità il ruolo del Vesuvio in questa pittura religiosa era balenato anche al Sogliano, che riteneva Penate il dio del vino pur ammettendo che « il vero e proprio dio Penate sia il Vesuvio », ma l'intuizione non si estendeva alla funzione mediatrice di *Bàkchos* allorché cercava di spiegare in forma apodittica il rapporto fra le due divinità, a mio avviso non del tutto convincente: « Come l'attributo è il simbolo della divinità, così Bacco è il simbolo della natura vinifera del Vesuvio » (1901, p. 85; 1937, p. 13). A conferma della mia interpretazione ricordo che nel dipinto sacro ercolanese dedicato in lettere evanide al *Genius huius loci montis*, ossia al Genio di una località ercolanese del *Vesuvius mons*, rappresentato da un serpente, è pre-

sente sulla sinistra — quale Penate — il giovanetto Arpocrate, cioè nella stessa posizione e funzione protettrice di Bacco nel dipinto di Larario in esame (CATALANO 1963, p. 315 s, Fig. 47).

All'artista pompeiano interessava consentire l'identificazione del *Genius Vesuvii montis* non certo attraverso la fedele riproduzione panoramica (quella del Somma senza il Gran Cono Vesuviano è ancora oggi irrilevante da Pompei), esigenza ignorata — come si è ripetuto — nel mondo figurativo greco-romano, bensì fornendo l'elemento caratteristico della sommità craterica vesuviana: l'ampio pianoro nel quale la descritta fossa si apriva come grandiosa iride. Per lui il



(foto Catalano)

FIG. 4. - Dipinto inedito di uccello presso l'edicola di larario di A. Rustio Vero.

Vesuvius mons contemplava non soltanto la vinifera sede di Bacco, ma anche quel ciclopico occhio craterico, minaccioso come quello di Polifemo. Difatti, mentre sulla semiverdeggiante vetta del Somma un volatile saltella sicuro su di un festone, poco al di sopra dell'orlo orientale del menzionato secondo recinto craterico, oltre quelle rilevate macchioline in marrone scuro, che potrebbero segnalare fuoriuscita di gas venefici, un altro uccello — quasi ghermito dalla coda alle ali in una significativa morsa nubiforme — fugge ad ali sollevate nell'atto disperato di evitare quello sguardo, ritenuto micidiale o forse effettivamente insidiato da getti di anidride carbonica, preceduto da un altro volatile, dipinto nella stessa posizione e direzione

di fuga, ormai in salvo, sulla vicina parete presso la marmorea edicola dei Lari.

Per un pittore, antico o moderno, indubbiamente non è agevole documentare la presenza nell'aria di gas mortiferi, ma la fuga dal cratere dei due uccelli non mi sembra possa interpretarsi diversamente, a meno che non si voglia considerare il fenomeno ingegnosamente dipinto dovuto ad un pericolo più temuto che reale: il pittore certamente conosceva che sul craterico lago flegreo, per implicita ammissione dell'idronimo 'Averno' ('A-ορνος) gli uccelli precipitavano nell'acqua perché colpiti da esalazioni venefiche, secondo una leggenda popolare raccolta da Strabone (V, 4, 5), ma la sua preziosa segnalazione artistica vesuviana, scaturita da osservazioni proprie o dei viticultori vesuvini, poteva trovare una conferma di verosimiglianza negli effetti di quei *saevi spiracula Ditis*, pericolosi già dai tempi di Virgilio (*Aen.* VII, 562) e che tuttora — come per recente personale costatazione — continuano a mietere vittime fra i volatili della Valle d'Ansanto che incautamente si avvicinano troppo alla Mefite.

Bacco poteva concedere la gioia e la ricchezza col vino raccolto su di una superficie vitifera in lenta espansione verso la sommità craterica, ma il *Vesuvius mons* si dimostrava datore di vita e di morte, generatore di frutti e di mortiferi effluvi, per cui la presenza di una deità fecondatrice della vegetazione veniva ad assumere nella concezione e nella sintassi figurativa del dipinto anche un significato simbolico, quasi meramente esplicativo a prima vista come appare quello dei volatili, la cui fuga — oltre a giustificare la richiesta protezione del vinifero Penate — mi sembra altresì pregnante del monito *Cave Vesuvium!*, certamente considerato dai viticultori vesuviani forse afflitti anche prima del 79 dal pericolo delle mofete. Quel *Vesbius*, che Marziale — pare soltanto nove anni dopo la catastrofe del 79 — lamentava di non essere più allietato dai satiri danzanti (IV, 44, 4), pochi anni prima dell'eruzione veniva ricordato dall'ingegnoso pittore di Larario a Pompei per la sua già insidiosa attività!

È stato osservato all'atto della scoperta del dipinto, poi ripetuto da tutti i pompeianisti e vesuviologi, che Bacco versa con la destra un liquido « dal cantaro in bocca alla pantera » (SOGLIANO 1879*a*, p. 285), ma basta esaminare attentamente il dipinto o una qualunque riproduzione fotografica per rilevarne l'inesattezza, poiché il vino — nessuno sospetterà che si tratti di acqua se versato dal *kàntharos* dionisiaco! — cade sulla terra.

La finalità di questa sacra cerimonia, scaturita dal clima espiatorio della *procuratio* alla dea Tellus per il terremoto del 62 (cerimonia religiosa testimoniata nei ricordati bassorilievi), a mio avviso

è la medesima espressa, certamente dopo l'eruzione flegrea di Monte Nuovo (1538), dall'autore della marmorea Sirena sprizzante dai benevoli seni getti d'acqua sul sottostante Vesuvio, scolpito con fiamme sui fianchi nei pressi dell'Università di Napoli sulla vasca della fontana di Spinacorona, sotto la perduta epigrafe *Dum Vesvii Syren / incendia mulcet* (CONFORTI 1892, p. 168 s; ALFANO 1929, p. 10 s). Come il viceré Pedro de Toledo si affidava alla maliosa sirena Parthenope perché con l'acqua allontanasse il pericolo degli ' incendia ' dai fianchi del Vesuvio, probabile allusione ai sanguinosi tumulti partenopei del 1547 contro l'inquisizione spagnola, così il ricco ed influente A. Rustio Vero chiedeva al suo Penate — ritenuto ' liberatore ' e ' salvatore ' nel credo precristiano (ἐλευθέριος, σωτήρ) — di salvaguardare benevolmente i suoi vigneti vesuviani dalla distruzione e dai malèfici effluvi del vulcano con rituali libagioni sulla terra vinifera di quel famoso *Vesvinum* che eccitava perfino la sua pantera.

5. - STATO DEL VULCANO ANTERIORMENTE AL PAROSSISMO DEL 79.

La pittura religiosa di A. Rustio Vero, per la prima volta studiata sull'originale custodito al Museo Archeologico di Napoli e nell'ambiente fisico-cronologico pompeiano in cui venne realizzata, per la prima volta ricollegata alla superstite testimonianza *in situ* di un altro volatile sulla vicina parete presso l'edicola di Larario (Figg. 1 e 4), acquista indubbiamente nuova luce che ad un attento esame consente di rilevare, a mio avviso, dati inediti sullo stato e sulla trascorsa attività del *Vesuvius mons*, utili anche per la soluzione di altri problemi connessi alla questione morfologica (cfr. PREMESSA).

Il vasto cratere del Somma si presenta nell'area centrale con l'aspetto di una residua voragine gemina, simile a quella ' quasi circolare ' ed ' ellittica ' osservata a chiusura dell'eruzione vesuviana del 1850 (SCACCHI 1850, p. 21 ss, t. III). Per il recinto orientale a contorni pressoché ellittici, interamente ricolmo di materiali vulcanici-alluvionali e dipinto a zone verdi e marrone-chiaro, forse non è da escludersi anche l'ipotesi di uno stato solfatarico; per il bacino occidentale la presenza di una superficie liquida, rivelata nella fossa craterica a mio avviso da alcune chiare pennellate rettilinee su fondo cupo verdastro, oltre che verosimile non è da considerarsi del tutto eccezionale. Questo fenomeno, invero, è stato già accertato nella storia del nostro vulcano per il periodo anteriore all'eruzione del 1631, allorché nel cratere — dopo secolare inattività — si formarono tre bacini con acqua calda, salata, insipida o di « sapore mordace ed amaro assai » (BRACCINI 1632, p. 26 s).

La presenza del lago craterico, l'estensione della vegetazione interessante un settore del vasto cratere (in corrispondenza dell'odierno Atrio del Cavallo) e, affidandosi all'approssimativa fedeltà prospettica del pittore pompeiano, la vicinanza del ricordato bacino occidentale alle pareti settentrionali del Somma, comportante un asse eruttivo non ancora eccentrico, non ancora spostato verso sud-est come è quello del Gran Cono Vesuviano, mi inducono ad ammettere per il periodo anteriore al parossismo del 79 una fase di quiete secolare, forse anche maggiore di quella che precedette il parossismo esplosivo-effusivo del 1631, per cui la documentazione vulcanologica risultante dal dipinto pompeiano mi sembra possa riferirsi all'attività di chiusura del Somma.

Per un sommario tentativo di datazione dell'ultimo parossismo sommano, a meno che negli auspicabili scavi stratigrafici sotto il piano di calpestio di Ercolano, Oplontis e Pompei non si scoprano materiali vulcanici fra strati archeologici cronologicamente sicuri, oltre la massa lavica su cui è costruita nell'VIII-VII sec. Pompei, le due non datate ' antiche lave ' rinvenute a 40 e 25 m. di profondità nei pozzi tra S. Giuseppe e Somma Vesuviana (PARASCANDOLA 1947, p. 31 s), la più recente tra le colate « precedenti l'eruzione del 79 » scoperte nei pozzi del suburbio pompeiano (LUONGO e RAPOLLA 1964, p. 20), ed i citati proietti di Ercolano che, in attesa dell'analisi microscopica affidata al prof. Parascandola (CATALANO 1957, p. 113 e 116), ritengo riferibili ad una spaventosa catastrofe eruttiva del tipo attestato nel dipinto e forse alla medesima, non possediamo che i soli dati offerti dai materiali piroclastici ricoprenti le necropoli sarnensi del IX-VII sec. a.C., finora i più recenti a noi noti prima del 79.

Nella menzionata massa verde-scuro che verrebbe a trovarsi nell'area occidentale sommana dei vigneti, verso gli attuali fossi della Vetrana e del Faraone (vi fluiteranno le lave del 1855, 1872 e del 1944), prima del cognolo di Giacca (m. 961), sui fianchi del sottostante colle tondeggiante già denominato ' Primo Monte ', dove ora, terminata a 500 m. la coltura della vigna, iniziano i boschi di querce e castagni (MALLADRA 1933, p. 9), si è tentati di riconoscervi — tenuto conto della discussa inesattezza prospettica che sembra accreditare l'ipotesi di un possente dicco conico — la documentazione di attività effusiva, forse non ascrivibile al ciclo sommano e, per una mera ipotesi, non escluderei ad esempio, come possibile riferimento storicamente noto, i fenomeni vulcanosismici del 62. La possibilità dinamica di un siffatto efflusso lavico sul versante esterno di nord-ovest del Somma viene confermata dalla scoperta nel non lontano Canalone di Pollena, ad una quota di circa 450 m., analoga a quella risultante dal dipinto (v. Fig. 3), di una piccola colata lavica di « ottavia-

nite ricca di leucite a chimismo sommaitico » come quella che da Somma Vesuviana giunge a Castelcisterna (attribuita al 79), ma mineralogicamente più vicina alle vesuviti e pertanto ritenuta sgorgata da una bocca eruttiva laterale apertasi in età posteriore al 79 (RITTMANN e IPPOLITO 1947, pp. 26 s, 28 s, 31). In merito però va notato che « la colata di Castello di Cisterna, stratigraficamente e chimicamente, risulta di molto anteriore all'eruzione del 79 d.C. » (DI GIROLAMO 1963, pp. 65 ss, 91).

La presenza nel dipinto della supposta piccola effusione lavica potrebbe rientrare nelle ragioni per cui il proprietario vesuviano A. Rustio Vero, dopo il vulcanosismo del 62, anzi poco prima del 79, temendo il ripetersi dei fenomeni calamitosi in seguito a non improbabili rinnovate scosse sismiche premonitrici dell'eruzione, aveva commissionato al pittore il pannello di Larario col Genio del *Vesuvius mons* e Bacco in atto di libare a tutela dei suoi vigneti presso il pianoro craterico.

Con maggiore evidenza la rilevata fuga degli uccelli, oltre a giustificare nel dipinto la cerimonia religiosa compiuta dal Penate nell'interesse del devoto proprietario dei vigneti vesuviani, mi sembra possa documentare fenomeni di vulcanismo secondario contemporanei al pittore pompeiano, cioè, come si è dimostrato, poco prima della catastrofe vulcanica. Pertanto, se le esalazioni non fossero dovute ad uno stato solfatarico ma ad una situazione fumarolica, resa più attiva o addirittura iniziatasi per le fratture apertesi col vulcanosismo del 62, detti fenomeni potrebbero considerarsi prodromici del parossismo eruttivo pliniano del 79.

6. - CONCLUSIONE.

Da quanto finora si è discusso risulta evidente che il dipinto di Larario, insolito per espressività figurativa, ricchezza di contenuto ed eccezionale fedeltà — sia pure approssimativa — della raffigurazione orografica, assurta a soggetto principale per motivi religiosi, perché considerata rappresentazione del *Genius Vesuvii montis,* acquista un incomparabile valore vulcanologico in quanto costituisce il più antico documento iconografico di un vulcano, attestante altresì l'attività passata e lo stato contemporaneo all'osservatore pompeiano, nel periodo cioè posteriore al terremoto vulcanico del 62, forse soltanto qualche anno prima del parossismo eruttivo del 79.

Per l'intelligenza della raffigurazione orografica esaminata non sarà superfluo ribadire l'utilità delle seguenti indispensabili osservazioni: l'accorciamento prospettico orizzontale nella veduta da nord-

ovest della cresta craterica del Somma e la conseguente eccessiva altezza delle pareti crateriche, dovuta anche alla visione ravvicinata del pittore pompeiano di diciannove secoli fa ed alla stratificazione lavica non ancora notevole sulla piattaforme craterica, la cui quota altimetrica nell'insellatura dell'Atrio del Cavallo ora raggiunge i 700 m.

L'importanza vulcanologica del dipinto pompeiano consiste nella raffigurazione del cratere, il cui piano doveva essere ad una quota inferiore al Colle dei Canteroni (m. 608), residuo dente a ponente delle pareti crateriche del Somma: siamo anzitutto iconograficamente documentati che già prima del parossismo del 79 il pianoro craterico conservava soltanto a settentrione per una lunghezza maggiore della semicirconferenza le pareti crateriche, digradanti dal centro verso levante e ponente (pendenza interna di almeno 45°), in modo da fornire centoventisei anni dopo allo scrittore Dione Cassio l'immagine comparativa di una colossale cavea di teatro ellenistico.

Più che il ricordato passo di Strabone, la limpida descrizione di Dione Cassio, falsata per l'inesatta traduzione di ' teatro ' con ' anfiteatro ' ed arbitrariamente riferita al Gran Cono Vesuviano, sarebbe stata a mio avviso di per sé sufficiente ad illuminare sulla situazione geomorfologica del nostro vulcano nei primi secoli dell'era cristiana.

Il problema della forma del Somma-Vesuvio prima del 79, anche nei termini inesatti in cui era stato posto dalla maggioranza degli studiosi, ossia monocipite o bicipite nella sommità craterica (cfr. PREMESSA), può ormai considerarsi definitivamente risolto: la raffigurazione orografica pompeiana del *Genius Vesuvii montis*, cioè del vulcano prima del parossismo ' pliniano ', mostra chiaramente l'esistenza di una sola vetta, in corrispondenza evidente con le attuali pareti crateriche del Somma e forse con la Punta Nasone (oggi con altezza di 1132 m.). La documentazione artistica pompeiana di A. Rustio Vero, comprendente il grande mal noto pannello religioso custodito nel Museo Archeologico di Napoli e qui attentamente preso in esame e la superstite trascurata testimonianza *in situ* del dipinto, per la prima volta pubblicata in questo lavoro (v. Figg. 1-4), anche se gli elementi in nostro possesso non consentono di raggiungere alcuna certezza in merito al supposto efflusso lavico laterale e all'attività vulcanica contemporanea al pittore, offre dati sicuri sulla trascorsa attività del Somma e rivela con estrema chiarezza l'inesistenza nel cratere di un sia pur piccolo cono vulcanico che potesse conferire alla sommità l'aspetto di monte bicipite.

Mi è sommamente gradito ringraziare l'illustre geofisico Giuseppe Imbò, benemerito direttore dell'Istituto di Fisica Terrestre (Università di Napoli) e dell'Osservatorio Vesuviano (1935-70), per le utili discussioni su questa ricerca che, oltre a fornirci interessanti notizie

sull'attività conclusiva del ciclo del Somma e sullo stato del vulcano negli accertati anni vicinissimi al parossismo 'pliniano', comporta la soluzione definitiva della dibattuta ultrasecolare questione morfologica del « Vesuvius mons » e ci assicura sulla giovane età del Gran Cono Vesuviano, la cui nascita come edificio vulcanico è di gran lunga posteriore all'anno 79.

BIBLIOGRAFIA

ACCADEMICI ERCOLANESI, *Le pitture antiche d'Ercolano e contorni incise con qualche spiegazione.* Napoli, tomo VII, Regia Stamperia (1779).

ALFANO G. B., *Le eruzioni del Vesuvio tra il 79 e il 1631.* Pubblicazione dell'Osservatorio « Pio X ». Valle di Pompei (1924).

ALFANO G. B., *Epigrafia vesuviana.* Napoli (1929).

ALFANO G. B. e FRIEDLÄNDER I., *La storia del Vesuvio illustrata dai documenti coevi.* Höhn, Ulm am D. (1929).

BARATTA M., *Il Vesuvio e le sue eruzioni, dall'anno 79 d.C. al 1896.* Roma, Soc. Ed. Dante Alighieri (1897).

BARATTA M., *Spartaco al Vesuvio.* Athenaeum, XIII. Pavia (1935).

BELOCH K. J., *Campanien. Geschichte und Topographie des antiken Neapel und seiner Umgebung.* Berlin (1879).

BRACCINI G. C., *Dell'incendio fattosi nel Vesuvio a XVI di dicembre MDCXXXI e delle sue cause ed effetti.* Napoli (1632).

BREISLAK S., *Topografia fisica della Campania.* Firenze (1798).

CAPASSO B., *Monumenta ad Neapolitani Ducatus historiam pertinentia.* Napoli (1881-92).

CATALANO V., *Note geologiche ercolanesi. Materiali piroclastici anteriori all'eruzione del 79 d.C. rinvenuti sotto l'area della Palestra in Ercolano.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Ser. IV, vol. XXIV, Napoli (1957).

CATALANO V., *Case, abitanti e culti di Ercolano.* Annali Pont. Sup. di Scienze e Lettere. Vol. XIII, Napoli (1963).

COCCHIA E., *La forma del Vesuvio nelle pitture e descrizioni antiche.* Atti Acc. Archeol. Lett. e Belle Arti. Vol. XXI (1900-1901), Napoli (1901) (con ampia bibliografia).

CONFORTI L., *La fontana di Spinacorona.* Napoli Nobilissima. VIII, Napoli (1892).

D'ANCORA G., *Prospetto storico-fisico degli scavi d'Ercolano e Pompei e dell'antico e presente stato del Vesuvio.* Napoli (1803).

DAUBENY C. G. B., *A description of active and extinct volcanoes, of earthquakes and of termal springs.* London (1826).

DE LAPPARENT A., *Le Vèsuve et la Somma.* Ann. Club Alp. Franç. XXIV, Paris (1897).

DELLA CORTE M., *Case e abitanti di Pompei.* Pompei (1954).

DE LORENZO G., *Der Vesuv in der zweiten Hälft des sechszehnten Jahrhunderts.* Zeits. deuts. geol. Gesells. Vol. XLIX, Berlin (1897).

DE LORENZO G., *Ancora del Vesuvio ai tempi di Strabone.* Boll. Soc. geol. it. Vol. XVII, Roma (1898).

DE LORENZO G., *Lo scoglio di Revigliano.* Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Ser. II, vol. XII, Napoli (1905).

DE LORENZO G., *Il Vesuvio.* Italia artist. n. 110, Bergamo (1931).

DE LORENZO G., *Geologia dell'Italia meridionale.* Nuova ediz. a cura di G. D'Erasmo. Napoli, Edit. Politecnica (1937).

DI GIROLAMO P., *La serie piroclastica dell'eruzione di Pompei.* Ann. Oss. vesuv. Ser. VI, vol. V, Napoli (1963).

ELIA O., *Pitture murali e mosaici nel Museo Nazionale di Napoli.* Roma, La libreria dello Stato (1932).

FIVEL L., *Bacchus. Peinture de Pompéi.* Gazette Archéologique. VI, Paris (1880).

FRANCO P., *Il Vesuvio ai tempi di Spartaco e di Strabone.* Atti Acc. Pontan. Vol. XVII, Napoli (1887).

FRANCO P., *Ancora sul Vesuvio ai tempi di Spartaco e di Strabone.* Boll. Soc. geol. it. Vol. XVII, Roma (1898).

FRANCO P., *Se il cono del Vesuvio esistesse prima del 79. Poche parole in risposta all'ultima Nota del dott. De Lorenzo.* Boll. Soc. geol. it. Vol. XVIII, Roma (1899).

GELL W., *Pompeiana: the topography, edifices and ornaments of Pompeii, the results of excavations since 1819.* London (1832).

GERVASI N., *Raccolta di tutte le vedute che esistevano nel Gabinetto del Duca della Torre rappresentanti l'eruzioni del Monte Vesuvio fin oggi accadute.* Napoli (1805).

GIULIANI G. B., *Trattato del Monte Vesuvio e de' suoi incendii.* Napoli, Longi (1632).

HELBIG W., *Untersuchungen über die Campanische Wandmalerei.* Leipzig (1873).

IMBÒ G., *Considerazioni sui fenomeni sismici e vulcanici.* Ann. Oss. vesuv. Ser. VI, vol. III, Napoli (1959).

IMBÒ G., *Il Vesuvio non era come è oggi prima dell'eruzione pompeiana.* Roma del 17 dic. 1967.

IMBÒ G., *Investigations regarding the crustal base of Somma-Vesuvius and the magmatic characteristic of the volcano, together with the earthquakes eruptions, particularly those of the 4th September 1968 and the 5th February 63 A.D.* Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Ser. III, vol. VIII, Napoli (1974).

JOHNSTON-LAVIS H. J., *The geology of M. Somma and Vesuvius, being a study in Vulcanology.* Quart. Journ. Geol. Soc. Vol. LX, London (1884).

JOIINSTON-LAVIS H. J., *Further observations on the form of Vesuvius and Monte Somma.* Geol. Mag. Vol. V, London (1888).

JOHNSTON-LAVIS H. J., *The sout italian volcanoes, being the account of an excursion to them made by English and other Geologist in 1889.* Napoli, Furcheim (1891).

LENORMANT F., in « The Accademy » 21 febbraio 1880.

LUONGO G. e RAPOLLA A., *Su alcune colate laviche precedenti l'eruzione del 79 d.C.* Ann. Oss. vesuv. Ser. VI, vol. VI, Napoli (1964).

MAIURI A., *L'ultima fase edilizia di Pompei.* Spoleto (1942).

MALLADRA A., *Escursione da Napoli al Vesuvio.* 2a ed. tip. Giannini, Napoli (1933).

MAU A., in « Bollettino di corrispondenza archeologica ». Roma (1881).

MERCALLI G., *I vulcani attivi della Terra.* Milano, Hoepli (1907).

NISSEN H., *Italische Landeskunde.* Berlin (1883).

PALMIERI L., *Del Vesuvio dei tempi di Spartaco e di Strabone e del precipuo cangiamento avvenuto nell'anno 79 dell'era volgare.* Pompei e la regione sotterrata dal Vesuvio nell'anno LXXIX. Napoli (1879).

PALMIERI L., in « Notizie degli Scavi di Antichità ». Roma (1880).

PARASCANDOLA A., *L'attività e la forma del Vesuvio nell'antichità e l'origine del suo nome.* Gli abissi. I, Napoli (1938).

PARASCANDOLA A., *Contributo alla geologia del Somma. Segnalazione di antiche lave.* Boll. Soc. Natural. Vol. LVI, Napoli (1948).

PHILLIPS J., *Vesuvius.* Oxford (1869).

PREUSSE P. *Considérations sur la forme du Vésuve et son activité dans l'antiquité.* Bull. volcanol. Vol. VIII, Napoli (1936).

RITTMANN A., *Die geologisch bedingt Evolution und Differentiation des Somma-Vesuv-magmas.* Zeitschr. für Vulkan. Vol. XV, Berlin (1933).

RITTMANN A., *L'eruzione vesuviana del 79: studio magmalogico e vulcanologico.* Pompeiana. Napoli (1950).

RITTMANN A., *I vulcani e la loro attività*, Cappelli editore, 2a rist. it. (1972).

RITTMANN A. e IPPOLITO F., *Sulla stratigrafia del Somma-Vesuvio.* Atti Fondaz. Polit. Mezzog. d'It. Vol. VII, Napoli (1947).

SCACCHI A., *Relazione dell'incendio accaduto nel Vesuvio nel mese di febbraio del 1850, seguito dai giornalieri cambiamenti osservati in questo vulcano dal 1840 sin ora.* Rend. Acc. Sc. Vol. IX, Napoli (1850).

SOGLIANO A., in « Notizie degli Scavi di Antichità ». Roma (1879) (Sogliano 1879 *a*).

SOGLIANO A., *Le Pitture murali campane scoperte negli anni 1867-79.* Napoli, Giannini editore (1879) (Sogliano 1879 *b*).

SOGLIANO A., in « Notizie degli Scavi di Antichità ». Roma (1880).

SOGLIANO A., *Di un luogo dei libri sibillini relativo alla catastrofe delle città campane sepolte dal Vesuvio.* Atti Acc. Archeol. Lett. Belle Arti. Vol. XVI, Napoli (1892).

SOGLIANO A., *Su di un dipinto pompeiano rappresentante il Vesuvio.* Atti Acc. Archeol. Lett. Belle Arti. Vol. XXI, Napoli (1901).

SOGLIANO A., *Pompei nel suo sviluppo storico. Pompei preromana.* Roma, Atheneum (1937).

SFANO G., *La Campania Felice nelle età più remote. Pompei dalle origini alla fase ellenistica.* Napoli, Giannini editore (1936) (ma edito nel 1941).

VON BUCH L., *Gesammelte Schriften.* Berlin (1887).

Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico *

Nota I - Aliti ad un componente estraneo

Nota di VITTORIO SABATELLI e GIAN LORENZO VALENTI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza dell' 1 febbraio 1975)

RIASSUNTO. — Le proprietà idrauliche di aliti contenenti ioni frequentemente ricorrenti nelle miscele clinkerizzabili sono state esaminate mediante valutazione della resistenza meccanica e della reattività con l'acqua, misurata in base all'idrossido di calcio prodotto nel corso della reazione d'idratazione.

Si sono preparate alcune soluzioni solide di silicato tricalcico contenenti singolarmente opportuni tenori di ioni estranei introdotti come MgO, Fe_2O_3, Al_2O_3.

Si è rilevato che l'ingresso in soluzione solida del ferro e dell'alluminio accelera, nell'ordine, la reazione di idratazione dell'alite corrispondente. L'influenza del magnesio sembra consistere in un'azione deprimente o comunque non efficace.

È stato sottolineato che, in generale, soluzioni solide più reattive nei confronti dell'acqua, danno più alti valori della resistenza meccanica.

Si è precisato infine che il grado di avanzamento della reazione, misurato dall'idrossido di calcio prodotto, non è l'unica variabile in grado di influenzare la resistenza meccanica, in quanto un importante ruolo spetta alla composizione e alla morfologia del silicato di calcio idrato di neo formazione.

SUMMARY. — Hydraulic properties of alites containing ions often occurring in mixtures to be clinkered have been examined by evaluating their mechanical strength and reactivity toward water, measured on the ground of the amount of calcium hydroxide produced during the hydration.

Solid solutions of tricalcium silicate containing singularly suitable amounts of foreign ions introduced as MgO, Fe_2O_3, Al_2O_3 were prepared.

It has been shown that the entering in solid solution of iron and aluminium, respectively, speeds up the hydration of the corresponding alite. The action of magnesium seems to be slowing down or, at least, not effective.

It has been emphasized that, in general, solid solutions more reactive toward water showed higher values of the mechanical strength.

It has been pointed out that the hydration degree, measured as calcium hydroxide produced, is not the only parameter able to affect the mechanical strength since an important rôle may be played by the composition and morphology of the newly formed calcium silicate hydrate.

(*) Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

1. - INTRODUZIONE.

Il silicato tricalcico, come le altre fasi del clinker, non è mai presente sotto forma di composto puro, bensì è capace di accogliere nel suo reticolo ioni estranei presenti nelle miscele clinkerizzabili. Le soluzioni solide di silicato tricalcico che vengono così a formarsi prendono il nome di aliti, mentre l'insieme di esse nel clinker costituisce la cosiddetta « alite ».

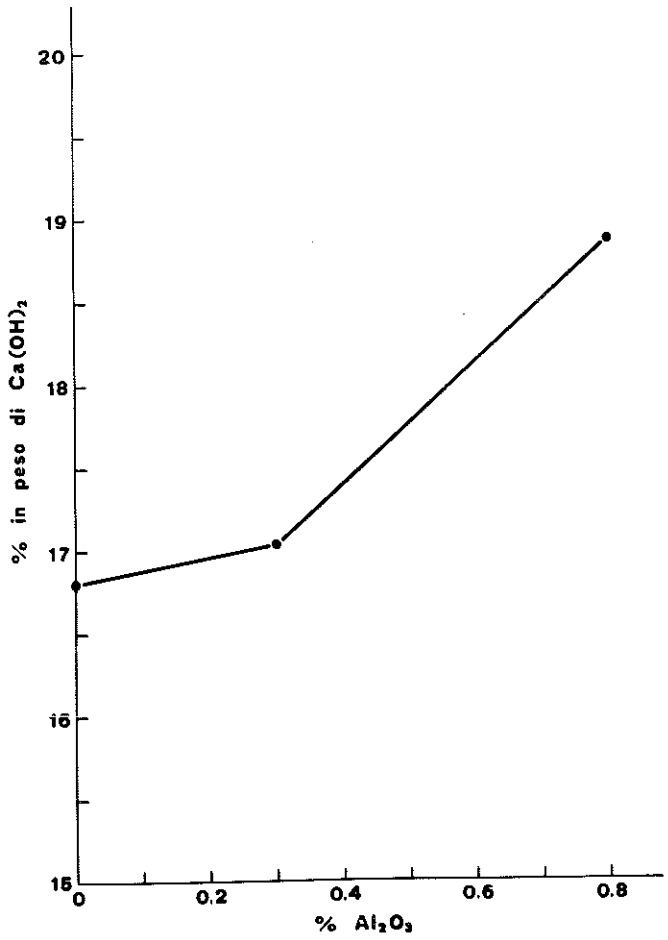


FIG. 1.

Si comprende quindi come sia praticamente interessante, sotto il profilo scientifico, studiare le differenze di comportamento tecnico che si registrano fra le diverse aliti nei riguardi del silicato trical-

cico puro, ai fini di una più approfondita comprensione del ruolo esercitato dal principale costituente del clinker nella sua reazione con l'acqua.

Tale studio non è esente da risvolti applicativi, in relazione al possibile incremento dei valori di resistenza meccanica dei leganti idraulici, particolarmente alle brevi stagionature, attraverso una più pronta idratazione del silicato tricalcico.

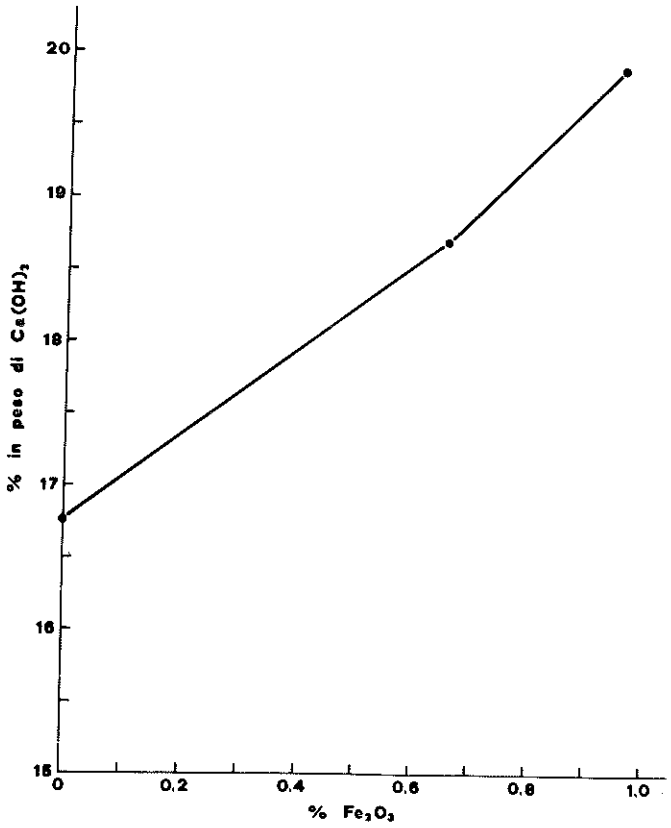


FIG. 2.

L'influenza di alcune specie chimiche, atte ad entrare, in piccola quantità, in soluzione solida nel silicato tricalcico e, conseguentemente, a modificarne proprietà strutturali e comportamento tecnico, è stata oggetto di numerose approfondite ricerche [1].

L'esame dell'ampia bibliografia sull'argomento dimostra che la direttrice di ricerca maggiormente perseguita è stata quasi esclusivamente quella rivolta a definire le relazioni fra modificazione poli-

morfa della soluzione solida di C_3S e sua reattività con l'acqua. Gli studi più recenti [2, 3] sembrano confortare l'ipotesi che la maggiore reattività riscontrata per alcune soluzioni solide, rispetto a quella del costituente puro, sia da ricercare nel tipo e nella quantità di ione estraneo che condizionano la distribuzione dei difetti strutturali in-

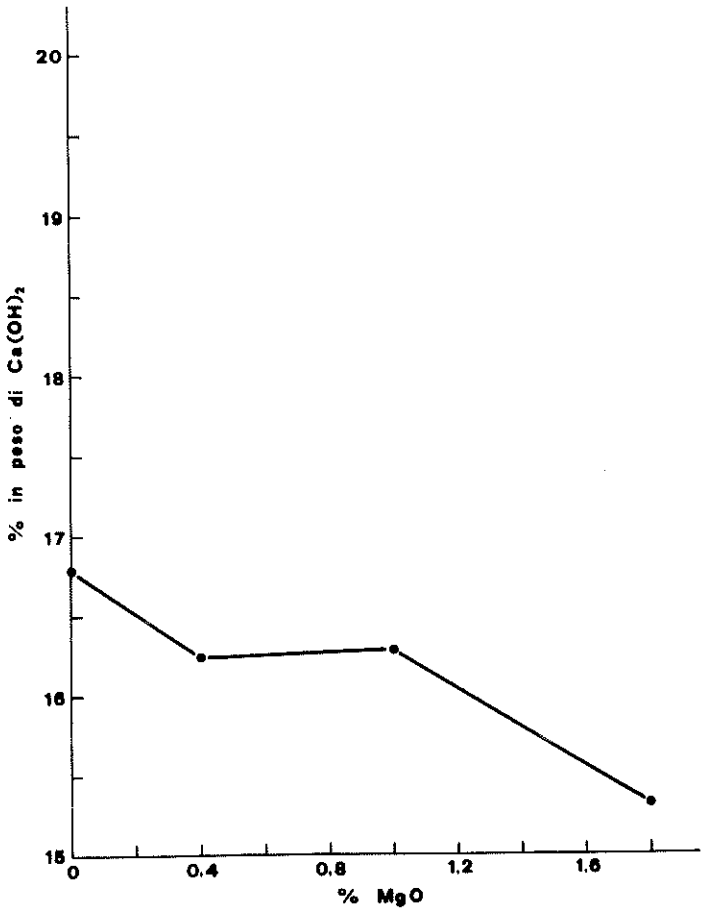


FIG. 3.

dotti nel reticolo, piuttosto che nella modificazione polimorfa promossa. Sta di fatto che aliti di identica forma cristallografica mostrano sovente idraulicità sensibilmente diversa [4].

Scopo della presente indagine è pertanto quello di esaminare, mediante valutazione delle resistenze meccaniche e della reattività con l'acqua, determinata mediante la misura dell'idrossido di calcio

prodotto nella reazione, le differenze di comportamento che si registrano in aliti contenenti alcuni ioni estranei al C_3S, più frequentemente ricorrenti nelle miscele clinkerizzabili, quali l'alluminio, il ferro, il magnesio.

Nel corso di questa prima Nota si dà conto dei risultati conseguiti su soluzioni solide ad un singolo costituente estraneo al C_3S.

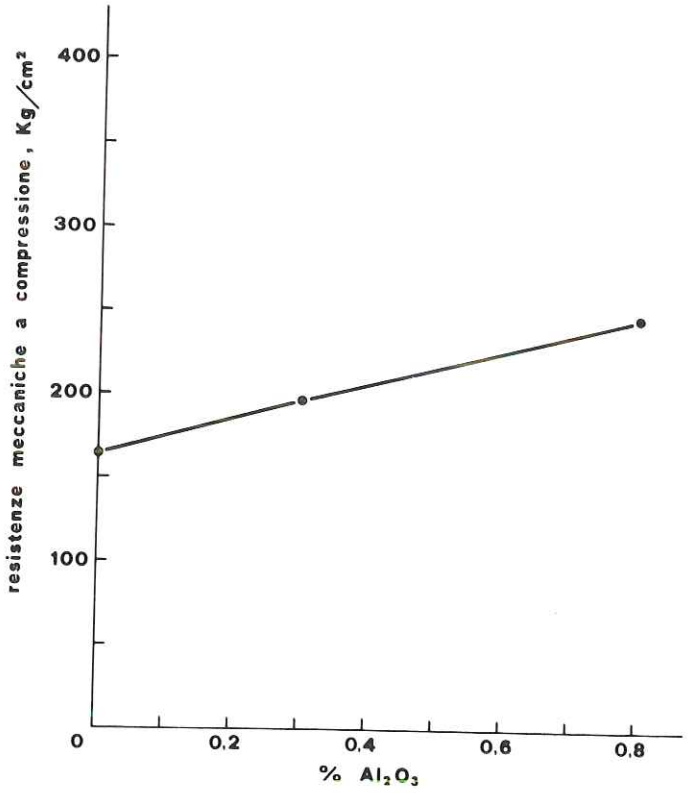


FIG. 4.

2. - PARTE SPERIMENTALE.

Sia il silicato tricalcico che le soluzioni solide sono stati ottenuti mediante reazioni in fase solida alla temperatura di 1550°C. Per la preparazione delle miscele si sono utilizzati $CaCO_3$, SiO_2, $Al(OH)_3$, $Mg(CO_3)_4 \cdot Mg(OH)_2 \cdot 5H_2O$, Fe_2O_3, tutti puri per analisi (C. Erba).

Le quantità di specie chimiche estranee al C_3S sono state scelte in maniera da rispettare i limiti di solubilità delle stesse, a 1550°C, nel silicato tricalcico [5].

Le miscele generatrici, contenenti i costituenti principali nelle proporzioni stechiometriche e quelli secondari nelle proporzioni calcolate, hanno subito un pretrattamento termico di calcinazione a 1000°C seguito da macinazione e vagliatura ad un setaccio di 10.000 maglie/cm^2. Successivamente sono state pressate, sottoposte a cottura e quindi temprate in aria. Il granulato ottenuto è stato macinato, vagliato e conservato in ambiente privo di umidità e di anidride carbonica.

Il grado di completezza della reazione è stato controllato mediante la valutazione delle quantità di CaO libera. In tab. I sono riportate le percentuali prescelte degli elementi aggiunti come ossidi e la forma cristallografica di ciascun campione preso in esame. Per il controllo delle prime si è fatto ricorso ad uno spettrofotometro ad

TABELLA I

Percentuali degli elementi aggiunti come ossidi e forme cristallografiche del C_3S *e delle relative soluzioni solide.*

N. del campione	Al_2O_3	Fe_2O_3	MgO	Forme polimorfe *
1	—	—	—	T (I)
2	—	—	0,4	T (I)
3	—	—	1,0	T (II)
4	—	—	1,8	M(I)
5	0,3	—	—	T (I)
6	0,8	—	—	T (II)
7	—	0,65	—	T (I)
8	—	0,95	—	T (II)

* T = sistema triclino;
M = sistema monoclino.

assorbimento atomico Perkin-Elmer, mod. 300 S; per la valutazione della seconda, i campioni sono stati sottoposti ad indagine roentgenografica in camera tipo Guinier-de Wolf usando la radiazione CuK_α (adottando come standard di riferimento il quarzo), nonché ad analisi termica differenziale usando una apparecchiatura Du Pont mod.

900, con velocità di riscaldamento di 10°C/min. Di tutti i campioni è stato determinato il peso specifico che è risultato compreso tra 3,19 e 3,22 g/cm^3 e la superficie specifica secondo Blaine, compresa fra 5.050 e 5.250 cm^2/g., nonché la distribuzione granulometrica che con buona approssimazione è risultata la medesima per le sostanze esaminate.

La idratazione dei campioni è stata eseguita alla temperatura di 20°C, con rapporto acqua/solido pari a 0,45.

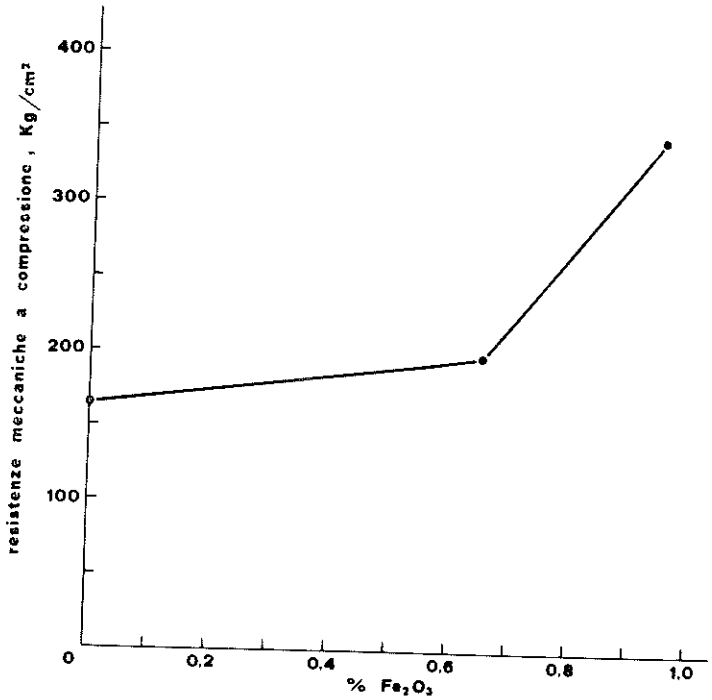


FIG. 5.

Per la preparazione delle paste 6 g. di campione sono stati mescolati con 2,7 ml. di acqua distillata per un tempo sufficiente ad assicurarne una completa omogeneizzazione. I preparati in pasta sono stati successivamente posti in buste sigillate di polietilene e ivi mantenuti per il periodo di idratazione prescelto, allo scadere del quale la reazione veniva bloccata portando il sistema alla temperatura di una miscela di ghiaccio secco e metanolo. Successivamente le paste sono state macinate in una glove-box in atmosfera di azoto, introdotte in contenitori pesati e quindi sottoposte ad essiccazione sotto vuoto spinto con trappola a ghiaccio secco e metanolo [6]. Il con-

trollo del grado di essiccamento è stato effettuato mediante successive pesate. Come si rileva dalla tab. II, si sono ritenuti i campioni completamente secchi quando la velocità di perdita di peso non superava 1 mg/g. giorno [7]. Opportuni quantitativi di ciascun campione sono serviti alla stima dell'idrossido di calcio mediante analisi termoponderale [8] che permette di rilevare quantitativamente l'acqua derivante dalla decomposizione del gelo tobermoritico e dell'idrossido di calcio e cioè l'acqua « non evaporabile », nonché l'anidride carbonica derivante dalla decomposizione di carbonato di calcio, eventualmente formatosi per carbonatazione dell'idrossido di calcio di neo-formazione.

TABELLA II

Controllo del grado di essiccamento.

N. del campione	Perdita assoluta (mg)	Perdita relativa (mg/g)	Velocità di perdita (mg/g/giorno)	Perdita assoluta (mg)	Perdita relativa (mg/g)	Velocità di perdita (mg/g/giorno)
1	75,9	13,27	3,17	15,3	2,68	0,89
2	63,8	13,13	3,28	13,0	2,68	0,89
3	77,5	14,63	3,66	13,5	2,55	0,85
4	69,3	11,43	2,86	12,5	2,07	0,69
5	65,8	12,20	3,05	14,9	2,77	0,92
6	77,9	14,31	3,58	14,8	3,13	1,04
7	61,5	11,31	2,83	13,5	2,49	0,83
8	25,7	4,54	1,13	12,1	2,17	0,72

Il rilevamento della curva termoponderale è stato eseguito con una termobilancia Stanton, mod. MF-H5, che, nelle condizioni operative adottate, ha permesso di apprezzare con sicurezza una variazione relativa di peso pari allo 0,1 %. La velocità di riscaldamento è stata di 5°C al minuto.

Le prove di resistenza a compressione sono state effettuate su provini di dimensioni 40 × 40 × 40 mm, confezionati con 92 % di C_3S o di due soluzioni solide, e l'8 % di una miscela gesso-quarzo nel rapporto 3 a 5; il rapporto acqua-solido era pari a 0,5.

3. - Risultati e discussione.

Allo scopo di valutare le differenze di comportamento dei campioni presi in esame nei riguardi della reattività con l'acqua e della resistenza meccanica, si è prescelto un tempo di stagionatura di tre giorni, allo scadere del quale si sono misurati i valori dell'idrossido di calcio prodotto e delle resistenze meccaniche ottenute, riportati in tab. III.

Tabella III

Percentuali di idrossido di calcio e resistenze meccaniche a compressione ottenute dopo tre giorni di stagionatura.

N. del campione	%$Ca(OH)_2$	Resistenza meccanica (K/cm^2)
1	16,78	164
2	16,24	158
3	16,29	218
4	15,31	125
5	17,03	196
6	18,88	245
7	18,72	198
8	19,95	348

L'esame dei dati in tabella consente di rilevare che, mentre le aliti contenenti magnesio denunciano una concentrazione di idrossido di calcio inferiore a quella riscontrata nel C_3S puro, quelle contenenti ferro o alluminio manifestano valori più alti. L'azione del ferro, inoltre, si mostra più incisiva di quella dell'alluminio nel promuovere il grado di avanzamento della reazione di idratazione.

Per quanto concerne l'influenza dei tenori degli elementi aggiunti (figg. 1, 2 e 3), si nota che contenuti crescenti di Al_2O_3 (fig. 1) e di Fe_2O_3 (fig. 2) promuovono concentrazioni crescenti di $Ca(OH)_2$ nei prodotti di neoformazione. Differente risulta l'azione dell'MgO (fig. 3): quantitativi crescenti di MgO provocano (tranne che per il campione contenente l'1 %) concentrazioni di $Ca(OH)_2$ decrescenti.

Per quanto riguarda le resistenze meccaniche si nota, dall'esame della tab. III, la medesima sequenza rilevata a proposito del contenuto di idrossido di calcio prodotto, tranne per l'alite contenente l'1 % di MgO che mostra un valore relativamente alto.

L'influenza dei tenori degli elementi aggiunti sulle resistenze meccaniche (figg. 4, 5 e 6) ricalca quanto già osservato a proposito dell'idrossido di calcio: si manifesta cioè positiva per quantità crescenti di Al_2O_3 e Fe_2O_3 e, in linea di massima, negativa per quantità crescenti di MgO.

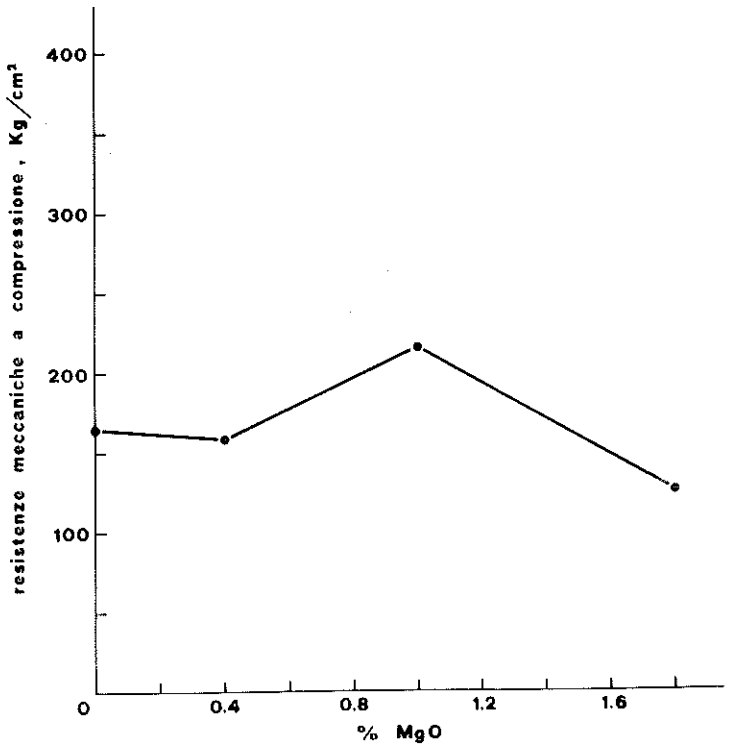


FIG. 6.

Si può constatare comunque che, a parità di valori di idrossido di calcio, si riscontrano a volte valori differenti di resistenza meccanica. Ciò significa che un ruolo importante può essere attribuito alle caratteristiche del silicato di calcio idrato di neoformazione e segnatamente alla sua composizione e morfologia che possono essere modificate in diversa misura a seguito della presenza degli ioni estranei in soluzione solida.

4. - Conclusioni.

L'introduzione nel reticolo del silicato tricalcico di ioni Fe^{+3}, Al^{+3}, Mg^{+2}, separatamente, influenza l'idraulicità dell'alite corrispondente.

Rispetto al comportamento del silicato tricalcico puro, l'ingresso dello ione Mg^{+2} provoca una più lenta reattività con l'acqua, desunta in base ai valori della concentrazione dell'idrossido di calcio di neoformazione; la presenza di ioni Fe^{+3} o Al^{+3} induce invece una maggiore reattività.

Si è riscontrato inoltre che le soluzioni solide più reattive presentano anche i più alti valori delle resistenze meccaniche. Comunque la corrispondenza tra i valori di concentrazione dell'idrossido di calcio prodotto e quelli delle resistenze meccaniche ottenute non è puntuale: ciò è in accordo con la possibile diversa composizione e morfologia del silicato di calcio idrato, indotta dalla presenza degli ioni inseriti nel reticolo del silicato tricalcico.

Gli Autori ringraziano il prof. R. Sersale per le utili discussioni e l'ing. G. D'Amato per l'assistenza tecnica. Ringraziamenti sono anche dovuti al dott. G. Frigione della Cementir (Cementerie del Tirreno) per la collaborazione ricevuta.

Napoli - Istituto di Chimica Applicata della Facoltà di Ingegneria.

BIBLIOGRAFIA

[1] Parker T. W., *Influence on the heat-treatment of portland cement clinker on the properties of the cement*, J. Soc. Chem. Ind., **58**, 203 (1939).

— Midgley H. G., Fletcher K. E., *The role of alumina and magnesia in the polymorphism of tricalcium silicate*, Trans. Brit. Ceram. Soc., **62**, 917 (1963).

— Fletcher K. E., *Effect of* Fe^{+3} *and* Al^{+3} *on the polymorphism of tricalcium silicate*, Trans. Brit. Ceram. Soc., **64**, 377 (1965).

— Butt Y. M., Timashev V. V., Kaushanski V. E., *L'influence de* Al_2O_3 *sur le propriétés du silicate tricalcique*, Nauk, Soobshch. Gos. Vses. Nauch. - Issled. Int. Tsem. Prom., **20**, 45 (1965).

— Nurse R. W., Midgley H. G., Gutt W., Fletcher K. E., *Effect of polymorphism of tricalcium silicate on its reactivity*, Nat. Acad. Sci. - Nat. Res. Counc., Publ., No. 1389, 258 (1966).

— Yamaguchi G., Shirasuka K., Ota T., *Comparison of hydration properties between monoclinic and inverted triclinic alite*, Symp. Struct. Portland Cement, Spec. Rep. 90, Highway Res. Board, Washington, 258 (1966).

— Butt Y. M., Timashev V. V., Kaushanski V. E., *Properties of tricalcium silicate and its solid solutions*, Proc. 9th Conf. Silicate Ind. (Siliconf, 1967). Akadémiai Kiado, 59 (1968).

— KURDOWSKI W., SZUMMER A., *Effect of minor constituents on the hydraulic properties of portland cement clinker*, Silicates Ind., **33**, 183 (1968).
— COPELAND L. E., KANTRO D. L., *Hydration of portland cement*, Proc. 5th Int. Symp. Chemistry of Cement, Tokyo 1968, Part. II, Vol. II, 387, Org. Comm. for V-ISCC and Chem. Assoc. Jap. (1969).
— FIERENS P., VERHAEGEN J. P., *Structure and reactivity of chromium-doped tricalcium silicate*, Jour. Amer. Ceram. Soc., **55**, 309 (1972).
— BOIKOVA A. I., TOROPOV N. A., *The stoichiometry and polymorphism of* C_3S, Dokl. Akad. Nauk, USSR, 156, 1428 (1964).
[2] SERSALE R., *Hydraulic behaviour of* Al, Fe, Mg - *bearing Alites, Proc.* 6th Int. Symp. Chem. of Cem. Moscow (1974).
[3] VALENTI G. L., *Influenza dei costituenti minori sulla cinetica d'idratazione delle aliti*, Il Cemento, in corso di stampa.
[4] MASCOLO G., MARCHESE B., FRIGIONE G., SERSALE R., *Relazioni fra microstruttura e proprietà meccaniche delle aliti*, Il Cemento, **69**, 85 (1972).
— MASCOLO G., MARCHESE B., FRIGIONE G., SERSALE R., *Influence of polymorphism and stabilizing ions on the strength of alite*, Jour. Amer. Ceram. Soc., **56**, 222 (1973).
[5] WOERMANN E., EYSEL W., HAHN TH., *Chemische und strukturelle untersuchungen der Mischkristallbildung von Tricalciumsilikat*, 3° Bericht Zem-Kalk-Gips **21**, 241 (1968); 4° Bericht Zem-Kalk-Gips **22**, 235 (1969).
[6] COPELAND L. E., HAYES J. C., *Determination of non evaporable water in the portland cement paste*, ASTM Bull. No. 194 (1953).
[7] KANTRO D. L., WEISE C. H., BRUNAUER S., *Paste hydration of beta-dicalcium silicate, tricalcium silicate, and alite*, Symp. Struct. Portland Cement, Spec. Rep. 90, Highway Res. Board, Washington, 309 (1966).
[8] VALENTI G. L., SABATELLI V., *Contributo dell'analisi tempoponderale allo studio della stechiometria di idratazione del silicato tricalcico*, Il Cemento, **3** (1974).

Punti uniti in spazi metrici completi

Nota di PANCRAZIO AMATO
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza dell'1 febbraio 1975)

SUMMARY. — Using the notion of approximate solution and Kuratowski measure of non-compacteness we give some fixed point theorems. An existence and uniqueness theorem (cfr. theor. 5), which include some recent results due to F. E. BROWDER [7], M. FURI and A. VIGNOLI [12], S. REICH [16, 17], V. and A. ISRATESCU [18], is proved.

RIASSUNTO. — In questa nota si stabiliscono alcuni teoremi di punto fisso utilizzando la nozione di soluzione approssimata e la misura di non compattezza di C. KURATOWSKI. I risultati principali sono i teoremi 1, 4, 5, 7. Il teorema 5 è un teorema di esistenza e unicità che include vari risultati apparsi di recente nella letteratura. Da un punto di vista puramente esistenziale il risultato più generale è il teorema 7.

INTRODUZIONE.

Sia T un'applicazione di uno spazio metrico completo (E, d) in sé, r un numero reale positivo. Una soluzione r-approssimata (v. [2] pag. 3, iii) dell'equazione $T(x) = x$ è un elemento $y \in E$ tale che $d(y, T(y)) \leq r$. Le soluzioni esatte sono gli eventuali punti uniti di T. Denotato con $\mathbf{F}(T)$ l'insieme dei punti uniti di T e con $F(r)$ l'insieme delle soluzioni r-approssimate, per ogni successione $(r_k)_{k \in N}$ decrescente e infinitesima (per brevità scriveremo $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$) risulta $\mathbf{F}(T) = \lim_k F(r_k)$. Appare dunque ben naturale la ricerca di condizioni su $F(r_k)$ atte a fornire informazioni su $\mathbf{F}(T)$ e sulla sua struttura. Lo studio di alcune condizioni di questo tipo è appunto l'oggetto della presente nota, i cui principali risultati sono i teoremi 1, 4, 5 e 7. Il teor. 1 assegna delle condizioni sugli insiemi $F(r)$ sufficienti affinché $\mathbf{F}(T)$ abbia un numero finito di componenti compatte e connesse. Col teor. 4 (e anche coi teor. 6 e 7b) si studiano delle condizioni che oltre ad assicurare l'esistenza di punti uniti danno informazioni sulle successioni estratte dalla successione delle approssimazioni successive. Nel numero 3 si ricavano come conseguenze del teor. 5, teorema di esistenza e unicità, alcuni recenti teoremi dovuti a F. E. BROWDER [7],

M. FURI e A. VIGNOLI [12], S. REICH [16, 17], V. e A. ISRATESCU [18]. Dallo stesso teorema si deducono inoltre dei risultati nuovi di esistenza e unicità per trasformazioni che soddisfino a limitazioni di tipo contrattivo generalizzato (cfr. teor. 11, 12 e 13). Da un punto di vista puramente esistenziale il risultato più generale della nota è il teor. 7, da cui si deduce un teorema (cfr. teor. 7a) di M. FURI e A. VIGNOLI, cfr. [12] pag. 465.

In tutta la nota gioca un ruolo fondamentale un teorema di Kuratowski, che generalizza il teorema di Cantor sull'intersezione, relativo alla misura di non compattezza $\alpha(A)$ di un insieme limitato A di E. Ricordiamo che $\alpha(A)$ è l'estremo inferiore dei numeri positivi ε tali che A ammetta un ricoprimento finito in parti di diametro minore di ε. Le proprietà dell'indice α e delle k-α-contrazioni (o k-set-contractions), che sono state in parte trattate da G. DARBO [3] e A. AMBROSETTI [8], si trovano estesamente in R. D. NUSSBAUM [15].

1. - ESISTENZA DEI PUNTI UNITI. STRUTTURA DI F(T).

Premettiamo un lemma essenziale per i risultati di questo numero.

LEMMA 1. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico completo. Se* $(A_n)_{n \in N}$ *è una successione decrescente di parti non vuote, chiuse, limitate e connesse di* E *tali che* $\lim_n \alpha(A_n) = 0$, *allora l'insieme* $A = \lim_n A_n$ *è non vuoto, compatto e connesso* [1].

Dim. Un teorema di KURATOWSKI (v. [1], vol. I, pag. 318) assicura che l'insieme A è non vuoto e compatto. Proviamo quindi che A è connesso. Se non lo fosse, esisterebbero due chiusi (quindi compatti) non vuoti e disgiunti A′ e A″ tali che

$$A = A' \cup A'' \quad , \quad \operatorname{dist}(A', A'') > 0 \quad . \tag{1.1}$$

Posto per ogni $n \in N$

$$B_n = \{x \in A_n : d(x, A') = d(x, A'')\} \quad ,$$

dalla connessione di A_n segue facilmente che B_n *è non vuoto*. Infatti, se per un certo $m \in N$ risultasse $B_m = \emptyset$, posto

$$A'_m = \{x \in A_m : d(x, A') < d(x, A'')\}$$

$$A''_m = \{x \in A_m : d(x, A') > d(x, A'')\} \quad ,$$

[1] Per una dimostrazione diversa cfr. [1], vol, II, pag, 111.

si avrebbe evidentemente $A_m = A'_m \cup A''_m$, con A'_m e A''_m aperti (in A_m) non vuoti e disgiunti, sicché A_m non sarebbe connesso.

Inoltre essendo B_n chiuso e limitato, $B_{n+1} \subset B_n$ nonché $\alpha(B_n) \leq \leq \alpha(A_n)$, per il citato teorema l'insieme

$$B = \bigcap_{n \in N} B_n \subset \bigcap_{n \in N} A_n = A$$

è non vuoto e compatto. Considerato allora $b \in B$, dalla definizione di B_n discende

$$b \in A \quad \text{e} \quad \text{dist}(b, A') = \text{dist}(b, A'') ,$$

il che contraddice la (1.1). Dunque A è connesso.

Il lemma 1 ci consente di stabilire agevolmente il seguente

TEOREMA 1. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico completo*[2], *T un'applicazione di* E *in sé. L'insieme* $F(T)$ *è non vuoto e compatto ed ha* $n \geq 1$ *componenti compatte connesse se e solo se esiste una successione* $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$ *tale che, per ogni* $k \in N$, *l'insieme* $F(r_k)$ *sia riunione di* $n + 1$ *insiemi a due a due disgiunti* $F_i(r_k)$ $i = 1, \ldots, n$ *e* $M(r_k)$, *di cui gli* $F_i(r_k)$ *chiusi, limitati e connessi, tali che*

$$\forall k \in N : F_i(r_{k+1}) \subset F_i(r_k) \quad , \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

$$\lim_k \alpha(F_i(r_k)) = 0 \quad , \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

$$\lim_k M(r_k) = \emptyset \ . \tag{1.4}$$

Dim. La condizione è banalmente necessaria. Infatti, denotate con $\mathbf{F}_i(T)$ $i = 1, \ldots, n$ le n componenti compatte e connesse di $\mathbf{F}(T)$ e con $(r_k)_{k \in N}$ una successione decrescente e infinitesima, basta porre

$$F_i(r_k) = F_i(T) , \qquad M(r_k) = F(r_k) - F(T) \qquad \forall k \in N .$$

D'altra parte se è data una successione $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$ tale che $F(r_k)$ (che è chiuso se T è continua) soddisfi le ipotesi fatte, ognuna delle successioni $(F_i(r_k))_{k \in N}$ verifica in virtù di (1.2) e (1.3), le ipotesi del lemma 1, quindi le intersezioni

$$\mathbf{F}_i(T) = \bigcap_{k \in N} F_i(r_k) \qquad i = 1, \ldots, n$$

[2] L'ipotesi di completezza interviene soltanto nella prova della condizione sufficiente, giacché in questa si utilizza il lemma 1.

sono non vuote compatte e connesse. Inoltre, per la (1.4), $\bigcap_{k \in N} M(r_k) = \emptyset$ perché contenuta nel minimo limite della successione $(M(r_k))_{k \in N}$. Ne segue che

$$\mathbf{F}(T) = F(0) = \bigcap_{k \in N} F(r_k) = \bigcap_{k \in N} \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i(r_k) \right) \cup \left(\bigcap_{k \in N} M(r_k) \right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i(T) ,$$

il che prova l'asserto.

È interessante osservare che, ove si supponga T continua, è effettivamente possibile costruire, se $F(T)$ è compatto, una successione non banale $(F'(r_k))_{k \in N}$, $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$ e per ogni $k \in N$ $F'(r_k)$ parte non vuota chiusa e limitata di $F(r_k)$, verificante le condizioni (1.2), (1.3), (1.4). Se in più lo spazio è normato [3] ed $\mathbf{F}(T)$ è connesso, allora gli insiemi $F'(r_k)$ possono essere presi connessi.

Infatti, fissato $r > 0$ e assegnato $z \in \mathbf{F}(T)$, avendosi per la continuità di T, $\lim_{x \to z} T(x) = T(z) = z$, in corrispondenza di $r/2$

$$\exists\, \delta_r(z) \in \left(0, \frac{r}{2}\right) \ni' \forall x \in S(z, \delta_r(z)) : d(T(x), z) < \frac{r}{2} ,$$

perciò per ogni elemento x della sfera aperta $S(z, \delta_r(z))$ risulta

$$d(x, T(x)) \leq d(x, z) + d(z, T(x)) < \delta_r(z) + \frac{r}{2} < r$$

e dunque $S(z, \delta_r(z)) \subset F(r)$. Si ha pertanto

$$\mathbf{F}(T) \subset \bigcup_{z \in \mathbf{F}(T)} S(z, \delta_r(z)) \subset F(r) .$$

Essendo $\mathbf{F}(T)$ compatto, esistono un numero finito di suoi punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n(r)}$ tali che

$$\mathbf{F}(T) \subset \bigcup_{i=1}^{n(r)} S(z_i, \delta_r(z_i)) = F_1(r) \subset F(r) .$$

Pertanto $F'(r) = \overline{F_1(r)}$ è una parte non vuota chiusa e limitata di $F(r)$ tale che

$$\alpha(F'(r)) = \alpha(F_1(r)) \leq 2 \cdot \delta_r < r$$

[3] Tale ipotesi potrebbe essere attenuata.

avendo posto $\delta_r = \max_{i=1,\dots,n(r)} \delta_r(z_i)$. Consideriamo ora la successione $\left(r_k = \frac{r}{k}\right)_{k \in N}$. Per $k = 1$, ossia per $r_1 = r$, abbiamo già costruito la parte $F'(r_1) = F'(r)$. Applicando il ragionamento precedente con $r/2$ al posto di r si costruisce una parte

$$F_1\left(\frac{r}{2}\right) = F_1(r_2) = \bigcup_{j=1}^{n(r_1)} S(z'_j, \delta_{r_1}(z'_j)) \subset F(r_2)$$

contenente $\mathbf{F}(T)$ e tale che $\alpha(F_1(r_2)) \leq 2\delta_{r_2}$, essendo $\delta_{r_2} = \max \delta_{r_1}(z'_j)$.

Posto allora $F'(r_2) = F'(r_1) \cap F_1(r_2)$, si ottiene una parte non vuota chiusa e limitata tale che $\mathbf{F}(T) \subset F'(r_2) \subset F'(r_1)$ e $\alpha(F'(r_i)) \leq 2\delta_{r_i} < r_i$ $i = 1, 2$. In tal modo, ragionando per ricorrenza si costruisce una successione $(F'(r_k))_{k \in N}$ soddisfacente la tesi. La connessione di $F'(r_k)$ discende un noto teorema di addizione, v. [1], vol. II, pag. 82.

Dal teor. 1 discendono i seguenti corollari.

COROLLARIO 1. *Se* T *è un'applicazione di uno spazio metrico completo* (E, d) *in sé, l'insieme* $\mathbf{F}(T)$ *è compatto e connesso se e solo se esiste una successione* $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$ *tale che, per ogni* $k \in N$, *l'insieme* $F(r_k)$ *sia riunione di due insiemi disgiunti* $F_1(r_k)$, $M(r_k)$, *di cui il primo non vuoto chiuso limitato e connesso, verificanti le condizioni*:

$$\forall k \in N : F_1(r_{k+1}) \subset F_1(r_k) \tag{1.5}$$

$$\lim_k \alpha(F_1(r_k)) = 0 , \qquad \lim_k M(r_k) = \emptyset . \tag{1.6}$$

COROLLARIO 2. *Se* $(F(r_k))_{k \in N}$ *verifica le condizioni di cui al cor.* 1, *la funzione* T *o ha un unico punto unito o ne ha un'infinità non numerabile.*

COROLLARIO 3. *Se* T *non ha infiniti punti uniti, ne ha un numero finito n se (e solo se) esiste una successione* $(F(r_k))_{k \in N}$ *verificante le condizioni di cui al teor.* 1.

Dalle precedenti considerazioni scaturisce subito una condizione sufficiente per la compattezza di $\mathbf{F}(T)$, della quale è spesso utile poter disporre nello studio della convergenza delle approssimazioni successive o di altre successioni approssimanti.

TEOREMA 2. *Sia* T *un'applicazione di uno spazio metrico completo in sé. Se esiste una successione* $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$ *tale che per ogni* $k \in N$ *l'insieme* $F(r_k)$ *sia riunione di due insiemi disgiunti* $F'(r_k)$ *e* $M(r_k)$, *di cui il primo non vuoto chiuso e limitato, verificanti le condizioni*:

$$\forall k \in N : F'(r_{k+1}) \subset F'(r_k) \tag{1.7}$$

$$\lim_k \alpha(F'(r_k)) = 0 , \qquad \lim_k M(r_k) = \emptyset , \tag{1.8}$$

allora $\mathbf{F}(T)$ *è non vuoto e compatto.*

2. - ESISTENZA E APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE.

In questo numero intendiamo segnalare alcuni teoremi di esistenza significativi dal punto di vista delle approssimazioni successive.

Assegnati uno spazio metrico E, un'applicazione $T : E \to E$ e una parte non vuota $F'(r)$ di $F(r)$, $r > 0$, porremo

$$F'_0(r) = \{x \in E : \exists\, h \in N \ni' T^h(x) \in F'(r)\} .$$

Inoltre per ogni $x \in E$ denoteremo con $\mathbf{L}(x)$ l'insieme dei punti verso cui convergono le sottosuccessioni convergenti di $(T^k(x))_{k \in N}$. Ciò posto, sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 3. *Se esiste una successione* $(F'(r_k))_{k \in N}$ *verificante le condizioni del teor.* 2 *e tale che*

$$\forall k \in N : T^k(F'(r_1)) \subset F'(r_k) , \tag{2.1}$$

per ogni $x \subset F'_0(r_1)$, $\mathbf{L}(x)$ *è non vuoto, compatto e contenuto in* $\mathbf{F}(T)$.

Dim. Basta provare l'asserto per $x \in F'(r_1)$. Essendo per la (2.1)

$$A_k = \{T^{k+p}(x) : p \in N\} \subset F'(r_k) \qquad \forall k \in N$$

dalle ipotesi fatte su $(F'(r_k))_{k \in N}$ segue che $(\bar{A}_k)_{k \in N}$ è una successione decrescente d'insiemi non vuoti chiusi e limitati tale che $\lim_k \alpha(\bar{A}_k) = 0$. Per il teorema di Kuratowski la successione in questione ha limite non vuoto e compatto. Infine osservato che $\mathbf{L}(x) = \bigcap_{k \in N} \bar{A}_k \subset \mathbf{F}(T)$, si ha l'asserto.

COROLLARIO 4. *Ferme restando le ipotesi del teor.* 3, *se* T *ha al più un punto unito, allora per ogni* $x \in F'_0(r_1)$ *la successione* $(T^k(x))_{k \in N}$ *converge verso il punto unito di* T.

Proviamo ora un lemma, dovuto in sostanza a J. B. Diaz e F. T. Metcalf (v. [13] dim. del teor. 2 pag. 463), ma da questi non esplicitamente formulato.

LEMMA 2. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico,* T *un'applicazione continua di* E *in sé con* $\mathbf{F}(T)$ *non vuoto e compatto. Per ogni* $x \in E - \mathbf{F}(T)$ *tale che* $\mathbf{L}(x)$ *sia costituito da un unico punto e*

$$\lim_k d(T^k(x), \mathbf{F}(T)) = 0 \tag{2.3}$$

la successione $(T^k(x))_{k \in N}$ *converge a un punto fisso di* T.

Dim. Sia $L(x) = \{z\}$. Dalla definizione di $\mathbf{L}(x)$ segue che esiste una successione $(k_n)_{n \in N}$ strettamente crescente di interi positivi tale che $(T^{k_n}(x))_{n \in N} \to z$. Proviamo che $z \in \mathbf{F}(T)$. Per la continuità di T la successione $(T^{k_n+1}(x))_{n \in N}$ converge verso $T(z)$, perciò $T(z) \in \mathbf{L}(x)$. Se ne deduce che $T(z) = z$, come volevasi. Proviamo che $(T^k(x))_{k \in N}$ converge verso z. Per la compattezza di $\mathbf{F}(T)$ esiste una successione $(y_k)_{k \in N}$ di elementi di $\mathbf{F}(T)$ tale che

$$\forall k \in N : d(T^k(x), \mathbf{F}(T)) = d(T^k(x), y_k) ;$$

quindi per la (2.3) risulta

$$\lim_k d(T^k(x), y_k) = 0 . \tag{2.4}$$

Allora, osservato che

$$d(T^k(x), z)) \leq d(T^k(x), y_k) + d(y_k, z) \qquad \forall k \in N ,$$

per completare la prova del lemma è sufficiente mostrare che $(y_k)_{k \in N}$ tende a z. Se così non fosse, esisterebbero un numero positivo c e una una sottosuccessione $(y_{h_n})_{n \in N}$ in modo da aversi $d(y_{h_n}, z) \geq c$ per ogni $n \in N$. Essendo $\mathbf{F}(T)$ compatto, si può assumere che $(y_{h_n})_{n \in N}$ sia convergente ad un punto $y \in E$. Pertanto $d(y, z) \geq c > 0$, cioè $y \neq z$. D'altronde, la corrispondente successione $(T^{h_n}(x))_{n \in N}$, in virtù della (2.4), converge anch'essa a y, sicché $y \in \mathbf{L}(x)$ cioè $y = z$. La contraddizione così trovata mostra dunque che $(y_k)_{k \in N}$ converge a z. *c. v. d.*

TEOREMA 4. *Sia* T *una funzione continua dello spazio metrico completo* (E, d) *in sé. Supponiamo che esista una successione* $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$ *tale che per ogni* $k \in N$ *si abbia* $F(r_k) = F'(r_k) \cup M(r_k)$, *con* $(F'(r_k))_{k \in N}$ *successione decrescente di insiemi non vuoti e limitati, e inoltre*

$$\lim_k \alpha(F'(r_k)) = 0 , \qquad \lim_k \min M(r_k) = \emptyset \quad (2.5)$$

[4]

$$\forall k \in N : T^k(F'(r_1)) \subset F'(r_k) . \quad (2.6)$$

Allora $\mathbf{F}(T)$ *è non vuoto e compatto, e per ogni* $x \in F'_0(r_1)$ *risulta* $\emptyset \neq \mathbf{L}(x) \subset \mathbf{F}(T)$. *In più, se* $\mathbf{L}(x)$ *è costituito da un sol punto* $(T^k(x))_{k \in N}$ *converge.*

Dim. La successione $(\overline{F'(r_k)})_{k \in N}$ verifica le ipotesi del teorema di Kuratowski, quindi l'insieme $F' = \bigcap_{k \in N} F'(r_k)$ è non vuoto e compatto. Ovviamente $F' \subset \mathbf{F}(T)$, proviamo quindi che $\mathbf{F}(T) \subset F'$. Sia $z \in \mathbf{F}(T)$. Essendo $z \in F(r_k) = F'(r_k) \cup M(r_k)$, $k \in N$, se z non appartenesse a F' esisterebbe un $h \in N$ tale che per ogni $p \in N$ $z \notin \overline{F'(r_{h+p})}$. Pertanto risulterebbe $z \in \bigcap_{p \in N} M(r_{h+p}) \subset \lim \min M(r_k)$, in contrasto con la seconda delle (2.5). Dunque $\mathbf{F}(T) = F'$ e pertanto esso è non vuoto e compatto. Per provare la seconda parte della tesi ci si può limitare a considerare $x \in F'(r_1)$. Posto $Y = \{T^k(x) : k \in N\}$ si ha chiaramente

$$\forall p \in N : T^p(Y) \subset Y , \qquad \alpha(T^p(Y)) = \alpha(Y) . \quad (2.7)$$

Dalla (2.6) segue inoltre che $T^p(Y) \subset F'(r_p)$, $p \in N$, da cui per la prima delle (2.5) si ricava

$$\lim_k \alpha(T^p(Y)) = 0 . \quad (2.8)$$

È immediata conseguenza di (2.7) e (2.8) che $\alpha(Y) = 0$, perciò $(T^k(x))_{k \in N}$ ha una estratta convergente, ossia $\mathbf{L}(x) \neq \emptyset$. Proviamo che $\mathbf{L}(x) \subset \mathbf{F}(T)$. È facile dedurre dalla (2.6) che $\lim_k d(T^k(x), T^{k+1}(x)) = 0$. Detta $(T^{k_n}(x))_{n \in N}$ una sottosuccessione convergente di $(T^k(x))_{k \in N}$ e posto $z = \lim_k T^{k_n}(x)$, si ha quindi $\lim_n d(T^{k_n}(x), T^{k_n+1}(x)) = 0$. Infine osservato che

$$d(z, T(z)) \leq d(z, T^{k_n}(x)) + d(T^{k_n}(x), T^{k_n+1}(x)) + d(T^{k_n+1}(x), T(z))$$

dalla continuità di T segue che $z = T(z)$.

[4] Qui, a differenza dei precedenti teoremi e del teor. 5, supporre $\lim_k \min M(r_k) = \emptyset$ è meno restrittivo.

L'ultima parte della tesi, in virtù del lemma 2, rimane stabilita una volta provato che

$$\lim_k d(\mathrm{T}^k(x), \mathbf{F}(\mathrm{T})) = 0 .$$

Ragioniamo per assurdo. Allora esistono un numero positivo a e una sottosuccessione $(\mathrm{T}^{k_p}(x))_{p \in \mathrm{N}}$ tali che

$$\forall p \in \mathrm{N} : d(\mathrm{T}^{k_p}(x), \mathbf{F}(\mathrm{T})) \geq a . \tag{2.9}$$

Poiché $\mathrm{A} = \{\mathrm{T}^{k_p}(x) : p \in \mathrm{N}\} \subset \{\mathrm{T}^k(x) : k \in \mathrm{N}\}$, risulta $\alpha(\mathrm{A}) = 0$.

Pertanto $(\mathrm{T}^{k_p}(x))_{p \in \mathrm{N}}$ ha una estratta $(\mathrm{T}^{k_{p_i}}(x))_{i \in \mathrm{N}}$ convergente Posto $y = \lim_i \mathrm{T}^{k_{p_i}}(x)$ per la (2.9) risulta $d(y, \mathbf{F}(\mathrm{T})) \geq a > 0$, in contrasto col fatto che $y \in \mathbf{L}(x) \subset \mathbf{F}(\mathrm{T})$. *c. v. d.*

COROLLARIO 5. *Nelle ipotesi del teor.* 4, *se* T *ha un unico punto unito, per ogni* $x \in \mathrm{F}'_u(r_1)$, *la successione* $(\mathrm{T}^k(x))_{k \in \mathrm{N}}$ *converge verso il punto unito di T.*

Una notevole variante del teor. 4 in cui si fa a meno di supporre la continuità di T è data dal seguente teor. 5 che, come vedremo, generalizza vari risultati recentemente apparsi nella letteratura.

Seguendo F. E. BROWDER e W. V. PETRYSHYN [6] diremo che T è *asintoticamente regolare su una parte* A di E se T è asintoticamente regolare in ogni elemento $x \in \mathrm{A}$, cioè se per ogni $x \in \mathrm{A}$ risulta $\lim_k d(\mathrm{T}^k(x), \mathrm{T}^{k+1}(x)) = 0$. Diremo inoltre che T è *uniformemente asintoticamente regolare su* A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k' \in \mathrm{N} \ni' \forall k \geq k' : d(\mathrm{T}^k(x), \mathrm{T}^{k+1}(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in \mathrm{A} . \tag{2.10}$$

È facile vedere che, se T è uniformemente asintoticamente regolare su $\mathrm{F}(r)$, allora

$$\forall k \in \mathrm{N} \quad \exists\, n_k \in \mathrm{N} \ni' \mathrm{T}^{n_k}(\mathrm{F}(r)) \subset \mathrm{F}\left(\frac{r}{k}\right) ,$$

condizione questa che implica la (2.6).

Infine denoteremo con $\delta(\mathrm{A})$ il diametro dell'insieme A.

Ciò premesso, eccoci al preannunciato

TEOREMA 5. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico completo,* A *una parte non vuota di* E *e* T *un'applicazione di* E *in sé asintoticamente regolare*

su A. *Se esiste una successione* $(r_k)_{k\in N}\downarrow 0$ *tale che, per ogni* $k \in N$, $F(r_k)$ *sia riunione di due insiemi disgiunti* $F'(r_k)$ *e* $M(r_k)$, *di cui il primo non vuoto limitato, tali che la successione* $(F'(r_k))_N$ *sia decrescente e inoltre*

$$\lim_k \delta(F'(r_k)) = 0\,, \qquad \lim_k M(r_k) = \emptyset. \tag{2.11}$$

$$\forall x \in A \;\; \forall k \in N : \operatorname{card}(M(r_k) \cap \{T^n(x) : n \in N\}) < +\infty \tag{2.12}$$

allora, per ogni $x \in A$, *la successione* $(T^k(x))_{k\in N}$ *converge verso un punto* z *indipendente da* x.

Dim. $(\overline{F'(r_k)})_{k\in N}$ è una successione decrescente di chiusi non vuoti e limitati verificante la (2.11), quindi per il teorema di Cantor sull'intersezione (di cui il citato teorema di Kuratowski è una estensione) esiste un unico elemento z di E tale che $\{z\} = \bigcap_{k\in N} \overline{F'(r_k)}$. Di qui, essendo per la (2.11) $\bigcap_{k\in N} M(r_k) = \emptyset$, si deduce che $\{z\} \supset \mathbf{F}(T)$, perciò T ha al più un punto unito [5]. Sia ora $x \in A$; proviamo che $(T^k(x))_{k\in N} \to z$. Osserviamo intanto che

$$\forall k \in N \quad \exists\, n_k \in N \;\ni'\; \forall p \in N : T^{n_k+p}(x) \in F'(r_k)\,. \tag{2.13}$$

Infatti se la (2.13) non fosse vera

$$\exists\, \bar{k} \in N\,, \qquad \forall n \in N \qquad \exists\, p_n > n : T^{p_n}(x) \notin F'(r_{\bar{k}})\,.$$

D'altra parte per la asintotica regolarità di T in x

$$\forall k \geq \bar{k} \quad \exists\, m_k \in N \;\ni'\; \forall n \geq m_k : T^n(x) \in F(r_k)\,.$$

Pertanto

$$\forall k \geq \bar{k} \quad \exists\, m_k \in N \;\ni'\; \forall n \geq m_k : T^{p_n}(x) \in M(r_k)\,.$$

[5] Il caso in cui T, pur soddisfacendo le ipotesi del teor. 5, non ha alcun punto unito può effettivamente presentarsi. Infatti, considerato l'insieme $E = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ munito della distanza euclidea, l'applicazione $T : E \to E$ definita da $T(0) = 1$ e $T\left\{\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n+1}$ soddisfa le ipotesi, ma ciò nonostante non ha alcun punto unito.

Poiché per la (2.12) l'insieme $\{T^{p_n}(x) : n \geq m_k\}$ è finito

$$\exists\, \nu \in \mathrm{N} \ni' T^{p_\nu}(x) \in \bigcap_{k \geq \bar{k}} M(r_k)$$

quindi $T^{p_\nu}(x) \in \lim_k \min M(r_k)$, in contrasto con la seconda delle (2.11). Dunque la (2.13) è provata.

Dalla (2.13) si deduce poi l'asserto, tenendo conto della (2.11). Infatti, assegnato $\varepsilon > 0$, grazie alla (2.11) è certo possibile determinare un intero positivo j tale che $\delta(F'(r_j)) < \varepsilon$. D'altronde per la (2.13)

$$\exists\, n_j \in \mathrm{N} \ni' \forall\, p \in \mathrm{N} : T^{n_j+p}(x) \in F'(r_j)\ .$$

Ne segue, essendo anche $z \in F'(r_j)$, che

$$d(z, T^k(x)) \leq \delta(F'(r_j)) < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq n_j\ ,$$

e ciò prova la tesi. *c. v. d.*

COROLLARIO 6. *Ferme restando le ipotesi del teor.* 5, *se per un certo* $h \in \mathrm{N}$ T *è continua su* $F'(r_h)$ [6], *allora* T *ha un unico punto unito verso cui convergono le approssimazioni successive costruite a partire dai punti di* A.

Il teor. 5 suggerisce un'altra variante del teor. 4, espressa nel seguente

TEOREMA 6. *Nelle ipotesi del teor.* 5, *si sostituisca la condizione* (2.11) *con la seguente*

$$\lim_k \alpha(F'(r_k)) = 0\ , \qquad \lim_k M(r_k) = \emptyset\ . \tag{2.14}$$

Allora, per ogni $x \in \mathrm{A}$ $\mathbf{L}(x) \neq \emptyset$. *Inoltre, se* T *è continua,* $\mathbf{L}(x)$ *è compatto e contenuto in* $\mathbf{F}(\mathrm{T})$ (*compatto a sua volta*), *e se* $\mathbf{L}(x)$ *contiene un sol punto* z *la successione* $(T^k(x))_{k \in \mathrm{N}}$ *converge verso* z.

Dim. Invero, posto $Y = \{T^k(x) : k \in \mathrm{N}\}$, dalla (2.13) segue che

$$\forall\, k \in \mathrm{N} \qquad \exists\, n_k \in \mathrm{N} \ni' T^{n_k}(Y) \subset F'(r_k)$$

[6] Oppure, per ogni $k \geq h$, $F'(r_k)$ è chiuso o $F'(r_k) \subset \overline{F'(s_k)}$ con $s_k \to 0$.

quindi, per la (2.14), $\lim_k \alpha(T^{n_k}(Y)) = 0$. Essendo inoltre $\alpha(T^{n_k}(Y)) = \alpha(Y)$, si deduce che $\alpha(Y) = 0$ e quindi che $\mathbf{L}(x) \neq \emptyset$. Supposta poi la continuità di T, osservato che per ipotesi T è asintoticamente regolare in x, si conclude facilmente (v. dim. Teor. 4) che $\mathbf{L}(x) \subset \mathbf{F}(T)$.

Per provare che $\mathbf{F}(T)$ è compatto basta osservare che, in virtù della continuità di T, $\mathbf{F}(T) \subset \bigcap_{k \in N} \overline{F'(r_k)}$. Pertanto $\mathbf{L}(x)$, in quanto sottoinsieme chiuso di un compato, è anch'esso compatto. Infine ragionando come nel teor. 4 si deduce l'ultima parte della tesi.

Da un punto di vista puramente esistenziale le ipotesi fatte nei teoremi precedenti sono sovrabbondanti. Sussite infatti il seguente

TEOREMA 7. *Sia* T *una funzione continua dello spazio metrico completo in sé. Se esiste una successione* $(r_k)_{k \in N} \downarrow 0$ *e per ogni* $k \in N$ *una parte* $F'(r_k)$ *di* $F(r_k)$, *non vuota e limitata, tale che* $(F'(r_k))_{k \in N}$ *sia decrescente e* $\lim_k \alpha(F'(r_k)) = 0$, *allora* $\mathbf{F}(T) \neq \emptyset$.

Dim. Infatti la successione $(\overline{F'(r_k)})_{k \in N}$ ha intersezione F' non vuota (e compatta). Inoltre, per la continuità di T, $F'(\overline{r_k}) \subset F(r_k)$, quindi $F' \subset \mathbf{F}(T)$. Ciò prova l'asserto.

Il seguente teorema, dovuto a M. FURI e A. VIGNOLI (cfr. [12] pag. 465), dal punto di vista esistenziale può essere considerato come una conseguenza del teor. 7.

TEOREMA 7a. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico,* D *un sottospazio completo di* E, $T : D \to E$ *un'applicazione densificante* [7]. *Allora ogni successione limitata* $(x_n)_{n \in N}$ *tale che* $d(x_n, T(x_n)) \to 0$ *è compatta, e l'insieme dei punti limiti di* $(x_n)_{n \in N}$ *è contenuto in* $\mathbf{F}(T)$.

Dim. Definiamo $F(r) = \{x \in D : d(x, T(x)) \leq r\}$. Poiché $d(x_n, T(x_n)) \to 0$, si può determinare una successione strettamente crescente $(n_k)_{k \in N}$ tale che

$$\forall k \in N : \{x_{n_k+p} : p \in N\} \subset F\left(\frac{1}{k}\right).$$

Posto allora $F'\left(\frac{1}{k}\right) = \{x_{n_k+p} : p \in N\}$, si ha $\alpha\left(F'\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \alpha(F'(1))$ per ogni $k \in N$, da cui, essendo T densificante e

$$\alpha\left(T\left(F'\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) = \alpha\left(F'\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

[7] Ricordiamo che T dicesi *densificante* se è continua e per ogni parte limitata tale che $\alpha(A) \neq 0$ risulta $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$.

si deduce che $\alpha\left(F'\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0$. Dunque T verifica le ipotesi di una evidente estensione del teor. 7.

Segnaliamo infine un teorema che generalizza in parte il teor. 4.

TEOREMA 7b. *Nelle ipotesi del teor.* 7, *se vale la* (2.6), *per ogni* $x \in F_0'(r_1)$ *risulta* $\emptyset \neq \mathbf{L}(x) \subset \mathbf{F}(T)$. *In più, se* $\mathbf{L}(x)$ *contiene un unico punto,* $(T^k(x))_{k \in N}$ *converge.*

Dim. Con le notazioni del teor. 7, F' è non vuoto e compatto. Ragionando come nella dimostrazione del teor. 4, si deduce che $\emptyset \neq \mathbf{L}(x) \subset \mathbf{F}(T)$ e che $\lim_k d(T^k(x), F') = 0$. Quindi si utilizza una evidente generalizzazione del lemma 2.

3. - ALCUNE CONSEGUENZE DEL TEOR. 5.

Incominciamo col dedurre dal cor. 6 (e quindi dal teor. 5) un risultato stabilito da F. E. BROWDER [7] adattando agli spazi metrici un noto teorema di punto unito di A. WOUK [5] per gli spazi pseudometrici e successivamente ritrovato da M. FURI e A. VIGNOLI [12] con l'uso delle applicazioni densificanti [8] (o α-densificanti) nella forma seguente, che come vedremo è equivalente a quella di F. E. Browder.

TEOREMA 8. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico completo,* $T : E \to E$ *un'applicazione tale che*

$$d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y)) \qquad \forall x, y \in E \tag{3.1}$$

ove $\varphi : R_+ \to R_+$ *è una funzione non decrescente e continua a destra tale che* $\varphi(r) < r$ *per* $r > 0$. *Allora* T *ha un unico punto unito verso cui converge la successione* $(T^k(x))_{k \in N}$, $x \in E$.

Dim. Posto per ogni $k \in N$ $\varphi^{k+1}(r) = \varphi(\varphi^k(r))$, dalle ipotesi fatte su φ segue (cfr. F. E. BROWDER [7]) che

$$\lim_k \varphi^k(r) = 0 \qquad \forall r > 0 \tag{3.2}$$

da cui, tenendo conto della (3.1), si ricava

$$\lim_k d(T^k(x), T^k(y)) = 0 \qquad \forall x, y \in E\ . \tag{3.3}$$

[8] Precisamente, M. FURI e A. VIGNOLI deducono il teor. 8 dal teor. 7a.

Dalla (3.3) segue in particolare che T è asintoticamente regolare su E, il che implica, tra l'altro, che l'insieme $F(r)$, $r > 0$, che è chiuso per la continuità (uniforme) di T, è non vuoto. Fissato $r > 0$, costruiamo una parte invariante e limitata di $F(r)$. Sia $x \in E$. Poiché T è asintoticamente regolare in x

$$\exists\, h = h(x) \in \mathrm{N} \ni' \forall k \geq h : d(\mathrm{T}^k(x), \mathrm{T}^{k+1}(x)) < \frac{r}{2} - \varphi\left(\frac{r}{2}\right),$$

quindi per ogni elemento y della sfera aperta $\mathrm{S}\left(\mathrm{T}^h(x), \frac{r}{2}\right)$ si ha

$$d(\mathrm{T}^h(x), \mathrm{T}(y)) \leq d(\mathrm{T}^h(x), \mathrm{T}^{h+1}(x)) + d(\mathrm{T}^{h+1}(x), \mathrm{T}(y)) <$$

$$< \frac{r}{2} - \varphi\left(\frac{r}{2}\right) + \varphi(d(\mathrm{T}^h(x), y)) < \frac{r}{2}$$

cioè $\mathrm{S}\left(\mathrm{T}^h(x), \frac{r}{2}\right)$ è invariante per T. Pertanto l'insieme $F''(r) = \bigcup_{x \in E} \mathrm{S}\left(\mathrm{T}^{h(x)}(x), \frac{r}{2}\right)$ è invariante per T. $F''(r)$ è contenuto in $F(r)$. Infatti, se $y \in F''(r)$, esiste $x \in E$ tale che $y \in \mathrm{S}\left(\mathrm{T}^{h(x)}(x), \frac{r}{2}\right)$ quindi

$$d(y, \mathrm{T}(y)) \leq d(y, \mathrm{T}^{h(x)}(x)) + d(\mathrm{T}^{h(x)+1}(x), \mathrm{T}^{h(x)}(x)) +$$

$$+ d(\mathrm{T}^{h(x)+1}(x), \mathrm{T}(y)) \leq \frac{r}{2} + \left(\frac{r}{2} - \varphi\left(\frac{r}{2}\right)\right) + \varphi\left(\frac{r}{2}\right) = r.$$

Inoltre $\delta(F''(r)) \leq 2r$. Invero, assegnati $z, v \in F''(r)$ e supposto $z \in \mathrm{S}\left(\mathrm{T}^{h(x)}(x), \frac{r}{2}\right)$, $v \in \mathrm{S}\left(\mathrm{T}^{h(y)}(y), \frac{r}{2}\right)$, per ogni $p \in \mathrm{N}$ risulta:

$$d(z, v) \leq d(z, \mathrm{T}^{h(x)+p}(x)) + d(\mathrm{T}^{h(x)+p}(x), \mathrm{T}^{h(y)+p}(y)) + d(\mathrm{T}^{h(y)+p}(y), v)^{9} \leq$$

$$\leq r + \varphi^p(d(\mathrm{T}^{h(x)}(x), \mathrm{T}^{h(y)}(y))) + r,$$

da cui, passando al limite per $p \to +\infty$, per la (3.2) si ha $d(z, v) \leq 2r$. Pertanto, $\delta(F''(r)) \leq 2r$.

[9] Si noti che per ogni $p \in \mathrm{N}$ $\mathrm{T}^{h(x)+p}(x) \in \mathrm{T}^p\left(\mathrm{S}\left(\mathrm{T}^{h(x)}(x), \frac{r}{2}\right)\right) \subset \mathrm{S}\left(\mathrm{T}^{h(x)}(x), \frac{r}{2}\right)$, quindi $d(\mathrm{T}^{h(x)+p}(x), z) < r$. Analogamente si ragiona per y.

Ora, considerata la successione $r_k = \dfrac{r}{k}$ e posto $F'(r_1) = \overline{F''(r_1)}$, $F'(r_{k+1}) = \overline{F''(r_{k+1})} \cap F'(r_k)$ e $M(r_k) = F(r_k) - F'(r_k)$, è facile convincersi che le successioni $(F'(r_k))_{k \in N}$ e $(M(r_k))_{k \in N}$ verificano le ipotesi del cor. 6. Infatti dalla continuità di T segue subito che $T(\overline{F''(r)}) \subset \overline{F''(r)}$, quindi $F'(r_k)$ è invariante perché intersezione di parti invarianti. Inoltre $\delta(F'(r_k)) \leq \delta(\overline{F''(r_k)}) \leq 2r_k$. Pertanto rimane da provare che $\lim_k M(r_k) = \emptyset$; ossia che $\lim_k \max M(r_k) = \emptyset$. Invero, dall'essere $z \in \lim_k \max M(r_k)$ si deduce facilmente l'esistenza di una successione $(k_n)_{n \in N}$ strettamente crescente tale che $z \in M(r_{k_n})$ per ogni $n \in N$, il che implica (essendo $M(r_k) \subset F(r_k)$) evidentemente $z = T(z)$.

Di conseguenza, considerato $y \in F'(r_{k_1})$, si ha:

$$d(z, T^p(y)) = d(T^p(z), T^p(y)) \leq \varphi^p(d(z, y)) \qquad \forall p \in N,$$

cioè $z = \lim_p T^p(y)$. Di qui, osservato che $F'(r_{k_1})$ è chiuso e invariante, si conclude che $z \in F'(r_{k_1})$, in contrasto col fatto che $z \in M(r_{k_1})$. Ne segue che $\lim_k M(r_k) = \emptyset$. Inoltre per la definizione di $F''(r)$ T verifica la (2.12) con $A = E$. c.v.d.

È appena il caso di osservare che nelle ipotesi del teor. 8 l'insieme $F(r)$ è limitato in virtù del fatto che T è uniformemente asintoticamente regolare su $F(r)$. Invero, osservato che per ogni $x \in F(r)$

$$d(T^k(x), T^{k+1}(x)) \leq \varphi^k(d(x, T(x))) \leq \varphi^k(r) \qquad \forall k \in N,$$

la uniforme asintotica regolarità discende banalmente dalla (3.2). Di conseguenza

$$\exists\, h \in N \ni' \forall k \geq h : d(T^k(x), T^{k+1}(x)) < \frac{r}{2} - \varphi\left(\frac{r}{2}\right) \quad \forall x \in F(r)$$

e quindi $H(r) = \bigcup_{x \in F(r)} S\left(T^h(x), \dfrac{r}{2}\right)$ è una parte limitata di $F(r)$ invariante per T [10]. In più, $T^h(F(r)) \subset H(r)$, in quanto ovviamente $T^h(x) \in H(r)$ per ogni $x \in F(r)$. Se ne deduce anche che

$$d(x, H(r)) \leq d(x, T^h(x)) \leq d(x, T(x)) + d(T(x), T^2(x)) + \ldots +$$

$$+ d(T^{h-1}(x), T^h(x)) \leq r + \varphi(r) + \ldots + \varphi^{h-1}(r)$$

[10] Si noti che $H(r)$ è costruito nello stesso modo di $F''(r)$, salvo il fatto che x varia in $F(r)$ invece che in E. Pertanto $\delta(H(r)) \leq \delta(F''(r)) \leq 2r$.

da cui si ottiene

$$\delta(F(r)) \leq \delta(H(r)) + 2(r + \varphi(r) + \ldots + \varphi^{h-1}(r)). \tag{3.4}$$

Dunque $F(r)$ è limitato. Si osservi però che la (3.4) non implica in generale che $\delta(F(r)) \to 0$.

Si noti che il teorema di M. Furi e A. Vignoli (cioè il teor. 8) può essere dedotto anche applicando ad $F'(r)$, che è chiuso, il teorema di F. E. Browder e osservando che $F'_0(r) = E$. Ciò prova la suaccennata equivalenza dei due teoremi, la quale, del resto, è già contemplata in A. WOUK [5] pag. 23. Per i risultati che rientrano nel teor. 8 rimandiamo alle note [7], [12], e alle relative bibliografie, limitandoci qui a ricordare che con una formulazione leggermente diversa ma equivalente il teor. 8 è stato dimostrato anche da D. W. BOYD e J. S. W. WONG [14].

R. KANNAN ha provato (v. [9] pag. 73, [10] pag. 406) che una funzione T di uno spazio metrico completo E in sé ha un unico punto unito se esiste una costante non negativa $a < 1/2$ tale che

$$d(T(x), T(y)) \leq a(d(x, T(x)) + d(y, T(y))) \qquad \forall x, y \in E. \tag{3.5}$$

Tale risultato è stato esteso da S. Reich dapprima sostituendo alla (3.5) la seguente

$$d(T(x), T(y)) \leq a\, d(x, T(x)) + b\, d(y, T(y)) + c\, d(x, y) \tag{3.6}$$

$$\forall x, y \in E$$

con a, b, c costanti non egative tali che $a + b + c < 1$, e successivamente nella forma che segue (cfr. [16, 17]).

TEOREMA 9. *Siano*: (E, d) *uno spazio metrico completo*, $a(t)$, $b(t)$ *e* $c(t)$ *funzioni decrescenti di* $(0, \infty)$ *in* $[0, 1)$ *tali che*

$$\forall t \in (0, \infty) : a(t) + b(t) + c(t) < 1. \tag{3.7}$$

Sia inoltre T *un'applicazione di* E *in sé soddisfacente alla condizione*

$$d(T(x), T(y)) \leq a(d(x, y))\, d(x, T(x)) + b(d(x, y))\, d(y, T(y)) + \tag{3.8}$$
$$+ c(d(x, y))\, d(x, y) \qquad \forall x, y \in E, \quad x \neq y.$$

Allora T *ha un unico punto unito verso cui converge la successione* $(T^n(x))_{n \in N}$, *per ogni* $x \in E$.

Dim. Dalla (3.8) si deduce subito che

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq \frac{a+c}{1-b}\, d(T^{n-1}(x), T^n(x)) \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{3.9}$$

dove a, b e c sono calcolate in $d(T^{n-1}(x), T^n(x))$. Pertanto la successione $(d(T^n(x)), T^{n+1}(x))_{n \in \mathbf{N}}$ è decrescente in virtù della (3.7). Sia $s = \lim d(T^n(x), T^{n+1}(x))$. Posto

$$h(t) = \frac{a(t) + c(t)}{1 - b(t)} \qquad \forall t \in (0, \infty),$$

le ipotesi fatte su a, b, c assicurano che h è decrescente e a valori in $[0, 1)$, perciò per $r > 0$ si ha

$$\lim_{t \to r^+} h(t) = \sup_{t > r} h(t) \leq h(r) < 1. \tag{3.10}$$

Pertanto, passando al limite nella (3.9), si ottiene $s \leq s \cdot \sup_{t > s} h(t)$, che è compatibile con la (3.10) solo se $s = 0$. Dunque T è asintoticamente regolare su E. Ciò assicura da una parte che $F(r) \neq \emptyset$; dall'altra che $F_0(r) = E$. Distinguiamo due casi: I) $\lim_{t \to 0^+} c(t) = c_0 < 1$, II) $\lim_{t \to 0^+} c(t) = 1$.

Caso I. Osservato che

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, T(x)) + d(y, T(y)) + d(T(x), T(y)) \leq \\ &\leq (1 + a(d(x, y)))\, d(x, T(x)) + \\ &+ (1 + b(d(x, y)))\, d(y, T(y)) + c(d(x, y))\, d(x, y) \end{aligned}$$

si ha

$$d(x, y) \leq \frac{1 + a(d(x, y))}{1 - c(d(x, y))}\, d(x, T(x)) + \frac{1 + b(d(x, y))}{1 - c(d(x, y))}\, d(y, T(y))$$

qualunque siano $x, y \in E$, $x \neq y$. Pertanto se x, y appartengono entrambi a $F(r)$, si ha evidentemente

$$d(x, y) \leq \frac{2 + a(d(x, y)) + b(d(x, y))}{1 - c(d(x, y))}\, r$$

da cui, osservando che per la decrescenza di $c(t)$ $c_0 = \sup_{t > 0} c(t)$ e te-

nendo anche conto della (3.7), si ha $d(x, y) \leq \frac{3}{1 - c_0} r$ per ogni $x, y \in F(r)$.

Ne segue che $\delta(F(r)) \leq \frac{3}{1 - c_0} r$, e poiché $A = F_0(r) = E$, in virtù del teor. 5 esiste ed è unico $z \in E$ tale che per ogni $x \in E$ $T^n(x) \to z$. Per provare che z è unito basta dimostrare che $T^{n+1}(x) \to T(z)$. Infatti, per la simmetria della distanza, dalla (3.8) segue

$$2\, d(T^{n+1}(x), T(z)) \leq (a + b)\, d(z, T(z)) + (a + b)\, d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + \\ + 2c\, d(T^n(x), z)$$

da cui, tenendo presente che $d(z,T(z)) \leq d(z,T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x),T(z))$, in virtù della (3.7) si ottiene

$$d(T^{n+1}(x),T(z)) \leq (2-(a+b))d(T^{n+1}(x),T(z)) \leq (a+b)d(z,T^{n+1}(x)) + \\ +(a+b)d(T^n(x),T^{n+1}(x)) + 2c\, d(T^n(x),z)$$

dove a, b, c vanno calcolate in $d(T^n(x), z)$. Di qui, passando al limite per $n \to \infty$, si deduce la tesi grazie alla asintotica regolarità di T in x e alla convergenza di $(T^n(x))_{n \in N}$ verso z.

Caso II. Essendo per ipotesi $\sup_{t > 0} c(t) = 1$, dalla (3.7) e dalla monotonia delle funzioni a, b e c, segue che $a = b = 0$. Pertanto qualunque siano $x, y \in E$ si ha $d(T(x), T(y)) \leq c(d(x, y))\ d(x, y)$, con $c(t) < 1$ e decrescente. In questa ipotesi il risultato è di E. RAKOTCH [4] e rientra nel citato teorema di F. E. BROWDER (v. [7] pag. 29), ossia nel teor. 8. Il teor. è così completamente dimostrato.

Tra i risultati che rientrano nel teor. 5 segnaliamo infine uno di V. ISRATESCU e A. ISRATESCU [18] che prende le mosse dalla (3.5) e migliora il risultato di R. Kannan.

TEOREMA 10. *Sia* (E,d) *uno spazio metrico completo,* $P = \{d(x,y) : x,y \in E\}$, ψ *una funzione di* $\bar{P} - \{o\}$ *in* $[o, \infty)$ *superiormente semicontinua a destra e tale che* $\psi(t) < t$ *per ogni* $t \in \bar{P} - \{o\}$. *Se* T *è un'applicazione di* E *in sé tale che*

$$(3.11) \quad d(T(x), T(y)) \leq \frac{1}{2} (\psi(d(x, T(x))) + \psi(d(y, T(y)))$$

qualunque siano $x, y \in E$ *purché distinti, allora* T *ha un unico punto unito* z *e per ogni* $x \in E$ $T^n(x) \to z$.

Dim. Dalla (3.11) segue facilmente che per ogni $n \in \mathrm{N}$

$$(3.12) \quad d(\mathrm{T}^n(x),\mathrm{T}^{n+1}(x)) \leq \psi(d(\mathrm{T}^{n-1}(x)),\mathrm{T}^n(x)) < d(\mathrm{T}^{n-1}(x),\mathrm{T}^n(x))$$

quando $\mathrm{T}^{n-1}(x) \neq \mathrm{T}^n(x)$. Perciò, posto $s = \lim_n d(\mathrm{T}^n(x), \mathrm{T}^{n+1}(x))$, per la supposta semicontinuità di ψ si ha

$$s \leq \lim_{t \to s^+} \max \psi(t) \leq \psi(s)$$

che è compatibile con la condizione $\psi(t) < t, t > o$, solo se $s = o$. Pertanto T è asintoticamente regolare in E. Inoltre, in virtù della (3.12), $\mathrm{F}(r)$ è invariante per T. Essendo poi per ogni $x, y \in \mathrm{F}(r)$

$$d(x, y) \leq d(x, \mathrm{T}(x)) + d(y, \mathrm{T}(y)) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\psi(d(x, \mathrm{T}(x)))) + \psi(d(y, \mathrm{T}(y)))) \leq 3r$$

risulta $\delta(\mathrm{F}(r)) \leq 3r$. Dunque, a norma del teor. 5, esiste un unico elemento $z \in \mathrm{E}$ tale che $\mathrm{T}^n(x) \to z$, per ogni $x \in \mathrm{E}$. Per provare che z è fisso è sufficiente osservare che $\mathrm{T}^{n+1}(x) \to \mathrm{T}(z)$, in quanto per la (3.11)

$$d(\mathrm{T}^{n+1}(x), \mathrm{T}(z)) \leq d(\mathrm{T}^n(x), \mathrm{T}^{n+1}(x)) + \frac{1}{2} d(z, \mathrm{T}^n(x)) .$$

Ciò completa la dimostrazione del teorema.

A conclusione di questo numero diamo alcuni nuovi risultati suggeriti dalle precedenti applicazioni del teorema 5.

Sia $c \in [0, 1)$ e siano a e b due funzioni di $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ in $[0, 1)$ verificanti le seguenti condizioni:

$$(3.13) \quad \forall r, s, t \in (0, \infty) : a(r, s, t) + b(r, s, t) + c < 1$$

(3.14) *Se* $(r_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *è una successione decrescente tale che*

$$r_{n+1} \leq \frac{a(r_n, r_{n+1}, r_n) + c}{1 - b(r_n, r_{n+1}, r_n)} \cdot r_n \qquad \forall n \in \mathrm{N}$$

allora $(r_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *è infinitesima.*

Ciò posto, sussiste il seguente

TEOREMA 11. *Se* T *è una funzione dello spazio metrico completo* (E, d) *in sé tale che per ogni* $x, y \in E$ *con* $x \neq y$ *si abbia*

$$(3.15)\quad d(T(x),T(y)) \leq a(d(x,T(x)),d(y,T(y)),d(x,y))d(x,T(x)) + \\ + b(d(x,T(x)),d(y,T(y)),d(x,y))d(y,T(y)) + c\,d(x,y)\,,$$

con a, b *e* c *verificanti le condizioni* (3.13) *e* (3.14), T *ha un unico punto unito verso cui convergono le approssimazioni successive costruite a partire da un punto qualsiasi di* E.

Dim. Sia $x \in E$. Supposto $T^{n-1}(x) \neq T^n(x)$ (l'altro caso è banale) e posto $r_n = d(T^{n-1}(x), T^n(x))$, in virtù della (3.15) risulta

$$(3.16)\qquad r_{n+1} \leq \frac{a(r_n, r_{n+1}, r_n) + c}{1 - b(r_n, r_{n+1}, r_n)} \cdot r_n \qquad \forall n \in N\,,$$

perciò $(r_n)_{n \in N}$ è decrescente e verifica la (3.14), quindi $r_n \to 0$, ossia T è asintoticamente regolare in x. La (3.16) assicura inoltre che $F(r)$ è invariante per T.

D'altra parte, da una semplice applicazione della (3.15) segue anche che

$$d(x, y) \leq \frac{3}{1 - c}\, r \qquad \forall x, y \in F(r)$$

sicché $\delta(F(r)) \leq \dfrac{3}{1-c}\, r$. Pertanto dal teor. 5 si deduce che esiste un unico punto $z \in E$ tale che per ogni $x \in E$ $(T^n(x))_{n \in N}$ converga verso z. Per provare che z è unito, se $c > o$, si può ragionare come segue. Fissato $r > o$, proviamo che $\overline{F(r)} \subset F\left(\dfrac{r}{c}\right)$. Infatti se $(x_n)_{n \in N}$ è una successione di elementi di $F(r)$ convergente ad un elemento $x \in E$, si ha

$$d(x, T(x)) \leq \frac{1 + c}{1 - b(d(x_n, T(x_n)), d(x, T(x)), d(x_n, x))}\, d(x, x_n) + \\ + \frac{1 + a(d(x_n, T(x_n)), d(x, T(x)), d(x_n, x))}{1 - b(d(x_n, T(x_n)), d(x, T(x)), d(x_n, x))}\, d(x_n, T(x_n)) \leq \\ \leq \frac{1 + c}{c}\, d(x, x_n) + \frac{1}{c}\, d(x_n, T(x_n))$$

da cui segue evidentemente $d(x, \mathrm{T}(x)) \leq \frac{r}{c}$. Pertanto per il teorema di Cantor

$$\{z\} = \bigcap_{r>0} \overline{\mathrm{F}(r)} \subset \bigcap_{r>0} \mathrm{F}\left(\frac{r}{c}\right)$$

e quindi $d(z, \mathrm{T}(z)) = 0$ [11], come volevasi. Se invece $c = 0$, si può dimostrare che $\mathrm{T}^{n+1}(x) \to \mathrm{T}(z)$, ragionando come nel caso del teor. 9 pag. 18.

TEOREMA 12. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico completo,* T *un'applicazione continua di* E *in sé tale che*

$$(3.17) \quad d(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) \leq a\, d(x, \mathrm{T}(x)) + b\, d(y, \mathrm{T}(y)) + c\, d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in \mathrm{E}$$

con $a, b \in [0, \infty)$ *e* $c \in [0, 1)$. *Se esiste una successione* $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *tale che* $d(x_n, \mathrm{T}(x_n)) \to 0$, *l'insieme* $\mathbf{F}(\mathrm{T})$ *è non vuoto e costituito da un un unico punto.*

Dim. Infatti, osservato che $\mathrm{F}(r)$ è chiuso e $\delta(\mathrm{F}(\mathrm{r})) \leq \frac{2+a+b}{1-c} r$, l'asserto segue dal teorema di Cantor.

TEOREMA 13. *Sia* (E, d) *uno spazio metrico completo,* A *una parte non vuota di* E, T *un'applicazione continua di* E *in sé asintoticamente regolare su* A. *Se* T *verifica la* (3.17), T *ha un unico punto unito verso cui converge* $(\mathrm{T}^n(x))_{n \in \mathrm{N}}$ *per ogni* $x \in \mathrm{A}$.

Dim. Infatti, posto $r_k = \frac{r}{k}$, la sucessione $\mathrm{F}'(r_k) = \mathrm{F}(r_k)$ verifica le ipotesi del teor. 5, e in più T è continua. Dunque l'asserto segue dal cor. 6.

BIBLIOGRAFIA

[1] KURATOWSKI C., *Topologie,* vol. I, II, Monografie Matematiczne, Warszawa, 1948, 1952.
[2] CODDINGTON E. A., LEVINSON N., *Theory of ordinary differential equations,* Mc Graw-Hill Book Company, 1955.
[3] DARBO G., *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto,* Rend. Sem. Mat. Padova, **24**, pp. 84-92 (1955).

[11] Vedi anche cor. 6, nota.

[4] RAKOTCH E., *A note on contractive mappings,* Proc. Amer. Math. Soc., **13**, pp. 459-465 (1962).

[5] WOUK A., *Nonlinear integral equations,* The University of Wisconsin Press, Madison, pp. 19-23 (1964).

[6] BROWDER F. E. e PETRYSHYN W. V., *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces,* Bull. Amer. Math. Soc., **72**, pp. 571-575 (1966).

[7] BROWDER F. E., *On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations,* Indag. Math., **30**, pp. 27-35 (1968).

[8] AMBROSETTI A., *Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach,* Rend. Sem. Mat. Padova, **39**, pp. 349-361 (1967).

[9] KANNAN R., *Some result on fiexd points,* Bull, Calcutta Math. Soc., **60**, pp. 71-76 (1968).

[10] —, *Some results on fixed points, II,* Amer. Math. Monthly, **76**, pp. 405-408 (1969).

[11] FURI M. e VIGNOLI A., *A fixed point theorem in complete metric spaces,* Boll. Un. Mat. It., Serie IV, n. 4-5, pp. 505-509 (1969).

[12] —, —, *Fixed points for densifying mappings,* Rend. Acc. Naz. Lincei, **47**, n. 6, pp. 465-467 (1969).

[13] DIAZ J. B. e METCALF F. T., *On the set of subsequential limit points of successive approximations,* Trans. Amer. Math. Soc., **135**, pp. 459-485 (1969).

[14] BOYD D. W. e WONG J. S. W., *On nonlinear contractions,* Proc. Amer. Math. Soc., **20**, n. 2, pp. 458-464 (1969).

[15] NUSSBAUM R. D., *The fixed point index for local condensing maps,* Ann. Mat. Pura e Appl., pp. 217-258 (1971).

[16] REICH S., *Some remarks concerning contraction mappings,* Can. Math. Bull., **14**, pp. 121-124 (1971).

[17] —, *Kannan's fixed point theorem,* Boll. Un. Mat. It., Serie IV, 4, pp. 1-11 (1971).

[18] ISRATESCU V. e ISRATESCU A., *On the theory of fixed for some classes of mappings,* V, Rend. Acc. Naz. Lincei (1972).

[19] AMATO P., MININNI M. e PASCALI E., *Un teorema di punti uniti per trasformazioni in spazi metrici completi,* Nota interna, Istituto di Matematica, Univ. di Lecce (1974).

Spazi plurimetrici *

Nota di SARA DRAGOTTI, CALOGERO PALERMO e LUCIO PARLATO
presentata dal socio corrispondente VITTORIO DALLA VOLTA

(Adunanza dell'1 marzo 1975)

RIASSUNTO. — A partire da proprietà elementari di una sfera dello spazio ordinario, si giunge alla definizione su un insieme qualunque, di una struttura di « Spazio plurimetrico » che generalizza l'ordinaria nozione di « Spazio metrico ».

SUMMARY. — Starting from elementary properties of a sphere of the ordinary E^3, the Authors define, on any set, a structure of « Plurimetric space », generalizing the ordinary idea of « Metric space ».

INTRODUZIONE E SINTESI.

Lo spunto per questo lavoro è nato da alcune considerazioni su di una superficie sferica di E^3, considerata come struttura di piano inversivo.

Sia S una superficie sferica di E^3. Sia P l'insieme dei piani di E^3.

Indichiamo poi con G l'insieme delle sezioni di S con i piani di P che siano secanti S.

La terna (S. G. i), dove i è l'ordinaria relazione d'incidenza, gode delle proprietà:

a) $\forall (A, B, C) \in S^3$, distinti, $\exists_1 g \in G / (A, B, C) \in g^3$

b) $\forall g \in G, \ \forall A \in g, \ \forall B \in S - g, \exists_1 g' \in G / g \cap g' = \{A\}, B \in g'$

c) Ogni g è non vuoto. Esistono almeno quattro punti non appartenenti ad uno stesso g.

La terna (S, G, i) è pertanto un « piano inversivo ».

* Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca del C.N.R.

L'interpretazione di una superficie sferica S di E^3 come piano inversivo, considera tutte le circonferenze dell'insieme G come elementi omogenei: come del resto è nella loro natura analoga alle rette di un piano grafico, in particolare euclideo.

A partire da quest'ultima osservazione, in analogia all'associazione all'ordinario piano euclideo di una metrica, l'ordinaria distanza per segmenti di retta, si definisce una « plurimetrica » associata ad una superficie sferica di E^3 mediante la distanza di due punti « lungo gli archi minimi di circonferenza da essi determinati ».

Come nel caso della metrica anche il concetto di plurimetrica può essere definito indipendentemente dalla struttura (di piano inversivo) di S, e può essere associata, assiomaticamente, ad un qualsiasi insieme non vuoto.

In questo lavoro ci si occupa specificamente di tale definizione e delle proprietà di quelli che vengono detti « spazi plurimetrici ».

* * *

Introdotta la definizione di « plurimetrica », si dimostra:

« Una plurimetrica Δ definita sull'insieme non vuoto S dota S, in modo naturale, di una struttura di spazio topologico (S, τ_Δ) (par. 3 - teorema 3.1).

Successivamente si danno le definizioni di « plurimetrica limitata », « non limitata », « totalmente illimitata » (par. 2). Si dimostra che:

« Se la plurimetrica Δ su S ($\neq \emptyset$) non è limitata, allora lo spazio topologico (S, τ_Δ) è sconnesso » (par. 4 - teor. 4.2).

Si dimostra, infine, che:

« Ogni spazio plurimetrico è metrizzabile ».

§ 1. - Distanza per archi di punti di una superficie sferica.

Sia S una superficie sferica di E^3. Per ogni coppia A, B di punti di S, consideriamo le circonferenze g, intersezioni di S con i piani di E^3 per A e B. Si denoti con $(\widehat{AB})$ l'arco di g di estremi A e B, sotteso da un angolo al centro di g non superiore a π. Si indichi con $d_{\widehat{AB}}$ la relativa lunghezza.

Possiamo allora definire la seguente applicazione di S^2 in $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali:

$$\Delta : (A, B) \in S^2 \to \Delta(A, B) = \{r \in \mathbb{R} \,/\, \exists d_{\widehat{AB}} = r\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$$

L'applicazione Δ così definita, gode delle ovvie proprietà:

$A_1)$ $\quad p \in \Delta(A, B) \Longrightarrow p \geq 0 \qquad \forall (A, B) \in S^2$

$A_2)$ $\quad 0 \in \Delta(A, B) \Longrightarrow \Delta(A, B) = \{0\} \qquad \forall (A, B) \in S^2$

$A_3)$ $\quad A = B \Longleftrightarrow \Delta(A, B) = \{0\} \qquad \forall (A, B) \in S^2$

B) $\quad \Delta(A, B) = \Delta(B, A) \qquad \forall (A, B) \in S^2$

Ulteriori proprietà di Δ si possono dedurre dal seguente:

TEOREMA 1.1. « *Siano* A *e* B *due punti distinti di una superficie sferica* S. *Tra gli archi di circonferenza di estremi* A *e* B, *su* S, *sottesi da un angolo al centro non superiore a* π, *esistono un arco di lunghezza minima ed uno di lunghezza massima. Essi sono realizzati, rispettivamente, sulle circonferenze intersezioni di* S *con un piano diametrale per* A *e* B, *e con il piano per* A *e per* B *perpendicolare alla retta per il centro* 0 *della sfera e per il punto medio* M *di* AB ».

Dim. Sia R il raggio della sfera, r il raggio di una circonferenza g per A e B, su S; sia 2a la lunghezza della corda AB e sia 2α l'angolo al centro 0' di g, non superiore a π, che sottende l'arco minimo di g di estremi A e B. Si ha:

(i) $\qquad d_{\overset{\frown}{AB}} = 2\alpha\, r \qquad (a \leq r \leq R\,; \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$

Dalla considerazione del triangolo 0' MB si ha:

(ii) $\qquad \alpha = \operatorname{arcsen}(a/r)$

sostituendo in (i) si ha:

(iii) $\qquad d_{\overset{\frown}{AB}} = 2r \operatorname{arcsen}(a/r) \qquad r \in [a, R] = I$

Al variare di g, $d_{\overset{\frown}{AB}}$ risulta funzione continua e strettamente decrescente di r (in I). Pertanto $d_{\overset{\frown}{AB}}$ assume massimo e minimo assoluti rispettivamente per $r = a$ e per $r = R$.

Da ciò risulta la seguente proprietà per la Δ:

C) $\Delta(A, B)$ è dotato, come sottoinsieme di R, di minimo e di massimo, qualsiasi siano A e B.

Si possono pertanto definire le seguenti applicazioni di S^2 in R, associate a Δ:

(2) $$d_{\min} : (A, B) \in S^2 \to \min \Delta (A, B) \in R$$

(3) $$d_{\max} : (A, B) \in S^2 \to \max \Delta (A, B) \in R$$

e vale il seguente:

TEOREMA 1.2. « *Le applicazioni di* S^2 *in* R, $d_{\min}$ *e* $d_{\max}$ *sono metriche per l'insieme* S ».

Dim. Gli assiomi di coincidenza e di simmetria si dimostrano applicando le proprietà: A_1, A_2 e B di Δ. L'assioma triangolare è verificato per $d_{\min}$ poiché $\min \Delta (A, B)$ è la lunghezza di arco minimo di geodetica di estremi A e B; per $d_{\max}$ è vera per essere (teor. 1.1): $\max \Delta (A, B) = \pi AB/2$.

Si giunge così a dimostrare due fondamentali proprietà di Δ. Precisamente, poiché $d_{\min}$ verifica la proprietà triangolare, se ne deduce per Δ la seguente proprietà:

C_1) $\forall a \in \Delta (B, C)$, $\forall b \in \Delta (A, C) / \exists c \in \Delta (A, B) / c \leq a + b$, $\forall (A, B, C) \in S^3$.

Così, poiché anche $d_{\max}$ verifica la proprietà triangolare, si ricava per Δ l'ulteriore proprietà:

C_2) $\forall c \in \Delta (A, B)$, $\exists a \in \Delta (B, C)$ e $\exists b \in \Delta (A, C) / c \leq a + b$, $\forall (A, B, C) \in S^3$.

In conclusione le proprietà $(A_1, A_2, A_3, B, C_1, C_2)$ riassumono le proprietà essenziali di Δ e si presentano come la naturale generalizzazione delle proprietà delle metriche. Così, allora, come la distanza ordinaria sul piano euclideo viene assiomatizzata nel concetto di metrica, dalla applicazione Δ considerata su S si passa facilmente, per assiomatizzazione, alla definizione di plurimetrica su di un insieme non vuoto S.

§ 2. - PLURIMETRICA SU UN INSIEME.

DEF. 1. Dato un insieme non vuoto S e detto $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali diremo « plurimetrica » su S ogni applicazione Δ di $S \times S$ in $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$

$$\Delta : (A, B) \in S^2 \to \Delta (A, B) \in \mathfrak{F} (\mathbb{R})$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

$1_A)$ $r \in \Delta(A, B) \Longrightarrow r \geq 0 \qquad \forall (A, B) \in S^2$

$\left(1_B) \quad 0 \in \Delta(A, B) \Longrightarrow \Delta(A, B) = \{0\} \right)$

$1_C)$ $A = B \Longleftrightarrow 0 \in \Delta(A, B)$

2) $\Delta(A, B) = \Delta(B, A)$

$\left(3_A) \quad \forall a \in \Delta(B, C), \ \forall b \in \Delta(A, C) \ \exists c \in \Delta(A, B) / c \leq a + b \right.$
$\left. \forall (A, B, C) \in S^3 \right)$

$3_B)$ $\forall c \in \Delta(A, B) \ \exists a \in \Delta(B, C), \ \exists b \in \Delta(A, C) : c \leq a + b$
$\forall (A, B, C) \in S^3$

Notiamo esplicitamente che, per una qualsiasi coppia (A, B), l'insieme $\Delta(A, B)$ è inferiormente limitato, ma non è detto che lo sia superiormente; ciò giustifica le seguenti definizioni:

DEF. 2. Una plurimetrica Δ si dirà limitata se per qualunque coppia (A, B) di S^2 l'insieme $\Delta(A, B)$ risulta superiormente limitato; altrimenti si parlerà di plurimetrica non limitata.

DEF. 3. Una plurimetrica Δ si dirà « totalmente illimitata » se per una qualunque coppia (A, B) di S^2 l'insieme $\Delta(A, B)$ risulta non limitato superiormente.

Dimostriamo, ora, il seguente teorema:

TEOREMA 2.1. *Sia* Δ *una plurimetrica limitata su un insieme* S*; l'applicazione* D *di* $S \times S$ *in* R, *definita ponendo*:

$$D(A, B) = \sup \Delta(A, B)$$

risulta una metrica in S, *che si dirà « associata » a* Δ.

[1] Gli assiomi 3_A e 1_B sono stati posti tra parentesi in quanto le considerazioni (i teoremi, ecc.) successivamente svolte risultano da essi indipendenti. Per questa questione si veda comunque l'osservazione di pag. 11.

Dim. L'assioma di coincidenza e quello di simmetria derivano facilmente il primo degli assiomi del gruppo 1) ed il secondo dall'assioma 2) di Δ. Per quanto riguarda la proprietà triangolare, osserviamo che, per ogni coppia (A, B) di S^2, comunque scelto un numero reale positivo t, esiste un $c \in \Delta(A, B)$ tale che:

$$\sup \Delta(A, B) < c + t$$

D'altra parte, per l'assioma 3_B), qualunque sia $C \in S$, esistono un $a \in \Delta(B, C)$ ed un $b \in \Delta(A, C)$ tali che: $c \leq a + b$ e quindi:

$$\sup \Delta(A, B) < c + t \leq a + b + t$$

$$\sup \Delta(A, B) < \sup \Delta(B, C) + \sup \Delta(A, C) + t$$

e, per l'arbitrarietà di t:

$$\sup \Delta(A, B) \leq \sup \Delta(B, C) + \sup \Delta(A, C)$$

ossia:

$$D(A, B) \leq D(B, C) + D(A, C)$$

Esempio I.

Sia S una superficie sferica di $\mathbb{R}^3$; l'applicazione Δ definita al paragrafo precedente è una plurimetrica limitata su S.

Esempio II.

Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, e sia V l'applicazione di $\mathbb{R}$ in $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ definita ponendo:

$$V(a) = \left\{ \frac{a}{\alpha} \right\} \quad \alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

dove $\mathbb{Z}$ è l'insieme degli interi relativi.

L'applicazione V gode delle seguenti proprietà:

1) $V(a) = V(-a)$

2) $0 \in V(a) \iff a = 0$

3) $V(a) \cap V(b) \leq V(a + b)$

Indicato ora con $|V(a)|$ l'insieme dei valori assoluti degli elementi di $V(a)$, l'applicazione Δ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ definita ponendo:

$$\Delta(a, b) = |V(a - b)|$$

è una plurimetrica limitata in $\mathbb{R}$, la cui metrica associata è la metrica euclidea.

§ 3. - Spazi plurimetrici e topologia indotta da una plurimetrica.

Def. 3. Dicesi *spazio plurimetrico* la coppia (S, Δ) con S insieme non vuoto e Δ plurimetrica su S.

Detto ora P_0 un punto di S ed r un numero reale positivo, si dà la seguente:

Def. 4. Dicesi *intorno sferico di centro* P_0 *e raggio* r l'insieme:

$$\mathfrak{I}(P_0, r) = \{P \in S \,/\, \sup \Delta(P_0, P) < r\}$$

La famiglia $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{I}(P, r)\}_{\substack{P \in S \\ r \in \mathbb{R}}}$ è chiaramente un ricoprimento per S. Inoltre, presi due intorni $\mathfrak{I}_1(A, r)$, $\mathfrak{I}_2(B, s)$ di $\mathfrak{F}$ ad intersezione non vuota, per ogni punto $X \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$ esiste un elemento $\mathfrak{I}_3(X, t)$ di $\mathfrak{F}$ contenuto in $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$. Basta infatti prendere $t \leq \min\{r - \sup \Delta(A, X), s - \sup \Delta(B, X)$. La famiglia $\mathfrak{F}$ si può dunque assumere come base per una topologia τ_Δ; da qui il:

Teorema 3.1. *Uno spazio plurimetrico* (S, Δ) *si può dotare in modo naturale di una topologia* τ_Δ *che si dirà «indotta dalla plurimetrica* Δ*».*

Dall'osservazione che nel caso che Δ sia totalmente illimitata, un intorno sferico di un punto X si riduce sempre al solo punto X, si deduce il seguente:

Teorema 3.2. *Se* Δ *è una plurimetrica totalmente illimitata su un insieme* S, *la topologia* τ_Δ *indotta da* Δ *è quella discreta.*

§ 4. - Plurimetrica limitata e non limitata.

Alcune proprietà topologiche di (S, τ_Δ) dipendono in modo essenziale dall'esistenza o meno di coppie di punti a pluridistanza illimitata. In proposito vale quanto segue:

TEOREMA 4.1. *Se esistono due punti* A *e* B *di* S *a pluridistanza illimitata* ($\sup \Delta(A, B) = \infty$), *allora ogni punto* X *di* S *non può contemporaneamente avere pluridistanza limitata da* A *e da* B.

Dim. Dati A e B tali che $\sup \Delta(A, B) = \infty$, supponiamo esista un X di S tale che:

$$\sup \Delta(A, X) = h < \infty \qquad \text{e} \qquad \sup \Delta(B, X) = k < \infty$$

allora si ha che:

$$\sup \Delta(A, B) = \infty \Longrightarrow \forall r \in \mathbb{R}\ ,\ \exists\, c \in \Delta(A, B)\ /\ c > r$$

preso in particolare $c' > h + k$, si ha:

$$\nexists \quad a \in \Delta(A, X) \quad \text{e} \quad \nexists \quad b \in \Delta(B, X)\ /\ c' \leq a + b$$

e ciò contraddice all'assioma 3_B).

COROLLARIO. Se esiste un punto di S avente pluridistanza limitata da ogni altro punto di S, la plurimetrica Δ è limitata in S.

Sia ora (S, Δ) uno spazio plurimetrico non limitato. Fissato A in S, consideriamo l'insieme:

$$\Delta_\infty(A) = \{X \in S\ /\ \sup \Delta(A, X) = \infty\}$$

e l'insieme:

$$\Delta_l(A) = \{X \in S\ /\ \sup \Delta(A, X) < \infty\}$$

$\Delta_\infty(A)$ è non vuota, altrimenti, per il precedente corollario, Δ sarebbe una plurimetrica limitata. $\Delta_l(A)$ è non vuoto perché contiene A.

Inoltre tali insiemi sono ovviamente disgiunti e costituiscono una partizione per l'insieme S. Dimostreremo ora che essi sono aperti nella topologia τ_Δ.

$\Delta_l(A)$ è aperto; infatti preso un $X \in \Delta_l(A)$, se ogni intorno sferico di X contenesse un punto $Z \notin \Delta_l(A)$, Z apparterrebbe a $\Delta_\infty(A)$; allora X avrebbe pluridistanza limitata dai due punti Z ed A aventi pluridistanza illimitata, contro quanto afferma il teorema (4.1).

Osservazione I.

Ogni intorno sferico di un punto X di $\Delta_l(A)$ è tutto contenuto in $\Delta_l(A)$.

$\Delta_\infty(A)$ è aperto; infatti preso un $X \in \Delta_\infty(A)$, se ogni intorno sferico di X contenesse un punto $Z \notin \Delta_\infty(A)$, Z apparterrbbe a $\Delta_l(A)$ e quindi avrebbe pluridistanza limitata dai due punti X ed A aventi pluridistanza illimitata, contro quanto afferma il teorema (4.1).

Osservazione II.

Ogni intorno sferico di un punto $X \in \Delta_\infty(A)$ è tutto contenuto in $\Delta_\infty(A)$.

Quanto sopra dimostra il:

TEOREMA 4.2. *Sia* Δ *una plurimetrica non limitata su un insieme* S: *lo spazio topologico* (S, τ_Δ) *che ne deriva non è connesso. Se* Δ *è totalmente illimitata,* (S, τ_Δ) *è totalmente sconnesso.*

TEOREMA 4.3. *Dato uno spazio plurimetrico non limitato* (S, Δ), *la partizione* $\{\Delta_l(A), \Delta_\infty(A)\}$ *di* S *coincide con la partizione* $\{\Delta_l(B), \Delta_\infty(B)\}$ *qualunque sia* $B \in \Delta_l(A)$.

Dim. Sia B un punto di $\Delta_l(A)$, per l'osservazione I si ha: $\Delta_l(B) \subseteq \Delta_l(A)$. Analogamente si trova $\Delta_l(A) \subseteq \Delta_l(B)$, da cui $\Delta_l(A) = \Delta_l(\widehat{B})$ e di conseguenza $\Delta_\infty(A) = \Delta_\infty(B)$.

Ciascuno degli insiemi $\Delta_l(A)$ prende il nome di *componente limitata.*

In definitiva possiamo dire che, tramite una partizione del tipo $\{\Delta_l(A), \Delta_\infty(A)\}$ l'insieme S si divide in due sottinsiemi godenti della proprietà, indipendente dal punto A, che i punti di $\Delta_l(A)$ sono tutti a pluridistanza limitata tra di loro e che ciascuno di essi ha pluridistanza illimitata da ognuno dei punti di $\Delta_\infty(A)$. I punti di $\Delta_\infty(A)$ tra di loro possono avere tanto pluridistanza limitata che illimitata.

La famiglia $\{\Delta_l(A)\}_{A \in S}$ costituisce una partizione per aperti di S.

§ 5. - METRIZZABILITÀ DI UNO SPAZIO PLURIMETRICO.

Sia (S, Δ) uno spazio plurimetrico.

Abbiamo già visto che se Δ è una plurimetrica limitata, lo spazio topologico (S, τ_Δ) è metrizzabile.

Si dimostrerà qui che ciò accade anche se Δ non è limitata.

Per ciascuna componente limitata $\Delta_l(A)$ si può definire un'applicazione

$$d_A : \Delta_l(A) \times \Delta_l(A) \to \mathbb{R}$$

ponendo:

$$\forall P, Q \in \Delta_l(A)^2 : d_A(P, Q) = \sup \Delta(P, Q)$$

in quanto, per le conclusioni poste alla fine del § 4, $d_A(P, Q)$ è un valore finito per ogni coppia di elementi di $\Delta_l(A)$.

TEOREMA 5.1. *L'applicazione* d_A *sopra definita è una metrica per* $\Delta_l(A)$ *che induce su* $\Delta_l(A)$ *la topologia indotta dallo spazio* (S, τ_Δ).

La dimostrazione che d_A è una metrica per $\Delta_l(A)$ è del tutto analoga a quella del teorema 2.1. Per il modo stesso in cui sono definiti gli intorni sferici secondo la plurimetrica Δ, risulta poi chiara la coincidenza delle topologie di cui all'enunciato del teorema.

Osserviamo ora che la metrica d_A può anche non essere limitata. In ogni caso è noto che essa è equivalente ad una metrica limitata d'_A (ad esempio quella ottenuta ponendo per ogni coppia di punti $P, Q : d'_A(P, Q) = 1/1 + d_A(P, Q)$). Il diametro di ogni $\Delta_l(A)$ secondo la metrica d'_A è dunque un valore finito, che indicheremo con δ'_A.

Detto ciò, definiamo la seguente applicazione di $S \times S$ in $\mathbb{R}$:

$$d : (P, Q) \in S \times S \to \begin{cases} d'_A(P, Q) & \text{se P e Q appartengono ad una stessa componente limitata } \Delta_l(A) \\ \delta'_P + \delta'_Q + 1 & \text{se } \Delta_l(P) \neq \Delta_l(Q) \end{cases}$$

TEOREMA 5.2. *L'applicazione d di* $S \times S$ *in* $\mathbb{R}$ *sopra definita è una metrica per* S *che induce su* S *la topologia* τ_Δ.

Dim. È evidente, dagli assiomi di plurimetrica, che d soddisfa gli assiomi di coincidenza e di simmetria. Per quanto riguarda la proprietà triangolare, osserviamo che, se tre punti P, Q, T appartengono ad una stessa componente limitata $\Delta_l(A)$, la distanza secondo d di due di essi è uguale alla distanza tra gli stessi secondo la d'_A. È valida dunque in questo caso la proprietà triangolare. Se P e Q appartengono ad una stessa componente limitata $\Delta_l(A)$ che non coincide con quella di T, si ha

$$d(P, Q) = d'_A(P, Q) \leq \delta'_A < \delta'_A + \delta'_T + 1 = d(P,T) \leq d(P,T) + d(T,Q)$$

$$d(P, T) = d(Q, T) = \delta'_A + \delta'_T + 1 \text{ da cui:}$$

$$d(P, T) \leq d(Q, T) + d(P, Q) \qquad \text{e} \qquad d(Q, T) \leq d(P, T) + (P, Q)$$

Infine se P, Q, T appartengono a tre diverse componenti limitate, si ha:

$$d(P,Q) = \delta'_P + \delta'_Q + 1;\ d(P,T) = \delta'_P + \delta'_T + 1;\ d(T,Q) = \delta'_T + \delta'_Q + 1$$

da cui ovviamente le tre disuguaglianze triangolari.

Dimostriamo ora che il sistema di intorni definito dalla metrica d è equivalente a quello definito dalla plurimetrica Δ. Indichiamo ancora con la lettera $\mathfrak{I}$ gli intorni definiti dalla plurimetrica e con la lettera Σ quelli definiti dalla metrica d. Si ha qualunque sia $P \in S$ ed r reale positivo: $\mathfrak{F}(P,r) \subseteq \Delta_I(P)$. Ma allora, per il teor. 6.1, $\mathfrak{I}(P,r)$ contiene un intorno sferico di P secondo la metrica d_P, e quindi un intorno sferico di P secondo la metrica d'_P equivalente a d_P. Quest'ultimo però è proprio un intorno di P secondo la metrica d.

Viceversa ogni intorno di P secondo la metrica d : $\Sigma(P,r)$ contiene un intorno di P secondo d'_P e quindi un intorno secondo d_P. Quest'ultimo è però un intorno di P secondo la plurimetrica Δ.

Ciò completa la dimostrazione del teorema.

OSSERVAZIONE.

In tutti i risultati conseguiti circa la caratterizzazione della struttura di « plurimetrica », studiati dal par. 2 in poi, come si rileva, non viene mai fatto uso degli assiomi 3_A ed 1_B della definizione data a pag. 5 (e riportati perciò tra parentesi): va osservato che essi si presentano come assiomi del tutto naturali quando, ponendosi essenziamente da un punto di vista di « geodetiche », si veda la plurimetrica strettamente come generalizzazione di una operazione di ricerca di « minimo ». Invero gli assiomi detti sono essenziali qualora si vogliano studiare le proprietà dell'applicazione generata da una plurimetrica che ad ogni coppia di punti associa l'estremo inferiore della corrispondente immagine della coppia data in $P(\mathbb{R})$.

Le talpe dell'Italia centro-meridionale

Nota di DOMENICO CAPOLONGO * e ROCCO PANASCÌ **
presentata dal socio ordinario BALDASSARRE DE LERMA

(Adunanza dell' 1 marzo 1975)

RIASSUNTO. — Sono stati studiati 210 esemplari di *Talpa romana*, 40 di *Talpa europaea* e 14 di *Talpa coeca*, tutti provenienti da zone dell'Italia Centro-meridionale. Si sono in particolare esaminate le misure craniche fondamentali, direttamente o mediante l'uso di 6 indici cranici. I risultati principali dell'indagine possono così riassumersi:

— *Talpa romana* è caratterizzata dagli indici cranici I1 ed I6.

— *Talpa coeca* è caratterizzata dall'indice cranico I5.

— Tutt'e tre le specie italiane di *Talpa*, e cioè *romana*, *coeca* ed *europaea*, sono caratterizzate dall'indice cranico I2.

— Tre nuove sottospecie sono descritte per *Talpa romana*:

T. r. aenigmatica: della Sicilia meridionale.
T. r. adamoi: della Calabria centro-meridionale.
T. r. brachycrania: della Lucania.

— Le talpe di Corfù, attribuite provvisoriamente alla razza balcanica *stankovici*, sono molto simili alla nuova razza *adamoi*. Si affacciano dubbi sulla stessa validità di *stankovici* come appartenente alla specie *romana*.

— Con riferimento alle popolazioni di *Talpa romana* viventi in Italia occorre approfondire l'indagine su quelle del Gargano e della zona di confine con l'areale meridionale di *Talpa europaea*. Le popolazioni del Gargano potrebbero anche appartenere ad una nuova razza di *romana*.

— La marcata presenza di oligodontia ai premolari superiori è una caratteristica specifica di *Talpa romana;* la specie si troverebbe attualmente in una fase evolutiva che potrebbe portare alla stabilizzazione genetica del carattere in analogia a quanto già avvenuto nei generi asiatici *Scaptochirus* e *Parascaptor*.

— Le altre anomalie dentali, e cioè la oligodontia ai premolari inferiori, la poliodontia e la bifidia si confermano molto rare anche in *Talpa romana* dopo quanto visto da Stein su *Talpa europaea*. Vengono descritti per prima volta due casi di oligodontia ai premolari inferiori ed un caso di poliodontia ai premolari superiori, in esemplari di *Talpa romana*.

SUMMARY. — *The moles of central and southern Italy*. 210 specimens of *Talpa romana*, 40 of *Talpa europaea* and 14 of *Talpa coeca*, all from central and southern

* Via Roma, 8 - 80030 Roccarainola.
** Istituto e Museo di Zoologia della Università di Napoli, via Mezzocannone 8.

Italy, are examined through main skull measures, directly or by means of 6 cranial indices. Main results of investigation are so recapitulated:

— *Talpa romana* is characterized by cranial indices I1 and I6.
— *Talpa coeca* is characterized by cranial index I5.
— All italian species of *Talpa, i. e. romana, coeca* and *europaea*, are characterized by cranial index I2.

— Three new susbpecies of *Talpa romana* are diagnosed:
T. r. aenigmatica: from southern Sicily;
T. r. adamoi: from central and southern Calabria;
T. r. brachycrania: from Lucania.

— The moles of Corfu, provisorily ascribed to balcan subspecies *stankovici*, are very similar to new subspecies *adamoi*. Moreover, validity of the same *stankovici* race appears doubtful as pertaining to *romana* species.
— In reference to populations of *T. romana* living in Italy, greater examining is necessary on moles of Gargano and of boundaries zone with *T. europaea*. The Gargano's populations may also be a new race of *T. romana*.
— Remarkable oligodonty on superior premolars is a specific peculiarity of *Talpa romana;* this species could be at present in an evolutive stage and consequently acquire the genetic stabilization of this character as already occurred in asiatic genera *Scaptochirus* and *Parascaptor*.
— The other dental anomalies, *i. e.* oligodonty on inferior premolars, polyodonty and bfidia are confirmed very scarce also in *T. Romana* as observed in *T. europaea* by Stein. Two cases of oligodonty on inferior premolars and one case of polyodonty on superior premolars are described first time in *T. romana*'s specimens.

1. - Introduzione.

In un recente lavoro su *Talpa romana* (Thomas) (Capolongo, 1972) veniva così riassunta la geonemia sottospecifica di questa entità:

Talpa r. maior (Altobello): Abruzzo; Molise; probabilmente in altre zone montuose degli Appennini Meridionali.

Talpa r. romana (Thomas): restanti parti dell'Italia Centro-meridionale; Sicilia (?).

Talpa r. stankovici (V. & E. Martino): Macedonia; Tessaglia; Corfù.

Il materiale di studio della nota citata proveniva essenzialmente da poche zone, ben delimitate, di tutto l'areale della specie, e cioè:

77 esemplari della prov. di Napoli (quasi tutti di Roccarainola),
2 esemplari della prov. di Benevento (Apice),
26 esemplari della prov. dell'Aquila (Villetta Barrea e Goriano S.),
9 esemplari della prov. di Teramo (Corropoli),

con l'aggiunta di pochi dati prelevati da lavori di altri Autori:

19 esemplari della prov. di Foggia (Gargano): da WITTE (1964);
1 esemplare della prov. di Cosenza (Camigliatello): da LEHMANN (1961).

Nel corso di questi ultimi due anni ci è stato possibile esaminare altro materiale, proveniente da quasi tutte le zone dell'Italia Centro-meridionale, in parte raccolto direttamente, in parte affidatoci gentilmente in studio da alcuni musei italiani. I risultati di questa ulteriore indagine vengono riportati nella presente nota, dalla quale, come si vedrà in seguito, emerge essenzialmente un maggior frazionamento sottospecifico di *Talpa romana* (Thomas) nel suo areale italiano.

Ci è stato possibile, inoltre, esaminare un discreto numero di esemplari di *Talpa europaea* L. e *Talpa coeca* Savi delle zone di confine settentrionale con l'areale di *Talpa romana,* e cioè di Toscana, di Emilia e di Romagna. La nota tiene conto anche di questi dati per una migliore precisazione delle differenze interspecifiche tra le tre specie italiane del genere *Talpa.*

2. - MATERIALE ESAMINATO.

Abbiamo suddiviso le provenienze del materiale per zone geografiche.

Lo studio è stato condotto unicamente sui crani, per cui il numero degli esemplari è relativo a crani interi o in frammenti.

Si è tenuto ovviamente conto in questa indagine anche del materiale utilizzato nella citata nota del 1972, includendolo per conseguenza nella elencazione che segue:

A) *Talpa romana* (Thomas)

A-1) Dintorni di Roma — 6 esemplari —
A-2) Alto Abruzzo — 29 esemplari —
A-3) Teramano — 9 esemplari —
A-4) Terra di Lavoro — 100 esemplari —
A-5) Gargano — 19 esemplari (da WITTE, 1964) —
A-6) Appennino Campano — 8 esemplari —
A-7) Cilento — 1 esemplare —
A-8) Lucania — 17 esemplari —
A-9) Puglia — 5 esemplari —
A-10) Calabria — 15 esemplari (di cui 1 da LEHMANN, 1961) —
A-11) Sicilia — 1 esemplare —

B) *Talpa coeca* Savi

B-1) Preappennino Toscano — 11 esemplari —
B-2) Alto Abruzzo — 1 esemplare —
B-3) M. Pollino — 2 esemplari (da PASA, 1955) —

C) *Talpa europaea* L.

C-1) Emilia-Romagna — 16 esemplari —
C-2) Dintorni di Firenze — 24 esemplari —

I dati individuali del materiale esaminato per prima volta in questa nota sono riportati in Tabella I.

3. - ELABORAZIONE DEI DATI CRANIOMETRICI.

In Tabella II sono riportati, per ciascuna zona di cui a paragrafo 2, valor medio e campo di variabilità delle principali misure craniometriche (CAPOLONGO, 1972). Avendo attribuito per il momento alla razza nominale di *Talpa romana* i 2 esemplari di Sangineto e l'esemplare di Camigliatello, i valori riportati per la popolazione di Calabria sono al netto dei 3 esemplari suddetti non solo nella Tabella II ma anche nelle successive Tabella III, Figura 2 e Figura 3.

In Tabella III, per ciascuna delle stesse zone, sono riportati valori medi e campi di variabilità di sei indici cranici, definiti come segue:

I1 : Indice di larghezza palatale

$$I1 = \frac{\text{Larghezza del palato}}{\text{Lunghezza condilo-basale}} \times 100$$

I2 : Indice di larghezza naso-palatale

$$I2 = \frac{\text{Larghezza nasale}}{\text{Larghezza del palato}} \times 100$$

I3 : Indice di altezza trasversale

$$I3 = \frac{\text{Altezza del cranio}}{\text{Larghezza massima del cranio}} \times 100$$

I4 : Indice di altezza longitudinale

$$I4 = \frac{\text{Altezza del cranio}}{\text{Lunghezza condilo-basale}} \times 100$$

I5 : Indice di acutezza nasale

$$I5 = \frac{(\text{Lunghezza condilo-basale}) \times (\text{Larghezza nasale})}{\text{Larghezza massima del cranio}} \times 100$$

I6 : Indice di lunghezza mandibolare

$$I6 = \frac{\text{Lunghezza della mandibola}}{\text{Lunghezza condilo-basale}} \times 100$$

La Figura 1 sintetizza per le varie popolazioni i valori medi ed i campi di variabilità di questi indici.

Nella Figura 2 è riportata, infine, per ciascuna popolazione, la larghezza del palato AP in funzione della lunghezza condilo-basale CB, mediante le note aree di variabilità.

4. - Esame dei dati.

4.1. - *Indici cranici.*

Dall'esame dei valori degli indici cranici emergono essenzialmente i seguenti punti:

Indici I1 ed I6: Questi due indici separano nettamente *Talpa romana* da *Talpa europaea* e *coeca*. Entrambi si presentano omogenei per le varie popolazioni di *T. romana*.

Indice I5: Questo indice separa *Talpa coeca* da *Talpa romana* ed *europaea*. Una certa disuniformità è presente tra le popolazioni di *Talpa romana;* in particolare nelle popolazioni di Puglia e di Calabria si riscontrano i valori più bassi.

Indice I2: Questo indice separa abbastanza bene tutt'e tre le specie; in particolare *Talpa europaea* presenta i valori più alti e *Talpa coeca* i più bassi. All'interno di *Talpa romana* l'indice è più alto per le popolazioni della razza *T. r. maior*.

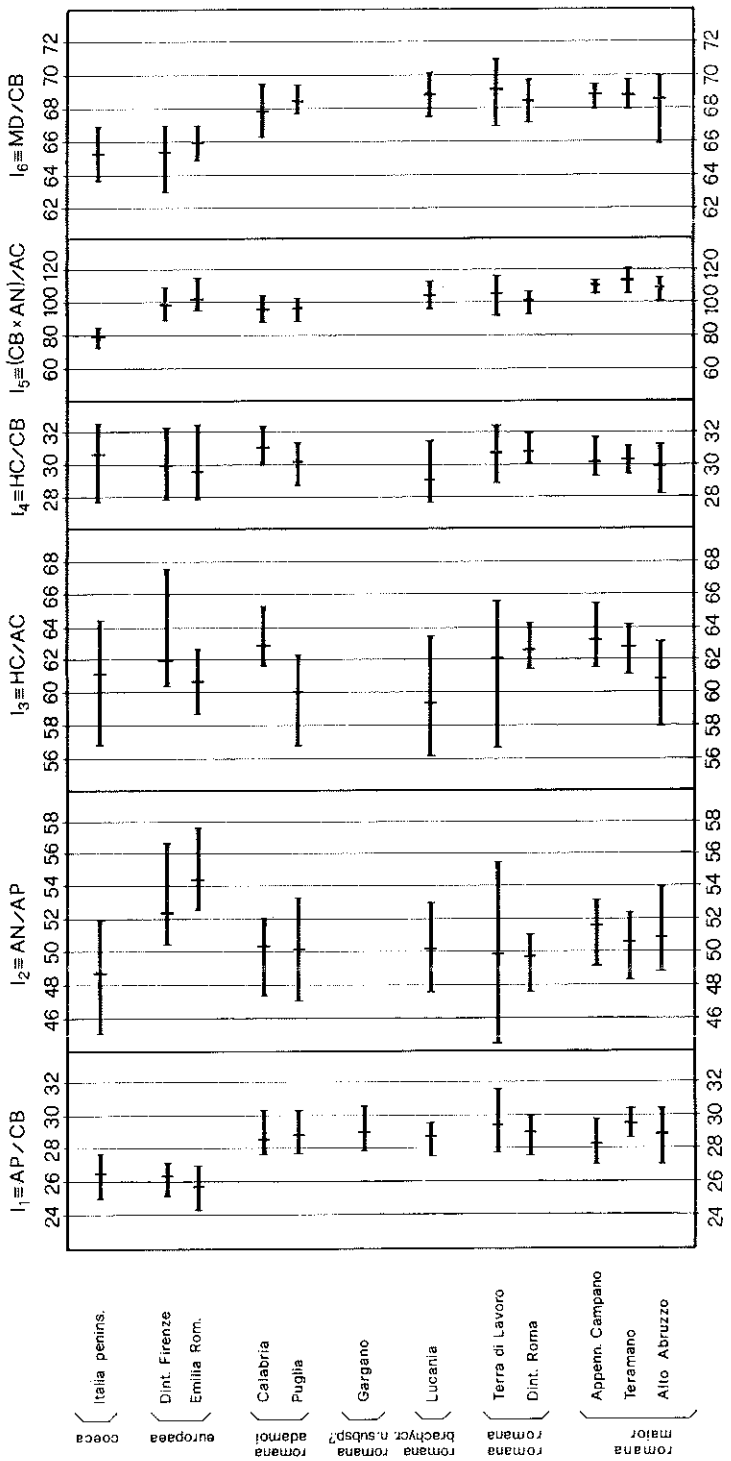


FIG. 1. - Valori medi e campi di variabilità dei sei indici cranici esaminati.

Indice I3: Questo indice è abbastanza variabile. Con riferimento a *Talpa romana* è relativamente basso nelle popolazioni di Lucania e Puglia.

Indice I4: Questo indice è abbastanza uniforme. Con riferimento a *Talpa romana* è relativamente basso nelle popolazioni di Lucania.

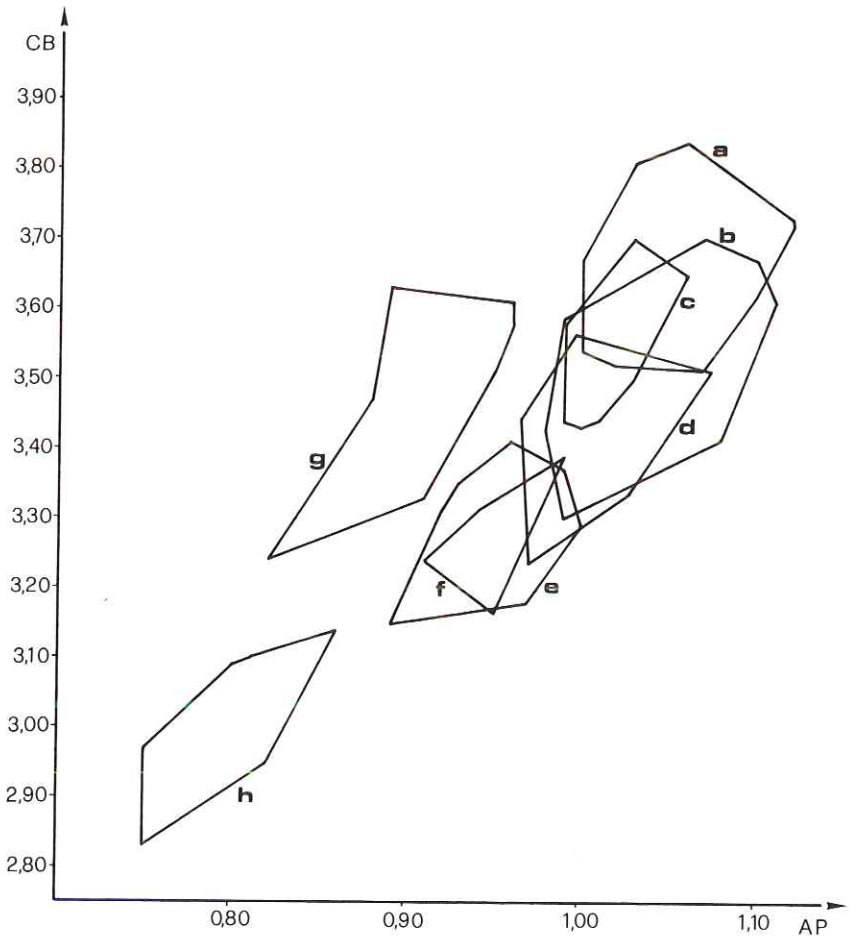


FIG. 2. - Aree CB/AP delle tre specie di *Talpa* viventi nell'Italia centro-meridionale e Corfù.

a: *Talpa romana maior* (Alto Abruzzo, Teramano e Appennino Campano);
b: *Talpa romana romana* (Dintorni di Roma e Terra di Lavoro);
c: *Talpa romana brachycrania* (Lucania);
d: *Talpa romana* (*n. subsp.?*) (Gargano);
e: *Talpa romana adamoi* (Calabria e Puglia);
f: *Talpa romana* (*stankovici?*) (Corfù);
g: *Talpa europaea* (Emilia, Romagna, Dintorni di Firenze);
h: *Talpa coeca* (Arco Appenninico).

4.2. - *Valori medi di CB in Talpa romana.*

Considerando la dimensione cranica fondamentale CB, si hanno i seguenti risultati per le popolazioni italiane di *Talpa romana*:

a) Popolazioni dell'Abruzzo, del Teramano e dell'Appennino Campano:

valori più alti: 3,64 ÷ 3,68 cm

b) Popolazioni dei dintorni di Roma, di Terra di Lavoro e di Lucania:

valori intermedi: 3,47 ÷ 3,55 cm

c) Popolazioni del Gargano, di Puglia e di Calabria:

valori più bassi: 3,30 ÷ 3,41 cm

4.3. - *Osservazioni.*

Dalle considerazioni di cui sopra restano escluse le popolazioni del Cilento, della Calabria Superiore e di Sicilia, mentre per quelle pugliesi in genere e garganiche in particolare, nonché per quelle dei dintorni di Roma, occorreranno ancora indagini suppletive. Restano inoltre da indagare le zone settentrionali dell'areale di *Talpa romana*, e precisamente quelle di confine o di sovrapposizione con *Talpa europaea* e *coeca*.

5. - Risultati tassonomici.

I risultati più interessanti emersi da questa indagine sono quelli relativi alle popolazioni periferiche meridionali. La Calabria centro-meridionale risulta abitata dalla popolazione a minore statura, e questo carattere si riscontra con lievi aumenti nella zona pugliese.

La popolazione di Lucania, dimensionalmente simile a quelle della fascia costiera campana e laziale, presenta a sua volta la caratteristica di avere un basso valore dell'indice cranico di altezza longitudinale I4.

La Sicilia, infine, nell'unico esemplare di cui abbiamo potuto disporre, presenta una serie di caratteristiche, dimensionali e morfo-

logiche, nettamente differenti da quelle delle popolazioni calabresi, con le quali poteva supporsi *a priori* una certa affinità.

La presenza nell'Isola di Corfù ed in alcune zone interne della Penisola Balcanica di popolazioni a piccola crescita, attribuite a *Talpa romana* — razza *stankovici* — sembrano collegarsi tassonomicamente alle popolazioni dell'estremo sud della Penisola, le più piccole fra tutte le popolazioni italiane. L'interpretazione biogeografica già affacciata da WITTE (1964) di una corrispondenza transadriatica per le popolazioni del Gargano è maggiormente valida, a nostro avviso, per quelle della Calabria centro-meridionale e della Puglia. Per le popolazioni del Gargano, che purtroppo abbiamo potuto esaminare solo parzialmente attraverso il lavoro di WITTE, conserviamo l'attribuzione provvisoria alla razza nominale, anche se in forma fortemente dubitativa data, tra l'altro, l'interposizione geografica degli areali di *maior* e *brachycrania*.

Le nuove sottospecie di *Talpa romana* (Thomas) emerse dalla presente indagine vengono di seguito descritte e discusse.

Talpa romana aenigmatica n. subsp.

Holotypus: Cranio con mandibola N. 6125 del Museo Zoologico de « La Specola ». Firenze. ♂. Modica (Sicilia). IV/1879. (Proveniente dal R. Museo Zoologico di Torino).

Descrizione dell'Holotypus: Il carattere principale di questo cranio è nella riduzione pressocché uniforme di ampiezza dello stesso visto dall'alto, andandosi dalla regione mastoidea verso il muso; nelle altre forme peninsulari, invece, è presente una più netta discontinuità all'interno dell'arcata zigomatica, entro il terzo prossimale della stessa. Tale discontinuità è in corrispondenza di una evidente costrizione che interessa superiormente il cranio, per cui il profilo sagittale vi si presenta con una lieve insellatura; nell'esemplare di Sicilia tale insellatura è assente.

Sempre per la cennata discontinuità nel profilo del cranio visto dall'alto, nelle popolazioni peninsulari i lati della regione interorbitale si presentano subparalleli, mentre nell'esemplare siciliano è evidente una convergenza degi stessi verso il muso.

La mandibola destra presenta una piccola ma ben marcata punta all'estremità dell'apofisi angolare, superiormente, rivolta in direzione del condilo. Accenniamo anche a questo particolare dal momento che tale salienza o è assente o non è mai così pronunciata negli esemplari continentali da noi esaminati. La caratteristica non è osservabile sul ramo di sinistra per frattura.

Il cranio, fratturato nella zona latero-posteriore destra, presenta le seguenti dimensioni:

CB = 3,66 ca. - IO = 0,80 - DS = 1,45
MD = 2,47 ca. - LM = 3,72 ca. - AN = 0,54
AP = 1,02 - LP = 1,71

Gli indici cranici misurabili sono:

I1 = 27,8 - I2 = 52,9 - I6 = 67,5

Le dimensioni del cranio sono notevoli, portandosi in pratica nei campi di variabilità di *Talpa r. maior*.

La dentatura è completa. I mesostili sono bifidi in tutt'e sei i molari superiori.

Osservazioni: Sulla presenza o meno di talpe in Sicilia si discute ormai da parecchio (MINÀ PALUMBO, 1868; CAMERANO, 1886, 1903; STEIN, 1959). In effetti gli unici reperti finora accertati sono due esemplari di Modica, raccolti nel 1879 dal prof. E. Martel per conto del Camerano. Di questi due esemplari, custoditi nel Museo di Zoologia dell'Università di Torino, uno fu successivamente mandato in dono al Museo di Firenze, ed è quello da noi esaminato. Ricerche successive eseguite da vari studiosi sono rimaste infruttuose per cui attualmente la specie in Sicilia potrebbe risultare estinta.

Le particolari caratteristiche dell'unico cranio esaminato confermano implicitamente la buona fede o, se vogliamo, l'autorità del Camerano sulla provenienza siciliana del materiale inviatogli dal prof. Martel. In ogni caso la descrizione della razza, prescindendo dalle cennate perplessità, non può che essere provvisoria e più che altro è fatta per attirare ancora una volta l'attenzione degli studiosi sulle talpe di Sicilia.

Talpa romana adamoi n. subsp.

Holotypus: N. 245 coll. D. Capolongo. ♂. Favazzina (Reggio Calabria). 1.X.1972.

Paratypi: 3 ♀♀ N. 247, 259, 260 da Favazzina (Coll. D. Cap.); 4 ♀♀ N. 237, 253, 254, 257 e 2 ♂♂ (?) N. 255, 256 da Piane Crati (Cosenza) (Coll. D. Capolongo); 1 ♂ N. 6123 ed 1 ♀ N. 6124 da Bagaladi (Reggio C.) (Coll. Mus. Zool. de « La Specola ». Firenze).

In Tabella I sono riportati tutti i dati metrici dell'olotipo e dei paratipi.

Conservazione di materiale tipico: L'olotipo (N. 245 coll. D. Capolongo) e la seguente serie di paratipi: N. 237, 247, 253 (coll. D. Capolongo), sono stati depositati presso la collezione del Museo Zoologico de « La Specola », Firenze.

Descrizione dell'Holotypus: Struttura cranica normale. Dimensioni minime. Dentatura ben proporzionata, con lievissime tracce di usura. PM^1 di sinistra spezzato. PM^2 di destra assente o spezzato alla base. Bifidia dei mesostili di M^1 inapprezzabile in entrambi i lati.

Variazioni della razza: La serie dei paratipi si presenta molto uniforme con l'olotipo; in particolare i crani sono molto piccoli e poco robusti. La bifidia ai mesostili di M^1 è assente o appena apprezzabile. In due casi (N. 247 e N. 6124) i PM^2, da entrambi i lati, sono piccoli, in confronto ai PM^1 e PM^3, e disposti irregolarmente. L'es. N. 6123 presenta poliodontia ai PM superiori (ved. Fig. 5) mentre il N. 6124 presenta oligodontia ai PM inferiori. La oligodontia ai PM superiori è presente, ma in percentuale non eccessiva: 33 % ca.

Areale: La *Talpa r. adamoi* nella sua forma tipica è sicuramente presente dalla punta estrema della Calabria fino alla provincia di Cosenza. Popolazioni di dimensioni maggiori, e ascrivibili per ora a *Talpa r. romana*, si riscontrano già nella Sila e nella zona di Sangineto.

Attribuiamo per ora a questa razza anche le popolazioni della Puglia, benché queste già presentino delle inevitabili caratteristiche differenziali, come, ad es., valori dell'indice cranico I3 molto simili a quelli delle popolazioni di Lucania.

La popolazione di *Talpa romana* dell'isola di Corfù, attribuita alla razza *stankovici*, potrebbe ad un migliore esame ricadere nella nuova razza *adamoi*. Per quanto, infatti, sia possibile ricavare dal lavoro di NIETHAMMER (1962), le talpe di Corfù ricadono nel campo di variabilità di *T. r. adamoi* (ved. Fig. 2). Il discorso, invece, va spostato sulla forma tipica di *T. r. stankovici* (V. & E. MARTINO, 1931) in quanto, dalle principali misure dell'olotipo, che sono:

$$CB = 3{,}35 \;-\; AC = 1{,}62 \;-\; AN = 0{,}42 \;-\; AP = 0{,}97 \;-\; MD = 2{,}26$$

si ricavano i seguenti indici cranici:

$$I1 = 29{,}0 \;-\; I2 = 43{,}3 \;-\; I5 = 87{,}0 \;-\; I6 = 67{,}4$$

In base ai valori di I1 ed I6 l'olotipo di *T. r. stankovici* delle Montagne di Magavero nella Serbia Meridionale rientra nei campi di

variabilità tipica di *Talpa romana*; il valore di I5 rientra nei campi di variabilità di *T. coeca* e di *T. r. adamoi*; infine, il valore di I2 è nettamente al di sotto dei campi di variabilità di tutt'e tre le specie di *Talpa*, avendo noi riscontrato i seguenti valori minimi per le tre specie:

Talpa romana	44,4
Talpa coeca	45,1
Talpa europaea	50,5

Pertanto, solo l'esame degli indici cranici delle talpe di Corfù potranno confermare l'attribuzione delle talpe di quest'isola a *T. r. stankovici* ovvero alla n. subsp. *T. r. adamoi*. Resta, inoltre, aperto il discorso sulle restanti popolazioni di *T. r. stankovici* della Penisola Balcanica, che sarebbero in particolare caratterizzate da valori molto bassi dell'indice cranico di larghezza naso-palatale I2.

Derivatio nominis: Abbiamo dedicato questa nuova razza al Dr. Ing. Enrico Adamo di Palermo che ci ha cortesemente procurato parte del materiale di Calabria.

Talpa romana brachycrania n. subsp.

Holotypus: N. 261 Coll. D. Cap. ♀. Gallicchio (Potenza). 11.X.1973. Leg. R. Panascì.

Paratypi: Gli altri 16 esemplari i cui dati metrici sono riportati in Tabella I, insieme a quelli dell'olotipo. Leg. V. Vomero (N. 289) e restanti R. Panascì.

Conservazione di materiale tipico: L'olotipo (N. 261 coll. D. Capolongo) e la seguente serie di paratipi: N. 262, 263, 267, 269, 272, 273 (coll. D. Capolongo), sono stati depositati presso la collezione del Museo Zoologico de « La Specola », Firenze.

Descrizione dell'Holotypus: Cassa cranica molto compressa: guardando il cranio di profilo assoluta mancanza di prominenza sulla volta, in corrispondenza della zona mastoidea. La zona frontale nettamente gibbosa dalla sutura coronale all'altezza dei PM^2. Per il resto struttura cranica normale. Dimensioni medie. Dentatura ben proporzionata, con lievi tracce di usura. PM^3 a sinistra mancante.

Variazioni della razza: La compressione cranica è presente in quasi tutti gli esemplari della serie paratipica. Bifidia ai mesostili dei molari superiori ben evidente anche in M^1, negli esemplari a den-

tatura non consumata. Oligodontia ai PM superiori non eccessiva (24 % ca.).

Nell'insieme questa razza di *T. romana* presenta caratteri intermedi che la rendono molto simile alla forma nominale, dalla quale si differenzia quasi unicamente per la caratteristica compressione del neurocranio.

Areale: La *T. r. brachycrania* è per ora nota della zona lucana comprendente i comuni di Corleto Perticara, Gallicchio, Guardia Perticara, Sarconi e Tramutola.

6. - Sintesi geonemica.

Sulla cartina di Figura 3 sono indicate le varie provenienze del materiale di *Talpa* esaminato in questa nota. La distribuzione che ne risulta per le tre specie italiane di *Talpa* è abbastanza coincidente con quella data da Niethammer nel 1962. Anche questo A. lascia « scoperta » la fascia trasversale comprendente le Marche, l'Umbria, la bassa Toscana e l'alto Lazio. Noi comunque riteniamo che proprio in questa zona occorra intensificare l'indagine futura, potendosi escludere quasi certamente che questa fascia sia priva di talpe.

È interessante notare la distribuzione di *Talpa coeca* che dalla Liguria passa in Toscana, ove occupa la zona delle Alpi Apuane ed il versante tirrenico dell'Appennino Tosco-emiliano; più a sud ricompare nell'Appennino Abruzzese, poi in quello Campano, ed infine nella sua stazione più meridionale finora nota, e cioè sul M. Pollino.

Talpa europaea, almeno nella fascia tosco-emiliana, sembra limitata alla zona centrale appenninica ed al versante adriatico.

Quanto a *Talpa romana* possiamo così definire la distribuzione delle varie razze:

a) *Talpa romana romana*: fascia costiera ed antiappenninica del Lazio centro-meridionale e della Campania; probabilmente attraverso il Cilento fino alla Calabria settentrionale.

b) *Talpa romana maior*: Monti Sibillini; Appennino Abruzzese; Appennino Sannita; fascia costiera abruzzese-molisana.

c) *Talpa romana adamoi*: bassa e media Calabria; Puglia, Gargano escluso. Molto simile alla popolazione di Corfù, attribuita provvisoriamente alla razza balcanica *stankovici*.

d) *Talpa romana* n. subsp.?: Gargano.

e) *Talpa romana brachycrania*: Appennino Lucano.

f) *Talpa romana aenigmatica*: Sicilia: zona di Modica.

7. - Anomalie dentali.

La Tabella IV sintetizza l'incidenza percentuale dell'oligodontia dei premolari superiori nelle tre specie italiane di *Talpa*. Rarissima in *Talpa europaea* e *coeca*, questa anomalia è invece estremamente



Fig. 3. - Geonemia del genere *Talpa* nell'Italia centro-meridionale.

frequente in *Talpa romana*, sia pure con percentuali diverse nelle varie popolazioni. Questa caratteristica assume pertanto un ben preciso valore genetico e tassonomico, differenziando chiaramente *Talpa romana* dalle altre due specie italiane.

L'assenza di alcuni denti è abbastanza frequente nei restanti generi euroasiatici compresi con *Talpa* nella sottofamiglia *Talpinae*.

Le formule dentali dei quattro generi di talpe euroasiatiche sono così riassunte (STEIN, 1959):

$$\textit{Talpa} \quad I\,\frac{3}{3}\,C\,\frac{1}{1}\,P\,\frac{4}{4}\,M\,\frac{3}{3} = \frac{11}{11} \qquad (44)$$

$$\textit{Mogera} \quad I\,\frac{3}{3}\,C\,\frac{1}{0}\,P\,\frac{4}{4}\,M\,\frac{3}{3} = \frac{11}{10} \qquad (42)$$

$$\textit{Parascaptor} \quad I\,\frac{3}{3}\,C\,\frac{1}{1}\,P\,\frac{3}{4}\,M\,\frac{3}{3} = \frac{10}{11} \qquad (42)$$

$$\textit{Scaptochirus} \quad I\,\frac{3}{3}\,C\,\frac{1}{1}\,P\,\frac{3}{3}\,M\,\frac{3}{3} = \frac{10}{10} \qquad (40)$$

In particolare la tendenza alla riduzione dei premolari appare già stabilizzata nei generi *Scaptochirus* e *Parascaptor*, rappresentati dalle specie:

Scaptochirus moschatus Milne-Edwards di Mongolia e Manciuria (CB = 3,2 ÷ 3,7 cm);

Parascaptor leucura Blyth di Assam, Birmania, Tailandia c Cina Meridionale (CB = 2,7 ÷ 2,9 cm).

In alcune forme di *Scaptochirus moschatus* ricompare il quarto premolare inferiore!

Tornando quindi a *Talpa romana*, ed in particolare alla sua notevole tendenza verso la riduzione di un premolare superiore, riteniamo che la specie si trovi in una fase evolutiva avanzata, almeno in rapporto a questo particolare carattere dentale.

Considerando più attentamente la Tabella IV si può notare che la percentuale di oligodontia ai premolari superiori è più bassa in *Talpa r. maior*, intermedia in *Talpa r. brachycrania* e *Talpa r. adamoi*, ed alta in *Talpa r. romana*, per cui non possiamo più collegare direttamente la riduzione di questa anomalia all'aumento delle dimensioni delle popolazioni. Ciò che invece si conferma è la variabilità dell'incidenza con le varie popolazioni.

L'anomalia in esame si presenta nient'affatto scarsa anche in quei casi in cui la relativa percentuale non è stata valutata per scarsa attendibilità dei campioni. Nel caso di *Talpa coeca* non riteniamo

significativo il rapporto di un solo caso su 12, essendo basso il campione totale esaminato di questa specie. È invece interessante il dato di *Talpa europaea* con un solo esemplare su 40, anche se il valore così ricavato del 2,5 % è quasi certamente destinato a ridursi su di un campione più numeroso, se si considera che Stein (1963), per la stessa anomalia, ha ottenuto una incidenza dello 0,3 % dall'esame di ben 8.184 esemplari della stessa specie.



FIG. 4. - Caso di oligodontia ai premolari inferiori in *Talpa romana*: es. N. 275 di Visciano (NA).

La oligodontia ai premolari inferiori è estremamente rara in *Talpa romana*, analogamente a quanto osservato da Stein (1963) in *Talpa europaea*, per la quale ha osservato una percentuale dello 0,6 % su 8.653 casi, con un massimo del 2,6 % in 1.349 casi dell'URSS. Noi non ne abbiamo osservato casi né in *Talpa coeca* né in *Talpa europaea*. In *Talpa romana* un caso sicuro, bilaterale, è rappresentato in Fig. 4: trattasi dell'esemplare N. 275 di Visciano (NA). Un secondo caso, ancora bilaterale, lo abbiamo osservato nell'esemplare N. 6124 di Bagaladi (Reggio C.). Riteniamo invece molto dubbio il caso dell'esemplare N. 124 di Goriano Sicoli (L'Aquila) descritto nel

precedente lavoro del 1972. In particolare, l'esemplare N. 275 presenta anche oligodontia (3+3) ai premolari superiori, mentre il N. 6124, pur essendo fornito di 4+4 premolari superiori, ha i PM^2 più piccoli e molto addossati ai PM^3.

La poliodontia ai premolari, in *Talpa europaea* (STEIN, 1963) rarissima ai superiori (0,1 % su 8.184 esemplari esaminati) e piuttosto rara agli inferiori (2,1 % su 8.653 esemplari esaminati), dev'essere

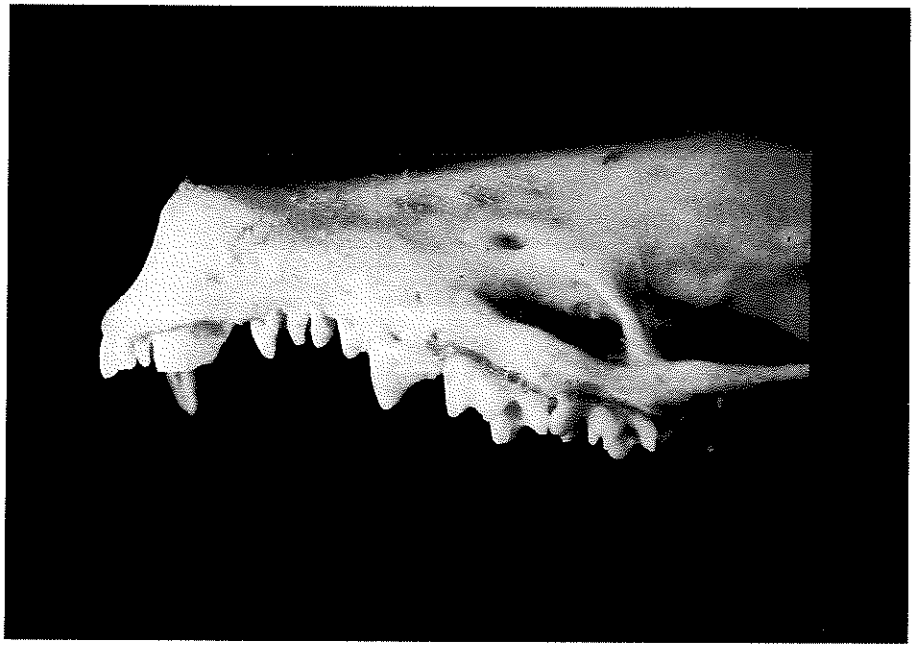


FIG. 5. - Caso di poliodontia ai premolari superiori in *Talpa romana*: es. N. 6123 di Bagaladi (RC).

abbastanza rara anche in *Talpa romana*, avendone esaminato un sol caso, monolaterale sinistro superiore, rappresentato in Fig. 5: si tratta dell'esemplare N. 6123 di Bagaladi (Reggio C.). In questo caso l'anomalia è prodotta da un probabile sdoppiamento di PM^2, che ha prodotto due denti più piccoli.

Casi di poliodontia non si sono osservati né in *Talpa coeca* né in *Talpa europaea*.

Anche la bifidia resta molto rara, non avendone riscontrato altri casi, in tutti gli esemplari esaminati delle tre specie, oltre i due di *Talpa romana maior* già descritti nel precedente lavoro del 1972.

BIBLIOGRAFIA

CAMERANO L., *Dell'esistenza della* Talpa europaea *Linn. in Sicilia,* Boll. dei Musei di Zool. ed Anat. comp. della R. Univ. di Torino, I (4), 2 pp. (1886).

CAMERANO L., *Ricerche intorno alla* Talpa romana *Oldfield Thomas e ad altre forme di talpe europee,* Memorie R. Accad. Scienze di Torino, LIV (2), pp. 81-127, 1 tav. con 12 figg. (1903).

CAPOLONGO D., *Variabilità ed anomalie in* Talpa romana (*Thomas*), Atti Soc. It. Sc. Nat. e Museo Civ. St. Nat. Milano, **113** (1), pp. 37-62, 17 figg., 4 tav. (1972).

LEHMANN, E. v., *Ueber die Kleinsäuger der La Sila* (*Kalabrien*), Zoologischer Anzeiger, **167**, pp. 213-227, 2 figg. (1961).

MARTINO V. and E., *A new form of mole from Jugoslavia,* Journal of Mammalogy, **12**, p. 53 (1931).

MINÀ PALUMBO F., *Catalogo dei mammiferi della Sicilia,* Tamburello & C., Palermo, pp. 38-40 (Fam. III-Talpidi) (1868).

NIETHAMMER J., *Die Säugetiere von Korfu,* Bonner zoologische Beiträge, **13** (H. 1/3), pp. 1-49, 24 figg., 12 tav. (1962).

PASA A., *Ricerche zoologiche sul massiccio del Pollino* (*Lucania-Calabria*). *X. Mammiferi,* Ann. Ist. e Museo di Zool. della Univ. di Napoli, VII (7), pp. 1-7 (1955).

PASA A., *Ricerche sulla fauna appenninica. XXXIX. Alcuni caratteri delle mammalofaune dei Monti Picentini,* Memorie Museo Civ. di St. Nat. di Verona, VII, pp. 235-245 (1959).

STEIN G. H. W., *Schädelallometrien und Systematik bei altweltlichen Maulwürfen* (*Talpinae*), Mitteilungen aus dem zoologischen Museum der Humboldt-Univ. zu Berlin, **36**, (H. 1), pp. 1-48, 15 figg., 14 tav. (1959).

STEIN G. H. W., *Anomalien der Zahnzahl und ihre geographische Variabilität bei Insectivoren: I. Maulwurf,* Talpa europaea *L.*, Mitt. Zool. Mus. Berlin, Band 39, Heft 1, pp. 223-240 (1963).

THOMAS O., *On the mole of the Roman District,* Ann. & Mag. N. Hist., Ser. 7, X, pp. 516-517 (1902).

WITTE G., *Zur Systematik der Insektenfresser des Monte-Gargano-Gebietes* (*Italien*), Bonner zoologische Beiträge, **15** (H. 1/2), pp. 1-35, 14 figg. (1964).

TABEL

Materia

Località	N.	cattura	s	età	P	L_t	cd	pp
A) *Talpa romana* (Thomas)								
					A-1) DINTORNI DI ROMA			
Roma	291	9-63	♂	I	—	—	—	—
Castel P.no	290	7-5-73	♀	I	*69,0*	15,7	2,8	1,6
Prima porta	22584	1971	♂	I	—	—	—	—
Ostia	olotipo	—	—	—	—	15,5	2,9	1,9
Ostia	6121	25-4-878	♂	I	—	—	—	—
Ostia	6122	25-4-878	♀	I	—	—	—	—
					A-2) ALTO ABRUZZO			
Monte Amaro	248	18-5-71	♀	II	*127,0*	18,5	3,5	2,0
Monte Velino	6113	4-8-903	♂	I	—	—	—	—
Caramanico	6116	10-8-878	♂	III	—	—	—	—
					A-4) TERRA DI LAVORO			
Mondragone	6000	—	—	—	—	—	—	—
Mondragone	6001	—	—	—	—	—	—	—
Mondragone	6002	—	—	—	—	—	—	—
Cancello Arn.	6004	8-942	—	—	—	—	—	—
Roccarainola	223	6-11-70	♂	I	66,7	16,7	2,6	2,2
Roccarainola	224	1-2-71	♀	II	58,6	16,4	3,0	1,8
Roccarainola	225	25-2-71	♀	III	79,6	17,1	3,2	1,8
Roccarainola	226	23-3-71	♀	II	64,9	16,2	2,7	1,8
Roccarainola	227	5-4-71	♂	II	73,4	17,5	2,5	1,8
Caivano	235	29-6-71	♂	—	69,7	18,5	3,3	1,8
Cicciano	239	11-4-72	♀	I	—	16,5	2,6	1,7
Cicciano	240	22-4-72	♂	I	—	17,9	2,6	1,8
Cicciano	241	25-4-72	♂	I	76,6	17,7	2,8	1,9
Cicciano	242	4-5-72	♂	I	*81,6*	18,0	2,9	1,8
Pollena Trocchia	244	2-10-72	♂	II	97,7	16,6	2,6	1,9
Pollena Trocchia	252	18-6-73	♀	I	*72,6*	15,5	2,7	1,8
Cimitile	249	5-4-73	♀	I	49,9	17,2	3,0	1,7
Roccarainola	258	19-7-73	♀	I	71,6	17,3	2,7	1,8
Caserta est	6104	1868	♂	I	—	—	—	—
Caserta est	6105	1868	♂	II	—	—	—	—
Roccarainola	270	25-2-74	♀	III	—	—	—	—
Visciano	275	17-4-74	♂	I	*74,1*	16,6	2,7	1,8
Visciano	276	17-4-74	♀	I	*75,0*	16,3	2,4	1,8
Visciano	277	17-4-74	—	II	—	—	—	—
					A-6) APPENNINO CAMPANO			
Guardia Lom.	228	29-5-71	♂	I	92,2	18,7	3,2	1,9
Guardia Lom.	229	3-6-71	♂	I	*120,0*	18,6	3,1	1,9
Guardia Lom.	230	3-6-71	♀	I	*107,2*	18,1	3,1	1,9
Prata Sannita	6115	4-6-1879	♂	I	—	—	—	—

saminato di *Talpa*.

CB	AC	AZ	HC	IO	DS	MD	LM	AN	AP	LP	a
—	—	—	—	—	—	—	—	0,50	—	—	3-3
3,49	1,74	1,40	1,08	0,80	1,43	2,40	3,61	0,52	1,02	1,64	3-3
3,52	1,74	1,37	1,07	0,81	1,42	2,36	3,62	0,52	1,04	1,61	2-2
—	1,78	1,5	—	0,8	—	—	3,67	—	1,11	1,62	—
3,59	1,68	1,38	1,08	0,80	1,44	2,50	3,66	0,50	0,99	1,65	3-3
3,30	1,67	—	1,05	0,75	1,34	2,24	3,43	0,47	0,99	1,53	3-3
3,78	1,85	1,45	1,11	0,80	1,49	2,63	3,83	0,55	1,06	1,75	0-3
3,81	1,83	1,37	1,12	0,81	1,54	2,64	3,87	0,53	1,03	1,77	3-3
3,65	1,81	1,43	1,10	0,81	1,40	2,48	3,70	0,52	1,06	1,66	1-2
3,57	1,73	—	1,11	0,81	1,47	2,48	3,66	0,56	1,01	1,64	3-3
3,50	1,69	—	1,06	0,81	1,40	2,36	3,57	0,51	1,00	1,60	3-3
—	—	—	—	0,86	1,47	2,52	—	0,58	1,09	1,68	3-3
3,55	1,73	—	1,08	0,84	1,43	2,42	3,63	0,53	1,01	1,65	2-2
3,43	1,66	1,27	1,08	0,75	1,38	2,35	3,50	0,48	0,99	1,57	2-2
3,36	1,66	1,30	1,01	0,76	1,40	2,27	3,48	0,48	1,03	1,54	3-3
3,60	1,76	1,39	1,06	0,80	1,46	2,48	3,68	0,52	1,10	1,68	2-2
3,43	1,73	1,32	1,07	0,78	1,44	2,38	3,51	0,52	1,01	1,59	3-3
3,42	1,72	1,38	1,02	0,80	1,42	2,40	3,49	0,50	1,07	1,63	3-3
—	—	—	—	—	—	2,45	—	—	—	—	—
3,45	1,73	1,29	1,08	0,75	1,43	2,35	3,55	0,51	1,03	1,62	2-3
3,67	1,82	1,42	1,11	0,81	1,46	2,54	3,76	0,54	1,10	1,68	3-3
3,61	1,70	—	1,08	0,78	1,46	2,43	3,69	0,50	1,02	1,65	3-3
3,64	1,79	1,41	1,09	0,80	1,46	2,46	3,71	0,55	1,05	1,65	2-2
3,54	1,77	—	1,05	—	1,42	2,43	3,60	0,53	1,01	1,63	1-1
3,52	1,71	1,33	1,04	0,80	1,46	2,46	3,60	0,52	1,05	1,65	2-3
3,50	—	—	1,02	0,80	1,40	2,39	3,58	0,54	1,03	1,62	2-2
3,59	1,74	1,41	1,07	0,81	1,45	2,50	3,72	0,51	1,04	1,66	2-2
3,61	1,74	1,37	1,08	0,79	1,43	2,47	3,66	0,55	1,10	1,65	3-3
3,70	1,79	1,40	1,07	0,84	1,48	2,54	3,80	0,56	1,07	1,70	3-3
3,58	1,75	1,37	1,05	0,80	1,45	2,45	3,65	0,52	1,05	1,67	3-3
3,52	1,69	1,35	1,05	0,80	1,45	2,50	3,58	0,53	1,03	1,65	2-2
3,55	1,71	1,35	1,08	0,79	1,45	2,42	3,62	0,53	1,03	1,64	2-2
3,49	1,76	1,38	1,01	0,78	1,46	2,43	3,55	0,53	1,06	1,65	3-3
3,60	—	1,41	1,10	0,86	1,45	2,48	3,70	0,53	1,05	1,64	3-3
3,72	1,77	1,34	1,09	0,80	1,46	2,56	3,80	0,53	1,01	1,71	2-3
3,67	1,76	1,37	1,12	0,80	1,44	2,53	3,72	0,51	1,00	1,65	2-2
3,60	1,70	1,36	1,10	0,77	1,42	2,44	3,67	0,53	1,00	1,64	3-3

Segu
Materia

Località	N.	cattura	s	età	P	L_t	cd	pp
Bagnoli Irp.	279	10-4-74	♂	II	*126,7*	18,7	2,9	1,9
Bagnoli Irp.	280	10-4-74	♀	I	*105,6*	17,2	2,45	1,8
					A-7) CILENTO			
Laurino	251	26-5-73	—	I	—	—	—	-
					A-8) LUCANIA			
Gallicchio	261	11-10-73	♀	II	*61,6*	16,4	2,15	1,7
Guardia Pert.	262	2-11-73	♂	II	*83,7*	17,9	2,90	1,8
Corleto Pert.	263	8-11-73	♀	II	*83,4*	16,8	2,55	1,7
Corleto Pert.	265	25-12-73	♂	II	*88,0*	16,0	2,4	1,7
Sarconi	266	7-1-74	♂	II	*114,6*	17,5	2,75	1,9
Sarconi	267	12-1-74	♂	II	*101,5*	17,1	2,70	1,8
Sarconi	269	1-2-74	♂	II	*115,6*	18,1	2,80	1,8
Corleto Pert.	272	24-3-74	♀	II	*76,3*	17,7	2,90	1,8
Sarconi	273	7-4-74	♀	I	*63,9*	15,2	2,40	1,8
Corleto Pert.	274	26-4-74	♂	I	*98,6*	18,0	2,80	1,8
Corleto Pert.	278	26-4-74	♀	I	*97,6*	16,5	2,30	1,8
Corleto Pert.	281	30-5-74	♂	I	90,0	16,1	2,40	1,8
Corleto Pert.	285	13-6-74	—	I	—	16,5	2,75	1,9
Corleto Pert.	286	23-6-74	♂	I	*106,2*	18,1	2,6	1,8
Tramutola	289	17-9-69	♀	I	*66,1*	15,7	2,4	1,7
Corleto Pert.	292	7-74	♂	I	*83,1*	16,1	2,5	1,8
Corleto Pert.	282	21-5-72	—	I	—	16,3	2,8	1,8
					A-9) PUGLIA			
Lecce	6108	1875	♂	II	—	—	—	-
Lecce	6109	1875	♂	I	—	—	—	-
Mottola	6101	9-1878	♀	I	—	—	—	-
Bari	6118	9-1878	♂	I	—	—	—	-
Bari	6119	9-1878	♀	I	—	—	—	-
					A-10) CALABRIA			
Camigliatello	—	7-8-60	—	—	80,0	16,6	2,4	1,9
Piane Crati	237	21-2-72	♀	I	*65,6*	15,3	2,4	1,7
Favazzina	245	1-10-72	♂	I	*54,6*	15,2	2-7	1,7
Favazzina	247	20-10-72	♀	I	*70,5*	14,9	2,4	1,6
Piane Crati	253	20-6-73	♀	I	*64,7*	15,0	2,6	1,6
Piane Crati	254	20-6-73	♀	I	*77,1*	16,0	2,6	1,7
Piane Crati	255	3-6-73	♂	I	*74,8*	15,8	2,8	1,8
Piane Crati	256	30-6-73	♂	I	78,7	16,5	2,5	1,8
Piane Crati	257	30-6-73	♀	I	*72,1*	14,7	2,3	1,6
Favazzina	259	1-6-73	♀	I	*61,1*	15,0	2,75	1,6
Favazzina	260	1-6-73	♀	I	*60,1*	15,5	2,4	1,5
Bagaladi	6123	6-1877	♂	I	—	—	—	-
Bagaladi	6124	6-1877	♀	II	—	—	—	-

ABELLA I

aminato di *Talpa*.

CB	AC	AZ	HC	IO	DS	MD	LM	AN	AP	LP	a
3,69	1,82	1,39	1,14	0,82	1,48	2,53	3,78	0,56	1,07	1,72	3-3
3,60	1,74	1,34	1,14	0,81	1,44	2,48	3,70	0,52	1,00	1,69	2-2
3,54	1,73	—	1,07	0,81	1,44	2,39	3,61	0,53	1,03	1,65	2-2
3,51	1,75	1,31	0,99	0,81	1,44	2,43	3,58	0,51	1,02	1,61	3-3
3,57	1,74	1,39	1,05	0,78	1,41	2,46	3,63	0,54	1,03	1,61	3-3
3,43	1,66	1,30	0,95	0,78	1,39	2,36	3,51	0,51	1,00	1,60	3-3
3,65	—	—	—	—	1,46	2,50	—	0,53	—	1,69	3-3
3,54	1,78	1,33	1,02	0,80	1,45	2,44	3,60	0,51	1,02	1,61	2-2
3,54	1,71	1,36	1,03	0,78	1,42	2,44	3,60	0,50	1,02	1,61	3-3
3,65	1,77	1,37	1,03	0,76	1,45	2,50	3,68	0,54	1,06	1,67	3-3
3,57	1,74	1,42	1,03	0,78	1,45	2,45	3,64	0,55	1,04	1,68	3-3
3,46	1,73	1,31	1,05	0,78	1,43	2,35	3,54	0,48	1,01	1,61	2-3
3,70	1,84	1,43	1,07	0,83	1,43	2,55	3,76	0,53	1,03	1,65	3-3
3,50	1,67	1,34	1,06	0,78	1,40	2,43	3,61	0,49	1,03	1,60	3-3
3,59	1,74	1,35	1,00	0,80	1,49	2,48	3,66	0,52	1,03	1,66	2-3
3,65	1,77	1,43	1,11	0,78	1,46	2,52	3,73	0,51	1,03	1,70	3-3
3,63	1,78	—	1,06	0,84	1,46	2,54	3,71	0,51	1,01	1,68	3-3
3,44	1,68	1,31	1,02	0,80	1,40	2,35	3,51	0,48	0,99	1,59	2-2
3,58	1,78	—	1,00	0,86	1,44	2,41	3,62	0,52	0,99	1,64	3-3
3,44	1,69	1,34	1,07	0,77	1,41	2,32	3,52	0,49	1,01	1,61	3-3
3,31	1,67	—	0,95	0,79	1,33	2,29	3,42	0,49	0,92	1,51	3-3
3,41	1,68	1,31	1,04	0,75	1,31	2,32	3,50	0,50	0,96	1,54	2-2
3,18	1,63	1,26	0,95	0,76	1,23	2,15	3,24	0,45	0,91	1,41	2-2
3,29	1,65	1,28	1,03	0,75	1,29	2,22	3,36	0,47	1,00	1,50	3-3
3,37	1,67	1,25	1,03	0,74	1,36	2,32	3,43	0,48	0,99	1,54	2-2
3,52	1,65	1,28	1,03	0,78	1,37	2,42	—	—	1,01	1,55	2-2
3,26	1,61	1,20	1,03	0,80	1,28	2,18	3,33	0,46	0,96	1,48	3-3
3,23	1,61	1,23	1,00	0,72	1,29	2,20	3,30	0,48	0,93	1,44	3-2
3,18	1,56	1,21	0,98	0,72	1,27	2,13	3,24	0,46	0,97	1,48	3-3
3,24	1,56	1,22	1,02	0,73	1,29	2,18	3,37	0,46	0,91	1,47	3-3
3,32	—	—	—	—	1,34	2,28	—	0,47	0,95	1,53	3-3
3,30	—	—	—	0,78	1,35	2,27	3,46	0,49	0,96	1,56	2-3
3,35	1,60	1,23	1,01	0,77	1,35	2,32	3,44	0,47	0,93	1,52	3-3
3,18	1,66	1,26	1,03	0,78	1,26	2,13	3,30	0,46	0,91	1,43	2-2
3,28	1,60	—	1,01	—	1,33	2,17	—	0,49	0,94	1,51	2-2
3,21	1,58	1,23	1,00	0,73	1,29	2,20	3,29	0,46	0,91	1,49	3-3
3,49	1,67	1,32	1,04	0,79	1,37	2,31	3,46	0,51	0,98	1,55	4-3
3,5	1,57	—	0,97	0,71	1,24	2,14	3,22	0,45	0,89	1,43	3-3

Segu

Materia

Località	N.	cattura	s	età	P	L_1	cd	pp
Sangineto	271	20-2-74	♀	I	*62,6*	16,9	2,70	1,7
Sangineto	284	1-6-74	♀	II	*77,8*	15,8	2,7	1,7
					A-11) SICILIA			
Modica	6125	4-1879	♂	I	—	—	—	–
B) *Talpa coeca* Savi								
					B-1) PREAPPENNINO TOSCA			
Arezzo	6139	est.-1872	—	—	—	—	—	–
Pratovecchio	6126	est.-1872	—	—	—	—	—	–
Vinca	6129	—	—	I	—	—	—	–
Vallombrosa	6127	8-1884	—	I	—	—	—	–
Riccioni	6452	5-5-70	♂	I	—	—	—	–
Gramolazzo	6439	1970	—	I	—	—	—	–
Alpi Apuane	6485	—	—	I	—	—	—	–
Abetone	6120	17-8-882	♂	I	—	—	—	–
Lucca	6117	10-3-881	—	III	—	—	—	–
Maresca	6133	7-1884	♀	I	—	—	—	–
Le Regine	3907	7-1955	—	I	—	—	—	–
					B-2) ALTO ABRUZZO			
Villetta Barr.	9	11-7-14	—	I	—	13,4	2,4	1,5
					B-3) MONTE POLLINO			
Monte Pollino	—	20-6-53	♀	—	—	14,4	2,4	1,5
Monte Pollino	—	21-6-53	—	—	—	14,8	2,4	1,4
C) *Talpa europaea* L.								
					C-1) EMILIA-ROMAGNA			
S. Marino	7727	8-877	♂	II	—	—	—	–
Rimini	6099	7 876	♂	III	—	—	—	–
Ravenna	6100	12-876	♂	I	—	—	—	–
Lugo	6586	1-6-71	♂	I	—	—	—	–
Ravenna	6146	2-6-899	♂	I	—	—	—	–
Castellarano	5918	1-10-70	♂	I	—	—	—	–
Fiesco del G.	6090	20-2-908	♂	II	—	—	—	–
Fiesco del G.	6091	20-2-908	♂	I	—	—	—	–
Fiesco del G.	6092	20-2-908	♀	II	—	—	—	–
Fiesco del G.	6093	20-2-908	♀	II	—	—	—	–
Lugo	7725	15-2-73	♀	II	—	—	—	–
Lugo	7726	17-10-72	♂	II	—	—	—	–
Urbino	6066	9-875	♂	II	—	—	—	–
Urbino	6067	9-875	♂	I	—	—	—	–
Urbino	6068	9-875	♂	I	—	—	—	–
Urbino	6069	9-875	♂	I	—	—	—	–

ABELLA I

aminato di *Talpa*.

CB	AC	AZ	HC	IO	DS	MD	LM	AN	AP	LP	a
3,54	1,70	1,33	1,10	0,80	1,43	2,42	3,61	0,51	1,02	1,63	2-3
3,47	1,72	1,36	1,06	0,79	1,40	2,36	3,55	0,50	1,01	1,58	3-3
3,67	—	—	—	0,81	1,46	2,40	3,72	0,54	1,02	1,71	3-3
2,90	1,46	—	0,94	0,70	1,15	1,90	2,99	0,36	0,78	1,34	3-3
2,97	1,48	1,02	0,88	0,69	1,18	1,92	3,03	0,39	0,75	1,35	3-3
3,09	1,54	1,10	0,96	0,71	1,19	2,03	3,20	0,40	0,80	1,40	3-3
2,83	1,41	1,00	0,88	0,67	1,13	1,84	2,91	0,37	0,75	1,29	3-3
3,08	1,52	—	0,95	0,70	1,23	2,05	3,18	0,40	0,83	1,43	3-3
3,04	—	—	—	0,72	1,20	1,98	—	0,41	0,82	1,38	3-3
3,14	1,49	—	0,87	0,70	1,24	2,05	—	0,40	0,86	1,44	3-3
3,02	1,47	1,02	0,95	0,70	1,21	2,00	3,11	0,40	0,79	1,38	3-3
3,00	1,51	1,08	0,86	0,69	1,16	1,90	3,04	0,41	0,82	1,34	3-3
3,10	—	—	—	—	1,23	2,01	—	0,40	0,81	1,42	3-3
3,12	—	—	—	0,74	1,23	2,02	—	0,40	0,84	1,43	3-3
2,95	—	—	0,96	0,73	1,19	1,93	3,05	0,37	0,82	1,32	3-1
3,05	—	1,01	—	—	1,18	1,98	—	0,37	—	—	—
3,00	—	1,07	—	—	1,20	1,90	—	0,38	—	—	—
3,45	1,68	1,19	0,99	0,77	1,31	2,28	3,51	0,48	0,89	1,43	3-3
3,56	1,65	1,20	1,00	0,81	1,30	2,30	3,62	0,49	0,92	1,53	3-3
3,51	1,72	1,29	1,04	0,81	1,30	2,34	3,58	0,50	0,95	1,53	3-3
—	—	—	—	0,81	1,35	2,30	—	0,49	0,90	1,55	3-3
3,37	1,67	1,21	1,05	0,82	1,27	2,20	3,45	0,47	0,89	1,45	3-3
—	—	—	—	0,81	1,38	2,33	—	0,50	0,95	1,55	3-3
3,47	1,66	1,23	1,03	0,81	1,31	2,28	3,54	0,48	0,90	1,57	3-3
3,59	1,67	1,24	1,00	0,82	1,34	2,38	3,65	0,53	0,92	1,58	3-3
3,45	1,67	1,20	1,00	0,78	1,36	2,29	3,52	0,48	0,90	1,58	3-3
3,53	1,71	1,26	1,07	0,85	1,32	2,30	3,59	0,52	0,93	1,53	3-3
3,48	1,64	1,18	1,00	0,80	1,31	2,29	3,54	0,48	0,90	1,53	3-3
3,59	1,74	1,24	1,05	0,83	1,36	2,35	3,67	0,51	0,94	1,57	3-3
3,37	1,64	1,17	1,02	0,80	1,26	2,20	3,44	0,48	0,87	1,50	3-3
3,47	—	—	—	0,88	1,31	2,28	3,57	0,48	0,88	1,50	3-3
3,33	—	1,20	1,08	0,81	1,26	2,20	3,40	0,49	0,86	1,47	3-3
3,63	—	—	—	0,84	1,37	2,39	—	0,50	0,89	1,60	3-3

Segu

Materia

Località	N.	cattura	s	età	P	L_t	cd	pp
					C-2) DINTORNI DI FIRENZE			
Firenze	6150	6-892	♂	I	—	—	—	—
Brozzi	6143	27-4-880	—	I	—	—	—	—
Poggio a C.	6151	—	—	—	—	—	—	—
Poggio a C.	6152	—	—	II	—	—	—	—
Prato	6581	9-54	—	I	—	—	—	—
Firenze	6582	—	—	I	—	—	—	—
Brozzi	6073	17-1-882	♂	II	—	—	—	—
Cascine	6097	8-12-903	♂	II	—	—	—	—
Cascine	6098	8-12-903	♀	I	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6075	30-1-12	—	I	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6076	30-1-12	—	I	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6077	30-1-12	—	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6078	30-1-12	—	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6079	30-1-12	—	I	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6080	30-1-12	—	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6081	30-1-12	—	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6082	20-1-12	♂	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6083	20-1-12	♀	I	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6084	29-1-12	—	I	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6085	29-1-12	—	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6086	29-1-12	—	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6087	29-1-12	—	I	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6088	29-1-12	—	II	—	—	—	—
S. Angelo a L.	6089	29-1-12	—	I	—	—	—	—

Conservazione del materiale:

— Museo Civ. di St. Nat., Verona (Collezione Pasa): esemplari di *Talpa romana* N. 6000, 60 6002, 6004.

— Museo dell'Ist. di Zool. dell'Univ., Roma: esemplare di *Talpa romana* N. 22584.

— Museo Zool. de « La Specola », Firenze: esemplari di *Talpa romana* N. 6121, 6122, 6113, 61 6104, 6105, 6115, 6108, 6109, 6101, 6118, 6119, 6123, 6124, 6125; tutti gli esemplari di *Tal europaea* ed i seguenti di *Talpa coeca*: N. 6139, 6126, 6129, 6127, 6452, 6439, 6485, 6120, 61 6133, 3907.

— Museo di St. Nat., Milano: esemplare N. 9 di *Talpa coeca*.

— I due esemplari di *Talpa coeca* senza numero provengono da Pasa (1955).

— Restante materiale: conservato in collezione D. Capolongo; salvo quanto trasferito al M seo de « La Specola ».

Spiegazione dei simboli:

N: numero di riferimento di collezione;

s: sesso;

età: secondo le tre classi di età di cui a Capolongo (1972);

ABELLA I

;aminato di *Talpa.*

CB	AC	AZ	HC	IO	DS	MD	LM	AN	AP	LP	a
—	—	—	—	—	1,27	—	—	0,45	0,87	—	3-3
—	1,60	—	0,99	0,76	—	—	—	—	—	—	3-3
—	—	—	—	—	—	—	—	0,52	—	—	3-3
—	—	—	—	—	1,35	2,32	—	0,51	0,93	1,59	3-3
3,45	1,64	—	1,11	0,80	1,28	2,26	3,51	0,46	0,91	1,48	3-3
—	—	—	—	—	1,23	2,13	—	0,44	0,81	1,43	3-3
3,58	—	—	1,00	0,83	1,34	2,35	3,66	0,50	0,96	1,58	3-3
3,52	1,70	—	1,03	0,83	1,32	2,32	3,59	0,48	0,92	1,55	3-3
3,24	1,60	1,16	0,99	0,75	1,20	2,10	3,29	0,46	0,82	1,45	3-3
3,58	1,71	1,24	1,05	0,81	1,35	2,32	3,65	0,50	0,96	1,59	3-3
—	1,62	—	1,03	0,79	1,26	2,16	3,39	0,47	0,90	1,45	3-3
3,34	1,68	1,18	1,02	0,80	1,27	2,18	3,42	0,45	0,88	1,45	3-3
3,33	—	—	1,02	0,80	1,29	2,22	3,45	0,46	0,90	1,50	3-3
3,61	1,74	1,28	1,06	0,81	1,37	2,36	3,71	0,51	0,96	1,57	3-3
3,42	1,70	1,21	1,04	0,82	1,30	2,22	3,50	0,48	0,91	1,54	2-2
—	—	—	—	0,83	1,27	2,14	—	0,47	0,92	1,48	3-3
3,54	1,67	1,23	1,05	0,80	1,32	2,22	3,61	0,51	0,90	1,56	3-3
3,35	1,65	1,18	1,00	0,79	1,27	2,13	3,43	0,45	0,88	1,45	3-3
3,42	1,62	1,20	1,03	0,80	1,30	2,20	3,48	0,48	0,93	1,50	3-3
3,46	1,66	—	1,03	0,81	1,32	2,28	3,55	0,46	0,91	1,51	3-3
3,33	1,63	1,20	1,01	0,76	1,27	2,19	3,41	0,48	0,91	1,49	3-3
3,37	1,61	1,19	0,99	0,80	1,30	2,19	3,45	0,46	0,90	1,49	3-3
3,60	1,68	1,24	1,04	0,81	1,37	2,34	3,66	0,50	0,94	1,58	3-3
3,37	1,62	1,19	1,01	0,80	1,27	2,21	3,45	0,46	0,90	1,49	3-3

peso (gr.); sono in corsivo i dati relativi ad esemplari conservati in alcool;
: lunghezza totale del corpo (cm);
: lunghezza coda (cm);
): lunghezza piede posteriore senza unghia (cm);
3: lunghezza condilo-basale (cm);
C: larghezza massima del cranio (cm);
Z: larghezza zigomatica (cm);
C: altezza del cranio (cm);
): restringimento interorbitale (cm);
S: lunghezza della fila dentale superiore (cm);
D: lunghezza della mandibola (cm);
M: lunghezza massima del cranio (cm);
N: larghezza nasale (cm);
P: larghezza del palato (cm);
P: lunghezza del palato (cm);
numero dei primi tre premolari superiori; « 3-2 » significa, ad es., tre a sinistra (normale) e due a destra.

TABELLA II

Valori medi ed intervalli di variabilità delle misure craniche fondamentali.

	n	m	intervallo	popolazione
LUNGHEZZA CONDILO-BASALE — CB —				
Talpa romana (Thomas)	22	3,67	3,51 ÷ 3,84	Alto Abruzzo
	9	3,68	3,60 ÷ 3,73	Teramano
	7	3,64	3,60 ÷ 3,72	Appennino Campano
	4	3,47	3,30 ÷ 3,59	Dintorni di Roma
	80	3,51	3,32 ÷ 3,70	Terra di lavoro
	17	3,55	3,43 ÷ 3,70	Lucania
	16	3,41	3,25 ÷ 3,53	Gargano
	5	3,31	3,18 ÷ 3,41	Puglia
	12	3,27	3,15 ÷ 3,40	Calabria
	1	3,67	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	14	3,02	2,83 ÷ 3,14	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	14	3,49	3,33 ÷ 3,63	Emilia-Romagna
	17	3,44	3,24 ÷ 3,61	Dintorni di Firenze
LARGHEZZA MASSIMA DEL CRANIO — AC —				
Talpa romana (Thomas)	23	1,80	1,70 ÷ 1,85	Alto Abruzzo
	7	1,77	1,70 ÷ 1,83	Teramano
	7	1,75	1,70 ÷ 1,82	Appennino Campano
	5	1,72	1,67 ÷ 1,78	Dintorni di Roma
	82	1,73	1,61 ÷ 1,85	Terra di lavoro
	16	1,74	1,66 ÷ 1,84	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	1,66	1,63 ÷ 1,68	Puglia
	10	1,60	1,56 ÷ 1,67	Calabria
	—	—	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	8	1,48	1,41 ÷ 1,54	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	11	1,68	1,64 ÷ 1,74	Emilia-Romagna
	17	1,65	1,60 ÷ 1,74	Dintorni di Firenze
LARGHEZZA ZIGOMATICA — AZ —				
Talpa romana (Thomas)	25	1,39	1,30 ÷ 1,46	Alto Abruzzo
	2	1,40	1,39 ÷ 1,42	Teramano

TABELLA II

Segue: *Valori medi ed intervalli di variabilità delle misure craniche fondamentali.*

	n	m	intervallo	popolazione
	7	1,36	1,32 ÷ 1,41	Appennino Campano
	4	1,41	1,37 ÷ 1,50	Dintorni di Roma
	74	1,35	1,23 ÷ 1,45	Terra di lavoro
	14	1,36	1,30 ÷ 1,43	Lucania
	—	—	—	Gargano
	4	1,27	1,25 ÷ 1,31	Puglia
	8	1,24	1,20 ÷ 1,32	Calabria
	—	—	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	7	1,04	1,00 ÷ 1,10	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	12	1,22	1,17 ÷ 1,29	Emilia-Romagna
	12	1,21	1,16 ÷ 1,28	Dintorni di Firenze
ALTEZZA DEL CRANIO — HC —				
Talpa romana (Thomas)	25	1,09	1,04 ÷ 1,13	Alto Abruzzo
	6	1,12	1,08 ÷ 1,15	Teramano
	7	1,11	1,06 ÷ 1,14	Appennino Campano
	4	1,07	1,05 ÷ 1,08	Dintorni di Roma
	82	1,08	1,01 ÷ 1,18	Terra di lavoro
	15	1,03	0,95 ÷ 1,11	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	1,00	0,95 ÷ 1,04	Puglia
	10	1,01	0,97 ÷ 1,04	Calabria
	—	—	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	9	0,92	0,86 ÷ 0,96	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	12	1,03	0,99 ÷ 1,08	Emilia-Romagna
	18	1,03	0,99 ÷ 1,11	Dintorni di Firenze
RESTRINGIMENTO INTERORBITALE — IO —				
Talpa romana (Thomas)	28	0,81	0,77 ÷ 0,85	Alto Abruzzo
	9	0,80	0,79 ÷ 0,84	Teramano
	7	0,81	0,77 ÷ 0,86	Appennino Campano
	5	0,79	0,75 ÷ 0,81	Dintorni di Roma
	86	0,80	0,74 ÷ 0,86	Terra di lavoro

TABELLA II

Segue: *Valori medi ed intervalli di variabilità delle misure craniche fondamentali.*

	n	m	intervallo	popolazione
	16	0,80	0,76 ÷ 0,86	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	0,76	0,74 ÷ 0,79	Puglia
	10	0,75	0,71 ÷ 0,80	Calabria
	1	0,81	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	11	0,70	0,67-÷ 0,74	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	16	0,82	0,77 ÷ 0,88	Emilia-Romagna
	20	0,80	0,75 ÷ 0,83	Dintorni di Firenze
LUNGHEZZA DELLA FILA DENTALE SUPERIORE — DS —				
Talpa romana (Thomas)	28	1,48	1,39 ÷ 1,58	Alto Abruzzo
	9	1,48	1,44 ÷ 1,50	Teramano
	8	1,46	1,42 ÷ 1,50	Appennino Campano
	4	1,41	1,34 ÷ 1,44	Dintorni di Roma
	93	1,43	1,36 ÷ 1,51	Terra di lavoro
	17	1,43	1,39 ÷ 1,49	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	1,30	1,23 ÷ 1,36	Puglia
	12	1,30	1,24 ÷ 1,37	Calabria
	1	1,46	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	14	1,19	1,13 ÷ 1,24	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	16	1,32	1,26 ÷ 1,38	Emilia-Romagna
	22	1,30	1,20 ÷ 1,37	Dintorni di Firenze
LUNGHEZZA DELLA MANDIBOLA — MD —				
Talpa romana (Thomas)	27	2,51	2,32 ÷ 2,65	Alto Abruzzo
	9	2,53	2,46 ÷ 2,59	Teramano
	8	2,50	2,44 ÷ 2,56	Appennino Campano
	4	2,37	2,24 ÷ 2,50	Dintorni di Roma
	98	2,42	2,27 ÷ 2,57	Terra di lavoro
	17	2,44	2,32 ÷ 2,55	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	2,26	2,15 ÷ 2,32	Puglia

TABELLA II

Segue: *Valori medi ed intervalli di variabilità delle misure craniche fondamentali.*

	n	m	intervallo	popolazione
	12	2,21	2,13 ÷ 2,32	Calabria
	1	2,40	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	14	1,96	1,84 ÷ 2,05	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	16	2,29	2,20 ÷ 2,39	Emilia-Romagna
	21	2,23	2,10 ÷ 2,36	Dintorni di Firenze
LUNGHEZZA MASSIMA — LM —				
Talpa romana (Thomas)	23	3,74	3,58 ÷ 3,91	Alto Abruzzo
	1	3,73	—	Teramano
	7	3,72	3,67 ÷ 3,80	Appennino Campano
	5	3,60	3,43 ÷ 3,67	Dintorni di Roma
	83	3,59	3,39 ÷ 3,80	Terra di lavoro
	16	3,62	3,51 ÷ 3,76	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	3,39	3,24 ÷ 3,50	Puglia
	10	3,34	3,22 ÷ 3,46	Calabria
	1	3,72	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	8	3,06	2,91 ÷ 3,20	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	13	3,54	3,40 ÷ 3,67	Emilia-Romagna
	18	3,51	3,29 ÷ 3,71	Dintorni di Firenze
LARGHEZZA NASALE — AN —				
Talpa romana (Thomas)	27	0,54	0,50 ÷ 0,56	Alto Abruzzo
	9	0,55	0,51 ÷ 0,57	Teramano
	7	0,53	0,51 ÷ 0,56	Appennino Campano
	5	0,50	0,47 ÷ 0,52	Dintorni di Roma
	93	0,51	0,44 ÷ 0,58	Terra di lavoro
	17	0,51	0,48 ÷ 0,55	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	0,48	0,45 ÷ 0,50	Puglia
	12	0,47	0,45 ÷ 0,51	Calabria
	1	0,54	—	Sicilia

TABELLA II

Seguc: *Valori medi ed intervalli di variabilità delle misure craniche fondamentali.*

	n	m	intervallo	popolazione
Talpa coeca Savi	14	0,39	0,36 ÷ 0,41	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	16	0,49	0,47 ÷ 0,53	Emilia-Romagna
	23	0,48	0,44 ÷ 0,52	Dintorni di Firenze
LARGHEZZA DEL PALATO — AP —				
Talpa romana (Thomas)	28	1,06	0,98 ÷ 1,10	Alto Abruzzo
	9	1,09	1,05 ÷ 1,12	Teramano
	8	1,03	1,00 ÷ 1,08	Appennino Campano
	5	1,03	0,99 ÷ 1,11	Dintorni di Roma
	93	1,03	0,97 ÷ 1,11	Terra di lavoro
	16	1,02	0,99 ÷ 1,06	Lucania
	19	0,99	0,96 ÷ 1,05	Gargano
	5	0,96	0,91 ÷ 1,00	Puglia
	12	0,94	0,89 ÷ 0,98	Calabria
	1	1,02	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	12	0,81	0,75 ÷ 0,86	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	16	0,91	0,86 ÷ 0,95	Emilia-Romagna
	22	0,91	0,81 ÷ 0,96	Dintorni di Firenze
LUNGHEZZA DEL PALATO — LP —				
Talpa romana (Thomas)	27	1,66	1,54 ÷ 1,77	Alto Abruzzo
	9	1,67	1,62 ÷ 1,72	Teramano
	8	1,68	1,64 ÷ 1,72	Appennino Campano
	5	1,61	1,53 ÷ 1,65	Dintorni di Roma
	94	1,61	1,52 ÷ 1,71	Terra di lavoro
	17	1,64	1,59 ÷ 1,70	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	1,50	1,41 ÷ 1,54	Puglia
	12	1,49	1,43 ÷ 1,56	Calabria
	1	1,71	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	12	1,38	1,29 ÷ 1,44	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	16	1,53	1,43 ÷ 1,60	Emilia-Romagna
	21	1,51	1,43 ÷ 1,59	Dintorni di Firenze

TABELLA III

Valori medi ed intervalli di variabilità degli indici cranici.

	n	m	intervallo	popolazione
INDICE DI LARGHEZZA FALATALE — I1 —				
Talpa romana (Thomas)	22	28,9	27,0 ÷ 30,5	Alto Abruzzo
	9	29,5	28,6 ÷ 30,4	Teramano
	7	28,3	27,1 ÷ 29,8	Appennino Campano
	4	29,1	27,6 ÷ 30,0	Dintorni di Roma
	74	29,5	27,8 ÷ 31,7	Terra di lavoro
	17	28,8	27,7 ÷ 29,7	Lucania
	16	29,1	28,0 ÷ 30,7	Gargano
	5	28,9	27,8 ÷ 30,4	Puglia
	12	28,7	27,8 ÷ 30,5	Calabria
	1	27,7	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	12	26,7	25,3 ÷ 27,8	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	14	25,9	24,5 ÷ 27,1	Emilia-Romagna
	17	26,5	25,3 ÷ 27,3	Dintorni di Firenze
INDICE DI LARGHEZZA NASO-FALATALE — I2—				
Talpa romana (Thomas)	27	50,8	48,6 ÷ 53,9	Alto Abruzzo
	9	50,5	48,2 ÷ 52,3	Teramano
	7	51,5	49,1 ÷ 53,0	Appennino Campano
	4	49,7	47,5 ÷ 51,0	Dintorni di Roma
	92	49,8	44,4 ÷ 55,4	Terra di lavoro
	17	50,2	47,5 ÷ 52,9	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	50,1	47,0 ÷ 53,3	Puglia
	12	50,4	47,4 ÷ 52,1	Calabria
	1	52,9	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	12	48,7	45,1 ÷ 52,0	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	16	54,4	52,6 ÷ 57,6	Emilia-Romagna
	22	52,4	50,5 ÷ 56,7	Dintorni di Firenze

TABELLA III

Segue: *Valori medi ed intervalli di variabilità degli indici cranici.*

	n	m	intervallo	popolazione
INDICE DI ALTEZZA TRASVERSALE — I3 —				
Talpa romana (Thomas)	23	60,9	57,7 ÷ 63,2	Alto Abruzzo
	6	62,8	61,2 ÷ 64,2	Teramano
	6	63,3	61,6 ÷ 65,5	Appennino Campano
	4	62,7	61,5 ÷ 64,3	Dintorni di Roma
	81	62,2	56,8 ÷ 65,7	Terra di lavoro
	16	59,5	56,2 ÷ 63,5	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	60,2	56,9 ÷ 62,4	Puglia
	10	63,0	61,8 ÷ 65,4	Calabria
	—	—	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	8	61,4	57,0 ÷ 64,6	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	11	61,0	58,9 ÷ 62,9	Emilia-Romagna
	17	62,2	60,6 ÷ 67,7	Dintorni di Firenze
INDICE DI ALTEZZA LONGITUDINALE — I4 —				
Talpa romana (Thomas)	22	29,9	28,3 ÷ 31,3	Alto Abruzzo
	6	30,3	29,5 ÷ 31,2	Teramano
	7	30,2	29,3 ÷ 31,7	Appennino Campano
	4	30,8	30,1 ÷ 31,8	Dintorni di Roma
	81	30,7	28,9 ÷ 32,4	Terra di lavoro
	16	29,1	27,7 ÷ 31,5	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	30,2	28,7 ÷ 31,3	Puglia
	10	31,1	30,1 ÷ 32,4	Calabria
	—	—	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	9	30,6	27,7 ÷ 32,5	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	12	29,6	27,9 ÷ 32,4	Emilia-Romagna
	17	29,9	27,9 ÷ 32,2	Dintorni di Firenze

TABELLA III

Segue: *Valori medi ed intervalli di variabilità degli indici cranici.*

	n	m	intervallo	popolazione
INDICE DI ACUTEZZA NASALE — I5 —				
Talpa romana (Thomas)	21	109,3	101,1 ÷ 116,5	Alto Abruzzo
	7	114,1	106,4 ÷ 121,5	Teramano
	6	110,4	106,4 ÷ 113,5	Appennino Campano
	4	102,3	92,9 ÷ 106,8	Dintorni di Roma
	80	104,6	92,3 ÷ 115,8	Terra di lavoro
	16	104,4	96,0 ÷ 112,8	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	95,4	87,8 ÷ 101,5	Puglia
	10	95,3	88,1 ÷ 103,5	Calabria
	—	—	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	8	79,2	71,5 ÷ 84,3	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	11	102,5	94,8 ÷ 113,9	Emilia-Romagna
	15	98,6	89,5 ÷ 108,1	Dintorni di Firenze
INDICE DI LUNGHEZZA MANDIBOLARE — I6 —				
Talpa romana (Thomas)	22	68,5	65,8 ÷ 70,1	Alto Abruzzo
	9	68,7	67,9 ÷ 69,6	Teramano
	7	68,7	67,8 ÷ 69,3	Appennino Campano
	4	68,3	67,0 ÷ 69,6	Dintorni di Roma
	80	69,0	66,8 ÷ 70,8	Terra di lavoro
	17	68,7	67,3 ÷ 70,0	Lucania
	—	—	—	Gargano
	5	68,2	67,5 ÷ 69,2	Puglia
	12	67,6	66,2 ÷ 69,3	Calabria
	1	65,3	—	Sicilia
Talpa coeca Savi	14	65,0	63,3 ÷ 66,6	Italia peninsulare
Talpa europaea L.	14	65,7	64,6 ÷ 66,7	Emilia-Romagna
	17	65,1	62,7 ÷ 66,7	Dintorni di Firenze

TABELLA IV

Oligodontia ai premolari superiori.

	n.	4+3	3+4	3+3	3+2	2+3	4+2	2+4	2+2	Tot.	%
r. romana											
Dintorni di Roma	4	—	—	1	—	—	—	—	—	1	//
Terra di Lavoro	96	6	7	30	2	3	—	—	1	49	51
r. (romana?)											
Camigliatello	1	—	—	1	—	—	—	—	—	1	//
Sangineto	2	—	1	—	—	—	—	—	—	1	//
Laurino	1	—	—	1	—	—	—	—	—	1	//
r. maior											
Alto Abruzzo	29	—	2	—	—	—	—	1	—	3	10
r. (maior?)											
Teramano	9	1	—	1	—	—	—	—	—	2	22
Appennino Campano	8	1	1	2	1	—	—	—	—	5	//
r. brachycrania											
Lucania	17	—	2	2	—	—	—	—	—	4	24
r. adamoi											
Calabria	12	1	1	2	—	—	—	—	—	4	33
r. (adamoi?)											
Puglia	5	—	—	3	—	—	—	—	—	3	//
r. (n. subsp.?)											
Gargano	19	2	1	2	1	—	—	1	—	7	37
coeca											
Italia Appenn.	12	—	—	—	—	—	1	—	—	1	//
europaea											
Emil.-Rom.-Tosc.	40	—	—	1	—	—	—	—	—	1	2,5

Prognatismo per ipoplasia del massiccio facciale in esemplare di *Talpa Romana* (Thomas)

Nota di Rocco Panascì * e Domenico Capolongo **
presentata dal socio ordinario Baldassarre De Lerma

(Adunanza dell'1 marzo 1975)

Riassunto. — Gli autori descrivono una rara anomalia in un esemplare di *Talpa romana* (Thomas), con prognatismo da ipoplasia del massiccio facciale.

Summary. — The authors describe a rare anomaly in a specimen of *Talpa romana* (Thomas), showing prognathism from reduced growth of facial bones.

In oltre 200 esemplari di *Talpa romana* (Thomas), da noi esaminati in un recente lavoro (Capolongo & Panascì, 1975), ne abbiamo rinvenuto uno anomalo, che descriviamo di seguito.

Dati di cattura e principali misure corporee: 26.XI.73, Valle Lauro, Contrada Mentela, in agro di Guardia Perticara (PZ), legit R. Panascì — ♀ — L_t = 14,0 cm; cd = 2,7 cm; pp = 1,7 cm; P = 42,6 gr (in alcool). Esemplare di I età.

Conservazione del materiale: N. 264 collezione D. Capolongo depositato presso la collezione del Museo Zoologico de « La Specola », Firenze.

L'esemplare presenta una marcata ipoplasia del massiccio facciale, e cioè del gruppo osseo formato dai mascellari superiori, dagli intermascellari e dai nasali, i quali, nel genere *Talpa*, risultano sempre fortemente saldati fra di loro e senza tracce di suture.

Osservando dall'alto il cranio deforme, e confrontandolo con quello di un individuo normale (Fig. 1), si nota per il primo un vistoso accorciamento del muso, che si presenta corto e tozzo. Posteriormente al muso, il cranio è praticamente normale. L'ipoplasia comincia all'altezza della sutura tra frontali e nasali, rimanendo quest'ultima chiaramente visibile. Inoltre, contrariamente alla norma, sono ben

* Istituto e Museo di Zoologia, Università degli Studi di Napoli, Via Mezzocannone 8.
** Via Roma, 8 - 80030 Roccarainola.

visibili anche le suture tra mascellari e frontali ed abbastanza percettibili quelle perinasali. In altri termini, l'ipoplasia risulta associata a una saldatura anomala ed incompleta delle ossa del massiccio facciale.



FIG. 1. - Il cranio anomalo (segnato 264) ed un cranio normale, visti dall'alto.

Alla riduzione di spazio disponibile per i denti premolari superiori, conseguente all'accorciamento dei mascellari, si associa un oligodontismo bilaterale con assenza di un PM per lato; al lato sinistro è anche da segnalare un anormale addossamento del 2° PM al terzo verso l'interno del palato.

Visto di lato, il cranio anomalo si presenta tozzo, con marcata insellatura nel profilo sagittale superiore, in corrispondenza del muso (Fig. 2).

Il mascellare inferiore, pur presentando anomalie marcate nella dentatura (Fig. 3), è di lunghezza normale, per cui, inserito nel cranio, ne sporge circa 1,4 mm, con conseguente vistoso prognatismo. Le Figg. 4 e 5 mostrano gli stessi crani, con mandibola inserita, visti dall'alto e di lato: è evidente, nell'esemplare anomalo, la corona degli incisivi e canini inferiori che sporge dall'estremità del mascellare superiore.



FIG. 2. - Il cranio anomalo (segnato 264) ed un cranio normale, visti di lato.

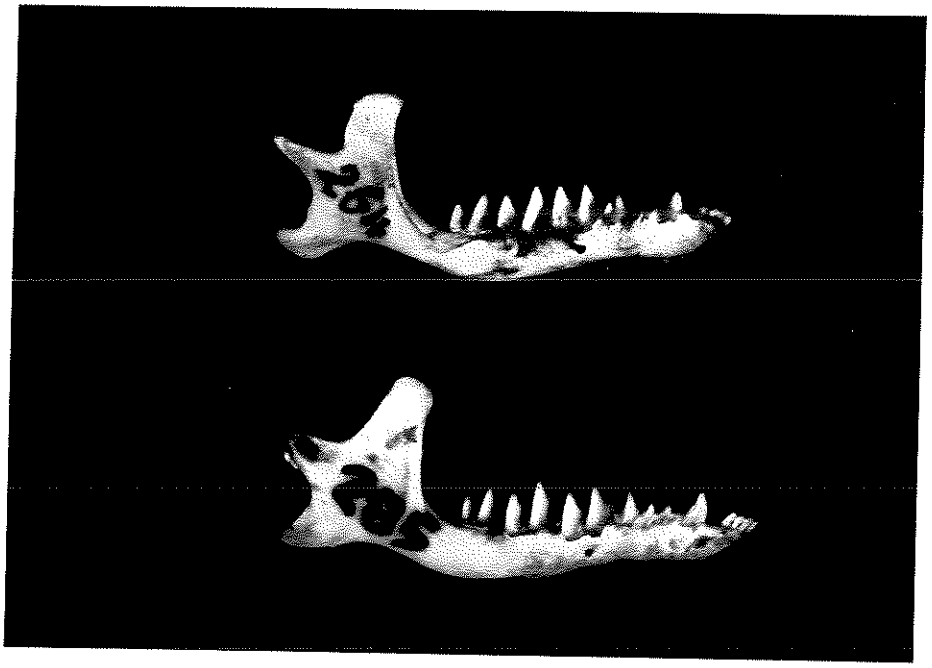


FIG. 3. - Mandibole del cranio anomalo (segnato 264) e di un cranio normale.



FIG. 4. - Il cranio anomalo (segnato 264) ed un cranio normale, visti dall'alto, con mandibole inserite.

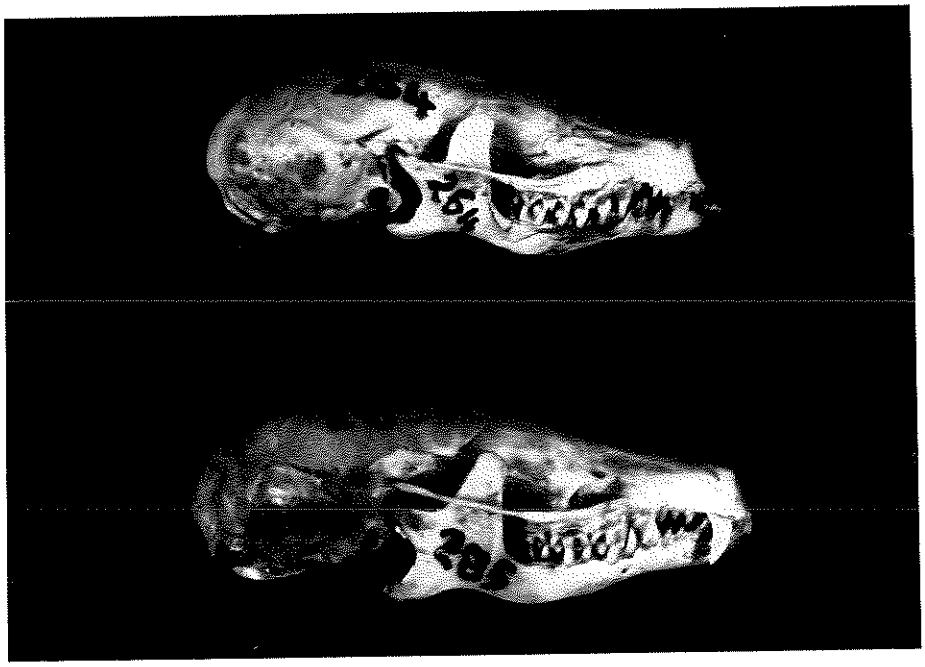


FIG. 5. - Il cranio anomalo (segnato 264) ed un cranio normale, visti di lato, con mandibole inserite.

La dentatura inferiore è anormale al lato destro (Fig. 3): la cuspide del 4° PM, normalmente piccola ed inclinata all'indietro verso il 1° M, risulta più sviluppata e diretta verso l'esterno dell'arcata dentale, mentre il 2° e 3° PM sono fortemente addossati l'uno all'altro, con il 3° impiantato medialmente.

La tabella seguente riporta misure ed indici cranici dell'esemplare anomalo, confrontati con i valori normali della forma di appartenenza, e cioè *T. romana brachycrania* CAPOLONGO & PANASCÌ, 1975:

	a	b	c
CB	3,24	3,55	3,43 - 3,70
AC	1,70	1,75	1,66 - 1,84
HC	1,03	1,03	0,95 - 1,11
IO	0,76	0,80	0,76 - 0,86
DS	1,25	1,43	1,39 - 1,49
MD	2,35	2,44	2,32 - 2,55
LM	3,35	3,62	3,51 - 3,76
AN	0,47	0,51	0,48 - 0,55
AP	1,02	1,02	0,99 - 1,06
LP	1,44	1,64	1,59 - 1,70
I1	31,5	28,8	27,7 - 29,7
I2	46,0	50,2	47,5 - 52,9
I3	60,6	59,9	56,2 - 63,5
I4	31,8	29,1	27,7 - 31,5
I5	89,6	104,4	96,0 - 112,8
I6	72,8	68,7	67,3 - 70,0

a: esemplare anomalo
b: medie *Talpa r. brachycrania*
c: variabilità *Talpa r. brachycrania*

Tra le misure risultano anomale: CB, DS, LM, AN, ed LP; gli indici lo sono tutti, tranne 13.

Si avanza l'ipotesi che le alterazioni osservate siano la conseguenza di un processo di osteogenesi imperfetta o di rachitismo.

BIBLIOGRAFIA

CAPOLONGO D., PANASCÌ R., *Le talpe dell'Italia centro-meridionale*. Rend. Acc. Sc. Fis. Matem. Napoli, Ser. 4, XLII, pp. 104-138 (1975).

Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche. Nota I^a. Scorie con rapporto CaO/SiO_2 fisso (*)

Nota di GIUSEPPE MASCOLO, GERARDO BISACCIA e VITTORIO SABATELLI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza dell'1 marzo 1975)

RIASSUNTO. — Gli Autori danno conto dei risultati ottenuti nel corso di una ricerca rivolta alla valutazione dell'influenza di tenori variabili di MgO (fino al 20 %) in scorie sintetiche a rapporto CaO/SiO_2 costante e contenenti percentuali di Al_2O_3 pari al 10 % circa, sulle resistenze chimiche e meccaniche dei relativi cementi.

Le resistenze meccaniche a compressione, rilevate su provini normalizzati, hanno dimostrato l'influenza positiva esercitata dall'ossido di magnesio fino a valori intorno al 10 %.

Circa le prove di resistenze alle acque dolci e solfatiche, dopo sei mesi di stagionatura nessun provino esaminato denunzia deformazioni o fratture.

Si sono altresì eseguite indagini complementari sull'attitudine alla devetrificazione delle scorie sintetiche, correlando le resistenze meccaniche dei provini, con le aree sottese degli effetti di cristallizzazione delle scorie. Si è posto in luce che i provini con migliori prestazioni meccaniche corrispondevano a leganti confezionati con scorie che presentavano valori più alti dell'energia di cristallizzazione.

SUMMARY. — The influence of MgO content on the compressive strength and chemical resistance of slag cements obtained by mixing Portland clinkers with synthetic slags containing 10 % Al_2O_3, variable amounts of MgO (up to 20 %) and with CaO/SiO_2 = 1,4, have been investigated.

The results show that compressive strengths of the cements increase up to 10 % percentages of MgO in the slag while MgO always positively affects the chemical resistance of samples stored for six months in a soft or sulphatic water.

A relationship between devetrification process of the slags and compressive strength of the corresponding slag cements has been at last proposed.

INTRODUZIONE.

È noto che la composizione chimica delle scorie d'alto forno influenza le proprietà fisiche della scoria fusa, in particolare la viscosità [1]. Un elevato contenuto di MgO determina, fra l'altro, una più

* Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

bassa viscosità, che rappresenta un dato vantaggioso nella produzione siderurgica. È d'altra parte ben noto che l'utilizzazione principale delle scorie d'alto forno è rappresentata dall'ottenimento di cementi d'aggiunta. È quindi giustificato il gran numero di ricerche rivolte allo studio dell'influenza dell'MgO contenuto nelle scorie nei riguardi delle loro proprietà idrauliche [2, 3, 4, 5]. I risultati ottenuti sono a volte contrastanti.

Secondo HEYL [6] aumentando la percentuale di MgO dall'8 al 12 %, con rapporto CaO/SiO_2 pari a 1,2 - 1,3, non si riscontra miglioramento del comportamento idraulico.

A. OELSCHLÄGER [7] ha rilevato un miglioramento delle resistenze meccaniche all'aumentare del contenuto di MgO fino al 10 % mantenendo costante il grado di basicità (che, in linea generale, può essere rappresentato dal valore del rapporto CaO/SiO_2). Più basse resistenze meccaniche ha invece riscontrato per valori bassi del grado di basicità: in definitiva il valore del grado di basicità sembra avere una influenza sulle resistenze meccaniche maggiore di quella derivante dall'MgO [8].

Secondo M. CHERON e C. LARDINOIS [9], la resistenza meccanica sarebbe favorevolmente influenzata sia dalla presenza di MgO, che di Al_2O_3; il loro contributo viene stabilito attraverso il valore dell'indice idraulico dai predetti proposto, corrispondente all'espressione:

$$I_h = \frac{CaO + 1{,}4\ MgO + 0{,}56\ Al_2O_3}{SiO_2}$$

Secondo SCHWIETE [5] per ottenere elevate resistenze meccaniche con alti contenuti di MgO è necessario incrementare il valore del rapporto Al_2O_3/SiO_2.

È da sottolineare poi che la eventuale formazione di periclasio porterebbe a conseguenze negative per quanto riguarda la stabilità di volume. MARIANI e SCHIPPA [4] hanno accertato che non si riscontra la formazione di periclasio nelle scorie granulate per contenuti di MgO fino al 20 %.

Le resistenze meccaniche sono altresì favorevolmente influenzate dal contenuto crescente di Al_2O_3 (a parità di basicità), così come è stato messo in evidenza, fra gli altri, da A. SCHILLAK [10], VENUAT [8], H. SOPORA [11].

Sulla base dei risultati riscontrati in letteratura, abbiamo ritenuto opportuno indagare ulteriormente sulle relazioni tra composizione delle scorie e loro comportamento idraulico, sia dal punto di vista delle resistenze meccaniche che delle resistenze chimiche agli ambienti aggressivi. Per uno studio di base si è partiti da vetri sin-

tetici di composizione variabile e prossima a quella delle scorie d'alto forno.

In questa Nota vengono pertanto riportati i risultati ottenuti con una serie di scorie sintetiche, a contenuto crescente di MgO e rapporto molare CaO/SiO_2 pari a 1,4, a contenuto percentuale di Al_2O_3 pressoché costante e pari al 10 %. Tutti i campioni contenevano inoltre l'1 % di Fe_2O_3.

Preparazione dei campioni.

Si sono utilizzati come materiali di partenza: $CaCO_3$; SiO_2; Al_2O_3; $(MgCO_3)_4 \cdot Mg(OH)_2 \cdot 5H_2O$; Fe_2O_3 tutti pure per analisi. Si sono preparate quattro miscele che hanno consentito di realizzare le composizioni (espresse in ossidi) riportate nella tab. I.

Tabella I

Composizione delle scorie sintetiche.

Sigla del campione	Percentuale in peso					Rapporti molari	
	CaO	SiO_2	Al_2O_3	MgO	Fe_2O_3	CaO/SiO_2	Al_2O_3/SiO_2
L_1	50,40	38,60	10,00	—	1,00	1,406	0,153
L_2	47,85	36,60	9,58	5,00	1,00	1,398	0,154
L_3	45,30	34,67	9,07	10,00	1,00	1,403	0,156
L_4	40,21	30,13	9,05	20,00	1,00	1,409	0,176

Le miscele, accuratamente omogeneizzate, sono state sottoposte a trattamento termico a 950°C per sei ore. Il materiale calcinato è stato poi portato a fusione in forno Tamman, in crogiuolo di grafite: la massa fusa è stata raffreddata per brusca immersione in bagno di acqua; il granulato, dopo essiccamento all'aria è stato macinato e successivamente vagliato attraverso una serie di setacci.

Confezionatura dei provini per le prove meccaniche.

Le scorie in studio sono state utilizzate quali aggiunte a clinker di Portland nelle proporzioni utilizzate nella pratica industriale per la confezionatura dei cementi d'alto forno (70 % di scorie e 30 % di clinker).

Si sono utilizzati per ciascun campione, 33,9 g di clinker di Portland [1] e 80 g di scoria, dei quali 40 di granulometria compresa tra 7.500 e 10.000 maglie/cm^2 e 40 di granulometria compresa tra 5.200 e 7.500 maglie/cm^2.

Ciascun campione così ottenuto è stato sottoposto alla prova di resistenza a compressione a 28 giorni, su provini in malta plastica confezionati secondo le Norme vigenti [2] impiegando rapporti ponderali legante: acqua: sabbia normalizzata, pari a 1:0,5:3.

Per ogni campione si sono confezionati tre provini: i risultati delle prove rappresentano il valore medio delle tre determinazioni.

Rilevamento della resistenza chimica in ambienti aggressivi (acque dolci e solfatiche).

Per valutare il comportamento alle acque dolci e solfatiche si sono preparate due serie di cementi d'alto forno: in una prima serie le quattro scorie sintetiche sono state mescolate con lo stesso clinker di Portland adoperato per il rilevamento delle resistenze meccaniche; nella seconda serie le medesime quattro scorie sono state mescolate con clinker di cemento bianco [3] sempre in proporzione del 30 % di clinker e 70 % di scoria; tali miscele, accuratamente omogeneizzate in acetone, sono state trattate con acqua, impiegando un rapporto acqua: solido di 0,4; sono stati preparati sei esemplari per ogni campione. Le paste così ottenute sono state sistemate in contenitori cilindrici di teflon per 48 ore. Tolti dai contenitori, i provini sono stati successivamente suddivisi in tre serie (comprendenti due esemplari ciascuna): un provino della prima serie è stato immerso parzialmente

[1] Le caratteristiche del clinker adoperato sono le seguenti:

— analisi chimica (espressa in ossidi): SiO_2 = 22,92%; Fe_2O_3 = 2,60%; Mn_3O_4 = 0,15%; Al_2O_3 = 5,13%; CaO = 65,94 %; MgO = 1,40 %; SO_3 = 0,85 %

— Perdita al fuoco = 0,16 %; superficie specifica = 3.800 cm^2/g (Blaine).

— Analisi mineralogica (usando le abbreviazioni: C = CaO; S = SiO_2; A = Al_2O_3; M = MgO; F = Fe_2O_3): C_3S = 52,30 %; C_2S = 26,27 %; C_3A = 8,93 %; C_4AF = 8,39 %; CaO libera = 0,26 %.

[2] Non essendo stata effettuata la prova di resistenza a flessione si sono adoperati provini cubici confezionati secondo le norme « ISO Recomendation R 679 » (Method of Mechanical testing of cement resistance to compression and flexion of plastic mortar: March 1968).

[3] Le caratteristiche del clinker bianco adoperato sono le seguenti:

— composizione chimica (espressa in ossidi): SiO_2 = 24,64 %; Fe_2O_3 = 0,39 %; Al_2O_3 = 4,58 %; CaO = 67,84 %; MgO = 0,50 %.

— Perdita al fuoco: 1,81 %.

— Superficie specifica = 3.700 cm^2/g (Blaine).

— Analisi mineralogica; C_3S = 54,01 %; C_2S = 29,91 %; C_3A = 11,48 %; C_4AF = 1,18 %; CaO libera = 0,87 %.

in acqua distillata, l'altro in acqua solfatica ($MgSO_4$ al 5 %); due provini della seconda serie sono stati posti per 24 ore in autoclave in ambiente saturo di vapore d'acqua a T = 175°C e P = 10 Atm.: al termine di tale trattamento sono stati posti in acqua distillata e solfatica, rispettivamente; due provini della terza serie sono stati stagionati per 28 giorni in ambiente saturo di vapor d'acqua a 25°C e successivamente posti in acqua distillata e solfatica con le stesse modalità di cui sopra. L'acqua distillata e quella solfatica sono state rinnovate mensilmente.

Rilevamento del comportamento alla devetrificazione dei campioni di scoria.

Le scorie in esame sono state sottoposte ad analisi termica differenziale fino a 1090°C, in un'apparecchiatura Dupont mod. 900, utilizzando mg 40 di ciascun campione di granulometria compresa tra 10.000 e 15.000 maglie/cm^2; la velocità di salita della temperatura è stata di 20°C al minuto.

Nota la temperatura di cristallizzazione, si sono effettuati dei trattamenti termici delle polveri tal quali, in corrispondenza delle temperature di cristallizzazione. L'identificazione delle fasi cristalline formate è stata eseguita mediante indagine roentgenografica.

Discussione dei risultati.

a) *Prove meccaniche.* Nel grafico in fig. 1 sono riportati i valori delle resistenze meccaniche in funzione del contenuto di MgO nella scoria. Risalta nettamente che i valori delle resistenze meccaniche delle diverse scorie sono funzione del contenuto di MgO, con un valore massimo di $\simeq$ 420 Kg/cm^2 in corrispondenza di un contenuto percentuale di MgO pari al 10 %. Il valore più basso delle resistenze meccaniche (250 Kg/cm^2) si ha in corrispondenza della scoria priva di MgO. Tale risultato ben si accorda con quello rilevato da Oelschläger [7].

b) *Resistenza chimica.* Le prove di resistenza chimica in acqua dolce e solfatica dopo sei mesi di contatto, hanno posto in luce che i provini esaminati non hanno subito, in alcun caso, il benché minimo segno di rigonfiamento né di frattura, sia nel caso di paste confezionate con clinker a basso contenuto di C_3A, che in quelle con alto tenore di C_3A: ciò è da mettere in relazione con la presenza determi-

nante delle scorie impiegate, indipendentemente dalla loro composizione. Per quanto riguarda quest'ultimo fattore, notevole appare la resistenza chimica alle acque aggressive, dei provini confezionati con scorie ad elevato tenore di MgO (20 %).

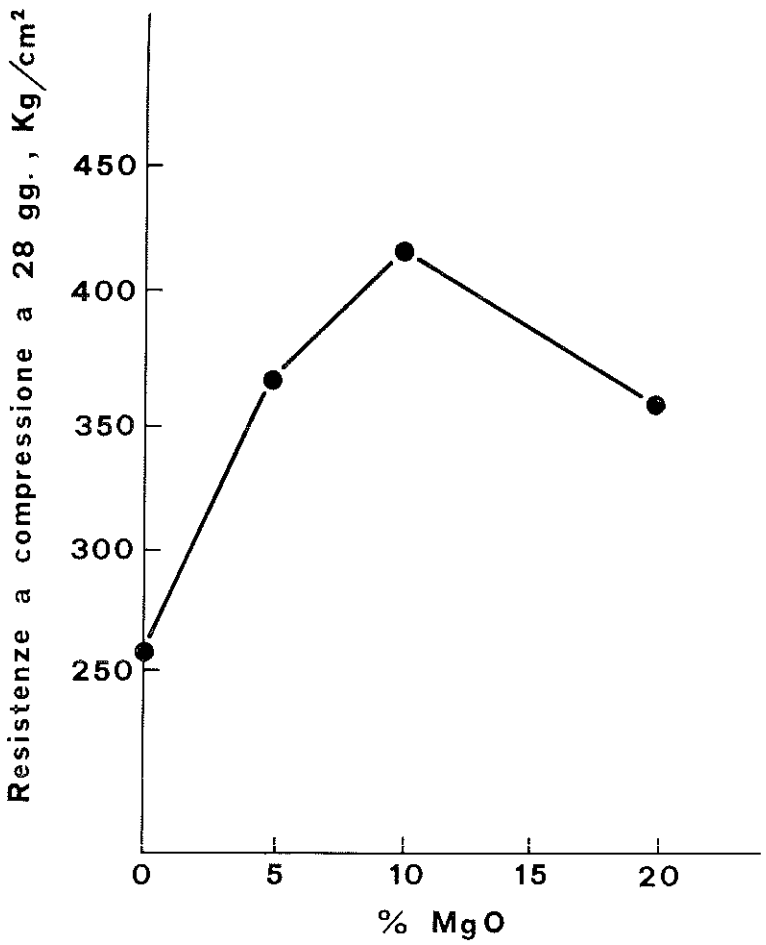


FIG. 1. - Resistenze meccaniche dei cementi di scoria in funzione del contenuto di ossido di magnesio nelle scorie.

c) *Comportamento alla devetrificazione.* Allo scopo di individuare eventuali relazioni fra comportamento idraulico delle scorie sintetiche e loro attitudine alla devetrificazione, si sono rilevate, secondo le modalità già descritte, le temperature di cristallizzazione, la natura delle fasi cristalline e le aree relative agli effetti termici.

Tale indagine è di particolare interesse anche per il fatto che tentativi precedenti [12] non hanno dato luogo a risultati confortanti.

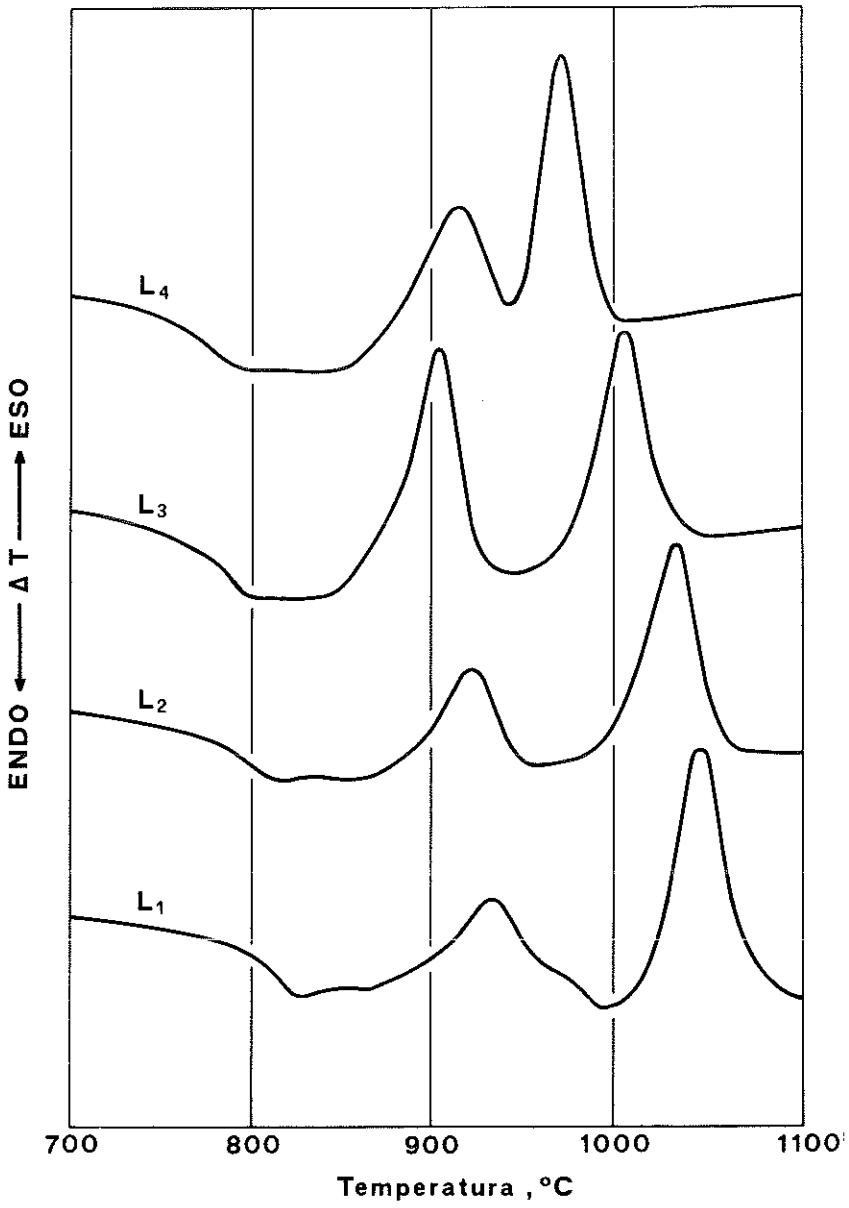


FIG. 2. - Curve termodifferenziali relative alle scorie sintetiche di cui alla tabella 1.

In fig. 2 sono riportate le curve termodifferenziali rilevate sui quattro campioni di scoria: si nota in tutti i casi la presenza di due

effetti esotermici, preceduti da un lieve effetto endotermico, dovuto alla transizione vetrosa. L'esame delle curve termodifferenziali permette di rilevare che: 1) l'area sottesa dall'effetto esotermico a più

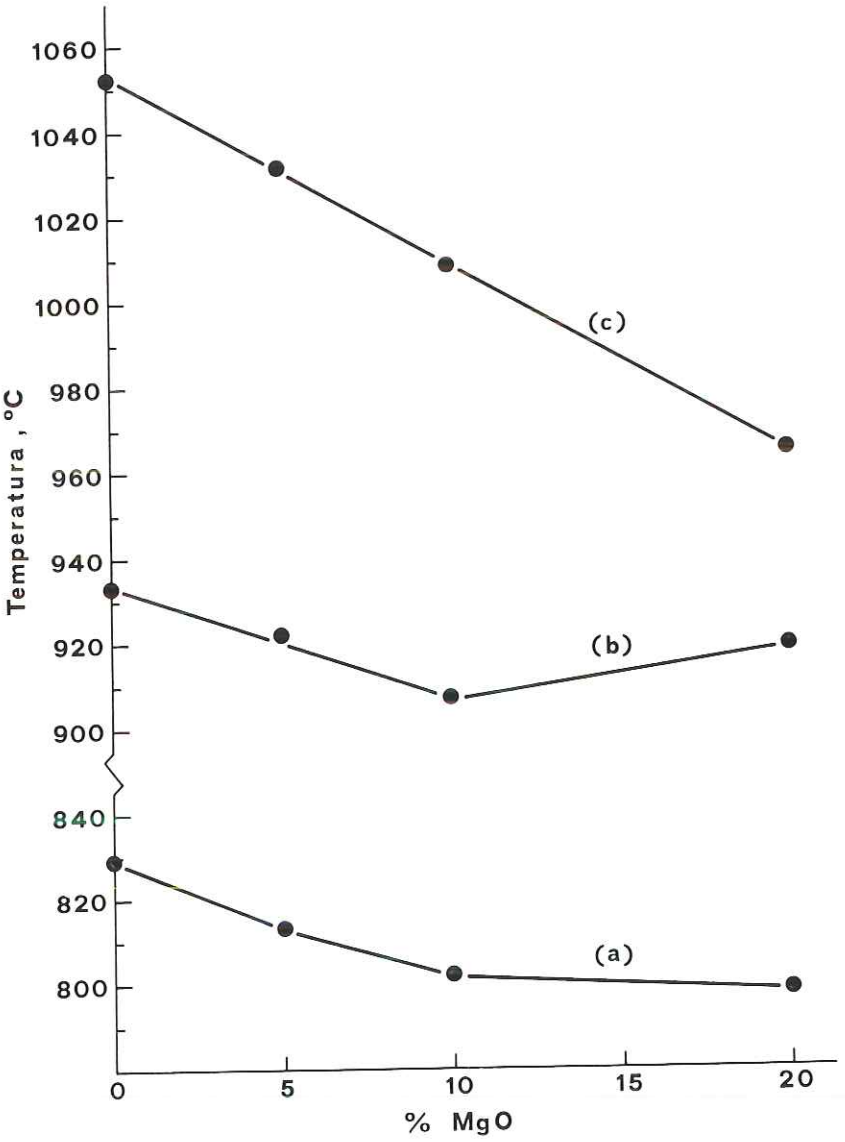


FIG. 3. - Temperature degli effetti termici rilevati via DTA in funzione del contenuto MgO nelle scorie:

curva a) = transizione vetrosa;
curva b) = cristallizzazione a bassa temperatura;
curva c) = cristallizzazione ad alta temperatura.

bassa temperatura è funzione del contenuto di MgO della scoria e, in particolare, presenta un valore massimo per il campione con tenore di MgO pari al 10 %, cui corrisponde anche il miglior comportamento idraulico. 2) Le aree sottese dall'effetto esotermico a più alta temperatura presentano valori praticamente costanti. 3) Le temperature relative ai tre effetti termici, riportate nel grafico della fig. 3, non sono costanti: le temperature corrispondenti alla transizione vetrosa subiscono in un primo tempo una diminuzione al crescere del tenore di MgO (fino al 10 %), per poi presentare valori pressocché costanti, in accordo con i dati della letteratura [13]; gli effetti esotermici a più bassa temperatura sono anch'essi funzione del contenuto di MgO, presentando un valore minimo per il campione con il 10 % di MgO. Per quanto attiene all'effetto esotermico a più alta temperatura, esso subisce un continuo spostamento verso temperature più basse al crescere del contenuto di MgO, in accordo con quanto rilevato da NEGRO [14].

d) *Rilevamento delle fasi cristalline di neoformazione.* Per il rilevamento delle fasi cristalline relative alla devetrificazione delle scorie sintetiche, si è effettuato un processo di ricottura alla temperatura di 915°C e 1030°C per quattro ore, seguita da tempra in aria. L'identificazione delle fasi di neoformazione è stata effettuata mediante analisi roentgenografica in camera Guinier De Wolff, impiegando la radiazione Cuk α (Tab. II).

TABELLA II

Fasi cristalline rilevate a seguito di trattamento di ricottura.

Campione	Temperatura di ricottura (°C)	C_2AS	C_3S_2	β–CS	$(C_2S)_{5,6}\cdot(C_3MS_2)_{4,4}$	C_3MS_2	$C_2MS_2\cdot C_2AS$
L_1	915	+	+	+	–	–	–
	1030	++	++	+	–	–	–
L_2	915	–	–	–	++	–	+
	1030	–	+	–	–	–	+++
L_3	915	–	–	–	+	++	+
	1030	–	–	–	–	–	+++
L_4	915	–	–	–	–	++	++
	1030	–	–	–	–	+	+++

+++ = presente in quantità notevole;
++ = presente in quantità media;
+ = presente in tracce;
– = assente.

Le fasi cristalline formate in seguito al trattamento a 915°C contengono MgO: di particolare interesse appare la individuazione, tra queste di un silicato di magnesio e calcio, mai identificato tra le fasi riconosciute a seguito del trattamento termico di scorie sintetiche, corrispondente alla formula $(2CaO \cdot SiO_2)_{5,6} \cdot (3CaO \cdot MgO \cdot 2SiO_2)_{4,4}$ [15]. Tale fase d'altra parte, scompare col trattamento termico a più alta temperatura, evolvendo prevalentemente a melilite.

Conclusioni.

L'insieme delle risultanze sperimentali pone in luce che il magnesio presente nelle scorie sintetiche in percentuali fino al 10 % di MgO influenza in modo positivo i valori delle resistenze meccaniche a compressione rilevabili su malte confezionate con clinker di Portland e scoria.

La resistenza chimica, dopo sei mesi di stagionatura in acque dolci o solfatiche è eccellente, anche nel caso di paste confezionate a partire da scorie ricche di MgO (20 %), così come di paste ottenute impiegando clinker ad alto tenore di C_3A.

Si è altresì notata una interessante relazione tra comportamento idraulico ed attitudine alla devetrificazione delle scorie esaminate: infatti la scoria che presenta la maggiore attitudine alla devetrificazione (bassa temperatura di cristallizzazione e maggiore energia di cristallizzazione) è quella che saggiata su malta mostra la più alta resistenza meccanica a compressione. Nel corso della indagine sulla devetrificazione e sulla natura delle fasi cristalline formate nel corso del trattamento termico, intesa a correlare tale comportamento con quello idraulico, si è posta in luce la presenza di un composto di formula $(2CaO \cdot SiO_2)_{5,6} \cdot (3CaO \cdot MgO \cdot 2SiO_2)_{4,4}$ mai individuato prima d'ora nel corso di indagini sulla devetrificazione di scorie. Tale fase che si forma nel corso della cristallizzazione a bassa temperatura ($\leq$ 900°C), scompare per ulteriore riscaldamento, evolvendo a melilite in un caso ed a melilite e C_3S_2 in un altro caso.

Napoli, Istituto di Chimica Applicata della Facoltà d'Ingegneria della Università degli Studi di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] Schröder F., *Principal paper blast-furnace slags and slag cements*. Proc. 5th Intern. Symp. Chemistry of Cement, Tokyo 1968.

[2] Stutterheim N., *Properties and uses of high magnesia portland slag cement concretes*. Journ. Amer. Concr. Inst. 1027 (1960).

[3] GUTT W., KINNIBURG W. and NEWMAN A. J., *Blast-furnace slag as aggregate for concrete.* Mag. of Concr. Research 19, 59 (1967).

[4] MARIANI E., SCHPPA G., *Alcune considerazioni sui leganti idraulici ad alto tenore di magnesio.* Ind. Ital. Cemento 34, 1021 (1964).

[5] SCHWIETE H. E., KÜHLE K. H., *Uber die Möglichkeiten der Verwendung Hochofenschlacken mit hohen MgO-gehalten für die Zementerzeugung. Vortrag beim* VDEh « Ausschuss für Verwertung der Hochofenschlacken » 24-10-1967.

[6] HEYL D., *Einfluss des MgO-Gehaltes der Schlacke auf die Betriebsdaten des Hochofens, insbesondere auf die Entschwefelung.* Diplom. Arbeit, Bergakademie Clausthal, TH (1959).

[7] OELSCHLÄGER, *Hochofenslacke mit honem Magnesium-oxydgehalt für die Herstellung von Hüttenzementen.* Silikattechn. 15, 288 (1964).

[8] VENUAT M., *Recherches sur quelques laitiers particuliers.* Rev. Mat. Constr. 602, 494 (1965).

[9] CHERON M., LARDINOIS C., *The role of magnesia and alumina in the hydraulic properties of granulated blast furnace slags.* Proc. 5th Intern. Symp. Chemistry of Cement. Tokyo 1968.

[10] SCHILLAK A., *Die Verbesserung der hydraulischen Eigenschaften von Hochofenschlacken durck Aktivierung der Schlacken und Ausnutzung ihrer Abfallwärme.* Bergakademie 11, 594 (1959).

[11] SOPORA M., *Die Zementschlacken der DDR.* Baustoffind 7, 4, 114 (1964).

[12] LEA F. M., *The Chemistry of cement and concrete,* Edward Arnold (Publischers) Ltd 1970, p. 460.

[13] BURT A., MAROTTA A., GIORDANO ORSINI P., *Transizione vetrosa e composizione in vetri melilitici,* Ceramurgia 3, 139 (1973).

[14] NEGRO A., BACHIORRINI *A., Einfluss des Magnesiumoxyds auf die Entglasung synthetischer Hochofenschlacken,* Zement-Kalk-Gips. 9, 148 (1973).

[15] X-ray powder data file A.S.T.M., card. n. 13-498.

The influence of geometrical imperfections in rods and of the changes in the geometry upon the behaviour of elasto-plastic trusses *

Nota di A. BADALÀ ** e G. OLIVETO **
presentata dal socio corrispondente ELIO GIANGRECO

(Adunanza dell'1 marzo 1975)

RIASSUNTO. — Vengono studiati per via incrementale alcuni modelli di strutture reticolari elasto-plastiche evidenziandone il comportamento al variare della snellezza e delle imperfezioni geometriche delle singole aste. Viene inoltre valutata l'influenza sul carico di collasso della variazione di geometria durante il processo di carico.

SUMMARY. — We studied by incremental way some models of elasto-plastic trusses emphasizing their behaviour with respect to changes in some geometrical characteristics, such as slenderness ratio and geometrical imperfections, in single rods.

The influence, on the collapse load, of the changes in the geometry of the structures during the load process has been also taken into account.

1. - INTRODUCTION.

The calculation of hyperstatic reticular structures proves to be very difficult, even in the elastic range, when some compressed members lose their rectilinear configuration either because their buckling load is exceeded or because of some small initial imperfection in their axial line (geometrical imperfection).

The problem becomes more and more involved in the plastic range because in it the new configurations are unstable and snapping can take place under certain circumstances.

In 1972 a method was proposed which, under certain simplifying hypotheses, allows to overcome the difficulties connected with the non linearity of fundamental equations as well as those connected with snapping [1].

* Supported by the Italian National Research Council (C.N.R.).
** Civil Engineering Department - Catania University - Italy.

In the same paper it is shown how to take into account the changes in the geometry of the structure under load and the fundamental equations are written in the deformed state too.

Subsequently the same method has been applied to structures whose members could present initial imperfections in their axial line [2].

The main object of the present work is to give, through the numerical analysis of models, some useful information upon the behaviour up to failure of hyperstatic reticular structures.

Such behaviour is investigated with reference to the changes in some geometrical characteristics of single members such as slenderness ratio and initial imperfection ratio.

The influence, on the collapse load, of the changes in the geometry of the structure during the load process is also evaluated.

All numerical evaluations are carried out by the method previously mentioned; that is, essentially, an incremental one.

2. - FUNDAMENTAL EQUATIONS.

The equations which govern the problem are:

a) equations of equilibrium;

b) elasto-plastic equations.

Equilibrium equations in the incremental form can be written as follows:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_x)_{ij}\,\dot{N}_{ij} + (\alpha_x)^{\cdot}_{ij}\,N_{ij} + \dot{X}_i = 0 \\
&(\alpha_y)_{ij}\,\dot{N}_{ij} + (\alpha_y)^{\cdot}_{ij}\,N_{ij} + \dot{Y}_i = 0 \qquad (1) \\
&(\alpha_z)_{ij}\,\dot{N}_{ij} + (\alpha_z)^{\cdot}_{ij}\,N_{ij} + \dot{Z}_i = 0
\end{aligned}
$$

where: N_{ij} is the axial force in the bar whose extremities are knots i and j;

$$(\alpha_x)_{ij},\ (\alpha_y)_{ij},\ (\alpha_z)_{ij}$$

are direction cosines of the same bar;

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i$$

are the components, along the axis of the reference frame, of the external force applied in the junction i; and the dotted terms indicate increments of such quantities.

Equilibrium equations in the initial configuration can be obtained by (1) disregarding the terms containing direction cosine increments.

Elasto-plastic equations, which are mapped in Fig. 1, are obtained under the following hypothesis:

I - the bending moment-curvature relationship is of two linear type;
II - the bending moment-normal force yelding domain is linear;
III - deformations are localized in the middle section of the bars;
IV - equilibrium bifurcation takes place according to linear theory of stability.

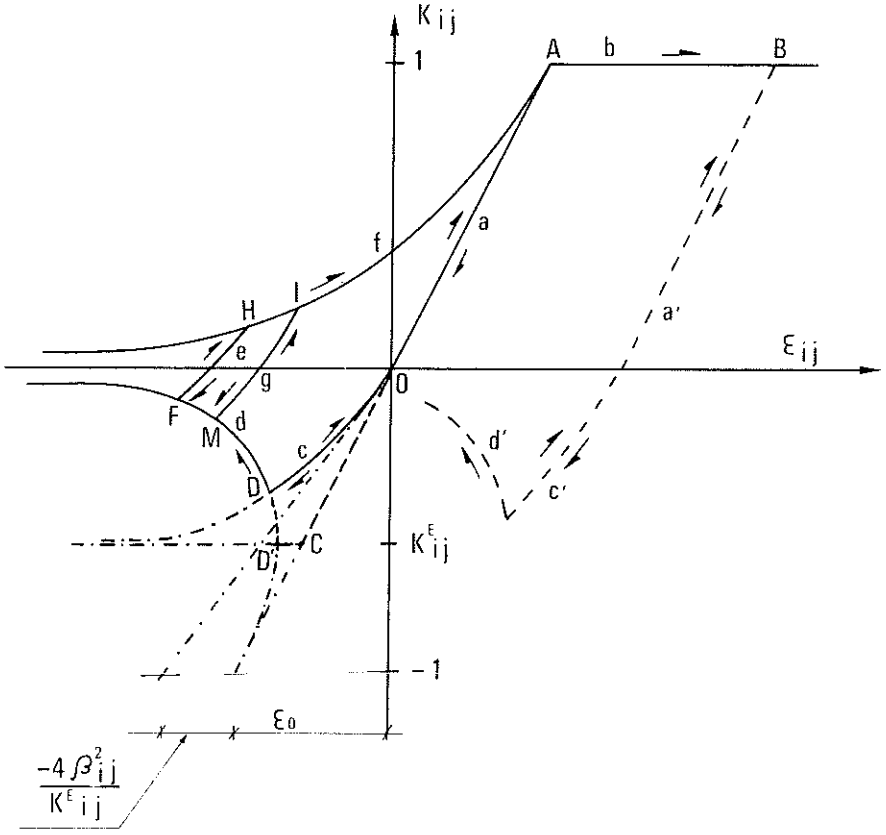


FIG. 1.

In Fig. 1 the adimensionalized axial force $K_{ij} = N_{ij}/N_{ij}^{\circ}$ is reported against the adimensionalized elongation $\varepsilon_{ij} = \Delta l_{ij}/l_{ij}$, under all kinds of behaviour condition.

More precisely straight line « a » corresponds to the elastic behaviour under traction, straight line « b » corresponds to plastic behaviour under traction and the curve « c », which degenerates into

two straight line $\overline{OC}$ and $\overline{CD'}$ when the bars are perfectly straight, corresponds to elastic behaviour under compression. The curves « d » and « f » represent two different conditions of plastic behaviour: the curve « d » defines the plastic behaviour of a bar under compression whereas the curve « f » represents the plastic behaviour of a bar under traction which previously has been stressed beyond the elastic limit by a compressive force. The curves « e » and « g », which define conditions of elastic recovery, enable to go from the curve « d » to the curve « f » and viceversa. The straight line « a' » and the curve « c' » and « d'» represent constitutive equations for bars which show an elastic recovery after having been stressed beyond the elastic limit by a tractive force such that the total amount of plastic deformation is measured by the segment of line A - B.

Analytical expressions for constitutive equations mapped in Fig. 1 are given in the quoted papers [1] and [2].

3. - Description of the investigated structures.

Numerical evaluations have been carried out with reference to the structure of Fig. 2, considering various load processes and varying,

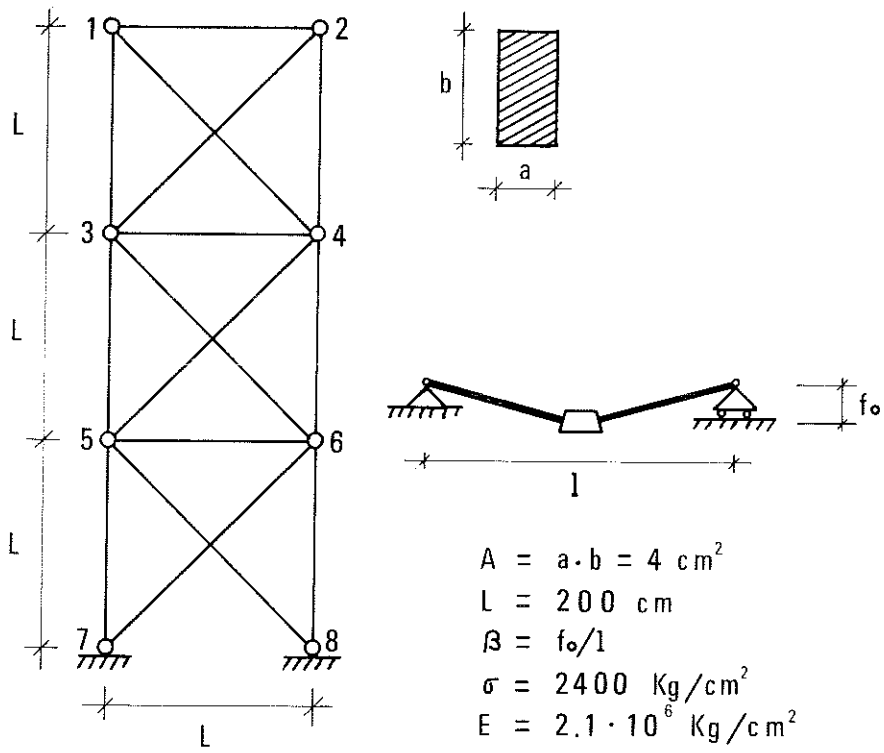


Fig. 2.

within very large bounds, the geometrical characteristics of single members.

We have chosen a structure of this type because of its very large use in engineering practice and because we thought it would be very suitable for showing, in the best way, the influence upon the yield load of the variations of the geometry of the structure during the load process.

In view of this second point, the behaviour of the structure has been investigated under the action of vertical loads, horizontal loads and under the action of both of them simultaneously.

Material properties were chosen as follows: Young's modulus $E = 2100000$ Kg/cm^2, Yield Stress $\sigma_0 = 2400$ Kg/cm^2, which correspond to those of a material like mild steel.

Under each of the load conditions some of the geometrical characteristics of single members have been assumed constant, some others varying but with the same value for all members and some more randomly changing from member to member. More precisely the cross section area has been assumed constant with the same value for all members, the slenderness ratio varying in a way such that both ranges of slender and dumpy bars were covered, the initial imperfection firstly varying in the same way for all members and later randomly changing from bar to bar.

4. - Behaviour of the model under vertical loads.

The study of the structure model under the action of vertical loads applied to the knots (1) and (2) supplied useful information about the influence upon the collapse load of the slenderness ratio and of the initial imperfection of single members as well as that of the variation in the geometry of the structure during the load process. The results of such investigation are plotted in Figs. 3 and 4. In Fig. 3 the collapse load is plotted versus the slenderness ratio for various values of the initial imperfection « β » in the case where the variations in the geometry are disregarded as well as when they are taken into account.

In Fig. 4 the collapse load is plotted against the common logarithm of the initial imperfection for various values of the slenderness ratio of single members both when the variations in the geometry are disregarded or not.

After a look at Fig. 3 we can deduce the following:

1) The collapse load does not depend on the slenderness ratio provided that « λ » remains less than λ_{lim}, and if all members are

perfectly straight ($\beta = 0$) and of course if the cross sectional area remains constant.

2) If all members are perfectly straight ($\beta = 0$) and $\lambda \geq \lambda_{lim}$ the collapse load quickly decreases as λ increases.

3) When all members are perfectly straight the variation in the geometry is effective only for $\lambda \leq \lambda_{lim}$.

4) Initial imperfection in all members ($\beta \neq 0$) produce a decrease in the collapse load with respect to the same structure with all members perfectly straight.

5) When all members present initial imperfections ($\beta \neq 0$), the collapse load always decreases as λ increases, although less quickly for $\lambda < \lambda_{lim}$.

6) The difference between the yield loads corresponding to the structure with perfect bars ($\beta = 0$) and the ones corresponding to the structure with imperfect bars ($\beta \neq 0$) increases with the growth of λ for $\lambda < \lambda_{lim}$; whereas it decreases for $\lambda > \lambda_{lim}$.

7) If all members present initial imperfections ($\beta \neq 0$) the variation of geometry is felt, through a decrease in the collapse load (in the order of 1 %), even for $\lambda > \lambda_{lim}$.

8) For very slender members ($\lambda = 120 \div 200$) and for very small initial imperfections ($\beta = 10^{-4} \div 10^{-5}$) the collapse load may come out to be greater than that corresponding to the same structure with all members perfectly straight, if the variation in the geometry is disregarded, whereas it is always smaller when the variation is taken into account.

The Figure 4 shows what follows:

9) If the variation in the geometry is taken into account, the collapse load stretches from the lower part and increases monotonously to the value corresponding to the structures with all bars perfectly straight as the initial imperfection ratio decreases.

10) If the variation in the geometry is disregarded, the collapse load, as the initial imperfection ratio decreases, can first increase attaining the maximum for a value of β of about $10^{-4} \div 10^{-5}$ and then decrease stretching from the top to the value corresponding to the structure with all bars perfectly straight.

11) The influence on the collapse load of geometrical imperfections increases as the slenderness ratio of bars decreases.

The behaviour pointed out in the previous items 8 and 10, as already noticed in [2], is related to a singularity in the elasto-plastic constitutive law. It can occur when certain values of the slenderness and initial imperfection are assumed by the bars which are passing from the elastic to the plastic range.

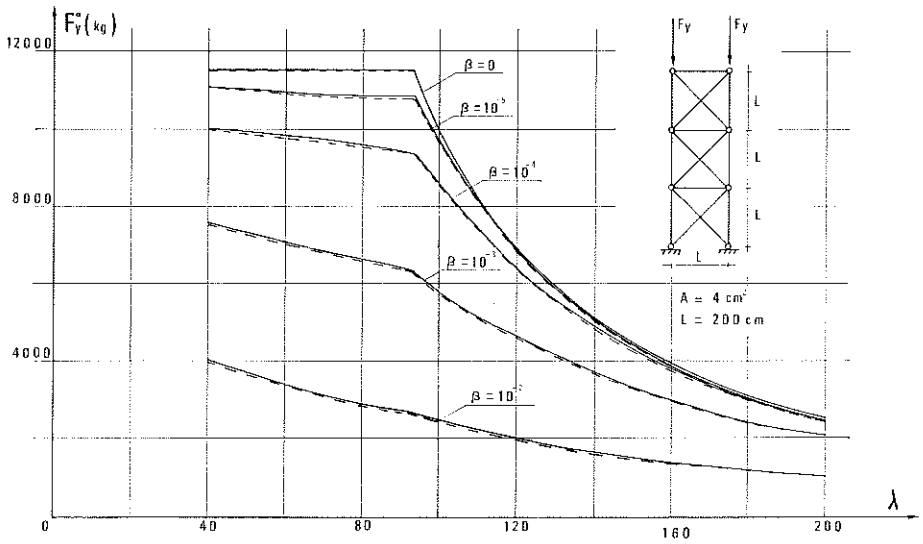


FIG. 3. - (**) Collapse load F_y° versus the slenderness ratio of single members λ for various values of the initial imperfection ratio β.

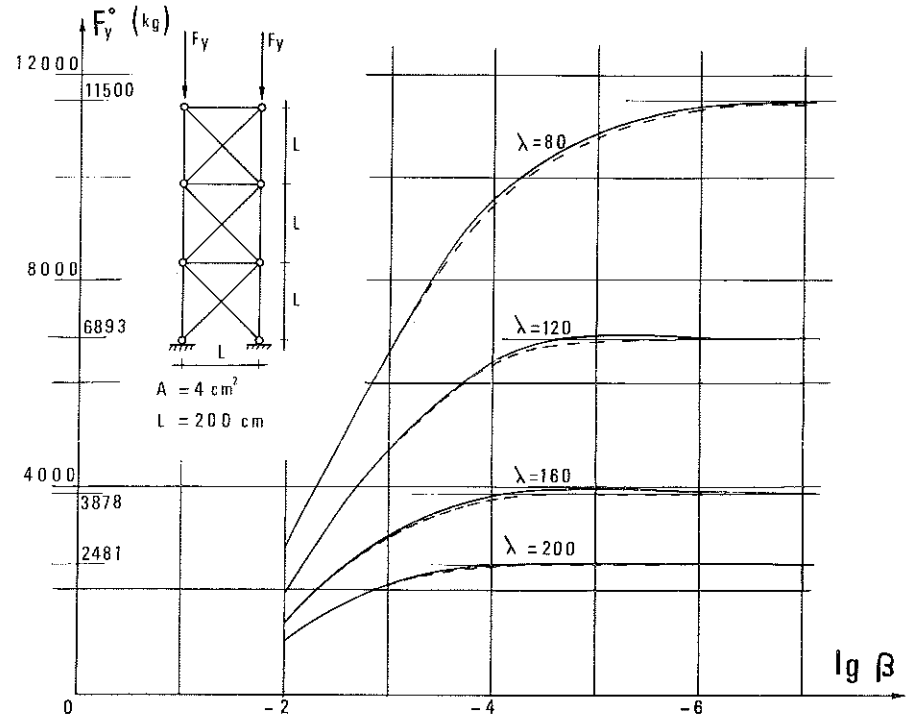


FIG. 4. - (**) Collapse load versus log β for various values of the slenderness ratio of single bars λ.

(**) Continuous lines refer to the case in which the variation in the geometry is disregarded whereas the dotted ones refer to that in which it is taken into account.

More precisely it corresponds to the possibility that the curve « c » of Fig. 1 intersects the curve « d » of plastic equilibrium at a poînt of the neighbourhood in which curve « d » has a negative tangent of a very large modulus.

In these circumstances partial collapse mechanisms could arise which involve only the knots connected by the bar in the situation described.

Imperfections of a given intensity play the rôle of moving the point of intersection mentioned above to the outside of the critical area which gives rise to partial mechanisms.

In such a case the increase of the external load may be distributed to all the bars, the equilibrium and the compatibility equations being satisfied. The external load may be further increased up to the point where conditions are created for the formation of a partial or total mechanism.

It is obvious that in this latter case the collapse load may prove to be much larger than the one corresponding to the situation previously described and that an initial imperfection opportunely weighed enables to pass from the first case to the second one.

If the variations in the geometry of the structure are taken into account, the equilibrium equations are modified, whereas the constitutive equations remain unchanged.

From all this it follows that the collapse mechanism may be generated from conditions which are different from those which would have been present when disregarding the variations in the geometry, but nobody can exclude that, for certain values of the slenderness and initial imperfection ratios of single members, the collapse load could prove to be greater than the one corresponding to the structure with all bars perfectly straight.

5. - Behaviour of the structure model under horizontal loads.

The study of the structure model under the action of a horizontal load applied to the knot (1) has given the results plotted in the diagrams of Fig. 5 and Fig. 6.

These diagrams, with the exception of a few details, look quite similar to those obtained when vertical loads were applied.

We explicitly notice that the influence of the variations in the geometry is much less effective than in the case previously examined and that when $\lambda > \lambda_{lim}$ in practice it is reduced to nothing.

Moreover, the collapse load of the structure with imperfectly straight members proves to be always smaller than the one corresponding to the same structure with all bars perfectly straight, no matter if the variation in the geometry is taken into account or not. The

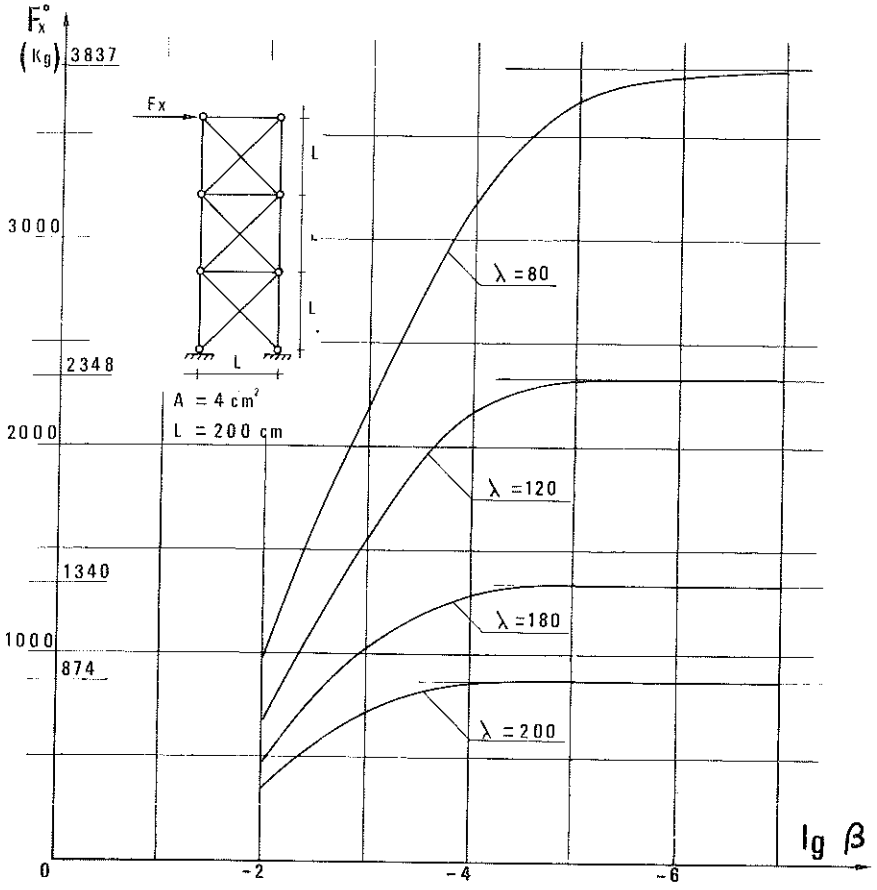


FIG. 5. - (**) Collapse load F_x^2 versus log β for various values of the slenderness ratio of bars λ.

influence of geometrical imperfections, as in the previous case, is much more effective for structures with dumpy members than for those with relatively more slender ones, both in absolute values and in percentage ones.

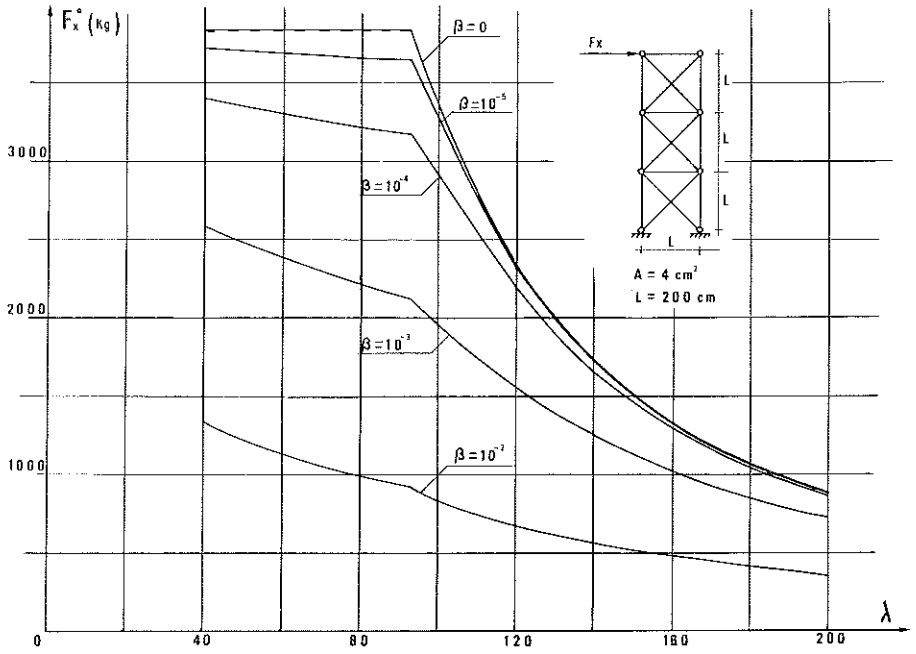


FIG. 6. - (**) Collapse load F_x° versus slenderness ratio on single bars λ for various values of the initial imperfection ratio β.

6. - VERTICAL AND HORIZONTAL LOADS ACTING SIMULTANEOUSLY.

Being convinced that the influence of the variation in the geometry of the structure would have been more effective under vertical and horizontal loads acting simultaneously, we studied the structure of Fig. 2 stressed by two vertical forces F_y applied to knots (1) and (2), and by a horizontal force F_y applied to the knot (1).

More precisely, we have first applied the two vertical forces, which have been increased up to a fixed value, and subsequently we have applied the horizontal force which has been increased up to the collapse achievement.

The couples of values (F_x, F_y) which, applied according to the just described load process, produce the collapse of the structure, are plotted in the diagram of Fig. 7.

In the same figure continuous lines refer to the case when the variation in the geometry is disregarded whereas the dotted ones refer to the case when it is taken into account.

From this figure one can notice that, whatever may be the amount of the initial imperfection ratio of single members (the slenderness

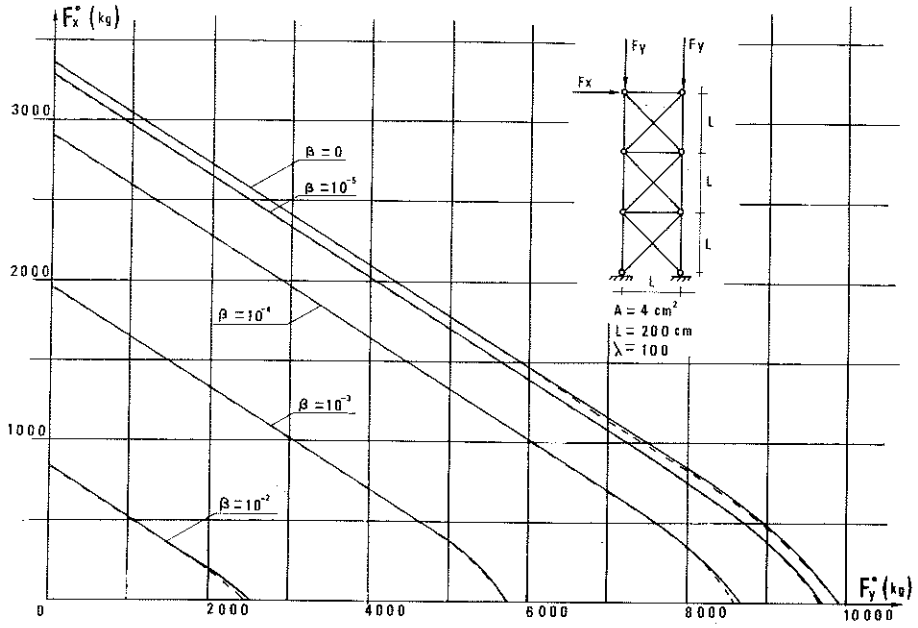


FIG. 7. - (**) Couple of values (F_x, F_y) which determine the collapse of the structure are plotted for various values of the initial imperfection of single bars β.

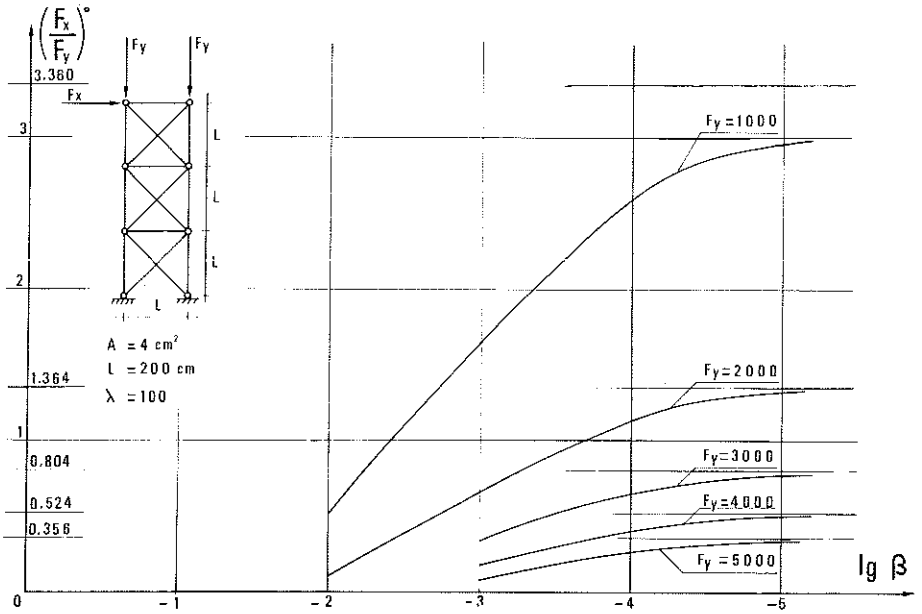


FIG. 8. - (**) The ratio $(F_x/F_y)^o$ is plotted versus log β for various values of vertical forces F_y.

ratio having been considered constant), there exists a linear relationship between the couples of values (F_x, F_y) determining the collapse at least up to a value of the vertical force F_y which is not bigger than $80 \div 90$ % of the force F_y^o which produces the collapse by itself.

When this value is exceeded, the collapse develops for quickly decreasing values of the horizontal force.

The initial imperfection in single bars causes only a translation in the straight lines which represent such a relation in a measure which depends upon the amount of the imperfection ratio itself. The variation in the geometry acts in the sense that it causes a decrease which is always very small and never exceeding the 1%, of the collapse load.

In Fig. 8 the ratio $(F_x/F_y)^o$ between the values of horizontal and vertical forces which produce collapse, is plotted versus the common logarithm of the initial imperfection ratio in single members for various values of vertical forces F_y .

When the initial imperfection ratio in bars decreases, the ratio $(F_x/F_y)^o$ increases as quickly as the value of the vertical forces F_y becomes smaller.

In this respect, from the comparison with the curves of Fig. 6 too, the vertical load proves to have the same influence on the collapse load as the slenderness ratio of single bars.

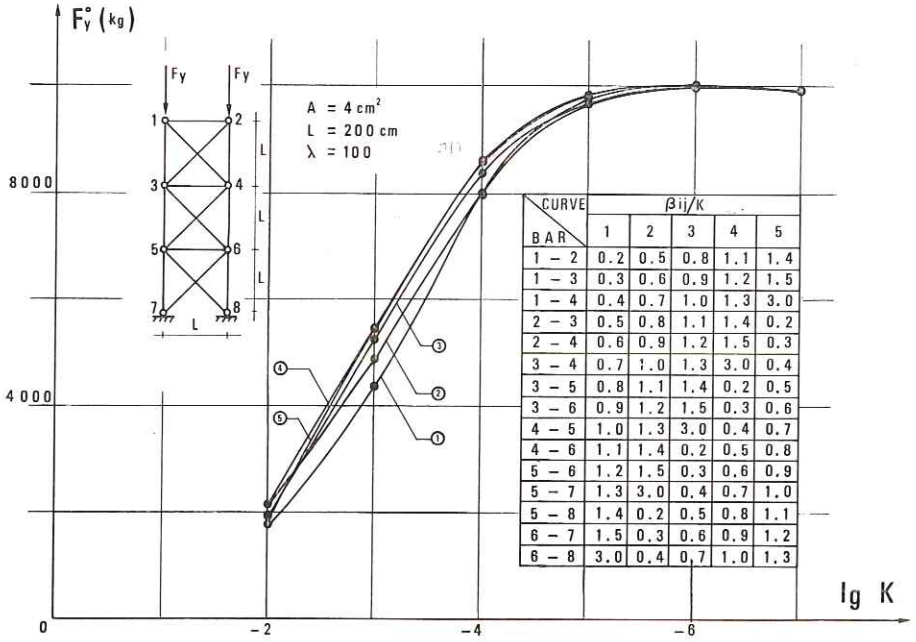
7. - Random distribution of imperfections between the stucture members.

In the last three sections the initial imperfection ratio has been attributed as being of the same amount to all members of the structure. In reality, because of its connections with assembling and production processes and because these latter can be controlled only within the bounds of certain tolerances, it becomes evident that the ratio cannot be known in advance and that its variability is of a random nature.

Even if the shape of the imperfection is considered as being deterministic, as must be done when the assumption is made that all deformations are localized in the middle section of the bars, it cannot be expected to be of the same amplitude for all members of the structure.

In order to get some indication about the scatter of results which can be expected when the imperfection is regarded as a random variable, the imperfection itself has been attributed to each member of the structure as being of different amounts.

The same values of imperfection ratios have been distributed, between the members of the structure, in the 5 different ways represented in the table of Fig. 9 and consequently all distributions are characterized by the same mean K and the same standard deviation 2,567 K. The values of the collapse load, which have been carried out for values of $K = 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-7}$ are plotted against the mean value of the initial imperfection ratios K in the diagram of Fig. 9.



CURVE / BAR	βij/K 1	2	3	4	5
1 – 2	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4
1 – 3	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
1 – 4	0.4	0.7	1.0	1.3	3.0
2 – 3	0.5	0.8	1.1	1.4	0.2
2 – 4	0.6	0.9	1.2	1.5	0.3
3 – 4	0.7	1.0	1.3	3.0	0.4
3 – 5	0.8	1.1	1.4	0.2	0.5
3 – 6	0.9	1.2	1.5	0.3	0.6
4 – 5	1.0	1.3	3.0	0.4	0.7
4 – 6	1.1	1.4	0.2	0.5	0.8
5 – 6	1.2	1.5	0.3	0.6	0.9
5 – 7	1.3	3.0	0.4	0.7	1.0
5 – 8	1.4	0.2	0.5	0.8	1.1
6 – 7	1.5	0.3	0.6	0.9	1.2
6 – 8	3.0	0.4	0.7	1.0	1.3

FIG. 9. - Collapse load F_y^o versus the common logarithm of the mean value K of initial imperfections for different distributions of the imperfections themselves between all bars.

From this diagram it can be seen that the maximum scatter in the results, at least within the bounds of the cases examined, occurs for $K = 10^{-3}$; moreover, for very small values of the mean and standard deviation of imperfections, the scatter is such that it calls for a probabilistic approach to the problem.

8. - CONCLUSIONS.

The results described in the previous sections, although obtained with reference to the structure of Fig. 2, provide indications of a more general validity.

The first of these indications concerns the influence of the variation in the geometry which, in spite of its variations with the load process, proves to be always of a very small amount; it never exceeds errors which are made on the base of the usual hypothesis about load and constraint conditions.

The second one is related to the effect of the initial imperfection which, on the contrary, can never be disregarded and appears to be all the more important as the slenderness ratio of the structure's members decreases.

In the case in which structural members are quite slender, although such effect in absolute terms is less conspicuous, it remains still very large in percentage because of the reduction in the collapse load as the slenderness ratio of the bars increases.

The third and the last of the indications of greater interest still concerns imperfections and is related to their random nature. Because of the scatter in the results obtained by simply distributing in different ways the same imperfections between the members of the structure, it can be expected that each deterministic result may be affected by a great amount of uncertainty and consequently its reliability may be very small.

Therefore a treatment of the problem would be desirable which, on the bases of the statistical properties of imperfections, could provide statistics of the collapse load or, better still, the reliability of the structure itself under an assigned load.

REFERENCES

[1] La Tegola A., *Analisi incrementale di strutture reticolari metalliche in campo plastico con aste in regime post-critico*, Giornale del Genio Civile n. 7-8-9, Roma 1972.

[2] Oliveto G., *Influenza della non perfetta rettilinearità delle aste sul comportamento delle strutture reticolari elasto-plastiche*, Giornale del Genio Civile n. 7-8-9, Roma 1974.

Influenza del TiO_2 sulla struttura e sulle proprietà di un vetro melilitico *

Nota di ALBERTO MAROTTA, ALBERTO PERULLO e ALBERTO BURI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza dell'1 marzo 1975)

RIASSUNTO. — Nell'ambito delle ricerche rivolte allo studio dell'influenza degli agenti nucleanti sulla cristallizzazione di materiali vetrosi di composizione melilitica, sono state formulate alcune ipotesi sulla struttura di vetri di composizione 35,2 % SiO_2; 15,4 % Al_2O_3; 40,7 % CaO; 8,6% MgO con aggiunta di tenori variabili di TiO_2.

Rilevando mediante l'analisi termodifferenziale le temperature di transizione vetrosa, quelle di inizio e fine cristallizzazione e misurando mediante analisi termodilatometrica i coefficienti di dilatazione termica, si è ipotizzato che lo ione Ti^{+4} cambi di coordinazione in corrispondenza del 4 % di TiO_2 incrementando nel vetro a partire dallo stesso valore la separazione di fasi.

ABSTRACT. — Hypothesis on the structure of 35.2 % SiO_2; 15.4 % Al_2O_3; 40.7 % CaO; 8.6 % MgO glasses with different TiO_2 amounts have been formulated as part of a general research concerning the nucleating agents influence on melilitic glass crystallisation.

Starting from 4 % TiO_2, Ti^{+4} ion probably changes coordination increasing phase separation.

This result is deduced by DTA determination of glass transition and starting and end crystallisation temperature and by TMA measures of thermal expansion coefficients.

INTRODUZIONE.

In precedenti pubblicazioni [1, 2, 3, 4, 5, 6] si è dato conto delle ricerche sperimentali rivolte ad approfondire il meccanismo di devetrificazione di un vetro di composizione 35,2 % SiO_2; 15,4 % Al_2O_3; 40,7 % CaO; 8,6 % MgO. Tale composizione, corrispondente a quella di un termine delle meliliti che sono soluzioni solide di akermanite e gehlenite, risulta molto prossima, almeno per i costituenti fondamentali, a quella delle scorie basiche d'alto forno. Sia il vetro descritto

* Lavoro eseguito con il contributo finanziario del C.N.R.

che le scorie di alto forno, sottoposti ad opportuno ciclo di trattamento termico [7] possono essere trasformati in materiale di tipo vetro-ceramico.

L'influenza di aggiunte variabili di TiO_2 a vetri di composizione pari a quella su riportata, sulla composizione delle fasi cristalline che si originano a seguito di trattamento termico nonché sull'energia di attivazione del processo di cristallizzazione, è stata inoltre presa in considerazione [8, 9]. I risultati ottenuti hanno permesso di affermare, tra l'altro, che l'aggiunta di TiO_2, anche in piccole quantità abbassa notevolmente la temperatura di fusione delle miscele vetrificabili, rendendo più agevole la formatura dei vetri da sottoporre al successivo trattamento di cristallizzazione controllata.

Si è pertanto ritenuto opportuno approfondire lo studio dell'influenza del TiO_2 considerando, in particolare la struttura e le proprietà di tali vetri. Dei risultati ottenuti e delle deduzioni che da essi è stato lecito trarre si riferisce brevemente nella presente Nota.

Parte sperimentale.

Preparazione dei campioni.

La preparazione dei vetri è stata effettuata presso la Stazione Sperimentale del Vetro di Murano fondendo a 1450°C, in forno a metano, ossidi o carbonati chimicamente puri in crogiuoli di allumina. Gli A.A. hanno sottoposto ogni vetro, dopo macinazione, ad affinazione in forno elettrico in crogiuoli di platino alla temperatura di 1500°C per 30 min; successivamente i vetri sono stati colati in stampetti metallici per assicurare un'elevata velocità di raffreddamento. Sono stati così approntati sette campioni di composizione pari a quella sopra riportata con aggiunte di TiO_2 dello 0; 0,5; 2; 4; 8; 12; 20 %. In quel che segue ogni vetro verrà indicato con il corrispondente tenore di TiO_2.

Analisi termica differenziale.

L'analisi termica differenziale, DTA, è stata eseguita con l'apparecchio Du Pont 900 su campioni in polvere di dimensioni comprese tra 430 μ e 250 μ, del peso di 40 mg, usando allumina come sostanza di riferimento alla velocità di riscaldamento di 10°C/min. Dai relativi termogrammi sono state rilevate, come indicato in Fig. 1, la tem-

peratura di transizione vetrosa T_g, la temperatura di massima velocità di cristallizzazione T_m, la temperatura di inizio di cristallizzazione T_i

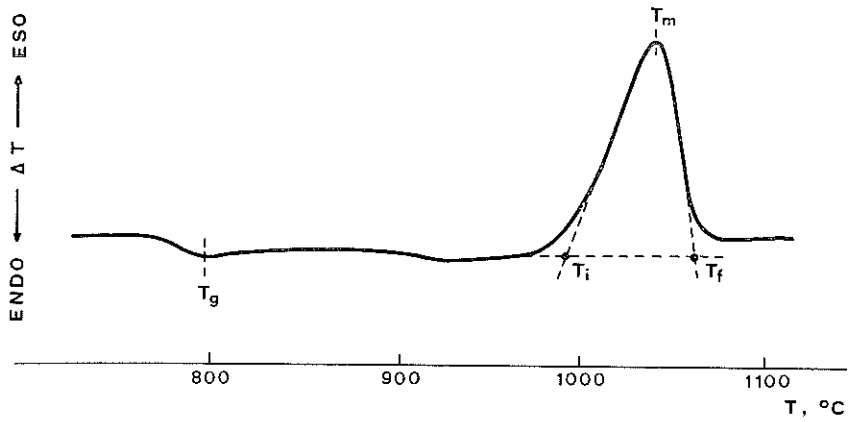


FIG. 1. - Analisi termica differenziale del vetro contenente 0,5 % TiO_2.

e quella di fine cristallizzazione T_f. I risultati ottenuti sono riportati in Tab. I.

TABELLA I

Vetri	D T A				T M A		
% TiO_2	T_g(°C)	T_m(°C)	T_i(°C)	T_f(°C)	T_g(°C)	M_g(°C)	L(mm)
0	783	950	924	1005	791	853	50,5
0,5	783	1040	983	1060	778	840	48,5
2	780	1031	988	1063	774	840	53,5
4	780	1041	998	1069	778	847	57,5
8	773	1028	979	1061	771	840	63,5
12	775	1023	967	1063	764	828	82,0
20	770	1001	940	1040	758	825	91,5

T_g = temperatura di transizione vetrosa
T_m = temperatura di massima velocità di cristallizzazione
T_i = temperatura di inizio di cristallizzazione
T_f = temperatura di fine cristallizzazione
M_g = temperatura di rammollimento dilatometrico
L = lunghezza dei tratti M_g-T_g sulle curve dilatometriche

Analisi termodilatometrica.

Le curve termodilatometriche, TMA, sono state registrate con dilatometro Leitz UBD impiegando barrette di ~ 50 mm di lunghezza alla velocità di riscaldamento di 5°C/min. Ciascuna barretta è stata preventivamente ricotta per eliminare le tensioni interne dovute alla tempra. Da tali curve è stato possibile ricavare come indicato in Fig. 2 la temperatura di transizione vetrosa T_g e quella di rammollimento dilatometrico M_g, nonché la lunghezza dell'intervallo $M_g - T_g$. I risultati ottenuti sono riportati in Tab. I.

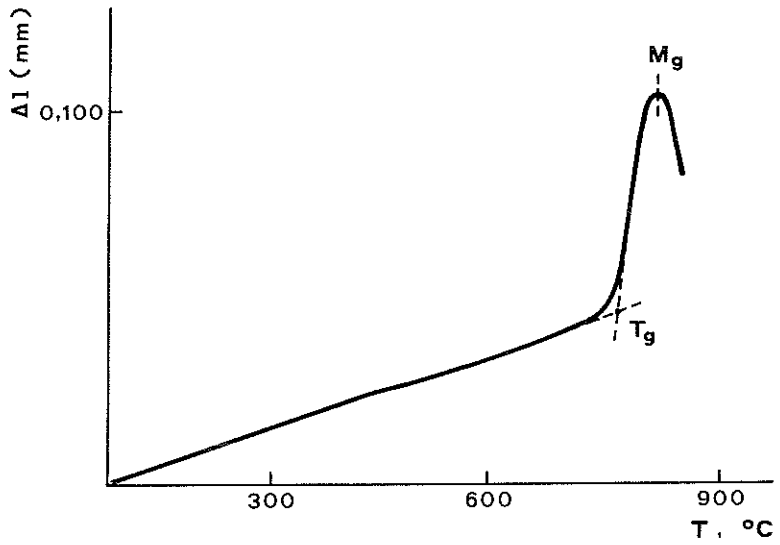


FIG. 2. - Curva termodilatometrica del vetro contenente 0,5 % TiO_2.

DISCUSSIONE E RISULTATI.

Dall'esame dei dati sperimentali è possibile rilevare quanto segue:

a) le temperature di transizione vetrosa T_g, misurate sia per mezzo della DTA sia della TMA, sono in ottimo accordo tra loro; esse sono praticamente costanti fino ad un tenore del 4 % di TiO_2, mentre successivamente mostrano una leggera diminuzione al crescere del contenuto di TiO_2.

b) Le ampiezze dell'intervallo fra la temperatura di transizione vetrosa T_g e quella di inizio di cristallizzazione T_i, riportate in Fig. 3

in funzione del tenore di TiO_2, presentano un massimo in corrispondenza del 4 % di TiO_2. È opportuno sottolineare l'importanza di questo intervallo di temperatura che rappresenta il campo di lavorabilità del vetro.

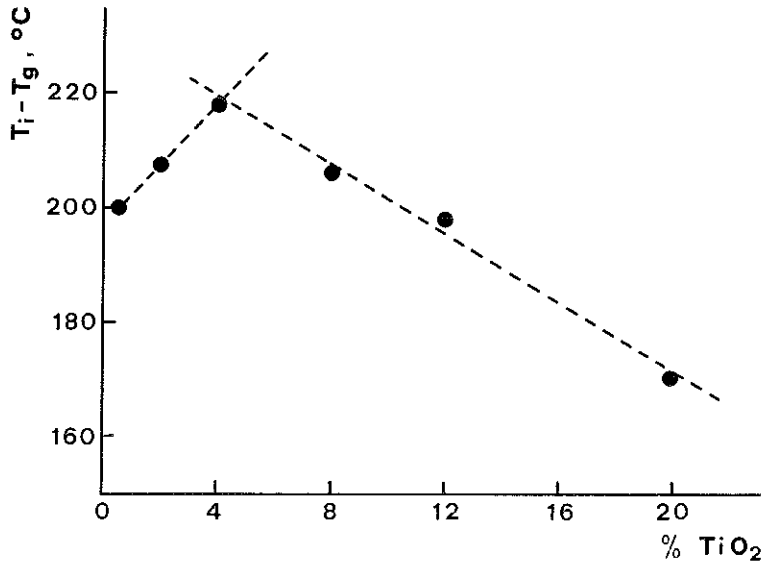


FIG. 3. - Influenza del tenore di TiO_2 sull'intervallo tra la temperatura di transizione vetrosa e quella di inizio cristallizzazione.

c) Le ampiezze degli intervalli fra la temperatura d'inizio di cristallizzazione T_i e quella di fine di cristallizzazione T_f, riportate in Fig. 4 in funzione del tenore di TiO_2, presentano un minimo di corri-

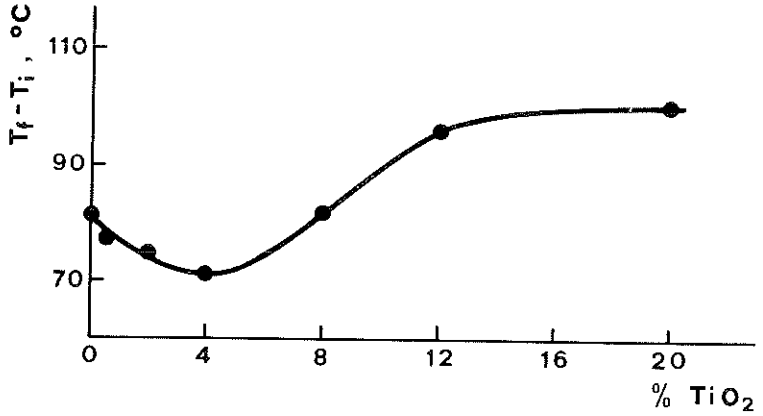


FIG. 4. - Influenza del tenore di TiO_2 sull'intervallo fra la temperatura di inizio di cristallizzazione e quella di fine di cristallizzazione.

spondenza del 4 % di TiO_2. È noto peraltro [10] che ampi intervalli di cristallizzazione sono indizio di cristallizzazione superficiale mentre al contrario intervalli di cristallizzazione ristretti sono caratteristici di cristallizzazione di massa.

d) I coefficienti medi di dilatazione termica α misurati nell'intervallo 25°-700°C riportati in Fig. 5 in funzione del tenore di TiO_2 mostrano un minimo in corrispondenza del 4 % di TiO_2.

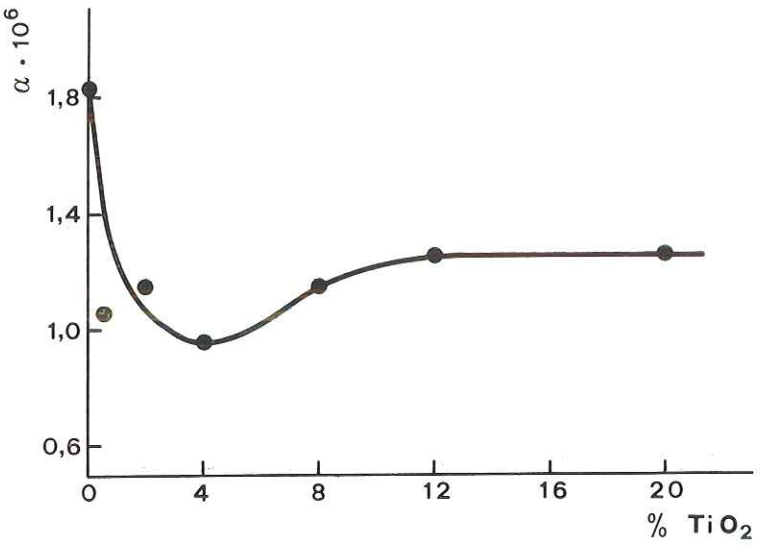


FIG. 5. - Influenza del tenore di TiO_2 sui valori medi (25-700°C) del coefficiente di dilatazione termica.

Quanto sopra riportato sta ad indicare una variazione della struttura dei vetri in corrispondenza del 4 % di TiO_2. Analogamente a quanto riportato per altri sistemi vetrosi [11], si può presumere che tale variazione corrisponda ad un cambio di coordinazione dello ione Ti^{+4}. Fino al 4 % lo ione titanio dovrebbe trovarsi in coordinazione 4 funzionando da formatore di reticolo. Ciò corrisponderebbe a strutture progressivamente più compatte ed omogenee con più bassi valori del coefficiente di dilatazione termica [12] e scarsa tendenza alla devetrificazione. Per tenori di TiO_2 superiori al 4 % lo ione titanio si troverebbe in coordinazione 6, condizione che secondo quanto riportato in letteratura [11] favorisce la separazione di fasi. Ne deriverebbe di conseguenza un aumento della tendenza alla devetrificazione, una diminuzione della temperatura di transizione vetrosa, un aumento del coefficiente di dilatazione termica. Che la separazione

di fasi sia favorita dalla presenza di quantità crescenti di TiO_2 sembra inoltre confermato dall'aumento delle lunghezze dei tratti $M_g - T_g$ sulle curve dilatometriche, in accordo con le osservazioni di alcuni Autori [13] che hanno messo in relazione tali lunghezze con la separazione di fasi nel vetro.

È comunque intenzione degli A.A. confermare le ipotesi sopra riferite per mezzo della diffrazione dei raggi X a basso angolo e della microscopia elettronica.

Conclusioni.

L'insieme dei risultati sperimentali converge nell'indicare che il vetro con 4 % di TiO_2 ha le migliori caratteristiche nell'ambito della serie; esso presenta infatti il più ampio campo di lavorabilità, il più basso coefficiente di dilatazione termica, la maggiore tendenza ad una cristallizzazione di massa.

BIBLIOGRAFIA

[1] Sersale R., Giordano Orsini P., *Crystallisation du certains verres du système SiO_2-Al_2O_3-CaO-MgO. Influence de la composition chimique,* Silicates Industriels, **3**, 1 (1969).

[2] Sersale R., Giordano Orsini P., *Sulla tendenza alla cristallizzazione dei vetri melilitici,* Ric. Sci., **37**, 323 (1967).

[3] Giordano Orsini P., Sersale R., Marchese B., *Studio della devetrificazione di vetri del sistema SiO_2-Al_2O_3-CaO-MgO, mediante analisi termica differenziale.* Ric. Sci., **37**, 327 (1967).

[4] Buri A., Ummarino A., *Sulla cinetica di devetrificazione di vetri sintetici,* Ric. Sci., **39**, 346 (1969).

[5] Buri A., Ummarino A., Giordano Orsini P., *Ricerche sulla cristallizzazione di materiali vetrosi.* Nota I. *Influenza di alcuni ossidi sulla cinetica di cristallizzazione di vetri del sistema $SiO_2Al_2O_3$-CaO-MgO.* Vetro e Silicati, **75**, 5 (1969).

[6] Giordano Orsini P., Buri A., *Ricerche sulla cristallizzazione di materiali vetrosi.* Nota II. *Interpretazione delle curve cinetiche desunte dai valori sperimentali,* Vetro e Silicati, **78**, 5 (1969).

[7] Giordano Orsini P., *Materiali ceramici da scorie di alto forno: microstruttura e microfrattografia,* Chimica e Industria, **50**, 297 (1968).

[8] Buri A., Marotta A., Giordano Orsini P., *Influenza ed azione del TiO_2 sulla cristallizzazione di vetri del sistema SiO_2-Al_2O_3-CaO-MgO,* Ceramurgia, **2**, 100 (1971).

[9] Buri A., Marotta A., Giordano Orsini P., *Crystallisation of glasses in the system SiO_2-Al_2O_3-CaO-MgO. Activation energy determination,* Atti del IX Congresso Interzionale del Vetro, Versailles 1971. Comunicazioni scientifiche e tecniche, Vol. I, p. 343 (1971).

[10] Tudorovskaya N. A., Sherstyuk A. I., *Study of catalyzed crystalllisation by differential thermal analysis,* The Structure of Glass, Consultants Bureau, New York, vol. 3, p. 126 (1964).

[11] PAVLUSHKIN N. M., KHODAKOVSKAJA R. YA., *Relationship between structure of glasses and process of their crystallisation*, Atti del X Congresso Internazionale sul Vetro, Kyoto 1974, vol. 14, p. 48 (1974).

[12] WEYL W. A., MARBOE E. C., *The constitution of glasses. A dynamic interpretation*, Interscience, New York and London, vol. 1, p. 354 (1962).

[13] PAVLUSHKIN N. M., OLOBIKYAN ZH. A., *Influence of lead oxide on the structure and properties of borosilicate glass*, The Structure of Glass, Consultans Bureau, New York - London, Vol. 8, p. 118 (1973).

Il tricocicloforo, apparecchio dalle limitate prestazioni

Nota del socio ordinario MARIO GÀLGANO

(Adunanza del 5 aprile 1975)

RIASSUNTO. — Viene dimostrato che il tricocicloforo, apparecchio finora ritenuto adatto a misurare con rapidità ed esattezza qualsiasi asse trasverso di un capello, o di qualunque altro pelo, lungo tutto il suo asse longitudinale, fornisce invece prestazioni limitate.

SUMMARY. — The A. demonstrates that the tricocyclophore, an instrument which until now was considered suitable to measure quickly and accurately the transverse axes on any hair along its whole longitudinal axis, is instead able to provide only limited service.

Il tricocicloforo, apparecchio ideato e descritto da S. SERGI (1936, 1940), è stato finora erroneamente ritenuto adatto a determinare con rapidità ed esattezza qualsiasi asse trasverso di un capello, o di un qualunque altro pelo, lungo tutto il suo asse longitudinale.

Secondo S. SERGI tale apparecchio, che è fondato sul principio di far ruotare sul suo asse longitudinale un capello sufficientemente teso e disposto orizzontalmente sotto l'obbiettivo del microscopio, provvisto di micrometro oculare, avrebbe permesso di misurare i vari assi nello stesso piano trasverso e, con lo spostamento longitudinale, in qualsiasi altro piano parallelo al precedente. Inoltre avrebbe permesso di costruire il tricometrogramma, ossia la rappresentazione grafica della sezione del capello, supposto simmetrico all'asse di rotazione, riportando i valori misurati sopra un modulo (in pratica un cerchio) formato da diametri, che si intersecano in un punto, centro della sezione, e distanti l'uno dall'altro di un angolo eguale a quello, di cui si è ruotato il capello. Unendo con una linea spezzata i punti che sul modulo rappresentano le estremità degli assi misurati, si ottengono figure poligonali, i tricometrogrammi, che sarebbero con buona approssimazione l'espressione morfometrica schematica della sezione del capello.

L'alta e meritata fama internazionale del SERGI e la sua indiscussa autorità in campo antropologico ha purtroppo indotto vari Autori, e

fra gli altri anche alcuni di noi (1963), ad usare il tricocicloforo. Solo di recente, in occasione di un nostro nuovo lavoro sui capelli, mi è venuto il dubbio che questo apparecchio non possedesse i requisiti attribuitigli, per aver notato che talora si ottenevano tricometrogrammi più stretti in corrispondenza dell'asse minore, e più larghi a livello di parallele a tale asse, intersecanti in punti opposti a questo l'asse maggiore, ossia rappresentazioni schematiche della sezione del capello sicuramente errate, perché in un capello a sezione trasversa davvero biconcava (cosa per altro improbabile), osservato longitudinalmente e fatto ruotare sotto al microscopio, sarebbe impossibile vedere e misurare l'asse minore, il quale resterebbe nascosto dalle due parti più grosse del capello situate lungo l'asse maggiore, in posizioni opposte rispetto all'asse minore.

Pertanto, era logico concludere anzitutto che l'asse minore non poteva essere misurato col tricocicloforo nei capelli a sezioni reniforme e in quelli, di problematica esistenza, a sezione biconcava.

*
* *

Poiché il problema è importante non solo dal punto di vista puramente scientifico, ma anche da quello medico-legale, lo tratterò in via preliminare nella presente nota, riservandomi di pubblicare in séguito un lavoro più esteso.

Prove eseguite con modelli di sezione trasversa di capelli aventi forma ellittica od ovale bisimmetrica (ossia con due assi di simmetria di lunghezza diversa, ortogonali e intersecantisi nel punto mediano, di modo che i quadranti opposti sono uguali e quelli adiacenti speculari), posti o disegnati dapprima con l'asse maggiore (= A.M.) sul ∅ a 0°-180° e con l'asse minore (= a.m.) su quello a 90°-270° del modulo (posizione detta « azzerata ») e poi di séguito in posizione ruotata su questo in senso orario di 30° in 30°, hanno dimostrato chiaramente quanto segue, immaginando di guardare, come al microscopio, in direzione del ∅ a 0°-180° del modulo (al microscopio, il capello si osserva dall'alto, in direzione verticale rispetto al suo asse longitudinale, e si comincia, dopo averlo azzerato, a misurare il suo a.m.; la direzione dello sguardo dell'osservatore corrisponde quindi al ∅ a 0°-180° del modulo, mentre l'a.m. del capello azzerato è ortogonale al precedente, e corrisponde al ∅ a 90°-270° del modulo [1]. Quando, mediante il tricocicloforo, il capello viene ruotato

[1] Si veda per questa e per le seguenti spiegazioni la figura riprodotta nel testo.

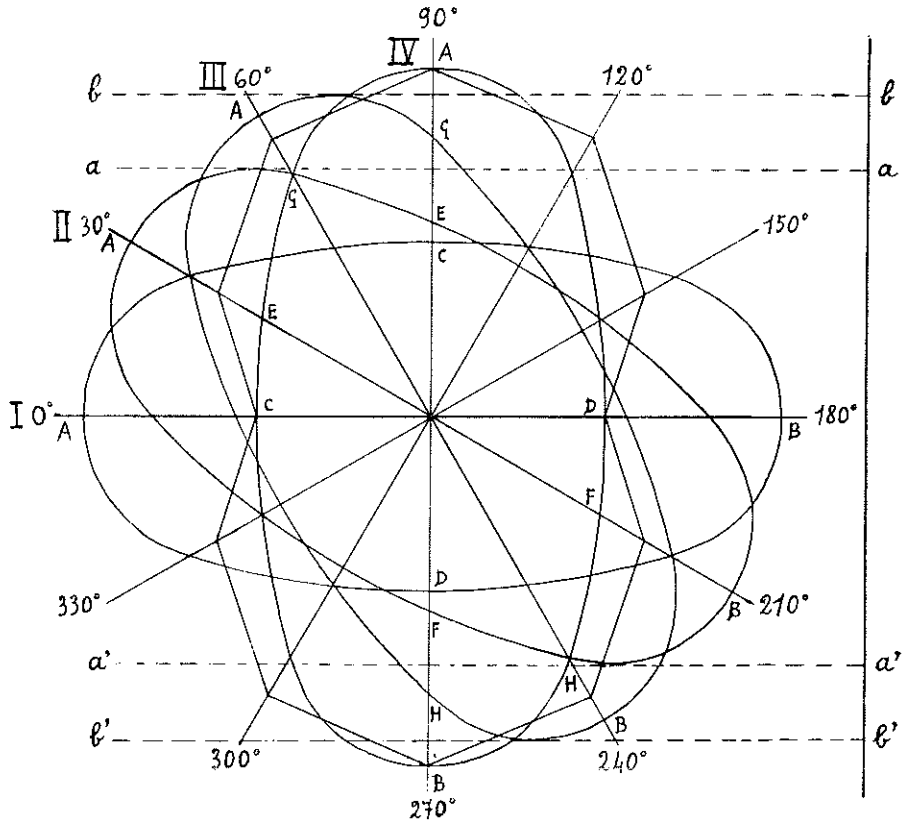
in senso orario di 30°, l'asse del capello a 30° dal proprio a.m. viene a disporsi ortogonalmente alla direzione dello sguardo, in posizione corrispondente al ∅ a 90°-270° del modulo; lo stesso avviene per gli altri assi a 60°, 90°, 120° e 150° dall'a.m., continuando a ruotare il capello in senso orario di 30° in 30°).

Se osserviamo, come sopra detto, tali modelli, quando sono posti o disegnati prima in posizione azzerata e poi con l'A.M. sul ∅ a 90°-270° del modulo, si possono prendere rispettivamente le misure esatte degli assi m. e M., e da esse ricavare l'indice della sezione trasversa $\left(I = \frac{\text{a.m.} \times 100}{\text{A.M.}}\right)$.

Quando invece, sempre con lo sguardo in direzione del ∅ a 0°-180° del modulo, si osservano tali modelli posti o disegnati in posizione ruotata in senso orario prima di 30° e poi di 60° rispetto a quella azzerata, e quindi prima con l'asse a 30° e poi con quello a 60° dal proprio a.m. sul ∅ a 90°-270° del modulo, ci accorgiamo — come sarà spiegato in séguito con un esempio — che si prendono non le lunghezze di questi due assi, ma misure più grandi delle cercate; lo stesso accade guardando al microscopio capelli di forma simile, ruotati come ora detto mediante il tricocicloforo. Nel caso dei modelli di forma ellittica tali misure risultano tanto più falsate in eccesso, quanto più lungo è l'A.M. in rapporto al minore. Nel caso dei modelli di forma ovale bisimmetrica tali misure risultano tanto più falsate in eccesso, quanto più sono stretti e lunghi, e quanto minore è la curvatura negli estremi dell'A.M. (ossia quanto più grande è il raggio del cerchio al quale si avvicina il contorno del modello in prossimità degli estremi dell'A.M.).

Ad esempio, sempre immaginando di guardare, come al microscopio, in direzione del ∅ a 0°-180° del modulo, quando uno di questi modelli di sezione trasversa del capello di forma ellittica od ovale bisimmetrica, stretta e lunga per essere chiaramente dimostrativa ($I \leqq 50$), viene posto o disegnato con i suoi assi a 30° e a 60° da quello minore successivamente sul ∅ a 90°-270° del modulo, non si possono misurare tali assi, posti lungo questo diametro, perché (si veda la Figura), uno dei loro estremi, quello sul raggio a 90° del modulo, è nascosto alla vista dal contorno sporgente del modello nella sua parte sul raggio a 30° o a 60° del modulo, mentre è impossibile (specialmente al microscopio), identificare quale sia l'altro, situato sul raggio a 270° del modulo, nel lungo tratto del contorno del modello visibile dal raggio a 0° a oltre il raggio a 270° del modulo. Come estremi degli assi, di cui si voleva conoscere la misura, vengono presi invece erroneamente i due punti opposti che appaiono più distanti fra loro, i quali sono situati in prossimità degli estremi dell'A.M., e

pertanto corrispondono agli estremi di assi del modello più lunghi dei cercati e a diametri del modulo in posizione rispettivamente più e meno obliqua rispetto al ∅ a 90°-270° del modulo, e quindi al tempo stesso meno e più obliqua rispetto al ∅ a 0°-180°, nella cui direzione viene osservato il modello. Neppure di tali assi più lunghi di quelli cercati — data la loro obliquità rispetto all'osservatore — si può misurare la vera lunghezza, ma soltanto la lunghezza della



proiezione di ciascuno di essi su di un piano virtuale, ortogonale al ∅ a 0°-180°, e precisamente sulla linea d'intersezione di questo col piano contenente i diametri a 0°-180° e a 90°-270° del modulo. Lo stesso accade, quando il modello è ruotato in modo che i suoi assi a 150° e a 120° da quello minore sono posti sul ∅ a 90°-270° del modulo.

Queste proiezioni risultano sempre più lunghe degli assi che si sarebbero voluti misurare, e per di più vengono poi riportate, per costruire il tricometrogramma, sopra i diametri del modulo a 30°-210°, 60°-240°, 150°-330° e 120°-300°, ossia su diametri del modulo in posi-

SPIEGAZIONE DELLA FIGURA

Sul modulo, formato da sei diametri intersecantisi fra loro a 30°, è stato disegnato nelle quattro posizioni indispensabili un modello di sezione trasversa di capello avente forma ovale bisimmetrica con Indice = 50 e in prossimità degli estremi dell'A.M. archi di circonferenza di *r* relativamente assai grande. È stato inoltre disegnato sul modulo il tricometogramma, un dodecagono con falsa rientranza, quale risulta dal riporto delle misure ottenibili dal modello sopra i diametri del modulo.

I numeri dal I al IV indicano la posizione del modello azzerata e le tre successive, ruotate in senso orario di 30°, di 60° e di 90°. Il modello non è stato disegnato nelle posizioni ruotate di 120° e di 150°, sia perché non era necessario, trattandosi di un modello bisimmetrico, sia per non rendere confusa la figura. Le lettere maiuscole indicano gli assi del modello, come segue: AB = Asse Maggiore; CD = asse minore; EF = asse a 30° e GH = asse a 60° da quello minore.

I disegni del modello vanno guardati, come al microscopio, in direzione del ∅ a 0° - 180° del modulo.

Seguendo sempre questa avvertenza, si nota, quando il modello si trova nelle posizioni I e IV, che si possono rispettivamente misurare con esattezza gli assi m. e M., i quali giaccioni sul ∅ a 90° - 270° del modulo, perché gli estremi di essi, CD ed AB, si possono vedere, e sono riconoscibili come i punti opposti e più distanti del contorno del modello.

Nella posizione II, non si può prendere la misura dell'asse EF, che ora si trova sul ∅ a 90° - 270° del modulo, perché il punto E è nascosto alla vista dal tratto del contorno del modello compreso tra A ed E, mentre il punto F, pur non essendo nascosto, non si può identificare nel lungo tratto visibile del contorno del modello da A ad oltre il raggio a 240° del modulo. Nella posizione II si misura invece la lunghezza della proiezione della distanza fra i due punti opposti e più lontani fra loro del contorno del modello, in prossimità degli estremi dell'A.M.; tali punti sono toccati dalle tangenti tratteggiate *a a* e *a' a'*, parallele al ∅ a 0° - 180° del modulo. La lunghezza di tale proiezione, che avviene sulla linea d'intersezione tra un piano virtuale, ortogonale al ∅ 0° - 180°, e il piano contenente questo diametro e quello a 90° - 270° del modulo, è rappresentata dal segmento *a a'*, assai più lungo dell'asse EF, che si credeva di misurare.

Le stesse considerazioni ora fatte valgono per la posizione III: non si può prendere la misura dell'asse GH, e si misura invece la lunghezza della proiezione, qui rappresentata dal segmento *b b'*, dei due punti opposti e più lontani fra loro del contorno del modello, in questo caso ancor più prossimi agli estremi dell'A.M.

Per costruire il tricometrogramma, le misure prese dal modello nelle posizioni dalla I alla IV vengono riportate rispettivamente sopra i diametri del modulo a 0° - 180°, 30° - 210°, 60° - 240° e 90° - 270°, e poiché *a a'* è assai maggiore non solo dell'a.m., ma anche dell'asse EF, che si credeva di aver misurato, il tricometrogramma risulta un dodecagono col falsa rientranza in corrispondenza del ∅ a 0° - 180° del modulo, dato che su questo ∅ si riporta la misura esatta dell'a.m., mentre la lunghezza di *a a'* si riporta sul ∅ a 30° - 210° ed anche, essendo il modello bisimmetrico, sul ∅ a 150° - 330° del modulo.

zione meno obliqua, rispetto al ∅ a 0°-180°, di quella che in realtà si è potuta osservare. Anche a causa di questo riporto errato il tricometrogramma risulta di forma assai diversa da quella dei modelli studiati e così pure da quella delle sezioni trasverse strette e lunghe, all'incirca di forma ellittica od ovale bisimmetrica, dei capelli. I trimetrogrammi dodecagoni ottenuti da queste forme strette e lunghe (p. es. con I ≦ 50) presentano una falsa rientranza in corrispondenza dell'a.m., che viene riportato sul ∅ a 0°-180° del modulo, perché, sebbene la misura dell'a.m. sia una delle due sole misure esatte (l'altra è quella dell'A.M., riportata sul ∅ a 90°-270° del modulo), le misure riportate sopra i diametri a 30°-210° e a 150°-330° del modulo sono

a sufficienza più grandi di quelle vere da poter determinare una figura così diversa da quella che avrebbe dovuto schematicamente rappresentare.

Gli errori diminuiscono, quanto più la forma della sezione si avvicina a quella circolare, e correlativamente i tricometrogrammi da figure dodecagone con falsa rientranza passano, attraverso una con dieci lati soltanto, a figure dodecagone ovaloidi, sempre più somiglianti a un dodecagono regolare. Nessun errore si commetterebbe nelle misurazioni, se il contorno della sezione trasversa fosse una circonferenza, il cui tricometrogramma risulterebbe appunto il dodecagono regolare inscritto in essa.

Altra fonte di inesattezze è il fatto che difficilmente il contorno della sezione trasversa di un capello ha una forma che presenti simmetrie.

Non è escluso, però, che si possono trovare metodi, i quali consentano, almeno in alcuni casi, di utilizzare le misure ottenute mediante l'uso del tricocicloforo, per costruire curve che approssimino sufficientemente bene la forma delle sezioni trasverse dei capelli.

Dall'Istituto di Antropologia con annesso Museo dell'Università degli Studi di Napoli.

CENNI BIBLIOGRAFICI

ASCENZI A. e SERGI M., *Ricerche ed osservazioni sui caratteri morfologici ed istologici dei capelli del cuoio capelluto in una serie di Daiacchi dell'isola di Borneo*, Riv. di Antropologia, **46**, pp. 37-64. Roma, 1959.

CANUTO G., *La diametria del pelo come elemento della sua identificazione individuale*, Relazione svolta al IX Congr. Naz. di Medic. Leg. e delle Assic., Siena, 25-27 Sett., 1947.

CANUTO G., *La diametria del pelo come elemento della sua identificazione individuale*, Riv. di Antropologia, **36**, pp. 152-158. Roma, 1948.

CORRENTI V. e MARGIOTTA G., *Saggio metodologico per lo studio della variabilità dei diametri dei capelli*, Riv. di Antropologia, **51**, pp. 99-122. Roma, 1964.

D'AMORE C. e GALGANO M., *Osservazioni sulla variabilità dei capelli cimotrichi*, Rend. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Sez. 4ª, **30**, pp. 253-270. Napoli, 1963.

LANDRA G., *Il tricocicloforo di Sergi e la sua prima applicazione*, R. Accad. Naz. dei Lincei. Classe Scienze Fis. Mat. e Nat., Serie 6ª, **23**, pp. 802-806. Roma, 1936.

SERGI S., *Il tricocicloforo*, Riv. di Antropologia, **31**, pp. 409-410. Roma, 1935-37.

SERGI S., *Il tricocicloforo (Apparecchio per la misura dei diametri dei capelli e dei peli*, Arch. Antrop. Criminale, Psichiatria e Medicina legale, Serie 5ª, **40**, pp. 113-117. 1940.

SERGI S., *Capelli di Tasmaniano e di Boscimano: saggio tricometrografico di tecnica applicata alla misurazione dei capelli mediante il tricocicloforo*, Riv. di Antropologia, **44**, pp. 285-316. Roma, 1957.

Questioni di compatibilità per il primo problema al contorno relativo ad una classe di equazioni ellittico-paraboliche del II ordine *

Nota di PASQUALE BUONOCORE
presentata dal socio corrispondente CARLO CILIBERTO

(Adunanza del 5 aprile 1975)

RIASSUNTO. — Si estende ad una classe più ampia di equazioni una caratterizzazione dell'esistenza di condizioni di compatibilità concernente l'equazione del calore.

SUMMARY. — We generalize a characterization of compatibility conditions for the heat equation to a larger equation class.

È noto come va posto il primo problema al contorno per un'equazione ellittico-parabolica del secondo ordine [1]:

$$(I) \qquad \mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\, u = f(x)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_k)$$

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq 0 \qquad \lambda_i, \lambda_j \in \mathrm{R}$$

in un dominio $\Omega \subseteq \mathrm{R}^k$, la cui frontiera $\partial\Omega$ si suppone dotata di normale. Precisamente, denotati con $\nu_1, \ldots, \nu_k$ i coseni direttori della normale esterna a $\partial\Omega$ e posto:

$$b = \sum_{i=1}^{k} \left(b_i - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \nu_i$$

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

[1] Cfr. [1] e [2] di G. FICHERA che ha posto tale problema nel caso generale e ne ha iniziato lo studio.

si considerano i seguenti sottoinsiemi di $\partial\,\Omega$:

$$\Sigma_3 = \left\{ x \in \partial\,\Omega : \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x)\,\nu_i\,\nu_j > 0 \right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ x \in \partial\,\Omega : \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x)\,\nu_i\,\nu_j = 0\,, \quad b(x) > 0 \right\}$$

$$\Sigma_1 = \left\{ x \in \partial\,\Omega : \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x)\,\nu_i\,\nu_j = 0\,, \quad b(x) \leq 0 \right\};$$

il primo problema al contorno per l'equazione (I) in Ω è il seguente:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}\,u = f & in \quad \Omega \\ u = v & in \quad \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \end{cases}$$

f e v essendo funzioni assegnate.

Nella Memoria [3], che concerne appunto tale problema, J. KOHN e L. NIRENBERG hanno fra l'altro considerato questioni di compatibilità relative a punti « eccezionali » della frontiera del dominio Ω nell'ambito delle soluzioni di classe C^∞.

In riferimento all'equazione del calore in due variabili:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ed a punti di frontiera P_0 nei quali la curvatura è negativa e la normale esterna è parallela e discorde all'asse t, tali Autori hanno provato che l'esistenza di condizioni di compatibilità si caratterizza, e in modo del tutto particolare, mediante il valore della curvatura di $\partial\,\Omega$ in P_0.

In questa Nota estendo tale risultato in riferimento ad equazioni più generali dell'equazione del calore.

Considero in un dominio Ω di R^{n+m}, il cui generico elemento si

indicherà con $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m)$, la seguente equazione ellittico-parabolica *con coefficienti di classe* C^∞:

$$\text{(III)} \qquad \mathcal{L}\, u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + a_i\,(x, t)\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) +$$

$$- \sum_{j=1}^{m} b_j\,(x, t)\, \frac{\partial u}{\partial t_j} + c\,(x, t)\, u = 0$$

considero poi un punto di Σ_2, P_o, che senza ledere la generalità si può considerare coincidente con l'origine 0, tale che in un suo intorno S_o e nel riferimento $R(x, t)$ la frontiera $\partial\Omega$ sia rappresentata dall'equazione:

$$\sum_{j=1}^{m} t_j = \varphi\,(x_1, \ldots, x_n) = - M x_1^2 + \textit{termini d'ordine superiore}$$

Orbene, il teorema che dimostro in questo lavoro è il seguente:

TEOREMA I. *Sia u una soluzione di classe* C^∞ *del problema* (II) *per l'equazione* (III). *Allora, indicato con* $\{z_h\}$ *l'insieme degli zeri dei polinomi di* LAGUERRE:

$$L_k^{(-1/2)} \quad , \quad L_k^{(1/2)} \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots \,^{2}$$

si ha che se M *coincide con uno dei valori*:

$$M_h = \frac{1}{4\, z_h} \sum_{j=1}^{m} b_j\,(0)$$

v e le sue derivate debbono soddisfare in 0 *delle condizioni di compatibilità, mentre per tutti gli altri valori di* M *non si hanno, in* 0, *condizioni di compatibilità.*

[2] Ricordiamo che

$$L_k^{(\alpha)}\,(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+\alpha}{k-j} \frac{(-z)^j}{j\,!}$$

Poiché le radici dei polinomi di Laguerre sono tutte reali e positive [3], da questo teorema si deduce che nei punti in esame possono nascere condizioni di compatibilità solo se vi risulta:

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^{m} b_j > 0$$

Il teorema I è stabilito seguendo la stessa idea di Kohn e Nirenberg per l'equazione del calore, ma il procedimento risulta complicato dalla presenza delle più variabili x_i e t_j e richiede alcuni accorgimenti.

Dimostrazione. — Consideriamo la trasformazione di coordinate:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi_i &= x_i && i = 1, 2, \ldots, n \\ \tau_j &= t_j && j = 2, 3, \ldots, m \\ \tau_1 &= \sum_{j=1}^{m} t_j - \varphi(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

che porta l'origine del riferimento $R(x, t)$ nell'origine del riferimento $R'(\xi, \tau)$, $(\xi, \tau) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \tau_1, \ldots, \tau_m)$, e trasforma la $u(x, t)$ in una funzione $\mathfrak{U}(\xi, \tau)$. Inoltre la parte di frontiera $\partial\Omega \cap S_0$ sarà trasformata in una porzione dell'iperpiano $\tau_1 = 0$, sul quale pertanto saranno assegnati i dati al contorno per la funzione $\mathfrak{U}(\xi, \tau)$; poniamo:

$$\mathfrak{U}(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \mathfrak{V}(\xi_1, \ldots, \xi_n, \tau_2, \ldots, \tau_m)$$

Si verifica facilmente che con la trasformazione (1) la (III) diventa:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}\,\mathfrak{U} = {} & \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{U}_{\xi_i \xi_i} - 2\varphi_{\xi_i} \mathfrak{U}_{\xi_i \tau_1} + \varphi_{\xi_i}^2 \mathfrak{U}_{\tau_1 \tau_1} + a_i \mathfrak{U}_{\xi_i}) - \sum_{j=2}^{m} b_j \mathfrak{U}_{\tau_j} + \\ & - \left[\sum_{j=1}^{m} b_j + \sum_{i=1}^{n} (a_i \varphi_{\xi_i} + \varphi_{\xi_i \xi_i}) \right] \mathfrak{U}_{\tau_1} + c\,\mathfrak{U} = 0 \end{aligned}$$

ove $a_i = a_i(\xi, \tau)$, $b_j = b_j(\xi, \tau)$, $c = c(\xi, \tau)$.

[3] Cfr. ad esempio [4].

Cercheremo di esprimere mediante i dati del problema le derivate di $\mathfrak{A}$ in 0. Cominciamo con l'osservare che la (2) nell'origine dà:

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{A}_{\xi_i \xi_i} + a_i \mathfrak{A}_{\xi_i}) - \sum_{j=2}^{m} b_j \mathfrak{A}_{\tau_j} + c\,\mathfrak{A} = \left(\sum_{j=1}^{m} b_j - 2\,\mathrm{M} \right) \mathfrak{A}_{\tau_1}$$

e quindi se risulta:

$$(4)\qquad \mathrm{M} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} b_j\,(0)$$

si ha in 0 la condizione di compatibilità:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{V}_{\xi_i \xi_i} + a_i \mathfrak{V}_{\xi_i}) - \sum_{j=2}^{m} b_j \mathfrak{V}_{\tau_j} + c\,\mathfrak{V} = 0$$

Supponiamo che M non soddisfa la (4), allora dalla (3) si ricava $\mathfrak{A}_{\tau_1}(0)$ e dalla (2), derivando rispetto a ξ_h con $h = 1, 2, \ldots, n$ si ha in 0:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} b_j - 2\,\mathrm{M} \right) \mathfrak{A}_{\xi_h \tau_1} = \textit{relazione nota} \qquad h = 2, 3, \ldots, n$$

$$\left(6\,\mathrm{M} - \sum_{j=1}^{m} b_j \right) \mathfrak{A}_{\xi_1 \tau_1} = \textit{relazione nota}$$

Quindi si presenta una condizione di compatibilità in 0 se risulta:

$$(5)\qquad \mathrm{M} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{m} b_j\,(0)$$

Supponiamo ora che M non verifichi né la (4) né la (5); allora sono noti $\mathfrak{A}_{\xi_h \tau_1}(0)$ e $\mathfrak{A}_{\tau_1}(0)$ con $h = 1, 2, \ldots, n$. Dalla (2), derivando rispetto a τ_r con $r = 2, 3, \ldots, m$ e valutando nell'origine si ha:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} b_j - 2\,\mathrm{M} \right) \mathfrak{A}_{\tau_r \tau_1} = \textit{relazione nota}$$

dalla quale si ricavano i valori $\mathfrak{A}_{\tau_r \tau_1}(0)$.

Consideriamo ora l'operatore:

$$D_{\xi}^{p,\beta}\ D_{\tau}^{q,\eta} = \frac{\partial^p}{\partial \xi_1^p}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \xi_2^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial \xi_n^{\beta_n}}\frac{\partial^q}{\partial \tau_1^q}\frac{\partial^{\eta_2}}{\partial \tau_2^{\eta_2}}\cdots\frac{\partial^{\eta_m}}{\partial \tau_m^{\eta_m}}$$

$$\beta = (\beta_2, \ldots, \beta_n)\ , \qquad \eta = (\eta_2, \ldots, \eta_m)\ ;$$

una generica derivata

$$D_{\xi}^{p,\beta}\ D_{\tau}^{q,\eta}\ \mathfrak{A}(0) \tag{6}$$

la distingueremo a seconda che $p + |\beta| + |\eta|$ [4] è pari ovvero dispari, ed è chiaro che ci interessano solo quelle derivate per cui $q > 0$.

Rileviamo dapprima che, posto:

$$z = \frac{1}{4M}\sum_{j=1}^{m} b_j(0) \tag{7}$$

ed osservato che

$$L_1^{(-1/2)}(z) = \frac{1}{2} - z \qquad L_1^{(1/2)}(z) = \frac{3}{2} - z$$

dalle considerazioni precedenti si ha che, se z non è uno zero del polinomio $L_1^{(-1/2)}$, sono note le derivate (6) per le quali risulta:

$$p + |\beta| + |\eta| \ \textit{pari}\ , \qquad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\eta|) + q \leq 1$$

e poi se z non è uno zero nemmeno di $L_1^{(1/2)}$ sono note anche le derivate (6) con

$$p + |\beta| + |\eta| \ \textit{dispari}\ , \qquad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\eta| - 1) + q \leq 1$$

[4] Come di consueto, se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ è un multi-indice si pone:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$$

Peraltro se z è uno zero di $L_1^{(-1/2)}$ o di $L_1^{(1/2)}$, l'ipotesi che le suddette derivate esistono porta necessariamente a delle condizioni di compatibilità per $\mathfrak{V}$ e le sue derivate in 0.

Orbene, supponiamo note le derivate (6) con

$$p + |\beta| + |\gamma_i| \ \textit{pari} \quad , \quad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\gamma_i|) + q < k$$

$$p + |\beta| + |\gamma_i| \ \textit{dispari} \ , \quad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\gamma_i| - 1) + q < k$$

per un fissato intero $k \geq 2$, ed applichiamo ad $\mathfrak{M}\,\mathfrak{U}$ gli operatori

$$D_{\xi}^{p,\beta}\, D_{\tau}^{q-1,\eta} \qquad q > 0 \tag{8}$$

tali che:

$$p + |\beta| + |\gamma_i| \ \textit{pari} \quad , \quad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\gamma_i|) + q = k \tag{9}$$

valutando poi nell'origine. Proveremo che se z non è radice dei polinomi $L_h^{(-1/2)}$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$, allora si possono determinare le (6) con le condizioni (9) e che invece, se z è uno zero di tali polinomi, l'esistenza di queste derivate porta a condizioni di compatibilità in 0.

Supponiamo poi note le (6) con

$$p + |\beta| + |\gamma_i| \ \textit{pari} \quad , \quad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\gamma_i|) + q \leq k$$

$$p + |\beta| + |\gamma_i| \ \textit{dispari} \ , \quad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\gamma_i| - 1) + q < k$$

ed applichiamo ad $\mathfrak{M}\,\mathfrak{U}$ gli operatori (8) tali che

$$p + |\beta| + |\gamma_i| \ \textit{dispari} \ , \quad \frac{1}{2}(p + |\beta| + |\gamma_i| - 1) + q = k \tag{10}$$

valutando poi in 0. Si prova che se z non è radice dei polinomi $L_h^{(1/2)}$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$, allora risultano note le (6) con le condizioni (10) e che invece, se z è uno zero di tali polinomi si hanno condizioni di compatibilità.

È chiaro che quando avremo provato i suddetti risultati il teorema I risulterà acquisito. Ebbene, in riferimento ad entrambi i casi che dobbiamo esaminare, applichiamo gli operatori (8) ad $\mathfrak{M}\,\mathfrak{A}$ e valutiamo nell'origine i singoli addendi.

Usando la formula generalizzata di Leibnitz si ottiene:

$$D_{\xi}^{p,\beta}\; D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_i}\,\mathfrak{A}_{\xi_i\tau_1}\right) =$$

$$(11)\qquad = \sum_{i=2}^{n}\sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ h\leqslant p}}\binom{\beta}{\gamma}\binom{p}{h} D_{\xi}^{h,\gamma+\delta_i}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma+\delta_i}\varphi +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ h\leqslant p}}\binom{\beta}{\gamma}\binom{p}{h} D_{\xi}^{h+1,\gamma}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{p-h+1,\beta-\gamma}\varphi \;^{5}$$

ove si denota che δ_i la $(n-1)-pla$ avente tutte le coordinate nulle eccetto la *i-sima* che è uguale ad 1. Osserviamo che la seconda sommatoria che figura a secondo membro della (11) è uguale a

$$\sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ h\leqslant p-2}}\binom{\beta}{\gamma}\binom{p}{h} D_{\xi}^{h+1,\gamma}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{p-h+1,\beta-\gamma}\varphi +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ |\gamma|\leqslant|\beta|-1}}\binom{\beta}{\gamma} p\, D_{\xi}^{p,\gamma}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{2,\beta-\gamma}\varphi + p\, D_{\xi}^{p,\beta}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{2,0}\varphi +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ |\gamma|\leqslant|\beta|-2}}\binom{\beta}{\gamma} D_{\xi}^{p+1,\gamma}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{1,\beta-\gamma}\varphi +$$

$$+ \sum_{h=2}^{n}\binom{\beta}{\beta-\delta_h} D_{\xi}^{p+1,\beta-\delta_h}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{1,\delta_h}\varphi + D_{\xi}^{p+1,\beta}\; D_{\tau}^{q,\eta}\,\mathfrak{A}\cdot D_{\xi}^{1,0}\varphi$$

le cui prime tre somme sono tutte note in 0 per l'ipotesi d'induzione,

[5] Se $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ e $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ sono due multi-indici si pone:

$$\beta\leq\alpha \iff \beta_1\leq\alpha_1,\ldots,\beta_k\leq\alpha_k$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1!\ldots\alpha_k!}{\beta_1!\ldots\beta_k!\,(\alpha_1-\beta_1)!\ldots(\alpha_k-\beta_k)!}\qquad,\quad \beta\leq\alpha$$

mentre l'ultima somma e l'ultimo addendo sono nulli in 0. La sommatoria doppia che figura a secondo membro della (11) è uguale a

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ h \leqslant p-2}} \binom{\beta}{\gamma} \binom{p}{h} D_{\xi}^{h,\gamma+\delta_i} D_{\tau}^{q,\eta} \mathcal{Q} \cdot D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma+\delta_i} \varphi +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ |\gamma| \leqslant |\beta|-1}} p \binom{\beta}{\gamma} D_{\xi}^{p-1,\gamma+\delta_i} D_{\tau}^{q,\eta} \mathcal{Q} \cdot D_{\xi}^{1,\beta-\gamma+\delta_i} \varphi +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} p D_{\xi}^{p-1,\beta+\delta_i} D_{\tau}^{q,\eta} \mathcal{Q} \cdot D_{\xi}^{1,\delta_i} \varphi +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ |\gamma| \leqslant |\beta|-2}} \binom{\beta}{\gamma} D_{\xi}^{p,\gamma+\delta_i} D_{\tau}^{q,\eta} \mathcal{Q} \cdot D_{\xi}^{0,\beta-\gamma+\delta_i} \varphi +$$

$$+ \sum_{h,i=2}^{n} \binom{\beta}{\beta-\delta_h} D_{\xi}^{p,\beta+\delta_i-\delta_h} D_{\tau}^{q,\eta} \mathcal{Q} \cdot D_{\xi}^{0,\delta_i+\delta_h} \varphi +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} D_{\xi}^{p,\beta+\delta_i} D_{\tau}^{q,\eta} \mathcal{Q} \cdot D_{\xi}^{0,\delta_i} \varphi$$

in cui la prima, seconda e quarta somma per l'ipotesi d'induzione sono note in 0, mentre le rimanenti sono ivi nulle. Allora nell'origine si ha:

$$D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q-1,\eta} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i} \mathcal{Q}_{\xi_i \tau_1} \right) = -2 M p D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q,\eta} \mathcal{Q} + \textit{relazione nota.}$$

Inoltre risulta:

$$D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q-1,\eta} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i}^{2} \mathcal{Q}_{\tau_1 \tau_1} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ h \leqslant p-3 \\ h = p-1,p}} \binom{\beta}{\gamma} \binom{p}{h} D_{\xi}^{h,\gamma} D_{\tau}^{q+1,\eta} \mathcal{Q} \cdot$$

$$\cdot D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma}\varphi_{\xi_i}^{2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ |\gamma|\leqslant|\beta|-1}}\binom{\beta}{\gamma}\binom{p}{p-2} D_{\xi}^{p-2,\gamma} D_{\tau}^{q+1,\eta}\mathcal{U}\cdot D_{\xi}^{2,\beta-\gamma}\varphi_{\xi_i}^{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\,p\,(p-1)\sum_{i=1}^{n} D_{\xi}^{p-2,\beta} D_{\tau}^{q+1,\eta}\mathcal{U}\cdot D_{\xi}^{2,0}\varphi_{\xi_i}^{2}$$

che nell'origine diventa:

$$D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_i}^{2}\,\mathcal{U}_{\tau_1\tau_1}\right) = 4\,M^2\,p\,(p-1)\,D_{\xi}^{p-2,\beta} D_{\tau}^{q+1,\eta}\mathcal{U} +$$

$$+ \textit{relazione nota.}$$

Si ha pure:

$$D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_1\xi_i}\mathcal{U}_{\tau_1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ h\leqslant p-1}}\binom{\beta}{\gamma}\binom{p}{h} D_{\xi}^{h,\gamma} D_{\tau}^{q,\eta}\mathcal{U}\cdot$$

$$\cdot D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma}\varphi_{\xi_1\xi_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ |\gamma|\leqslant|\beta|-1}}\binom{\beta}{\gamma} D_{\xi}^{p,\gamma} D_{\tau}^{q,\eta}\mathcal{U}\cdot D_{\xi}^{0,\beta-\gamma}\varphi_{\xi_1\xi_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_1\xi_i} D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q,\eta}\mathcal{U}$$

in cui le prime due somme sono note in 0 per l'ipotesi d'induzione. Ne segue che nell'origine si ha:

$$D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_1\xi_i}\mathcal{U}_{\tau_1}\right) = -\,2\,M\,D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q,\eta}\mathcal{U} + \textit{relazione nota.}$$

Ovviamente risulta:

$$D_{\xi}^{p,\beta} D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathcal{U}_{\xi_1\xi_i}\right) = D_{\xi}^{p+2,\beta} D_{\tau}^{q-1,\eta}\mathcal{U} + \sum_{i=2}^{n} D_{\xi}^{p,\beta+2\delta_i} D_{\tau}^{q-1,\eta}\mathcal{U}$$

e sono note in 0 le seguenti espressioni:

$$D_{\xi}^{p,\beta}\ D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{j=2}^{m} b_j\, \mathfrak{A}_{\tau_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{\sigma \leqslant \eta \\ s \leqslant q-1}} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ h \leqslant p}} \binom{\eta}{\sigma} \binom{q-1}{s} \binom{\beta}{\gamma} \binom{p}{h} D_{\xi}^{h,\gamma}\ D_{\tau}^{s,\sigma+\delta_j}\, \mathfrak{A} \cdot$$

$$\cdot\, D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma}\ D_{\tau}^{q-1-s,\eta-\sigma} b_j \ [6]$$

$$D_{\xi}^{p,\beta}\ D^{q-1,\eta}(c\, \mathfrak{A}) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \leqslant \eta \\ s \leqslant q-1}} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ h \leqslant p}} \binom{\eta}{\sigma} \binom{q-1}{s} \binom{\beta}{\gamma} \binom{p}{h} D_{\xi}^{h,\gamma}\ D_{\tau}^{s,\sigma}\, \mathfrak{A} \cdot D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma}\ D_{\tau}^{q-1-s,\eta-\sigma} c$$

$$D_{\xi}^{p,\beta}\ D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathfrak{A}_{\xi_i}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \leqslant \eta \\ s \leqslant q-1}} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ h \leqslant p}} \binom{\eta}{\sigma} \binom{q-1}{s} \binom{\beta}{\gamma} \binom{p}{h} \left(D_{\xi}^{h+1,\gamma}\ D_{\tau}^{s,\sigma}\, \mathfrak{A} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{n} D_{\xi}^{h,\gamma+\delta_i}\ D_{\tau}^{s,\sigma}\, \mathfrak{A} \right) \cdot D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma}\ D_{\tau}^{q-1-s,\eta-\sigma} a_i$$

Osserviamo inoltre che

$$D_{\xi}^{p,\beta}\ D_{\tau}^{q-1,\eta}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi_{\xi_i}\ \mathfrak{A}_{\tau_1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ h \leqslant p}} \sum_{\substack{\mu \leqslant \gamma \\ r \leqslant h}} \sum_{\substack{\sigma \leqslant \eta \\ s \leqslant q-1}} \binom{\beta}{\gamma} \binom{p}{h} \binom{\gamma}{\mu} \binom{h}{r} \binom{\eta}{\sigma} \binom{q-1}{s} D_{\xi}^{r,\mu}\ D_{\tau}^{s+1,\sigma}\, \mathfrak{A} \cdot$$

$$\cdot\, D_{\xi}^{h-r,\gamma-\mu}\ D_{\tau}^{q-1-s,\eta-\sigma}\ a_i \cdot D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma}\ \varphi_{\xi_i}$$

[6] Ancora con δ_i si denota la $(m-1)$*−pla* avente tutte le coordinate nulle tranne la *i-sima*, che è uguale ad 1.

e che nell'origine sono nulli tutti gli addendi per i quali risulta $\gamma = \beta$ e $h = p$, mentre tutti gli altri danno relazioni note.

Infine risulta:

$$D_{\xi}^{p,\beta}\, D_{\tau}^{q-1,\eta} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\, \mathfrak{A}_{\tau_j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{\sigma \leqslant \eta \\ s \leqslant q-1}} \sum_{\substack{\gamma \leqslant \beta \\ h \leqslant p}} \binom{\eta}{\sigma} \binom{q-1}{s} \binom{\beta}{\gamma} \binom{p}{h} D_{\xi}^{h,\gamma}\, D_{\tau}^{s+1,\sigma}\, \mathfrak{A} \cdot$$

$$\cdot\, D_{\xi}^{p-h,\beta-\gamma}\, D_{\tau}^{q-1-s,\eta-\sigma}\, b_j \,.$$

Osservato che gli addendi che si ottengono per $s \leq q - 2$ oppure per $h \leq p - 1$ ed $s = q - 1$ sono noti in 0, si vede facilmente che nell'orgine si ha:

$$D_{\xi}^{p,\beta}\, D_{\tau}^{q-1,\eta} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\, \mathfrak{A}_{\tau_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} b_j\, D_{\xi}^{p,\beta}\, D_{\tau}^{q,\eta}\, \mathfrak{A} + \textit{relazione nota.}$$

In definitiva nell'origine risulta:

$$\left(4\,M\,p + 2\,M - \sum_{i=1}^{m} b_i \right) D_{\xi}^{p,\beta}\, D_{\tau}^{q,\eta}\, \mathfrak{A} +$$

$$+ D_{\xi}^{p+2,\beta}\, D_{\tau}^{q-1,\eta}\, \mathfrak{A} + \sum_{i=2}^{n} D_{\xi}^{p,\beta+2\delta_i}\, D_{\tau}^{q-1,\eta}\, \mathfrak{A} + \tag{12}$$

$$+ 4\,M^2 p\,(p-1)\, D_{\xi}^{p-2,\beta}\, D_{\tau}^{q+1,\eta}\, \mathfrak{A} = \textit{relazione nota.}$$

A questo punto si considerano separatamente i problemi concernenti le derivate $D_{\xi}^{p,\beta}\, D_{\tau}^{q,\eta}\, \mathfrak{A}(0)$ corrispondenti alle diverse situazioni di parità di $|\beta|$, $|\eta_i|$, p; la discussione nei diversi casi è sempre la medesima ed i risultati, come si è preannunciato, si differenziano solo in riferimento alla parità di $|\beta| + |\eta_i| + p$.

Consideriamo ad esempio il caso in cui $|\beta| + |\eta| + p$, $|\beta|$, $|\eta|$ sono pari. Isoliamo allora le relazioni (12) conseguenti all'applicazione degli operatori

$$D_{\xi}^{2(j-j_1),\beta} \quad D_{\tau}^{k(j+s)-1,\eta}$$

con

$$\begin{aligned} &|\beta| = 2j_1 \quad ; \qquad |\eta| = 2s \\ &s = 0, 1, \ldots, k-1 \\ &j_1 = 0, 1, \ldots, k-(s+1) \\ &j = j_1, j_1+1, \ldots, k-(s+1) \end{aligned} \tag{13}$$

ed osserviamo che le derivate

$$D_{\xi}^{2(j-j_1),\beta} \quad D_{\tau}^{k-(j+s),\eta} \; \mathfrak{L}(0) \tag{14}$$

con le limitazioni (13) rappresentano tutte le derivate in esame.

Moltiplicando per $(4\,M)^{k-(j+s)-1}$ si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned} &\left(2(j-j_1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\,M} \sum_{i=1}^{n} b_i(0)\right)(4\,M)^{k-(j+s)} D_{\xi}^{2(j-j_1),\beta} \; D_{\tau}^{k-(j+s),\eta} \; \mathfrak{L} + \\ &+ (4\,M)^{k-(j+s)-1} D_{\xi}^{2(j-j_1+1),\beta} \; D_{\tau}^{k-(j+s)-1,\eta} \; \mathfrak{L} + \\ &+ \sum_{i=2}^{n} (4\,M)^{k-(j+s)-1} D_{\xi}^{2(j-j_1),\beta+2\delta_i} \; D_{\tau}^{k-(j+s)-1,\eta} \; \mathfrak{L} + \\ &+ (j-j_1)\left(j-j_1-\frac{1}{2}\right)(4\,M)^{k-(j+s)+1} D_{\xi}^{2(j-j_1-1),\beta} \; D_{\tau}^{k-(j+s)+1,\eta} \; \mathfrak{L} = \\ &= \textit{relazione nota} \end{aligned} \tag{15}$$

con le limitazioni (13).

Per $j_1 = k-(s+1)$, poiché in tal caso può essere solo $j = j_1 = k-(s+1)$ e poiché sono note in 0 le derivate in cui non figura

alcuna derivazione rispetto a τ_1, il sistema (15) si può scrivere nella forma:

$$(16) \qquad 4\,M\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\,M}\sum_{i=1}^{m}b_i\right)D_{\xi}^{0,\beta}\,D_{\tau}^{1,\eta}\,\mathfrak{A}=\textit{relazione nota}$$

e da esso, se $M \neq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i(0)$, si ricavano le seguenti derivate:

$$(17) \qquad D_{\xi}^{0,\beta}\,D_{\tau}^{1,\eta}\,\mathfrak{A}(0) \qquad |\beta| = 2(k-s-1)\ ,\quad |\eta| = 2s$$

altrimenti si hanno condizioni di compatibilità; ciò si può esprimere dicendo che le due situazioni si verificano a seconda che la quantità z, data dalla (7), è uno zero di $L_1^{(-1/2)}$ oppure no.

Se $k-s-2 \geq 0$, osservato che tra le (17) si trovano le derivate:

$$D_{\xi}^{0,\beta+2\delta_i}\,D_{\tau}^{1,\eta}\,\mathfrak{A}(0) \qquad |\beta| = 2(k-s-2)\ ,\quad |\eta| = 2s\ ,\quad i = 2, 3, \ldots, n$$

per $j_1 = k-s-2$ il sistema (15) si può scrivere nella forma:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\,M}\sum_{i=1}^{m}b_i\right)(4\,M)^2\,D_{\xi}^{0,\beta}\,D_{\tau}^{2,\eta}\,\mathfrak{A}+4\,M\,D_{\xi}^{2,\beta}\,D_{\tau}^{1,\eta}\,\mathfrak{A}=$$

$$=\textit{relazione nota}$$

(18)

$$\frac{1}{2}(4\,M)^2\,D_{\xi}^{0,\beta}\,D_{\tau}^{2,\eta}\,\mathfrak{A}+4\,M\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4\,M}\sum_{i=1}^{m}b_i\right)D_{\xi}^{2,\beta}\,D_{\tau}^{1,\eta}\,\mathfrak{A}=$$

$$=\textit{relazione nota}$$

$$|\beta| = 2(k-s-2)\ ,\quad |\eta| = 2s$$

nelle incognite $(4\,M)^2\,D_{\xi}^{0,\beta}\,D_{\tau}^{2,\eta}\,\mathfrak{A}(0)$ e $4\,M\,D_{\xi}^{2,\beta}\,D_{\tau}^{1,\eta}\,\mathfrak{A}(0)$; tale sistema permette di determinare queste derivate se z non è una radice di $L_2^{(-1/2)}$ mentre fornisce condizioni di compatibiltà se z è uno zero di tale polinomio.

Sia ora $k - s - 2 > 0$, supponiamo note le derivate (14) con

$$j_1 \geq h + 1 \in \{1, 2, \ldots, k - s - 2\}$$
$$j = j_1, j_1 + 1, \ldots, k - (s + 1)$$
$$|\beta| = 2 j_1 \quad , \qquad |\eta| = 2 s$$

consideriamo le (14) per $j_1 = h$. Osserviamo poi che le derivate:

$$D_\xi^{2(j-h),\beta+2\delta_i} \; D_\tau^{k-(j+s)-1,\eta} \mathfrak{A}(0)$$
$$j = h, h + 1, \ldots, k - (s + 1)$$
$$s = 0, 1, \ldots, k - 1$$
$$i = 2, 3, \ldots, n$$
$$|\beta| = 2 h \quad , \qquad |\eta| = 2 s$$

sono note perché esse si trovano fra le (14) per $j_1 = h + 1$ e che se $j = k - (s + 1)$, $D_\xi^{2(j-h),\beta} D_\tau^{k-(j+s)-1,\eta} \mathfrak{A}(0)$ è nota. Allora il nostro sistema è il seguente:

$$\left(2(j - h) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\,M} \sum_{i=1}^{m} b_i\right) (4\,M)^{k-(j+s)} D_\xi^{2(j-h),\beta} D_\tau^{k-(j+s),\eta} \mathfrak{A} +$$

$$+ (4\,M)^{k-(j+s)-1} D_\xi^{2(j-h+1),\beta} D_\tau^{k-(j+s)-1,\eta} \mathfrak{A} + \tag{19}$$

$$+ (j - h)\left(j - h - \frac{1}{2}\right) (4\,M)^{k-(j+s)+1} D_\xi^{2(j-h-1),\beta} D_\tau^{k-(j+s)+1,\eta} \mathfrak{A} =$$

$$= \textit{relazione nota}$$

$$j = h, h + 1, \ldots, k - (s + 1)\,; \quad |\beta| = 2 h\,; \quad |\eta| = 2 s$$

nelle incognite:

$$(4\,M)^{k-(j+s)} D_\xi^{2(j-h),\beta} D_\tau^{k-(j+s),\eta} \mathfrak{A}(0)\,.$$

Chiaramente il determinante dei coefficienti di questo sistema risulta

il prodotto dei determinanti che si ottengono per β ed η fissati e cioè, come è facile verificare, posto $\rho = k - s - h$, dei determinanti:

$$\mathfrak{D}_{\rho}^{\beta,\eta} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - z & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} - z & 1 \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & (\rho-2)\left(\rho-\frac{5}{2}\right) & 2\rho-\frac{7}{2}-z & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & (\rho-1)\left(\rho-\frac{3}{2}\right) & 2\rho-\frac{3}{2}-z \end{vmatrix}$$

Si vede che risulta:

$$\mathfrak{D}_{\rho}^{\beta,\eta} = \left(2\rho - \frac{3}{2} - z\right) \mathfrak{D}_{\rho-1}^{\beta,\eta} - (\rho - 1)\left(\rho - \frac{3}{2}\right) \mathfrak{D}_{\rho-2}^{\beta,\eta} \qquad \rho > 2$$

D'altra parte si ha:

$$\mathfrak{D}_{1}^{\beta,\eta} = -\frac{1}{2} - z = \mathrm{L}_{1}^{(-1/2)}(z)$$

ed inoltre:

$$\mathfrak{D}_{2}^{\beta,\eta} = \left(-\frac{1}{2} - z\right)\left(\frac{5}{2} - z\right) - \frac{1}{2} = 2\,\mathrm{L}_{2}^{(-1/2)}(z)$$

allora, tenendo presente la (5.1.10) di [4] scritta per $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$r\,\mathrm{L}_{r}^{(-1/2)}(z) = \left(-z + 2r - \frac{3}{2}\right) \mathrm{L}_{r-1}^{(-1/2)}(z) +$$

$$- \left(r - \frac{3}{2}\right) \mathrm{L}_{r-2}^{(-1/2)}(z) \qquad r = 2, 3, \dots$$

facilmente si ottiene:

$$\mathfrak{D}_{\rho}^{\beta,\eta}(z) = \rho!\, \mathrm{L}_{\rho}^{(-1/2)}(z).$$

Pertanto, se z non è uno zero di $L_\rho^{(-1/2)}$, il sistema (19) permette di determinare le (14) in corrispondenza di $j_1 = h$, e d'altra parte se z è radice di $L_\rho^{(-1/2)}$ si hanno condizioni di compatibilità. Allora, note le (14) per $j_1 = k - s - 1,\ k - s - 2$, sono note le (14) per $j_1 = k - s - 3, \ldots, 0$ a patto che z non sia radice di

$$L_3^{(-1/2)}, \ldots, L_{k-s}^{(-1/2)}$$

altrimenti si hanno condizioni di compatibilità.

Osservato che $s = 0, 1, \ldots, k - 1$ e ricordando le considerazioni svolte nei casi $j_1 = k - s - 1,\ k - s - 2$, si ha in denitiva che se z non è radice di

$$L_1^{(-1/2)}, \ldots, L_k^{(-1/2)}$$

sono note tutte le derivate (14), altrimenti $\mathfrak{V}$ e le sue derivate debbono soddisfare delle condizioni di compatibilità.

In modo analogo si ragiona in tutti gli altri casi; i risultati sono i medesimi a meno di sostituire $L_h^{(1/2)}$ ad $L_h^{(-1/2)}$ quando si esamina l'eventualità che $|\beta| + |\gamma_j| + p$ è dispari.

BIBLIOGRAFIA

[1] Fichera G., *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine*, Atti Acc. Naz. Lincei, Mem., Ser. 8, vol. 5, pp. 1-30 (1956).

[2] Fichera G., *On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. Boundary Value Problems in Differential Equations*, Univ. of Wisconsin Press, Madison, pp. 97-120 (1960).

[3] Kohn J., Nirenberg L., *Degenerate elliptic-parabolic equations of second order*, Comm. Pure and Applied Math., XX, pp. 797-872 (1967).

[4] Szegö G., *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23 (1959).

On the regularity of solutions of unilateral variational problems

Nota di GIOVANNI M. TROIANIELLO *
presentata dal socio corrispondente GUIDO STAMPACCHIA

(Adunanza del 3 maggio 1975)

RIASSUNTO. — Nel caso di una classe di problemi variazionali unilaterali con condizioni miste al bordo per un operatore del secondo ordine uniformemente ellittico a coefficienti discontinui, l'A. dimostra una disuguaglianza di tipo Lewy-Stampacchia, dalla quale si deducono alcuni risultati di regolarità.

SUMMARY. — In the case of a class of unilateral variational problems with mixed boundary conditions for a uniformly elliptic second-order operator with discontinuous coefficients, the A. proves an inequality of the Lewy-Stampacchia type, from which some results of regularity are deduced.

INTRODUCTION.

We consider a 2nd order uniformly elliptic linear operator of the type

$$L\,u = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u\,.$$

The coefficients are assumed to be real-valued measurable functions in a bounded open subset Ω of $\mathbb{R}^N$, which satisfy suitable conditions so that the bilinear form

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c\,u\,v \right\} dx$$

is continuous on $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ and is coercive on a closed linear subspace V of $H^1(\Omega)$, $V \supseteq H_0^1(\Omega)$.

* Istituto Matematico dell'Università di Roma.

If the following convex and closed subset of V:

$$|K = \{v \in V : v \geq \psi \text{ a.e. in } \Omega\}, \quad \psi \in H^1(\Omega),$$

is not empty, then, given F in the dual space V′ of V, there exists a unique solution u of the variational inequality

$$(*) \qquad u \in |K, \quad a(u, v-u) \geq (F, v-u)_{V,V'} \quad \text{for every } v \in |K$$

where $(\cdot, \cdot)_{V,V'}$ denotes the duality pairing between V and V′ (see [7]).

The functional $Lu \in H^{-1}(\Omega)$ satisfies the inequality

$$(**) \qquad Lu \geq f \text{ in } \Omega$$

in the sense of distributions, f being the restriction of F to $H_0^1(\Omega)$. The main purpose of this paper is to prove that, if $L\psi - f$ is a measure in Ω whose positive part $(L\psi - f)^+$ belongs to $H^{-1}(\Omega)$, then Lu also satisfies the inequality.

$$(***) \qquad Lu \leq (L\psi - f)^+ + f \text{ in } \Omega.$$

LEWY and STAMPACCHIA [4] proved (***) in the context of the theory of superharmonic functions, taking

$$Lu = -\Delta u, \quad f = 0,$$

and assuming $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$, $\psi < 0$ on the boundary of Ω. Later, Mosco and the present author [9] proved (***) for variational solutions of unilateral Dirichlet problems, with

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad f = 0;$$

ψ was assumed to be a function of $H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, non-positive on the boundary of Ω, while $(L\psi)^+$ was not required to be in $H^{-1}(\Omega)$.

Here we proceed as follows.

First (Theorem 1), we prove (***) in the case $V = H_0^1(\Omega)$, by approximating u with solutions of variational inequalities to which the result of [9] can be applied. Then (Theorem 2), in the general case of a space V as above, we reduce (*) to a variational inequality in $H_0^1(\Omega)$, thus obtaining (***) as a consequence of the previous result.

We also make use of (***), together with (**), in order to investigate the regularity of the solution u when V equals either $H_0^1(\Omega)$ (Lemma 2) or $H^1(\Omega)$ (Lemma 4).

1. Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$, $\overline{\Omega}$ its closure and $\partial\Omega$ its boundary. We suppose that $\partial\Omega$ coincides with the boundary of $\overline{\Omega}$ and admits locally a Lipschitz representation.

Let $H^1(\Omega)$ be the completion of $C^1(\overline{\Omega})$ [1] with respect to the norm

$$\| v \|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \| v \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

and let $H_0^1(\Omega)$ be the closure of $C_0^1(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. We use the symbol $(\cdot, \cdot)$ to denote the duality pairing between $H_0^1(\Omega)$ and its dual space $H^{-1}(\Omega)$.

If E is any compact subset of $\overline{\Omega}$, we say that an element v of $H^1(\Omega)$ is ≥ 0 on E in $H^1(\Omega)$ if it is the limit in $H^1(\Omega)$ of a sequence $\{v_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ such that $v_n(x) \geq 0$ on E for every n.

Due to the smoothness of $\partial\Omega$, v is ≥ 0 on $\overline{\Omega}$ in $H^1(\Omega)$ if and only if it is ≥ 0 a.e. in Ω.

We consider the following bilinear form on $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$(1) \qquad a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c\, u\, v \right\} dx,$$

where

$$(2) \qquad a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{for every} \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

$$(3) \qquad b_i \in L^q(\Omega) \quad \text{for every} \quad i = 1, \ldots, N,\ c \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega),\ q > N.$$

We assume

$$(4) \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \nu\, |\xi|^2 \quad \text{for every} \quad \xi \in \mathbb{R}^N \text{ and a.e. } x \in \Omega,$$

with ν positive constant,

$$(5) \qquad c \geq 0 \quad \text{a.e. in} \quad \Omega,$$

and, in the sense of distributions,

$$(6) \qquad c - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

[1] We only consider *real-valued* functions.

Finally, we set

$$(7) \qquad \mathrm{L}\,u = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\,u\,,$$

so that L is a bounded linear operator from $\mathrm{H}^1(\Omega)$ into $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

2. Let us now suppose that the form (1) is *coercive* on $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, i.e.,

$$(8) \qquad a(v, v) \geq \alpha \| v \|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \quad \text{for every} \quad v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,,$$

α being a positive constant. Then, given a non-empty closed and convex subset $|\mathrm{K}$ of $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ and a functional $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, there exists a unique solution of the *variational inequality*

$$(9) \qquad u \in |\mathrm{K}, \quad a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \text{for every} \quad v \in |\mathrm{K}$$

(see [7]).

As the set $|\mathrm{K}$ let us take the following one:

$$(10) \qquad |\mathrm{K} = \{ v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) : v \geq \psi \ \text{ a.e. in } \Omega \}\,,$$

where

$$(11) \qquad \psi \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,, \ \psi \leq 0 \ \text{ on } \partial\Omega \ \text{ in } \mathrm{H}^1(\Omega)\,.$$

Any function $v = u + \varphi$, with u solution of (9) and $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$ $\varphi \geq 0$ in Ω, belongs to $|\mathrm{K}$; hence, from (9) it follows that

$$(12) \qquad \mathrm{L}\,u \geq f \ \text{ in } \Omega$$

in the sense of distributions. We are going to prove

THEOREM 1. *Let* (8) *and* (11) *be satisfied, and let the distribution* $\mathrm{L}\,\psi - f$, $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, *be a measure in* Ω *such that its positive part* $(\mathrm{L}\,\psi - f)^+$ *belongs to* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. *If* u *is the solution of* (9), *where* $|\mathrm{K}$ *is the set* (10), *the distribution* $\mathrm{L}\,u$ *satisfies the inequality*

$$(13) \qquad \mathrm{L}\,u \leq (\mathrm{L}\,\psi - f)^+ + f \ \text{ in } \Omega\,.$$

PROOF. We begin with the case in which

$$(14) \qquad f = 0\,.$$

The corresponding inequality, i.e.

$$L u \leq (L \psi)^+ \quad \text{in } \Omega , \tag{15}$$

was proved in [9] under the additional assumption

$$\psi \in C^0(\bar{\Omega}) ,$$

without requiring $(L \psi)^+ \in H^{-1}(\Omega)$ [2].

For the time being, we assume the following

LEMMA 1. *If* $\mu \in H^{-1}(\Omega)$, $\mu \geq 0$ *in* Ω, *then* μ *is the (strong) limit in* $H^{-1}(\Omega)$ *of a sequence* $\{\mu_n\} \subset L^\infty(\Omega)$, $\mu_n \geq 0$ *a.e. in* Ω,

which we shall prove later. Then, by the assumption $(L \psi)^+ \in H^{-1}(\Omega)$, there exists a sequence $\{g_n'\} \subset L^\infty(\Omega)$, $g_n' \geq 0$ a.e. in Ω, which convergens in $H^{-1}(\Omega)$ to $(L \psi)^+$. Similarly, since the negative part $(L \psi)^- = (L \psi)^+ - L \psi$ of $L \psi$ also belongs to $H^{-1}(\Omega)$, there exists a sequence $\{g_n''\} \subset L^\infty(\Omega)$, $g_n'' \geq 0$ a.e. in Ω, which converges in $H^{-1}(\Omega)$ to $(L \psi)^-$.

Let ψ be the limit in $H^1(\Omega)$ of a sequence $\{\tilde{\psi}_n\} \subset C^1(\bar{\Omega})$, $\tilde{\psi}_n(x) \leq 0$ on $\partial \Omega$ for every n. The solution ψ_n of the non-homogeneous Dirichlet problem

$$\psi_n - \tilde{\psi}_n \in H_0^1(\Omega), \; L \psi_n = g_n' - g_n'' \text{ in } \Omega$$

is Hölder continuous in $\bar{\Omega}$ (see [12]); moreover, $\psi_n \to \psi$ in $H^1(\Omega)$ as $n \to \infty$.

Set

$$|K_n = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi_n \text{ a.e. in } \Omega\} .$$

Clearly, the limit of any sequence $\{v_{n_j}\}$, $v_{n_j} \in |K_{n_j}$, weakly converging in $H^1(\Omega)$, is an element of $|K$, whereas any $v \in |K$ is the (strong) limit of the sequence $\{v_n\}$, $v_n = \sup\{v, \psi_n\} \in |K_n$ (see [3]). Thus, in the sense of [8],

$$|K = \operatorname{Lim} |K_n . \tag{16}$$

[2] The lower-order terms of the operator considered in [9] were assumed to vanish identically. However, it can still be proved that potentials generated by positive measures of bounded variation, *relative to our operator* L, have lower semicontinuous representatives defined everywhere in Ω. To this end, it suffices to proceed along the lines of [3], by using the maximum principle for the adjoint operator of L which is insured by (6) and (8) (see [12]). Thus the proof of the Theorem in [9] can be repeated, without any change, in the situation we are now dealing with.

Now let u_n be the solution of the variational inequality

$$u_n \in |K_n, \quad a(u_n, v - u_n) \geq 0 \quad \text{for every} \quad v \in |K_n .$$

Because of (16), we can apply Theorem A of [8]; therefore, $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$ as $n \to \infty$. On the other hand, due to the continuity of each ψ_n on $\overline{\Omega}$, the above-mentioned Theorem of [9] yields

$$L u_n \leq (L \psi_n)^+ \leq g_n' \text{ a.e. in } \Omega . \tag{17}$$

Thus, we obtain (15) passing to the limit as $n \to \infty$ in (17).

Let us now drop (14) and consider the general case in Theorem 1. We denote by $\tilde{u}$ the solution of the Dirichlet problem

$$\tilde{u} \in H_0^1(\Omega) , \quad L\tilde{u} = f ,$$

and set

$$u' = u - \tilde{u} ,$$

$$\psi' = \psi - \tilde{u} ,$$

$$|K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi' \text{ a.e. in } \Omega\} .$$

Then u' is the solution of the variational inequality

$$u' \in |K', \quad a(u', v - u') \geq 0 \quad \text{for every} \quad v \in |K' .$$

Since $(L\psi')^+ = (L\psi - f)^+$ is in $H^{-1}(\Omega)$, the part of the theorem already proved insures

$$L u' \leq (L \psi')^+ \quad \text{in } \Omega ,$$

which is precisely (13).

PROOF OF LEMMA 1. Let μ be the limit in $H^{-1}(\Omega)$ of a sequence $\{\tilde{\mu}_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$. Then the solution of the Dirichlet problem

$$\tilde{w} \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta \tilde{w} = \mu \quad \text{in } \Omega ,$$

is the limit in $H^1(\Omega)$ of the sequence $\{\tilde{w}_n\}$, with

$$\tilde{w}_n \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta \tilde{w}_n = \tilde{\mu}_n \quad \text{in } \Omega .$$

We set

$$|\tilde{\mathrm{K}}_n = \{v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) : v \geq \tilde{w}_n \quad \text{a.e. in } \Omega\},$$

and denote by w_n the solution of the variational inequality

$$w_n \in |\tilde{\mathrm{K}}_n, \quad (-\Delta w_n, v - w_n) \geq 0 \quad \text{for every} \quad v \in |\tilde{\mathrm{K}}_n.$$

Thus, the distribution $\mu_n = -\Delta w_n$ is a function of $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$,

$$\mu_n \geq 0 \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

As $n \to \infty$, w_n converges in $\mathrm{H}^1(\Omega)$ to the solution of the variational inequality

$$w \in |\tilde{\mathrm{K}}, \quad (-\Delta w, v - w) \geq 0 \quad \text{for every} \quad v \in |\tilde{\mathrm{K}},$$

where

$$|\tilde{\mathrm{K}} = \{v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) : v \geq \tilde{w} \quad \text{a.e. in } \Omega\}$$

(see [8]). But then $w = \tilde{w}$, and μ is the limit in $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ of the sequence $\{\mu_n\}$, which has the required properties.

3. The inequality (13), together with (12), can be used to investigate the regularity of the solution of (9) in the light of the results of regularity for solutions of homogeneous Dirichlet problems. As an example, we have the following lemma (see also [2] and [3]):

LEMMA 2. *In addition to the hypotheses of theorem 1, let f and $(\mathrm{L}\psi - f)^+$ belong to $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $p > \mathrm{N}/2$. Then the solution u of (9) is Hölder continuous in $\overline{\Omega}$.*

PROOF. Under the present assumptions, (12) and (13) yield $\mathrm{L}u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Thus, Hölder continuity follows from a result which has already been used above (again, we refer to [12]).

4. Let us now introduce a closed linear subspace V of $\mathrm{H}^1(\Omega)$, with dual V'. We suppose $\mathrm{V} \supseteq \mathrm{H}_0^1(\Omega)$; this enables us to consider the restriction to $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ of any $\mathrm{F} \in \mathrm{V}'$, i.e., the functional $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ which is defined by means of the identity

$$(f, v) = (\mathrm{F}, v)_{\mathrm{V},\mathrm{V}'} \quad \text{for every} \quad v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega),$$

where $(\cdot, \cdot)_{\mathrm{V},\mathrm{V}'}$ denotes the duality between V and V'.

From now on, for any choice of the space V we replace (8) with the assumption

$$a(v, v) \geq \alpha \| v \|^2_{H^1(\Omega)} \quad \text{for every} \quad v \in V , \tag{18}$$

α being a suitable positive constant (coerciveness on V). Thus, again by the general theorem proved in [7], given a non-empty closed and convex subset $|K$ of V and a functional $F \in V'$, the variational inequality

$$u \in |K, \quad a(u, v - u) \geq (F, v - u)_{V,V'} \quad \text{for every} \quad v \in |K \tag{19}$$

has a unique solution u.

In particular, let

$$|K = \{ v \in V : v \geq \psi \quad \text{a.e.} \quad \text{in } \Omega \} , \tag{20}$$

$\psi \in H^1(\Omega)$. If $|K \neq \emptyset$ (so that the solution of (19) esists), Lu satisfies the inequality

$$Lu \geq f \quad \text{in } \Omega \tag{21}$$

in the sense of distributions, f being the restriction of F to $H^1_0(\Omega)$.

We have

THEOREM 2. *Let $\psi \in H^1(\Omega)$ be such that the set $|K$ defined by* (20) *is not empty, and let $L\psi - f$, with f restriction to $H^1_0(\Omega)$ of $F \in V'$, be a measure in Ω whose positive part $(L\psi - f)^+$ belongs to $H^{-1}(\Omega)$. Then the distribution Lu, with u solution of* (19), *satisfies the inequality*

$$Lu \leq (L\psi - f)^+ + f \quad \text{in } \Omega . \tag{22}$$

PROOF. Let $\hat{u}$ be the solution of the boundary value problem

$$\hat{u} - u \in H^1_0(\Omega) , \quad L\hat{u} = L\psi \quad \text{in } \Omega ,$$

and set

$$|K_0 = \{ v \in H^1_0(\Omega) : v \geq \psi - \hat{u} \quad \text{a.e.} \quad \text{in } \Omega \} .$$

Clearly, $|K_o \neq \emptyset$ because $\hat{u} \geq \psi$ on $\partial\Omega$ in $H^1(\Omega)$, and $\hat{u} + w \in |K$ whenever $w \in |K_o$. Thus, (19) yields

$$a(u, \hat{u} + w - u) \geq (F, \hat{u} + w - u)_{V,V'},$$

or, equivalently,

$$a(u - \hat{u}, w - (u - \hat{u})) \geq (F, w - (u - \hat{u}))_{V,V'} -$$

$$- a(\hat{u}, w - (u - \hat{u})),$$

for every $w \in |K_o$. To sum up, the function

$$u_o = u - \hat{u}$$

is the solution of the variational inequality

(23) $\quad u_o \in |K_o, \quad a(u_o, w - u_o) \geq (f - L\psi, w - u_o)$ for every $w \in |K_o$.

Let us apply Theorem 1 to the solution of (23). By a straightforward computation, we obtain

$$L u_o \leq (L\psi - f)^+ + f - L\psi \quad \text{in } \Omega,$$

which coincides with (22) because of the identity

$$L u_o = L u - L\psi.$$

5. Our next result shows that, for a suitable choice of the space V and of the functional F, the solution of (19) coincides with the solution of a unilateral problem in which the constraint is given only on (a portion of) $\partial\Omega$. This is a kind of inverse of Theorem 4.3 in [10].

Let $\partial_1\Omega$ be an open subset of $\partial\Omega$, $\partial_1\Omega \neq \partial\Omega$, and let $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \overline{\partial_1\Omega}$.

We take V to be the closure in $H^1(\Omega)$ of functions in $C^1(\overline{\Omega})$ vanishing on $\overline{\partial_1\Omega}$. Clearly, if $\partial_1\Omega = \emptyset$, V equals $H^1(\Omega)$.

$V(\partial_2\Omega)$ is the space of traces on $\partial_2\Omega$ of elements of V, i.e., the quotient space $V / H_o^1(\Omega)$ provided with the quotient norm, and $[V(\partial_2\Omega)]'$ is the dual space of $V(\partial_2\Omega)$. If $\partial_1\Omega = \emptyset$, then $V(\partial_2\Omega) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ and $[V(\partial_2\Omega)]' = H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$; we recall that, when $v \in H^1(\Omega)$ and $Lv \in L^2(\Omega)$, v has a *conormal derivative*, i.e.,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} n_j \quad \text{on } \partial\Omega \,^3,$$

[3] Here n_j is the j – th component of the unit vector normal to $\partial\Omega$ and directed towards the exterior of Ω.

in $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (see [6]). With the scalar product $\langle g, v|_{\partial_2\Omega}\rangle$ between any $g \in [V(\partial_2\Omega)]'$ and the trace $v|_{\partial_2\Omega} \in V(\partial_2\Omega)$ of any $v \in V$, we define g as ≥ 0 on $\partial_2\Omega$ if $\langle g, v|_{\partial_2\Omega}\rangle \geq 0$ for all $v \in V$ such that $v \geq 0$ on $\overline{\partial_2\Omega}$ in $H^1(\Omega)$.

LEMMA 3. *Let ψ be an element of $H^1(\Omega)$, $\psi \leq 0$ on $\overline{\partial_1\Omega}$ in $H^1(\Omega)$, and let $L\psi - f$, with*

$$f \in L^2(\Omega), \tag{24}$$

be a measure in Ω such that

$$(L\psi - f)^+ \in L^2(\Omega). \tag{25}$$

If u is the solution of (19), *where $|K$ is the set* (20) *and*

$$(F, v)_{V,V'} = \int_\Omega fv\,dx + \langle g, v|_{\partial_2\Omega}\rangle \quad \textit{for every} \quad v \in V,$$

$g \in [V(\partial_2\Omega)]'$, then

$$Lu \in L^2(\Omega). \tag{26}$$

Moreover, u coincides with the solution of the variational inequality

$$u \in |\widetilde{K},\ a(u, v-u) \geq \int_\Omega h(v-u)\,dx + \langle g, (v-u)|_{\partial_2\Omega}\rangle \quad \textit{for every} \quad v \in |\widetilde{K} \tag{27}$$

where

$$|\widetilde{K} = \{v \in V : v \geq \psi \quad \textit{on} \quad \partial_2\Omega \quad \textit{in} \quad H^1(\Omega)\},$$

and $h = Lu$.

PROOF. Once (24) and (25) have been taken into account, (26) follows from (21) and (22).

Because of (26), $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ belongs to $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ and, *a fortiori*, to $[V(\partial_2\Omega)]'$. It is easy to verify, by making use of Green's formula in (19) with $v = u + \varphi$, $\varphi \in V$ and $\varphi \geq 0$ a.e. in Ω, that

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - g \geq 0 \quad \text{on} \quad \partial_2\Omega. \tag{28}$$

Let us prove that, for all $v \in |\tilde{\mathrm{K}}$,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} - g, (v - u)\,|_{\partial_2\Omega} \right\rangle \geq 0 . \tag{29}$$

We first take $v \in |\mathrm{K} \subset |\tilde{\mathrm{K}}$, and decompose it by means of the equality

$$v = v \,\mathrm{V}\, u + (v - u) \,\Lambda\, 0$$

(V = supremum, Λ = infimum). Since $v \,\mathrm{V}\, u - u \geq 0$ a.e. in Ω, from (28) it follows that

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} - g, (v \,\mathrm{V}\, u - u)\,|_{\partial_2\Omega} \right\rangle \geq 0 . \tag{30}$$

Let us now consider the functions

$$w_- = u - (v - u) \,\Lambda\, 0$$

and

$$w_+ = u + (v - u) \,\Lambda\, 0 = v \,\Lambda\, u .$$

Since $w_- \geq u \geq \psi$ a.e. in Ω, (19) yields

$$a\,(u, (v - u) \,\Lambda\, 0) \leq \int_\Omega f\,[(v - u) \,\Lambda\, 0]\, dx + \tag{31}$$

$$+ \,\langle g, [(v - u) \,\Lambda\, 0]\,|_{\partial_2\Omega} \rangle .$$

On the other hand, since $w_+ \geq \psi$, (19) also yields

$$a\,(u, (v - u) \,\Lambda\, 0) \geq \int_\Omega f\,[(v - u) \,\Lambda\, 0]\, dx + \tag{32}$$

$$+ \,\langle g, [(v - u) \,\Lambda\, 0]\,|_{\partial_2\Omega} \rangle .$$

By combining (31) and (32) and applying Green's formula, we obtain

(33)

$$\int_\Omega (f - \mathrm{L}\, u)\,[(v - u) \,\Lambda\, 0]\, dx = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} - g, [(v - u) \,\Lambda\, 0]\,|_{\partial_2\Omega} \right\rangle .$$

The letf-hand side of (33) is ≥ 0, while the right-hand side is ≤ 0 because of (28). Thus,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} - g, [(v - u) \wedge 0] \mid_{\partial_2\Omega} \right\rangle = 0 . \tag{34}$$

Due to (30) and (34), (29) is satisfied for all $v \in |K$. Now let $v \in |\tilde{K}$, and define $\overline{v} \in |K$ as

$$\overline{v} = v \vee \psi ;$$

since

$$\overline{v}|_{\partial_2\Omega} = v|_{\partial_2\Omega}$$

and

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu} - g, (\overline{v} - u) \mid_{\partial_2\Omega} \right\rangle \geq 0 ,$$

(29) is completly proved.

Finally, let us consider the inequality

$$\int_\Omega L u\,(v - u)\,dx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, (v - u) \mid_{\partial_2\Omega} \right\rangle \geq \tag{35}$$

$$\geq \int_\Omega L u\,(v - u)\,dx + \langle g, (v - u) \mid_{\partial_2\Omega} \rangle \quad \text{for everv} \quad v \in |\tilde{K}$$

which follows immediately from (29); using Green's formula in the left-hand side of (35), we see that u is the solution of (27).

6. We conclude with a result of regularity in the case

$$V = H^1(\Omega)$$

($\partial_1 \Omega = \emptyset$) which complements those obtained, in the case of a more general space as in the previous section, by MURTHY and STAMPACCHIA [10].

Let $H^2(\Omega)$ be the completion of $C^2(\overline{\Omega})$ with respect to the norm

$$\| v \|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \| v \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{N} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

We substitute (2) and (3) with the stronger assumptions

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{for every} \quad i, j = 1, \ldots, N, \tag{36}$$

and

$$b_i \in L^\infty(\Omega) \quad \text{for every} \quad i = 1, \ldots, N, \; c \in L^\infty(\Omega), \tag{37}$$

respectively. As a consequence, L is a continuous operator from $H^2(\Omega)$ into $L^2(\Omega)$.

We suppose $\partial\Omega$ smooth enough so that, given any $v \in H^2(\Omega)$, there exists $\overline{v} \in H^2(\Omega)$ with $\overline{v}|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$, $\frac{\partial \overline{v}}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$, and $\| \overline{v} \|_{H^2(\Omega)} \leq c_1 \| v \|_{H^2(\Omega)}$, c_1 being a positive constant independent of v; see [11].

LEMMA 4. *Let*

$$\psi \in H^2(\Omega) \tag{38}$$

and

$$f \in L^2(\Omega). \tag{39}$$

Then the solution u of (19), *with* IK *given by* (20) *and*

$$(F, v)_{H^1(\Omega), (H^1(\Omega))'} = \int_\Omega f v \, dx \quad \textit{for every} \quad v \in H^1(\Omega),$$

belongs to $H^2(\Omega)$; *furthermore, there exists a constant* $K > 0$ *such that*

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq K (\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| \psi \|_{H^2(\Omega)}) \tag{40}$$

PROOF. Let $\overline{\psi} \in H^2(\Omega)$ be such that

$$\overline{\psi}|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega}, \tag{41}$$

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{42}$$

and

$$\| \overline{\psi} \|_{H^2(\Omega)} \leq c_1 \| \psi \|_{H^2(\Omega)}. \tag{43}$$

From (41) it follows that, if $v \in H^1(\Omega)$ is ≥ 0 on $\partial\Omega$ in $H^1(\Omega)$, then $v + \bar{\psi}$ is $\geq \psi$ on $\partial\Omega$ in $H^1(\Omega)$. Thus, setting

$$\bar{u} = u - \bar{\psi},$$

$$|\bar{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \quad \text{in} \quad H^1(\Omega)\},$$

from Lemma 3 ($g = 0$) we deduce that $\bar{u}$ is the solution of

$$(44) \quad \bar{u} \in |\bar{K}, a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq \int_\Omega (h - L\bar{\psi})(v - \bar{u})\, dx \quad \text{for every} \quad v \in |\bar{K},$$

$h = Lu$, where (42) has been used.

To (44) we can apply a result by LIONS (see [5] and [1]). Hence $\bar{u} \in H^2(\Omega)$, which implies $u \in H^2(\Omega)$; moreover, there exists a constant $c_2 > 0$ such that

$$\| \bar{u} \|_{H^2(\Omega)} \leq c_2 (\| h - L\bar{\psi} \|_{L^2(\Omega)}),$$

and therefore

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq c_2 (\| h - L\bar{\psi} \|_{L^2(\Omega)}) + \| \bar{\psi} \|_{H^2(\Omega)}.$$

In the latter inequality we make use of (21) and (22), together with (43) and the continuity of $L : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Thus, we obtain (40), which completes the proof.

BIBLIOGRAPHY

[1] BRÉZIS H., *Problèmes unilateraux*, J. Math. Pures Appl., **51**, pp. 1-168 (1972).

[2] BRÉZIS H., STAMPACCHIA G., *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France, **96**, pp. 153-180 (1968).

[3] LEWY H., STAMPACCHIA G., *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. Pure Appl. Math., **22**, pp. 153-188 (1969).

[4] LEWY H., STAMPACCHIA G., *On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem*, J. Analyse Math., **23**, pp. 227-236 (1970).

[5] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires*, Dunod, Paris, 1969.

[6] LIONS J. L., MAGENES, E., *Problèmes aux limites non-homogènes et applications*, Vol. I, Dunod, Paris, 1970.

[7] LIONS J. L., STAMPACCHIA G., *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., **20**, pp. 493-519 (1967).

[8] MOSCO U., *Convergence of convex sets and solutions of variational inequalities*, Adv. in Math., **30**, pp. 510-585 (1969).

[9] MOSCO U., TROIANIELLO G. M., *On the smoothness of solutions of unilateral Dirichlet problems*, Boll. UMI, **8**, pp. 57-67 (1973).

[10] MURTHY M. K. V., STAMPACCHIA G., *A variational inequality with mixed boundary conditions*, Israel J. Math., **13**, pp. 188-224 (1972).

[11] NEČAS J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et C^{ie}, Paris, 1967.

[12] STAMPACCHIA G., *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15**, pp. 189-258 (1965).

Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico *

Nota II. Aliti a due componenti estranei

Nota di GIAN LORENZO VALENTI e VITTORIO SABATELLI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 3 maggio 1975)

RIASSUNTO. — Si sono studiate le proprietà idrauliche di soluzioni solide di silicato tricalcico contenenti coppie di ioni estranei, scelti fra Al^{+3}, Fe^{+3} e Mg^{+2}, mediante valutazione della resistenza meccanica a compressione e della reattività con l'acqua, misurata dall'idrossido di calcio prodotto nel corso della reazione di idratazione.

Si è notato che aliti contenenti Mg^{+2}, accoppiato sia con Al^{+3} che con Fe^{+3}, denunziano resistenze meccaniche e contenuti di idrossido di calcio neoformato inferiori in ogni caso a quelli presentati da aliti contenenti la coppia Al^{+3}-Fe^{+3}. Si è evidenziata inoltre la maggiore incisività dello ione Fe^{+3}, rispetto allo ione Al^{+3}.

Pur constatando una correlazione di massima fra resistenze meccaniche e tenori di idrossido di calcio prodotto, si è rilevato che tale correlazione è pienamente valida solo nell'ambito di soluzioni solide contenenti la stessa coppia di ioni.

SUMMARY. — The hydraulic properties of tricalcium silicate solid solutions containing couples of foreign ions, such as Al^{+3}, Fe^{+3} and Mg^{+2}, have been examined by evaluating their mechanical strength and reactivity toward water, measured on the ground of the amount of calcium hydroxide formed during the hydration.

It has been noticed that alites containing Mg^{+2}, coupled both with Al^{+3} and Fe^{+3}, showed mechanical strength and amounts of newly formed calcium hydroxide lower than alites containing the couple Al^{+3}-Fe^{+3}.

It has been moreover emphasized that Fe^{+3} ion appears more effective than Al^{+3}.

Even if a general relationship between mechanical strength and amount of free calcium hydroxide seems to be ascertained, it has been pointed out that this relationship appears entirely valid only in the case of solid solutions containing the same couple of ions.

* Lavoro svolto con il contributo finanziario del C.N.R.

Introduzione.

In una precedente Nota [1] si è studiata l'influenza dell'introduzione singola nel reticolo del silicato tricalcico di ioni Fe^{+3}, Al^{+3}, Mg^{+2}, sulla idraulicità dell'alite corrispondente.

Nei confronti del silicato tricalcico puro, aliti contenenti gli ioni Fe^{+3} o Al^{+3} denunziano una maggiore reattività con l'acqua, desunta in base ai valori delle concentrazioni dell'idrossido di calcio prodotto; aliti contenenti Mg^{+2}, invece, risultano meno reattive. Si è altresì rilevato che le aliti più reattive presentano anche i più alti valori delle resistenze meccaniche.

Poiché il silicato tricalcico presente nel « clinker » contiene nel suo reticolo più di uno ione estraneo, si è voluto approfondire lo studio precedentemente svolto [1], indagando sul comportamento idraulico di aliti contenenti simultaneamente, in soluzione solida, due dei tre ioni suddetti.

Parte sperimentale.

Sia il silicato tricalcico che le sue soluzioni solide sono stati sintetizzati a seguito di reazioni in fase solida alla temperatura di 1550° C. Per la preparazione delle miscele si sono utilizzati $CaCO_3$, SiO_2, $Al(OH)_3$, $(MgCO_3)_4 \cdot Mg(OH)_2 \cdot 5H_2O$, Fe_2O_3, tutti puri per analisi (C. Erba).

Le concentrazioni dei costituenti estranei al silicato tricalcico, sono state fissate in modo da rispettare i limiti di solubilità a 1550° C nel silicato tricalcico; è noto [2], infatti, che i limiti di solubilità singoli dell'MgO (2 %) e dell'Fe_2O_3 (1,1 %) come quelli dell'Al_2O_3 (1 %) e dell'MgO, rimangono invariati nel caso di simultaneo ingresso in soluzione solida, mentre i limiti di solubilità di Fe_2O_3 e Al_2O_3 si influenzano vicendevolmente.

Per le modalità sperimentali relative ai trattamenti termici, alla macinazione e alla vagliatura delle miscele generatrici e delle soluzioni solide così ottenute si rimanda alla precedente Nota [1]. Il grado di completezza della reazione è stato controllato a mezzo della valutazione della concentrazione della calce libera.

In tab. I sono riportate le percentuali prescelte degli elementi aggiunti come ossidi e la forma cristallografica di ciascun campione preso in esame. Come è stato già specificato nella Nota [1], la composizione chimica dei campioni è stata controllata a mezzo di analisi in assorbimento atomico; la forma cristallografica è stata determinata mediante analisi roentgenografica e termica differenziale. È stata al-

tresì determinata la superficie specifica (Blaine) di ciascun campione che è risultata compresa tra 5050 e 5250 cm^2/g; la valutazione, inoltre, della curva granulometrica ha posto in evidenza un andamento simile da parte di tutti i campioni.

TABELLA I

Percentuali degli elementi aggiunti come ossidi e forme cristallografiche del C_3S e delle relative soluzioni solide.

n. campione	Al_2O_3	Fe_2O_3	MgO	Forme polimorfe *
9	0,3	—	0,4	T (II°)
10	0,8	—	0,4	T (II°)
11	—	0,65	0,4	T (II°)
12	—	0,95	0,4	T (II°)
13	0,3	—	1,0	T (II°)
14	0,8	—	1,0	M(I°)
15	—	0,65	1,0	M(I°)
16	—	0,95	1,0	M(I°)
17	0,3	—	1,8	M(I°)
18	0,8	—	1,8	M(I°)
19	—	0,65	1,8	M(I°)
20	—	0,95	1,8	M(I°)
21	0,3	0,65	—	T (II°)
22	0,3	0,95	—	T (II°)
23	0,8	0,65	—	T (II°)
24	0,8	0,95	—	T (II°)

* T = sistema triclino
M = sistema monoclino

I campioni in esame sono stati sottoposti ad idratazione impiegando un rapporto acqua/solido pari a 0,45, alla temperatura di 20°C.

La preparazione delle paste, la loro conservazione per il periodo di stagionatura prefissato, l'arresto della reazione di idratazione ed i successivi trattamenti di macinazione ed essiccamento sono stati eseguiti con le modalità descritte nella precedente Nota [1]. Il controllo del grado di essiccamento [3] è stato effettuato mediante successive pesate. Come si rileva dalla tabella II si sono ritenuti i campioni com-

pletamente secchi quando la velocità di perdita di peso non superava 1 mg/g giorno [4].

La stima dell'idrossido di calcio prodotto è stata effettuata mediante analisi termoponderale, nell'intervallo 20° C-1000° C [5].

Le prove di resistenza a compressione sono state eseguite su provini di dimensioni 40 × 40 × 40 mm, confezionati con 92 % di C_3S o di sue soluzioni solide, e l'8 % di una miscela gesso-quarzo nel rapporto 3 a 5.

TABELLA II

Controllo del grado di essiccamento.

n. del campione	perdita assoluta (mg)	perdita relativa (mg/g)	velocità di perdita (mg/g/giorno)	perdita assoluta (mg)	perdita relativa (mg/g)	velocità di perdita (mg/g/giorno)
9	81,50	13,39	3,347	14,00	2,30	0,77
10	70,70	13,00	3,250	13,00	2,40	0,80
11	71,40	13,62	3,405	11,90	2,27	0,78
12	89,40	16,03	4,007	15,90	2,86	0,95
13	59,10	10,98	2,745	9,80	1,82	0,60
14	119,00	20,14	5,035	17,60	2,99	1,00
15	77,60	14,16	3,540	15,60	2,85	0,95
16	97,10	17,43	4,357	17,20	3,10	1,03
17	59,00	12,77	3,142	13,10	2,84	0,95
18	82,30	14,77	3,692	16,60	2,99	1,00
19	82,60	13,98	3,495	15,50	2,63	0,88
20	99,20	16,39	4,097	17,50	2,90	0,47
21	100,60	17,12	4,260	17,20	2,94	0,98
22	106,00	17,43	4,357	18,20	3,00	1,00
23	103,60	19,22	4,805	18,00	3,35	1,12
24	148,20	27,41	6,852	17,10	3,17	1,06

RISULTATI E DISCUSSIONE.

Per la valutazione del comportamento dei campioni esaminati nei riguardi della reattività con l'acqua e della resistenza meccanica, si è prescelto un tempo di stagionatura pari a 3 giorni, allo scadere del quale si sono misurati i valori delle concentrazioni dell'idrossido di

calcio prodotto e delle resistenze meccaniche a compressione, riportati in tab. III.

Dall'esame dei dati in tabella si rileva che le aliti contenenti simultaneamente, in soluzione solida, alluminio e ferro, manifestano i valori più elevati del contenuto di idrossido di calcio, mentre valori inferiori si riscontrano per le aliti nelle quali uno dei due componenti estranei è il magnesio: ciò è in accordo con quanto riscontrato per le

TABELLA III

Percentuali di idrossido di calcio e resistenze meccaniche a compressione ottenute dopo tre giorni di stagionatura.

n. del campione	% $Ca(OH)_2$	Resistenza meccanica (Kg/cm^2)
9	17,07	270
10	19,10	365
11	16,29	382
12	18,75	414
13	15,48	282
14	19,00	370
15	16,80	384
16	18,80	433
17	16,95	248
18	19,13	364
19	15,30	348
20	18,75	436
21	20,36	522
22	20,73	532
23	21,22	523
24	22,45	540

aliti ad un singolo componente estraneo [1], nell'ambito delle quali le soluzioni solide di C_3S contenenti magnesio denunziano una concentrazione di idrossido di calcio inferiore a quella riscontrata nel silicato tricalcico puro, mentre quelle contenenti Fe o Al manifestano valori più alti.

L'insieme di tali osservazioni risulta più evidente dal diagramma in fig. 1 dove sono schematicamente riportati i valori di concentrazione dell'idrossido di calcio relativi al silicato tricalcico puro e alle sue soluzioni solide ad uno e a due componenti estranei.

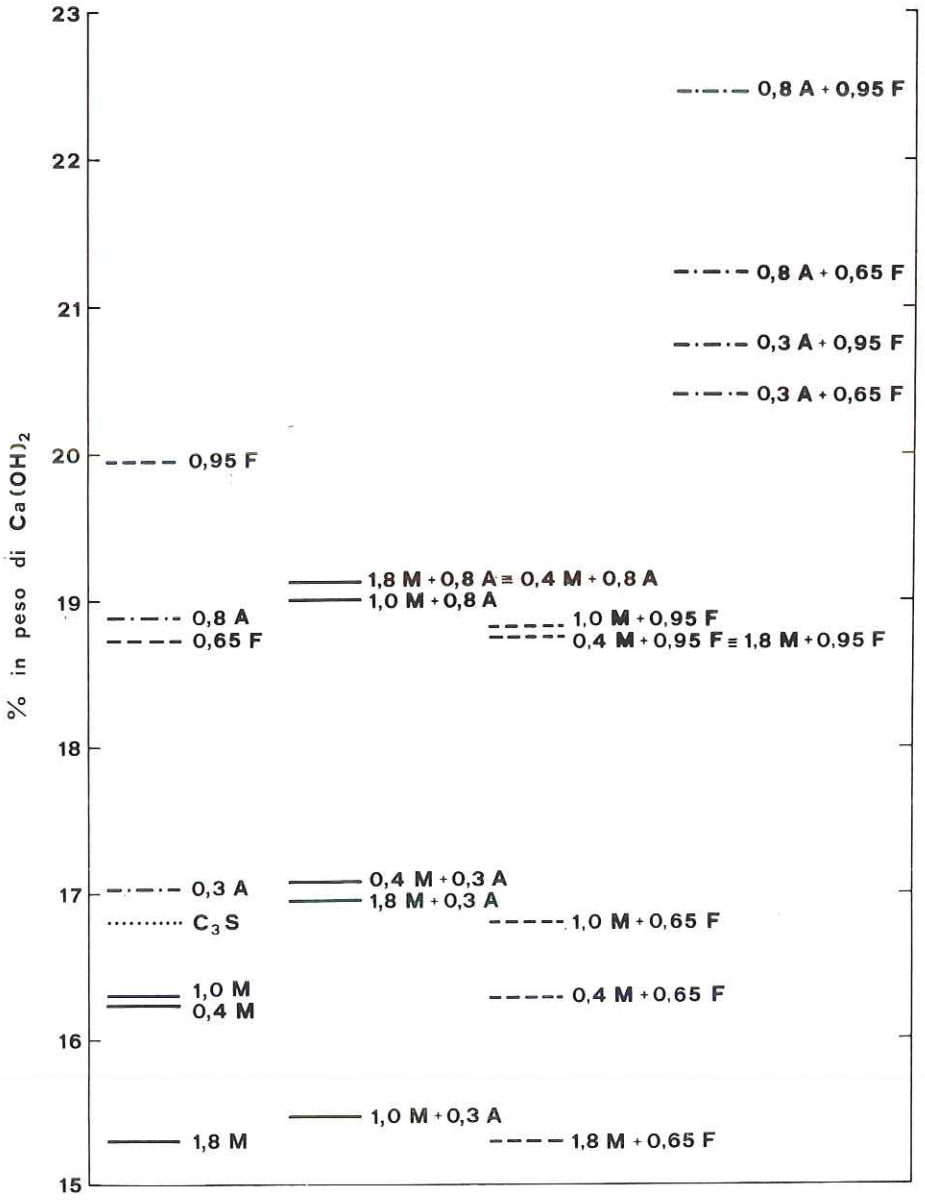


FIG. 1. - Raffronto fra i valori di concentrazione dell'idrossido di calcio relativi al silicato tricalcico puro e alle sue soluzioni solide ad uno e a due componenti estranei.

L'influenza esercitata dalle specie chimiche introdotte nel reticolo del C_3S e dal loro ammontare è illustrata nei diagrammi delle figg. 2, 3 e 4.

Dall'esame della fig. 2a si nota che l'aggiunta di Al_2O_3 in aliti a tenore costante di MgO induce variazioni nel contenuto di idrossido di calcio prodotto, che sono positive tranne che per il campione con-

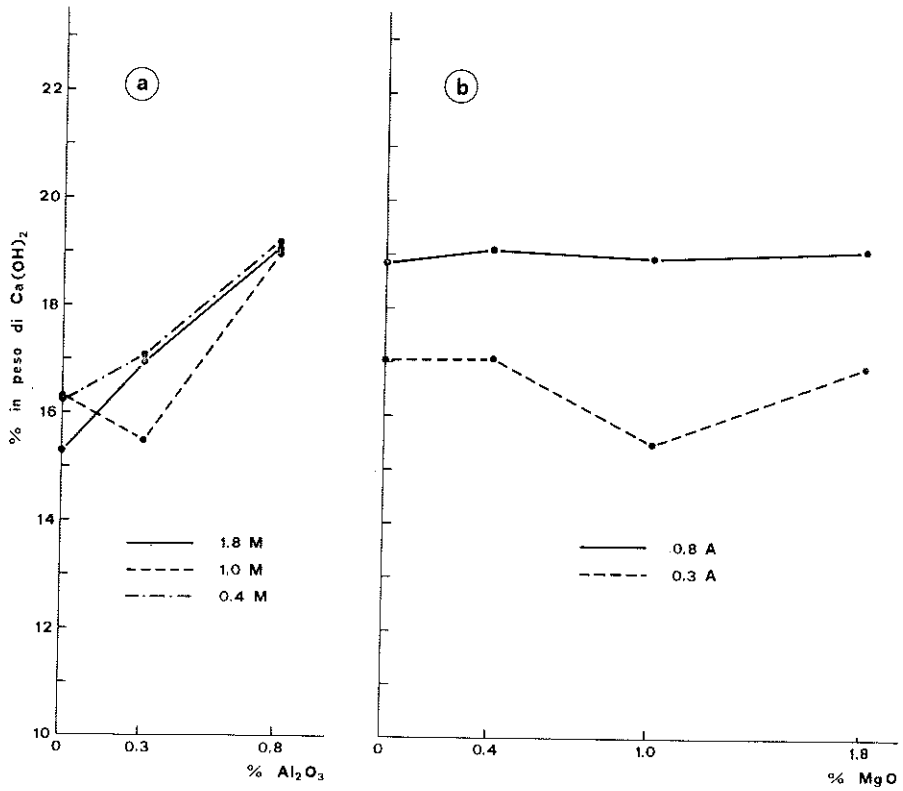


FIG. 2. - Aliti contenenti Al_2O_3 e MgO: a) influenza del tenoer di Al_2O_3 sul $Ca(OH)_2$ prodotto; b) influenza del tenore di MgO sul $Ca(OH)_2$ prodotto.

tenente 0,3 % di Al_2O_3 e 1 % di MgO. L'introduzione di MgO in aliti a tenore costante di Al_2O_3 (fig. 2b) non provoca variazioni sensibili nel contenuto di $Ca(OH)_2$ prodotto.

Dalla fig. 3a si evince che l'introduzione di ferro in aliti contenenti magnesio promuove comunque un aumento del grado di avanzamento della reazione d'idratazione, più ampio per alti tenori di ferro; l'ingresso di modeste quantità di Mg in aliti contenenti ferro (fig. 3b) si risolve in un abbassamento del tenore di idrossido di calcio pro-

dotto seguito, per più alti contenuti di magnesio, da un andamento pressocché costante.

Dalle figg. 4a e 4b si rileva che, nelle aliti contenenti alluminio e ferro, vi è identità di comportamento per i due elementi, in quanto entrambi giuocano nell'innalzare il contenuto di idrossido di calcio prodotto nel corso della reazione.

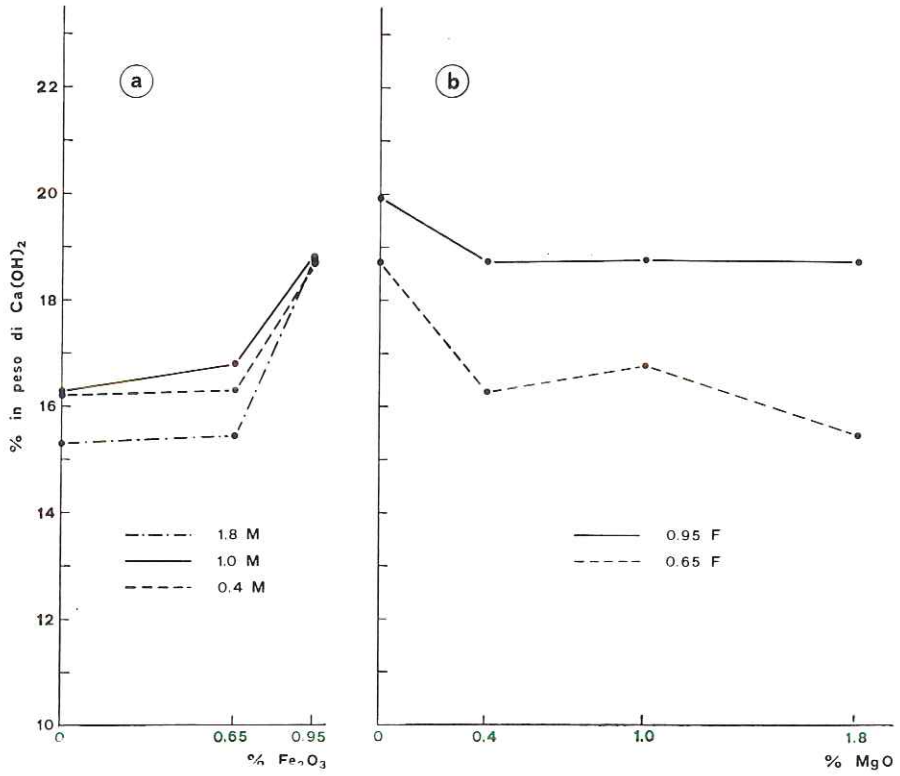


FIG. 3. - Aliti contenenti Fe_2O_3 e MgO: a) influenza del tenore di Fe_2O_3 sul $Ca(OH)_2$ prodotto; b) influenza del tenore di MgO sul $Ca(OH)_2$ prodotto.

In tab. III sono presentati i risultati delle resistenze meccaniche ottenute sulle aliti a due componenti; in fig. 5 sono schematizzati tali dati, estesi anche a quelli relativi al C_3S puro e alle aliti ad un solo componente estraneo [1]; nelle figg. 6, 7 ed 8 sono riportati i valori delle resistenze meccaniche relative alle aliti a due componenti in funzione del tenore di ossido aggiunto a costituire la coppia esaminata.

L'esame dei dati riportati in tabella e nei grafici pone in luce una correlazione fra resistenze meccaniche e idrossido di calcio prodotto: si rileva cioè il ruolo determinante esercitato dall'ingresso del

ferro in soluzione solida così come, anche se in minor misura, dell'alluminio, sul comportamento idraulico del silicato tricalcico; l'azione del magnesio, viceversa, non si manifesta efficace.

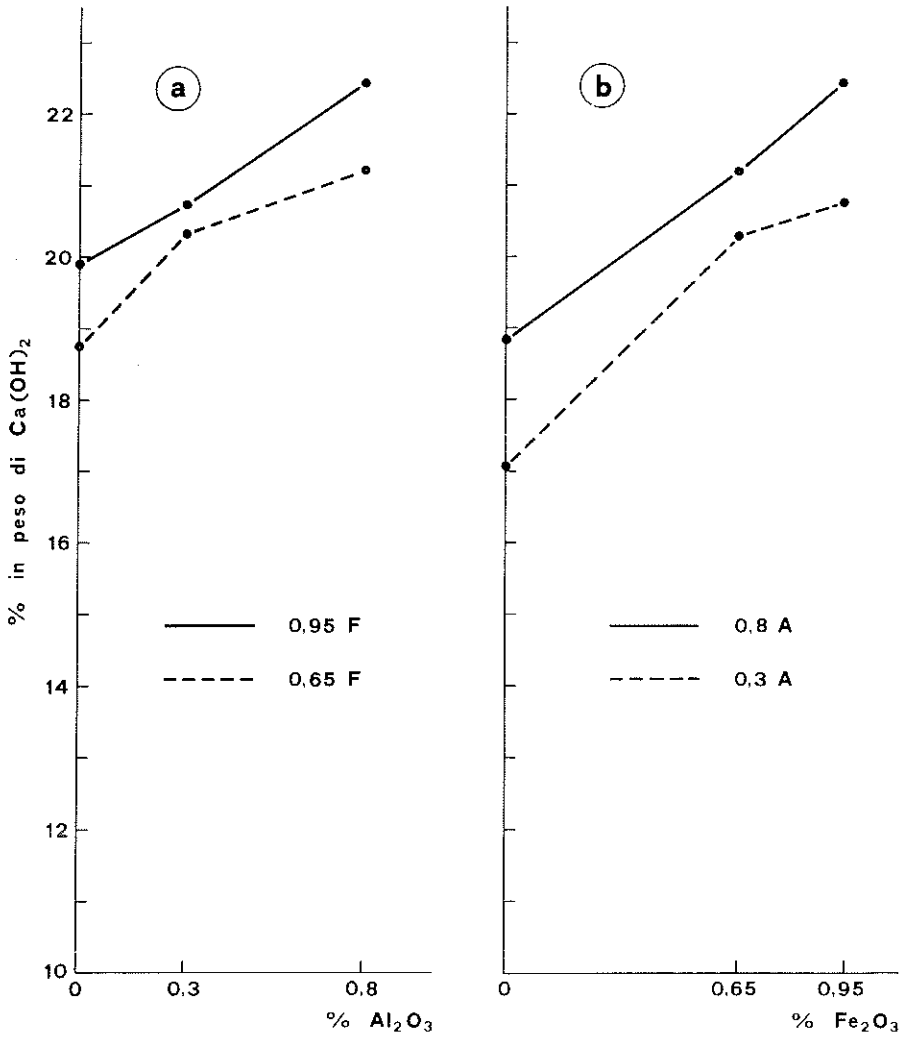


FIG. 4. - Aliti contenenti Al_2O_3 e Fe_2O_3: a) influenza del tenore di Al_2O_3 sul $Ca(OH)_2$ prodotto; b) influenza del tenore di Fe_2O_3 sul $Ca(OH)_2$ prodotto.

La corrispondenza tra resistenze meccaniche ottenute e idrossido di calcio prodotto non è puntuale nel senso che a volte, a parità di valore dell'idrossido di calcio, si riscontrano valori differenti di resistenza meccanica, vale a dire che sono differenti i valori del rapporto

R = resistenza meccanica/contenuto di idrossido di calcio, come è evidenziato dalla fig. 9.

Si possono comunque individuare gruppi di campioni che presentano valori di tale rapporto vicini tra loro: tali gruppi risultano

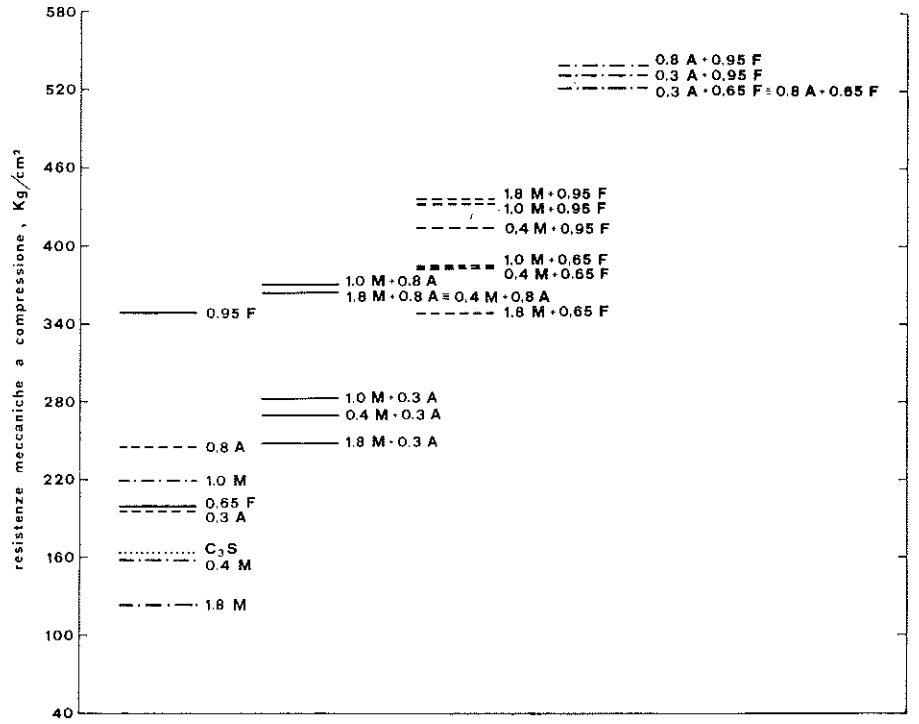


FIG. 5. - Raffronto fra i valori di resistenza meccanica relativi al silicato tricalcico puro e alle sue soluzioni solide ad uno e a due componenti estranei.

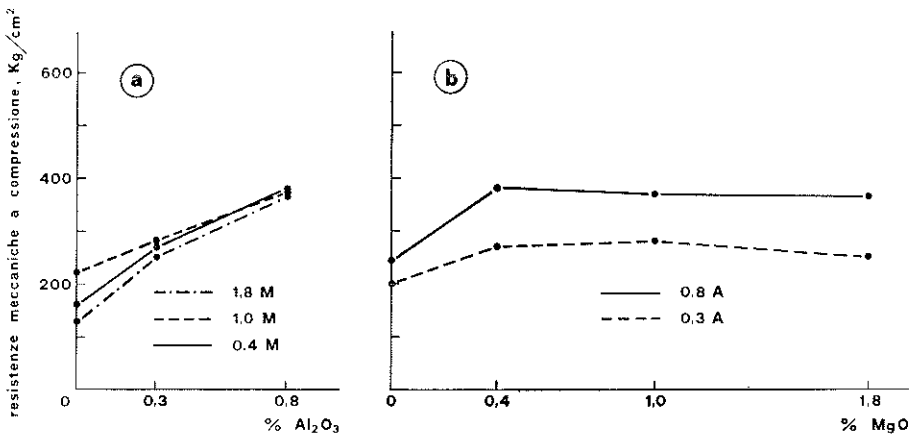


FIG. 6. - Aliti contenenti Al_2O_3 e MgO: a) influenza del tenore di Al_2O_3 sulle resistenze meccaniche; b) influenza del tenore di MgO sulle resistenze meccaniche.

appartenere a soluzioni solide contenenti coppie di ioni della stessa natura: ad esempio, per le aliti contenenti ioni Fe^{+3} e Al^{+3}, i valori del rapporto R sono compresi tra 24,5 e 26,0, mentre le aliti contenenti Al e Mg presentano valori di R compresi tra 15,0 e 19,0. Aliti contenenti Fe e Mg presentano valori di R compresi tra 22,0 e 24,0.

Tale constatazione induce a ribadire quanto già espresso nel corso della precedente Nota [1] e cioè che l'idrossido di calcio di neo-

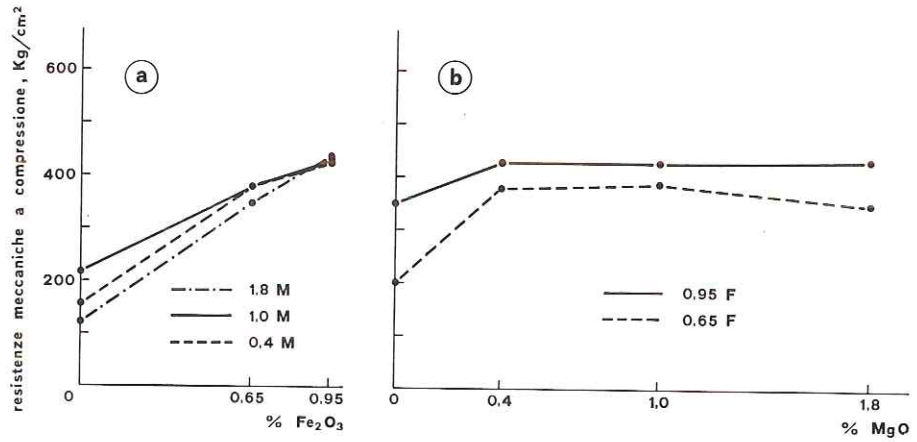


FIG. 7. - Aliti contenenti Fe_2O_3 e MgO: a) influenza del tenore di Fe_2O_3 sulle resistenze meccaniche; b) influenza del tenore di MgO sulle resistenze meccaniche.

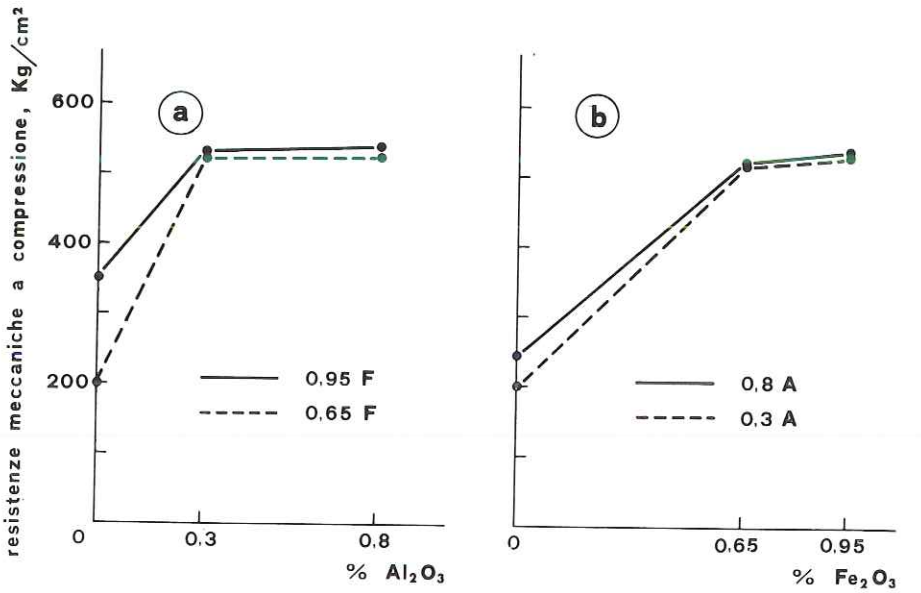


FIG. 8. - Aliti contenenti Al_2O_3 e Fe_2O_3: a) influenza del tenore di Al_3O_2 sulle resistenze meccaniche; b) influenza del tenore di Fe_2O_3 sulle resistenze meccaniche.

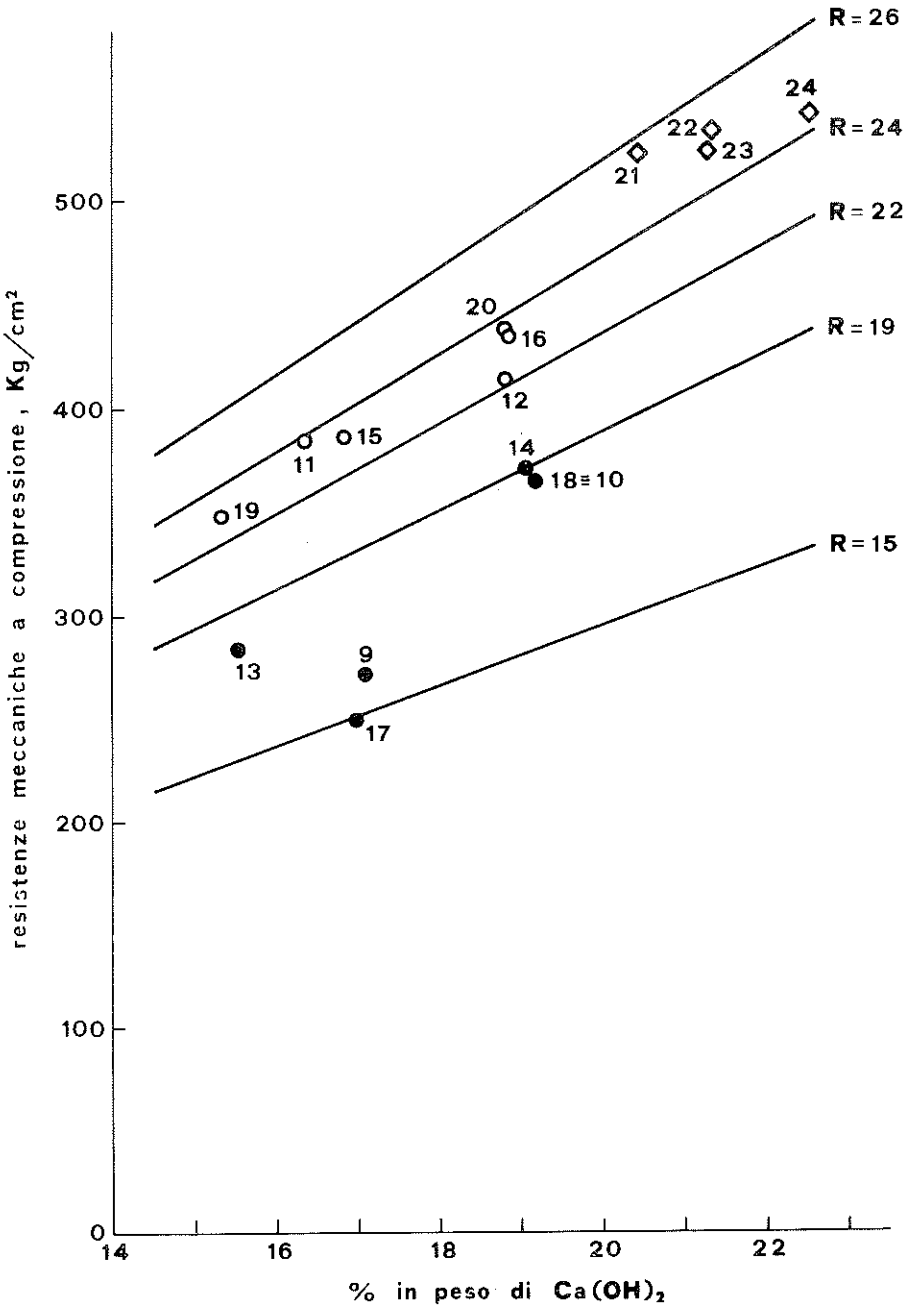


FIG. 9. - Andamento delle resistenze meccaniche in funzione dell'idrossido di calcio prodotto (i numeri si riferiscono ai campioni elencati in tab. 1).

formazione non può essere l'unico parametro correlabile con le resistenze meccaniche; tale correlazione sussiste pienamente, però, nell'ambito di soluzioni solide contenenti coppie di ioni della stessa natura.

A conclusione di quanto detto acquista maggior consistenza l'ipotesi già prospettata [1] che l'influenza degli ioni estranei sulle resistenze meccaniche relative a soluzioni solide di C_3S, si esplichi attraverso una modificazione della morfologia e della composizione del silicato di calcio idrato di neoformazione.

Conclusioni.

Il comportamento idraulico di aliti a due componenti è funzione della natura della coppia di elementi estranei in soluzione solida. La presenza del magnesio, sia in coppia con ioni Al^{+3} che con ioni Fe^{+3}, induce effetti negativi o comunque non efficaci sia sulle resistenze meccaniche che sul grado di avanzamento della reazione d'idratazione, misurato attraverso la stima dell'idrossido di calcio prodotto, nei confronti del comportamento del silicato tricalcico puro; rispetto a quest'ultimo, soluzioni solide contenenti contemporaneamente Fe^{+3} e Al^{+3} promuovono resistenze meccaniche e contenuti di idrossido di calcio più elevati.

Tali conclusioni sono in ottimo accordo con quanto rilevato a proposito del comportamento idraulico di aliti ad un singolo componente estraneo.

Si è constatato inoltre che la corrispondenza tra il contenuto di idrossido di calcio di neoformazione e la resistenza a compressione è puntuale solo nell'ambito di aliti contenenti coppie di ioni estranei della stessa natura; ciò avvalora l'ipotesi che significative debbono essere le variazioni di morfologia e composizione del silicato di calcio idrato di neoformazione, indotte dal tipo di ione introdotto in soluzione solida.

Gli Autori ringraziano il prof. R. Sersale per le utili discussioni e il dott. G. Frigione della Cementir (Cementerie del Tirreno) per la collaborazione ricevuta.

Napoli - Istituto di Chimica Applicata della Facoltà d'Ingegneria.

BIBLIOGRAFIA

[1] SABATELLI V., VALENTI G. L., *Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico.* Nota I. *Aliti ad un componente estraneo,* Rend. Acc. Fis. e Mat. [1], XLII, Napoli, 1975.

[2] WOERMANN E., EYSEL W., HAHN TH.. *Chemische und strukturelle untersuchungen der Mischkristallbildung von Tricalciumsilikat,* 3° Bericht Zem-Kalk-Gips, **21**, 241 (1968); 4° Bericht Zem-Kalk-Gips, **22**, 235 (1969).

[3] COPELAND L. E., HAYES J. C., *Determination of non evaporable water in the portland cement paste,* ASTM Bull., No 194 (1953).

[4] KANTRO D. L., WEISE C. H., BRUNAUER S., *Paste hydration of beta-dicalcium silicate, tricalcium silicate, and alite,* Symp. Struct. Portland Cement, Spec. Rep. 90, Highway Res. Board, Washington, **309** (1966).

[5] VALENTI G. L., SABATELLI V., *Contributo dell'analisi termoponderale allo studio della stechiometria di idratazione del silicato tricalcico,* Il Cemento, **3** (1974).

Sulla relazione fra comportamento alla devetrificazione ed attività idraulica di scorie d'alto forno sintetiche *

Nota di VITTORIO SABATELLI, ALFONSO NASTRO e GIUSEPPE MASCOLO
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza del 3 maggio 1975)

RIASSUNTO. — Gli Autori riferiscono sui risultati conseguiti a seguito di una indagine rivolta allo studio delle relazioni tra proprietà idrauliche di cementi d'alto forno, confezionati con scorie sintetiche, ed attitudine alla devetrificazione delle stesse, determinata in base alle temperature di cristallizzazione, all'ampiezza delle aree sottese dagli effetti termici nonché alla natura delle fasi cristalline di neo-formazione. Sono state prescelte scorie a rapporto CaO/SiO_2 costante, contenuto di MgO del 6 % e tenori di Al_2O_3 variabili dallo 0 al 20 %.

In via preliminare, si è confermata l'influenza positiva dell'allumina sulle resistenze meccaniche dei cementi in esame, si è posta in luce la loro buona resistenza chimica all'azione di acque dolci e solfatiche anche dopo diversi mesi di contatto.

Con riferimento alla correlazione tra attività idrauliche e comportamento alla devetrificazione, si è posto in luce che le scorie di costituzione dei cementi ad elevata resistenza meccanica, denunziano valori elevati dell'energia di cristallizzazione. Si è rilevato altresì che i cementi confezionati con scorie, che a seguito di trattamento termico promuovono la formazione di melilite come unica fase cristallina, denunziano miglior comportamento idraulico, in accordo con i risultati di una precedente sperimentazione.

SUMMARY. — Synthetic slags containing 6 % MgO, variable amounts of Al_2O_3 (up to 20 %) and with $CaO/SiO_2 = 1{,}4$ have been examined.

It has been confirmed that compressive strengths of slag-cements increase with the percentages of Al_2O_3 in the slag. The chemical resistance of the slag-cements, stored for eight months in soft or sulphatic water, is excellent.

The relationships between devetrification process of synthetic slags to compressive strength of the corresponding slag-cements have been investigated. Higher compressive strengths of the slag-cements are obtained with slags having higher crystallization energy and originating in the devetrification process, a melilite phase as unique crystallization product.

* Lavoro eseguito con il contributo finanziario del C.N.R.

Introduzione.

In una Nota precedente [1] si è studiata l'influenza dell'ossido di magnesio sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche, ponendo in luce il buon comportamento idraulico di scorie contenenti tenori di MgO intorno al 10 % ed evidenziando la relazione tra tale comportamento e quello alla devetrificazione.

Tale risultato ha consigliato la estensione delle indagini attraverso l'esame di una ulteriore serie di scorie sintetiche nelle quali, a parità di rapporto CaO/SiO_2 e con tenori costanti di MgO (6 %) e di Fe_2O_3 (1,0 %) veniva variata la percentuale di Al_2O_3 fino al valore del 20 %, stante la considerazione che i dati della letteratura [2], [3], [4] indicano che le resistenze meccaniche di cementi confezionati con scorie a tenore variabile di allumina, crescono al crescere di detto contenuto.

Scopo del presente lavoro è quindi verificare, da un lato, l'influenza positiva dell'allumina delle scorie, sia per quanto attiene alle prestazioni meccaniche dei relativi leganti, sia per il comportamento in ambienti aggressivi (acque dolci e solfatiche) e di approfondire, dall'altro, la correlazione tra idraulicità delle scorie esaminate e loro comportamento alla devetrificazione. L'indagine appare tanto più necessaria, in quanto le relazioni tra comportamento alla devetrificazione di scorie vetrose di differente composizione [5], [6], [7] e grado di vetrosità sono ampiamente studiate in letteratura, mentre scarse sono le notizie sulla correlazione fra il comportamento alla devetrificazione quello idraulico [8].

Parte sperimentale.

Sono stati preparati 5 differenti campioni di scorie vetrose, con modalità già descritte in una precedente Nota [1], corrispondenti alle composizioni riportate nella tab. I.

Tabella I

Composizione delle scorie sintetiche.

Sigle del campione	Percentuali in peso					Rapporti molari CaO/SiO_2
	CaO	SiO_2	Al_2O_3	MgO	Fe_2O_3	
S_1	52,40	40,60	0	6,00	1,00	1,38
S_2	49,50	38,50	5,00	6,00	1,00	1,38
S_3	48,60	36,20	10,00	6,00	1,00	1,38
S_4	43,90	34,10	15,00	6,00	1,00	1,38
S_5	42,10	31,90	20,00	6,00	1,00	1,41

Con le polveri ottenute dopo essiccamento, macinazione e vagliatura dei campioni in tab. I, sono stati preparati i provini per le prove meccaniche e per quelle di resistenza agli ambienti aggressivi (acque dolci e solfatiche).

Altre frazioni di detti campioni sono state sottoposte ad analisi termica differenziale fino alla temperatura di 1050° C.

Per il rilevamento delle fasi cristalline di neoformazione sono stati effettuati altresì trattamenti termici alle temperature corrispondenti agli effetti esotermici rilevati nelle curve termodifferenziali, seguiti da analisi roentgenografica.

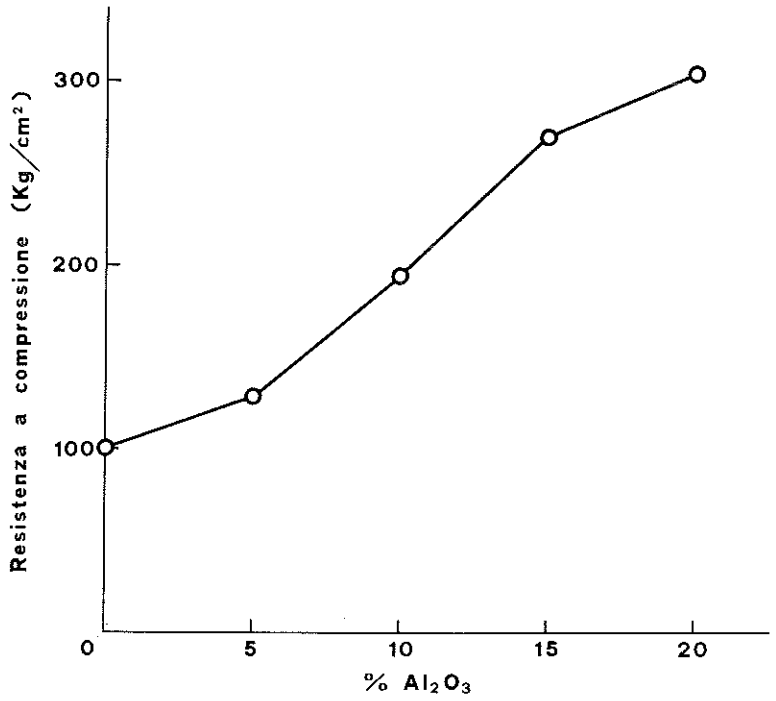


FIG. 1. - Resistenze meccaniche a compressione dei cementi d'alto forno confezionati con le scorie in esame, in funzione del contenuto di allumina delle scorie.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

a) *Prove meccaniche.* I risultati delle prove meccaniche effettuate dopo 28 giorni di stagionatura su provini normalizzati [1], confezionati con le scorie in esame sono riportati nel grafico della fig. 1. Si rileva, in accordo con i dati in letteratura, l'influenza positiva dell'allumina sul comportamento meccanico.

b) *Resistenza chimica.* I provini confezionati con due differenti tipi di clinker ad alto e basso contenuto di alluminato tricalcico, sono stati immersi in acqua distillata ed in acqua solfatica (al 5 % di $MgSO_4$), secondo quanto già riportato in un precedente lavoro [1]. Si è constatato, dopo circa otto mesi di contatto, che i provini non avevano subito deformazioni di sorta o fratture.

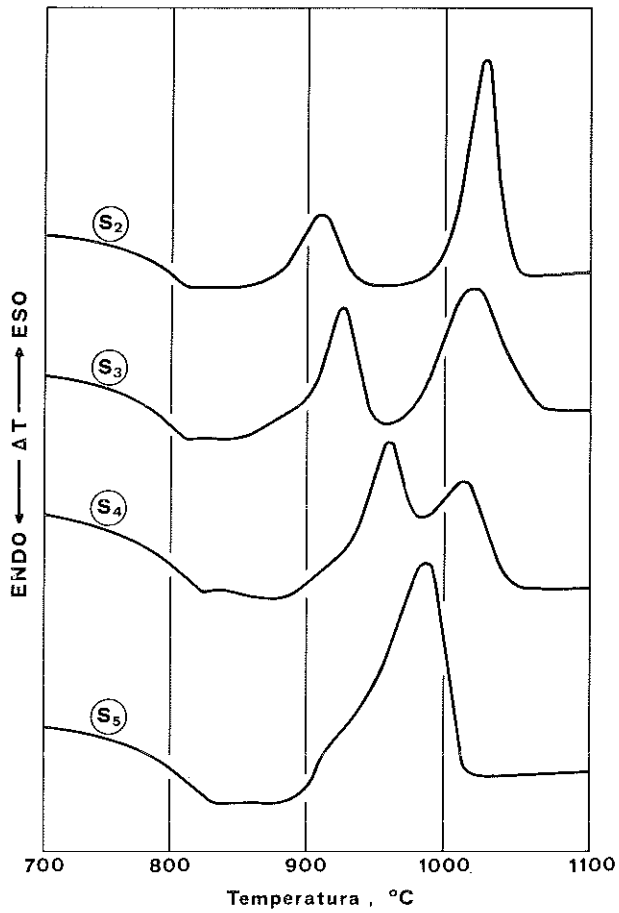


FIG. 2. - Curve termodifferenziali relative alle scorie sintetiche di cui alla Tab. I.

c) *Comportamento alla devetrificazione.* In fig. 2 sono riportate le curve termodifferenziali relative alle sole scorie contenenti allumina (dal 5 al 20 %); la temperatura di transizione vetrosa e le temperature relative agli effetti esotermici di cristallizzazione sono invece riportate nello schema in fig. 3. Si rileva che la temperatura di transizione vetrosa e le temperature del primo effetto esotermico salgono

in funzione del contenuto di allumina (curva a e b di fig. 3); le temperature del secondo effetto esotermico invece scendono, anche se leggermente (curva c di fig. 3); per il campione S_5 (Al_2O_3 al 20 %) i due effetti esotermici si registrano quasi sovrapposti.

Si è notato che le aree sottese dall'effetto esotermico a più bassa temperatura tendono ad aumentare, mentre quelle sottese dall'effetto

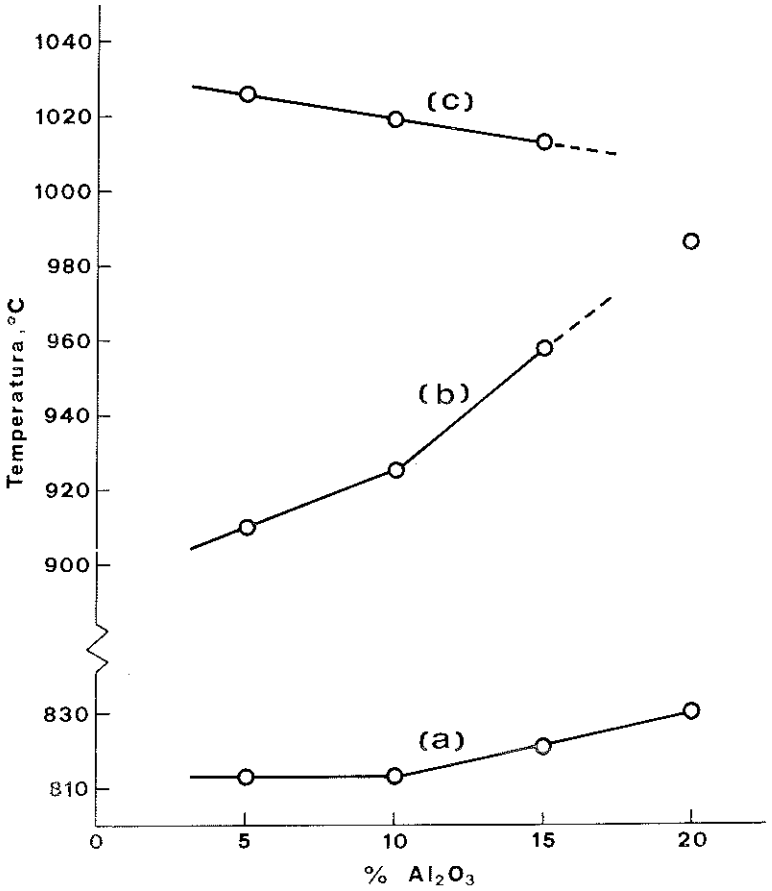


FIG. 3. - Temperature degli effetti termici, rilevate via DTA, in funzione del contenuto di Al_2O_3 nelle scorie: curva a) = transizione vetrosa; curva b) = cristallizzazione a bassa temperatura; curva c) = cristallizzazione ad alta temperatura.

esotermico a più alta temperatura tendono a diminuire, al crescere del contenuto di allumina dal 5 al 15 % (fig. 2). Per il campione S_5 le aree dei due effetti sono sovrapposte, per cui non è possibile verificare l'ulteriore andamento dell'ampiezza delle due aree. Le fasi cristalline rilevate per via roentgenografica, per i vari campioni, sono riportate nella tab. II.

Per i campioni contenenti basse percentuali di allumina (fino al 10 %), le fasi cristalline neo-formate per trattamento termico a 915° C, sono in genere solo silicati di calcio e magnesio, mentre per effetto del

TABELLA II

Fasi cristalline rilevate a seguito di trattamento termico.

Campione	Temperatura del trattamento	C_3MS_2(*)	$(C_2S)_{5,6} \cdot (C_3MS_2)_{4,4}$	β-CS	C_3S_2	$C_2MS_2 \cdot C_2AS$
S_1	915	+	+	+	–	–
	1030	+ +	–	+ +	–	–
S_2	915	–	+ +	–	–	–
	1030	–	–	–	+ +	+ + +
S_3	915	–	+ + +	–	–	–
	1030	–	–	–	+	+ + +
S_4	915	–	+ +	–	–	+
	1030	–	–	–	–	+ + +
S_5	915	–	–	–	–	+ +
	1030	–	–	–	–	+ + +

* C = CaO; M = MgO; S = SiO_2; A = Al_2O_3; + + + = presente in quantità notevole; + + = presente in quantità media; + = presente in tracce; – = assente.

trattamento termico a 1030° C si rileva la presenza di una fase cristallina contenente allumina, la melilite; contemporaneamente la fase $(C_2S)_{5,6} \cdot (C_3MS_2)_{4,4}$ scompare in seguito a tale trattamento.

Si nota altresì che i vetri a più alto tenore di allumina (S_4 e S_5) evolvono, a completa cristallizzazione, esclusivamente a melilite: tali campioni sono quelli che hanno denunziato le migliori prestazioni meccaniche.

CORRELAZIONE TRA DEVETRIFICAZIONE E COMPORTAMENTO IDRAULICO.

Si rileva dalla sperimentazione che i campioni in esame manifestano resistenze meccaniche più elevate, quanto più elevato è il loro tenore di allumina (fig. 1); risalta, inoltre, che le temperature di

cristallizzazione risultano anch'esse funzione del contenuto di allumina così come le aree sottese dagli effetti termici. Il valore della espressione $\frac{A_1}{T_1} + \frac{A_2}{T_2}$, dove A_1 ed A_2 rappresentano le aree sottese dai due effetti esotermici e T_1 e T_2 le relative temperature rilevate in corrispondenza dei massimi dei picchi, si dimostra in relazione con le resistenze meccaniche, così come appare evidente dalla fig. 4. È

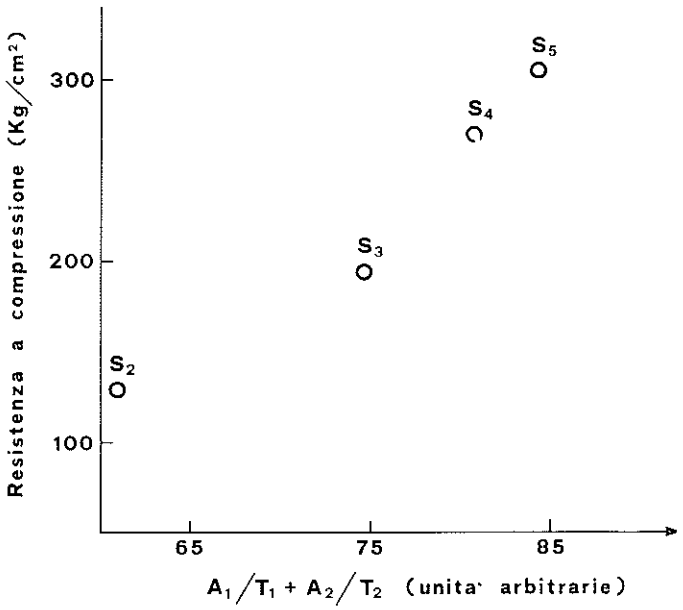


FIG. 4. - Resistenze meccaniche a compressione, rilevate a 28 gg., in funzione del termine $\frac{A_1}{T_1} + \frac{A_2}{T_2}$.

da rilevare poi che le aree considerate A_1 ed A_2 sono ovviamente proporzionali all'energie di cristallizzazione, le quali risultano diverse per i vari campioni.

Un confronto tra i campioni in base alle differenti energie di cristallizzazione è possibile solo a parità di tutte le condizioni operative: peso del campione, velocità di riscaldamento, sensibilità etc., ed a parità di natura della fase cristallina neoformata. Nel caso in esame, come è rilevabile dalla tab. II, sono confrontabili i campioni S_2, S_3, S_4 ed S_5, ad esclusione di S_1 che invece dà origine a fasi cristalline diverse dalla melilite. È ovvio che a parità di energia di cristallizzazione, la metastabilità della scoria vetrosa è in relazione inversa alla tempe-

ratura, in quanto più bassa è la temperatura di cristallizzazione, maggiore è l'attitudine alla cristallizzazione.

Il termine $\frac{A_1}{T_1} + \frac{A_2}{T_2}$ rappresenta dunque un dato significativo dell'attitudine alla devetrificazione di una scoria vetrosa. Come è possibile rilevare dal grafico in fig. 4, le resistenze meccaniche crescono al crescere del termine $\frac{A_1}{T_1} + \frac{A_2}{T_2}$

Conclusioni.

L'insieme delle risultanze sperimentali converge nell'indicare che i valori delle resistenze meccaniche di una serie di cementi d'alto forno confezionati con scorie sintetiche contenenti tenori variabili di allumina si accordano con quanto riscontrabile in letteratura. All'aumentare del contenuto di allumina delle scorie, aumentano infatti le resistenze meccaniche dei relativi cementi.

Risalta altresì che il comportamento chimico verso ambienti aggressivi, quali: acqua dolce o solfatica, da parte dei cementi esaminati, è in ogni caso eccellente, anche dopo 8 mesi di contatto.

La valutazione delle resistenze meccaniche dei cementi confezionati con le scorie sintetiche, rapportata al comportamento alla devetrificazione di dette scorie, ha permesso di rilevare una interessante relazione tra dette resistenze ed il termine $\frac{A_1}{T_1} + \frac{A_2}{T_2}$, dove: A_1 ed A_2 rappresentano le aree sottese dagli effetti esotermici di cristallizzazione, proporzionali alle energie di cristallizzazione e T_1 e T_2 rappresentano i valori delle temperature degli stessi effetti, rilevate in corrispondenza del massimo. Si è infatti constatato che i campioni che presentano elevati valori del termine $\frac{A_1}{T_1} + \frac{A_2}{T_2}$, denunziano anche elevati valori delle resistenze meccaniche, rilevate, come si è detto, dopo 28 giorni di stagionatura.

Le fasi cristalline neoformate a seguito del trattamento termico delle scorie studiate, evolvono a completa cristallizzazione, verso la formazione di un bisilicato tricalcico (C_3S_2) e di melilite. Quest'ultima è l'unica fase cristallina riscontrata nelle scorie a più alto tenore di allumina, le quali conferiscono ai relativi cementi il miglior comportamento meccanico.

BIBLIOGRAFIA

[1] MASCOLO G., BISACCIA G., SABATELLI V., *Influenza della magnesia sulla idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche.* Nota 1ª: *Scorie a rapporto CaO/SiO_2 fisso,* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. (in corso di stampa).

[2] SCHILLAK A., *Die Verbesserung der hydraulischen Eigenschaften Hochofenslacken durck Aktivierung der Schlaken und Ausnutzung ihrer Abfallwärme,* Bergakademie, **11**, 594 (1959).

[3] VENUAT M., *Recherches sur quelques laitiers particuliers,* Rev. Mat. Constr., **602**, 494 (1965).

[4] SOPORA M., *Die Zementschlacken der DDR,* Baustoffind, **7**, 4, 114 (1964).

[5] NICOL A., *Etude thermique d'un laitier tempré de haut fourneau,* Rev. Mat. Constr. No. de Commemoration, **29** (1950).

[6] KRAMER V., *The Influence of chemical composition and physical structure of Blast-Furnace Slag upon its reactivity,* IV International Congress on the Chemistry of Cement, pp. 563-575, Stroyizdat, 1964 (in russo).

[7] LECLERE F., *Apreciation rapide du touoir hydraulique des laitiers de haut fourneau par l'analyse thermique,* Rev. Constr. No. de Commemoration, **29** (1950).

[8] KRÜGER J. E., SEHLKE K. H. L., VAN AARDT J. H. P., *High-temperature studies on Blast-funace Slags,* Cement an Lime manufacture, **37** (1964), No. 4, S. 63-70.

[9] LAMMATZSCH A., *Untersuchung von Hochofenschlacke mit der differentialthermoanalyse,* Silikattechnik, **7** (1956), S. 468.

Le deformazioni del suolo in relazione alle indagini geofisiche sul bradisismo flegreo

Nota di VITO BONASIA *, MARIO FERRI *, SERGIO MONTAGNA *
e FOLCO PINGUE *
presentata dal socio ordinario GIUSEPPE IMBÒ

(Adunanza del 3 maggio 1975)

RIASSUNTO. — È stata effettuata un'analisi dei dati relativi agli spostamenti planimetrici di punti nell'area flegrea. L'andamento della deformazione, anche alla luce delle indagini geofisiche effettuate nella stessa area, contribuisce a chiarire la causa dell'anomalo comportamento bradisismico dell'inizio del 1970. Il quadro d'insieme avvalora l'ipotesi precedentemente avanzata circa una intrusione di masse magmatiche in una zona del golfo di Pozzuoli.

SUMMARY. — An analysis of data concerning the planimetric movements of the Phlaegrean area points has been carried out. The pattern of the deformation, together with geophysical investigations carried out in the same area, gives a contribution to clarify the origin of the anomalous bradyseismic behaviour of the beginning of 1970. The general view supports the hypothesis of a magmatic intrusion in the Pozzuoli gulf.

INTRODUZIONE.

All'inizio del 1970 (G. IMBÒ, 1971) nell'area di Pozzuoli veniva rilevato un cospicuo sollevamento del suolo, quasi 90 cm rispetto alle misure del 1968 al Serapeo; un tale sollevamento, in contrasto con l'abbassamento dedotto fino a detta data con un gradiente medio annuo di 1.3 cm (A. OLIVERI, 1960; G. CORRADO et al., 1968) indicava chiaramente che nell'area vulcanica flegrea si era verificata una inversione del moto bradisismico.

L'anomalo comportamento e la netta relazione esistente tra bradisismo ed attività dell'area flegrea, nonché l'elevata urbanizzazione della zona, indussero l'Osservatorio Vesuviano, coadiuvato successi-

* Osservatorio Vesuviano - Ercolano (Napoli).

vamente da vari Enti ed Istituti scientifici, ad eseguire e coordinare studi dettagliati allo scopo di seguire l'evolversi del fenomeno, anche in relazione con il problema puramente sociale connesso ad un eventuale rischio vulcanico.

Indagini gravimetriche (A. MAINO et al., 1963) effettuate nell'area flegrea indicano che l'intera zona è ricoperta mediamente da materiale vulcanico a bassa densità, caratteristico del riempimento delle caldere con prodotti piroclastici, con un minimo gravimetrico stret-

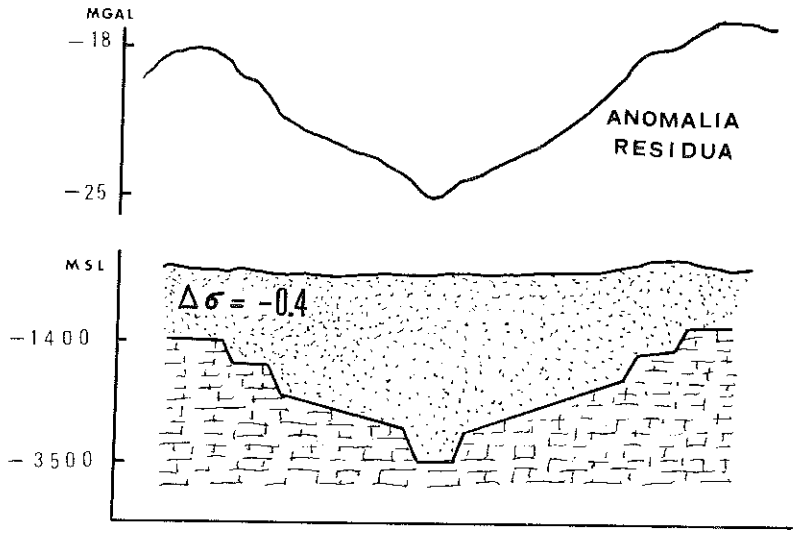


FIG. 1. - Modello bidimensionale della conca flegrea (da S. OLIVERI et al., 1969).

tamente coincidente con l'area di massimo sollevamento. Ed un modello gravimetrico bidimensionale (A. OLIVERI, 1969) mostra uno spessore della pila piroclastica variabile da 1.5 km ai bordi a 3.5 km al centro della conca flegrea, in accordo con alcuni dati di sismica a rifrazione (rilievo effettuato dalla Prakla nel 1953) indicanti l'esistenza di un orizzonte di base, situato a profondità variable da 2.0 a 3.5 km, che potrebbe rappresentare la base sedimentaria sulla quale poggia il materiale vulcanico di copertura. In relazione agli affioramenti limitrofi e alla velocità sismica una tale base potrebbe essere costituita da calcari del Mesozoico (S. SCARASCIA, 1972).

Le numerose indagini geofisiche effettuate dal febbraio 1970, epoca in cui fu notata l'inversione del moto bradisismico, potrebbero consentire di avere un quadro generale dell'insolito ed interessante fenomeno, e d'altro canto contribuire a chiarire l'eventuale causa a cui il fenomeno stesso è legato.

INDAGINI GEOFISICHE.

Sin dall'inizio della notata inversione del moto bradisismico sono state effettuate periodicamente osservazioni gravimetriche negli stessi punti stazione dell'arco costiero Bagnoli-Pozzuoli-Baia-Bacoli in cui il valore della gravità era stato determinato nel rilevamento generale a cura del Servizio Geologico d'Italia del 1963 (A. MAINO et al., 1963).

Le variazioni di gravità riscontrate (V. BONASIA et al., 1974) in riferimento alle misure precedenti permettevano di ipotizzare una

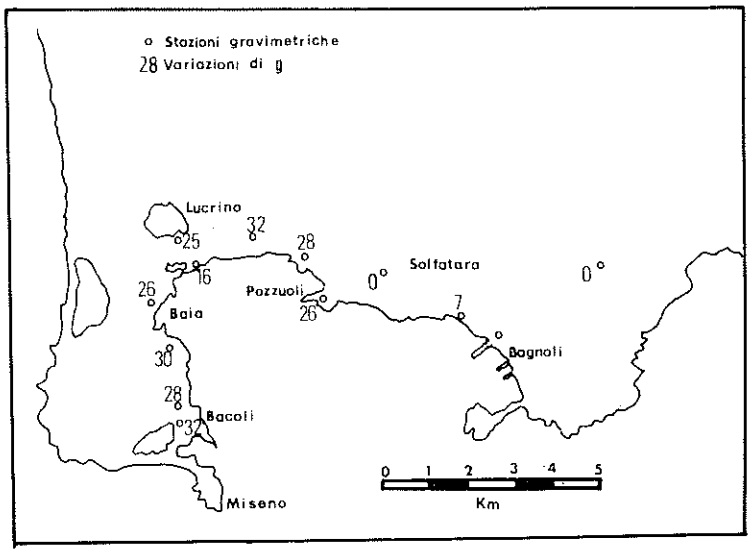


FIG. 2. - Variazione della gravità rilevata nel febbraio 1970 rispetto al 1963 (da V. BONASIA et al., 1974).

intrusione di masse magmatiche, in una zona a mare ad occidente di Pozzuoli, quale causa iniziale dell'anomalo andamento bradisismico; il graduale e sempre meno intenso sollevamento protrattosi fino all'estate del 1972 (come da rilevamento altimetrico a cura dell'Istituto Geografico Militare) si riteneva dovuto agli effetti derivanti dall'intrusione stessa, ai quali poteva essere imputabile il sollevamento differenziale, proporzionale alla potenza dello strato piroclastico di copertura.

I dati sismici disponibili (R. RAMPOLDI, 1972; I. GUERRA et al., 1972; G. CORRADO et al., 1974), anche se finora utilizzati unicamente per un'analisi puramente statistica, hanno consentito di mettere in evidenza che gli epicentri sono generalmente concentrati in mare nella parte occidentale del golfo di Pozzuoli; inoltre forniscono una evo-

luzione temporale per quanto riguarda la profondità ipocentrale, in quanto nell'estate del 1972 cessano le rare scosse con ipocentro più profondo e successivamente sono registrate solo scosse molto superficiali (G. CORRADO et al., 1974), interessanti quindi il materiale piroclastico di copertura.

In relazione all'elevata porosità di tale materiale CASERTANO et al. (1974) hanno messo in evidenza una stretta connessione esistente

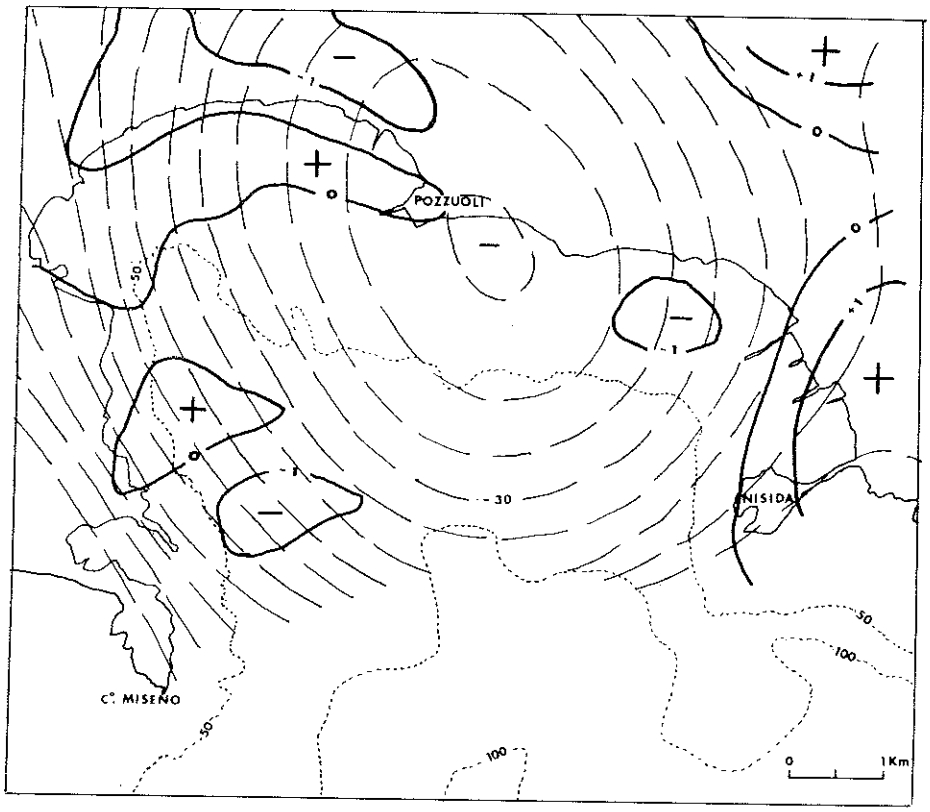


FIG. 3. - Anomalie gravimetriche residue. R = $\sqrt{1.25}$ Km (da D. CALLIGARIS et al., 1972).

fra l'altezza di marea nel golfo di Pozzuoli e la sismicità della zona, attribuendo quest'ultima « alla microfrantumazione dello scheletro di uno strato poroso esteso, a causa della variazione della pressione del fluido di poro ».

Un rilevamento gravimetrico dell'area del golfo di Pozzuoli (D. CALLIGARIS et al., 1972), allacciandosi alle misure a terra per l'intera area flegrea (A. MAINO et al., 1963), oltre a convalidare quanto già noto circa il riempimento della conca flegrea con materiale a bassa densità, mette in risalto, nella parte occidentale di Pozzuoli, una

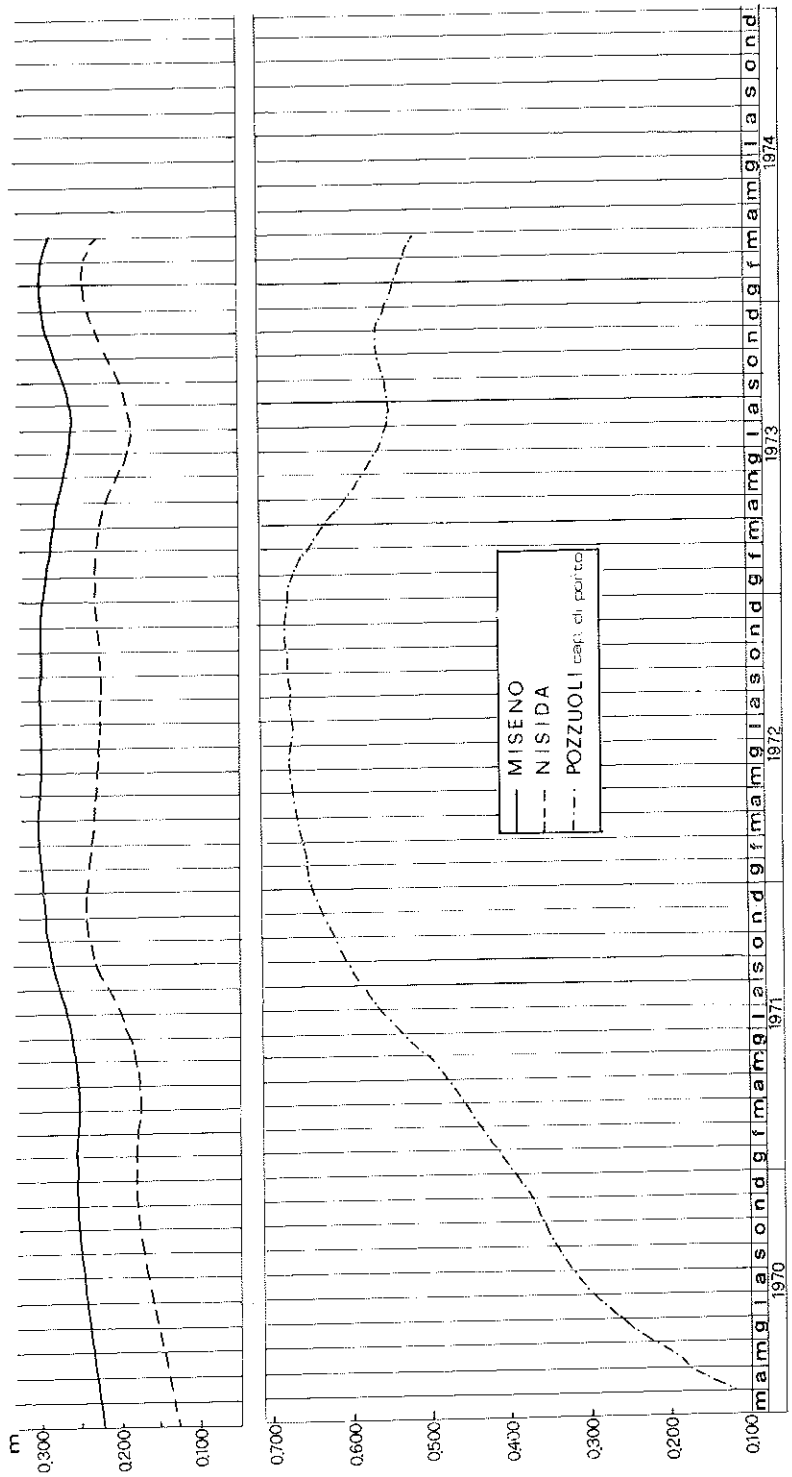


FIG. 4. - Andamento temporale delle variazioni di quota dei capisaldi mareografici nell'area flegrea (da G. CORRADO et al., 1974).

piccola anomalia gravimetrica positiva, allungata secondo la direzione E-W, che, nell'opinione degli autori, potrebbe essere causata da « un'anticlinale o intrusione di materiale più denso ».

L'installazione di tre stazioni mareografiche, situate rispettivamente a Nisida, Pozzuoli e Miseno, ha permesso inoltre di avere un dato continuo sui moti del suolo nella zona flegrea. Dall'andamento della curva mareometrica e dalle variazioni del gradiente di sollevamento che essa presenta è stata avanzata l'ipotesi (G. CORRADO et al., 1974) che l'intrusione debba essersi verificata in più fasi, attribuendo una stretta dipendenza temporale fra intrusione e aumento del gradiente di sollevamento.

Ricerche termiche (A. LAVENIA, 1973) nella stessa area non hanno messo in evidenza alcun comportamento particolare.

DEFORMAZIONI DEL SUOLO.

Nell'area interessata dal fenomeno bradisismico è stato inoltre effettuato uno studio degli spostamenti planimetrici di punti (S. DE QUAL, 1972) secondo lo schema riportato nel grafico della figura 5. Ai vertici di una rete principale a schema stellare sono vincolati gli estremi di tre poligonali di collegamento e mediante misure di angoli e distanze sono stati calcolati gli spostamenti dei vertici delle poligonali, ottenendosi, nel periodo giugno-settembre 1970, i valori riportati in tabella ed indicati nella figura.

L'esame del grafico non mostra un andamento particolare dei vettori, sia nell'intensità che nella direzione, mettendo però chiaramente in risalto spostamenti non trascurabili, dell'ordine di 10^{-5}.

Allo scopo di avere una visione più netta circa la deformazione planimetrica rilevata, sono state prese in considerazione le componenti (u) e (v) degli spostamenti, rispettivamente secondo le direzioni X e Y della figura 5.

Dalla loro rappresentazione grafica si evidenzia un diverso comportamento nello spostamento relativo a ciascun punto, notandosi che le componenti vettoriali sono orientate in senso opposto rispetto ad una linea di separazione; per la componente (v) tale linea di separazione ha direzione NE-SW, per la componente (u) ha direzione NW-SE, mettendo in risalto una rotazione (qualitativamente deducibile anche dalla figura 5).

Pur non potendo dare alle due linee di separazione un significato fisico, a titolo indicativo è da notare che, in via approssimativa, la prima è coincidente con la piccola anomalia gravimetrica positiva messa in evidenza dalle misure effettuate nel golfo di Pozzuoli (come

da figura 3), mentre la seconda trova riscontro ni un particolare allineamento di epicentri sismici (I. GUERRA et al., 1972) situati lungo la direttrice Monte Nuovo (ultima manifestazione eruttiva nell'area

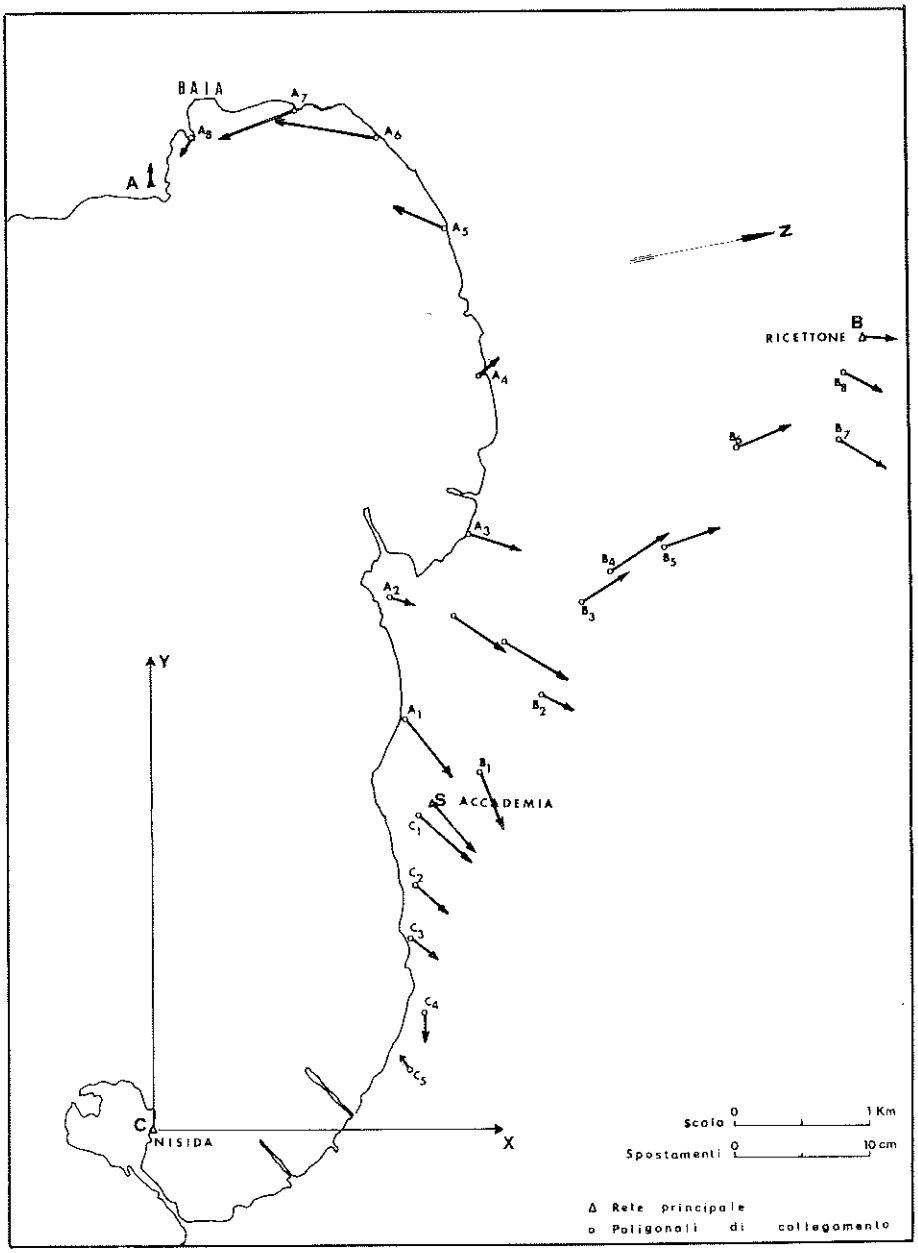


FIG. 5. - Rappresentazione grafica degli spostamenti planimetrici di punti (da S. DE QUAL, 1972).

flegrea, anno 1538) - Secca Fumosa (zona sottomarina a maggior attività fumarolica).

Facendo un'analisi circa l'entità della deformazione rilevata sull'intera area bradisismica si nota che le quantità $E = \Delta L/L$ e $\gamma = \text{tang}\,\varphi$,

TABELLA

Coordinate e spostamenti dei vertici delle poligonali (da S. DE QUAL, 1972); *Dilatazione e rotazione*

Cap	X (m)	Y (m)	u (mm)	v (mm)	Δ 10^{-6}	ω 10^{-6}
A_1	1947.030	3109.392	34	−44	3.3	−16.8
A_2	1819.664	4038.538	19	− 4	9.5	− 3.5
A_3	2440.789	4509.400	41	−11	14.4	− 6.8
A_4	2545.676	5739.728	11	11	6.2	1.2
A_5	2278.909	6826.699	−39	18	−14.5	6.8
A_6	1751.384	7517.863	−79	15	−43.1	9.5
A_7	1118.526	7744.567	−58	−20	−54.4	− 5.2
A_8	327.617	7524.583	−10	−11	−32.0	−16.1
B_1	2513.905	2691.151	18	40	− 7.7	−11.3
B_2	3008.119	3293.820	25	−11	5.0	− 5.6
B_3	3306.351	3992.951	32	22	15.2	− 0.7
B_4	3530.067	4231.042	40	28	17.9	− 0.8
B_5	3932.508	4407.804	41	15	13.8	− 2.7
B_6	4461.609	5156.683	42	17	12.7	− 2.2
B_7	5249.752	5222.114	35	−23	2.3	− 5.5
B_8	5290.806	5734.686	27	−17	2.1	− 4.0
C_1	2038.825	2378.791	35	−35	2.5	−15.9
C_2	2001.505	1851.267	21	−26	− 3.6	−12.2
C_3	1987.432	1449.040	16	−18	− 4.4	−10.0
C_4	2093.692	886.210	− 1	−21	−24.2	− 4.6
C_5	1964.608	448.535	− 6	7	12.6	8.5
T_1	2699.502	3703.451	50	−28	11.0	−11.9
T_2	2300.754	3907.562	41	−24	11.7	−10.5

rispettivamente estensione e scorrimento, sono così piccole da poter trascurare i loro prodotti e quadrati; il che giustifica la trattazione dei dati con il metodo della deformazione infinitesima bidimensionale.

Una tale assunzione può inoltre essere stabilita tenendo presente che anche le derivate parziali delle componenti (u) e (v) dello sposta-

mento risultano tanto piccole da poter trascurare nei calcoli i loro prodotti e quadrati (J. C. JAEGER, 1969).

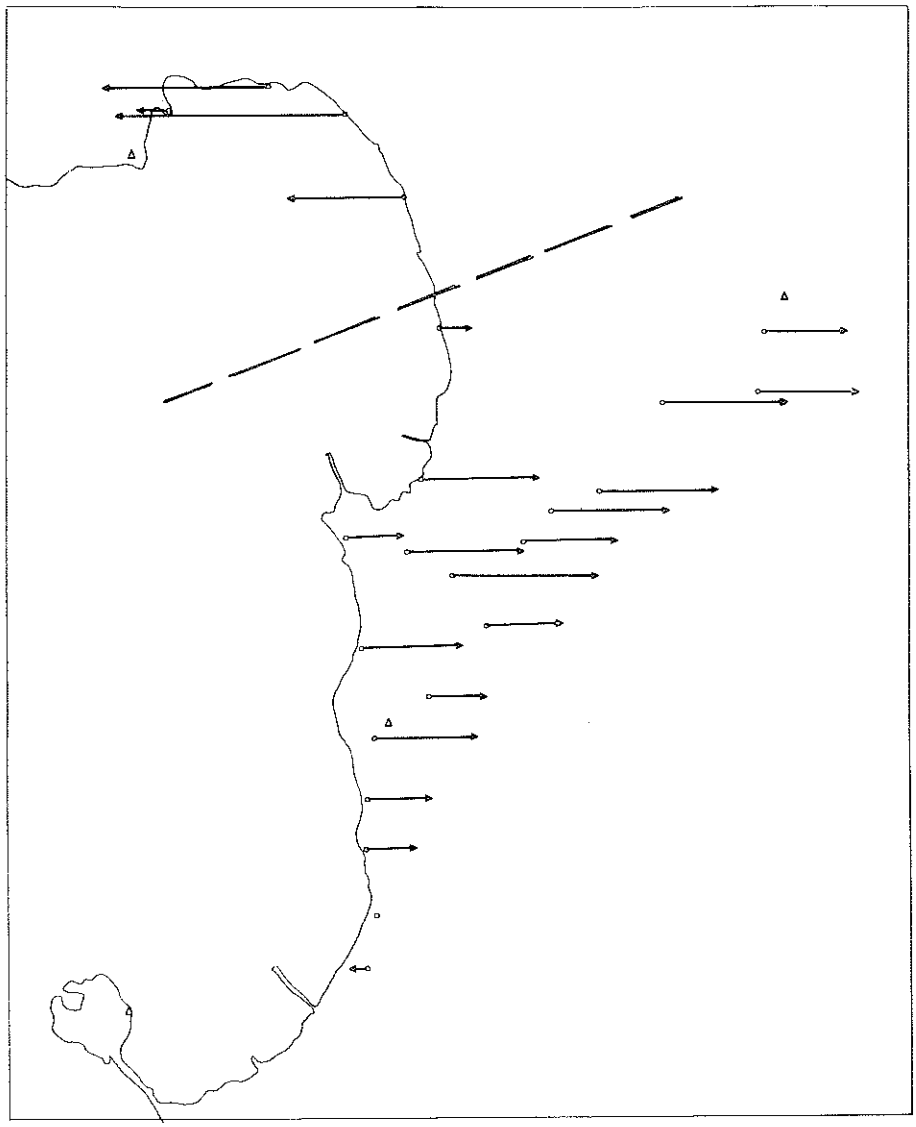


FIG. 6. - Andamento della componente (u) dello spostamento secondo la direzione X.

Lo scopo principale della trattazione è di cercare di mettere in luce la natura e l'origine della deformazione, potendosi, in caso positivo, in corrispondenza di ogni formulata ipotesi, giustificare l'andamento della deformazione stessa.

Pertanto differenziando le due componenti dello spostamento si è cercato di dedurre altri parametri di deformazione che potessero chiarire il particolare andamento messo in evidenza nelle figure 6 e 7.

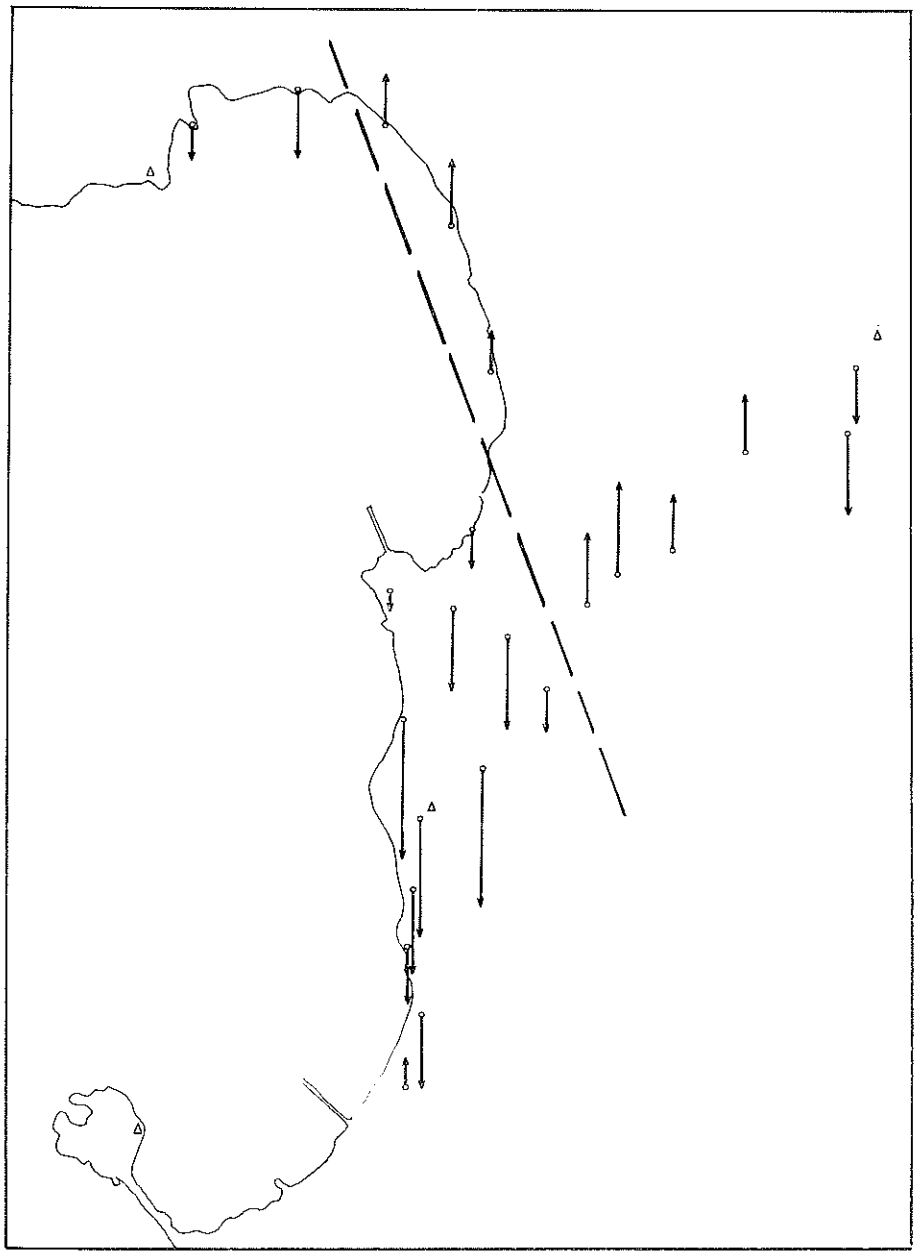


FIG. 7. - Andamento della componente (v) dello spostamento secondo la direzione Y.

La dilatazione (Δ) e la rotazione (ω) relative a ciascun punto e dedotte secondo le notazioni

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

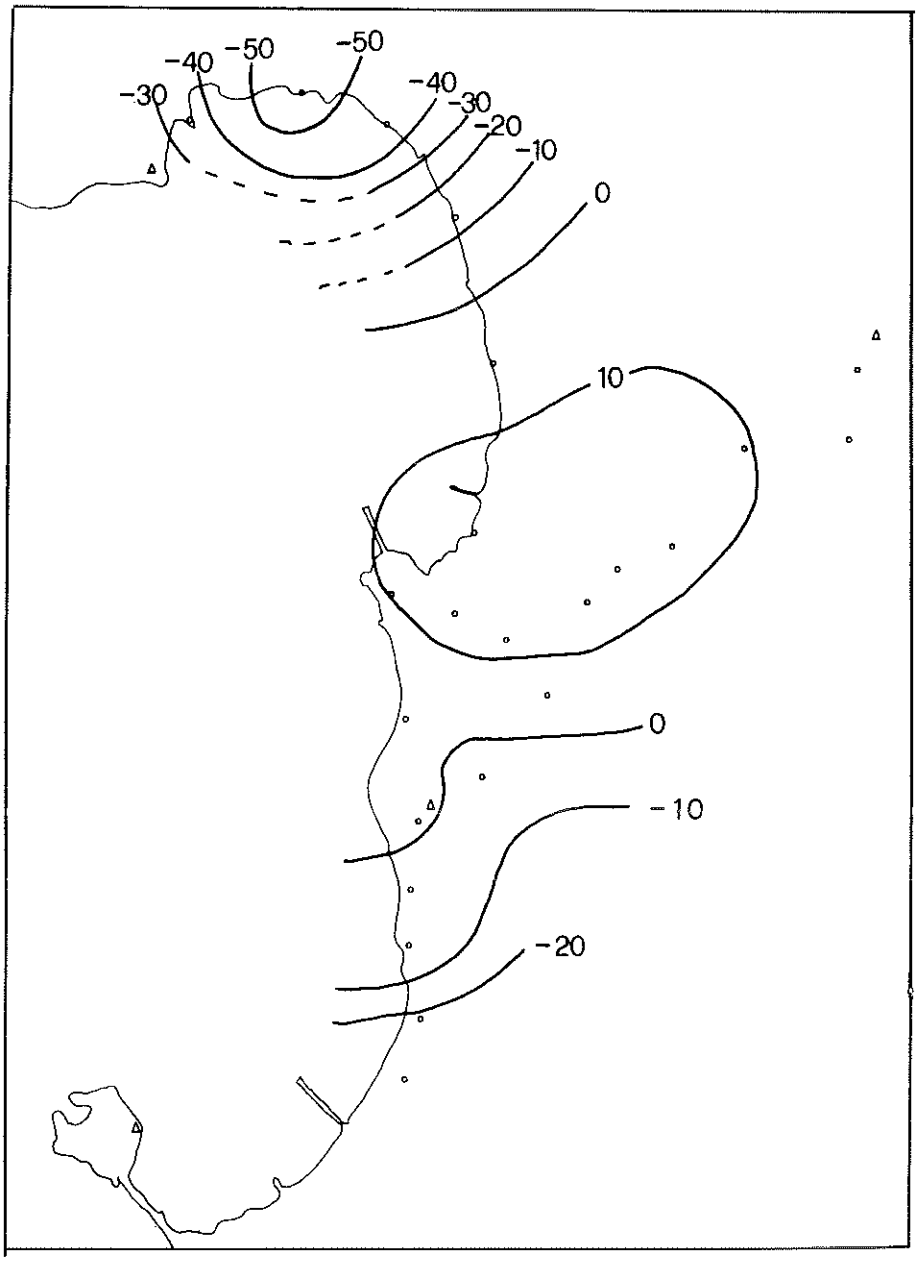


FIG. 8. - Linee di uguale dilatazione (10^{-6}).

sono riportate nella tabella, mentre nelle figure 8 e 9 si sono tracciate le relative isolinee.

A parte l'ovvio andamento della dilatazione, che risulta positiva

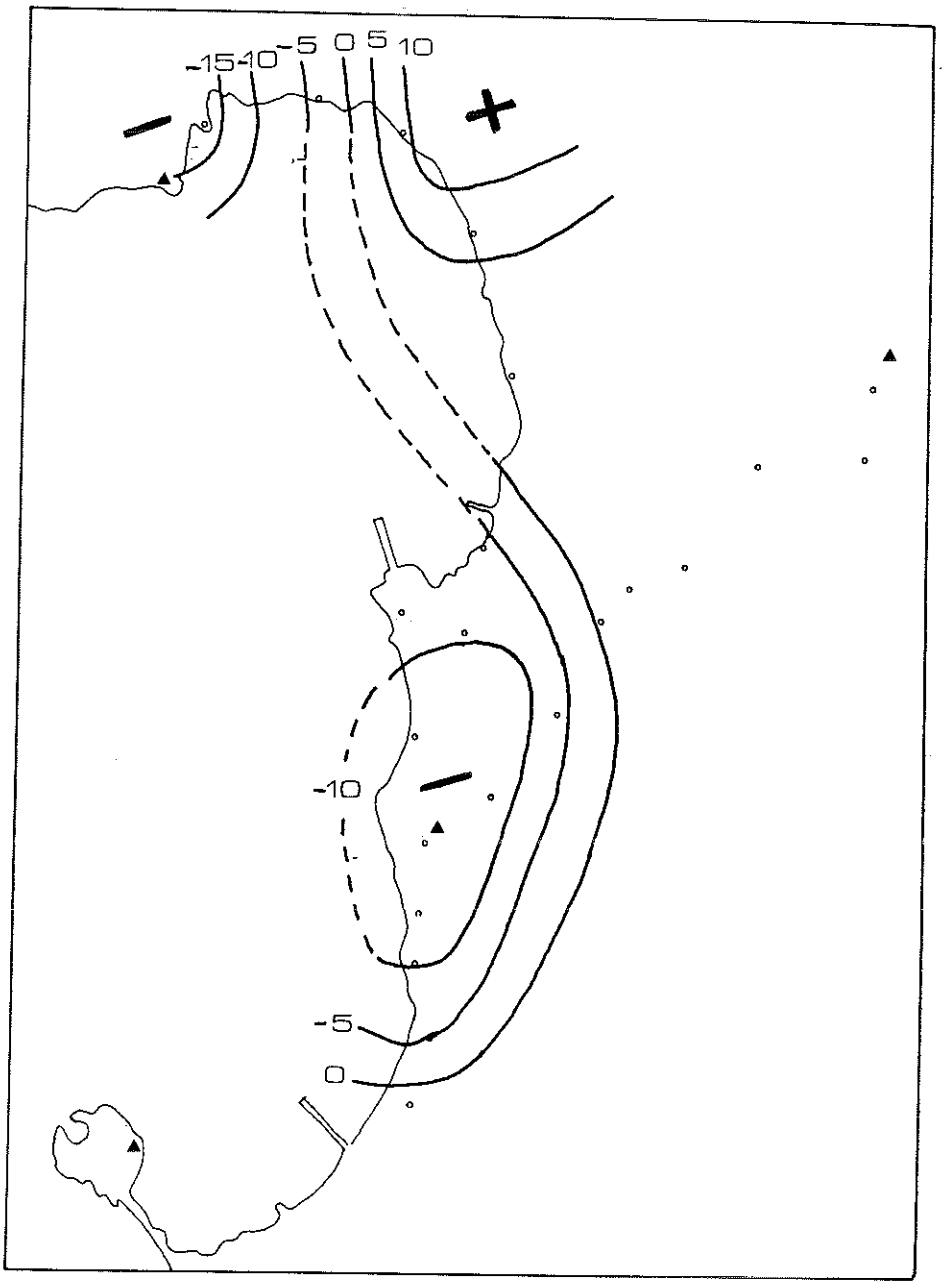


FIG. 9. - Linee di uguale rotazione (10^{-6}). (+) senso antiorario; (−) senso orario.

nell'area in cui le misure altimetriche (B. LIVIERA ZUGIANI, 1972) hanno mostrato il massimo sollevamento nella zona flegrea, è significativo l'andamento del parametro rotazionale, il quale mette in risalto per le zolle episuperficiali flegree il tipico comportamento di una linea di faglia a cui è eventualmente associato uno scorrimento lungo il suo piano.

CONCLUSIONE.

Le indicazioni che emergono dall'insieme delle indagini geofisiche e dalla rielaborazione dei dati sugli spostamenti planimetrici di punti permettono di accreditare una ipotesi sufficientemente esplicativa circa l'inversione del fenomeno bradisismico nell'area flegrea.

Una considerazione di ordine generale deducibile dall'esame dei dati geofisici (sismici e variazioni di gravità) indica chiaramente che tutte le manifestazioni sono localizzate nella zona a mare ad occidente di Pozzuoli. L'unica eccezione è rappresentata dalle misure altimetriche, che mostrano un sollevamento quasi simmetrico (cupoliforme) con il centro situato nella zona di Pozzuoli; ma un tale comportamento trova la sua giustificazione alla luce delle considerazioni già effettuate sulla genesi del bradisismo flegreo (A. OLIVERI et al., 1969), tali da confermare la dipendenza degli spostamenti verticali dallo spessore della pila piroclastica di copertura.

L'ipotesi avanzata (V. BONASIA et al., 1974) in base alle variazioni gravimetriche riscontrate nel febbraio 1970 lungo l'arco costiero Pozzuoli-Baia-Bacoli, di una intrusione di masse magmatiche in una zona a mare ad occidente di Pozzuoli, può essere suffragata anche dal comportamento rilevato per gli spostamenti planimetrici di punti nell'area flegrea.

Infatti l'andamento delle componenti dello spostamento e del parametro di rotazione (v. figure 6, 7 e 9) lascia individuare due zone di minor resistenza, assimilabili a linee di frattura, che si incrociano a mare lungo la direttrice Baia-Pozzuoli (a circa 2 km da Pozzuoli). E dalle molte evidenze geologiche e geofisiche nella zona vulcanica flegrea (I. FINETTI et al., 1974) « indicanti il verificarsi di manifestazioni magmatiche in periodi diversi, con improvvise comparse, attenuazioni e riprese, tutte connesse a fratture » si può dedurre che l'accennata intrusione trova riscontro in un più vasto quadro vulcanologico.

In base alle periodiche misure gravimetriche tutt'ora in esecuzione e che lasciano attualmente rilevare variazioni di gravità strettamente connesse con le variazioni di quota, è da ritenere che l'intru-

sione sia avvenuta, in un'unica fase [1], in epoca precedente al febbraio 1970 e che il sollevamento del suolo protrattosi fino all'estate 1972 debba essere connesso con il comportamento visco-elastico del materiale superficiale di copertura, come accennato da YOKOYAMA (1971) anche in base alla mancanza di eventi sismici intensi.

In effetti dalla data di installazione delle stazioni sismiche nella zona flegrea (febbraio 1970) sono stati registrati quasi unicamente microterremoti.

La non conoscenza delle caratteristiche elastiche del mezzo non consente di correlare l'entità delle deformazioni con l'accumulo di tensioni nell'interno della zona flegrea. Un calcolo prettamente empirico potrebbe essere tentato basandosi sulla estensione dell'area interessata dai movimenti verticali (C. KISSLINGER, 1974), dal che si deduce che nella zona flegrea la magnitudo raggiungibile per un terremoto potrebbe aggirarsi intorno a 5.3.

Una tale deduzione denota l'elevato rischio sismico, unito a quello vulcanico, a cui i centri urbani della zona sono sottoposti.

BIBLIOGRAFIA

BONASIA V. e MONTAGNA S., *Inversione del bradisismo flegreo. Considerazioni gravimetriche e tiltmetriche.* Rend. Acc. Scienze Fis. e Matem., S. IV, **41**, 1974.

CALLIGARIS D., MORELLI C., PISANI M., *Rilievo gravimetrico e magnetico.* « La Ricerca Scientifica », C.N.R., 1972.

CASERTANO L., OLIVERI DEL CASTILLO A., QUAGLIARIELLO M. T., *Terremoti, bradisismo e moti del mare a Pozzuoli.* Atti Acc. Pontaniana, N.S., 1974.

CORRADO G. e PALUMBO A., *Osservazioni sul bradisismo flegreo.* Boll. Soc. Natur., **77**, Napoli, 1968.

CORRADO G., GUERRA I., LO BASCIO A., LUONGO G., NAZZARO A., PALUMBO A., TALARICO G., *Bradisismo flegreo.* Rapporto n. 7 Osserv. Vesuv., 1974.

DE QUAL S., *Rilievo degli spostamenti planimetrici di punti nella zona di Pozzuoli.* « La Ricerca Scientifica », C.N.R., 1972.

FINETTI I. e MORELLI C., *Esplorazione sismica a riflessione dei golfi di Napoli e Pozzuoli.* Boll. Geof. Teor. e Appl., **16**, 1974.

GUERRA I., LO BASCIO A., LUONGO G., NAZZARO A., *Rapporto sulla sorveglianza sismica nell'area di Pozzuoli (marzo 1970 - ottobre 1971).* « La Ricerca Scientifica », C.N.R., 1972.

JAEGER J. C., *Elasticity, fracture and flow.* Methuen & Co., London, 1969.

IMBÒ G., *Inversione del bradisismo flegreo.* Boll. Soc. Natur., **79**, Napoli, 1971.

KISSLINGER C., *Earthquake prediction.* Phys. Today, 1974.

LAVENIA A., *Misure geotermiche nel golfo di Pozzuoli.* « La Ricerca Scientifica », C.N.R., 1972.

[1] D'altronde, il comportamento plastico unanimemente attribuito al materiale superficiale flegreo lascia escludere la stretta dipendenza temporale fra intrusione e variazione del gradiente mareometrico di sollevamento (G. CORRADO et al., 1974). Quest'ultimo, oltre che essere influenzato da fattori meteorologici, potrebbe essere legato (L. CASERTANO et al., 1974) ad un andamento puramente periodico.

LIVIERA ZUGIANI B., *Controlli altimetrici dei capisaldi nell'area flegrea.* « La Ricerca Scientifica », C.N.R., 1972.

MAINO A., SEGRE A., TRIBALTO G., *Rilevamento gravimetrico dei Campi Flegrei e dell'isola d'Ischia.* Ann. Osserv. Vesuv., S. VI, **5**, 1963.

OLIVERI DEL CASTILLO A., *Studio del bradisismo flegreo mediante osservazioni mareografiche.* Atti Ass. Geof. Ital., 1960.

OLIVERI DEL CASTILLO A. e QUAGLIARIELLO M. T., *Sulla genesi del bradisismo flegreo.* Atti Ass. Geof. Ital., 1969.

RAMPOLDI R., *Risultati delle osservazioni sismografiche effettuate dal giugno 1970 al luglio 1971.* « La Ricerca Scientifica », C.N.R., 1972.

SCARASCIA S., *Carta aeromagnetica dei Campi Flegrei.* « La Ricerca Scientifica », C.N.R., 1972.

YOKOYAMA I., *Pozzuoli event in 1970.* Nature, **229**, 1971.

Su alcuni casi di alterazione della biotite in vermiculite *

Nota di MAURIZIO DE' GENNARO e ENRICO FRANCO
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 3 maggio 1975)

RIASSUNTO. — Si prendono in esame lamine di mica biotite e di vermiculite rinvenute tra gli accumuli derivanti dalla degradazione meteorica dei lahars del distretto vulcanico dei Monti Ernici.

Su lamine integre, parzialmente e completamente alterate sono condotti studi chimici, roentgenografici e termici; la presenza di individui cristallini che presentano un nucleo del tutto inalterato è la chiara dimostrazione che la vermiculite deriva dall'alterazione della biotite.

Si considerano, quindi, i fattori che possono aver determinato tale alterazione.

SUMMARY. — Biotite and vermiculite laminae, found in heaps resulting from weathering of lahars in Mts. Ernici, volcanic district, have been investigated. Chemical, X-ray and D.T.A. studies have been carried on unaltered, partially and wholly altered laminae; recovery of single crystals having a core wholly unaltered joint aut that vermiculite results from weathering of biotite.

It has been also observed factors that may have brought about such alteration.

INTRODUZIONE.

Nel quadro generale delle ricerche sull'alterazione delle vulcaniti in Campania e nel Lazio si è mostrato di particolare interesse il fenomeno che investe i prodotti in facies di colata (lahars) che si rinvengono nelle valli di fosso di Monte Acuto e fosso Pisciarello nel complesso vulcanico dei Monti Ernici (FR) [7].

In entrambe queste valli nella parte più pianeggiante si rinvengono degli accumuli, di varia potenza, di materiali derivanti dalla degradazione atmosferica delle colate stesse; tali materiali, di colore rosso, sono costituiti in prevalenza da halloysite che ingloba cristalli o frammenti cristallini, il più delle volte isolati ma presenti anche in aggregati, di pirosseno augite, mica biotite, vermiculite, olivina e più raramente feldspati, granati, apatite e magnetite.

* Lavoro effettuato con il contributo del C.N.R.

Dei minerali di alterazione l'halloysite e l'allofane derivano per la maggior parte dalla frazione vetrosa, costituente la matrice delle piroclastiti, per la restante dall'alterazione di minerali sialici come feldspati, leucite e zeoliti [7, 8].

La presenza di lamine di vermiculite di dimensioni variabili tra i pochi millimetri e 2, 3 centimetri nei prodotti di alterazione delle piroclastiti in facies di colata e la sua contemporanea mancanza nella roccia integra fece supporre che tale minerale rappresentasse il prodotto di alterazione della mica biotite.

Indagini successive permisero di rinvenire un numero elevato di lamine brune a contorno esagonale più o meno regolare, presentanti delle aureole più chiare verso la periferia e altre ancora in cui questa parte era tanto estesa da lasciare solo un piccolo nucleo centrale del colore originario.

Un ulteriore conferma alle prime supposizioni lo diedero le analisi roentgenografiche chimiche e termiche che misero in evidenza come, attraverso stadi successivi, si potesse giungere ad una completa pseudomorfosi di vermiculite su biotite.

Si è ritenuto che lo studio di questo minerale di alterazione rivestisse una certa importanza non essendo frequente il rinvenimento di lamine di biotite così profondamente alterata nelle piroclastiti in genere e sopratutto in quelle campane e del lazio meridionale la cui matrice vetrosa, al contrario, spesso è interessata da profondi fenomeni di halloysitizzazione.

Attualmente l'unica eccezione a quanto detto è il ritrovamento di alcune piccole lamine di vermiculite in un livello piroclastico alle pendici del Monte Taburno.

Lo studio, quindi, dei possibili meccanismi che determinano tale alterazione può permettere di risalire alle condizioni ambientali in cui è avvenuto il fenomeno.

Da quanto è dato osservare in campagna le colate piroclastiche sono soggette ad una alterazione che lungo queste si mostra in tutti i suoi stadi successivi passando da blocchi più o meno arrotondati, in cui sono ancora evidenti gli inclusi calcarei e i molti individui cristallini tra i quali anche grandi lamine di mica, attraverso una serie di termini intermedi fino agli accumuli caotici costituiti prevalentemente da materiali argillosi nei quali sono ancora evidenti i minerali di cui sopra mentre mancano del tutto gli xenoliti calcarei e anche la calcite e le zeoliti che costituivano il cemento della roccia originaria.

Parallelamente a questo processo di argillificazione della parte vetrosa e sialica si riscontra, come detto, quello di alterazione della biotite sembrando così i due fenomeni strettamente legati dal punto di vista genetico.

BREVE CENNO BIBLIOGRAFICO.

Si considera che le vermiculiti in natura si formino, molto frequentemente, per azioni di tipo idrotermale o per intervento di acque meteoriche su minerali preesistenti anche se non può escludersi la possibilità di un'origine primaria.

La maggior parte delle vermiculiti derivano dall'alterazione di miche triottaedriche e, più raramente, diottaedriche di dimensioni sia macroscopiche che microscopiche (vermiculiti argillose). Non mancano, tuttavia, casi in cui la vermiculite si forma a spese di minerali come orneblenda, pirosseni, granati, etc.

Probabilmente anche più abbondanti sono in natura le interstratificazioni di vermiculiti con biotite, flogopite, clorite, etc.

Negli ultimi anni la letteratura si è notevolmente arricchita attraverso le ricerche di molti studiosi rivolte soprattutto a chiarire il meccanismo di alterazione delle miche in vermiculite profittando della circostanza che facilmente in laboratorio possono essere seguiti i vari stadi della rimozione del K di interstrato delle miche con la sostituzione da parte di cationi inorganici od organici.

La recente messa a punto di NORRISH [17] sull'argomento esime dall'entrare in dettaglio ma conviene sottolineare alcuni punti che riguardano le esperienze di laboratorio che più si avvicinano alle condizioni riscontrabili in natura ed in particolare quelle riguardanti il dilavamento da parte di acque superficiali.

Prendendo in esame il caso della biotite come minerale precursore, c'è da tener conto, in particolare, del ph delle acque dilavanti [15, 20], delle dimensioni delle particelle [19], della ossidazione del Fe^{++} [2, 10], della presenza in soluzione di ioni inibenti [6, 18, 29] e di altre ancora [5, 16, 18].

L'influenza del ph sulla rimozione del potassio è piuttosto complessa nel senso che a deboli concentrazioni acide lo ione H^+ si comporta come un qualunque altro catione e sostituisce il K^+ di interstrato mentre a concentrazione più elevata lo strato ottaedrico della mica viene intaccato con la conseguente distruzione del reticolo [29, 14].

Soluzioni saline debolmente acide mostrano una maggiore aggressività sulle miche per cui si pensa che lo ione H^+ abbia un ruolo più complesso nel meccanismo di scambio [14, 29]; a ph più elevati ed in presenza di cationi idratabili come Na, Ca, Mg, i fenomeni di interscambio e di diffusione degli ioni di interstrato delle miche predominano sui fenomeni di idrolisi e quindi di distruzione del reticolo e si formano ancora vermiculiti.

Le dimensioni delle particelle costituiscono un fattore particolarmente importante nella trasformazione delle miche in vermiculite e, contrariamente a quanto può intuirsi, miche di dimensioni dell'ordine del micron mostrano una maggiore resistenza all'alterazione e la quantità di potassio che può essere sostituita tende a diminuire con il diminuire delle dimensioni delle particelle [19, 22].

Sono state proposte varie ipotesi per spiegare il fenomeno e più comunemente si pensa che la rimozione di potassio da alcuni strati fa in modo che il potassio negli strati adiacenti sia legato più fortemente [23] con la tendenza a formare interstratificazioni ordinate o, almeno, parzialmente ordinate piuttosto stabili [9].

La ossidazione del Fe^{++} è un altro motivo di instabilità delle miche ferrifere. Dalle esperienze di laboratorio sembra che le reazioni di scambio siano facilitate nelle miche in cui il Fe^{++} sia progressivamente ossidato [2, 10, 11] più che nelle miche ossidate in precedenza.

È stato supposto che l'asimmetria prodotta intorno all'OH dalla presenza di ferro trivalente, determina una variazione della sua orientazione fino a farla divenire normale al piano della mica conferendole cioè caratteri più simili a quelli di una mica muscovite, ciò spiegherebbe la maggiore difficoltà di rimuovere il K di interstrato nelle miche previamente ossidate [3, 23].

Lo scambio del K delle miche può essere considerato come un fenomeno di diffusione e procede dall'esterno verso l'interno con una separazione netta tra zona alterata ed inalterata [14].

È stato osservato che anche quantità piccolissime di grandi cationi monovalenti in soluzione possono rallentare le reazioni di scambio fino a bloccarle completamente ed in particolare il coefficiente di selettività per il potassio è molto alto [4, 18, 29].

La presenza in soluzione di sali di calcio e di magnesio derivanti dalla preventiva dissoluzione di minerali di questi elementi, faciliterebbe le trasformazioni di miche in vermiculite [4].

Si può osservare, inoltre, che anche il fluoro, che normalmente sostituisce gli (OH) nella struttura delle miche, influisce sullo scambio del potassio nel senso che l'aumento del contenuto in F aumenta la resistenza all'alterazione [5, 15, 18].

Esperienze più recenti conducono a considerare la vermiculite come un prodotto instabile dell'alterazione delle miche che si formi dopo tempi relativamente brevi di dilavamento, mentre per tempi più lunghi, la vermiculite, a sua volta, evolverebbe verso termini smectitici [13].

Non si può dire naturalmente che siano stati risolti tutti i dubbi esistenti sulla genesi delle vermiculiti ed in particolare rimangono ancora da chiarire molte circostanze come l'influenza di alcuni fattori

chimico-fisici, il ruolo della ossidazione del ferro e soprattutto la perdita di carica con l'alterazione [14, 16, 29].

PARTE SPERIMENTALE.

L'indagine mineralogica è stata condotta su 5 campioni provenienti da Fosso di Monte Acuto e su altrettanti provenienti da Fosso Pisciarello (Supino) per ottenere un quadro abbastanza completo sulle modificazioni che avvengono nella mica biotite col procedere della alterazione.

I campioni studiati rappresentano una selezione di un gran numero di lamine a diversa alterazione provenienti da una fascia di circa un metro di spessore e prelevati lungo tutta la estensione dei giacimenti.

I molteplici individui cristallini raccolti, dopo lavaggio con acqua distillata e trattamento agli ultrasuoni, sono stati suddivisi in sottili lamelle e quindi separati in base all'apparente grado di alterazione.

Macroscopicamente la biotite si presenta di colore bruno piuttosto scuro, le lamine parzialmente alterate conservano nuclei di tale colore e bordi, di larghezza variabile, di colore tra il giallo chiaro ed il grigio argenteo colori, questi, caratteristici anche della vermiculite pura.

Sui singoli campioni sono stati eseguiti studi chimici roentgenografici, termici e ottici, sulle fasi che all'analisi sono risultate costituite esclusivamente da vermiculite sono state effettuate prove di riscaldamento, in muffole per alte temperature con prelievi del materiale per ogni incremento di temperatura di 100° a partire dai 110°, e ancora trattamenti con soluzioni normali di KCl per ottenere una ennesima conferma della derivazione di tale vermiculite dall'alterazione della mica.

Analisi chimiche:

Nelle tabelle che seguono si riportano i risultati analitici relativi ai dieci campioni studiati ed il calcolo degli ioni delle basi solo per i termini puri.

Le due miche analizzate presentano composizione simile e sono caratterizzate da un contenuto in MgO superiore a quello medio per le biotiti e ciò sembra confermare l'assimilazione di rocce carbonatiche da parte del magma.

Il confronto tra queste analisi con quelle dei vari termini ad alterazione crescente denota il graduale impoverimento di K_2O e F, la progressiva ossidazione del Fe ferroso a ferrico ed il vistoso aumento del contenuto in acqua.

TABELLA I

	1	2	3	4	5
SiO_2	37.01	34.73	33.57	33.35	32.99
TiO_2	2.64	2.33	2.01	1.80	3.32
Al_2O_3	15.06	14.18	15.88	16.45	17.83
Fe_2O_3	6.04	5.92	3.79	6.61	5.64
FeO	7.28	6.68	4.57	2.85	0.70
MnO	0.61	0.59	0.45	0.55	0.32
MgO	16.76	16.65	18.68	17.03	17.26
CaO	0.09	0.54	0.61	0.51	0.79
K_2O	10.35	9.75	9.58	4.00	0.73
Na_2O	0.76	1.59	2.77	1.52	1.16
F	1.01	0.85	0.84	0.61	0.32
H_2O^-	1.30	2.29	2.74	7.19	8.94
H_2O^+	2.14	4.81	5.29	8.22	10.66
	101.05–	100.91–	100.79–	100.69–	100.66–
O ≡ F	0.43	0.36	0.36	0.26	0.13
	100.52	100.55	100.43	100.43	100.53

Fosso di Monte Acuto: 1) Biotite; 2) Biotite poco alterata; 3) Biotite mediamente alterata; 4) Biotite profondamente alterata; 5) Vermiculite.

TABELLA II

	1	2	3	4	5
SiO_2	38.14	35.26	37.17	34.59	32.66
TiO_2	2.85	2.83	2.83	2.41	3.23
Al_2O_3	15.90	16.15	18.01	17.63	16.24
Fe_2O_3	2.70	3.13	5.89	6.89	6.95
FeO	8.36	6.36	3.78	2.09	1.41
MnO	0.41	0.45	0.30	0.20	0.23
MgO	18.62	18.22	16.52	16.74	17.19
CaO	0.14	0.99	1.30	0.99	0.61
K_2O	10.14	7.57	8.91	5.38	1.33
Na_2O	0.39	1.53	1.03	0.98	0.93
F	0.45	0.48	0.37	0.25	0.12
H_2O^-	0.66	2.83	1.45	5.91	7.27
H_2O^+	1.62	4.42	2.89	6.30	11.86
	100.37–	100.22–	100.22–	100.36–	100.03–
O ≡ F	0.19	0.20	0.16	0.11	0.05
	100.18	100.02	100.06	100.25	99.98

Fosso Pisciarello: 1) Biotite; 2) Biotite poco alterata; 3) Biotite mediamente alterata; 4) Biotite profondamente alterata; 5) Vermiculite.

TABELLA III

Numero degli ioni delle basi per 24 (O, OH, F).

	1			2	
Si	5.52	8.00	Si	5.30	8.00
Al	2.48		Al	2.60	
			Fe'''	0.10	
Al	0.16	5.83	Fe'''	0.30	5.77
Ti	0.30		Ti	0.30	
Fe'''	0.67		Fe''	0.97	
Fe''	0.91		Mn	0.05	
Mn	0.07		Mg	4.15	
Mg	3.72				
Ca	0.01	2.20	Ca	0.02	1.93
K	1.97		K	1.80	
Na	0.22		Na	0.11	
F	0.48	2.62	F	0.20	1.71
OH	2.14		OH	1.51	

1) Biotite di Fosso di Monte Acuto; 2) Biotite di Fosso Pisciarello.

TABELLA IV

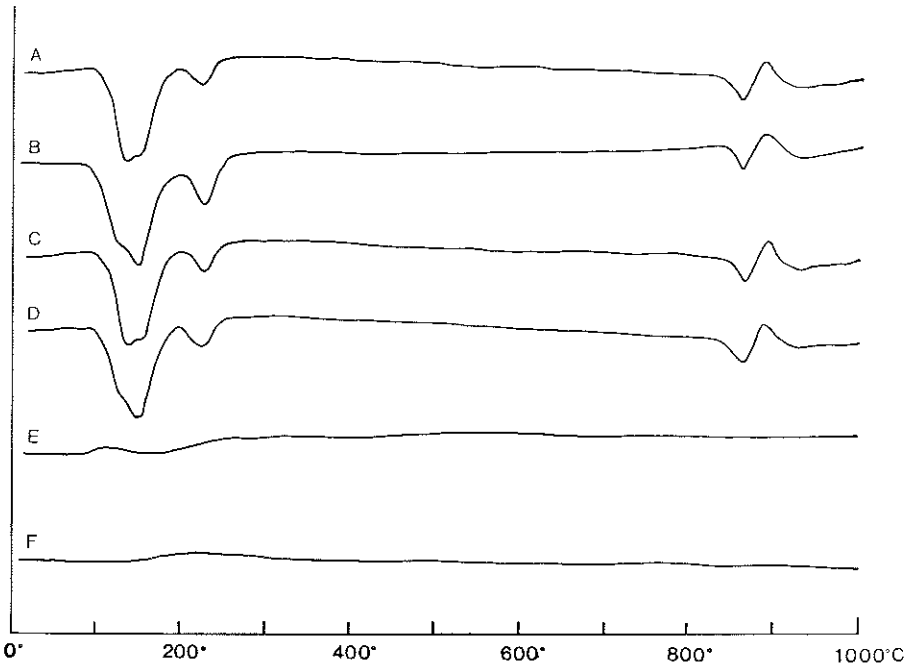
Numero degli ioni delle basi per 22 ossigeni.

	1		2			1		2	
Si	5.27	8.00	5.27	8.00	Ca	0.13	0.64	0.10	0.68
Al	2.73		2.73		K	0.15		0.28	
					Na	0.36		0.30	
					H_2O	8.33		8.26	
					OH	4.00		4.00	
Al	0.62	5.93	0.36	5.95	M^{+2}	0.83		0.34	
Ti	0.40		0.38						
Fe'''	0.67		0.84						
Fe''	0.09		0.19						
Mn	0.04		0.03						
Mg	4.11		4.15						

1) Vermiculite di Fosso di Monte Acuto; 2) Vermiculite di Fosso Pisciarello.

ANALISI TERMICHE.

Le analisi termodifferenziali effettuate con apparecchiatura Rigaku-Denki a incremento termico di 10° minuto hanno mostrato, sia per i campioni provenienti da Fosso di Monte Acuto che per quelli provenienti da Fosso Pisciarello, a parità di condizioni di lavoro, un graduale intensificarsi degli effetti termici caratteristici della vermiculite a 140°, 250°, 860° e 900° C con l'aumentare della alterazione.



TAV. I. - A) Vermiculite proveniente da Fosso di Monte Acuto; B) Stesso campione tenuto in essiccatore per 24 ore; C) Vermiculite proveniente da Fosso Pisciarello; D)Stesso campione tenuto in essiccatore per 24 ore; E) Biotite proveniente da Fosso di Monte Acuto; F) Biotite proveniente da Fosso Pisciarello.

Al fine di evitare l'influenza della umidità ambiente sull'andamento dei primi picchi endotermici, i campioni sono stati tenuti in essiccatori per 24 ore prima della analisi; in tale modo si sono ottenute le curve termodifferenziali riportate in tavola 1.

Solo per le vermiculiti pure si sono realizzati termogrammi di sostanze tenute per 24 ore in ambiente ad umidità del 50 % le curve relative, tavola I B e D, confermano l'influenza dell'umidità relativa sull'andamento dei termogrammi alle basse temperature.

ANALISI ROENTGENOGRAFICHE ED OTTICHE.

L'indagine roentgenografica ha preceduto ogni altro tipo di analisi in quanto fin dalle prime osservazioni si era notato che lamine di mica biotite, che a prima vista non mostrava traccia alcuna di alterazione, fornivano diffrattogrammi con un effetto più o meno evidente a 14 Å e, al contrario, lamine di vermiculite mostravano un picco a 10 Å.

Per lavorare su sostanze il più possibile pure si stabiliva di suddividerle in base ai dati diffrattometrici si sono ottenuti, così, cinque gruppi che vanno dalla biotite integra alla vermiculite passando attraverso tre termini ad alterazione crescente.

Delle numerosissime lamine esaminate, la gran parte è risultata costituita dai termini puri biotite e vermiculite presenti sia isolatamente che associati.

I campioni selezionati sono stati polverizzati e poi esaminati ai raggi X in aggregati orientati e non, saturati con $CaCl_2$ 4 N, glicolati e ancora riscaldati da 110° a 1200° C.

Nelle tabelle che seguono si riportano i dati dei diagrammi di polveri relativi ai singoli termini prima e dopo i vari trattamenti. Le tabelle 1 e 2 mettono in evidenza come col procedere della alterazione compaiono le interferenze caratteristiche della vermiculite e scompaiono parallelamente quelle dovute alla biotite, per confronto si riportano i valori relativi alla biotite di Edenville e alla vermiculite di West Chester.

Le polveri di entrambe le vermiculiti, trattate con $CaCl_2$, hanno fornito i valori riportati nella tabella 3; dal confronto dei vari diagrammi si possono notare gli spostamenti del picco caratteristico a 14 Å sia con la saturazione che in seguito al trattamento termico a 170 ° ed alla glicolazione.

Nella tabella 4 e 5 sono raccolti i dati relativi ai trattamenti termici e si può notare che per temperature fino a 400° C le disidratazioni non sono permanenti per la spontanea reidratazione dei campioni alla umidità ambiente. Prove successive di riscaldamento a 170° ed immediato esame diffrattometrico evidenziano gli spostamenti da 14,84 Å a 11,77 Å che possono indicare sia la riduzione ad un solo strato di acqua interstrato sia una completa disidratazione ed una conseguente reidratazione parziale.

L'interferenza a 14 Å mostra un abbassamento della intensità già a 500° per poi scomparire del tutto ai 600°; da tale temperatura fino ad oltre i 1000° si riscontrano solo le interferenze caratteristiche delle fasi anidre tra le varie quella a circa 10 Å rappresenta la riflessione di

TABELLA 1

1		2		3		4		5		6	
ff	10.17	ff	10.10	f	14.10	ff	14.33	ff	14.38	ff	14.20
m	4.58	d	4.59	dd	10.27	mf	10.21	dd	7.26	d	7.10
f	3.37	ff	3.37	dd	7.24	mf	4.57	f	4.57	dd	4.76
m	3.14	d	3.14	m	4.60	dd	3.62	m	3.59	mf	4.59
dd	2.91	d	2.92	dd	4.03	d	3.34	m	2.87	m	4.07
ff	2.62	f	2.66	dd	3.68	dd	2.91	f	2.64	mf	3.52
dd	2.51	m	2.52	m	3.39	f	2.63	f	2.55	f	3.43
f	2.43	f	2.45	d	3.15	m	2.42	f	2.40	m	2.82
d	2.28	d	2.28	dd	2.93	dd	2.29	dd	2.30	dd	2.75
mf	2.18	f	2.18	ff	2.61	dd	2.17	dd	2.20	mf	2.64
m	2.00	f	2.00	dd	2.53	dd	2.00	dd	1.74	m	2.54
dd	1.91	d	1.91	mf	2.43	dd	1.90	dd	1.67	dd	2.49
dd	1.74	d	1.75	dd	2.26	dd	1.75	ff	1.53	m	2.38
mf	1.67	f	1.67	m	2.17	dd	1.67	d	1.32	d	2.30
ff	1.53	f	1.54	md	2.00	ff	1.56	dd	1.27	dd	2.19
d	1.52	d	1.47	dd	1.91	dd	1.36			dd	2.09
dd	1.47	d	1.43	dd	1.74	d	1.33			dd	2.01
dd	1.43	m	1.36	m	1.67					dd	1.97
dd	1.39	md	1.33	f	1.53					dd	1.74
d	1.36	md	1.31	d	1.52					dd	1.65
d	1.32			dd	1.39					f	1.53
d	1.31			d	1.32					dd	1.50
dd	1.27			d	1.27					dd	1.44
dd	1.22									dd	1.41
dd	1.13									dd	1.33
										dd	1.31
										dd	1.27

Fosso di Monte Acuto: 1) Biotite integra: 2) Biotite Edenville; 3) Biotite mediamente alterata; 4) Biotite profondamente alterata; 5) Vermiculite; 6) Vermiculite West Chester.

TABELLA 2

1		2		3		4		5		6	
f	10.13	ff	10.10	ff	14.24	ff	14.40	ff	14.24	ff	14.20
m	4.59	d	4.59	d	10.09	f	10.12	d	7.18	d	7.10
mf	3.36	ff	3.37	mf	4.58	ddd	7.28	f	4.58	dd	4.76
dd	3.13	d	3.14	d	3.90	ff	4.58	mf	3.57	mf	4.59
dd	2.89	d	2.92	m	3.65	md	3.61	f	2.85	m	4.07
ff	2.61	f	2.66	f	3.36	m	3.37	f	2.63	mf	3.52
dd	2.57	m	2.52	m	3.13	d	3.15	mf	2.54	f	3.43
mf	2.42	f	2.45	md	2.90	md	2.90	ff	2.38	m	2.82
dd	2.28	d	2.28	ff	2.62	f	2.62	dd	2.27	dd	2.75
mf	2.16	f	2.18	dd	2.50	md	2.56	dd	2.18	mf	2.64
m	2.00	f	2.00	mf	2.42	m	2.43	dd	2.09	m	2.54
dd	1.90	d	1.91	dd	2.27	dd	2.29	dd	2.01	dd	2.49
dd	1.73	d	1.75	f	2.17	md	2.17	dd	1.74	m	2.38
m	1.67	f	1.67	m	2.00	ddd	2.09	m	1.66	dd	2.30
ff	1.53	f	1.54	dd	1.90	d	2.01	m	1.51	dd	2.19
dd	1.51	d	1.47	dd	1.74	dd	1.74	dd	1.43	dd	2.09
ddd	1.47	d	1.43	m	1.67	d	1.67	d	1.32	dd	2.01
ddd	1.43	m	1.36	ff	1.53	f	1.53	dd	1.27	dd	1.97
ddd	1.40	md	1.33	dd	1.51	ddd	1.44			dd	1.74
d	1.36	md	1.31	dd	1.43	dd	1.37			dd	1.65
md	1.32			dd	1.39	d	1.33			f	1.53
dd	1.30			m	1.32					dd	1.50
dd	1.27			dd	1.27					dd	1.44
dd	1.22									dd	1.41
dd	1.13									dd	1.33
dd	1.08									dd	1.31
										dd	1.27

Fosso Pisciarello: 1) Biotite integra; 2) Biotite Edenville; 3) Biotite mediamente alterata; 4) Biotite profondamente alterata; 5) Vermiculite; 6) Vermiculite West Chester.

secondo ordine dovuta alla interstratificazione tra fase 9,52 Å e la 11,59 Å.

Oltre i 1100° lo spettro che si ottiene è quello caratteristico della enstatite alla quale si associano in quantità nettamente subordinata la mullite e la γ Fe_2O_3.

Per avere una ulteriore conferma sulla natura vermiculitica del materiale studiato lo si è trattato con soluzioni normali di KCl ottenendosi, così, una contrazione della riflessione basale a 11.62 Å che, in accordo con le osservazioni di Weaver [28], è da correlarsi alla bassa carica interstrato di tali vermiculiti.

Prima di concludere questo capitolo bisogna accennare brevemente alla caratteristica presentata da un numero limitatissimo di lamine parzialmente alterate in cui accanto alla vermiculite ed alla biotite si sono notate tracce di un interstratificato vermiculite-idrobiotite con le interferenze caratteristiche a 24.15, 12.10, 4.90, e 3.48 Å.

Le osservazioni al microscopio polarizzatore eseguite su di un gran numero di lamine di biotite e vermiculite hanno permesso di calcolare il valore dell'angolo 2 V che è risultato compreso per le biotiti tra 10° e 15° per le verniculiti tra 5° e 6° in accordo con i dati della letteratura.

Discussione.

Nella introduzione si è accennato al fenomeno di degradazione e successiva argillificazione delle piroclastiti in genere e dei lahars in particolare ascrivibili al vulcanismo degli Ernici. Tale fenomeno si mostra particolarmente vistoso lungo alcune delle numerose valli che incidono i rilievi calcarei [7] che per la loro morfologia non hanno consentito alle colate di estendersi in senso areale, vale per tutti l'esempio di Fosso Pisciarello a W di Supino dove si raggiungono potenze di alcune decine di metri.

Le acque superficiali, particolarmente ricche nei mesi invernali, hanno inciso profondamente detti lahars accumulando i prodotti di degradazione sul fondo della valle stessa; una piccola circolazione si è anche insediata all'interno di tali accumuli contribuendo all'alterazione profonda della massa vetrosa, di alcuni dei minerali in essa contenuti, ed alla completa dissoluzione degli xenoliti calcarei.

Per alcune valli si può avanzare l'ipotesi che all'alterazione abbia contribuito anche la formazione di qualche piccolo lago dovuto allo sbarramento della valle stessa ad opera o delle colate originarie o dei materiali di degradazione.

Dei vari minerali presenti quello che si è dimostrato meno resistente all'alterazione è stata la biotite la quale in una fascia di alcune

TABELLA 3

1		2		3		4		5		6		7		8	
ff	14.38	ff	14.84	ff	14.24	ff	14.78	ff	11.77	ff	15.90	ff	11.30	ff	15.85
d	7.26	d	7.28	d	7.18	d	7.25	d	7.30	mf	7.43	dd	7.25	f	7.46
f	4.57	dd	4.95	f	4.58	dd	4.92	mf	4.60	d	4.92	mf	4.58	dd	4.93
m	3.59	m	4.60	mf	3.57	m	4.56	dd	3.95	dd	4.76	d	3.95	m	4.60
m	2.87	m	3.63	f	2.85	m	3.60	m	3.63	d	4.59	m	3.60	d	3.70
f	2.64	dd	3.28	f	2.63	dd	3.25	dd	3.23	m	3.71	d	3.23	m	3.36
f	2.55	m	2.97	mf	2.54	m	2.96	f	2.97	mf	3.05	f	2.97	f	2.90
f	2.40	mf	2.64	ff	2.38	f	2.61	mf	2.64	dd	2.88	m	2.62	dd	2.88
dd	2.30	mf	2.54	dd	2.27	f	2.53	md	2.50	dd	2.53	d	2.51	dd	2.77
dd	2.20	mf	2.39	dd	2.18	f	2.37	m	2.41	dd	2.49	d	2.40	md	2.68
dd	1.74	dd	2.28	dd	2.09	d	2.25	d	2.33	dd	2.10	dd	2.30	d	2.53
dd	1.67	dd	2.22	dd	2.01	dd	2.10	dd	2.26	m	1.54	dd	2.10	dd	2.49
ff	1.53	dd	2.10	dd	1.74	dd	1.76	dd	2.12	dd	1.43	dd	1.76	d	2.39
d	1.32	dd	1.79	m	1.66	dd	1.69	dd	1.97			dd	1.69	dd	2.10
dd	1.27	dd	1.70	ff	1.51	f	1.52	dd	1.74			f	1.54	mf	1.56
		f	1.53	dd	1.43			dd	1.67			dd	1.45	d	1.44
		dd	1.42	d	1.32			dd	1.60					dd	1.41
				dd	1.27			f	1.54						
								dd	1.45						

1) Vermiculite di Fosso Monte Acuto integra; 2) Stesso campione trattato con $CaCl_2$ 4N; 3) Vermiculite di Fosso Pisciarello integra; 4) Stesso campione trattato con $CaCl_2$ 4N; 5) Campione 1 riscaldato a 170°; 6) Campione 1 trattato con Glicerina; 7) Campione 2 riscaldato a 170°; 8) Campione 2 trattato con Glicerina.

TABELLA 4

Vermiculite Fosso Monte Acuto.

110°	200°	300°	400°	500°	600°	700°	800°	1000°	1200°
ff 14.58	ff 14.60	ff 14.50	ff 14.45	f 14.32	—	—	—	—	
—	—	—	d 10.48	m 10.40	f 10.18	f 10.05	m 9.90	dd 9.80	
—	—	—	—				md 8.43		
dd 7.20	dd 7.25	—	—	—	—	—	—	—	
mf 4.58	mf 4.60	mf 4.61	mf 4.57	mf 4.60	mf 4.60	mf 4.57	dd 4.52	d 4.45	dd 4.80
md 3.57	md 3.57	dd 3.59	dd 3.57	dd 3.60	dd 3.62	—	—	—	dd 4.35
dd 3.35	dd 3.36	dd 3.38	dd 3.40	dd 3.38	dd 3.37	—	dd 3.30	dd 3.30	d 3.45
—	—	—	—	—	dd 3.05	ddd 3.02	f 3.10	dd 3.10	d 3.30
mf 2.90	m 2.91	d 2.90	dd 2.90	—	—	—	—	dd 2.55	f 3.18
f 2.64	f 2.64	f 2.63	f 2.63	f 2.63	ff 2.63	ff 2.63	—	—	dd 3.10
—	—	—	m 2.48	m 2.45	f 2.47	f 2.45	—	—	d 2.90
mf 2.39	mf 2.39	dd 2.40	—	—	—	—	dd 2.26	dd 2.26	f 2.84
dd 2.18	dd 2.19	dd 2.19	dd 2.18	dd 2.18	dd 2.20	dd 2.20	—	—	dd 2.73
dd 2.02	dd 2.03	—	—	—	—	—	dd 2.00	dd 2.00	dd 2.76
dd 1.72	dd 1.74	dd 1.72	dd 1.73	dd 1.70	dd 1.73	dd 1.72	dd 1.80	dd 1.80	dd 2.67
dd 1.67	dd 1.67	dd 1.67	dd 1.68	dd 1.67	d 1.66	—	—	—	dd 2.57
ff 1.53	ff 1.53	f 1.53	ff 1.53	ff 1.55	ff 1.55	mf 1.53	d 1.50	dd 1.50	ff 2.50
					dd 1.36	dd 1.36			dd 2.34
dd 1.27	dd 1.28	dd 1.27	dd 1.27	dd 1.28	dd 1.29	dd 1.30			dd 2.10
									f 2.00
									d 1.96
									d 1.84
									dd 1.78
									d 1.60
									d 1.56
									dd 1.53
									dd 1.49
									f 1.48
									mf 1.42
									dd 1.39
									dd 1.29

decine di centimetri immediatamente al di sotto del piano campagna si rinviene in lamine prevalentemente alterate; una valutazione approssimativa indica nel 10 % circa la percentuale di biotite ancora fresca rinvenibile in tale livello superficiale.

Le cause che hanno determinato la formazione della vermiculite a danno della biotite possono essere varie; tra queste sembra rivestire una notevole importanza la presenza di ioni Ca e Mg nelle acque che impregnano e dilavano tutti questi materiali.

L'apporto degli ioni su menzionati è assicurato dal contatto delle acque meteoriche con i calcari e le dolomie delle alture circostanti e con le xenoliti della stessa natura dei lahars in via di disfacimento a questo è da aggiungere, inoltre, l'apporto delle acque sorgive che si manifestano a quote diverse lungo le valli.

Al continuo rinnovarsi delle soluzioni dilavanti è dovuto il rapido progredire della alterazione ma è logico che negli strati più profondi dove più ridotto è il movimento delle acque, l'avvicinarsi della concentrazione di K al suo valore critico ostacoli notevolmente l'avanzare del fenomeno.

Il contemporaneo verificarsi della alterazione del vetro determina un aumento degli ioni K in soluzione; per tale motivo si può avanzare l'ipotesi che là dove avviene il fenomeno dell'argillificazione, che interessa sempre masse più estese, si ha un marcato rallentamento nella formazione della vermiculite, al limite i due processi potrebbero avvenire in tempi diversi.

Il non trascurabile contenuto in F delle biotiti originarie, rappresenta un ulteriore ostacolo; è da notare che anche il F viene gradualmente rimosso come testimoniato dalle analisi chimiche.

L'azione biologica e di ioni organici può essere considerata come ulteriore contributo all'alterazione delle lamine di biotite nei suoli ottenendosi, quindi, in questi primi livelli, le condizioni ottimali per il verificarsi del fenomeno.

Conclusioni.

I risultati degli studi di molti Autori sull'alterazione naturale ed artificiale della biotite hanno evidenziato che il prodotto principale di tale fenomeno è la vermiculite alla quale spesso si associano idrobiotiti, cloriti e montmorillomiti e che tale trasformazione è dovuta ad agenti idrotermali, di contatto, atmosferici.

Le osservazioni condotte sulle vermiculiti provenienti dal distretto degli Ernici portano alle seguenti considerazioni:

TABELLA 5

Vermiculite Fosso Pisciarello.

110°		200°		300°		400°		500°		600°		700°		800°		1000°		1200°	
ff	14.60	ff	14.01	ff	14.47	ff	14.42	f	14.35										
						dd	10.47	mf	10.33	f	10.20	mf	9.84	m	9.83	dd	9.81		
														md	8.45				
dd	7.22	dd	7.22																
mf	4.59	mf	4.58	mf	4.60	mf	4.59	mf	4.62	f	4.57	mf	4.55	dd	4.52	dd	4.52	dd	4.83
m	3.58	md	3.57	dd	3.61	ddd	3.57	dd	3.58	dd	3.61							dd	4.38
d	3.36	dd	3.35	dd	3.36	dd	3.35	dd	3.03	dd	3.37			dd	3.33	dd	3.33	d	3.46
mf	2.86	md	2.86	dd	2.89	ddd	2.89			dd	3.03	dd	3.02	f	3.00	dd	3.00	d	3.30
f	2.64	mf	2.64	f	2.64	f	2.63	f	2.63	ff	2.63	ff	2.62			dd	2.55	f	3.14
						m	2.47	m	2.46	f	2.46	f	2.46					dd	3.00
f	2.39	m	2.39	dd	2.41													d	2.93
														dd	2.24	dd	2.27	f	2.84
dd	2.17	dd	2.18	dd	2.19	dd	2.20	dd	2.20	dd	2.19	dd	2.19					dd	2.73
dd	2.08									ddd	2.10	dd	2.09					dd	2.69
														dd	2.00	dd	2.00	ddd	2.58
				dd	1.90					dd	1.89	dd	1.89	dd	1.80			ff	2.52
dd	1.73	dd	1.74	dd	1.73	ddd	1.73	dd	1.70	dd	1.73	dd	1.72					dd	2.37
dd	1.67	dd	1.67	dd	1.66	dd	1.68	dd	1.67	dd	1.66							dd	2.10
ff	1.53	ff	1.53	f	1.53	f	1.53	ff	1.53	dd	1.55	mf	1.53	dd	1.50	m	1.51	f	2.02
				dd	1.52													d	1.96
										dd	1.36	dd	1.36					d	1.84
d	1.34	d	1.34															dd	1.78
						dd	1.32	dd	1.32	dd	1.32	dd	1.32					d	1.60
										dd	1.30	dd	1.30					d	1.56
		dd	1.27			ddd	1.27	dd	1.27	dd	1.27							dd	1.53
																		dd	1.49
																		f	1.48
																		mf	1.44
																		dd	1.39
																		dd	1.29
																		d	1.26

A) il fattore determinante dell'alterazione è rappresentato dalle acque meteoriche arricchite di ioni Ca e Mg per preventiva dissoluzione di rocce carbonatiche; è da escludere che un contributo idrotermale o pneumatolitico abbia portato alla formazione della vermiculite prima dell'alterazione dei lahars in quanto in queste rocce si rinviene sempre e solo biotite inalterata;

B) il processo di alterazione, che ovviamente avviene dalla periferia verso il centro delle singole lamine, è da considerarsi come un passaggio diretto dalla biotite alla vermiculite anche se la presenza molto rara di minerali interstratificati può indicare che tali fasi siano dei termini labili nell'insieme del processo di alterazione e che il verificarsi di particolari condizioni ambientali può evidenziare;

C) la circostanza che nello strato superficiale del terreno si rinvengono lamine di biotite inalterata, parzialmente alterata e vermiculite, è dovuta al continuo apporto di nuovo materiale proveniente dalla roccia più a monte in via di disgregazione;

D) il ritrovamento di alcune lamine che alla indagine roentgenografica hanno mostrato nella parte periferica una evoluzione verso termici smectitici sembra confermare l'ipotesi di Kittrich [13] per il quale la vermiculite rappresenta un termine intermedio ed instabile nella alterazione della mica.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARSHAD I., *Vermiculite and its relation to biotite as revealed by base exchange reactions, X Ray analises, differential thermal curves and water content*, Amer. Min., **33** (1948).

[2] BARSHAD I., KISHK F. M., *Oxidation of ferrous iron in vermiculite and biotite alters fixation and replaceability of potassium*, Science, **162** (1968).

[3] BARSHAD I., KISHK F. M., *Factors effecting potassium fixation and cation exchange capacities of soil vermiculite clays*, Clays and Clay Min., **18** (1970).

[4] BASSETT W. A., *The geology of vermiculite occurrences*, Tenth Nat. Conf. on Clays and Clay Min.

[5] BASSETT W. A., *Role of hydroxyl orientation in mica alteration*, Geol. Am. Soc. Bull., **71** (1960).

[6] BASSETT W. A., *The origin of the vermiculite deposit at Libby, Montana*, Am. Min., **44** (1959).

[7] DE GENNARO M., FRANCO E., *Studio preliminare sulle vulcaniti dei monti Ernici e della Media Valle Latina*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Serie 4ª, vol. XXXVIII (1971).

[8] DE GENNARO M., FRANCO E., STANZIONE D., *L'halloysite come prodotto di alterazione nelle vulcaniti campane e laziali*, Atti Acc. Sc. Fis. Mat., Serie 3ª, vol. VIII (1973).

[9] FARMER V. C., RAUSSELL J. D., MCHARDY W. J., NEWMANN A. C. D., ALLRICK J. L., RIMSAITE J. Y. H., *Evidence for loss of protons and octahedral iron from oxidised biotite and vermiculite*, Min. Mag., **38** (1971).

[10] GILKES R. J., YOUNG R. C., QUIRK J. P., *Oxidation of ferrous iron in biotites*, Nature, **236** (1972).

[11] GRUNER G. W., *The structure of vermiculites and their collapse on dehydration*, Am. Min., **19** (1934).

[12] HODA S. N., HOOD X. C., *Laboratory alteration of trioctahedral micas*, Clays and Clay Min., **20** (1972).

[13] KITTRICK J. A., *Mica-derived vermiculites as unstable intermediates*, Clays and Clay Min., **2** (1973).

[14] MAMY J., *Extraction of interlaier K from phlogopite. Specific effects of cations. Role of Na and H concentrations in extraction solutions.* Clays and Clay Min., **18** (1970).

[15] NEWMANN A. C.D., *Cation exchange properties of micas - I The relation between mica composition and potassium exchange in solutions of different ph.* Journal of Soil Sc., **20** (1969).

[16] NEWMANN A. C. D., *The synergetic effect of hydrogen ions on the cation exchange of potassium in micas*, Clay Min., **8** (1970).

[17] NORRISH K., *Factors in the weatering of mica to vermiculite*, Int. Clay Conf. Proc., (1972).

[18] RAUSSEL-COLOM J., SWEATMAN T. P., WELLS C. B., NORRISH K., *Experimental pedology*, Proc. 11th School Agric. Sc. (1965).

[19] REICHENBACH H. VON GRAF, RICH C. I., *Potassium release from muscovite as influenced by particle size*, Clays and Clay Min., **17** (1969).

[20] ROBERT M., PEDRO G., *Etablissement d'un schema de l'evolution experimentale des micas trioctaedriques en fonction des conditions du milieu (pH concentration)*, Inter. Clay Conf. proc. (1972).

[21] RUOSSEAUX M., NOTHAN Y., VIELVOYE L. A., HERBILLON A., *The vermiculitization of trioctahedral micas II. Correlations between the K level and cristallographic parameters*, Inter. Clay Conf. Proc. (1972).

[22] SCOTT A. D., *Effect of particle size on interlayer potassium exchange in micas*, Trans. 9th Congr. Int. Soil Sc., **11** (1968).

[23] SERRATOSA J. M., BRADLEY W. F., *Determination of the orientation of OH band axes in layer silicates by infrared absorption*, J. Phys. Chem., **62** (1958).

[24] WALKER G. F., *The decomposition of biotite in the soil*, Min. Mag., **28** (1949).

[25] WALKER G. F., *Vermiculite Minerals.* X ray Identification and Crystal structures of clay Minerals, Cap. VII.

[26] WALKER G. F., *On the differentiation of vermiculites and smectites in clays.* Clay Min. Bull., **3**, 17 (1957).

[27] WALKER G. F., *Reactions of expanding-lattice clay minerals with glycerol and ethylene glycol*, Clay Min. Bull., **3**, 20 (1958).

[28] WEAVER C. E., *Potassium fixation by expandable clay minerals*, Am. Miner., **43** (1958).

[29] WELLS C. B., NORRISH K., *Accelerated rates of release of interlayer potassium from micas*, Trans 9th Int. Congr. Soil Sci., **11** (1968).

Sintesi dell'1-metil-2-idrossi-3,7,8-trimetossi-9,10-antrachinone *

Nota di MARIO D'AGOSTINO, GIUSEPPE PROTA e FRANCESCO DE SIMONE
presentata dal socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS

(Adunanza del 3 maggio 1975)

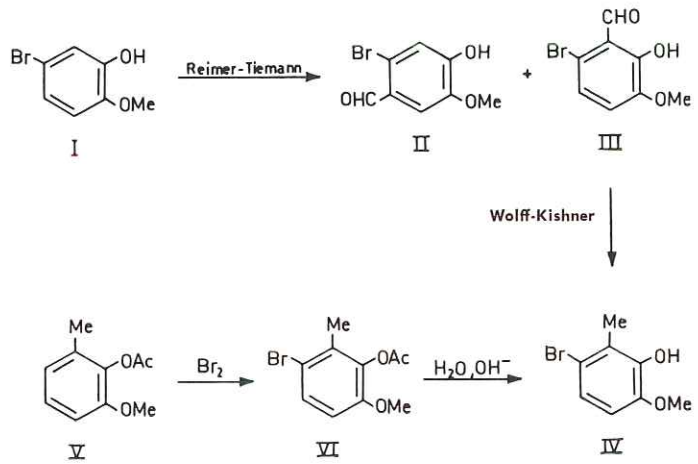
RIASSUNTO. — Viene descritta la sintesi dell'1-metil-2-idrossi-3,7,8-trimetossi-9,10-antrachinone (XI), per ciclizzazione dell'acido benzilbenzoico (IX) e successiva ossidazione cromica dell'antrone (X). L'acido benzilbenzoico (IX) è stato ottenuto per riduzione con polvere di zinco in ambiente alcalino della bromoftalide (VIII), risultante dalla condensazione dell'acido opianico (VII) con il 2-idrossi-3-metossi-6-bromotoluene (IV), preparato per riduzione della 6-bromo-o-vanillina (III) o, più convenientemente, per bromurazione del 2-acetossi-3-metossitoluene (V) e successiva idrolisi.

SUMMARY. — The synthesis of 1-methyl-2-hydroxy-3,7,8-trimethoxy-9,10-anthraquinone (XI) via the cyclisation of the benzylbenzoic acid derivative (IX) followed by chromic acid oxidation of the resulting anthrone (X) is reported. The benzylbenzoic acid (IX) was obtained by the treatment of the bromophtalide (VIII) with zinc dust in alkaline medium. Condensation of opianic acid (VII) with 2-hydroxy-3-methoxy-6-bromotoluene (IV) afforded the bromophtalide (VIII). 2-Hydroxy-3-methoxy-6-bromotoluene was prepared by Wolff-Kishner reduction of 6-bromo-o-vanillin (III) or, more conveniently, by bromination of 2-acetoxy-3-methoxytoluene (V), followed by alkaline hydrolysis.

Nel corso di studi rivolti al chiarimento della struttura di un pigmento antrachinonino naturale [1, 2] è stato necessario disporre, a scopo di confronto, di un campione autentico di 2-idrossi-1-metil-3,7,8-trimetossi-9,10-antrachinone. Tale composto, precedentemente non noto, è stato sintetizzato con il procedimento descritto nello schema 2, basato sulla condensazione dell'acido opianico (VII) con il 2-idrossi-3-metossi-6-bromotoluene (IV). Quest'ultimo intermedio è stato preparato inizialmente per riduzione dell'idrossialdeide (III) ottenuta insieme all'isomero (II) per formilazione secondo Reimer e Tiemann del 5-bromo-2-metossifenolo (I) (cfr. schema 1).

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.

Più conveniente per la preparazione di (IV) è risultata la bromurazione diretta del 2-acetossi-3-metossitoluene che, sorprendentemente, ha fornito, con rese elevate, un solo prodotto di sostituzione

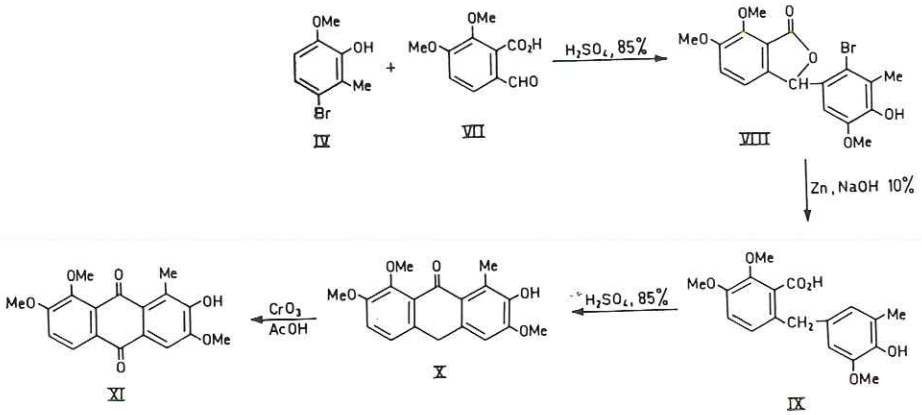


SCHEMA 1.

(VI) con proprietà fisiche e spettroscopiche identiche a quelle dell'acetilderivato di (IV).

L'idrolisi di (VI) ha permesso così di ottenere il bromofenolo desiderato con una resa complessiva del 69 %.

Nelle usuali condizioni di reazione, la condensazione di (IV) con l'acido opianico (VII), in H_2SO_4 all'85 %, ha fornito con resa del 66 % un composto cristallizzabile da metanolo, p.f. 185-188°C, $C_{18}H_{17}BrO_6$, con proprietà spettroscopiche corrispondenti a quelle della ftalide (VIII).



SCHEMA 2.

Per riduzione di (VIII) con polvere di zinco in ambiente alcalino si è ottenuto l'acido benzilbenzoico (IX), $C_{18}H_{20}O_6$, p.f. 230-233°C, che, per ciclizzazione e successiva ossidazione cromica, è stato trasformato nell'antrachinone (XI).

In accordo con la struttura (XI) il composto $C_{18}H_{16}O_6$, p.f. 209-212°C, presenta bande IR a 3505, 1670 e 1605 cm^{-1} e reagisce con diazometano per dare il corrispondente metilderivato (XII), p.f. 195-196°C.

Lo spettro RMN di XII (in $CDCl_3$), oltre ai segnali dei quattro gruppi metossilici a δ 3,85 (6 H, s, OCH_3) e a δ 3,97 (6 H, s, OCH_3), mostra la presenza di due doppietti centrati a δ 8,03 e a δ 7,17 (1 H ciascuno, J = 8,0) attribuibili, rispettivamente, ai protoni in C-5 e in C-6, un singoletto a δ 7,67, dovuto al protone in C-4, e un singoletto a δ 2,66 per il gruppo metilico in posizione α [4, 5].

Parte sperimentale.

I punti di fusione, determinati con un apparecchio di Kofler, si intendono non corretti.

Le analisi elementari sono state eseguite da E. Thommen (Dipartimento di Chimica Organica dell'Università di Basilea). Gli spettri IR e UV sono stati registrati con gli spettrofotometri Perkin-Elmer 157 e 402 rispettivamente.

Gli spettri RMN sono stati ottenuti con uno spettrometro Perkin-Elmer R-12 (A), usando come standard interno (δ 0) il tetrametilsilano.

Gli spettri di massa sono stati ottenuti con uno spettrometro AEI-MS 902, usando la tecnica dell'introduzione diretta del campione.

Le cromatografie su strato sottile, analitiche e preparative, sono state effettuate su gel di silice F 254 (Merck); le proporzioni per i solventi misti sono riportate in volume. Per la rivelazione dei composti, i cromatogrammi sono stati esaminati con una lampada a raggi ultravioletti a bassa lunghezza d'onda (2537 A) o spruzzati con una soluzione di solfato di cerio (IV) in H_2SO_4 2N.

2-Idrossi-3-metossi-6-bromotoluene (IV).

A) Per formilazione del 5-bromo-2-metossifenolo (I).

Ad una soluzione di 12,5 g di 5-bromo-2-metossifenolo (I), in 90 ml di NaOH al 30 %, riscaldata a 60°C, vengono aggiunti, sotto vigorosa agitazione meccanica, 10 ml di $CHCl_3$.

Dopo circa 3 ore, dalla miscela di reazione previamente acidificata con H_2SO_4 6N, si ottengono, per distillazione in corrente di va-

pore, 3,2 g di 6-bromo-o-vanillina (III) (resa 23 %) sotto forma di aghi di colore giallo chiaro, p.f. 100-101°C. [6]. M^+ 230; ν_{max} ($CHCl_3$) 3400 e 1642 cm^{-1}; δ ($CDCl_3$) 3,83 (3 H, s, OCH_3), 6,82 (1H, d, J = 8,5; H-4 o H-5), 7,02 (1H, d, J = 8,5; H-5 o H-4), 10,21 (1H, s, CHO), 12,17 (1H, s, OH).

All'analisi:

trov. %:	C 41,76;	H 3,38;	Br 34,08;
calc. %:	41,58;	3,05;	34,59;

per $C_8H_7BrO_3$.

Dal residuo della distillazione in corrente di vapore si isolano 6,1 g (resa 43 %) di 2-bromo-4-idrossi-5-metossibenzaldeide (II) p.f. 171-173°C, M^+ 230; ν_{max} ($CHCl_3$) 3505 e 1678 cm^{-1}; δ (DMSO-d_6) 3,80 (3H, s, OCH_3), 7,11 (1H, s, H-3) 7,34 (1H, s, H-6), 10,03 (1H, s, CHO).

Una miscela di 2,3 g di (III), 1,7 g di KOH e 1,7 ml di idrato di idrazina al 98 % in glicol etilenico (20 ml) viene riscaldata a 120°C per 2 h. Dopo allontanamento dell'acqua e dell'eccesso di idrazina per distillazione, la miscela di reazione viene riscaldata a ricadere per 4 ore. La soluzione, diluita con acqua, viene acidificata con HCl 6N ed estratta con etere etilico. La fase eterea, lavata dapprima con una soluzione satura di $NaHSO_3$ e poi con acqua, viene anidrificata con Na_2SO_4 e quindi evaporata a secchezza sotto vuoto. Cromatografando il residuo su colonna di gel di silice (eluente: benzene-tetracloruro di carbonio, 80/20) si ottengono 1,8 g (resa 22 %) di (IV), liquido oleoso incolore, M^+ 216; ν_{max} (CCl_4) 3504 cm^{-1}; δ (CCl_4) 2,66 (3H, s, CH_3), 3,82 (3H, s, OCH_3), 6,50 (1H, d, J=8, 4; H-5 o H-4), 6,95 (1H, d, J=8, 4; H-5 o H-4), 5,63 (1, s, OH, rimosso per scambio con D_2O).

B) Per bromurazione del 2-acetossi-3-metossitoluene (V).

Ad una soluzione di 3,94 g di 2-acetossi-3-metossitoluene (V) in CCl_4 (20 ml), raffreddata a − 12°C con miscela frigorifera di ghiaccio e cloruro di sodio, vengono aggiunti, lentamente (3 ore) e sotto vigorosa agitazione, 1,1 ml di bromo disciolti in CCl_4 (10 ml). Cessato lo sviluppo di HBr la miscela di reazione, lavata con soluzione satura di $NaHCO_3$ e con acqua, viene anidrificata con Na_2SO_4 ed evaporata a secchezza sotto vuoto. Per cristallizzazione del residuo da benzina 80-100°C, si ottengono 4,3 g di 2-acetossi-3-metossi-6-bromotoluene (VI) (resa 76 %), p.f. 74-76°C.

M^+ 258; ν_{max} (CCl_4) 1752 cm^{-1}; δ (CCl_4) 2,18 (3H, s, CH_3 o OCH_3), 2,20 (3H, s, CH_3 o OCH_3), 3,67 (3H, s, OCH_3), 6,53 (1H, d, J = 8, 5; H-4), 7,25 (1H, d, J = 8, 5; H-5). L'idrolisi alcalina del prodotto così ottenuto ha fornito, con resa del 90 %, il corrispondente derivato fonolico (IV).

6,7-Dimetossi-3-(2-bromo-3-metil-4-idrossi-5-metossifenil) ftalide (VIII).

Grammi 0,70 di acido opianico (VII) vengono intimamente mescolati, in un piccolo beaker, con 0,74 g di 2-idrossi-3-metossi-6-bromotoluene (IV). Alla miscela, raffreddata con bagno a ghiaccio, vengono aggiunti 4 ml di H_2SO_4 all'85 %, agitando vigorosamente con una bacchettina fino ad ottenere una massa di colore scuro a consistenza pastosa. La miscela di reazione viene versata in ghiaccio ed il precipitato, raccolto per filtrazione, viene cristallizzato da metanolo.

Si ottengono 0,88 g di (III) (resa 66 %), p.f. 185-188°C.

M^+ 409; ν_{max} ($CHCl_3$) 3370 e 1760 cm^{-1}; δ (CD_3COCD_3) 2,43 (3H, s, CH_3), 3,78 (3H, s, OCH_3), 3,96 (3H, s, OCH_3), 4,09 (3H, s, OCH_3), 6,61 (1H, s, H-3), 6,85 (1H, s, H-6), 7,13 (1H, d, J = 8, 6; H-5), 7,45 (1H, d, J = 8, 6; H-4); λ_{max} ($CHCl_3$) 312, 290, 244 nm (log ε 3,63; 3,56; 4,07).

All'analisi:

trov. %:	C	52,41;	H	4,61;	Br 19,05;
calc. %:		52,84;		4,19;	19,53;

per $C_{18}H_{17}BrO_6$.

Acido 5,6-dimetossi-(3-metil-4-idrossi-5-metossibenzil) benzoico (IX).

Una miscela di 0,2 g di VIII, 3 ml di NaOH al 10 % e 1,2 g di zinco in polvere, viene riscaldata a lento ricadere per circa 24 ore, con energica agitazione meccanica. Al termine della reazione, lo zinco in eccesso si elimina per filtrazione, e la soluzione, acidificata con HCl 6N, si riscalda a b.m. per 30', allo scopo di lattonizzare il prodotto che non ha reagito. Dopo raffreddamento, il precipitato formatosi viene disciolto in Na_2CO_3 2N. Per acidificazione della soluzione alcalina, previamente filtrata, si ottengono 0,12 g di (IX) sotto forma di precipitato bianco microcristallino, purificato ulteriormente per cristallizzazione da etanolo al 50 %, p.f. 230-233°C. M^+ 332; λ_{max} ($CHCl_3$) 286 e 244 nm (log ε 3,64 e 3,88); ν_{max} ($CHCl_3$) 3590, 1752 e 1720 cm^{-1}; δ (CF_3 COOH) 2,20 (3H, s, CH_3), 3,86 (3H, s, OCH_3), 3,90 (2H, s, CH_2), 3,95 (3H, s, OCH_3), 4,03 (3H, s, OCH_3), 6,66 (2H, s allargato, H-4 e H-6), 7,13 (2H, s, H-2' e H-5). All'analisi:

trov. %:	C	64,82;	H	6,34;
calc. %:		65,06;		6,07;

per $C_{18}H_{20}O_6$.

2-Idrossi-1-metil-3, 7, 8-trimetossiantrone (X).

Una sospensione di (IX) (0,5 g) in H_2SO_4 all'85 % (9,5 ml) viene lasciata a temperatura ambiente per 5 ore. La soluzione limpida che si forma, colorata in giallo-arancio, viene versata cautamente in ghiaccio ed il precipitato estratto con cloroformio. Dopo allontanamento del solvente, si ottengono 0,42 g di un solido amorfo di colore giallo chiaro (X) unitario in cromatografia su strato sottile di gel di silice (eluenti: $CHCl_3$-EtOH, 99/1; C_6H_6-Et_2O, 80/20; C_6H_6-EtOH, 96/4).

M^+ 314; ν_{max} (CCl_4) 3550, 3340 e 1670 cm^{-1}; δ ($CDCl_3$) 2,31 (3H, s, CH_3), 3,80 (3H, s, OCH_3) 3,89 (3H, s, OCH_3), 3,99 (3H, s, OCH_3), 4,15 (2H, s, H-10), 5,77 (1H, s, ArOH, rimosso per scambio con D_2O), 6,18 (1H, s, H-4), 6,42 (1H, d, J = 8, 5; H-5), 6,82 (1H, d, J = 8; 5; H-6).

2-Idrossi-1-metil-3, 7, 8-trimetossi-9, 10-antrachinone (XI).

Ad una soluzione di (X) (0,49 g) in acido acetico glaciale (4 ml) vengono aggiunti 0,2 g di CrO_3 sciolti in 0,8 ml di acido acetico al 50 %. Dopo un breve riscaldamento a b.m. (circa 15'), la miscela di reazione viene evaporata a secchezza sotto vuoto ed il residuo estratto ripetutamente con toluene bollente. Per concentrazione degli estratti si ottengono 0,33 g di (XI), p.f. 209-212°C.

M^+ 328; λ_{max} ($CHCl_3$) 352, 286 e 246 (infl.) nm (log ε 3,87, 4,61 e 3,89); ν_{max} ($CHCl_3$) 3505, 1670 e 1605 cm^{-1}; δ (DMSO-d_6) 2,49 (3H, s, Ar-CH_3); 3,83 (3H, s, OCH_3), 3,94 (3H, s, OCH_3), 3,99 (3H, s, OCH_3), 7,52 (1H, s, H-4); 7,33 (1H, d, J = 8, 5; H-6); 7,86 (1H, d, J = 8, 5; H-5); 9,62 (1H, s, OH, rimosso per scambio con D_2O).

All'analisi:

trov. %:	C 65,58;	H 5,03;
calc. %:	65,85;	4,91;

per $C_{18}H_{16}O_6$.

1-Metil-2, 3, 7, 8-tetrametossi-9, 10-antrachinone (XII).

Milligrammi 50 di (XI) disciolti in 10 ml di $CHCl_3$, vengono trattati con una soluzione eterea di diazometano, controllando l'andamento della reazione mediante cromatografia su strato sottile di gel di silice (eluente $CHCl_3$). Dopo 30' i solventi vengono allontanati per

distillazione sotto vuoto, ed il residuo, cristallizzato da etanolo, fornisce 40 mg di (XII) sotto forma di aghi gialli, p.f. 195-196°C.

M^+ 342; λ_{max} (EtOH) 352, 280 e 218 nm; ν_{max} ($CHCl_3$) 1680 cm^{-1}.

BIBLIOGRAFIA

[1] PROTA G., D'AGOSTINO M. e MISURACA G., Experientia, **27**, 15 (1971).
[2] PROTA G., D'AGOSTINO M. e MISURACA G., J. Chem. Soc. (C), 1614 (1972).
[3] JACOBSON R. A. e ADAMS R., J. Am. Chem. Soc., **47**, 2011 (1925).
[4] BHIDE N. S., RAMA RAO A. V. e VENKATARAMAN K., Tetrahedron Letters, 33 (1965).
[5] THOMSON R. H., *Naturally Occurring Quinones*, 2ª ed., Academic Press, Londra, pp. 73-74 (1971).
[6] BRINK M., Acta Univ. Lund. Sect II, N. 36, p. 12 (C.A. 69: 76823) (1966).

Irregolarità della meteorite ferrosa Coahuila e struttura delle lamelle di geminazione *

Nota di FRANCESCO CENNAMO e ALBERTO COLASANTI
presentata dal socio corrispondente FRANCESCO CENNAMO

(Adunanza del 21 giugno 1975)

RIASSUNTO. — Dalle variazioni del potere riflettente osservate su ciascuna delle micrografie a raggi X, vengono valutate le variazioni angolari che, in prossimità della superficie esaminata, diverse zone del reticolo cristallino presentano rispetto alla matrice del monocristallo. Le irregolarità riscontrate vengono classificate in base alla probabile causa che le ha originate.

Viene inoltre messa in evidenza la struttura interna di alcune lamelle di geminazione e confermata la orientazione di tale struttura rispetto alla matrice del frammento.

SUMMARY. — Variations in the orientation which appear near the surface under observation in several parts of the crystal lattice can be evalueted from the variations in reflecting power over the X-ray micrographs. The observed irregularities are classified on the base of the originating cause.

This study also shows the internal structure of some deformation twins and confirms the orientation relationship between the twin and the parent crystal.

In una precedente nota [1] sono stati riportati i risultati di uno studio condotto sulle deformazioni plastiche presenti in un frammento della meteorite Coahuila.

La superficie [2] che delimita il monocristallo è stata esaminata sia al microscopio ottico che con micrografie a diffrazione di raggi X e dal confronto dei risultati ottenuti con i due metodi è stato possibile catalogare le linee osservate in *linee di slittamento, bande di geminazione* e *dislocazioni di tipo Frank.*

* Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica dell'Accademia Aeronautica - Pozzuoli (Napoli).

[1] F. CENNAMO e A. COLASANTI: Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1974, serie 4, vol. XLI.

[2] F. CENNAMO e A. COLASANTI: Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1969, serie 4, vol. XXXVI.

Ci proponiamo, nella presente nota, di descrivere:

a) Le variazioni angolari che, in prossimità della superficie esaminata, diverse zone del reticolo cristallino presentano rispetto alla matrice del monocristallo.

b) La struttura delle bande di geminazione.

a) VARIAZIONI ANGOLARI DEL RETICOLO CRISTALLINO E LORO PROBABILI CAUSE.

Le variazioni angolari eventualmente esistenti tra le zone esaminate e la matrice del monocristallo possono essere, come si è ricordato nella precedente nota, valutate attraverso le variazioni del potere riflettente da punto a punto di ciascuna micrografia a raggi X a meno, però, di un angolo ω il cui inverso definisce il potere risolutivo angolare.

Nel montaggio da noi adoperato l'intersezione j del piano (hkl) riflettente prescelto con la superficie del cristallo viene orientata normalmente al piano d'incidenza; l'intersezione i di questo con la superficie del cristallo è quindi normale ad j.

Indicando con ω_j il valore di ω intorno ad i e con ω_i il valore di ω intorno ad j, il primo risulta uguale all'angolo ε sotto il quale da ciascun punto del cristallo viene vista la dimensione trasversale del filamento che nel nostro caso è:

$$\omega_j = \varepsilon = 0{,}01^\circ \ ;$$

il secondo è invece dato da:

$$\omega_i = \Delta\theta + \psi$$

con $\Delta\theta$ uguale alla dispersione angolare generata dalla differenza tra le lunghezze d'onda $\lambda_{k\alpha_1}$ e $\lambda_{k\alpha_2}$ e ψ uguale all'angolo sotto il quale da ciascun punto della superficie del cristallo viene vista la dimensione longitudinale del filamento.

Poiché nel montaggio adoperato $\psi = 0{,}8^\circ$, segue che ω_i è circa 100 volte ω_j e quindi il potere risolutivo angolare intorno alla direzione j è all'incirca un centesimo del potere risolutivo angolare intorno alla direzione i.

Per aumentare il primo potere risolutivo e quindi conoscere con migliore approssimazione le eventuali variazioni angolari delle

zone in esame rispetto alla matrice intorno alla direzione j, abbiamo proceduto nel seguente modo:

prescelto il piano (hkl) e calcolati l'angolo α che questo forma con la superficie del cristallo e l'angolo di Bragg θ, si posiziona il cristallo in modo da ottenere l'immagine della superficie secondo il dispositivo descritto nella precedente nota. Si ruoti ora il cristallo intorno all'asse j di un angolo η_i sufficiente a che per tutti i punti della superficie si abbia l'estinzione completa; di poi con successive rotazioni in verso opposto di angoli uguali: $\Delta\alpha'$, non minori del corrispondente $\Delta\theta$, si esegue una serie di n fotografie successive sino ad ottenere che, superata la posizione innanzi determinata, si ottenga nuovamente la estinzione completa per una rotazione di un angolo η_i' dato da:

$$\eta' = n \cdot \Delta\alpha' \qquad \text{e con} \qquad \eta' > \eta\,.$$

Individuata in ciascuna serie la fotografia nella quale il potere riflettente della matrice è massimo e che è quella, a meno di errori sperimentali, relativa alla posizione calcolata della superficie del cristallo rispetto al fascio incidente, in essa risultano evidenziate con potere riflettente minimo irregolarità eventualmente presenti. Nella serie si ricerca poi la fotografia o le fotografie che presentano invece un potere riflettente massimo nelle zone nelle quali erano state localizzate le irregolarità.

Nelle zone in esame il reticolo cristallino è quindi ruotato rispetto al reticolo della matrice intorno alla direzione j dell'angolo:

$$\Delta\alpha = m\,\Delta\alpha'$$

essendo m il numero delle fotografie effettuate nel passare dall'una all'altra condizione. In questo modo, essendo la misura differenziale, si può scegliere come potere risolutivo l'inverso dell'angolo ω_i' dato da:

$$\omega_i' = \Delta\alpha' \geq \Delta\theta$$

e quindi indipendente dall'angolo ψ.

Il procedimento descritto è stato seguito relativamente alle immagini ottenute con i piani riflettenti $(01\bar{1})$, $(11\bar{2})$, $(2\bar{1}1)$ che sono gli stessi di quelli con i quali sono state ottenute le immagini della superficie già riportate (v. nota 1).

In una prima indagine la serie completa delle fotografie relative a ciascun piano riflettente veniva eseguita su pellicole radiografiche Ferrania IC2, con radiazione incidente Co Kα filtrata con lamina di

Fe (spessore: s = 0,02 mm) e con filtro di Al (spessore: s′ = 0,15 mm) sovrapposto alla emulsione per ridurre l'effetto dovuto alla fluorescenza del campione; tempo di posa 30′.

Nella Tabella I sono indicati per ciascun piano riflettente i valori di η', $\Delta\theta$, $\Delta\alpha'$ ed il numero n di fotografie di ciascuna serie.

TABELLA I

$(h\,k\,l)$	η'	$\Delta\theta$	$\Delta\alpha'$	n
$(01\bar{1})$	2°	0,06°	0,1°	20
$(11\bar{2})$	2°	0,15°	0,2°	10
$(\bar{2}11)$	2°	0,15°	0,2°	10

Individuate le posizioni del cristallo relative alle due fotografie, queste venivano ripetute su pellicola cinematografica Ferrania positiva a grana fine 14 din: per il piano $(01\bar{1})$ con 21 ore di posa e per il piano $(11\bar{2})$ con 10 ore di posa. Esse sono riportate rispettivamente nelle Figg. 1 e 2 delle quali le a) sono le stesse di quelle riprodotte in altra scala nella nota precedente.

Per il piano $(\bar{2}11)$ l'intera serie è stata invece eseguita in tempi successivi, nei quali non è stato possibile reperire sul mercato le pellicole Ferrania precedentemente usate e pertanto essa è stata eseguita con pellicola radiografica Kodak tipo AA con posa 30′.

Le due fotografie di questa serie sono quelle riportate nella Fig. 3 delle quali la a) corrisponde, per posizione del cristallo, alla micrografia riportata nella precedente nota alla Fig. 12 ed eseguita, come si è detto, su film Ferrania con 10 ore di posa.

In ciascuna delle tre figure è disegnato, in scala ridotta, il rettangolo nel quale è iscritta la superficie del cristallo, e su questo sono segnate le posizioni della r_{12} (scelta come riferimento) e delle intersezioni i e j anzidette.

Il verso riportato sulla intersezione i dà il verso con il quale il fascio di raggi X incide sulla superficie.

Fig. 1 (7,5 ×). La micrografia a) riproduce l'immagine della superficie ottenuta per riflessione sul piano $(01\bar{1})$ con: $\theta = 26°11'$ ed $\alpha = 24°19'$; il fascio di raggi X che incide quindi sulla superficie con l'angolo: $\theta - \alpha = 1°52'$, è quasi radente a questa. Poiché per il piano scelto è: $\Delta\theta = 0{,}06°$, le fotografie della serie sono state ottenute per rotazione intorno a j di angoli multipli interi di: $\Delta\alpha' = 0{,}1°$.

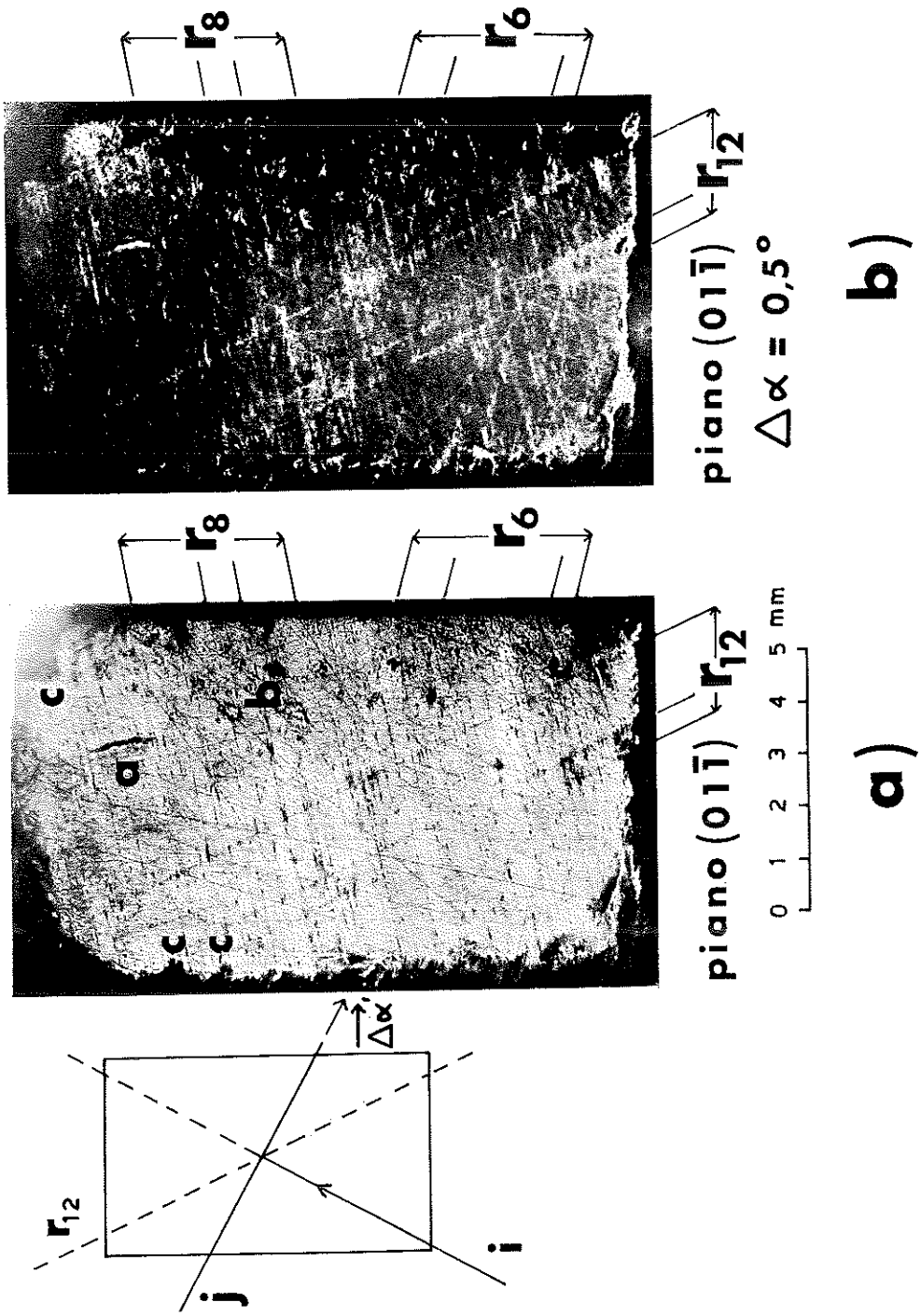

r8
r6
r12
piano (01$\bar{1}$)
$\Delta\alpha$ = 0,5°
b)
r8
r6
r12
piano (01$\bar{1}$)
c
a
b
c
c
0 1 2 3 4 5 mm
a)
$\Delta\alpha$
r12
j
i

FIG. 1.

Il verso del vettore spostamento angolare $\overrightarrow{\Delta\alpha'}$ è riportato sull'asse j; l'asse j forma con la retta r_{12} l'angolo $\widehat{j, r_{12}} = 35°30'$.

La micrografia b) è, nell'ordine, la quinta della serie successiva alla a) ed ottenuta per angoli: $\theta - \alpha$ crescenti, si ha quindi:

$$m \cdot \Delta\alpha' = 0{,}5° .$$

Fig. 2 (7,5 ×). La micrografia a) riproduce l'immagine della superficie ottenuta per riflessione sul piano $(11\bar{2})$ con: $\theta = 49°50'$ ed $\alpha = 47°05'$; il fascio di raggi X, che incide sulla superficie del cristallo con l'angolo: $\theta - \alpha = 2°45'$, è anche per questa posizione quasi radente a questa. Poiché per il piano scelto è: $\Delta\theta = 0{,}15°$, le fotografie della serie sono state ottenute per successive rotazioni intorno a j di angoli multipli interi di $\Delta\alpha' = 0{,}2°$ ed il verso del vettore spostamento angolare $\overrightarrow{\Delta\alpha'}$ è riportato sull'asse j; l'asse j e la retta r_{12} sono in questo caso coincidenti.

La micrografia b) è, nell'ordine, la terza della serie successiva alla a) ed ottenuta per angoli: $\theta - \alpha$ crescenti, si ha quindi:

$$m \cdot \Delta\alpha' = 0{,}6° .$$

Fig. 3 (7,5 ×). La micrografia a) riproduce l'immagine della superficie ottenuta per riflessione sul piano $(2\bar{1}1)$ con: $\theta = 49°50'$ ed $\alpha = 39°19'$; il fascio di raggi X incide ora sulla superficie del cristallo con l'angolo: $\theta - \alpha = 16°31'$; esso quindi non è più radente alla superficie, la sua sezione con la superficie stessa non è sufficiente ad illuminarla tutta, per cui l'immagine della porzione in basso a sinistra non appare. In questa posizione il piano d'incidenza coincide col piano d'incidenza della Fig. 2 ma ora il fascio di raggi X proviene dalla destra del campione di chi guarda la figura e cioè dalla parte opposta dalla quale proveniva nel caso della Fig. 2. Per questa serie, poiché per il piano riflettente scelto è ancora: $\Delta\theta = 0{,}15°$, le fotografie della serie sono state eseguite per successive rotazioni di angoli $\Delta\alpha' = 0{,}2°$ ed il verso del vettore spostamento angolare $\overrightarrow{\Delta\alpha'}$, riportato sull'asse j, è concorde con quello della figura precedente.

La micrografia b) è ora, nell'ordine, la terza della serie che precede la a) ed ottenuta quindi per angoli: $\theta - \alpha$ decrescenti; si ha ancora quindi:

$$m \cdot \Delta\alpha' = 0{,}6° .$$

———— • ————

Le variazioni del potere riflettente da punto a punto di ciascuna micrografia a raggi X sono, come si è detto, dovute a variazioni

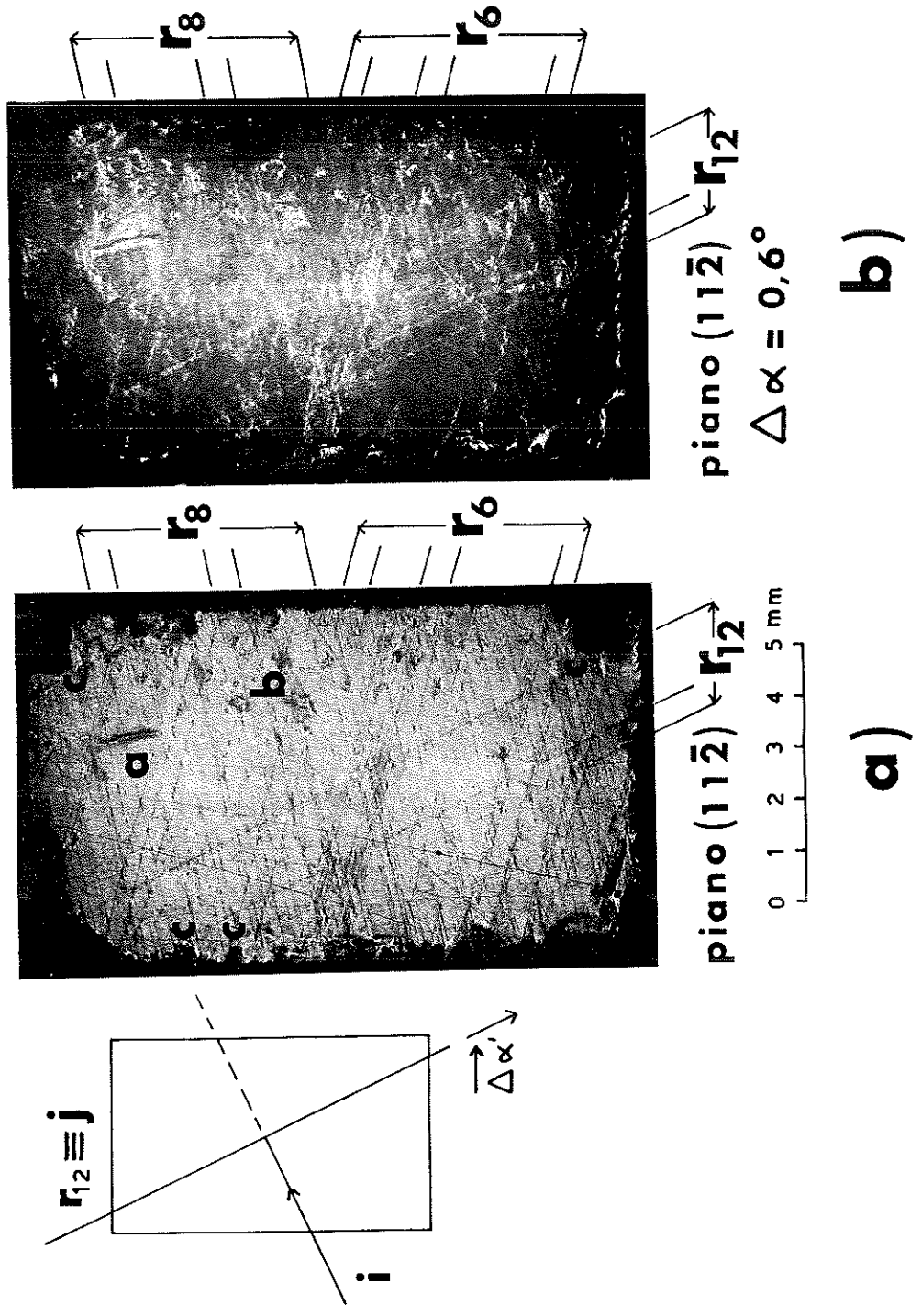


FIG. 2.

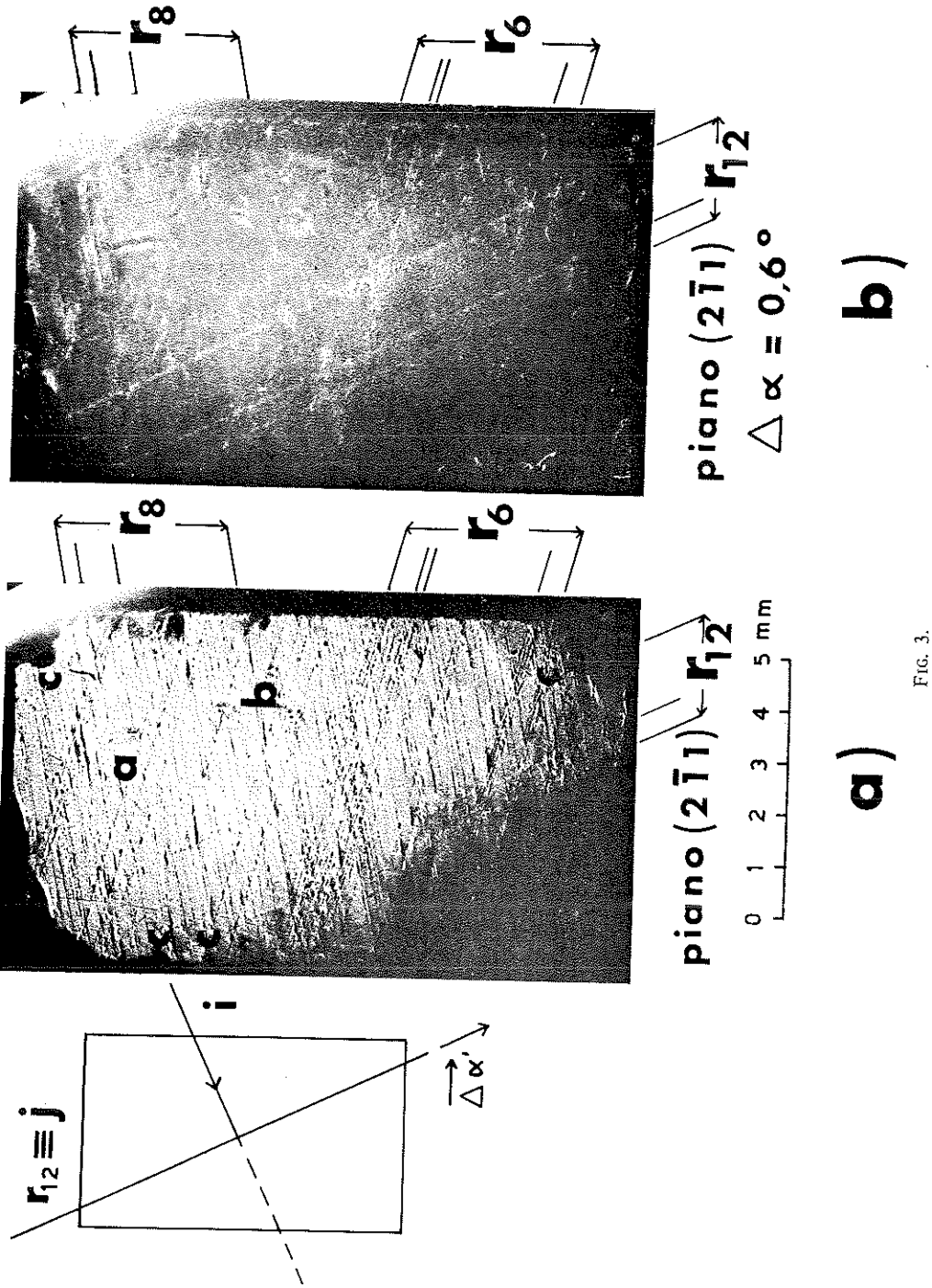


FIG. 3.

angolari, rispetto alla matrice del monocristallo, di porzioni limitate del reticolo cristallino in prossimità della superficie.

Queste irregolarità, a seconda del comportamento del potere riflettente che ciascuna di esse presenta al variare dell'angolo d'incidenza, sono state da noi classificate in tre gruppi che comprendono:

1) le zone della superficie in cui questa è intersecata dalle lamelle di geminazione;

2) le zone interne della superficie del tipo di quelle indicate con le lettere **a** e **b**;

3) le zone **c** della superficie appartenenti al confine di questa.

1) Le bande di Neumann, già osservate nelle macrografie ottiche, appaiono nelle micrografie a raggi X meglio evidenziate e con caratteri che da famiglia a famiglia variano al variare della scelta del piano riflettente (v. nota 1).

Per rotazione intorno a j al variare dell'angolo di incidenza secondo i criteri innanzi esposti, varia il potere riflettente della superficie: nella posizione che soddisfa alla legge di Bragg esso risulta massimo nelle zone in cui questa non è interessata dalle bande di Neumann e minimo nelle altre, per cui le bande stesse appaiono scure in campo chiaro [foto a) delle figure citate]. Per successive rotazioni intorno a j di angoli $\Delta\alpha'$ il potere riflettente della superficie diminuisce e quello dei punti interessati dalle bande di Neumann permane sempre minimo finché diventa massimo per una nuova posizione del cristallo rispetto al fascio incidente e le zone della superficie interessate dalle bande di Neumann appaiono ora chiare in fondo scuro [foto b) delle figure citate].

L'angolo: $\Delta\alpha = m \cdot \Delta\alpha'$ per il quale si passa dalla posizione di cui alle foto a) alla posizione di cui alle foto b) è per la Fig. 1: $\Delta\alpha = 0{,}5°$ e per le Figg. 2 e 3: $\Delta\alpha = 0{,}6°$; l'effetto osservato è più appariscente nella Fig. 1.

È da escludere il fatto che le zone interessate all'aumentato potere riflettente siano quelle interne alle lamelle di geminazione; è invece da pensare che siano dovute a rotazioni della matrice nelle zone confinanti con le lamelle stesse, causate da tensioni interne che si generano nei punti in cui le lamine di geminazione incontrano ostacoli che possono essere costituiti non solo da tabloidi di schreibersite o da irregolarità preesistenti nella matrice, ma anche e principalmente dall'incontro con altre lamelle di geminazione. Effetti di questo tipo già sono stati osservati con micrografie elettroniche da P. G. ORSINI [3].

[3] P. GIORDANO ORSINI: Atti Acc. Lincei - Cl. Sc. Fisiche - Memoria 63, 1967, vol. VIII - sez. II.

La nostra ipotesi è confermata sia da quanto diremo al comma b) in merito alla struttura delle bande di geminazione sia per il fatto che la variazione del potere riflettente interessa solo le zone in cui le tre famiglie di bande di Neumann s'incontrano.

2) I difetti relativi alle zone **a** e **b** sono posti in evidenza solo nelle micrografie a raggi X e, come si è detto, non si osservano al microscopio ottico qualunque sia il valore dell'ingrandimento e le condizioni di illuminamento.

Al variare dell'angolo di incidenza $\theta - \alpha$ in ciascuna micrografia della serie si osserva, nella zona interessata al difetto, un riflesso la cui posizione rispetto alla superficie varia con continuità; inoltre per ulteriori lucidature della superficie e successivi attacchi chimici, l'effetto osservato permane.

Fig. 4 (7,5×). Vengono riportate le immagini di una porzione della superficie del cristallo nella quale compare l'irregolarità **a** e quelle **b** e gli aspetti che ognuna di queste assume al crescere dell'angolo di incidenza. Le fotografie appartengono alla serie ottenuta col piano riflettente $(01\bar{1})$ e la n° 6 e la n° 11 corrispondono rispettivamente alle a) e b) della Fig. 1, relative queste ultime all'intera superficie del cristallo.

La completa estinzione del particolare **a** si ottiene nel passare dalla posizione 1 alla posizione 19 e cioè per una rotazione di $\theta - \alpha = 18 \cdot \Delta\alpha' = 1{,}8°$.

Nella posizione 6 la porzione centrale della irregolarità **a** in esame (che nella posizione di cui alla foto 2 presenta un massimo potere riflettente) si estingue con un massimo del potere riflettente della matrice, rispetto alla quale risulta quindi ruotata di:

$$\Delta\alpha = 4 \cdot \Delta\alpha' = 0{,}4° .$$

Successivamente nella 10: ($\Delta\alpha = 4 \cdot \Delta\alpha' = 0{,}4°$), il bordo sinistro della zona presenta il massimo del potere riflettente. Per successive rotazioni la zona riflettente si sposta ulteriormente verso la sinistra ed in basso sino ad estinguersi del tutto nella posizione 19.

Poiché il campo di variabilità dell'angolo di incidenza entro il quale si ottiene il riflesso della zona perturbata è notevole, è da escludere la possibilità che tutto il reticolo cristallino interessato a tale zona sia ugualmente ruotato rispetto a quello della matrice ed è invece da supporre che in tale zona il reticolo stesso presenti una disorientazione rispetto alla matrice variabile con continuità da punto a punto.

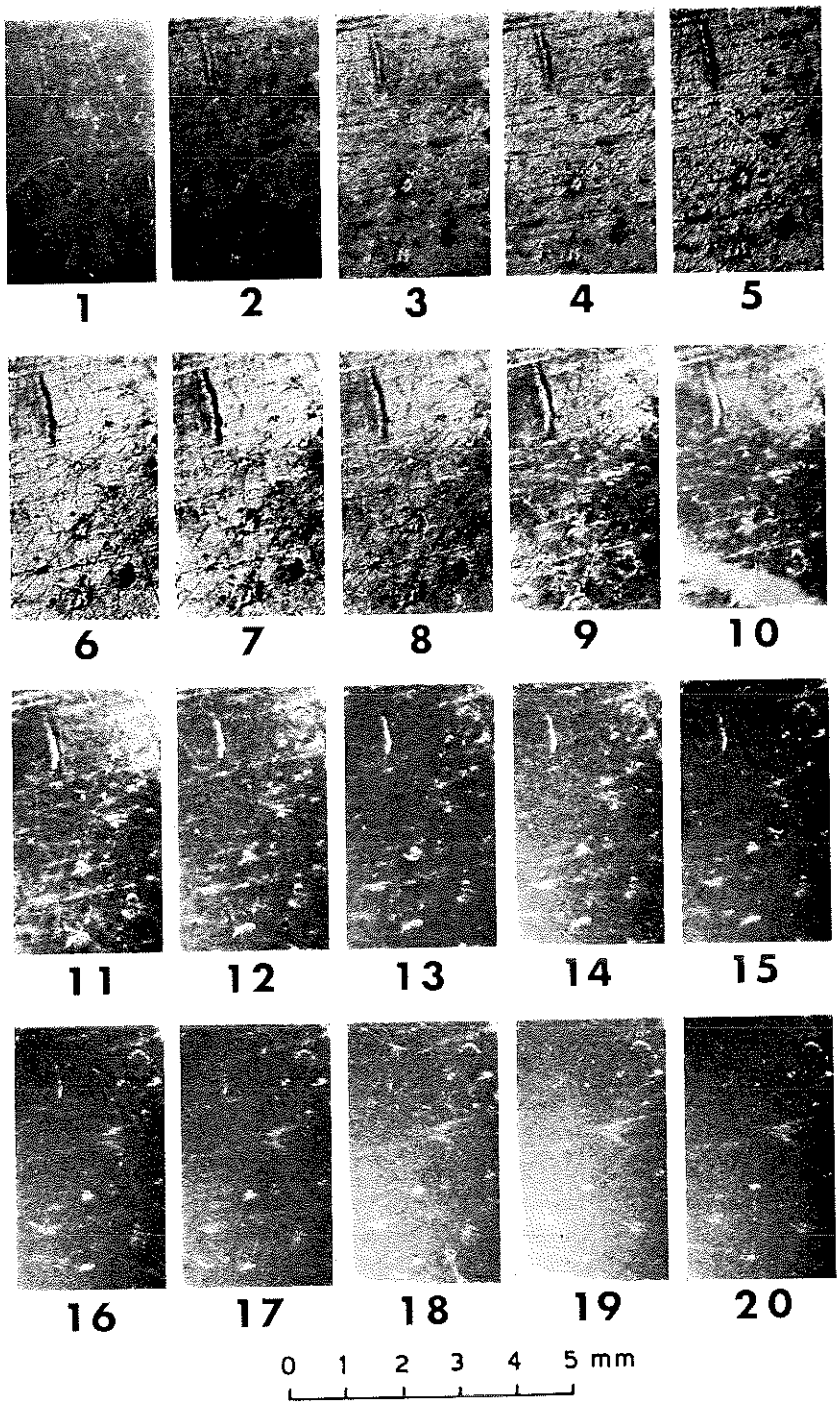


FIG. 4.

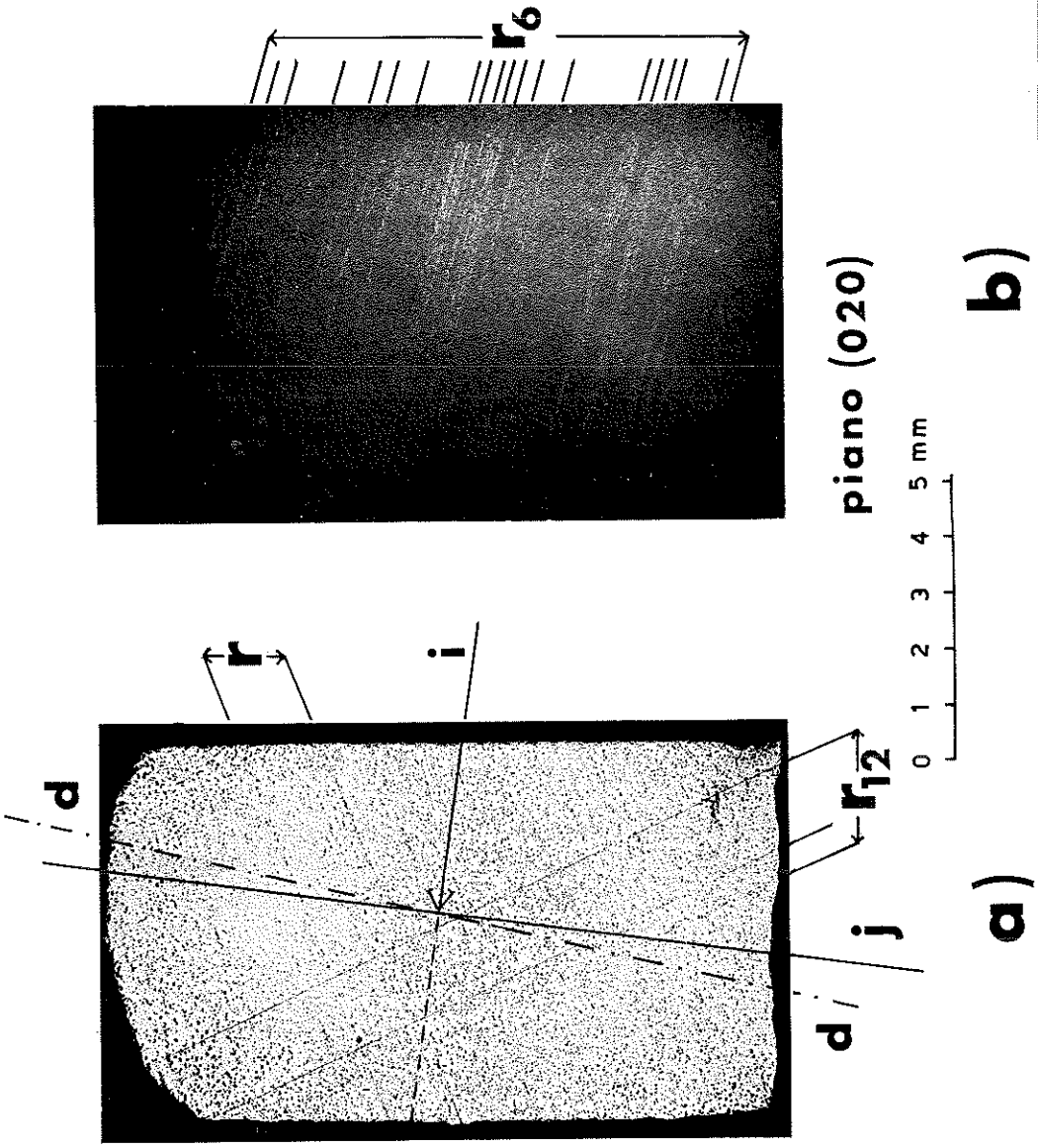
Il difetto di tipo **a** si differenzia da quelli di tipo **b**, più numerosi, in quanto il primo denunzia una disorientazione continua del reticolo cristallino nella direzione normale al suo asse longitudinale, mentre gli altri presentano una disorientazione del reticolo che varia con continuità da un centro di simmetria verso la periferia. È probabile che i due tipi di irregolarità citati abbiano, nell'interno della matrice, la forma di ellissoidi molto allungati ed orientati con l'asse maggiore secondo alcune direzioni privilegiate ed altamente anisotrope, delle quali l'irregolarità **a** risulterebbe una sezione lungo l'asse maggiore e quelle **b** delle sezioni oblique a quest'ultimo.

Il particolare aspetto reticolare che presentano i difetti **a** e **b** lascia pensare che essi siano stati generati da tensioni interne prodotte per effetti termici all'atto della formazione della meteorite, al contrario di quanto è probabilmente accaduto per le lamelle di geminazione denunziate dalle bande di Neumann, causate da sollecitazioni meccaniche alle quali, in tempi diversi, è stata sottoposta, nella sua vita, la meteorite.

3) I confini della superficie che al microscopio ottico appaiono ben definiti, presentano sulle micrografie a raggi X contorni molto frastagliati con zone del tipo indicato con la lettera **c** per le quali non si ha mai riflessione almeno nell'intervallo di variazione di $\Delta\alpha$ da noi esplorato e quindi presentano, rispetto alla matrice, variazioni angolari: $\Delta\alpha > 2°$. A nostro avviso ciò non è dovuto solo alle sollecitazioni meccaniche che ha subito il campione nella sua preparazione, ma soprattutto alle sollecitazioni meccaniche ed agli effetti termici di cui al paragrafo precedente, ivi compresi quelli conseguenti alla traiettoria percorsa in atmosfera e all'impatto con la superficie terrestre. Ciò in considerazione del fatto che il campione da noi esaminato è stato prelevato dalla meteorite originale segandone una porzione di limitato spessore (circa 5 mm) e lavorando successivamente la faccia risultante, per cui sia il contorno di questa che la parte posteriore sono appartenenti alla superficie esterna della meteorite stessa. Per successive lavorazioni meccaniche e lucidature della faccia, inoltre, non si riscontrano, nelle micrografie a raggi X, apprezzabili variazioni nelle caratteristche del contorno.

b) Struttura delle bande di geminazione.

Fig. 5 (7,5 ×). In a), che rappresenta la macrografia ottica della superficie del cristallo, sono segnate le due direzioni *i* e *j* che caratterizzano posizione e direzione del fascio di raggi X rispetto alla


r6
piano (020)
b)
0 1 2 3 4 5 mm
r
i
d
r12
j
d
a)

superficie della quale è stata ottenuta la micrografia riportata in b) (radiazione Co Kα, pellicola Kodak Tri-X-Pan con 10 ore di posa). In essa risalta solo l'immagine delle intersezioni con la superficie del cristallo dei piani di geminazione (211).

Per stabilire gli indici del piano riflettente si sono eseguite diverse micrografie su lastre radiografiche (in modo da ridurre il tempo di posa a qualche minuto) traslando la lastra e portandola a distanze variabili dalla superficie del cristallo, al fine di individuare la direzione del raggio riflesso e quindi l'angolo che questo forma con l'asse del collimatore e cioè col raggio incidente. Dalla bisettrice di questo angolo si è risalito alla direzione della normale al piano riflettente, all'angolo θ di Bragg ed all'angolo α che il piano riflettente forma con la superficie del cristallo. I valori ottenuti sono:

$$\theta = 38^\circ \,, \qquad \alpha = 31^\circ \,;$$

inoltre il piano d'incidenza risulta normale alla superficie del cristallo.

L'angolo che la retta j forma con l'intersezione d del piano $(1\bar{1}0)$ con la superficie del cristallo, scelta come riferimento ed avente indici [551], è risultato:

$$\beta = 5^\circ \,.$$

La famiglia di piani che per la radiazione usata riflette per $\theta \cong 38^\circ$ è: {200}. Calcolando però per i tre possibili piani della famiglia i valori di α e β, si hanno i valori riportati nella Tabella II, dei quali nessuno è in accordo con quelli sperimentali.

TABELLA II

(h k l)	θ	α	β
(200)	38°37′	67°43′	49°10′
(020)	38°37′	57°57′	55°42′
(002)	38°37′	40°42′	12°24′

Poiché le righe r_6 del piano (211) sono intersezioni con la superficie del cristallo di bande di geminazione e poiché le righe ottenute sulla micrografia b) della Fig. 5 sono proprio e solo quest'ultime, è legittimo supporre che la materia compresa nelle bande sia orientata rispetto alla matrice in modo da risultarne, rispetto alla giunzione, immagine speculare.

Si è allora proceduto al calcolo degli indici del piano che, intersecando la superficie del cristallo secondo *j*, forma con questa l'angolo: $\alpha = 31°$ sperimentale, fermo restando il valore dell'angolo $\beta = 5°$ che *j* forma con *d*. Il piano così calcolato ha indici $(2\bar{2}1)$ e la sua immagine speculare, rispetto alla giunzione di geminazione con indici (211), dà luogo al piano (010) di cui un multiplo è (020) che corrisponde al piano riflettente trovato.

Fig. 6 (7,5 ×). Si è poi ricercata la orientazione da dare al cristallo in modo da studiare invece la struttura delle bande di geminazione (121): nella posizione del fascio incidente rispetto alla superficie del cristallo indicato dalla foto a) in cui *i* e *j* hanno sempre il significato anzidetto e con piano riflettente $(01\bar{1})$, si è ottenuto, con 15 ore di posa ed ancora con pellicola Kodak Tri-X-Pan, la micrografia a raggi X riprodotta nella foto b) nella quale risultano con maggiore evidenza rispetto alla foto b) della figura precedente, solo le righe diffratte dalla materia contenuta nelle bande di geminazione in esame.

Il piano usato nella riflessione $(01\bar{1})$ è l'immagine speculare, rispetto alla giunzione di geminazione (121), del piano $(\bar{1}14)$; di conseguenza la posizione del cristallo rispetto al fascio incidente ed i valori da assegnare a θ, α e β sono stati calcolati preventivamente considerando la materia, compresa nelle lamine geminate, immagine speculare della matrice.

I valori calcolati sono:

$$\theta = 26°11' \,, \qquad \alpha = 21°41' \,, \qquad \beta = 20°55' \,.$$

Posta la superficie del cristallo in modo che risulti $\beta \cong 21°$ e ruotata rispetto a *j* in modo che l'asse del collimatore formi con la superficie stessa l'angolo $\theta - \alpha = 4°30'$, ruotando il cristallo sino ad individuare la posizione per cui la riflessione risulti della massima intensità, si è ottenuto il valore sperimentale: $\theta - \alpha = 6°30'$.

Operando con la lastra a diverse distanze dal campione, si è determinato, rispetto alla superficie, la direzione del raggio riflesso e quindi l'angolo che questo forma con l'asse del collimatore, risalendo così all'angolo θ e quindi ad α. I valori sperimentali ottenuti sono:

$$\theta = 26°15' \,, \qquad \alpha = 19°45' \,, \qquad \beta = 21° \,.$$

L'errore commesso nel calcolo di α è in gran parte dovuto alla approssimazione con la quale è stato possibile determinare gli indici della superficie del cristallo.

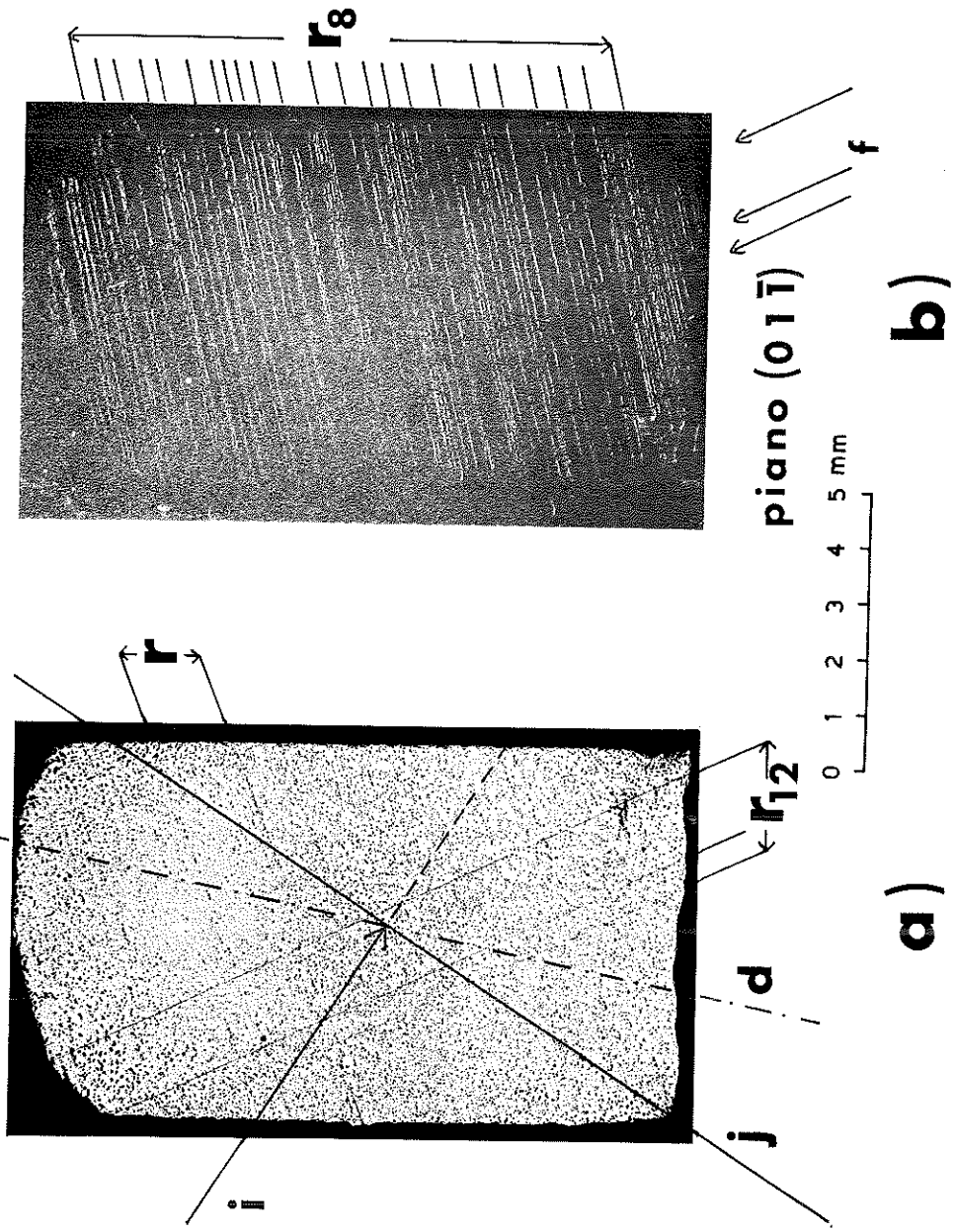


FIG. 6.

Se si osserva nella direzione indicata dalle frecce la foto b) della Fig. 6, si nota che le righe r_8 della famiglia (121) appaiono discontinue in corrispondenza della loro intersezione con quelle della famiglia r_{12}: ciò indubbiamente è dovuto al fatto che il reticolo nell'interno di queste bande è diversamente orientato rispetto alla matrice; la larghezza di tale discontinuità è inoltre maggiore di quella con la quale le stesse righe r_{12} vengono osservate con macrografie ottiche [foto a) delle Figg. 5 e 6] e con micrografie a raggi X [foto a) delle Figg. 1, 2 e 3]. Ciò a conferma di quanto si è sopra detto in merito alla interpretazione delle foto b) relative alle Figg. 1, 2 e 3.

Analogamente: le righe ottenute nelle foto b) delle Figg. 5 e 6, dovute a riflessione delle lamelle di geminazione, appaiono tratteggiate in corrispondenza delle loro reciproche interazioni.

Mineralizzazioni manganesifere nel messiniano del versante tirrenico della catena costiera calabra (Serra d'Aiello)

Nota di MARIA BONI * e GIUSEPPE ROLANDI **
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 21 giugno 1975)

RIASSUNTO. — Nel Miocene superiore (Messiniano) del versante tirrenico della Catena Costiera calabra (zona di Amantea) è stato individuato un giacimento manganesifero di notevole entità, a tenore medio in Mn del 30 %.

La mineralizzazione si presenta diffusa in livelli sedimentari costituiti da alternanze arenaceo-argilloso-diatomitiche, con zone a locale maggiore arricchimento; i minerali presenti sono essenzialmente idrossidi ed ossidi manganesiferi, con prevalenza delle fasi birnessite e todorokite.

L'origine del manganese si ipotizza connessa a fenomeni vulcanici (cineriti) di carattere acido di cui si hanno frequenti evidenze nelle serie messiniane; si attribuisce il suo arricchimento nei sedimenti alle condizioni riducenti delle acque di fondo dei bacini euxinici e la sua precipitazione a ciclici cambi di ambiente connessi alla proliferazione della flora a Diatomee.

Una ulteriore mobilizzazione con susseguente precipitazione dei minerali manganesiferi nelle loro attuali forme mineralogiche si considera infine probabilmente avvenuta in sede tardo-diagenetica o epigenetica in rapporto all'evoluzione dei bacini da euxinici a evaporitici, o a causa dei fenomeni connessi alla fase tettonica intramessiniana.

ABSTRACT. — In the upper Miocene (Messinian) of the tirrenian side of the calabrian Catena Costiera (Amantea zone), we found a manganese deposit of considerable importance with average Mn contents of 30 %.

The mineralization appear to be present in some sedimentary levels wich consist of a succession of sandstones, clays and diatomites, with areas at higher concentration: the minerals we found are essentially Mn-hydroxides, the birnessite and todorokite species prevailing.

We hypothesize that the source of manganese is connected with some sialic volcanism (discovery of messinian cinerites in Calabria): the reducing conditions of the euxinic bottoms could have concentrated Mn, which afterwards probably precipitated owing to cyclical environmental alterations related to the proliferation of Diatoms.

* Istituto di Geologia e Geofisica dell'Università di Napoli.
** Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli.

A further mobilization and precipitation of Mn-minerals in their present mineralogical forms probably took place during a late diagenesis or epigenesis, with reference to the evolution of the Messinian basins from euxinic to evaporitic, or because of the phenomena related to the intramessinian tectonic phase.

1. - Premessa e inquadramento geologico dell'area in esame.

Nella Calabria settentrionale, a SW di Cosenza, e più precisamente nella zona compresa tra il Fiume Torbido ed il paese di Serra d'Aiello, F° 236 III SE Nocera Tirinese, sono stati rinvenuti, nell'ambito del Miocene superiore (Messiniano), dei livelli manganesiferi di origine sedimentaria, in cui la mineralizzazione risulta connessa a cicliche alternanze di arenarie, argille e diatomiti.

Recenti studi sistematici su alcune zone della Catena costiera: area Diamante-Bonifati (Perrone, Torre e Zuppetta 1973), e inoltre nelle aree di Amantea, Cropalati, Lungro e S. Donato di Ninea (Di Nocera, Ortolani, Russo, Torre 1974), hanno permesso di accertare nel Miocene della Calabria la presenza di due cicli sedimentari, il primo dei quali è iniziato nel Tortoniano superiore, posteriormente alla fase tettonica appunto Tortoniana, e terminato nel Messiniano, in seguito ad una nuova fase tettonica durante la sedimentazione evaporitica.

I depositi attribuibili a questo ciclo (Unità A), trasgrediscono direttamente sulle varie unità che rappresentano il substrato cristallino calabrese [1]. Essi sono costituiti alla base da conglomerati ad elementi di rocce cristalline e sedimentarie, seguiti da arenarie e calcareniti arenacee. A queste fanno seguito argille, diatomiti, calcari evaporitici e gessi (questi ultimi termini non sono sempre osservabili negli affioramenti dell'Unità A, come ad esempio nella zona

[1] Generalmente il substrato cristallino sottoposto alle predette unità mioceniche è variamente rappresentato: la trasgressione ha infatti interessato le due unità ofiolitiche, l'unità del flysch del Frido, l'unità Dioritico-kinzingitica (parte bassa) e, limitatamente alla parte evaporitica delle successioni, anche le filladi dell'unità carbonatica Pollino-Campotenese. Nella zona di Amantea il Miocene trasgredisce in minima parte sull'unità Dioritico-kinzingitica, con i conglomerati e le arenarie tortoniane, ma soprattutto sulle unità filladiche, clasti delle quali sono stati riconosciuti nei livelli a maggior componente detritica.

Un problema a parte è costituito dai minuti clasti dolomitici anch'essi frequenti nelle arenarie della serie mineralizzata. La loro origine può essere duplice: o deriverebbero da fasi iniziali di smantellamento delle unità carbonatiche che affiorano poco lontano nella finestra tettonica del Monte Cocuzzo (nei conglomerati basali dell'unità B si riconoscono infatti grossi blocchi di dolomia a Diplopore provenienti appunto dal Monte Cocuzzo) o potrebbero derivare dall'erosione di dolomie di natura primaria formatesi in seguito all'evolversi precoce in senso evaporitico di particolari zone del bacino di sedimentazione rispetto a quello in cui si è deposta la serie oggetto del presente lavoro.

di Amantea, dove accade che scaglie del substrato cristallino tronchino tettonicamente la serie all'altezza dei livelli argillosi, o che i sedimenti dell'Unità B trasgrediscano in discordanza con contatti erosivi sulle diatomiti).

I depositi appartenenti all'Unità B si sono sedimentati tra il Messiniano ed il Pliocene inferiore, sia, come già detto, sui termini

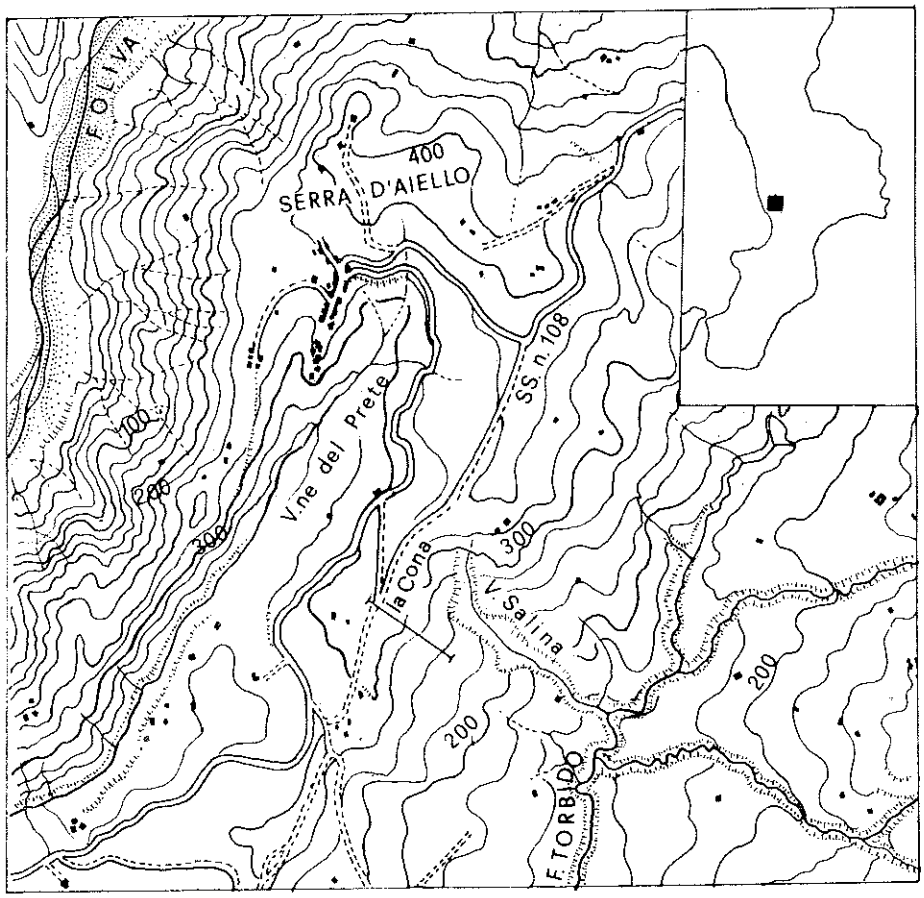


FIG. 1. - Schizzo topografico dell'area in esame, tratto dalle carte 1 : 25.000: 236 III SE Nocera Tirinese e 236 III NE Amantea. L'affioramento studiato si rinviene in destra orografica del Fiume Torbido, in prossimità del Vallone Salina, località la Cona.

dell'Unità A, sia localmente, sul substrato cristallino sovrapposto tettonicamente all'Unità A.

Hanno inizialmente contatti trasgressivi (conglomerati e arenarie), per evolvere poi verso termini evaporitici (calcari evaporitici e gessi), sempre però con intercalazioni di livelli arenacei e argillosi.

Intercalati nella parte sommitale dei terreni dell'Unità A si rinvengono inoltre, in varie zone della Valle del Crati, appena al di sotto dei calcari evaporitici, località Torrente Lavandaio (Di Nocera, Nardi, Ortolani, Torre 1974) e, nella zona di Belmonte Calabro, alla base del ciclo, fra i conglomerati rossi e le arenarie, banchi di

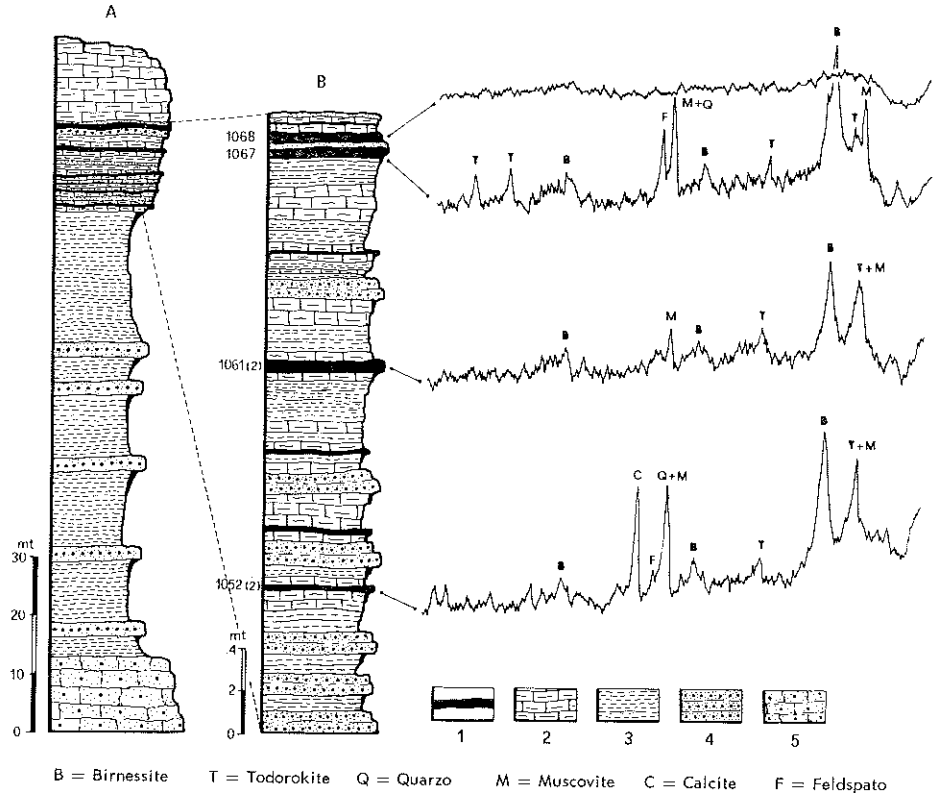


Fig. 2. - A) Colonna stratigrafica dei terreni messiniani affioranti in destra orografica del Fiume Torbido (Serra d'Aiello), includenti nella parte alta le mineralizzazioni manganesifere.

B) Raffigurazione in dettaglio della parte mineralizzata della serie: ai livelli più significativi sono affiancate le relative tracce diffrattometriche, in cui sono stati messi in evidenza essenzialmente i picchi riferibili ai minerali di manganese.

1) Livelli intensamente mineralizzati; 2) Diatomiti; 3) Argille; 4) Arenarie siltose; 5) Calcareniti.

cinerite vulcanica di composizione riolitico-riodacitica, interpretati come connessi ai generali fenomeni tettonici compressivi.

Viene pertanto ad evidenziarsi così, anche nella Calabria settentrionale, una fase tettonica intramessiniana, già riconosciuta nell'Ap-

pennino Campano ed in Sicilia, dove anche sono interessati i depositi evaporitici, di cui il superiore è trasgressivo ed in discordanza angolare sull'inferiore.

La serie da noi presa in esame è costituita da alternanze cicliche di arenarie, argille e diatomiti, il cui spessore totale è di circa 30 metri; essa è localizzata in uno sperone allungato posto tra il fiume Torbido e la collina dove sorge il paese di Serra d'Aiello (località La Cona) (Fig. 1).

I livelli citati presentano, in minor grado nella parte inferiore, e via via sempre maggiormente, fino ad un'invasione pressoché completa del sedimento originario nella zona superiore della serie, immediatamente sottostante ad un grosso banco diatomitico, una mineralizzazione nerastra, localmente di aspetto varvato, che alle analisi effettuate si è rivelata di natura manganesifera: i minerali presenti hanno le caratteristiche della deposizione autigena (Fig. 2).

Da questa successione sono stati presi 28 campioni, di varia natura litologica: su di ognuno di essi sono state effettuate osservazioni macroscopiche, microscopiche in sezione sottile e lucida ed analisi roentgenografiche. Dei più mineralizzati (15) sono state eseguite analisi chimiche per la ricerca degli elementi maggiori e di alcuni elementi minori, su alcuni di essi sono state inoltre eseguite anche delle analisi termodifferenziali, essenzialmente a scopo di controllo.

Lo studio sistematico dei livelli mineralizzati, congiunto alle conoscenze sino ad oggi acquisite sulla paleogeografia dei bacini sedimentari altomiocenici calabresi e delle loro vicende tettoniche ci ha infine consentito, non solo di formulare alcune ipotesi sui meccanismi deposizionali del manganese nell'area in esame (mineralizzazioni analoghe sono infatti presenti, anche se con non altrettanto ottimi caratteri di esposizione, anche in altri affioramenti messiniani calabresi), ma anche di inserire il suddetto episodio mineralizzante nel quadro dei fenomeni che devono aver caratterizzato appunto la paleogeografia del Messiniano nel bacino del Mediterraneo.

2. - Ubicazione dei campioni e analisi macroscopiche.

Abbiamo iniziato la campionatura al passaggio tra livelli sterili e livelli mineralizzati: è visibile dapprima un livello di circa 15 cm di spessore costituito da un'alternanza di arenaria giallastra con sottilissime laminazioni scure (1049a) e di argilla (1049b). L'osservazione del campione 1049a ha permesso di riconoscervi granuli di quarzo e di mica, oltre a dendriti e chiazze manganesifere; nel 1049b

si può notare ancora la mica, oltre a minute zone rossastre denotanti fenomeni di ossidazione.

Un metro più in alto nella serie viene presa in considerazione una nuova alternanza, già più mineralizzata della precedente, simile a quella come aspetto; il 1050a rappresenta il termine arenaceo, 1050b quello argilloso: nel 1050a è possibile riconoscere chiazze rossastre ematico-goethitiche, a forma di liste sottili.

Ad un'altra alternanza, 15 cm più in alto, dai caratteri simili alle precedenti, costituita dai livelli da cui sono stati presi il campione 1051a (arenaceo) e 1051b (argilloso), segue infine un livello segnante il vero inizio della mineralizzazione (1051c), di natura argillosa, sovrastante di circa 20 cm i due campioni precedenti. Al 1051c segue un banco dallo spessore medio di cm 120, formato da materiale marnoso-argilloso, fittamente fogliettato, simile a diatomiti, da cui sono stati prelevati i campioni $1052_{(1)}$ e $1052_{(2)}$, abbastanza ben mineralizzati, a distanza di 50 cm l'uno dall'altro. Le superfici di clivaggio sono tutte impregnate di manganese; il colore delle zone mineralizzate varia dal marrone al nero-azzurro, la disposizione appare spesso laminare, a sottili livelli paralleli di spessore medio inferiore al mm.

A questi campioni seguono circa 4 metri di argille chiare, prive di mineralizzazioni, ricche in resti di pesci (1053).

Superiormente è visibile quindi un intervallo composto da materiale a grana fine, fogliettato, abbastanza ben mineralizzato, dallo spessore di circa 20 cm (1054), molto ricco in miche ed a notevole componente argillosa, poi un'intercalazione arenacea del medesimo spessore, ma non presentante una mineralizzazione molto evidente (1055).

Salendo nella serie sono visibili ancora 50 cm di materiale sottile, dall'aspetto fogliettato simile ai livelli diatomitici, con frequenti figure da slumpings, mineralizzazione poco accentuata e percentuali notevoli di resti organici del tipo pesci e piante (1056); sono inoltre presenti minuti granuli rossastri, simili a quelli rinvenuti anche in campioni precedenti, e che potrebbero essere indizio di fenomeni di ossidazione di pirite.

A questo intervallo seguono ancora circa 2 metri di materiali di tipo diatomitico, sottilmente fogliettati, non molto mineralizzati; si può qui notare come un ripetersi ciclico a scala millimetrica dell'alternanza: argilla sterile, argilla mineralizzata, crosta manganesifera più scura (1057).

Si prosegue verso l'alto con un banco arenaceo di circa 20 cm di spessore, in cui la mineralizzazione è diffusa soprattutto nella parte basale; nel suo ambito è però individuabile un livelletto di

circa 15 mm di spessore, molto meglio mineralizzato rispetto alle zone circostanti (1058). Il minerale si presenta alla frattura fresca di colore marrone, mentre le zone maggiormente esposte agli agenti esogeni mostrano un colore nero-azzurrastro più spinto.

La serie continua con una zona spessa circa 2 metri, in cui si possono notare alternanze di sottili livelli mineralizzati e argille sterili (1059), con visibili noduli di minerali ossidati; continuano ad essere frequenti i resti di pesci (1060).

Seguono dei livelli a litologia argilloso-arenaceo-marnosa, in cui la mineralizzazione appare alquanto più blanda. Da questo intervallo sono stati prelevati il campione $1061_{(1)}$, ricco in residui organici, ed il campione $1061_{(2)}$ abbastanza ben mineralizzato, dall'apparenza crostosa, con intercalazioni di argilla chiara.

Si assiste in seguito, per circa 5 metri di spessore, ad una diminuzione percentuale della mineralizzazione, che sussiste però ancora in livelli isolati (1062). La roccia in esame ha un aspetto fogliettato molto sottile, con locale passaggio ad argilla. Questa successione è conclusa da un banco arenaceo di circa 70 cm di spessore (1063) in cui la mineralizzazione manganesifera è quasi assente, ma dove si possono invece notare delle bande rossastre subseguenti a fenomeni di ossidazione di minerali di ferro.

Seguono verso l'alto circa 2 metri di diatomiti e argille non mineralizzate, grigiastre (1064), seguite da un livello più mineralizzato di circa 1 metro di spessore, in cui le intercalazioni argilloso-diatomitiche hanno colori che vanno dal bruno al nerastro (1065). Queste alternanze, di cui è stata specificata la natura, con locali intercalazioni di livelli arenacei, continuano, con caratteri di blanda mineralizzazione, per circa 10 metri, fino alla base di una paretina che costituisce, nello sperone da noi preso in esame, la parte superiore della serie mineralizzata. Da quest'intervallo è stato raccolto il campione 1066, di colore nerastro e dall'apparenza crostosa.

Circa 2 metri al disopra del campione 1066 si rinviene un livello arenaceo, di circa 20 cm di spessore, in cui sono evidentissime le miche, dal colore grigio-biancastro; si possono notare qui intensi fenomeni di mineralizzazione manganesifera di chiara natura autigena: strutture raggiate nerastre e sostituzione della roccia ospite da parziale (pigmento nerastro diffuso), a totale (zone completamente mineralizzate, in cui della roccia originaria si distinguono ancora solo alcuni cristalli di mica) (1067).

Segue quindi un livello, di dimensioni variabili, in cui la mineralizzazione assume strutture ancora più particolari; essa si concentra in croste e vene a struttura vacuolare, che impregnano e spesso sostituiscono la roccia preesistente argilloso-diatomitica. Il colore

dei minerali manganesiferi è nero-azzurro, la struttura botroidale, non si riconoscono indizi chiari di cristallizzazione, ma tutta la massa mineralizzata sembra avere avuto origine da soluzioni colloidali in seguito a fenomeni tardo-diagenetici o epigenetici (1068).

A questo livello, in cui la parte mineralizzata costituisce forse più del 50 % della roccia in toto, ne segue un'altro, di apparenza diatomitica, abbastanza chiaro, leggero, sottilmente fogliettato, di circa 3 metri di spessore. La mineralizzazione è qui diffusa essenzialmente nei piani di stratificazione, sulle superfici di clivaggio e quelle di discontinuità (1069).

Chiude la serie mineralizzata un livello arenaceo verdastro, il cui spessore medio è di 20 cm, con clasti di vario tipo, fra cui sono riconoscibili anche elementi filladici. Il manganese è diffuso un po' dappertutto, ma soprattutto nelle supefici di clivaggio e discontinuità (1070).

Infine la parte conclusiva della successione descritta è costituita da livelli diatomitici chiari, leggermente calcarei, sottilmente stratificati, in cui la mineralizzazione è assente.

3. - Analisi microscopiche.

Sono state effettuate numerose osservazoni sui materiali della serie mineralizzata, sia in sezione sottile, che lucida; di alcuni campioni sono stati effettuati anche dei lavati essenzialmente tendenti al riconoscimento della frazione organica [2].

a) *Frazione organica.*

La fauna rinvenuta nei campioni esaminati, oltre a confermare l'età messiniana della serie, presenta caratteri particolari, indici della sua deposizione in un bacino anomalo, ad andamento ambientale generalmente euxinico, ma con oscillazioni negative e positive della percentuale di ossigenazione delle acque di fondo, riscontrabili alternativamente lungo tutta la successione.

Consideriamo innanzitutto il rapporto fauna bentonica/fauna planktonica: il benthos è in generale molto scarso, con percentuali massime di circa il 20-25 % nei campioni più arenacei (1051a-1058-1070); nella maggior parte degli altri esso è praticamente assente,

[2] Gli AA. ringraziano qui il Prof. B. Marchese dell'Istituto di Chimica Applicata della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Napoli, il cui aiuto è stato prezioso nello studio dei campioni in sezione lucida.

sia in quelli a componente argillosa che marnoso-diatomitica. Il plankton stesso è presente con faune oligotipiche, di dimensioni ridotte, che diventano addirittura nane ed a frequenza sporadica in alcuni livelli particolari, a granulometria molto sottile, ed abbastanza mineralizzati (1054-1057-1069). Sono stati anche rinvenuti rarissimi frammenti di macrofossili (lamellibranchi), radioli di echini e sporadici esemplari di benthos costiero: l'effettiva inconsistenza di questi indizi non permette comunque di fare alcuna precisazione sulla profondità del bacino di deposizione, ma solo sulle sue generali caratteristiche ambientali.

A partire dal campione 1060 sono anche visibili numerosi esemplari di diatomee, nei campioni tratti dai livelli argilloso-marnosi; talvolta si rinvengono anche spicole di spugna di natura silicea: un grande accumulo di spicole è comunque visibile soprattutto nel campione 1070, che chiude la successione mineralizzata ed è immediatamente sottostante ad un grosso banco tripolaceo chiaro. Le spicole mostrano talvolta ancora i caratteri isotropi della silice organica, ma più spesso risultano costituite da calcedonio fibroso e cristobalite di sostituzione, specie mineralogiche che nello stesso campione sono anche molto diffuse nel riempimento degli organismi planktonici presenti.

b) *Frazione inorganica.*

I campioni a carattere più propriamente arenaceo (1051a-1058) mostrano, oltre alla già citata frazione organica, percentuali variabili di materiali clastici a granulometria abbastanza minuta, denotanti una provenienza, almeno parziale, da rocce cristalline.

Sono infatti presenti granuli di quarzo a contorno spigoloso, di chiara origine plutonica, con inclusioni di vario tipo, granuli feldspatici di natura plagioclasica (prevalenti i termini oligoclasio-andesina) [3] e abbondantissimi cristalli di mica muscovite. È frequente inoltre il rinvenimento di frammenti detritici provenienti da rocce metamorfiche di natura filladica (per lo più sericitoscisti), nonché di numerosi clasti dolomitici e calcarei a struttura micritica.

Salendo nella serie (1058-1070), si può notare un percentuale aumento del grado di solubilizzazione della silice, che sempre più frequentemente si rinviene sottoforma di aggregati di quarzo micro-

[3] Talora alcuni clasti feldspastici mostrano segni evidenti di ricristallizzazione lungo i bordi, specie in quei campioni dove maggiori sono le evidenze di mobilizzazione della silice.

cristallino di deposizione secondaria o come calcedonio a struttura fibrosa in vene e riempimenti di cavità e gusci di microorganismi.

Alcuni dei minerali detritici costituenti i livelli arenacei, come quarzo e miche, sono anche riconoscibili, per quanto più rari, nei campioni argillosi o marnosi a quelli intercalati, ma in essi naturalmente la frazione inorganica più abbondante è costituita essenzialmente dai minerali argillosi (clorite, illite e montmorillonite) o da micrite calcitica a granulometria sottile (1053-1054-1069) e tessitura laminare.

La mineralizzazione s'individua in modo diverso a secondo che il processo si sia verificato nei livelli arenacei o in quelli argillosi o marnosi, pur avendo le caratteristiche tipiche delle mineralizzazioni di tipo autigeno, diagenetico e talora epigenetico (dendriti ecc.).

Bisogna innanzitutto far notare che è comune ai tre tipi litologici citati la deposizione dei minerali manganesiferi nei piani di sfaldatura delle miche; in generale comunque la mineralizzazione ha un aspetto iniziale puntiforme, costituito da minuscoli centri di cristallizzazione che in seguito tendono ad occupare la massima area possibile all'interno del campione.

Nei livelli arenacei, oltre alla già citata mineralizzazione nelle miche, è inoltre chiaramente osservabile come i minerali manganesiferi costituiscano il riempimento, da parziale a localmente totale, delle cavità presenti negli organismi: microcristalli grossolanamente arrotondati si addensano lungo le pareti interne dei foraminiferi planktonici, fino a costituire degli aggregati che ne occludono totalmente le cavità (Fig. 3a-b).

Nei livelli marnoso-argillosi (alcuni dei quali, specie nella parte alta della successione, sono da considerare vere e proprie diatomiti), la mineralizzazione, pur avendo inizio puntiforme (Fig. 4a), si espande lungo linee di debolezza e giunti di stratificazione, assumendo l'aspetto tipico dei minerali depositati da soluzioni colloidali, negli stadi avanzati della diagenesi, a terminazioni sovente digitate e dendriformi (1054-1069) (Fig. 4b). Un'esasperazione di questa situazione è osservabile in alcuni dei campioni della parte più alta della serie, come ad es. nel $1061_{(1)}$, nel 1067 e nel 1068. In essi la mineralizzazione, dallo stadio iniziale puntiforme (Fig. 5), si è diffusa tanto da costituire quasi l'80 % del campione, lasciando intatte solo minime porzioni della roccia originaria, della quale si riconoscono in sezione sottile solo pochi frammenti muscovitici, quasi completamente mineralizzati.

È necessario però tener presente che in alcuni dei riempimenti delle cavità dei foraminiferi, agli ossidi idrati di manganese bisogna aggiungere percentuali variabili di ossidi e idrossidi di ferro, che

probabilmente sostituiscono, in seguito a tardivi processi di ossidazione, la pirite formatasi in seno al sedimento depostosi inizialmente in ambiente riducente.

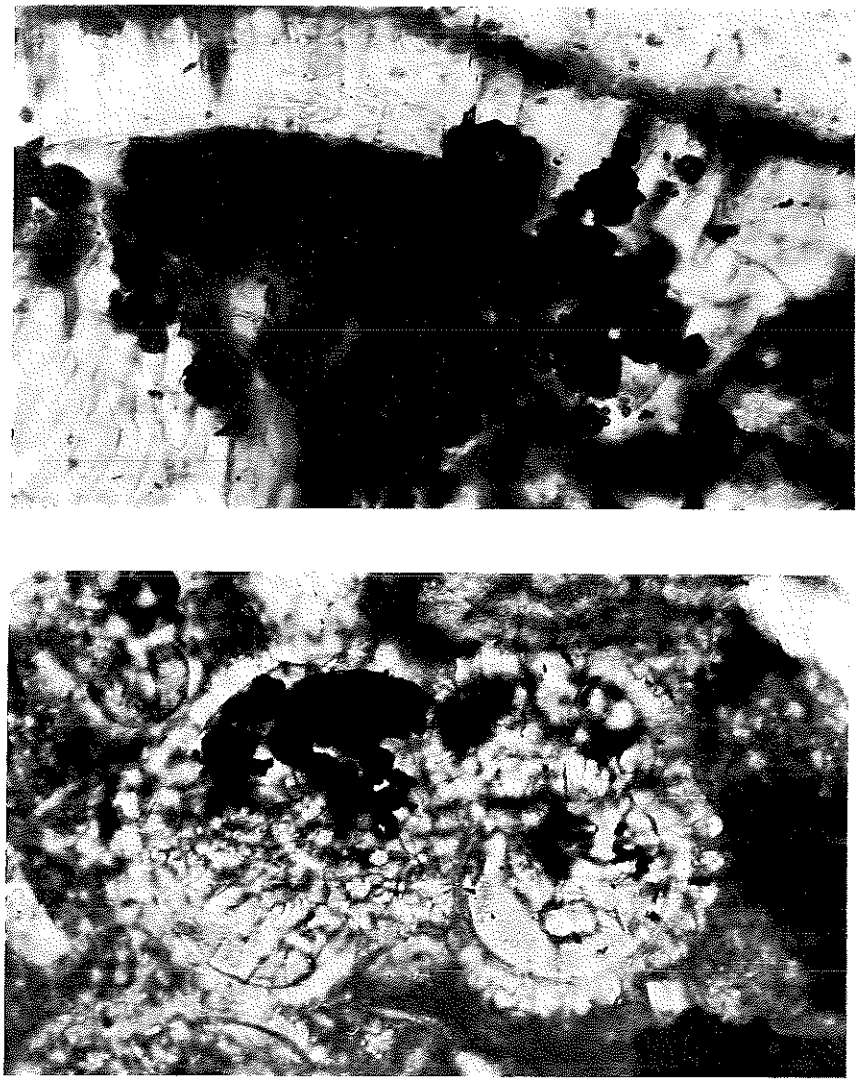


FIG. 3. - A) Foraminifero planktonico con parziale riempimento del guscio da parte di cristalli nero-rossastri di idrossidi ferro-manganesiferi. Campione 1058, sezione sottile, 1625 x.
B) Idrossidi ferro-manganesiferi nero-rossastri a contatto della parete interna di un foraminifero planktonico. Campione 1058, sezione sottile, 930 x.

Per quanto riguarda poi lo studio in sezione lucida esso, è stato condotto sui campioni più mineralizzati, dopo l'esecuzione di pro-

cedimenti d'inglobaggio in resine atte ad effettuarne la consolidazione.

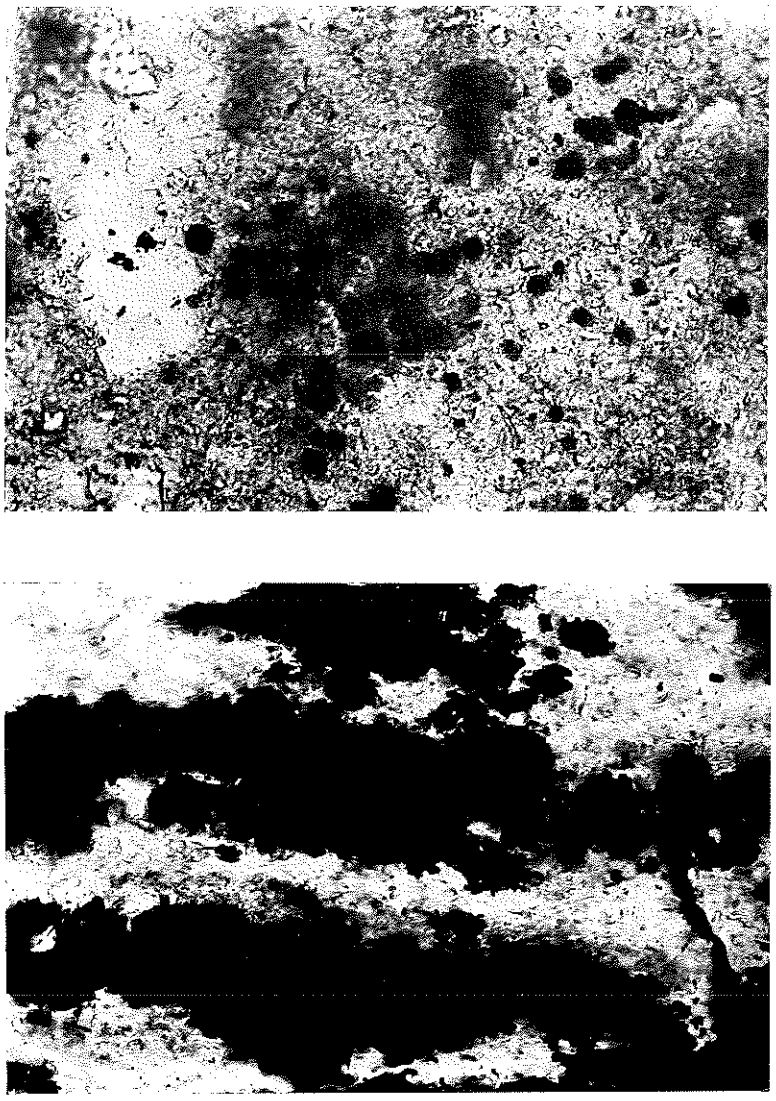


FIG. 4. - Invasione della mineralizzazione ferro-manganesifera nero-rossastra nei sedimenti argilloso-siltosi. A) gel di microconcrezioni colloidali sparsi nella massa del sedimento. Campione 1054, sezione sottile, 860 x. B) particolare di dendrite. Campione 1069, sezione sottile, 735 x.

Le osservazioni desunte da questo studio hanno permesso di riconoscere la presenza di miscele di ossidi e idrossidi di manganese, ascrivibili al tipo manganite a 7 Å, o birnessite, manganite a 10 Å,

o todorokite, e di criptomelani, dal colore giallo-paglierino crema, a potere riflettente non molto alto ed a rilievo mediamente spiccato.

Le immagini microscopiche provenienti dal campione 1068, in cui la mineralizzazione si presenta in aggregati nodulari e vene a struttura compatta denotante una scarsa cristallinità degli aggregati, mostrano appunto una superficie completamente mineralizzata, chiara, abbastanza tenera (è stato infatti molto difficile evitare del tutto durante la lavorazione i graffi sul preparato), con rari episodi

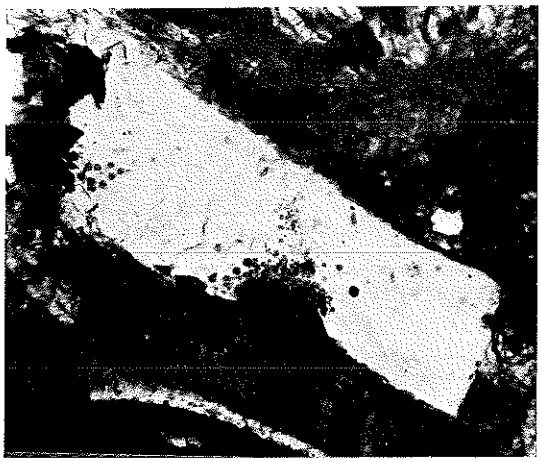


FIG. 5. - Feldspato in cui si assiste ad una invasione, dalla periferia del cristallo verso la sua parte interna, delle fasi di idrossidi colloidali ferro-manganesiferi. Campione 1058, sezione sottile, 400 x.

di minerale più cariato, un esempio del quale si può osservare in una vena più tardiva, di natura probabilmente todorokitica-criptomelanica, che attraversa la parte a mineralizzazione più massiccia (Fig. 6a).

Prove della formazione autigena del minerale considerato si possono rinvenire, inoltre, nella stessa sezione, osservando dei cristalli di mica ormai quasi completamente mineralizzati (Fig. 7a), dei quali si riesce però a ricostruire il contorno, e dei gusci di foraminiferi planktonici (Fig. 7b) sui quali la mineralizzazione è passata rispettandone però le forme e differenziandosi nel riempimento. Il campione 1067 mostra ancora delle evidenze di quest'origine secondaria, autigena del minerale: sono infatti visibili tutta una serie di festoni a mineralizzazione ciclicamente crescente che s'impiantano su di una roccia inizialmente di natura pelitico-arenacea (Fig. 6b).

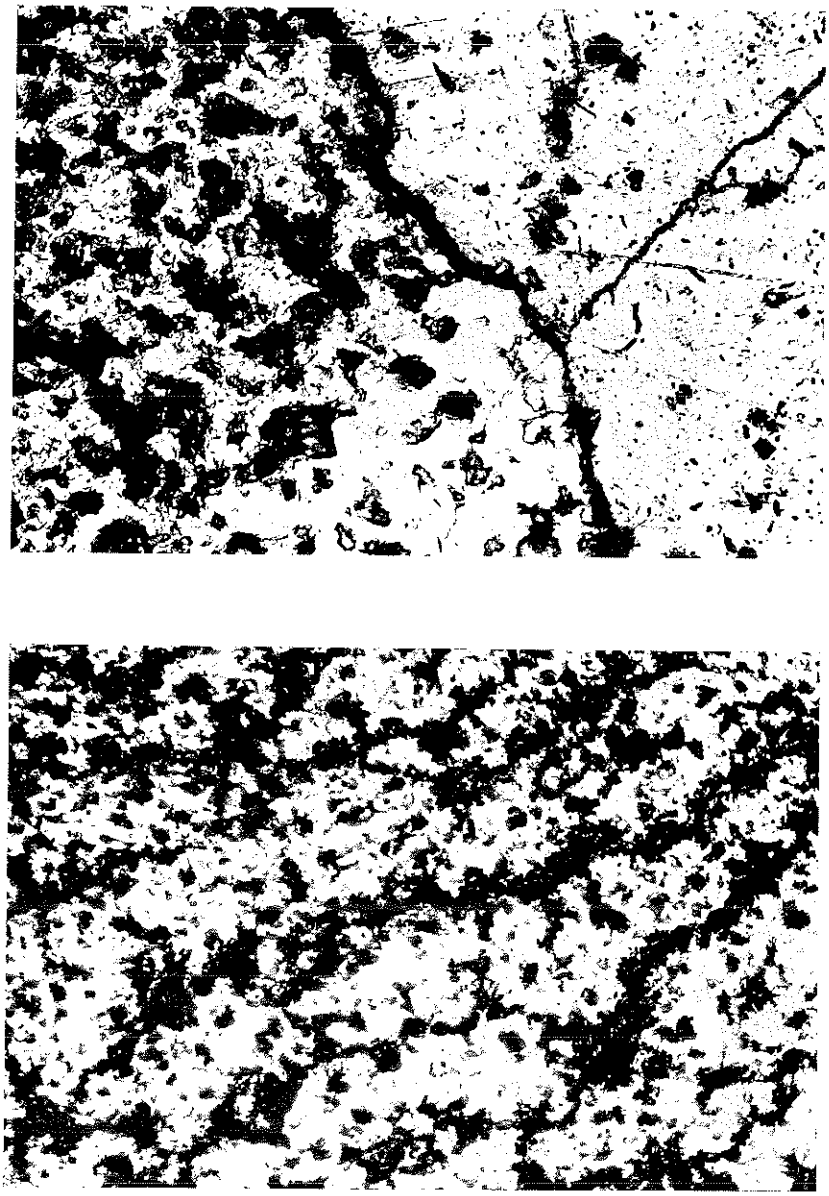


FIG. 6. - A) Particolare di una vena a composizione todorokitica-criptomelanica (a sinistra nella foto) nella massa appena più scura costituita da birnessite e ossidi manganesiferi. Campione 1068, sezione lucida, 620 x.
B) Idrossidi manganesiferi (chiari), con struttura a bande, alternate a zone in cui la mineralizzazione è assente. Campione 1067, sezione lucida, 170 x.

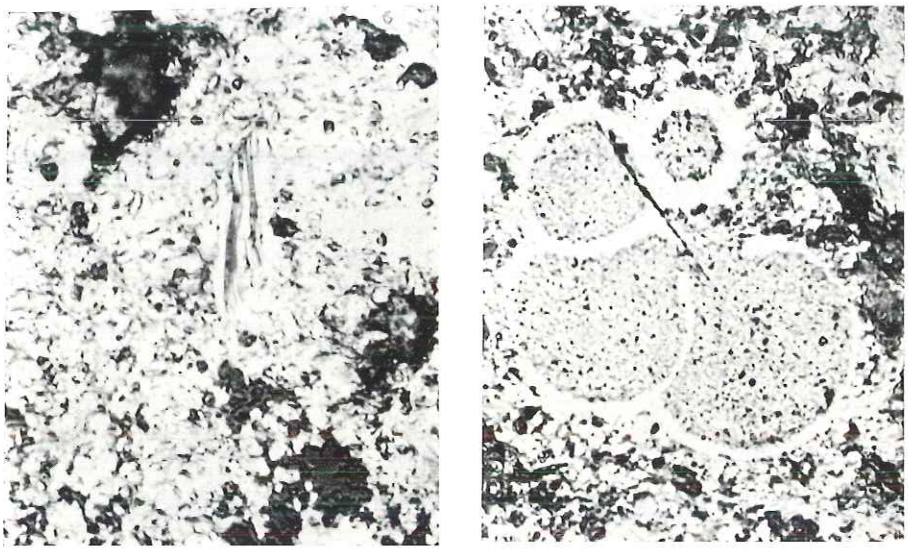


FIG. 7. - Esempio di sostituzione, da parte dei minerali ossidati di manganese A) di un cristallo di mica; 1570 x B) del guscio di un foraminifero planktonico. Campione 1068, sezione lucida, 1660 x.

4. - ANALISI DIFFRATTOMETRICHE [4].

Tranne alcune separazioni tendenti ad isolare piccole percentuali della frazione argillosa inferiore a 2 μ sulla quale eseguire i trattamenti di isoorientazione, riscaldamento e glicolazione, tutti i nostri sforzi tendenti ad un completo recupero del minerale manganesifero dalla roccia inglobante sono risultati inutili (escluso per il

[4] Le analisi diffrattometriche, come quelle termodifferenziali, sono state eseguite presso l'Istituto di Chimica Applicata della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Napoli. Gli AA. colgono l'occasione per ringraziare il Prof. R. Sersale, Direttore dell'Istituto, per aver consentito l'effettuazione di dette analisi.

Per le analisi ai raggi X è stato usato un Diffrattometro con Generatore Philips PW 1011, con goniometro verticale per bassi ed alti angoli e contatore proporzionale.

Fenditura di divergenza: 1°
Fenditura ricevente: 0,15 mm
Fenditura di diffusione: 1°
Radiazione: Cu $K\alpha$ con filtro di Nichel 42KV - 32 mA
Velocità del goniometro: 2° θ/ min.
Costante di tempo: 8 sec.
Sensibilità: 200 cps
Velocità di scorrimento della carta: 12000 mm/h

L'anticatodo Cu $K\alpha$ con filtro di Ni è stato usato per le analisi di routine, mentre alcuni dei campioni più mineralizzati sono stati esaminati anche con radiazione proveniente da un anticatodo Fe $K\alpha$, con filtro di Mn, per ridurre al minimo il disturbo causato dalle alte percentuali di manganese parzialmente presenti in forma criptocristallina.

campione 1068), dato il carattere di microimpregnazione che la mineralizzazione ha assunto sia per i livelli arenacei che per quelli marnosi e argillosi. La maggior parte delle analisi diffrattometriche sono state quindi eseguite sul materiale tal quale, fermo restando che per meglio comprendere la natura dei minerali di manganese sono stati esaminati a parte alcuni campioni particolari in cui la mineralizzazione è stata pressoché completa.

È importante innanzitutto notare come non sia evidente una variazione graduale lungo la serie in senso negativo o positivo di alcuni minerali rispetto ad altri, bensì delle percentuali ciclicamente variabili in rapporto alla diversa natura litologica dei livelli costituenti la serie mineralizzata.

I livelli di natura più specificamente arenacea contengono infatti quantità notevoli di minerali di evidente origine detritica, quali muscovite, feldspati (del tipo essenzialmente plagioclasi acidi), quarzo, dolomite e probabilmente anche argille, soprattutto cloriti, per le quali l'ipotesi dell'eredità sembrerebbe prevalere su quella della neoformazione. Inoltre è anche abbondante la calcite, sia sottoforma detritica che come costituente il guscio dei numerosissimi foraminiferi presenti e di parte del cemento.

I livelli a composizione argillosa prevalente, oltre a minori percentuali degli stessi minerali detritici già citati, sono costituiti essenzialmente da fillosilicati, in parte ereditati e in parte neoformati, in seguito a processi di trasformazione. Anche qui si nota la presenza di abbondante calcite, costituente il guscio dei numerosi organismi presenti nel sedimento, nonché di basse percentuali, comunque variabili, di geothite e di idrossidi di manganese autigeni.

Sono presenti illite, clorite e smectite: il termine smectitico consiste prevalentemente di montmorillonite a 14 Å, la cui abbondanza aumenta in percentuale verso i termini più alti della serie (1062-1066), sono stati inoltre osservati in molti campioni dei picchi riferibili ad interstratificati illite-montmorillonite a 12 Å.

I livelli, infine, di apparenza marnosa, finemente fogliettati, di natura, almeno nella parte superiore della serie in esame, più propriamente diatomitica, hanno come caratteristica mineralogica alti quantitativi di calcite, non necessariamente confinata al guscio dei foraminiferi, quarzo essenzialmente microcristallino e percentuali variabili di minerali argillosi.

I picchi riferibili ai minerali di manganese sono chiaramente osservabili solo in pochi campioni ricchissimi in MnO, dal momento che i suddetti minerali raramente si presentano con forme cristalline ben definite ed individuabili. Il loro riconoscimento è stato quindi possibile solo in quei livelli in cui la percentuale di MnO desunta

dalle analisi chimiche è risultata superiore al 15 % ($1052_{(2)}$-$1061_{(2)}$-1065-1067-1068).

La specie mineralogica preponderante è senz'altro la birnessite, o manganite a 7 Å, la cui formula approssimata è (Ca, Mg, Na, K) × × (Mn^{4+}, Mn^{2+}) (O, $OH)_2$, che presenta le maggiori riflessioni a 7.27 Å (100) - 3.60 Å (40) - 2.44 e 1.41 Å (70). Essa è talvolta associata alla todorokite, o manganite a 10 Å, costruita secondo la seguente formula: (Mn, Ba, Ca, Mg) $Mn_3O_7 \times 2\,H_2O$ (9.50 Å - 4.81 Å - 3.20 Å - 2.40 Å - 2.16 Å - 1.33 Å), in percentuali variabili, e probabilmente a forme particolari di criptomelani (Fig. 2).

Si tiene comunque a far notare che il campione 1068, che pure è il più ricco in manganese (48,54 % MnO), presenta all'analisi diffrattometrica scarsissime evidenze di cristallizzazione, con picchi piuttosto indistinti localizzati nel campo 7-10 Å, non avendo il minerale autigeno nella sua formazione probabilmente superato lo stadio criptocristallino subseguente alla deposizione dalla soluzione colloidale.

La todorokite è soprattutto evidente nei campioni $1061_{(2)}$ e 1067, per quanto, potendo variare il suo picco principale nel campo compreso tra i 9.40 e i 9.60 Å, questo può essere talvolta coperto dalle riflessioni appartenenti alle fasi illitico-muscovitiche, soprattutto nei campioni meno mineralizzati.

Volendo entrare poi in maggiori particolari, si osserva che, per quanto riguarda la regola ciclicamente costante di variazione lungo la serie di dolomite, feldspati, muscovite, clorite e quarzo, cioè di tutti quei clasti di provenienza detritica, delle riserve devono esser fatte per quanto riguarda il quarzo. In generale esso segue all'incirca l'andamento degli altri minerali detritici, ma la sua abbondanza risulta legata più che altro solo a quella della muscovite. Questo andamento irregolare, dovrebbe essere dovuto (non trascurando un'ipotetica roccia originaria in cui il quarzo e la muscovite si trovavano associati), al fatto che non tutto il quarzo presente nella serie è di origine detritica: pur volendo infatti escludere la silice rinvenuta sottoforma di cristobalite nel campione 1070, alta è la percentuale del quarzo microcristallino di natura secondaria e del calcedonio.

Variazioni parallele sono inoltre osservabili per l'illite e la muscovite, per quanto la prima mostri una maggiore regolarità nell'ambito di tutta la serie.

Un'ultima osservazione: le tracce che seguono le variazioni percentuali di $CaCO_3$ e dei minerali di manganese sono fra loro speculari, fatto questo che, a parte la naturale considerazione della diminuzione del minerale fino ad allora prevalente (perché la calcite è in effetti il costituente maggiore di quasi tutti i campioni), in rapporto

all'abbondanza crescente dei minerali manganesiferi, si può senz'altro affermare che è essenzialmente alla sostituzione della calcite che si è rivolto l'attacco di questi ultimi, come è stato anche possibile appurare dalle osservazioni microscopiche.

5. - Analisi termodifferenziali [5].

È stato eseguito un certo numero di analisi termodifferenziali dei campioni prelevati dalla serie mineralizzata.

In complesso i risultati di questo tipo di investigazione non hanno modificato le conclusioni tratte in base alle analisi diffrattometriche e chimiche: nella maggior parte dei campioni è possibile riconoscere la presenza di quantità variabili di calcite e dolomite, nonché di fillosilicati riferibili al tipo muscovitico-illitico e smectitico-montmorillonitico. Le dimensioni dei picchi permettono inoltre una stima approssimata delle percentuali di questi minerali contenuti nel campione: in media si nota ancora una coincidenza di questi dati con quelli tratti dalle analisi diffrattometriche.

In tre campioni, $1061_{(2)}$, 1067 e 1068, inoltre, oltre a piccole percentuali dei fillosilicati già citati, si rinvengono dei picchi endotermici particolari, da noi riferiti ad ossidi idrati di manganese.

Il più tipico è il 1068: all'analisi ai raggi x esso mostra una struttura poco cristallina con picchi però localizzati nella zona 10-7 Å; dall'analisi termodifferenziale risulta una serie di picchi endotermici a 110°C - 255°C - 680°C (flesso) - 1100°C, riferibili tutti a minerali manganesiferi a composizione variabile, da ossidi del tipo pirolusite, a composti idrati della serie dei criptomelani.

Risultati analoghi si rinvengono anche nei campioni $1061_{(2)}$ e 1067, in cui sono ben accentuati i flessi endotermici a 680-690°C, ed i picchi situati nella zona delle alte temperature (1100-1200°C); tracce più lievi, infine, del flesso a 680°C sono state inoltre osservate anche in altri campioni della serie esaminata nei quali la percentuale della mineralizzazione manganesifera si è rivelata più bassa.

6. - Analisi chimiche.

Della serie dei 28 campioni prelevati ne sono stati scelti 15 per le analisi chimiche, eseguite con diverse tecniche: ponderale, com-

[5] Le analisi dei campioni considerati sono state eseguite mediante apparecchiatura Dupont 900 Thermal Analyzer, nelle seguenti condizioni:
Inerte di riferimento: Al_2O_3
Velocità di riscaldamento: 20°C/min.
Atmosfera: aria
Scala: per T - 0,8 MV/m; per T - 0,008 MV/in.
Per ogni analisi sono stati usati 40 mg di sostanza.

plessometrica, colorimetrica, spettrofotometrica ad assorbimento atomico.

I dati esposti nella Tabella I hanno messo in evidenza un progressivo incremento del tenore in MnO dal basso verso l'alto, ma più particolarmente si nota una variazione ciclica con concentrazioni maggiori nei livelli a prevalente componente argilloso-diatomitica. Contemporaneamente, all'aumento del tenore in MnO fa riscontro un quasi parallelo incremento della percentuale di Fe_2O_3 (1061_2; 1068).

La silice presente si rinviene sia libera (quarzo di origine detritica, calcedonio, silice di natura organogena), che combinata sottoforma di silicati di varia natura (minerali argillosi, mica, feldspati ecc.).

Come la silice, anche Al_2O_3 è da mettere in relazione a minerali argillosi e feldspati: chiaramente la sua variazione appare funzione della presenza della componente argillosa nei vari livelli.

Il magnesio è da mettere in relazione alla presenza di dolomite, rilevata peraltro in base ad effetti di diffrazione. I suoi valori sono pressoché costanti lungo tutta la successione.

La percentuale in potassio presenta una certa costanza, e questo elemento deve ritenersi legato alla muscovite, all'illite ed ai feldspati. Il sodio infine appare legato interamente ai feldspati presenti.

Per quanto riguarda gli elementi minori una ricerca preliminare è stata rivolta soprattutto alla determinazione dei tenori in Ba, Co e Ni, elementi notoriamente associati alle mineralizzazioni manganesifere di deposito colloidale.

In particolare il % in Ba sembra essere legato solo in parte ai valori della mineralizzazione: cioè, quando il tenore in MnO si eleva oltre il 30 %, non si nota un altrettanto brusco incremento della percentuale di bario.

Co e Ni sembrano essere maggiormente legati all'andamento della mineralizzazione ferro-manganesifera, con una leggera prevalenza associativa del nichel verso il ferro e del cobalto verso il manganese (comportamento anomalo).

Si verifica comunque per questi due ultimi elementi quanto già riscontrato per il bario: infatti i campioni maggiormente manganesiferi presentano delle percentuali in Co e Ni relativamente basse. Probabilmente ciò sarebbe da attribuire ad una separazione negli ultimi stadi della diagenesi o addirittura in seguito a fenomeni epigenetici, delle fasi colloidali ferro-manganese che sarebbero precipitate prima, mentre Co e Ni, forse perché trattenuti in complessi metallorganici, si sarebbero deposti in un momento successivo.

TABELLA I

	1051 c	1052[1]	1052[2]	1054	1055	1056	1058	1059	1061[2]	1063	1065	1066	1067	1068	1069
SiO_2	34.18	33.74	25.00	30.70	35.52	38.60	28.50	36.00	24.46	29.40	34.06	28.10	21.20	14.30	32.44
Al_2O_3	10.86	8.43	7.58	6.50	9.56	11.60	7.00	13.05	2.80	6.50	10.96	8.41	1.27	2.04	7.77
Fe_2O_3	5.57	5.00	6.40	6.22	4.02	6.65	3.32	4.27	8.02	3.12	5.92	4.82	5.50	8.72	6.60
MnO	0.96	6.69	17.04	14.20	2.07	0.59	2.22	0.97	36.15	0.73	7.23	15.34	42.60	48.54	10.26
MgO	2.44	2.55	2.20	1.93	2.40	2.36	2.56	2.36	2.17	3.00	3.00	3.10	1.98	1.63	2.99
CaO	16.96	20.00	19.80	14.90	22.38	17.13	28.67	19.10	9.04	28.00	16.31	20.28	9.00	8.23	16.46
Na_2O	0.56	1.74	0.59	5.87	2.52	0.87	1.24	1.08	0.67	0.95	0.77	0.29	0.68	0.43	0.73
K_2O	2.09	2.31	1.80	1.97	1.39	2.68	1.32	2.02	3.37	2.50	2.03	1.45	3.08	2.71	2.04
H_2O^-	14.16	4.14	5 .92	7.37	3.61	5.08	5.19	7.40	10.89	5.16	7.78	5.97	8.62	7.88	9.03
CO_2	12.87	14.96	14.78	11.00	16.94	12.98	20.24	13.42	2.64	21.12	11.44	12.54	6.38	5.72	11.00
$CaCO_3$	29.25	34.00	33.50	25.00	38.50	29.50	46.00	30.50	6.00	48.00	26.00	28.50	14.50	13.00	25.00
Ba*	576	600	576	840	504	840	724.8	648	888	1152	504	240	408	192	888
Co*	124	146	420	84	90	66	84	100	432	44	435	512	194	114	364
Ni*	120	184	176	145	152	172	136	176	544	120	210	300	200	132	272
Fe/Mn	5.27	0.675	0.339	0.396	1.08	10.10	1.34	3.98	0.20	3.89	0.74	0.28	0.11	0.16	0.58
Fe/Co**	31.4	23.9	10.6	51.8	31	70.4	27.6	29.9	12.9	49	9.5	6.5	19.8	53.5	12.6
Mn/Ni**	6.2	28.1	75	75.8	10.5	2.6	12.6	4.3	51.4	4.6	26.6	39.6	165	27.2	29

* = in ppm.
** = rapporti × 1.000.

7. - Discussione dei risultati.

Le mineralizzazioni manganesifere messiniane di Serra d'Aiello si rinvengono in corrispondenza di alternanze cicliche arenaceo-argilloso-marnose, il cui spessore totale è poco meno di 30 metri, al di sopra di argille grige molto fossilifere; gli ultimi livelli mineralizzati si arrestano al di sotto del ben delineato banco diatomitico che conclude il ciclo sedimentario dell'unità A (Di Nocera, Ortolani ecc. 1974) nella zona di Amantea.

La mineralizzazione, il cui tenore in media va crescendo verso i termini più alti della serie, si rivela costituita nella sua totalità da minerali autigeni, del tipo ossidi idrati di manganese. Ad essi sono associati, in percentuali variabili, anche ossidi e idrossidi di ferro: il rapporto medio Mn/Fe (considerata la estrema variabilità di MnO e la sensibile costanza di Fe_2O_3 nei campioni esaminati), risulta di circa 2,4, con un minimo di 0,09 ed un massimo di 7,7. Per quanto non sia possibile, inoltre, escludere che parte del ferro possa trovarsi legato nei minerali detritici costituenti i livelli più grossolani, pur tuttavia riteniamo che la maggior parte di esso si ritrovi nella predetta forma ossidata, in seguito a fenomeni di natura secondaria. Del resto da tutte le analisi emergono percentuali irrisorie per FeO.

Il carattere autigeno dei minerali in oggetto è riconoscibile in base ai seguenti criteri:

1) riempimento di pori e cavità di frattura;

2) sostituzione di elementi componenti il sedimento originario (gusci di foraminiferi, cristalli di mica ecc.);

3) strutture microgranulari con i caratteri indicanti come in origine il minerale fosse un gel da microconcrezione colloidale.

Sono stati rinvenuti: Birnessite o Manganite a 7 Å, Todorokite o Manganite a 10 Å, Criptomelano o probabili ossidi manganesiferi con non ben identificate strutture criptocristalline [6].

Le fasi mineralogiche presenti sono simili a quelle che si riscontrano nei noduli oceanici (Buser & Grutter 1956; Price 1967; Alaimo, Calderone e Leone 1970; Glasby 1972; Varentsov 1972; Skornyakova & Andrushchenko 1974), ma che possono agevolmente essere

[6] Anche Sturani e Sampò (1973) citano il ritrovamento di birnessite nel tripoli Messiniano del bacino di Alba, ma attribuiscono alla birnessite la formula δ MnO, formula che riferisce in realtà al minerale acerdese. Siamo quindi perplessi sull'effettiva natura del minerale associato alle diatomiti del terziario piemontese.

connessi a fasi diagenetiche che seguono alla precipitazione dei sedimenti in acque relativamente basse.

Varie interpretazioni sono state date sulla presenza di un tipo di fase rispetto ad un'altra, coinvolgenti sia la profondità, che la pressione e la temperatura di formazione, ma per lo più ci si riferisce essenzialmente alle diverse « attività » nell'ambiente deposizionale e diagenetico, di O_2 e H_2O, che fanno variare i rapporti ionici e molecolari: è universalmente ammesso, comunque, un grado di ossidazione crescente dalla todorokite alla birnessite ed infine agli ossidi.

La deposizione ultima dei composti manganesiferi si è probabilmente esplicata mediante i noti meccanismi di adsorbimento esercitati dai granuli costituenti il sedimento sugli elementi presenti sottoforma colloidale nelle soluzioni circolanti, in aggiunta a fenomeni di scambio ionico sulle superfici esposte (feldspati a contorno alterato, miche, residui organici ecc.). I minerali adsorbiti risultano costituiti alternativamente da livelli a Mn^{+2} e Mn^{+4}: il processo è facilitato se il pH dell'ambiente si aggira su valori compresi tra 8,5 e 9,5 (HEM 1964). Un alto valore del pH delle soluzioni interstiziali avrebbe inoltre anche l'effetto di favorire nel sedimento il fenomeno della ossidazione autocatalitica (VARENTSOV 1972), in cui la fase idrossidi, già depositata sulle superfici elementari, incrementerebbe maggiormente le reazioni di ossidazione e quindi la percentuale della fase ossidi (MORGAN & STUMM 1964).

Per potere ora formulare delle ipotesi sull'origine del manganese nell'area in esame e sui suoi probabili meccanismi deposizionali, è necessario inquadrare il suddetto episodio mineralizzante nel più vasto contesto dei fenomeni che hanno caratterizzato il Messiniano in Calabria: il vulcanismo riodacitico, le evaporiti, la proliferazione fitoplanktonica, le locali condizioni euxiniche dei bacini ed infine la fase tettonica intramessiniana.

Quale potrebbe essere la sorgente del manganese che ha fornito le mineralizzazioni di Serra d'Aiello? La complessità dei terreni cristallini che costituiscono il substrato delle successioni mioceniche proporrebbe invero una fin troppo vasta gamma di soluzioni a questo problema, lasciando però irrisolto il quesito principale: non si comprenderebbe cioè perché mai la mineralizzazione si rinvenga localizzata in orizzonti così limitati cronologicamente e di ambienti tanto particolari.

Nella parte introduttiva del presente lavoro, abbiamo fatto cenno ad evidenze, nell'ambito del Messiniano calabrese, di un'attività vulcanica esplosiva di tipo riolitico-riodacitico, connessa a fenomeni tettonici compressivi: banchi di cineriti riodacitiche sono stati infatti

rinvenuti ad altezze variabili lungo tutta la successione messiniana e nulla esclude che, intercalata ai principali episodi parossistici, sia continuata un'attività vulcanica in tono minore, forse limitata solo a probabili emissioni fumaroliche.

Non sono stati rinvenuti depositi di materiale vulcanico a granulometria maggiore delle già citate cineriti, il ché deporrebbe o per una notevole lontananza degli apparati vulcanici oppure, come viene ipotizzato da FISKE (1963) o da FISKE e MATSUDA (1964), per una emissione subacquea del materiale vulcanoclastico, la cui frazione più fine sarebbe stata soggetta ad un più lungo trasporto. L'estremo grado di frammentazione degli elementi sarebbe dovuto all'impatto con l'acqua in seguito al fenomeno esplosivo.

ALEKSIEV (1960), BETEKHTINE (1946), RAGUIN (1956), ROUTHIER (1963) ed altri, mettono spesso in connessione giacimenti manganesiferi con manifestazioni vulcaniche a carattere acido e GUERIN (1973), dopo aver passato in rassegna la percentuale in Mn contenuta in vulcaniti dal diverso chimismo, giunge alla conclusione che appunto l'impossibilità della sostituzione di questo ione nel reticolo del quarzo e dei feldspati, cioè dei maggiori costituenti delle rocce acide, lo porta in queste a concentrarsi in fasi fumaroliche da cui ne risulterebbe un dilavamento estremamente agevole, seguito dalla deposizione nei cosiddetti giacimenti vulcano-sedimentari.

Arricchimenti manganesiferi nelle acque costiere sono stati inoltre constatati da ELDERFIELD (1972), in connessione con eruzioni recenti avvenute in prossimità dell'isola di Deception (Antartide); tali percentuali anormalmente alte riguardano anche Si, e tendono ad abbassarsi nei periodi di relativa calma intercalati fra due fasi parossistiche.

FERGUSON e LAMBERT (1972) attribuiscono un'origine vulcanico-esalativa agli arricchimenti ferro-manganesiferi dei sedimenti di Matupi-Harbor (Nuova Inghilterra), connessi a piroclastiti di composizione da riodacitica ad andesitica.

BONATTI et al. (1972) rinvengono mineralizzazioni a Fe-Mn-Ba e solfuri, di origine probabilmente fumarolica nelle cosiddette « brines », sia in sedimenti profondi del Mar Rosso che, più a Sud, nella regione dell'Afar, in rapporto, però, con emissioni di magmi a maggiore basicità.

È necessario a questo punto far notare come tale attività vulcanica, ipotizzata come possibile sorgente del manganese, possa aver fornito anche le alte percentuali di silice necessarie alla proliferazione delle silicospongie e soprattutto delle diatomee, i cui accumuli formano un indubbio livello guida nelle serie messiniane del bacino del Mediterraneo (OGNIBEN 1955).

Su quest'argomento è del resto tuttora aperta una vasta problematica: se cioè le diatomee siano indizio effettivamente di clima più freddo (data la loro odierna diffusione prevalentemente alle alte latitudini), ipotesi in parte suffragata dal significato ambientale che si è stabilito di dare ad alcuni foraminiferi planktonici), o se esse invece rappresentino solo le evidenze di parziali variazioni del chimismo delle acque, preludenti agli episodi evaporitici.

Un altro fattore d'incertezza è inoltre costituito dalla presenza, nei livelli a componente diatomitica, di numerosissimi resti di organismi nectonici, dei quali in fondo non è chiaro né l'effettivo habitat, né le cause che ne hanno provocato la morte e il rapido accumulo nei sedimenti. Sembrerebbe indubbia, comunque, l'esistenza di un nesso tra lo sviluppo dei pesci e la ciclica proliferazione del fitoplankton che ne costituisce il nutrimento; in un bacino chiuso, a scarsa comunicazione con il mare aperto, si sarebbe però potuti giungere all'esasperazione di questi fenomeni, finché l'aumento continuo delle diatomee non avesse reso praticamente impossibile la vita agli altri organismi, soffocandoli. Sulla rapida morìa dei pesci sono state avanzate comunque anche altre ipotesi, non ultima delle quali una brusca variazione di temperatura delle acque, in connessione ad attività vulcaniche (tripoli algerino).

Cerchiamo ora d'individuare i possibili rapporti che legano gli accumuli manganesiferi a queste condizioni ambientali.

Il bacino di deposizione dei sedimenti che costituiscono la serie mineralizzata si presentava con caratteri decisamente euxinici; in esso la circolazione si configurava in un ambito piuttosto ristretto, con condizioni riducenti al fondo (scarsità o assenza di faune bentoniche), e più ossidanti nei livelli acquiferi più superficiali, ciclicamente collegati, per abbassamento della soglia, con il mare aperto a maggiore ossigenazione. Come è stato riscontrato anche attualmente nel Mar Nero ed in alcune zone del Mar Baltico, condizioni riducenti al fondo (−200 mV Eh; 7,7 pH) avrebbero costituito l'ambiente ideale per una forte concentrazione di composti solubili di Mn^{+2}, rispetto ai quali le acque sarebbero rimaste sottosature (SAPOZHNIKOV 1970), (fermo restando, naturalmente, l'apporto, variamente ipotizzato, del manganese nel bacino di sedimentazione).

In superficie, invece, l'Eh avrebbe potuto raggiungere valori superiori ai 350-450 mV, ed il pH valori medi di 8-8,35: anzi, dal momento che ci si avviava verso le fasi evaporitiche, si potrebbe ipotizzare per il pH un aumento ancora maggiore.

Lo ione Mn^{+2}, arricchito in sommo grado nei livelli acquiferi più profondi, può giungere in genere alla precipitazione sia sotto forma ancora bivalente, come rodocrosite, non necessitando in tal

caso di condizioni particolarmente ossidanti, che come una miscela di idrossidi colloidali, a percentuali variabili di ioni bivalenti, trivalenti e tetravalenti; per quanto riguarda la nostra successione, in essa non è stato possibile riscontrare alcuna traccia di rodocrosite, o di siderite ad essa associata, neanche mascherata da fenomeni di tipo pseudomorfico, susseguenti a ricristallizzazioni diagenetiche. D'altro canto, una precipitazione del manganese (e subordinatamente del ferro) in una fase mista ossidi-idrossidi, richiede condizioni ambientali abbastanza ossigenate, che comunque non coinciderebbero con quelle dei fondali in cui si verificava l'accumulo di Mn^{+2} in soluzione.

È necessario perciò ipotizzare dei meccanismi deposizionali che, date le condizioni fisico-chimiche di precipitazione delle fasi ossidate del manganese, tengano conto anche di altri fattori ambientali, come la proliferazione fitoplanktonica, con i connessi movimenti di *upwelling* che avrebbero probabilmente messo Mn^{+2} in grado di precipitare in forma tri e tetravalente. I suddetti movimenti, infatti, oltre a far circolare le sostanze nutritizie necessarie alla vita degli organismi, avrebbero potuto anche causare l'afflusso, verso livelli più ossigenati, delle acque ricche in Mn^{+2}.

Ora, dal momento che si ammette una diminuzione dell'Eh (da 650 a 370 mV) (MARCHANDISE 1956) necessario alla precipitazione delle fasi ossidate del manganese, in rapporto ad un aumento del pH (da 6 a 9), si può pensare che il raggiungimento di tali condizioni moderatamente basiche potrebbe essere stato causato dalle cicliche esplosioni della flora a diatomee, che, mediante il processo fotosintetico, avrebbero causato, come è stato osservato anche in alcuni bacini lacustri, delle variazioni, ben nette e stagionalmente ripetute, in senso alcalino, del loro ambiente vitale (ALEKSIEV 1961; HEM 1963; ROUTHIER 1963).

Alla deposizione iniziale è però seguita una rielaborazione dei sedimenti manganesiferi e la formazione, in sede diagenetica, dei minerali che noi oggi ritroviamo. Non bisogna infatti dimenticare che al fondo del bacino, e quindi nei fanghi di recente precipitazione, vigevano condizioni euxiniche, tali da causare una nuova riduzione e rimessa in circolazione del manganese nelle acque interstiziali: tale processo era naturalmente in rapporto con i fenomeni di decadimento della materia organica che si accumulava ciclicamente in quantità notevoli.

Successivamente, con l'evolversi del bacino da euxinico ad evaporitico, potrebbe essersi verificato un arricchimento di ioni alcalini nelle acque interstiziali dei sedimenti ricchi in manganese, con conseguente innalzamento del pH, in corrispondenza di un parallelo

abbassamento del livello della superficie Eh = 0 al di sotto della interfaccia acqua-sedimento.

A questo punto si sarebbero ripresentate le condizioni fisico-chimiche ottimali per la precipitazione del manganese sotto forma ossidata; non escludiamo però che possa essersi verificata ancora una sua ulteriore mobilizzazione e concentrazione in corrispondenza della fase tettonica intramessiniana, successiva ad un primo periodo di sedimentazione evaporitica.

8. - Considerazioni di giacimentologia economica.

Volendo ora considerare il potenziale economico dei livelli manganesiferi di cui si è trattato nel presente lavoro, è difficile fare al momento una pur approssimata stima del tonnellaggio utile ricavabile, sia dall'affioramento di Serra d'Aiello che da altri la cui presenza è stata riconosciuta solo sporadicamente, anche al di sotto di coperture di terreno agrario, nelle zone in cui si segnalano analoghi sedimenti messiniani.

La percentuale in MnO si aggira su un valore medio del 34 %, con tenori in Mn variabili da un minimo del 20 % ad un massimo del 33 % (questo naturalmente vale per le zone superiori della serie, che sono anche le più mineralizzate). Questi tenori sarebbero da considerarsi in sé più che buoni, se solo la mineralizzazione potesse rivestire ampi caratteri di estensione e continuità, fattori all'accertamento dei quali può contribuire solo un'accurata rete di prospezioni minerarie.

Nel mese di dicembre del 1973 fu rilasciato alla Società Mineraria Monte Amiata un permesso di ricerca per il Mn della durata di due anni nel territorio dei comuni di Amantea, Cleto e Serra d'Aiello: tale permesso ci risulta oggi che sia prematuramente scaduto. La Monte Amiata non ha fatto inoltre richiesta per ottenere la concessione, pur avendo riscontrato tenori in metallo all'incirca coincidenti con quelli provenienti dalle nostre analisi.

Attualmente la quasi totalità della produzione di manganese in Italia (1973: 25.529 tonn.; 1974 genn.-ott.: 12.486 tonn.), viene dalle miniere di Gambatesa (Liguria) dove, oltre ad un certo quantitativo di minerale « compatto », con tenori in Mn dal 25 al 50 %, viene coltivata anche una zona di minerale « listato », in cui i tenori scendono al di sotto del 15 %.

L'arricchimento e la purificazione di questi materiali più poveri vengono effettuati in laveria con impianti *sink and float*, fino ad ottenere un prodotto mercantile al 28-30 %: è chiaro che, anche nel caso

di uno sfruttamento degli affioramenti da noi studiati, sarebbe necessaria la installazione di simili impianti per l'utilizzazione del minerale a più basso tenore e forse del terreno agrario arricchito in manganese.

Le brusche oscillazioni registrate dal mercato delle materie prime, di cui una prova eclatante è stata fornita dalla notevole ascesa dei prezzi dei metalli non ferrosi nella prima metà del 1974, a cui anche il manganese, seppure con punte meno acute ha risposto (a Milano il prezzo del manganese elettrolitico passa da 629 L./Kg in gennaio 1974 a L. 1.353/Kg in giugno), seguita dalla loro altrettanto brusca caduta nella seconda metà dell'anno e nei primi mesi del 1975, potrebbero essere un argomento abbastanza valido per proporre in Italia un piano di ricerca sistematico, tendente alla valorizzazione sia degli affioramenti manganesiferi già conosciuti, che di quelli di recente segnalazione come quelli messiniani di Serra d'Aiello. La loro scoperta, infatti, in una zona della Calabria settentrionale di abbastanza facile accesso, assume un'importanza tutta particolare in vista della progettata costruzione del centro siderurgico di Gioia Tauro, la cui attività dovrebbe naturalmente portare ad un ulteriore aumento delle già notevoli importazioni di minerale di manganese (282.057 tonn. metr. nel 1973; 176.446 tonn. metr. nel periodo gennaio-agosto 1974), soprattutto dal Gabon, Sudafrica, Brasile e Marocco.

BIBLIOGRAFIA

ALAIMO R., CALDERONE S., LEONE M., *Mineralogia e caratteri genetici degli ossidi di ferro e manganese nelle concrezioni del Flysch numidico siciliano.* Atti Acc. Sc. Lett. e Arti di Palermo, s. IV, vol. XXX, parte I (1970).

ALEKSIEV B., *Sedimentäre Manganerze des Oligozäns bei Varna (Bulgarien)*, Freib. Forsch., C, **79** (1960).

ALEXANDROV E. A., *Sedimentary cycle of manganese and its practical implications.* Program Annual Meetings, Denver 1961, Geol. Soc. Amer. Mem. 2 A (1961).

AMPILOGOV I. F., *Facies study on the fine-bedded ores of the Polunochnoe deposits and certain considerations on the rate of sedimentation of manganiferous sediments*, da « Manganese deposits of the Soviet Union », D. G. Sapozhnikov Editor, Ac. Sc. U.S.S.R., Inst. Geol. Ore Dep., Petr. Min. e Geoch., Israel Progr. Sc. Transl., Jerusalem (1970).

BAAS-BECKING L. G. M., KAPLAN I. R., MOORE D., *Limits of the natural environment in terms of pH and oxidaction-reduction potentials*, Journ. Geol., **68** (1964).

BANDY O., *Cycles in Neogene paleoceanography and eustatic changes*, Palent. Paleoecol. Paleogeogr., **5** (1968).

BERRY L. A., THOMPSON R. M., *X-ray powder data for ore minerals: The Peacock Atlas*, Geol. Soc. Amer. Mem., **85** (1962).

BONATTI E., FISHER D. E., JOENSUU O., RYDELL H. S., BEYTH M., *Iron Manganese deposit from the northern Afar Rift (Ethiopia)*, Econ. Geol., **67**, n. 6 (1972).

BORCHERT H., *On the ore deposition and geochemistry of manganese*, Min. Dep., **5** (1970).

BRONGERSMA-SANDERS M., *Mass mortality in the sea (Treatise on marine ecology and paleoecology; vol. I: Ecology)*, Geol. Soc. Amer. Mem., **67** (1957).

BURCKARDT C. E., FALINI F., *Memoria sui giacimenti italiani di Manganese*, Symposium sobre yacimientos de manganeso, XX Congreso Geologico Internacional, Tomo V: Europa, Mexico (1956).

BUSER W., GRUTTER A., *Über die Natur der Manganknollen*. Schweiz. Min. Petrogr. Mitt., **36** (1956).

DIETRICH D., SCANDONE P., *The position of the basic and ultrabasic rocks in the tectonic units of the Southern Apennines*. Atti Acc. Pont. Napoli, **21** n. s. (1972).

DI NOCERA S., ORTOLANI F., RUSSO M., TORRE M., *Successioni sedimentarie messiniane e limite Pliocene-Miocene nella Calabria settentrionale*, Boll. Soc. Geol. Ital., **93**, n. 3 (1974).

DI NOCERA S., NARDI G., ORTOLANI F., TORRE M., *Cineriti riolitiche nei depositi messiniani della Valle del Crati (Calabria settentrionale)*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4, **41** (1975).

ELDERFIELD H., *Effect of volcanism on water chemistry, Deception Island, Antartica*, Mar. Geol., **13**, n. 1 (1972).

FERGUSON J., LAMBERT I. B., *Volcanic exhalations and metal enrichments at Matupi Harbor, New Britain T.P.N.G.*, Econ. Geol., **67**, n. 1 (1972).

FISKE R. S., *Subaqueous pyroclastic flows in the Ohamapecosh Formation (Washington)*. Geol. Soc. Amer. Bull., **74**, n. 4 (1963).

FISKE R. S., MATSUDA T., *Submarine equivalents of ash flows in the Tokiwa Formation, Japan*, Am. Journ. Sc., **262** (1964).

GLASBY G. P., *The mineralogy of manganese nodules from a range of marine environments*, Mar. Geol., **13**, n. 1 (1972).

GRIM R. E., *Clay Mineralogy*, II Ed., Mc Graw Hill Book Company (1968).

GUERIN H., *Dispersion et concentration du manganese dans les roches volcaniques*, Min. Dep., **8**, n. 2 (1973).

HEM J. D., *Deposition and solution of manganese oxides*, Geol. Surv. Waters-supply, paper 1667 - B (1964).

HEWETT D. F., *Stratified deposits of the oxides and carbonates of manganese*, Econ. Geol., **61**, n. 3 (1966).

HULSELMANN T., EMERY K. O., *Stratification in recent sediments of Santa Barbara Basin as controlled by organism and water characteristics*, Journ. Geol., **69** (1961).

KOMUKLIJKE NEDERLANDSE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN, *Messinian Events in the Mediterranean*, Geodynamics Scientifics Report No. 7, on the Colloquium held in Utrecht, March 2-4, Ed. C. W. Drooger, Amsterdam (1973).

KRAUSKOPF K. B., *Separation of manganese from iron in sedimentary processes*, Geochim. et Cosmochim. Acta, **12** (1957).

MARCHANDISE H., *Contribution à l'étude des gisements de manganèse sédimentaires*, Symposium sobre yacimientos de manganeso, XX Congreso Geologico Internacional, Tomo I, Mexico (1956).

MORGAN J. J., STUMM W., *Colloid-chemical properties of manganese dioxide*, Journ. Coll. Sci., **67**, n. 6 (1964).

OGNIBEN L., *Relazioni fra tripoli della serie solfifera siciliana e vulcanismo*, Boll. Serv. Geol. d'Italia, **77**, n. 1 (1955).

PERRONE V., TORRE M., ZUPPETTA A., *Il Miocene della Catena Costiera calabra. Primo contributo: zona Diamante-Bonifati-Sant'Agata d'Esaro (Cosenza)*, Riv. Ital. Paleont., **79**, n. 2 (1973).

PRICE N. B., *Some geochemical observations on manganese-iron oxide nodules from different depth environments,* Mar. Geol., **5**, n. 5/6 (1967).

RAGUIN E., *Sur les gisements de manganèse sédimentaires,* Symposium sobre Yacimientos de manganeso, XX Congreso Geologico International, tomo I, Mexico (1956).

RAMDOHR P., *The ore minerals and their intergrowths,* Pergamon Press.

ROUTHIER P., *Les gisements metallifères,* Ed. Masson & Cie (1963).

SAPOZHNIKOV D. G., *Geological conditions for the formation of Manganese deposits,* da « Manganese deposits of the Soviet Union », D. G. Sapozhnikov Editor. Ac. Sc. U.S.S.R., Inst. Geol. Orc Dep. Petr. Min. e Geochem., Israel Progr. Sc. Trasl., Jerusalem (1970).

SKORNIAKOVA N. S., ANDRUSHCHENKO P. F., *Iron-Manganese concretions in the Pacific Ocean,* Int. Geol. Rev., **16**, n. 8 (1974).

SOKOLOVA E. I., *Physicochemical investigations of sedimentary iron and manganese ores and associated rocks (Oxidaction-Reduction and acid-alkaline properties of sedimentary ore complexes),* Ac. Sc. U.S.S.R., Lab. of Sedim. Ores. Israel Progr. Sc. Trasl., Jerusalem (1964).

STRAKOV N. M., *Types of manganese accumulation in present day basins: their significance in understanding of manganese mineralisation,* Int. Geol. Rev., **8**, n. (1966).

STURANI C., SAMPÒ M., *Il Messiniano inferiore in facies diatomitica nel bacino terziario piemontese,* Mem. Soc. Geol. Ital., vol. **12**, n. 3 (1973).

SUMMERHAYES C. P., WILLIS J. P., *Geochemistry of manganese deposits in relation to environment of the sea floor around southern Africa,* Mar. Geol., **18**, n. 3 (1975).

SUSLOV A. T., ANDRUSHCHENKO P. F., *New mineralogical and textural data of ores in Mn-deposits of the Sayan Mn-Ore-bearing,* da « Manganese deposits of the Soviet Union », D. G. Sapozhnikov Editor, Ac. Sc. U.S.S.R., Inst. Geol. Ore Dep. Petr. Min. e Geoch., Israel Progr. Sc. Trasl., Jerusalem (1970).

VARENTSOV I. M., *On the main aspects of formation of ferro-manganese ores in recent basins,* Int. Geol. Congr. 24ª session Montreal 1972, Section 4 Mineral Deposits (1972).

Alcune caratteristiche dell'azione della ribonucleasi BS-1 sugli ibridi DNA:RNA

Nota di ROBERTO GALLI *, MARTA PALMIERI *,
SALVATORE SORRENTINO * e MASSIMO LIBONATI *
presentata dal socio ordinario VINCENZO LEONE

(Adunanza del 21 giugno 1975)

RIASSUNTO. — Sono state studiate alcune caratteristiche dell'azione degradativa della ribonucleasi BS-1 su ibridi DNA:RNA.

1) È stata fornita la prova che l'azione enzimatica si esplica sulla catena poliribonucleotidica del substrato ibrido, rimanendo inalterata la catena polideossiribonucleotidica.

2) Il pH ottimo della reazione è circa 6,2, diverso dai valori di pH ottimale che caratterizzano l'azione della RNAasi BS-1 su RNA a catena singola (pH 7,8) e su RNA a doppia elica (pH 7).

3) Gli ioni rame e mercurio — nell'intervallo di concentrazioni saggiate —, preincubati col substrato ibrido, ne attivano la degradazione ad opera dell'enzima. Lo stesso avviene nel caso degli ioni magnesio e manganese, per i quali, tuttavia, si può notare anche una leggera azione inibitrice che incomincia alla concentrazione, relativamente elevata, di 30 mM. Questi dati sono stati brevemente discussi.

SUMMARY. — Some characteristics of the action of ribonuclease BS-1 towards DNA:RNA hybrids have been studied.

1) Evidence has been obtained that the enzymic action occurs only on the RNA moiety of the hybrid structure, the DNA strand remaining intact.

2) the pH optimum of the reaction is around 6.2. This value is different from pH optima determined in the case of degradation of single-stranded (pH 7.8) and double-stranded RNA's (pH 7.0) by RNAase BS-1.

3) Cupper and Mercury ions (in the concentration range assayed), pre-incubated with the hybrid substrate, behave as activators of RNAase BS-1. The same occurs in the case of Magnesium and Manganese ions, which however also show a slightly inhibitory action at a final concentration of 30 mM. These data have been briefly discussed.

La ribonucleasi BS-1, una proteina dimerica [1] isolata e purificata da plasma seminale bovino [2, 3], è per diversi aspetti simile alla ribonucleasi pancreatica (stretta omologia, per es., nella sequenza

* Ist. di Chimica Organica e Biologica, Facoltà di Sienze, Via Mezzocannone 16, Napoli.

degli aminoacidi [4], caratteri di specificità nei riguardi di substrati quali RNA da lievito e nucleotidi ciclici), distinguendosene, tuttavia, non solo per la struttura dimerica e quindi per il peso molecolare [2], ma anche per diverse caratteristiche funzionali. Essa, infatti, degrada attivamente — a differenza della RNAasi pancreatica — acido ribonucleico a doppia elica [5] e ibridi DNA:RNA [6], nonché acido poliadenilico [5, 3], ha una netta azione antispermatogenetica [7, 8] e, infine, un effetto degenerativo su cellule trasformate [9].

Lo studio di tale enzima appare, quindi, particolarmente interessante, non soltanto dal punto di vista enzimologico, ma anche e soprattutto per i suoi eventuali significati e ruoli fisiologici.

Qui vogliamo riferire alcuni caratteri della già nota azione, che l'enzima manifesta su ibridi DNA:RNA.

Materiali.

DNA da timo bovino, RNAasi A e Deossiribonucleasi pancreatica purificata per elettroforesi sono stati forniti dalla Worthington; ribonucleoside-trifosfati e RNA polimerasi DNA-dipendente di *E. coli* dalla Sigma Chem. Co. [^{3}H] UTP (att. sp. 36 C/mmole) è stato fornito dalla NEN Chemicals GmbH; [^{14}C] timidina (att. sp. 62 mC/mmole) dal Radiochemical Centre, Amersham. Un inoculo di *E. coli* K12 ci è stato fornito dal prof. M. Iaccarino, dell'Istituto Internazionale di Genetica e Biofisica di Napoli, che ringraziamo vivamente. La ribonucleasi BS-1 è stata purificata e caratterizzata dal Dr. R. De Prisco [2, 10], cui va la nostra viva gratitudine.

Parte sperimentale.

1. *Preparazione di DNA marcato con* ^{14}C.

A cellule di *E. coli* K12 sviluppantisi in un terreno liquido al triptone è stato aggiunto (quando l'assorbanza della cultura a 590 nm era pari a circa 0,1) un miscuglio contenente 50 μC di [^{14}C] timidina e timidina non radioattiva, in quantità tale che la concentrazione finale del precursore fosse di 10 μg/ml. Quando l'assorbanza della cultura ha raggiunto il valore di 1,25 a 590 nm, le cellule sono state raccolte per centrifugazione (9.000 g.p.m., 2°C) e poi conservate a − 30°C fino al momento dell'uso. La metodica di purificazione del DNA è stata già descritta altrove [11] e si basa essenzialmente su quella di Marmur [12], modificata da Berns e Thomas [13]. La preparazione finale di

DNA, disciolta in 0,1 × SSC (SSC standard: sodio cloruro, 0,15 M, sodio citrato, 0,015 M, pH 7) aveva un'attività specifica di circa 1.800 c.p.m./μg. La concentrazione di DNA in soluzione era pari a 466 μg/ml.

2. *Preparazione degli ibridi DNA:RNA.*

A) Ibridi marcati solo nella catena poliribonucleotidica.

Il procedimento usato è il seguente: il miscuglio di reazione (1 ml) comprendeva: 200 μmoli di tampone Tris-HCl, pH 7,9; 150 μmoli di NH_4Cl; 4 μmoli di $MgCl_2$; 1 μmole di $MnCl_2$; 12 μmoli di β-mercaptoetanolo; 1,1 μmoli di ATP, CTP e GTP; 0,068 μmoli di UTP e 0,15 nmoli di 5,6 [^{3}H] UTP; 120 μg di DNA da timo bovino, denaturato al calore [6]; 4 unità di RNA polimerasi. La incubazione è stata protratta per 30 min. a 37 °C. Il procedere della reazione è stato controllato precipitando (a 0 °C) aliquote del miscuglio d'incubazione con acido tricloroacetico (conc. finale, 6 %) e filtrando il precipitato attraverso membrane « Millipore » (Millipore Filter Co., tipo HAWP00010), secondo una metodica già descritta [5, 6]. A 15 e a 30 min. 110.000 e, rispettivamente, 203.000 c.p.m./ml risultavano incorporati in un prodotto acido-insolubile. Alla fine della incubazione, il miscuglio di reazione, al quale è stato aggiunto sodio dodecil solfato per denaturare l'enzima, è stato applicato su una colonna (1 × 80 cm) di Sephadex G-200, usando SSC quale eluente. Le frazioni escluse, localizzate determinando i valori di radioattività acido-insolubile [5, 6], sono state mescolate e il prodotto è stato caratterizzato quale un ibrido DNA:RNA sulla base della sua resistenza alla digestione con RNAasi in SSC, e, viceversa, per la sua completa degradabilità ad opera della RNAasi A (*a*) in condizioni di bassa forza ionica (SSC diluito 40 volte), (*b*) dopo denaturazione termica [6] e, infine, (*c*) previa digestione con DNAasi pancreatica (6; e ved. anche esperimento con RNAasi A della Tab. I).

B) Ibridi marcati nella catena polideossiribonucleotidica oltre che in quella poliribonucleotidica.

Il procedimento seguito è stato identico a quello prima descritto, con la differenza che al posto di DNA non radioattivo sono stati inclusi nel miscuglio di reazione 120 μg di DNA di *E. coli*, marcato con ^{14}C e preparato secondo il metodo descritto precedentemente. Tale DNA è stato, naturalmente, anch'esso denaturato al calore [6]. Da notare che la incorporazione di UMP radioattivo è stata in questo

caso notevolmente superiore, presumibilmente per una maggiore efficienza del DNA omologo quale stampo per la RNA polimerasi di *E. coli*.

3. *RNA a doppia e a singola elica*, marcati con ^{3}H, sono stati preparati secondo il procedimento già descritto altrove [5].

RISULTATI E DISCUSSIONE.

Dimostrazione che l'azione enzimatica si esplica sulla catena poliribonucleotidica degli ibridi DNA:RNA.

Gli ibridi DNA:RNA sono resistenti all'azione della ribonucleasi pancreatica in condizioni di forza ionica tali da preservare l'integrità della struttura secondaria degli acidi nucleici [14, 15, 16]. Essi sono attivamente degradati, invece, da un enzima specifico, la ribonucleasi H, isolato alcuni anni fa da HAUSEN e STEIN [15], mentre l'azione

TABELLA 1

Azione della ribonucleasi BS-1 *sull'ibrido* [^{14}C]-DNA:[^{3}H]-RNA.

Condizioni	^{14}C c.p.m.	^{3}H c.p.m.	^{3}H %
Controllo (senza enzima)	740	17.659	100
+ RNAasi BS-1, 10 μg, 7 min. a 25°C	742	10.118	57,2
+ RNAasi BS-1, 10 μg, 15 min. a 25°C	752	7.355	41,6
+ RNAasi A, 10 μg, 7 min. a 25°C	811	17.315	98,0
+ RNAasi A, 10 μg, 15 min. a 25°C	724	15.726	89,0

In 1 ml di SSC (ved. testo) erano contenuti l'ibrido DNA:RNA e RNAasi BS-1 oppure RNAasi A, nelle concentrazioni e per i tempi indicati. I valori presentati sono ognuno la media di dati ottenuti in duplicato. La radioattività acido-insolubile, misura dell'attività enzimatica, è stata determinata come descritto in Fig. 1.

della ribonucleasi III su tali strutture, sostenuta dapprima [17], è stata recentemente negata [18].

Come già detto, l'unico enzima caratterizzato — oltre alla RNAasi H — a tutt'oggi capace di degradare gli ibridi DNA:RNA è la ribonucleasi BS-1 [6]. Mancava sinora, tuttavia, la prova diretta che nel

processo di degradazione la catena di DNA della struttura ibrida rimanesse inalterata.

La Tabella I mostra i risultati dell'incubazione dell'ibrido DNA:RNA (marcato in entrambe le catene) con RNAasi BS-1. Come si vede, mentre la radioattività (^{3}H) contenuta nella catena poliribonucleotidica diminuisce in funzione del tempo d'incubazione, quella [^{14}C] presente nella catena di DNA rimane immutata, con qualche oscillazione intorno a un valore che può ritenersi pressoché costante. Nell'esperienza è stato incluso anche un controllo con ribonucleasi pancreatica.

I risultati di questo esperimento, ch'è uno dei diversi effettuati, dimostrano che la RNAasi BS1 degrada la porzione poliribonucleotidica degli ibridi DNA:RNA lasciando integra la porzione polideossiribonucleotidica; il che, « a posteriori », naturalmente non sorprende visti i caratteri di specificità dell'enzima [3].

Effetto del pH.

L'azione della ribonucleasi seminale sull'ibrido DNA:RNA manifesta una dipendenza dal pH del mezzo diversa da quella che caratterizza l'azione dell'enzima su RNA a singola [3] e a doppia elica [5], i cui ottimi di pH sono 7,8 e 7,0, rispettivamente. Nel caso del substrato ibrido il pH ottimo è, come si vede, intorno a 6,2 (fig. 1). Il significato dello spostamento del pH ottimale da valori leggermente alcalini (nel caso dell'RNA a singola elica) verso la neutralità (nel caso dell'RNA a doppia elica) e addirittura verso valori leggermente acidi (nel caso dell'ibrido DNA-RNA) non è a tutt'oggi facilmente interpretabile.

Effetto di alcuni ioni sulla reazione.

Si sa che alcuni ioni metallici hanno affinità relative diverse per le basi presenti nel DNA [19]. Gli ioni rame e mercurio, per es., si legano fortemente alla Guanina e, rispettivamente, alla Timina [20, 21, 22, 23]. Sulla base di questi fatti, Clark e Eichhorn hanno recentemente raccolto dati sperimentali a sostegno dell'ipotesi che tali ioni metallici possano selettivamente mutare la suscettibilità dei legami fosfodiesterei del DNA all'azione nucleasica [24] grazie alla loro affinità per le basi adiacenti al legame che dovrebbe essere scisso. I loro esperimenti, effettuati appunto con ioni rame e mercurio, hanno dimostrato che tali metalli determinano modificazioni drammatiche nella specificità della deossiribonucleasi pancretica, tali modificazioni essendo, inoltre, molto diverse se indotte dal rame o, viceversa, dal

mercurio; non solo, ma che le differenze nei mutamenti di specificità sono prevedibili sulla base dell'affinità dei singoli ioni metallici per le basi del DNA, il rame legandosi — come già detto — alla Guanina, il mercurio alla Timina.

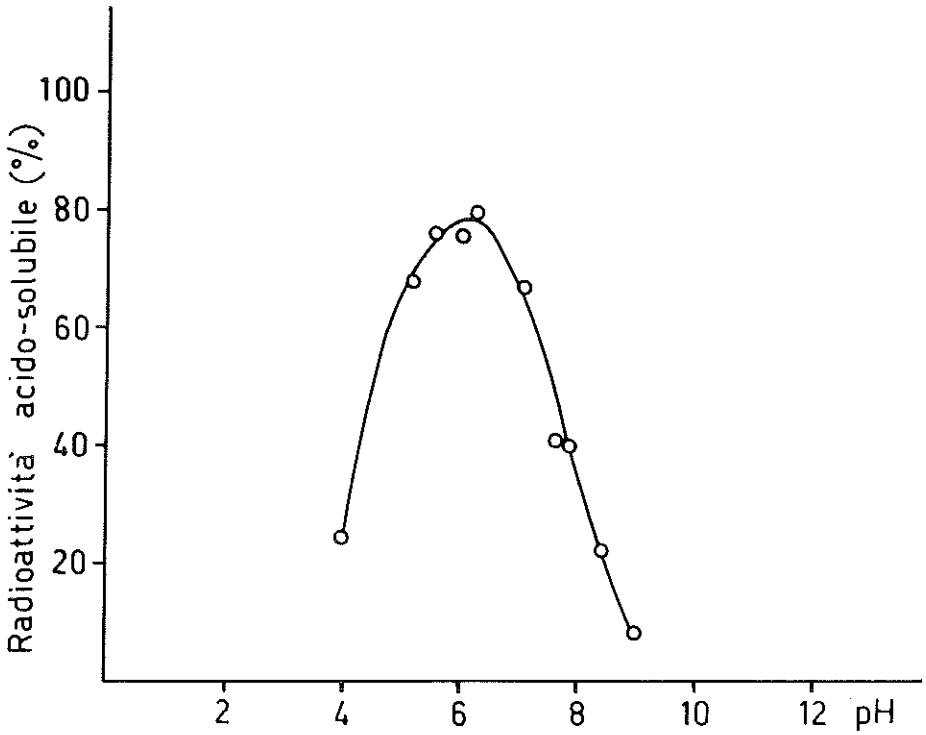


FIG. 1. - Effetto del pH sulla degradazione dell'ibrido DNA:RNA ad opera della RNAasi BS-1.
In 1 ml di miscuglio di reazione erano contenuti l'ibrido DNA:RNA (1.220 c.p.m.) e 5 μg di RNAasi BS-1. Dopo 15 min. a 25°C ai campioni trasferiti in bagno di ghiaccio è stato aggiunto CCl_3COOH (conc. finale, 6 %) e i precipitati sono stati filtrati attraverso membrane Millipore e ripetutamente lavati con CCl_3COOH 6 % freddo. La radioattività acido-insolubile, rimasta sui filtri, è stata determinata in uno spettrometro a scintillazione liquida Beckman LS-133, come già descritto [5, 6]. Ogni punto sperimentale rappresenta valori ottenuti in duplicato. In ogni caso il tampone usato conteneva 0,15 moli di cloruro di sodio, 0,015 moli di citrato di sodio e 0,04 moli di Tris-base. I valori di pH desiderati sono stati ottenuti mediante agigunta di HCl 1 M. L'attività enzimatica è stata espressa in termini di radioattività resa acido-solubile.

Sulla traccia di tali ricerche, abbiamo voluto vedere, per ora in modo molto preliminare, quale effetto gli ioni Cu^{++}, Hg^{++}, Mg^{++}, e Mn^{++} producano sul processo della degradazione dell'ibrido DNA:RNA ad opera della ribonucleasi BS-1. Infatti, l'azione dell'enzima su tale substrato potrebbe anch'essa essere spiegata con l'ipotesi, già avan-

zata [25, 26], che strutture secondarie di RNA siano degradabili soltanto da parte di ribonucleasi aventi du siti attivi per molecola, quali, per es., la RNAasi BS-1 e dimeri artificiali di RNAasi pancreatica. Nel caso dell'ibrido DNA:RNA uno dei due siti della RNAasi BS-1 potrebbe fungere da sito di legame per la catena di DNA, l'altro agendo,

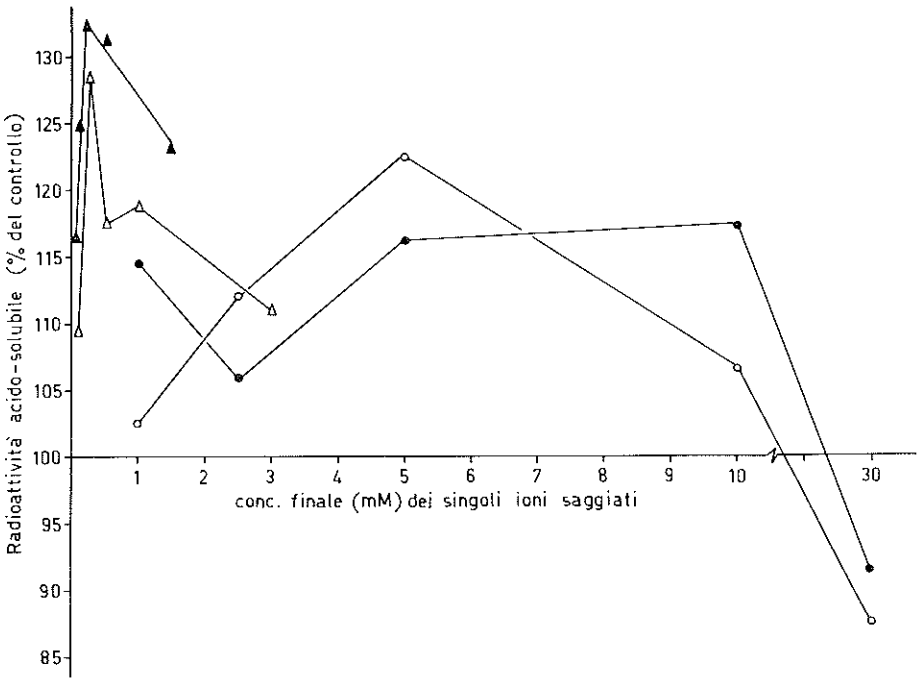


FIG. 2. - Effetto di diversi ioni sulla degradazione dell'ibrido DNA:RNA ad opera della RNAasi BS-1.
Nel volume finale di 1 ml di SSC (ved. testo) l'ibrido DNA:RNA (1.000 c.p.m.) è rimasto in contatto con $MgCl_2$ o $MnCl_2$ o $CuSO_4$ o, infine, $HgCl_2$ (le cui concentrazioni finali sono indicate sulle ascisse) per 3 min. a 0°C. Sono quindi stati aggiunti 5 μg di RNAasi BS-1 e i miscugli di reazione sono stati tenuti a 25°C per 15 min. Allo scadere del tempo ai campioni è stato applicato il procedimento descritto in Fig. 1. Ogni punto sperimentale è stato effettuato in duplicato. L'attività enzimatica determinata in presenza dei singoli ioni è stata espressa in per cento di quella del controllo (senza ioni) fatta uguale a 100. O——O, Mg^{++}; ●——●, Mn^{++}; △——△, Cu^{++}; ▲——▲, Hg^{++}.

invece, cataliticamente sulla catena di RNA. Di conseguenza, vista l'affinità degli ioni Cu^{++} e Hg^{++} per le basi Guanina e Timina, non sarebbe inverosimile la possibilità di un qualche effetto di tali ioni sull'azione enzimatica della RNAasi BS-1 sul substrato ibrido.

Per quanto riguarda gli ioni Mg^{++} e Mn^{++}, legandosi essi prevalentemente ai fosfati dell'acido nucleico, l'effetto eventuale potrebbe invece avere diversa origine. I risultati di esperimenti effettuati pre-

incubando gli ioni col substrato ibrido e poi aggiungendo l'enzima, compaiono nella fig. 2: come si vede, Hg^{++} e Cu^{++} risultano attivatori dell'azione enzimatica sull'ibrido DNA:RNA, con un massimo di effetto intorno alla concentrazione di 0,25 mM. Lo stesso effetto attivatore può notarsi nel caso degli ioni Mg^{++} e Mn^{++} (con massimi, per il Mg^{++} intorno a 5 mM e per il Mn^{++} fra 5 e 10 mM), salvo che alla concentrazione — relativamente elevata — di 30 mM, alla quale verosimilmente incomincia un effetto inibitore.

Differenti risultati sono stati ottenuti pre-incubando gli stessi ioni, da una parte con RNA virale a doppia elica, dall'altra con RNA a catena singola e assogettando, poi, i due acidi nucleici all'azione della ribonucleasi BS-1 (Esperimenti non pubblicati). Infatti, con RNA a doppia elica quale substrato si sono osservati (*a*) un'azione difasica (leggera inibizione a basse, leggera attivazione ad elevate concentrazioni di ioni) nel caso di Mn^{++} e Mg^{++}; (*b*) un'attivazione (modesta, ma crescente con l'aumentare della concentrazione dello ione) nel caso di Cu^{++}; (*c*) un effetto costantemente inibitore (e progressivo col crescere della concentrazione dello ione) nel caso di Hg^{++}. Con RNA a catena singola quale substrato, s'è osservato costantemente, invece, un effetto inibitore. A questo proposito può essere interessante sottolineare che quest'ultimo dato è in accordo col fatto che gli ioni qui saggiati svolgono generalmente azione inibitrice sulla RNAasi A [27] e anche su altre ribonucleasi note (T_1, N_1, U_2 ecc.; [28]), tutte specifiche per RNA a elica singola.

I nostri esperimenti con RNA a singola e a doppia elica, tuttavia, non possono essere paragonati né fra loro né coll'esperienza precedente effettuata usando l'brido DNA:RNA quale substrato, poiché le concentrazioni reciproche di substrato ed enzima sono state necessariamente in ogni caso molto diverse. Inoltre, per quanto gli ioni siano stati pre-incubati con i substrati, dev'essere tenuto presente un loro eventuale effetto sulla proteina enzimatica.

Nel complesso, pertanto, i dati qui presentati non consentono, per ora, alcuna conclusione sicura, se non quella che l'argomento merita di essere seriamente opprofondito.

BIBLIOGRAFIA

[1] D'Alessio G., Parente A., Guida C. e Leone E., FEBS Lett., **27**, 285 (1972).
[2] D'Alessio G., Floridi A., De Prisco R., Pignero A. e Leone E., Eur. J. Biochem., **26**, 153 (1972).
[3] Floridi A., D'Alessio G. e Leone E., Eur. J. Biochem., **26**, 162 (1972).
[4] Suzuki H., Greco L., Parente A., Farina B., La Montagna R. e Leone E., Acta Vitamin. Enzymol. **26**, 213 (1972).
[5] Libonati M. e Floridi A., Eur. J. Biochem., **8**, 81 (1969).

[6] TANIGUCHI T. e LIBONATI M., Biochem. Biophys. Res. Commun., **58**, 280 (1974).
[7] DOSTÁL J. e MATOUŠEK J., J. Reprod. Fert., **31**, 273 (1972).
[8] LEONE S., GRECO L., RASTOGI R. K. e IELA L., J. Reprod. Fert., **34**, 197 (1973).
[9] MATOUŠEK J., Experientia, **29**, 858 (1973).
[10] FLORIDI A. e DE PRISCO R., It. J. Biochem., **22**, 1 (1973).
[11] HABICH A., WEISSMANN C., LIBONATI M. e WARNER R. C., J. Mol. Biol., **21**, 255 (1966).
[12] MARMUR J., J. Mol. Biol., **3**, 208 (1961).
[13] BERNS K. I. e THOMAS C. A. JR., J. Mol. Biol., **11**, 476 (1965).
[14] WARNER R. C., SAMUELS H. H., ABBOT M. T. e KRAKOW J. S., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., **49**, 553 (1963).
[15] HAUSEN P. e STEIN H., Eur. J. Biochem., **14**, 278 (1970).
[16] WYERS F., SENTENAC A. e FROMAGEOT P., Eur. J. Biochem., **35**, 270 (1973).
[17] ROBERTSON H. D., WEBSTER R. E. e ZINDER N. D., J. Biol. Chem., **243**, 82 (1968).
[18] CROUCH R., J. Biol. Chem., **249**, 1314 (1974).
[19] EICHHORN G. L., « Inorganic Biochemistry », Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, pp. 1191-1209 (1973).
[20] FISKIN M. e BEER M., Biochemistry, **4**, 1289 (1965).
[21] FRIEDEN E. e ALLES J., J. Biol. Chem., **230**, 797 (1958).
[22] KATZ S., Biochim. Biophys. Acta, **68**, 240 (1963).
[23] FERREIRA R., BEN-ZVI E., YAMANE T., VASILEVSKIS J. e DAVIDSON N., in « Advances in the Chemistry of the Coordination Compounds », Kirschner S. ed., Macmillan, New York, p. 457 (1961).
[24] CLARK P. e EICHHORN G. L., Biochemistry, **13**, 5098 (1974).
[25] D'ALESSIO G., ZOFRA S. e LIBONATI M., FEBS Lett., **24**, 355 (1972).
[26] D'ALESSIO G., DOSKOČIL J. e LIBONATI M., Biochem. J., **141**, 317 (1974).
[27] RICHARDS F. M. e WYCKOFF H. W., in « The Enzymes », Boyer P. D. Ed., Vol. IV, 3ª ediz., Academic Press, New York e Londra, p. 647 (1971).
[28] UCHIDA T. e EGAMI F., ibidem, p. 205 (1971).

Qualche criterio di esistenza e perturbazioni di disequazioni quasi variazionali *

Nota di LUCIANO CARBONE
presentata dal socio corrispondente GUIDO STAMPACCHIA

(Adunanza del 21 giugno 1975)

SOMMARIO. — Dimostriamo alcuni criteri di esistenza relativi a disequazioni quasi variazionali e stabiliamo alcuni risultati relativi a perturbazioni di dette disequazioni.

SUMMARY. — We prove some existence theorems for quasi variational inequalities and some results about perturbations of such inequalities.

INTRODUZIONE.

L'interesse delle disequazioni quasi variazionali è stato posto in luce da recenti lavori di BAIOCCHI [1], BENSOUSSAN - LIONS [2], [3], [4], JOLY [6], TARTAR [8].

In questa nota ci proponiamo di generalizzare alcuni criteri esistenziali relativamente a classi di operatori più ampie rispetto a quelle esaminate in [8] e [6], eliminando tra l'altro l'ipotesi di stretta monotonia. La tecnica è sostanzialmente di natura topologica; il tipo di ipotesi sulle distribuzioni di convessi rientra perciò nell'ambito di quelle esaminate in [6] piuttosto che di quelle esaminate in [8] ove gli strumenti tecnici si basano sulla nozione di ordine (n. 1, 2).

Nel n. 3 forniamo qualche esempio di applicazione.

Nel n. 4 studiamo perturbazioni di dette disequazioni relativamente ad operatori e distribuzioni di convessi.

NOTAZIONI E RICHIAMI.

Sia X uno spazio di Banach riflessivo sui reali; denoteremo con X' il suo duale topologico con $(\cdot , \cdot)$ l'accoppiamento tra X e X'.

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

Ricordiamo il seguente teorema di punto fisso dovuto a GLICKSBERG [5]:

se Z *è uno spazio topologico vettoriale,* T *è un'applicazione del chiuso convesso compatto* K *di* Z *nell'insieme dei convessi chiusi di* K *non vuoti, chiusa, cioè*

$$x_\alpha \to x\,, \qquad y_\alpha \to y\,, \qquad y_\alpha \in \mathrm{T}(x_\alpha) \Rightarrow y \in \mathrm{T}(x)$$

allora essa ammette almeno un punto fisso cioè un punto w *tale che* $w \in \mathrm{T}(w)$.

Sia K un convesso chiuso non vuoto, indichiamo con Q^{K} la famiglia dei chiusi convessi non vuoti contenuti in K.

Diremo che un'applicazione M dall'insieme $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{X}$ in Q^{K} è compatta quando

a) $u_\alpha \rightharpoonup u \Rightarrow \forall v \in \mathrm{M}(u)\ \exists\ \{v_\alpha\}\ :\ v_\alpha \in \mathrm{M}(u_\alpha) \qquad v_\alpha \to v$

b) $u_\alpha \rightharpoonup u\,,\ v_\alpha \rightharpoonup v\,,\ v_\alpha \in \mathrm{M}(u_\alpha) \Rightarrow v \in \mathrm{M}(u)\,.$

1. - THEOREMA 1.1. *Sia* $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ *continuo e monotono, (risp. emicontinuo, limitato e monotono); sia* K *un convesso chiuso e limitato di* X; *sia* M *un'applicazione compatta da* K *nell'insieme dei chiusi convessi di* K, *allora la disequazione quasi variazionale*:

$$u \in \mathrm{M}(u) : (\mathrm{A}u,\ v-u) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathrm{M}(u) \tag{1.0}$$

ammette soluzioni.

Dim. Poiché per ogni $v \in \mathrm{K}$, $\mathrm{M}(v)$ è chiuso convesso e limitato la disequazione variazionale

$$u \in \mathrm{M}(v) : (\mathrm{A}u,\ z-u) \geq 0 \qquad \forall z \in \mathrm{M}(v)$$

ammette soluzioni e l'insieme delle soluzioni risulta chiuso convesso e ovviamente contenuto in K. Detto tale insieme $\mathrm{C}(v)$ consideriamo l'applicazione T così definita

$$\mathrm{T} : v \in \mathrm{K} \to \mathrm{C}(v) \subseteq \mathrm{M}(v) \subseteq \mathrm{K}\,.$$

Essa è convessa. Dimostriamo che è chiusa nella topologia debole. Siano a tal fine $\{x_\alpha\}$ e $\{y_\alpha\}$ due successioni generalizzate tali che

$$x_\alpha \rightharpoonup x\,, \qquad y_\alpha \in \mathrm{T}(x_\alpha) \qquad\qquad y_\alpha \rightharpoonup y\ ;$$

poiché $y_\alpha \in T(x_\alpha)$ si ha

$$\forall v \in M(x_\alpha) \qquad (Ay_\alpha\,,\ v-y_\alpha) \geq 0\,.$$

Poiché $x_\alpha \rightharpoonup x$ per ogni v appartenente a $M(x)$ esiste una successione generalizzata $\{v_\alpha\}$ tale da convergere fortemente a v e tale che v_α appartiene a $M(x_\alpha)$ sicché tenendo conto del lemma di linearizzazione

$$(Av_\alpha\,,\ v_\alpha-y_\alpha) \geq 0\,. \tag{1.1}$$

D'altro canto se A è continuo

$$\lim\ (Av_\alpha\,,\ v_\alpha-y_\alpha) = (Av,\ v-y) \geq 0 \qquad \forall v \in M(x) \tag{1.2}$$

in quanto $v_\alpha \to v$, $y_\alpha \rightharpoonup y$ e

$$\lim |(Av_\alpha\,,\ v_\alpha-y_\alpha) - (Av\,,\ v-y)| \leq$$

$$\leq \lim |(Av_\alpha-Av\,,\ v_\alpha-y_\alpha)| + \lim\ |(Av\,,\ v_\alpha-y_\alpha-v+y)| \leq$$

$$\leq \lim \|Av_\alpha-Av\|\ \|v_\alpha-y_\alpha\| = 0\,.$$

Se A è limitato ed emicontinuo

$$(Av\,,\ v-y) \geq 0 \qquad \forall v \in M(x) \tag{1.2'}$$

in quanto allora

$$\lim\,(Ay_\alpha\,,\ v-y_\alpha) + (Ay_\alpha\,,\ y_\alpha-v_\alpha) = 0$$

e poiché

$$(Ay_\alpha\,,\ v-y_\alpha) \leq (Av\,,\ v-y_\alpha)$$

si ha

$$\limsup\,(Av\,,\ v-y_\alpha) + (Ay_\alpha\,,\ y_\alpha-v_\alpha) \geq 0$$

cioè

$$(Av\,,\ v-y) \geq -\limsup\,(Ay_\alpha\,,\ y_\alpha-v_\alpha) \geq 0\,.$$

Dalla (1.2) e (1.2') per il lemma di Minty segue

$$(Ay\,,\ v-y) \geq 0 \qquad \forall v \in M(x)\,.$$

Poiché $y \in M(x)$ per ipotesi di compattezza, si ha $y \in T(x)$ e dunque T è chiusa, applicando il teorema di Glicksberg si ricava l'esistenza di un punto fisso per T. Detto w un tale punto fisso ovviamente si ha

$$w \in M(w) \qquad (Aw,\ v-w) \geq 0 \qquad \forall v \in M(w)\,.$$

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia* $A : X \to X'$ *monotono continuo, coercivo (rispet. emicontinuo, limitato monotono e coercivo); sia* K *un convesso chiuso di* X *contenente* 0, *sia* M *un'applicazione compatta da* K *nella famiglia dei chiusi convessi di* K *contenente lo* 0. *Allora la disequazione quasi variazionale*

$$u \in M(u) : (Au,\ v-u) \geq 0 \qquad \forall v \in M(u)$$

ammette soluzioni.

Dim. Poiché per ogni $v \in K$, $M(v)$ è chiuso e convesso ed A è anche coercivo la disequazione variazionale

$$u \in M(v) \qquad (Au,\ z-u) \geq 0 \qquad \forall z \in M(v)$$

ammette soluzioni, anzi l'insieme delle soluzioni è ancora chiuso e convesso, uniformemente limitato rispetto a v e coincide con l'insieme delle soluzioni di

$$u \in M(v) \cap S(0, R) : (Au,\ z-u) \geq 0 \qquad \forall z \in M(v)\ [1]\,.$$

Possiamo ora costruire l'applicazione T dell'insieme $K \cap S(0, R)$ nei chiusi convessi non vuoti in esso contenuti come nel teorema 1.1. Analogamente si prova che essa è chiusa e dunque ammette per il teorema di Glicksberg un punto fisso che risolve la disequazione quasi variazionale.

OSSERVAZIONE 1.1. Ovviamente l'ipotesi che tutti i convessi immagini di elementi di K tramite M abbiano lo 0 in comune può essere trasformata nell'ipotesi che tutti i convessi immagini tramite M di elementi di K abbiano un punto in comune v_0.

Qualora infine sia X uno spazio di Hilbert e A l'operatore associato a una forma bilineare coerciva e continua da X in X l'ipotesi precedente può essere sostituita dalla condizione che $\forall\, v \in K$ esista

[1] Per R opportuno.

un $w(v) \in M(v)$ tale che $\| w(v) \| \leq R$. Infatti in tal caso si ha la ovvia maggiorazione a priori

$$\alpha \| u \|_X \leq k \| w(v) \|$$

ove α e k sono le costanti di coercività e di continuità.

2. - La disequazione quasi variazionale

$$u \in M(u) : (Au, v-u) \geq 0 \qquad \forall v \in M(u)$$

si può porre sotto la forma

$$u \in K \qquad (Au, v-u) + \delta_{M(u)}(v) - \delta_{M(u)}(u) \geq 0$$

ove $\delta_{M(u)}$ è la funzione indicatrice del convesso $M(u)$.

Più generalmente consideriamo la disequazione variazionale

$$u \in K \qquad (Au, v-u) + f(u, v) - f(u, u) \geq 0 \qquad \forall v \in K$$

ove f è semicontinua inferiormente e convessa nella seconda variabile. Nel seguito riterremo tale ipotesi sempre soddisfatta.

Diremo che $f(u, v)$ è compatta nella prima variabile quando

a) epi $f(u, \cdot) \neq \emptyset$

b) $u_\alpha \rightharpoonup u \Rightarrow \forall v \in X \cdot \exists \{v_\alpha\} \subseteq X : v_\alpha \to v$ e

lim sup $f(u_\alpha, v_\alpha) \leq f(u, v)$

c) $u_\alpha \rightharpoonup u, v_\alpha \rightharpoonup v \Rightarrow$ lim inf $f(u_\alpha, v_\alpha) \geq f(v)$

Per esprimere tale definizione in maniera più significativa introduciamo una nozione di limite superiore forte e limite superiore debole di insiemi convessi generalizzando lievemente al caso di parametri non interi; definizioni di Mosco [7].

Diremo che $K = s - \limsup K_\alpha$ se $\forall x \in K$ esiste una successione $\{x_\alpha\}$ $x_\alpha \in K_\alpha : \lim x_\alpha = x$

diremo che $K = w - \limsup K$ se $\forall x \in K$ esiste una successione $\{x_\alpha\}$ tale che $x_\alpha \in K_\alpha$ e $x_\alpha \rightharpoonup x$.

Diremo che $K = \lim K_\alpha$ se

$$K = s - \lim \sup K_\alpha = w - \lim \sup K_\alpha .$$

È ovvio che affinché ciò si verifichi è necessario e sufficiente che se $x_\alpha \in K_\alpha$ $x_\alpha \rightharpoonup x$ allora $x \in K$ e se $x \in K$ esiste $\{x_\alpha\} : x_\alpha \in K_\alpha$ e $x_\alpha \to x$.

Ciò premesso, si ha subito che [2]:

$$(f \text{ compatta}) \Leftrightarrow (u_\alpha \rightharpoonup u \Rightarrow \text{epi } f(u, \cdot) = \lim \text{epi } f(u_\alpha, \cdot))$$

$$\Leftrightarrow (M : u \to \text{epi } f(u, \cdot) \text{ è compatta}).$$

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia* $f(x, y)$ *una funzione da* X^2 *in* $(-\infty, +\infty)]$ *compatta, sia* A *un operatore emicontinuo, monotono e limitato (risp. continuo e monotono).*

Infine sia $(f(y, o) = 0$ e

$$(Av, v) + f(v, v) > 0 \qquad \forall v : \| v \| > R_o$$

Allora la disequazione

$$(2.1) \qquad u \in X : (Au, v - u) + f(u, v) - f(u, u) \geq 0$$

ammette soluzioni.

Dim. Introduciamo lo spazio $\tilde{X} = X \oplus \mathbb{R}$ e scegliamo come accoppiamento tra $\tilde{X}$ e $\tilde{X}'$ che è isomorfo a $X' \oplus \mathbb{R}$

$$([v, \beta], [v', \beta'])_{\tilde{X}} = (v', v)_{\tilde{X}} + \beta' \cdot \beta$$

Denotiamo con $\tilde{A}$ l'operatore definito da

$$\tilde{A}([v, \beta]) = Av \oplus \beta$$

$\tilde{A}$ risulta monotono, limitato emicontinuo (risp. monotono e continuo) ed il problema (2.1) risulta equivalente al problema

$$\tilde{u} \in \tilde{M}(\tilde{u}) : (\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq 0 \qquad \forall \tilde{v} \in \tilde{M}(\tilde{u})$$

ove

$$\tilde{M}(\tilde{u}) = \tilde{M}([u, \beta]) = \text{epi } f(u, \cdot)$$

[2] Ovviamente con epi $f(x, \cdot)$ intendiamo l'epigrafico della funzione convessa semicontinua inferiormente $f(x, \cdot)$. Tale insieme è chiuso e convesso in $X \times \mathbb{R}$ munito della topologia prodotto usuale.

Si noti che $\tilde{o} = [o, o] \in \text{epi}\, f(u, \cdot)$ in quanto $f(u, o) = 0$.
Introdotta la sfera $\tilde{S}(0, R)$ di $\tilde{X}$, la quasi disequazione

$$\tilde{u} \in \tilde{M}(\tilde{u}) \cap \tilde{S}(0, R_o) : (\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{v} - \tilde{u}) \geq 0$$

$$\forall \tilde{v} \in M(\tilde{u}) \cap \tilde{S}(0, R_o)$$

ammette una soluzione per il teor. 1.1.

Stante l'ipotesi $(Av, v) + f(v, v) > 0$ è facile convincersi che $\tilde{u} = [u, f(u, u)]$, dove u ha norma minore di R_o e si può secondo una tecnica standard provare che u risulta essere soluzione del problema (2.1).

Forniamo infine un teorema di regolarizzazione per disequazioni quasi variazionali di tipo astratto. A tal fine continueremo a indicare con T l'applicazione introdotta nel n. 1 teor. 1.1.

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia* V *uno spazio di Banach* $\subseteq$ X *con iniezione continua; sia* M *compatta. Supponiamo che* $K_o \subset K \cap V$ *sia limitato, chiuso e convesso in* V *e stabile rispetto a* T (*cioè* $T(K_o) \subseteq K_o$) *allora esiste una soluzione della disequazione quasi variazionale* (1.0) *appartenente a* K_o.

Dim. Basta provare ovviamente che T è debolmente chiusa in V e applicare il teorema del punto fisso di Glicksberg. A tale scopo sia $u_\alpha \in K_o$ $u_\alpha \overset{V}{\rightharpoonup} u$, $y_\alpha \in T(u_\alpha)$ $y_\alpha \overset{V}{\rightharpoonup} y$ poiché $V' \supseteq X'$, tenendo conto che $y \in V$ è chiaro che $u_\alpha \overset{X}{\rightharpoonup} u$, $y_\alpha \overset{X}{\rightharpoonup} y$ e per quanto già provato $y \in T(u)$ quindi T è chiusa in V.

3. - Sia A l'operatore associato ad una forma bilineare continua e coerciva su H_o^1; sia $M(w)$ l'applicazione, così definita

$$w \in H_o^1 \rightarrow \{v : |\text{grad } v| \leq |(B u_\alpha, u_\alpha) - a|\}$$

ove B è un operatore tale che

$$u_\alpha \rightharpoonup u \Rightarrow (B u_\alpha, u_\alpha) \rightarrow (B u, u)$$

(p. es. completamente continuo oppure $B u_\alpha \equiv f \in H^{-1}$).

È chiaro che tale multiapplicazione soddisfa le condizioni di compattezza del n. 1 in quanto basta osservare che se $u_\alpha \rightharpoonup u$ allora definito v_α come segue,

$$\forall v \in M(u) \qquad v_\alpha = \frac{|(B u_\alpha, u_\alpha) - a|}{|(B u, u) - a|} v \qquad \text{se } (B u, u) - a \neq 0$$

$$= 0 \qquad \text{se } (B u, u) - a = 0$$

si ha

$$v_\alpha \in M(u_\alpha) \text{ e } v_\alpha \to v$$

D'altro canto se $u_\alpha \rightharpoonup u$, $v_\alpha \in M(u_\alpha) \rightharpoonup v$ si ha $\forall \varepsilon > 0$ un indice α' tale che $\forall \alpha \geq \alpha'$

$$|\text{grad } v_\alpha| \leq |(B u, u) - a| + \varepsilon$$

e dunque potendosi allora estrarre una sottosuccessione generalizzata (quella individuata dagli $\alpha \geq \alpha'$) ancora convergente debolmente a v si ricava che

$$|\text{grad } v| \leq |(B u, u) - a| + \varepsilon$$

Stante l'arbitrarietà di ε si ricava

$$|\text{grad } v| \leq |(B u, u) - a|$$

Può ora applicarsi la proposizione 1.2.

Consideriamo ora la disequazione quasi variazionale

$$u \in M(u) \quad (A u, v - u) \geq (C u, v - u) \qquad \forall v \in M(u)$$

ove A è limitato, monotono, emicontinuo (risp. continuo e monotono) e

$$\lim \frac{(A u, u) + (C u, u)}{\|u\|} = +\infty$$

Sia inoltre M un'applicazione compatta e C un operatore completamente continuo allora la funzione

$$f(u, v) = (C u, v) + \delta_{M(u)} v$$

risulta essere compatta e può così applicarsi la proposizione 2.1.

4. - Un operatore $B : X \to X'$ si dice fortemente monotono quando esiste una funzione γ continua strettamente crescente tale che $\gamma(0) = 0$ e

$$\gamma(\| u - v \|) \leq (B u - B v, u - v).$$

PROPOSIZIONE 4.1. *Sia* A *continuo e monotono,* B *fortemente monotono, emicontinuo, limitato,* K *un convesso chiuso e limitato,* M *un'applicazione da* K *in* Q^K *compatta tale che*

$$\text{c)} \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad v_\varepsilon \in M(u_\varepsilon) \rightharpoonup v \Rightarrow \exists\, z_{\varepsilon_h}, z_{\varepsilon_h} \in M(u_{\varepsilon_h}) : z_{\varepsilon_h} \to v$$

$$\frac{z_{\varepsilon_h} - v_{\varepsilon_h}}{\varepsilon_h} \rightharpoonup 0$$

Infine le disequazioni quasi variazionali

$$(4.1_\varepsilon) \qquad u_\varepsilon \in M(u_\varepsilon) \qquad ((A + \varepsilon B) u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \qquad \forall v_\varepsilon \in M(u_\varepsilon)$$

$$(4.2) \qquad u \in M(u) \qquad (A u, v - u) \geq 0 \qquad \forall v \in M(u)$$

Ammettano una sola soluzione. Allora u_ε *converge fortemente a* u.

Dim. Che (4.1_ε) e (4.2) ammettano soluzioni è ovvio per quanto già provato. Poiché K è limitato $\{u_\varepsilon\}$ è limitata; sia denotata con $\{u_\varepsilon\}$ una sottosuccessione convergente debolmente a w. Allora

$$\forall v \in M(w)\ \exists \{v_\varepsilon\} : v_\varepsilon \in M(u_\varepsilon)\ v_\varepsilon \to v$$

Da (4.1_ε) per il lemma di linearizzazione con $v = v_\varepsilon$ si ha

$$((A + \varepsilon B) v_\varepsilon, v_\varepsilon - u_\varepsilon) \geq 0$$

e al limite per $\varepsilon \to 0$

$$(A v, v - w) \geq 0$$

Per il lemma di Minty ancora

$$(A w, v - w) \geq 0 \qquad \forall v \in M(w)$$

Per la condizione b) della compattezza di M, $w \in M(w)$ e dunque u essendo unica soluzione della (4.2) $u = w$. Si ricava che $u_\varepsilon \rightharpoonup u$. Proviamo ora che $u_\varepsilon \to u$.

Cominciamo con l'osservare che per c) $\exists\, z_\varepsilon \in \mathrm{M}(w_\varepsilon)$: $\dfrac{z_\varepsilon - u_\varepsilon}{\varepsilon} \rightharpoonup 0$.

D'altro canto da (4.1_ε) con $v = z_\varepsilon$

$$((\mathrm{A} + \varepsilon\,\mathrm{B})\,u_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) + (\mathrm{A}\,z_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) - (\mathrm{A}\,z_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) \geq 0$$

e per la monotonia di A

$$\varepsilon\,(\mathrm{B}\,u_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) + (\mathrm{A}\,z_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) \geq 0$$

D'altro lato

$$0 \leq \gamma\,(\|u_\varepsilon - u\|) \leq (\mathrm{B}\,u_\varepsilon - \mathrm{B}\,u, u_\varepsilon - u) = (-\mathrm{B}\,u, u_\varepsilon - u) -$$

$$- (\mathrm{B}\,u_\varepsilon, u - z_\varepsilon) - (\mathrm{B}\,u_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathrm{A}\,z_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathrm{A}\,z_\varepsilon, z_\varepsilon - u_\varepsilon) \leq (-\mathrm{B}\,u, u_\varepsilon - u) - (\mathrm{B}\,u_\varepsilon, u - z_\varepsilon)$$

$$+ \left(\mathrm{A}\,z_\varepsilon - \mathrm{A}\,u, \frac{z_\varepsilon - u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \left(\mathrm{A}\,u, \frac{z_\varepsilon - u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \to 0\,.$$

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia* A *continuo da* X *in* X′ *e fortemente monotono. Sia* K *un convesso chiuso e limitato;* M_n, M *delle applicazioni compatte da* K *in* Q^{K} *tali che*

d) $u_{n_h} \rightharpoonup u \Rightarrow \forall\, v \in \mathrm{M}(u)\ \exists\ v_{n_h} \in \mathrm{M}_{n_h}(u_{n_h})$: $v_{n_h} \to v$

e) $u_{n_h} \rightharpoonup u,\ v_{n_h} \in \mathrm{M}_{n_h}(u_{n_h}) \rightharpoonup v \Rightarrow v \in \mathrm{M}(u)$

Se le disequazioni quasi variazionali

(4.3_n) $\qquad u_n \in \mathrm{M}_n(u) \qquad (\mathrm{A}\,u_n, v - u_n) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{M}_n(u_n)$

(4.4) $\qquad u \in \mathrm{M}(u) \qquad (\mathrm{A}\,u\,, v - u\,) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{M}(u)$

ammettono una sola soluzione, allora u_n *converge fortemente a* u.

Dim. Che (4.3_n) e (4.4) ammettano soluzioni discende dal teor. 1.1. Poiché K è limitato $\{u_n\}$ è limitata. Indichiamo ancora con u_n una sottosuccessione convergente debolmente a w; allora per d)

$$\forall\, v \in \mathrm{M}(w)\ \exists\ \{v_n\} \in \mathrm{M}_n(u_n) : v_n \to v$$

Da (4.3_n) per il lemma di Minty si ha

$$(\mathrm{A}\, v_n, v_n - u_n) \geq 0$$

Passando al limite e riapplicando il lemma di Minty

$$(\mathrm{A}\, w, v - w) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathrm{M}(w)$$

Per e) $w \in \mathrm{M}(w)$ e dunque w è l'unica soluzione di (4.4) e $u_n \rightharpoonup w$. D'altro canto scelto $v_n \to u$ a norma di d) utilizzando (4.3_n) si ha

$$\gamma(\| u_n - u \|) \leq (\mathrm{A}\, u_n - \mathrm{A}\, u, u_n - u) =$$

$$= -(\mathrm{A}\, u, u_n - u) - (\mathrm{A}\, u_n, u - v_n + v_n - u_n) \leq$$

$$\leq (-\mathrm{A}\, u, u_n - u) - (\mathrm{A}\, u_n, u - v_n) \to 0$$

e quindi, per le proprietà di γ, $u_n \to u$.

La dimostrazione, come si è visto, ricalca quella della prop. 4.1.

OSSERVAZIONE 4.1. Delle proposizioni 4.1 e 4.2 si possono ottenere facili estensioni con tecniche standard ai seguenti casi:

A) Se in 4.1 e 4.2 K è supposto non limitato basterà supporre affinché la conclusione permanga valida che A sia coercivo e

$$0 \in \mathrm{M}(u) \cap \mathrm{M}_n(u) \qquad \forall u \in \mathrm{K}$$

B) Se si perturba contemporaneamente l'operatore e la multiapplicazione M affinché la successione $\{u_n\}$ delle soluzioni supposte uniche di

$$u_n \in \mathrm{M}_n(u_n) \left(\left(\mathrm{A} + \frac{1}{n} \mathrm{B} \right) u_n, v - u_n \right) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathrm{M}_n(u_n)$$

converga alla soluzione, supposta unica di (4.4) fortemente, basterà ipotizzare ancora la compattezza di M_n, M, la d) la e) ed infine che

c') $u_{n_h} \rightharpoonup u$, $v_{n_h} \in \mathrm{M}_{n_h}(u_{n_h}) \rightharpoonup u \Rightarrow \exists\, z_{n_{h_j}} \in \mathrm{M}_{n_{h_j}}(u_{n_{h_j}}) : z_{n_{h_j}} \to v$

$$n_{n_{h_j}}(z_{n_{h_j}} - v_{n_{h_j}}) \rightharpoonup 0 \ ;$$

la dimostrazione ricalca con ovvie modifiche quella di 4.1 e 4.2.

C) Si possono considerare problemi in cui compaiono anche funzioni convesse riconducendosi ad ipotesi del tipo di quelle delle proposizioni 4.1, 4.2 tramite l'artificio già utilizzato nella proposizione 2.1.

D) Qualora X sia finito dimensionale la condizione c) è superflua.

Sia ora X = V spazio di Hilbert separabile e sia $\{X_n\}$ una successione di sottospazi finito dimensionali crescente rispetto alla relazione di inclusione tale che $\overline{\bigcup X_n} = V$.

Indicheremo con $(\cdot, \cdot)$ il prodotto scalare in V.

Se $v \in V$, indicata con $P_n v$ la proiezione di v su X_n si ha $P_n v \to v$ in quanto $\exists \{x_n\}, x_n \in X_n$ tale che $x_n \to v$ e, poiché le proiezioni sono non espansive e $P_n v$ minimizza la distanza tra v e X_n

$$\| P_n v - v \| \leq \| x_n - v \| \to 0$$

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia* K *chiuso, limitato convesso in* V, M *compatta da* K *in* Q^K, *allora posto* $\forall u$

$$M_n(u) = P_n M(u)$$

M_n *risulta compatta,* $\{M_n\}$ *soddisfa* d) *ed* e).

Infine se M *soddisfa* c), M_n *soddisfa* c) *ed* $\{M_n\}$ *soddisfa* c').

Dim. Cominciamo col provare che M_n soddisfa l'ipotesi a) della compattezza cioè che

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \Rightarrow \forall v \in M_n(u) \ \exists v_\varepsilon \in M_n(u_\varepsilon) : v_\varepsilon \to v$$

Poiché $M_n(u_\varepsilon) = P_n M(u_\varepsilon)$ e $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, allora

$$\forall v \in M_n(u) \ \exists \hat{v} \in M(u) : P_n \hat{v} = v$$

ed esiste $\hat{v}_\varepsilon \in M(u_\varepsilon)$ tale che $\hat{v}_\varepsilon \to \hat{v}$.

Poiché P_n è non espansiva, posto $v_\varepsilon = P_n \hat{v}_\varepsilon \in M_n(u_\varepsilon)$ si ha

$$\| v_\varepsilon - v \| = \| P_n \hat{v}_\varepsilon - P_n \hat{v} \| \leq \| \hat{v}_\varepsilon - \hat{v} \| \to 0$$

e la a) è provata.

Proviamo ora la condizione b) dell'ipotesi di compattezza.

Sia $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, $v_\varepsilon \in M_n(u_\varepsilon) \rightharpoonup v$, allora $\exists \hat{v}_\varepsilon$:

$$\hat{v}_\varepsilon \in M(u_\varepsilon) \quad P_n \hat{v}_\varepsilon = v_\varepsilon$$

Poiché K è compatto e metrizzabile nella topologia debole passando a sottoestratte e applicando la condizione b) soddisfatta da M si ha

$$\hat{v}_{\varepsilon_h} \rightharpoonup \hat{v} \in \mathrm{M}(u)$$

ma ciò implica

$$\mathrm{P}_n \hat{v} \in \mathrm{M}_n(u).$$

Verifichiamo che

$$\mathrm{P}_n \hat{v} = v$$

Si ha $\forall f \in \mathrm{V}$

$$(\mathrm{P}_n \hat{v} - v, f) = (\mathrm{P}_n \hat{v} - \mathrm{P}_n \hat{v}_{\varepsilon_h}, f) - (v - \mathrm{P}_n \hat{v}_{\varepsilon_h}, f) =$$

$$= (\hat{v} - \hat{v}_{\varepsilon_h}, \mathrm{P}_n f) - (v - v_{\varepsilon_h}, f) \to 0$$

Proviamo ora che risulta soddisfatta la d).
Sia $u_n \rightharpoonup u$, $v \in \mathrm{M}(u)$; allora

$$\exists\ \hat{v}_n : \hat{v}_n \in \mathrm{M}(u_n) : \hat{v}_n \to v$$

Poniamo $v_n = \mathrm{P}_n \hat{v}_n \in \mathrm{M}_n(u_n)$. Si ha

$$\| v_n - v \| \leq \| \mathrm{P}_n \hat{v}_n - \mathrm{P}_n v \| + \| \mathrm{P}_n v - v \| \tag{4.5}$$

$$\leq \| \hat{v}_n - v \| + \| \mathrm{P}_n v - v \| \to 0$$

Proviamo infine la e). Cominciamo col verificare che se

$$v_n \in \mathrm{M}(u_n) \rightharpoonup v_0$$

allora

$$\mathrm{P}_n v_n \in \mathrm{M}_n(u_n) \rightharpoonup v_0$$

Infatti $\forall f \in \mathrm{V}$

$$|(\mathrm{P}_n v_n, f) - (v_0, f)| \leq |(v_n, \mathrm{P}_n f) - (v_n, f) + (v_n, f) - (v_0, f)|$$

$$\leq |(v_n, \mathrm{P}_n f) - (v_n, f)| + |(v_n - v_0, f)| \to 0$$

poiché $\{\| v_n \|\}$ è limitata e $P_n f \to f$.

Supponiamo ora $\mathrm{P}_n v_n \rightharpoonup v_0$ $v_n \in \mathrm{M}(u_n)$, $u_n \rightharpoonup u$; poiché $\{v_n\}$ è limitata essendo tale K, da v_n possiamo estrarre $v_{n_h} \rightharpoonup w$ ma per quanto osservato allora

$$\mathrm{P}_{n_h}\ v_{n_h} \rightharpoonup w$$

e per l'unicità del limite debole $w = v_0$. Ne segue $v_n \rightharpoonup v_0$,

sicché $v_0 \in \mathrm{M}(u)$, poiché M è compatta. La e) risulta così soddisfatta.

M soddisfi ora la condizione c). Verifichiamo che M_n soddisfa la stessa condizione.

Supponiamo $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, $v_\varepsilon \in \mathrm{M}_n(u_\varepsilon) \rightharpoonup v$, allora

$$\exists\ \hat{v}_\varepsilon \in \mathrm{M}(u_\varepsilon) \rightharpoonup \hat{v} \in \mathrm{M}(u) \quad \mathrm{P}_n \hat{v} = v : \mathrm{P}_n \hat{v}_\varepsilon = v_\varepsilon$$

(passando a sottoestratte), e dunque

$$\exists\ z_\varepsilon \in \mathrm{M}(u_\varepsilon) : z_\varepsilon \to \hat{v}\ ; \quad \frac{z_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon}{\varepsilon} \rightharpoonup 0$$

sicché

$$\mathrm{P}_n z_\varepsilon \in \mathrm{M}_n(u_\varepsilon) \quad \mathrm{P}_n z_\varepsilon \to \mathrm{P}_n \hat{v} = v$$

e $\forall f \in \mathrm{V}$

$$\frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{P}_n z_\varepsilon - \mathrm{P}_n \hat{v}_\varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon}(z_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon, \mathrm{P}_n f) \to 0$$

Rimane perciò solo da provare che risulta soddisfatta c').

Sia dunque $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \in \mathrm{M}_n(u_n) \rightharpoonup v$.

Allora per la condizione c) e la e) si ricava posto $\mathrm{P}_n \hat{v}_n = v_n$, passando a sottosuccessioni

$$\exists\ \hat{z}_n : \hat{z}_n \in \mathrm{M}(u_n) : \hat{z}_n \to v \qquad n(\hat{z}_n - \hat{v}_n) \rightharpoonup 0$$

Come in (4.5) si ricava $z_n = \mathrm{P}_n \hat{z}_n \in \mathrm{M}_n(u_n) \to v$.

D'altro canto si ha

$$|(n(z_n - v_n), f)| = |(n(\hat{z}_n - \hat{v}_n), \mathrm{P}_n f) + (n(\hat{z}_n - \hat{v}_n), f) - (n(\hat{z}_n - \hat{v}_n), f)|$$

sicché poiché $\mathrm{P}_n f \to f$, $\{(\hat{z}_n - \hat{v}_n)\, n\}$ è limitata e $(\hat{z}_n - \hat{v}_n)\, n \rightharpoonup 0$ si ha

$$(n(z_n - v_n), f) \to 0$$

e dunque l'asserto.

Possiamo ora considerare lo schema perturbativo.

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{P}_n \mathrm{A}\, \mathrm{P}_n \qquad \mathrm{M}_n = \mathrm{P}_n \mathrm{M}$$

$$(4.6_n) \qquad u_n \in \mathrm{M}_n(u_n) \qquad (\mathrm{A}_n, v_n, v - u_n) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathrm{M}_n(u_n)$$

$$(4.6) \qquad u \in \mathrm{M}(u) \qquad (\mathrm{A}\, u, v - u) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathrm{M}(u)$$

Si ha subito che:

PROPOSIZIONE 4.4. *Se* $A : V \to V$ *è continuo e fortemente monotono* K *è convesso chiuso limitato,* M *è compatta e le disequazioni quasi variazionali* (4.6), (4.6$_n$) *ammettono una sola soluzione allora* $\{u_n\}$ *converge fortemente a* u.

Dim. Diamo un breve cenno. Per il teor. 1.1 (4.6), (4.6$_n$) ammettono soluzioni tenendo conto di prop. 4.3. Poiché K è limitato passando a sottoestratte $u_n \rightharpoonup w$; poiché $\{M_n\}$ soddisfa d), e) (prop. 4.3)

$$w \in M(w)\,; \quad \forall v \in M(w) \quad \exists\, v_n = P_n \hat{v}_n : \hat{v}_n \in M(u_n)\,,\ \hat{v}_n \to v\,,\ v_n \to v$$

Si ha

$$0 \leq \lim (A_n v_n, v_n - u_n) = \lim (P_n A P_n P_n \hat{v}_n, v_n - u_n) = (A v, v - w)\,.$$

Cioè w soddisfa (4.6); per l'unicità $u_n \rightharpoonup w = u$.

Poiché per d) $\exists\ \{v_n\} : v_n \to v \qquad v_n \in M_n(u_n)$

$$0 \leq \gamma(\| u_n - u \|) \leq (A u_n - A u, u_n - u) \leq (P_n A P_n u_n, u_n - v_n) +$$

$$- (A u, u_n - u) + (P_n A_n P_n u_n, v_n - u) \to 0\,.$$

L'ipotesi di limitatezza di K occorre per stabilire l'esistenza delle soluzioni di (4.6), (4.6$_n$) e la limitatezza di $\{u_n\}$. È ovvio che ciò si verifica anche qualora si supponga che A sia coercivo e $v_0 \in M(u)\ \forall u \in K$ in quanto in tal caso ci si può limitare al convesso $K \cap (S(0, R)$ per R opportuna (cfr. prop. 1.2).

NOTA - Mentre il presente articolo era in corso di stampa, l'Autore è stato informato che risultati analoghi a quelli contenuti nei n. 1 e 2 erano stati parallelamente ottenuti da J. L. Joly e U. Mosco.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAIOCCHI C., *Studio di un problema quasi variazionale connesso a problemi di frontiera libera.* In corso di stampa su B.U.M.I.

[2] BENSOUSSAN A. - LIONS J. L., *Nouvelle formulation des problèmes de contrôle impulsionnel et applications.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 276, 1189-1192 (1973).

[3] BENSOUSSAN A. - LIONS J. L., *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi variationelles d'évolution.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 273, 1333-1338 (1973).

[4] BENSOUSSAN A. - LIONS J. L., *Contrôle impulsionnel et contrôle continu; méthode des inéquations quasi variationnelles non linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 278, 675-679 (1974).

[5] GLICKSBERG J., *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points.* Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 1170-1174 (1952).

[6] JOLY J. L., *Inéquations quasi variationelles stationaires pour un operateur differentiel du 2° ordre.* Giornate di Analisi convessa. Roma, aprile 1974, 41-50.

[7] MOSCO V., *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities.* Advances in Math. **3**, 510-585 (1969).

[8] TARTAR L., *Inéquations quasi variationelles.* Giornate di Analisi convessa. Roma, aprile 1974, 94-100.

Spazi di Sobolev dissimmetrici e con peso

Nota di ROSANNA SCHIANCHI (a Salerno) *
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 21 giugno 1975)

RIASSUNTO. — In questo lavoro ci occupiamo dello studio di due classi di spazi di Sobolev con peso, denotate con $W_s^{\ell_1,\dots,\ell_n}$ e $U_s^{\ell_1,\dots,\ell_n}$, per funzioni definite in R_+^n. Stabiliamo dei teoremi di immersione, di immersione compatta, di densità e di tracce sulla frontiera di R_+^n.

SUMMARY. — This paper is concerned with two classes of Sobolev spaces, denoted by $W_s^{\ell_1,\dots,\ell_n}$ and $U_s^{\ell_1,\dots,\ell_n}$, for functions defined in the half space R_+^n. Embedding, compact embedding, density and traces theorems have been proved.

Gli spazi di Sobolev con peso trovano applicazioni in varie questioni connesse con la teoria dei problemi al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali, in special modo essi si sono rivelati efficaci per lo studio dei problemi al contorno in domini dotati di punti angolosi e in domini non limitati (cfr. ad es., i lavori di A. AVANTAGGIATI e M. TROISI [1], D. FORTUNATO [4], [5], J. NECAS [6], M. TROISI [8], G. TROMBETTI [11]).

Il peso ha essenzialmente il ruolo di prescrivere un opportuno comportamento della soluzione nei punti angolosi del dominio, e all'infinito se il dominio è non limitato.

Questo lavoro è dedicato allo studio alcune classi di spazi di Sobolev dissimetrici e con peso che denotiamo con $W_s^{\ell_1,\dots,\ell_n}$ e $U_s^{\ell_1,\dots,\ell_n}$, $\ell_i \in R_+$ $(i = 1, \dots, n)$ e $s \in R$, per funzioni definite su R_+^n oppure sulla frontiera di R_+^n.

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni del C.N.R.

Se $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sono interi, $W_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}(R_+^n)$ è lo spazio delle funzioni u tali che

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{t=0}^{\ell_i} \int_{R_+^n} \rho^{2(s+t\tau_i)}(x) \mid \partial_{x_i}^t u \mid^2 dx < +\infty ,$$

dove $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sono numeri positivi assegnati, appartenenti all'intervallo $]0, 1]$; $U_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}(R_+^n)$ è lo spazio delle funzioni u tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{\ell_i} \int_{R_+^n} \rho^{2s}(x) \mid \partial_{x_i}^t u \mid^2 dx < +\infty .$$

Stabiliamo dei teoremi di densità, di immersione, di immersione compatta e di tracce, che estendono al caso asimmetrico e, talvolta al caso in cui l'ordine di derivazione non è intero, alcuni risultati stabiliti da D. FORTUNATO in [4] e [5].

Lo studio degli spazi $W_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}$ viene ricondotto all'applicazione di noti risultati relativi agli ordinari spazi di Sobolev-Slobodeckii per mezzo di una opportuna caratterizzazione dei $W_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}$ (cfr. il teorema 3.1).

Per gli spazi $U_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}$ si dà poi una caratterizzazione analoga a quella degli spazi $W_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}$ (cfr. il teorema 9.4), per mezzo della quale il loro studio viene ricondotto a quello di certi spazi di Sobolev con norma dipendente da un parametro, che sono l'estensione al caso asimmetrico di una classe di spazi introdotti da M. S. AGRANOVICH - M. I. VISHICH in [2].

Il n. 1 è dedicato a richiami di risultati noti relativi agli spazi di Sobolev - Slobodeckii.

Nel n. 2 viene introdotta la funzione peso.

Nel n. 3 sono definiti gli spazi $W_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}$, per i quali vengono stabiliti: un teorema di densità nel numero 4, dei teoremi di immersione e di immersione compatta nel n. 5, un teorema di tracce nel n. 7, mentre nel n. 6 viene caratterizzata una loro classe di spazi di moltiplicatori.

Il n. 8 è dedicato allo studio dei già citati spazi di Sobolev-Slobodeckii asimmetrici e con norma dipendente da un parametro.

I nn. 9, 10, 11 sono dedicati alla trattazione degli spazi $U_s^{\ell_1,\ldots,\ell_n}$.

1. - Definizioni e lemmi noti.

Indicheremo con R^n lo spazio euclideo a n dimensioni di punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e con R^n_+ il semispazio $\{x \in R^n : x_n > 0\}$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e una n-pla di interi non negativi, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ porremo:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\,, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\,, \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n\,,$$

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}\,, \quad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$$

dove: $\partial_{x_k} = \dfrac{\partial}{\partial_{x_k}}$, $D_{x_k} = \dfrac{1}{i}\partial_{x_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $i = \sqrt{-1}$.

Assegniamo ora n intervalli $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ di R limitati o no, e poniamo:

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n\,, \quad \Omega' = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1}\,.$$

Vogliamo introdurre alcuni spazi di distribuzioni su Ω (cfr., ad es., L. N. Slobodeckii [6]).

Def. 1.1. Assegnati $k \in N_o$ [1], $\lambda \in]0, 1[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ indicheremo: con $W^k_{x_i}(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\partial^t_{x_i} u \in L^2(\Omega)$ per $t = 0, \ldots, k$ munito della norma:

$$\| u \|_{W^k_{x_i}(\Omega)} = \left(\sum_{t=0}^{k} \int_\Omega |\, \partial^t_{x_i} u \,|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

con $W^{k+\lambda}_{x_i}(\Omega)$ lo spazio delle $u \in W^k_{x_i}(\Omega)$ e tali che:

$$\int_{\Omega \times \Omega_i} \frac{|\, \partial^k_{x_i} u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - \partial^k_{x_i} u(x_i, \ldots, x_i', \ldots, x_n) \,|^2}{|\, x_i - x_i' \,|^{1+2\lambda}} \, dx \, dx_i' < +\infty$$

[1] Indicheremo con N l'insieme degli interi positivi, con N_o l'insieme degli interi non negativi, con R_+ l'insieme dei reali positivi e con $\bar{R}_+$ l'insieme dei reali non negativi.

munito della norma:

$$\| u \|_{W_{x_i}^{k+\lambda}(\Omega)} =$$

$$= \left(\| u \|^2_{W_{x_i}^{k}(\Omega)} + \int_{\Omega \times \Omega_i} \frac{| \partial_{x_i}^k u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) - \partial_{x_i}^k u(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n) |^2}{| x_i - x_i' |^{1+2\lambda}} \, dx \, dx_i' \right)^{\frac{1}{2}} .$$

DEF. 1.2. Se $\ell_1, \cdots, \ell_n \in \bar{R}_+$ indicheremo con $W^{\ell_1,\ldots,\ell_n}(\Omega)$ lo spazio $\bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}^{\ell_i}(\Omega)$ munito della norma:

$$\| u \|_{W^{\ell_1,\ldots,\ell_n}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \| u \|_{W_{x_i}^{\ell_i}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Assegniamo inoltre una n-pla $\mathfrak{M} = (m_1, \ldots, m_n)$ di interi positivi e poniamo:

$$m = \max \{m_1, \ldots, m_n\} , \quad q_i = \frac{m}{m_i} \, (i = 1, \ldots, n) , \quad q = (q_1, \ldots, q_n) .$$

DEF. 1.3. Per ogni $r \in \bar{R}_+$, indicheremo con $W^r(\Omega)$ lo spazio $W^{r/q_1,\ldots,r/q_n}(\Omega)$ munito della norma:

$$\| u \|_{W^r(\Omega)} = \| u \|_{W^{r/q_1,\ldots,r/q_n}(\Omega)} .$$

Poniamo ora, qualunque sia $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle = \left(\sum_{k=1}^{n} | \xi_k |^{m_k} \right)^{\frac{1}{m}}$ e indicheremo con $\hat{u}$ la trasformata di Fourier di u.

DEF. 1.4. Per ogni $r \in \bar{R}_+$ indicheremo con $H^r(R^n)$ lo spazio delle distribuzioni temperate u su R^n tali che $(1 + \langle \xi \rangle^2)^{r/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(R^n)$ munito della norma:

$$\| u \|_{H^r(R^n)} = \left(\int_{R^n} (1 + \langle \xi \rangle^2)^r | \hat{u} |^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} .$$

DEF. 1.5. Per ogni $r \in \bar{R}_+$ indicheremo con $H^r(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω che sono restrizioni a Ω di elementi di $H^r(R^n)$ munito della norma:

$$\| u \|_{H^r(\Omega)} = \inf \| U \|_{H^r(R^n)} \qquad U = u \text{ su } \Omega .$$

Da noti risultati (cfr., ad es., L. N. SLOBODECKII [7], L. R. VOLEVICH - B. P. PANEYAKH [12], V. DEL PRETE - D. FORTUNATO [3], M. TROISI [8]) si deducono in modo ovvio i seguenti lemmi:

LEMMA 1.1. *Per ogni* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, *i due spazi* $\mathrm{W}^r(\Omega)$ *e* $\mathrm{H}^r(\Omega)$ *sono isomorfi algebricamente e topologicamente.*

LEMMA 1.2. *Per ogni* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$ *è denso in* $\mathrm{W}^r(\Omega)$. *Se* $r \leq r'$ *allora si ha:* $\mathrm{W}^{r'}(\Omega) \subset \mathrm{W}^r(\Omega)$ *algebricamente e topologicamente.*

LEMMA 1.3. *Comunque si assegni* $r_0 \in \mathrm{R}_+$ *esiste un operatore* p *lineare e continuo da* $\mathrm{W}^r(\Omega)$ *in* $\mathrm{W}^r(\mathrm{R}^n)$ *per ogni* $r \in [0, r_0]$ *e tale che* $p\,u|_\Omega = u$ *per ogni* $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

LEMMA 1.4. *Siano* $\alpha \in \mathrm{N}_0^n$ *e* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$. *Per ogni* $u \in \mathrm{W}^{r+<\alpha,q>}(\Omega)$ *si ha* $\mathrm{D}^\alpha u \in \mathrm{W}^r(\Omega)$ *e*

$$\| \mathrm{D}^\alpha u \|_{\mathrm{W}^r(\Omega)} \leq c \| u \|_{\mathrm{W}^{r+<\alpha,q>}(\Omega)}$$

dove c *è una costante che non dipende da* u.

LEMMA 1.5. *Siano* $t, k, r \in \mathrm{R}$ *con* $0 \leq t < k < r$. *Per ogni* $\varepsilon \in \mathrm{R}_+$ *esiste una costante positiva* $c(\varepsilon)$ *tale che*

$$\| u \|^2_{\mathrm{W}^k(\Omega)} \leq \varepsilon \| u \|^2_{\mathrm{W}^r(\Omega)} + c(\varepsilon) \| u \|^2_{\mathrm{W}^t(\Omega)} \quad \forall u \in \mathrm{W}^r(\Omega) .$$

Introduciamo ora, seguendo L. N. SLOBODECKII [7], una classe di spazi di moltiplicatori per gli spazi $\mathrm{W}^r(\Omega)$.

DEF. 1.6. Se $k \in \mathrm{N}_0$, $\lambda \in]0, 1[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ indicheremo con $\mathrm{A}^k_{x_i}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni φ su Ω tali che $\partial^t_{x_i} \varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ per $t = 0, \ldots, k$ munito della norma:

$$\| \varphi \|_{\mathrm{A}^k_{x_i}(\Omega)} = \sum_{t=0}^{k} \| \partial^t_{x_i} \varphi \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} ;$$

con $\mathrm{A}^{k+\lambda}_{x_i}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $\varphi \in \mathrm{A}^k_{x_i}(\Omega)$ per le quali

$$\sup \int_{\Omega_i} \frac{| \partial^k_{x_i} \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - \partial^k_{x_i} \varphi(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) |^2}{| x_i - x_i' |^{1+2\lambda}} dx_i' < +\infty$$

munito della norma:

$$\| \varphi \|_{A^{k+\lambda}_{x_i}(\Omega)} =$$

$$= \left(\| \varphi \|^2_{A^k_{x_i}(\Omega)} + \sup \int_{\Omega_i} \frac{| \partial^k_{x_i} \varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) - \partial^k_{x_i} \varphi(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n|^2}{| x_i - x_i' |^{1+2\lambda}} dx_i' \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEF. 1.7. Se $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \bar{R}_+$ indicheremo con $A_{\ell_1,\ldots,\ell_n}(\Omega)$ lo spazio $\bigcap_{i=1}^{n} A^{\ell_i}_{x_i}(\Omega)$ munito della norma:

$$\| \varphi \|_{A^{\ell_1,\ldots,\ell_n}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \| \varphi \|^2_{A^{\ell_i}_{x_i}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEF 1.8. Se $r \in \bar{R}_+$, indicheremo con $A^r(\Omega)$ lo spazio $A^{r/q_1,\ldots,r/q_n}(\Omega)$ munito della norma:

$$\| \varphi \|_{A^r(\Omega)} = \| \varphi \|_{A^{r/q_1,\ldots,r/q_n}(\Omega)}.$$

Dai risultati di L. N. SLOBODECKII [7] segue che:

LEMMA 1.6. *Qualunque siano* $r \in \bar{R}_+$, $\varphi \in A^r(\Omega)$ *e* $u \in W^r(\Omega)$ *si ha* $\varphi u \in W^r(\Omega)$ *e:*

$$\| \varphi u \|_{W^r(\Omega)} \leq c \| \varphi \|_{A^r(\Omega)} \| u \|_{W^r(\Omega)}$$

dove c è una costante indipendente da φ *e da u.*

LEMMA 1.7. *Per ogni* $r, r' \in \bar{R}_+$ *tali che* $r \leq r'$ *sussiste l'inclusione algebrica e topologica* $A^{r'}(\Omega) \subset A^r(\Omega)$.

DEF. 1.9. Per ogni $r \in \bar{R}_+$ indicheremo con $W^r(\Omega')$ lo spazio $W^{r/q_1,\ldots,r/q_{n-1}}(\Omega')$ munito della norma:

$$\| u \|_{W^r(\Omega')} = \| u \|_{W^{r/q_1,\ldots,r/q_{n-1}}(\Omega')}.$$

Sia ora $\Omega_n =]a, b[$, poniamo:

$$\gamma_a u = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) \text{ e } R^n_a = \{ x \in R^n : x_n > a \}.$$

Da noti risultati si deduce facilmente che l'operatore p definito dal lemma 1.3 si può scegliere in modo che:

$$\| \gamma_a (p u) \|_{W^{r-q_n/2}(R^{n-1})} \geq c \| \gamma_a u \|_{W^{r-q_n/2}(\Omega')} \quad \forall u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$$

con c costante indipendente da u.

Da ciò e dal teorema 4 di SLOBODECKII [7] segue che:

LEMMA 1.8. *Sia* $r \in]q_n/2, +\infty[$. *L'applicazione* $\gamma_a : u \to \gamma_a u$ *definita su* $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *si prolunga per continuità in un'applicazione, che continueremo ad indicare con* γ_a, *lineare e continua da* $W^r(\Omega)$ *in* $W^{r-q_n/2}(\Omega')$.

2. - LA FUNZIONE PESO.

Assegniamo ora una n-pla di numeri reali $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ con $\tau_i \in]0, 1]$ $(i = 1, \ldots, n)$ e una funzione $\rho \in C^0(\bar{R}^n_+)$ soddisfacente le seguenti condizioni:

a) ρ è un infinito per $|x|$ tendente a $+\infty$ dello stesso ordine di $|x|$ e risulta:

$$\rho(x) > 0 \qquad \forall x \in \bar{R}^n_+ ; \tag{2.1}$$

b) esistono due costanti positive γ_1 e γ_2 tali che:

$$\gamma_1 \rho(x_0) \leq \rho(x) \leq \gamma_2 \rho(x_0) \qquad \forall x_0 \in \bar{R}^n_+ \text{ e } \forall x \in \overline{I(x_0)}, \tag{2.2}$$

dove:

$$I(x_0) = \{x_0 \in R^n_+ : |x_i - x_{0i}| < \rho^{\tau_i}(x_0), \ i = 1, \ldots, n\}. \tag{2.3}$$

Esempio. Si verifica facilmente che la funzione:

$$\rho : x \in \bar{R}^n_+ \longrightarrow 1 + \frac{|x|}{d},$$

dove d è un numero reale assegnato tale che $d > \sqrt{n}$, soddisfa le condizioni a) e b).

Porremo: $|\tau| = \tau_1 + \ldots + \tau_n$ e per ogni $x_0 \in \bar{R}^n_+$:

$$\begin{aligned} I_i(x_0) &= \{x_i \in R : |x_i - x_{0i}| < \rho^{\tau_i}(x_0)\}, \qquad i = 1, \ldots, n-1 \\ I_n(x_0) &= \{x_n \in R_+ : |x_n - x_{0n}| < \rho^{\tau_n}(x_0)\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Per ogni $x_0 \in \bar{\mathrm{R}}^n_+$ indicheremo con $\varphi(\cdot, x_0)$ la funzione caratteristica di $\mathrm{I}(x_0)$:

$$\varphi(x, x_0) \begin{cases} = 1 & \text{se } x \in \mathrm{I}(x_0) \\ = 0 & \text{se } x \notin \mathrm{I}(x_0) . \end{cases} \tag{2.5}$$

Dalla (2.2) segue che esistono due costanti positive γ_3 e γ_4 tali che:

$$\gamma_3 \rho^{|\tau|}(x) \leq \int_{\mathrm{R}^n_+} \varphi(x, x_0)\, dx_0 \leq \gamma_4 \rho^{|\tau|}(x) \qquad \forall x \in \bar{\mathrm{R}}^n_+ . \tag{2.6}$$

Infatti, posto per ogni $x \in \mathrm{R}^n_+$

$$\Gamma_x = \left\{ x_0 \in \mathrm{R}^n_+ : |x_{0i} - x_i| < \rho^{\tau_i}(x_0); \qquad i = 1, \ldots, n \right\} ,$$

$$\Gamma'_x = \left\{ x_0 \in \mathrm{R}^n_+ : |x_{0i} - x_i| < \gamma_1^{\tau_i} \rho^{\tau_i}(x); \qquad i = 1, \ldots, n \right\} ,$$

$$\Gamma''_x = \left\{ x_0 \in \mathrm{R}^n_+ : |x_{0i} - x_i| < \frac{1}{\gamma_1^{\tau_i}} \rho^{\tau_i}(x); \qquad i = 1, \ldots, n \right\} .$$

si ha $\Gamma'_x \subset \Gamma_x \subset \Gamma''_x$ e quindi la (2.6), dal momento che la misura di Γ_x è proprio uguale a

$$\int_{\mathrm{R}^n_+} \varphi(x, x_0)\, dx_0 .$$

DEF. 2.1. Indicheremo con $\mathrm{L}^p_s(\mathrm{R}^n_+)$, $s \in \mathrm{R}$ e $p \in [1, +\infty]$ lo spazio delle funzioni $u : \mathrm{R}^n_+ \to \mathrm{C}$ tali che $\rho^s u \in \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n_+)$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{L}^p_s(\mathrm{R}^n_+)} = \| \rho^s u \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{R}^n_+)} .$$

Sussiste il seguente risultato (cfr. M. TROISI [9]):

LEMMA 2.1. *Comunque si assegnino* $s \in \mathrm{R}$ *e* $p \in [1, +\infty[$, $u \in \mathrm{L}^p_s(\mathrm{R}^n_+)$ *se e solo se l'applicazione* $x_0 \to \rho^{s - \frac{|\tau|}{p}}(x_0) \| u \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{I}(x_0))}$ *è di classe*

$L^p(R^n_+)$; inoltre [2]:

$$\|u\|_{L^p_s(R^n_+)} \sim \left(\int_{R^n_+} \left[\rho^{s-\frac{[\tau]}{p}}(x_0) \|u\|_{L^p(I(x_0))} \right]^p dx_0 \right)^{\frac{1}{p}} . \tag{2.7}$$

Porremo:

$$\rho(x,x') = \frac{\rho(x)+\rho(x')}{2} , \quad g(x,x') = \tag{2.8}$$

$$= \int_{R^n_+} \varphi(x,x_0)\,\varphi(x',x_0)\,dx_0 \qquad \forall x, x' \in \bar{R}^n_+ ;$$

inoltre, assegnati $x_0 \in \bar{R}^n_+$, $u : \bar{R}^n_+ \to C$, $A \subset R^n_+$ porremo:

$$\Phi_{x_0} : x \in \bar{R}^n_+ \to \xi = \left(\frac{x_1 - x_{01}}{\rho^{\tau_1}(x_0)} + x_{01} , \ldots , \frac{x_n - x_{0n}}{\rho^{\tau_n}(x_0)} + x_{0n} \right)$$

$$u^*_{x_0} = u \circ \Phi^{-1}_{x_0} , \quad A^*_{x_0} = \Phi_{x_0}(A) ,$$

e quando non vi sia possibilità di equivoci indicheremo Φ_{x_0}, $u^*_{x_0}$, $A^*_{x_0}$ rispettivamente con Φ, u^* e A^*.

In particolare $I^*(x_0)$ denoterà l'insieme trasformato di $I(x_0)$ mediante la sostituzione

$$x_i - x_{0i} = \rho^{\tau_i}(x_0)(\xi_i - x_{0i}) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

e per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, $I^*_i(x_0)$ denoterà l'insieme trasformato di $I_i(x_0)$ mediante la sostituzione:

$$x_i - x_{0i} = \rho^{\tau_i}(x_0)(\xi_i - x_{0i}) . \tag{2.10}$$

3. - Gli spazi $W^r_s(R^n_+)$.

Qualunque siano $x \in R^n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $h \in R$ porremo:

$$x^{ih} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) .$$

[2] Se H è un insieme arbitrario e σ_1 e σ_2 sono due applicazioni di H in $\bar{R}_+$ si porrà $\forall u \in H : \sigma_1(u) \sim \sigma_2(u)$ se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$c_1 \sigma_2(u) \leq \sigma_1(u) \leq c_2 \sigma_2(u) \qquad \forall u \in H$$

DEF. 3.1. Assegnati $k \in \mathrm{N}_0$, $\lambda \in]0,1[$, $s \in \mathrm{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ indicheremo: con $\mathrm{W}^k_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)$ lo spazio delle distribuzioni u su R^n_+ tali che $\partial^t_{x_i} u \in \mathrm{L}^2_{s+\tau_i t}(\mathrm{R}^n_+)$ per $t = 0, \ldots, k$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{W}^k_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)} = \left(\sum_{t=0}^{k} \| \partial^t_{x_i} u \|^2_{\mathrm{L}^2_{s+\tau_i t}(\mathrm{R}^n_+)} \right)^{\frac{1}{2}};$$

con $\mathrm{W}^{k+\lambda}_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)$ lo spazio delle $u \in \mathrm{W}^k_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)$ e tali che:

$$\mathrm{L}_{sik\lambda}(u) =$$

$$= \int_{\mathrm{R}_+} \frac{dt}{h^{1+2\lambda}} \int_{\mathrm{R}^n_+} (\varrho^{2(s+\tau_i k+\tau_i \lambda)-|\tau|} g)(x, x^{ih}) \mid \partial^k_{x_i} u(x^{ih}) - \partial^k_{x_i} u(x) \mid^2 dx < +\infty ,$$

munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{W}^{k+\lambda}_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)} = \left(\| u \|^2_{\mathrm{W}^k_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)} + \mathrm{L}_{sik\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

DEF. 3.2. Se $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \bar{\mathrm{R}}_+$ e $s \in \mathrm{R}$ indicheremo con $\mathrm{W}^{\ell_1,\ldots,\ell_n}_s(\mathrm{R}^n_+)$ lo spazio $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{W}^{\ell_i}_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{W}^{\ell_1,\ldots,\ell_n}_s(\mathrm{R}^n_+)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \| u \|^2_{\mathrm{W}^{\ell_i}_{s,x_i}(\mathrm{R}^n_+)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

DEF. 3.3. Se $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ e $s \in \mathrm{R}$, indicheremo con $\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ lo spazio $\mathrm{W}^{r/q_1,\ldots,r/q_n}_s(\mathrm{R}^n_+)$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} = \| u \|_{\mathrm{W}^{r/q_1,\ldots,r/q_n}_s(\mathrm{R}^n_+)} .$$

TEOREMA 3.1. *Qualunque siano* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *e* $s \in \mathrm{R}$, *si ha* $u \in \mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ *se e solo se* $(x_0 \to \varrho^s(x_0) \| u^* \|_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_0))}}) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n_+)$; inoltre:

$$\| u \|^2_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \sim \int_{\mathrm{R}^n_+} \varrho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_0))}} dx_0 . \tag{3.1}$$

Dim. In conseguenza del lemma 2.1 si ha:

$$(3.2)\quad \| \partial^t_{x_i} u \|^2_{L^2_{s+\tau_i t}(R^n_+)} \sim \int_{R^n_+} \varrho^{2(s+\tau_i t)-|\tau|}(x_0)\left(\int_{I(x_0)} | \partial^t_{x_i} u |^2 \, dx \right) dx_0 =$$

$$= \int_{R^n_+} \varrho^{2s}(x_0)\left(\int_{I^*(x_0)} | \partial^t_{\xi_i} u^* |^2 \, d\xi \right) dx_0 .$$

Inoltre, se $\alpha \in R$, $k \in N_0$, $\lambda \in]0,1[$, $i \in \{1,\dots,n\}$ si ha:

$$(3.3)\quad \int_{R_+} \frac{dh}{h^{1+2\lambda}} \int_{R^n_+} \varrho^\alpha (x, x^{ih})\, g(x, x^{ih}) \, | \partial^k_{x_i} u(x^{ih}) - \partial^k_{x_i} u(x) |^2 \, dx =$$

$$= \int_{R_+} \frac{dh}{h^{1+2\lambda}} \int_{R^n_+} \varrho^\alpha (x, x^{ih}) \, | \partial^k_{x_i} u(x^{ih}) - \partial^k_{x_i} u(x) |^2 \, dx \int_{R^n_+} \varphi(x, x_0)\, \varphi(x^{ih}, x_0)\, dx_0 \sim$$

$$\sim \int_{R^n_+} \varrho^\alpha(x_0) \left(\int_{I_i(x_0)} dy_i \int_{I(x_0)} \frac{| \partial^k_{x_i} u(x_1,\dots,x_n) - \partial^k_{x_i} u(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n) |^2}{| x_i - y_i |^{1+2\lambda}} \, dx \right) dx_0 =$$

$$= \int_{R^n_+} \varrho^{\alpha - 2(k+\lambda)\tau_i + |\tau|}(x_0)$$

$$\left(\int_{I^*_i} d\eta_i \int_{I^*(x_0)} \frac{| \partial^k_{\xi_i} u^*(\xi_1,\dots,\xi_n) - \partial^k_{\xi_i} u^*(\xi_1,\dots,\eta_i,\dots,\xi_n) |^2}{| \xi_i - \eta_i |^{1+2\lambda}} \, d\xi \right) dx_0 .$$

Dalle precedenti relazioni si deduce la tesi.

4. - Teorema di densità per gli spazi $W^r_s(R^n_+)$.

Ci proponiamo di dimostrare il seguente:

Teorema 4.1. *Qualunque siano* $r \in \bar{R}_+$ *e* $s \in R$, $\mathcal{D}(\bar{R}^n_+)$ *è denso in* $W^r_s(R^n_+)$.

Alla dimostrazione di tale teorema premetteremo alcuni lemmi. Nel seguito per ogni sottoinsieme $A \subset R^n$ porremo $\bar{A} = A \cap R^n_+$.

LEMMA 4.1. *Sia* $r \in \bar{R}_+$. *Se* $u \in W^r(R^n_+)$ *e* $supp\ u = \Sigma$, *dove* Σ *è un compatto contenuto in* R^n_+, *denotato con* Σ_1 *un aperto limitato contenente* Σ *si ha*:

$$\| u \|_{W^r(R^n_+)} \leq c \| u \|_{W^r(\tilde{\Sigma}_1)} ,$$

dove c *è una costante dipendente solo da* r *e dal supporto di* u.

Dim. La tesi si ottiene con ragionamenti analoghi a quelli tenuti da D. Fortunato per stabilire il lemma 4.1 di [4].

LEMMA 4.2. *Siano* $r \in \bar{R}_+$, $s \in R$. *Se* $u \in W^r(R^n_+)$ *e* $supp\ u$ *è un compatto contenuto in* R^n_+ *allora* $u \in W^r_s(R^n_+)$ *e inoltre*:

$$\| u \|_{W^r_s(R^n_+)} \leq c' \| u \|_{W^r(R^n_+)}$$

dove c' *è una costante che dipende solo da* r, s *e* $supp\ u$.

Dim. La tesi si ottiene con ragionamenti analoghi a quelli tenuti da D. Fortunato per stabilire il lemma 4.2 di [4].

LEMMA 4.3. *Siano* $r \in \bar{R}_+$, $s \in R$. *Se* $u \in W^r_s(R^n_+)$ *e* $supp\ u$ *è un compatto contenuto in* $\bar{R}^n_+$, *allora* $u \in W^r(R^n_+)$ *e*:

$$\| u \|_{W^r(R^n_+)} \leq c \| u \|_{W^r_s(R^n_+)}$$

dove c *è una costante che dipende da* r, s, ϱ *e da* $supp\ u$.

Dim. La tesi si ottiene con ragionamenti analoghi a quelli ottenuti da D. Fortunato per stabilire il lemma 4.3 di [4].

Assegniamo ora una funzione $\delta \in \mathfrak{D}(\bar{R}^n_+)$ tale che:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$

e poniamo per ogni $k \in \mathrm{N}$:

$$\delta_k : x \in \bar{\mathrm{R}}^n_+ \to \delta\left(\frac{x}{k}\right).$$

Evidentemente:

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| \leq k \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq 2k \end{cases} \qquad \forall k \in \mathrm{N}$$

$$|\rho^{|\alpha|}(x)\, \mathrm{D}^\alpha \delta_k(x)| \leq c_\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathrm{N}^n_0 \text{ e } \forall k \in \mathrm{N}$$

dove c_α è una costante dipendente solo da α.

LEMMA 4.4. *Siano* $s \in \mathrm{R}$ *e* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$. *Se* $u \in \mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ *allora* $\delta_k u - u \in \mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ *per ogni* $k \in \mathrm{N}$ *e:*

$$\lim_{k \to +\infty} \| \delta_k u - u \|_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} = 0 .$$

Dim. Assegniamo $u \in \mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$.

Si prova che:

$$(4.1) \quad \| (\delta^*_k - 1)\, u^* \|_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} \leq c \| u^* \|_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} \qquad \forall x_o \in \bar{\mathrm{R}}^n_+ \text{ e } \forall k \in \mathrm{N}$$

dove c è una costante indipendente da k, x_o, e da u.

Infatti dal lemma 1.6, dalla definizione 1.6 e dal lemma 1.7 si ha:

$$\| (\delta^*_k - 1)\, u^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} \leq c_1 \| \delta^*_k - 1 \|^2_{\mathrm{A}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} =$$

$$= c_1 \left(\sum_{i=1}^n \| \delta^*_k - 1 \|^2_{\mathrm{A}^{r/q_i}_{x_i}(\mathrm{I}^*(x_o))} \right) \cdot \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} \leq$$

$$\leq c_2 \left(\sum_{i=1}^n \| \delta^*_k - 1 \|^2_{\mathrm{A}^{[r]+1}_{x_i}(\mathrm{I}^*(x_o))} \right) \cdot \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} =$$

$$= c_2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^{[r]+1} \sup_{\xi \in \mathrm{I}^*(x_o)} |\, \partial^t_{\xi_i} (\delta^*_k - 1)\,|^2 \right) \cdot \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_o))}} =$$

$$= c_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{[r]+1} \varrho^{2t\tau_i}(x_0) \sup_{x \in I(x_0)} | \partial_{x_i}^t (\delta_k - 1) |^2 \right) \cdot \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}} \leq$$

$$\leq c_3 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{[r]+1} \sup_{x \in I(x_0)} | \varrho^{2t}(x) \, \partial_{x_i}^t (\delta_k - 1) |^2 \right) \cdot \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}}$$

e quindi tenendo conto delle proprietà di δ_k si ha la (4.1).

Dalla 4.1 segue:

$$(4.2) \qquad \varrho^{2s}(x_0) \, \| (\delta_k^* - 1) \, u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}} \leq c \, \varrho^{2s}(x_0) \, \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}}$$

$$\forall x_0 \in \bar{R}^n_+ \text{ e } \forall k \in N .$$

Dalla (4.2), dall'ipotesi $u \in W^r_s(R^n_+)$ e dal teorema 3.1 si deduce che:

$$(4.3) \qquad (\delta_k - 1) \, u \in W^r_s(R^n_+) \qquad \forall k \in N .$$

D'altra parte dalla dimostrazione della (4.1) si ha anche che:

$$(4.4) \qquad \lim_{k \to +\infty} \| (\delta_k^* - 1) \, u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}} = 0 .$$

Dalle (4.2), (4.4) e dal teorema di Lebesgue sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale segue:

$$\lim_{k \to +\infty} \| \delta_k u - u \|^2_{W^r_s(R^n_+)} = \lim_{k \to +\infty} \int_{R^n_+} \varrho^{2s}(x_0) \, \| (\delta_k^* - 1) \, u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}} \, dx_0 = 0$$

e quindi si ha la tesi.

Dimostrazione del teorema 4.1. Se $u \in W^r_s(R^n_+)$ dal lemma 4.4 si ha che $\delta_k \in W^r_s(R^n_+)$ per ogni $k \in N$.

D'altra parte $\delta_k u$ ha supporto compatto contenuto in $\bar{R}^n_+$ e quindi per il lemma 4.3 $\delta_k u \in W^r(R^n_+)$ per ogni $k \in N$. Dalla densità di $\mathfrak{D}(\bar{R}^n_+)$ in $W^r(R^n_+)$ (cfr. lemma 1.1) segue allora che per ogni $k \in N$

esiste una successione $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}_+^n)$ tale che:

$$\lim_{n\to+\infty} \| u_n^k - \delta_k u \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{R}_+^n)} = 0 . \tag{4.3}$$

Ora per il lemma 4.2

$$\| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|^2_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} \leq \tag{4.4}$$

$$\leq c_k' \| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{R}_+^n)} \leq c_k \| u_n^k - \delta_k u \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{R}_+^n)} \quad \forall k, n \in \mathrm{N}$$

dove le costanti c e c' dipendono solo da k.

Dalle (4.3) e (4.4) segue:

$$\forall k \in \mathrm{N} \qquad \lim_n \| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|^2_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} = 0$$

e quindi $\forall k \in \mathrm{N}\ \exists n_k \in \mathrm{N}$ tale che

$$\| \delta_k u_{n_k}^k - \delta_k^2 u \|_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} < \frac{1}{k} . \tag{4.5}$$

Poniamo $v_k = \delta_k u_{n_k}^k$. Evidentemente $v_k \in \mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}_+^n)$ per ogni $k \in \mathrm{N}$. Inoltre per la (4.5), per il lemma 1.6 e per la (3.1) si ha:

$$\forall k \in \mathrm{N} \qquad \| v_k - u \|_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} \leq \| v_k - \delta_k^2 u \|_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} +$$

$$+ \| \delta_k^2 u - \delta_k u \|_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} + \| \delta_k u - u \|_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} < \frac{1}{k} +$$

$$+ c \| \delta_k u - u \|_{\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} ,$$

dove c è indipendente da k.

Da quest'ultima relazione tenendo conto del lemma 4.4 si ha la tesi.

5. - Teoremi di immersione e di immersione compatta per gli spazi $\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n)$.

Teorema 5.1. *Qualunque siano* $s \in \mathrm{R}$, $r, r' \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *con* $r' \leq r$, $\theta \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *sussiste l'inclusione algebrica e topologica*

$$\mathrm{W}_s^r(\mathrm{R}_+^n) \subset \mathrm{W}_{s-\theta}^{r'}(\mathrm{R}_+^n) .$$

Dim. Dalla (3.1), dal lemma 1.2 e dalla (2.1) si ha per ogni $u \in \mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$

$$\| u \|^2_{\mathrm{W}^{r'}_{s-\theta}(\mathrm{R}^n_+)} \sim \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2(s-\theta)}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^{r'}_{(\mathrm{I}^*(x_0))}} \, dx_0 \leq$$

$$\leq c_1 \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^{r}_{(\mathrm{I}^*(x_0))}} \, dx_0 \sim \| u \|^2_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \; ;$$

da tale relazione e dal teorema 4.1 segue la tesi.

TEOREMA 5.2. *Se* $\alpha \in \mathrm{N}^n_0$, $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $s \in \mathrm{R}$ *per ogni* $u \in \mathrm{W}^{r+<\alpha,q>}_{s-<\alpha,\tau>}(\mathrm{R}^n_+)$ *si ha* $\mathrm{D}^\alpha u \in \mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ *e:*

$$\| \mathrm{D}^\alpha u \|_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \leq c \| u \|_{\mathrm{W}^{r+<\alpha,q>}_{s-<\alpha,\tau>}(\mathrm{R}^n_+)} .$$

Dim. Dalla (3.1) e dal lemma 1.4 si ha per $u \in \mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$

$$\| \mathrm{D}^\alpha u \|_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \sim \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2s}(x_0) \| (\mathrm{D}^\alpha u)^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_0))}} \, dx_0 =$$

$$= \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2(s-<\alpha,\tau>)}(x_0) \| \mathrm{D}^\alpha_\xi u^* \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\mathrm{I}^*(x_0))}} \, dx_0 \leq$$

$$\leq c \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2(s-<\alpha,\tau>)}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^{r+<\alpha,q>}_{(\mathrm{I}^*(x_0))}} \, dx_0 \sim \| u \|^2_{\mathrm{W}^{r+<\alpha,q>}_{s-<\alpha,\tau>}(\mathrm{R}^n_+)} \; ;$$

da tale relazione e dal teorema 4.1 segue la tesi.

TEOREMA 5.3. *Siano* t, k, r *numeri reali tali che* $0 \leq t < k < r$, $s \in \mathrm{R}$. *Per ogni* $\varepsilon \in \mathrm{R}_+$ *esiste una costante* $c(\varepsilon)$ *tale che*

$$\| u \|_{\mathrm{W}^k_s(\mathrm{R}^n_+)} \leq \varepsilon \| u \|_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} + c(\varepsilon) \| u \|_{\mathrm{W}^t_s(\mathrm{R}^n_+)} \; \forall u \in \mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^n_+) .$$

Dim. Infatti in conseguenza del teorema 3.1 e del lemma 1.5 si ha per $u \in \mathfrak{D}(\tilde{R}^n_+)$

$$\| u \|^2_{W^k_s(R^n_+)} \sim \int_{R^n_+} \varrho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{W^k_{(I^*(x_0))}} \, dx_0 \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{R^n_+} \varrho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}} \, dx_0 + c(\varepsilon) \int_{R^n_+} \varrho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{W^t_{(I^*(x_0))}} \, dx_0 \sim$$

$$\sim \varepsilon \| u \|^2_{W^r_s(R^n_+)} + c(\varepsilon) \| u \|^2_{W^t_s(R^n_+)} ;$$

da tale relazione e dal teorema 4.1 segue la tesi.

TEOREMA 5.4. *Per ogni* $k, r \in R_+$, *con* $k < r$ *e per ogni* $\theta \in R_+$, *l'immersione*

$$W^r_s(R^n_+) \hookrightarrow W^k_{s-\theta}(R^n_+)$$

è compatta.

Dim. Sia $(u_n)_{n \in N}$ una successione di elementi di $W^r_s(R^n_+)$ limitata in $W^r_s(R^n_+)$:

$$\| u_m \|_{W^r_s(R^n_+)} \leq M \qquad \forall m \in N . \tag{5.1}$$

Dalla (5.1) si deduce che la successione $(\varrho^s u_m)_{m \in N}$ è limitata in $L^2(R^n_+)$ e quindi, per noti risultati, esiste una successione $(\varrho^s u'_m)_{m \in N}$, estratta da $(\varrho^s u_m)_{m \in N}$, debolmente convergente verso un elemento $w \in L^2(R^n_+)$:

$$\lim_m \int_{R^n_+} \varrho^s u'_m v \, dx = \int_{R^n_+} w v \, dx \qquad \forall v \in L^2(R^n_+) .$$

D'altra parte da (5.1) si deduce che per ogni sottoinsieme compatto $K \subset R^n_+$ la successione $(u_m)_{m \in N}$ è limitata in $W^r(K)$.

Poiché, notoriamente, l'iniezione $W^r(K) \hookrightarrow L^2(K)$ è compatta, si verifica facilmente, usando ad es. il procedimento diagonale di Cantor, che esistono una funzione u definita quasi ovunque in R^n_+ di classe $L^2(K)$ per ogni compatto $K \subset \bar{R}^n_+$, e una successione $(u''_m)_{m \in N}$ estratta da $(u'_m)_{m \in N}$ tali che:

$$\lim_m \| u''_m - u \|_{L^2_{(K)}} = 0 \qquad \forall K \text{ compatto} . \tag{5.2}$$

Dalle relazioni precedenti consegue che

$$\int_{R^n_+} (\varrho^s u - w) \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(R^n_+)$$

e quindi si ha: $\varrho^s u = w \in L^2(R^n_+)$ da cui:

$$u \in L^2_s(R^n_+) \subset L^2_{s-\theta}(R^n_+) .$$

Proviamo ora che

$$\lim_m \int_{R^n_+} \varrho^{2(s-\theta)} | u''_m - u |^2 \, dx = 0 , \tag{5.3}$$

da cui si deduce la tesi nel caso $k = 0$.

Poniamo per ogni $\varepsilon \in R_+$

$$K_\varepsilon = \{ x \in \bar{R}^n_+ : \varrho(x) \leq \varepsilon \} ,$$

si ha:

$$\int_{R^n_+} \varrho^{2(s-\theta)} | u''_m - u |^2 \, dx = \int_{R^n_+ \setminus K_\varepsilon} \varrho^{2(s-\theta)} | u''_m - u |^2 \, dx + \int_{K_\varepsilon} \varrho^{2(s-\theta)} | u''_m - u |^2 \, dx .$$

Porremo:

$$\| \varrho^s u \|^2_{L^2(R^n_+)} = L .$$

Consideriamo un arbitrario $\eta_{j_0} \in R_+$ e sia

$$\varepsilon \in R_+ \qquad \varepsilon > \left(\frac{4(M + L)}{\eta_{j_0}} \right)^{\frac{1}{2\theta}} .$$

Si ha:

$$(5.4)\qquad \int_{K_\varepsilon} \rho^{2(s-\theta)}(x)\,|\,u_m''(x) - u(x)\,|^2\,dx \le c_1 \int_{K_\varepsilon} |\,u_m''(x) - u(x)\,|^2\,dx$$

dove c_1 è una costante che dipende da ε.

$$(5.5)\qquad \int_{R_+^n \setminus K_\varepsilon} \rho^{2(s-\theta)}(x)\,|\,u_m''(x) - u(x)\,|^2\,dx \le 2\,\varepsilon^{-2\theta} \int_{R_+^n} \rho^{2s}(x)\,|\,u_m''(x)\,|^2\,dx +$$

$$+\ 2\,\varepsilon^{-2\theta} \int_{R_+^n} \rho^{2s}(x)\,|\,u(x)\,|^2\,dx \le 2\,\varepsilon^{-2\theta}\,(M+L) < \frac{\eta_0}{2}\,.$$

Tenendo presente la (5.2), si ha poi che:

$$(5.6)\qquad \exists\ \nu \in N : \forall m \in N \quad m > \nu :$$

$$c_1 \int_{k_\varepsilon} |\,u_m''(x) - u(x)\,|^2\,dx < \frac{\eta_0}{2}\,.$$

Dalle (5.4), (5.5) e (5.6) segue la (5.3).

Si stabilisce poi la tesi nel caso $k > 0$, osservando che, da quanto stabilito, segue che da una successione limitata in $W_s^r(R_+^n)$ se ne può estrarre una convergente in $L^2_{s-\theta}(R_+^n)$ ed osservando ancora che, se sussiste la (5.1), in conseguenza del teorema 5.3, si ha che una relazione del tipo

$$\|\,u_j - u_i\,\|_{L^2_{s-\theta}(R_+^n)} \le \varepsilon \,/\, c(\varepsilon)$$

implica la limitazione

$$\|\,u_j - u_i\,\|_{W^k_{s-\theta}(R_+^n)} \le (2M+1)\,\varepsilon\,.$$

6. - Spazi di moltiplicatori per $W_s^r(R_+^n)$.

Def. 6.1. Se $k \in N_0$, $\lambda \in]0,1[$, $i \in \{1,\dots n\}$ indicheremo con $M^k_{x_i}(R_+^n)$ lo spazio delle distribuzioni φ su R_+^n tali che $\partial^t_{x_i}\varphi \in L^\infty_{t\tau_i}(R_+^n)$ per ogni

$t \leq k$, munito della norma:

$$\| \varphi \|_{M^k_{x_i}(R^n_+)} = \sum_{t=0}^{k} \| \partial^t_{x_i} \varphi \|_{L^\infty_{t\tau_i}(R^n_+)}$$

con $M^{k+\lambda}_{x_i}(R^n_+)$ lo spazio delle distribuzioni φ su R^n_+ tali che $\varphi \in$ $\in M^k_{x_i}(R^n_+)$ e

$$\Phi_{ik\lambda}(\varphi) = \sup_{x_0 \in R^n_+} \rho^{2(k+\lambda)\tau_i}(x_0)$$

$$\sup_{x \in I(x_0)} \int_{I_i(x_0)} \frac{| \partial^k_{i_x} \varphi(x_1,\ldots,x_n) - \partial^k_{x_i} \varphi(x_1,\ldots,x_i',\ldots x_n) |^2}{| x_i - x_i' |^{1+2\lambda}} \, dx_i' < +\infty$$

munito della norma:

$$\| \varphi \|_{M^{k+\lambda}_{x_i}(R^n_+)} = \left(\| \varphi \|^2_{M^k_{x_i}(R^n_+)} + \Phi_{ik\lambda}(\varphi) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEF. 6.2. Se $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \bar{R}_+$ indicheremo con $M^{\ell_1,\ldots,\ell_n}(R^n_+)$ lo spazio $\bigcap_{i=1}^{n} M^{\ell_i}_{x_i}(R^n_+)$ munito della norma:

$$\| \varphi \|_{M^{\ell_1,\ldots,\ell_n}(R^n_+)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \| \varphi \|^2_{M^{\ell_i}_{x_i}(R^n_+)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEF. 6.3. Se $r \in R_+$ indicheremo con $M^r(R^n_+)$ lo spazio $M^{r/q_1,\ldots,r/q_n}(R^n_+)$ munito della norma

$$\| \varphi \|_{M^r(R^n_+)} = \| \varphi \|_{M^{r/q_1,\ldots,r/q_n}(R^n_+)}.$$

LEMMA 6.1. *Qualunque sia* $r \in \bar{R}_+$ *si ha*:

$$\| \varphi \|^2_{M^r(R^n_+)} \sim \sup_{x_0 \in R^n_+} \| \varphi^* \|^2_{A^r_{(I^s(x_0))}} \quad \forall \varphi \in M^r(R^n_+).$$

Dim. Se $k \in \mathrm{N}_0$ si ha:

$$\| \varphi^* \|_{\mathrm{A}^k_{x_i}(\mathrm{I}^*(x_0))} = \sum_{t=0}^{k} \| \partial^t_{\xi_i} \varphi^* \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{I}^*(x_0))} = \sum_{t=0}^{k} \sup_{\xi \in \mathrm{I}^*(x_0)} | \partial^t_{\xi_i} \varphi^* | =$$

$$= \sum_{t=0}^{k} \sup_{x \in \mathrm{I}(x_0)} | \rho^{t\tau_i}(x_0) \partial^t_{x_i} \varphi | \leq c_1 \sum_{t=0}^{k} \sup_{x \in \mathrm{R}^n_+} | \rho^{t\tau_i}(x) \partial^t_{x_i} \varphi | =$$

$$= c_1 \| \varphi \|_{\mathrm{M}^k_{x_i}(\mathrm{R}^n_+)} ;$$

da cui segue che

$$\sup_{x_0 \in \mathrm{R}^n_+} \| \varphi^* \|_{\mathrm{A}^k_{x_i}(\mathrm{I}^*(x_0))} \leq c_1 \| \varphi \|_{\mathrm{M}^k_{x_i}(\mathrm{R}^n_+)} .$$

Inoltre si ha

$$\| \varphi \|_{\mathrm{M}^k_{x_i}(\mathrm{R}^n_+)} = \sum_{t=0}^{k} \sup_{x \in \mathrm{R}^n_+} | \rho^{t\tau_i}(x) \partial^t_{x_i} \varphi | \leq c_2 \sup_{x_0 \in \mathrm{R}^n_+} \sum_{t=0}^{k} \sup_{x \in \mathrm{I}(x_0)} | \rho^{t\tau_i}(x_0) \partial^t_{x_i} \varphi | =$$

$$= c_2 \sup_{x_0 \in \mathrm{R}^n_+} \sum_{t=0}^{k} \sup_{\xi \in \mathrm{I}^*(x_0)} | \partial^t_{\xi_i} \varphi^* | = c_2 \sup_{x_0 \in \mathrm{R}^n_+} \| \varphi^* \|_{\mathrm{A}^k_{x_i}(\mathrm{I}^*(x_0))} .$$

Se $k \in \mathrm{N}_0$ e $\lambda \in]0, 1[$ si ha:

$$\sup_{\xi \in \mathrm{I}^*(x_0)} \int_{\mathrm{I}^*_i(x_0)} \frac{| \partial^k_{\xi_i} \varphi^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) - \partial^k_{\xi_i} \varphi^*(\xi_1, \ldots, \xi'_i, \ldots, \xi_n) |^2}{| \xi_i - \xi'_i |^{1+2\lambda}} d\xi'_i =$$

$$= \rho^{2(k+\lambda)\tau_i}(x_0) \sup_{x \in \mathrm{I}(x_0)} \int_{\mathrm{I}_i(x_0)} \frac{| \partial^k_{x_i} \varphi(x_1, \ldots, x_n) - \partial^k_{x_i} \varphi(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n) |^2}{| x_i - x'_i |^{1+2\lambda}} dx'_i \leq$$

$$\leq \sup_{x_0 \in \mathrm{R}^n_+} \rho^{2(k+\lambda)\tau_i}(x_0) \sup_{x \in \mathrm{I}(x_0)} \int_{\mathrm{I}_i(x_0)} \frac{| \partial^k_{x_i} \varphi(x_1, \ldots, x_n) - \partial^k_{x_i} \varphi(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n) |^2}{| x_i - x'_i |^{1+2\lambda}} dx'_i .$$

D'altra parte si ha banalmente:

$$\sup_{x_0 \in R^n_+} \rho^{2(k+\lambda)\tau_i}(x_0) \sup_{x \in I(x_0)} \int_{I_i(x_0)} \frac{|\partial^k_{x_i} \varphi(x_1,\ldots,x_n) - \partial^k_{x_i} \varphi(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n)|^2}{|x_i - x_i'|^{1+2\lambda}} dx_i' =$$

$$= \sup_{x_0 \in R^n_+} \left(\sup_{\xi \in I^*(x_0)} \int_{I_i^*(x_0)} \frac{|\partial^k_{\xi_i} \varphi^*(\xi_1,\ldots,\xi_n) - \partial^k_{\xi_i} \varphi^*(\xi_1,\ldots,\xi_i',\ldots,\xi_n)|^2}{|\xi_i - \xi_i'|^{1+2\lambda}} d\xi_i' \right.$$

Dalle precedenti relazioni segue la tesi.

LEMMA 6.2. *Per ogni* $r, r' \in \bar{R}_+$ *tali che* $r \leq r'$ *sussiste l'inclusione algebrica e topologica*:

$$M^{r'}(R^n_+) \subset M^r(R^n_+).$$

Dim. Dal precedente lemma 6.1 e da lemma 1.7 si ha:

$$\| \varphi \|^2_{M^{r'}(R^n_+)} \sim \sup_{x_0 \in R^n_+} \| \varphi^* \|^2_{A^{r'}_{(I^*(x_0))}} \leq$$

$$\leq c \sup_{x_0 \in R^n_+} \| \varphi^* \|^2_{A^r_{(I^*(x_0))}} \sim \| \varphi \|^2_{M^r(R^n_+)}.$$

TEOREMA 6.1. *Se* $r \in \bar{R}_+$ *e* $s \in R$, *per ogni* $\varphi \in M^r(R^n_+)$ *e per ogni* $u \in W^r_s(R^n_+)$ *si ha*: $\varphi u \in W^r_s(R^n_+)$

$$\| \varphi u \|_{W^r_s(R^n_+)} \leq c \| u \|_{W^r_s(R^n_+)} \| \varphi \|_{M^r(R^n_+)}$$

dove c *è una costante indipendente da* φ *e da* u.

Dim. Sappiamo che per ogni $x_0 \in R^n_+$:

$$\varphi \in M^r(R^n_+) \Rightarrow \varphi^* \in A^r(I^*(x_0))$$

$$u \in W^r_s(R^n_+) \Rightarrow u^* \in W^r(I^*(x_0))$$

e inoltre che

$$\| \varphi^* u^* \|_{W^r(I^*(x_0))} \leq c \| \varphi^* \|_{A^r(I^*(x_0))} \| u^* \|_{W^r(I^*(x_0))}$$

dove c è una costante indipendente da φ e da u.

Da tali relazioni e dal teorema 3.1 e dal lemma 6.1 si ha:

$$\| \varphi u \|^2_{W^r_s(R^n_+)} \sim \int_{R^n_+} \rho^{2s}(x_0) \| \varphi^* u^* \|_{W^r(I^*(x_0))} \, dx_0 \leq$$

$$\leq c \int_{R^n_+} \rho^{2s}(x_0) \| \varphi^* \|^2_{A^r_{(I^*(x_0))}} \cdot \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}} \, dx_0 \leq$$

$$\leq c \sup_{x_0 \in R^n_+} \| \varphi^* \|^2_{A^r_{(I^*(x_0))}} \int_{R^n_+} \rho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0))}} \, dx_0 \sim$$

$$\sim \| \varphi \|^2_{M^r(R^n_+)} \| u \|^2_{W^r_s(R^n_+)} .$$

7. - Spazi di tracce per gli spazi $W^r_s(R^n_+)$.

Nel seguito indicheremo con $\bar{\rho}$ la funzione

$$\bar{\rho} : y \in R^{n-1} \to \rho(y, 0) .$$

Per ogni $y_0 \in R^{n-1}$ porremo:

$$I_i(y_0) = I_i(y_0, 0) , \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

$$I(y_0) = I_1(y_0) \times \ldots \times I_{n-1}(y_0)$$

e indicheremo con $\bar{\varphi}(\cdot, y_0)$ la funzione caratteristica di $I(y_0)$.

Per ogni $y, y' \in R^{n-1}$ porremo:

$$\bar{\rho}(y, y') = \frac{\bar{\rho}(y) + \bar{\rho}(y')}{2} , \quad \bar{g}(y, y') = \int_{R^{n-1}} \bar{\varphi}(y, y_0) \cdot \bar{\varphi}(y', y_0) \, dy_0 .$$

Inoltre, assegnati $y_o \in R^{n-1}$, $u : R^{n-1} \to C$, $A \subset R^{n-1}$ porremo:

$$\Phi_{y_o} : y \in R^{n-1} \to \eta_i = \left(\frac{y_1 - y_{o1}}{\bar{\rho}^{\tau_1}(y_o)} + y_{o1}, \ldots, \frac{y_{n-1} - y_{on-1}}{\bar{\rho}^{\tau_{n-1}}(y_o)} + y_{on-1} \right),$$

$$u^{*}_{y_o} = u \circ \Phi^{-1}_{y_o}, \quad A^{*}_{y_o} = \Phi_{y_o}(A)$$

e, quando non vi sia possibilità di equivoci, indicheremo Φ_{y_o}, $u^{*}_{y_o}$, $A^{*}_{y_o}$ rispettivamente con Φ, u^*, A^*.

In particolare $I^*(y_o)$ denoterà l'insieme trasformato di $I(y_o)$ mediante la sostituzione:

$$y_i - y_{oi} = \bar{\rho}^{\tau_i}(y_o)(\eta_i - y_{oi}) \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

e per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ $I^{*}_{i}(y_o)$ denoterà l'insieme trasformato di $I_i(y_o)$ mediante la sostituzione

$$y_i - y_{oi} = \bar{\rho}^{\tau_i}(y_o)(\eta_i - y_{oi}).$$

Infine qualunque siano $y \in R^{n-1}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $h \in R$, $\tau_i \in]0, 1]$ porremo: $y^{ih} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i + h, y_{i+1}, \ldots, y_{n-1})$, $|\tau'| = \tau_1 + \ldots + \tau_{n-1}$.

DEF. 7.1. Assegnati $k \in N_o$, $\lambda \in]0, 1[$, $s \in R$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ indicheremo: con $W^{k}_{s, y_i}(R^{n-1})$ lo spazio delle distribuzioni u su R^{n-1} tali che $\bar{\rho}^{s+\tau_i t}(y)\, \partial^{t}_{y_i} u \in L^2(R^{n-1})$ per $t = 0, \ldots, k$ munito della norma:

$$\| u \|_{W^{k}_{s, y_i}(R^{n-1})} = \left(\sum_{t=0}^{k} \| \bar{\rho}^{s+\tau_i t}(y)\, \partial^{t}_{y_i} u \|^{2}_{L^2(R^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}};$$

con $W^{k+\lambda}_{s, y_i}(R^{n-1})$ lo spazio delle $u \in W^{k}_{s, y_i}(R^{n-1})$ tali che

$$\bar{L}_{sik\lambda}(u) = \int_{R_+} \frac{dh}{h^{1+2\lambda}} \int_{R^{n-1}} (\bar{\rho}^{2(s+\tau_i k+\tau_i \lambda)-|\tau'|}\, \bar{g})(y, y^{ih}) |\partial^{k}_{y_i} u(y^{ih}) - \partial^{k}_{y_i} u(y)|^2 dy < +\infty$$

munito della norma:

$$\| u \|_{W^{k+\lambda}_{s, y_i}(R^{n-1})} = \left(\| u \|_{W^{k}_{s, y_i}(R^{n-1})} + \bar{L}_{sik\lambda}(u) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEF. 7.2. Se $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1} \in \bar{\mathbb{R}}_+$ e $s \in \mathbb{R}$ indicheremo con $W_s^{\ell_1,\ldots,\ell_{n-1}}(\mathbb{R}^{n-1})$ lo spazio $\bigcap_{i=1}^{n-1} W_{s,y_i}^{\ell_i}(\mathbb{R}^{n-1})$ munito della norma:

$$\| u \|_{W_s^{\ell_1,\ldots,\ell_{n-1}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \| u \|^2_{W_{s,y_i}^{\ell_i}(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

DEF. 7.3. Se $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$ e $s \in \mathbb{R}$ indicheremo con $W_s^r(\mathbb{R}^{n-1})$ lo spazio $W_s^{r/q_1,\ldots,r/q_{n-1}}(\mathbb{R}^{n-1})$ munito della norma:

$$\| u \|_{W_s^r(\mathbb{R}^{n-1})} = \| u \|_{W_s^{r/q_1,\ldots,r/q_{n-1}}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Con ragionamenti analoghi a quelli tenuti per dimostrare il teorema 3.1 si prova il seguente:

TEOREMA 7.1. *Qualunque siano* $s \in \mathbb{R}$ *e* $r \in \bar{\mathbb{R}}_+$ *si ha:* $u \in W_s^r(\mathbb{R}^{n-1})$ *se e solo se* $(y_0 \to \bar{\rho}^s(y_0) \| u^* \|_{W^r(I^*(y_0))}) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$; inoltre:

$$\| u \|^2_{W_s^r(\mathbb{R}^{n-1})} \sim \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bar{\rho}^{2s}(y_0) \| u^{\bar{*}} \|^2_{W^r(I^{\bar{*}}(y_0))} \, dy_0 . \tag{7.1}$$

Passiamo ora a dimostrare il seguente teorema di tracce:

TEOREMA 7.2. *Qualunque siano* $r \in]q_n/2, +\infty[$ *e* $s \in \mathbb{R}$ *l'applicazione* $\gamma_0 : u \in \mathfrak{D}(\bar{\mathbb{R}}^n_+) \to \gamma_0 u = u|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ *si prolunga per continuità in un'applicazione, che denotiamo ancora con* γ_0, *lineare e continua da* $W_s^r(\mathbb{R}^n_+)$ *in* $W_{s+\tau_n/2}^{r-q_n/2}(\mathbb{R}^{n-1})$..

Dim. Assegniamo $u \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n_+)$. In conseguenza del teorema 7.1 si ha:

$$\| \gamma_0 u \|^2_{W_{s+\tau_n/2}^{r-q_n/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \sim \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bar{\rho}^{2s+\tau_n}(y_0) \| (\gamma_0 u)^{\bar{*}} \|^2_{W_{\xi_i}^{r-q_n/2}(I^{\bar{*}}(y_0))} \, dy_0 = \tag{7.2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bar{\rho}^{2s+\tau_n}(y_0) \| (\gamma_0 u)^{\bar{*}} \|^2_{W_{\xi_i}^{(r-q_n/2)/q_i}(I^{\bar{*}}(y_0))} \, dy_0 .$$

Porremo:

$$(r - q_n/2)/q_i = k_i + \lambda_i \,, \quad k_i \in \mathrm{N_o} \ \text{ e } \ \lambda_i \in \,]0,1[\,, \quad i = 1, \ldots, n-1 \,.$$

Siano $y_o \in \mathrm{R}^{n-1}$ e $t_o \in \,]0, \bar{\rho}^{\tau_n}(y_o)[$ e poniamo $x_o = (y_o, t_o)$.
In conseguenza della (2.2) risulta

$$(7.3) \qquad \rho(y_o\, t_o) \sim \bar{\rho}(y_o) \quad \text{e} \quad \| u \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I}(y_o))} \sim \| u \|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I}(x_o) \cap \mathrm{R}^{n-1})} \,.$$

Ne segue:

$$(7.4) \qquad \sum_{t=0}^{k_i} \| \partial_{\xi_i}^t (\gamma_o u)^{\overline{x}} \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I}^{\overline{x}}(y_o))} = \sum_{t=0}^{k_i} \bar{\rho}^{2t\tau_i - |\tau'|}(y_o) \| \partial_{x_i}^t (\gamma_o u) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I}(y_o))} \sim$$

$$\sim c \sum_{t=0}^{k_i} \rho^{2t\tau_i - |\tau'|}(x_o) \| \partial_{x_i}^t (\gamma_o u) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I}(x_o) \cap \mathrm{R}^{n-1})} =$$

$$= c \sum_{t=0}^{k_i} \| \partial_{\xi_i}^t \gamma_o^* u^* \|^2_{\mathrm{L}^2[(\mathrm{I}(x_o) \cap \mathrm{R}^{n-1})^*]}$$

dove si è posto $\gamma_o^* u^* = (\gamma_o u)^* = u^* \,|_{(\mathrm{R}^{n-1})^*}$.

Inoltre

$$(7.5) \qquad \int_{\mathrm{I}_i^{\overline{x}}(y_o) \times \mathrm{I}^{\overline{x}}(y_o)} \frac{| \partial_{\eta_i}^{k_i} (\gamma_o u)^{\overline{x}}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) - \partial_{k_i}^{\eta_i} (\gamma_o u)^{\overline{x}}(\eta_1, \ldots, \eta_i', \ldots, \eta_{n-1}) |^2}{| \eta_i - \eta_i' |^{1+2\lambda_i}} \, d\eta_i' \, d\eta =$$

$$= \int_{\mathrm{I}_i(y_o) \times \mathrm{I}(y_o)} \bar{\rho}^{2k_i\tau_i - |\tau'|}(y_o) \, \bar{\rho}^{(1+2\lambda_i)\tau_i - \tau_i}(y_o)$$

$$\frac{| \partial_{y_i}^{k_i} (\gamma_o u)(y_1, \ldots, y_{n-1}) - \partial_{y_i}^{k_i} (\gamma_o u)(y_1, \ldots, y_i', \ldots, y_{n-1}) |^2}{| y_i - y_i' |^{1+2\lambda_i}} \, dy_i' \, dy \sim$$

$$\sim c \rho^{2(k_i + \lambda_i)\tau_i - |\tau'|}(x_o)$$

$$\int_{\mathrm{I}_i(y_o) \times (\mathrm{I}(x_o) \cap \mathrm{R}^{n-1})} \frac{| \partial_{y_i}^{k_i} (\gamma_o u)(y_1, \ldots, y_{n-1}) - \partial_{y_i}^{k_i} (\gamma_o u)(y_1, \ldots, y_i', \ldots, y_{n-1}) |^2}{| y_i - y_i' |^{1+2\lambda_i}} \, dy_i' \, dy =$$

$$= \int_{(\mathrm{I}_i(y_o) \times (\mathrm{I}(x_o) \cap \mathrm{R}^{n-1}))^*} \frac{| \partial_{\eta_i}^{k_i} (\gamma_o^* u^*)(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) - \partial_{\eta_i}^{k_i} (\gamma_o^* u^*)(\eta_1, \ldots, \eta_i', \ldots, \eta_{n-1}) |^2}{| \eta_i - \eta_i' |^{1+2\lambda_i}} \, d\eta_i' \, d\eta \,.$$

Dalle precedenti relazioni si deduce che per ogni $y_0 \in R^{n-1}$ e per ogni $t_0 \in]0, \bar{\rho}^{\tau_n}(y_0)[$ si ha:

$$(7.6) \qquad \| (\gamma_0 u)^{\overline{x}} \|^2_{W^{r-q_n/2}(I^{\overline{x}}(y_0))} \sim c \| \gamma_0^* u^* \|^2_{W^{r-q_n/2}(I(y_0,t_0) \cap R^{n-1})^*}$$

dove c è costante indipendente da y_0, t_0 e da u.

Dalla (7.6) e dal lemma 1.8 segue:

$$(7.7) \qquad \| (\gamma_0 u)^{\overline{x}} \|_{W^{r-q_n/2}(I^{\overline{x}}(y_0))} \leq c_0 \| u^* \|_{W^r_{(I^*(y_0,t_0))}}$$

$$\forall y_0 \in R^{n-1}, \quad \forall t_0 \in]0, \bar{\rho}^{\tau_n}(y_0)[\, .$$

D'altra parte osserviamo che in conseguenza della (7.3) si ha:

$$(7.8) \qquad \int_0^{\bar{\rho}^{\tau_n}(y_0)} \rho^{2s}(y_0, t_0)\, dt_0 \sim \bar{\rho}^{2s}(y_0) \int_0^{\bar{\rho}^{\tau_n}(y_0)} dt_0 = c\, \bar{\rho}^{2s+\tau_n}(y_0) \, ,$$

dove c è una costante indipendente da y_0.

Dalle (7.2), (7.7) e (7.8) segue che si ha per ogni $u \in \mathcal{D}(\bar{R}^n_+)$

$$\| \gamma_0 u \|^2_{W^{r-q_n/2}_{s+\tau_n/2}(R^{n-1})} \leq c_1 \int_{R^{n-1}} \left(\int_0^{\bar{\rho}^{\tau_n}(y_0)} \rho^{2s}(y_0, t_0) \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(y_0,t_0))}} dt_0 \right) dy_0 \leq$$

$$\leq c_1 \int_{R^n_+} \rho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{W^r_{(I^*(x_0)}} dx_0 \, .$$

Da tale relazione e dai teoremi 3.1 e 4.1 si deduce la tesi.

8. - Gli spazi $W^r(\Omega, \theta)$.

Nel seguito porremo $\tau_i = \dfrac{m}{m_i} \eta$, $i = 1, \ldots, n$ dove η è un assegnato numero reale positivo tale da rendere $\tau_i \leq 1$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ come richiesto al n. 2.

Ovviamente sarà $\eta \leq \dfrac{m'}{m}$, avendo denotato con m' il minimo dei numeri $m_1, \ldots, m_n$.

Sia ora Ω l'aperto definito al n. 1.

Seguendo M. S. AGRANOVICH - M. I. VISHICH [2], diamo la seguente:

DEF. 8.1. Comunque si assegnino $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ e $\theta \in \mathrm{C}$ indicheremo con $\mathrm{W}^r(\Omega, \theta)$ lo spazio delle distribuzioni $u \in \mathrm{W}^r(\Omega)$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{W}^r(\Omega,\theta)} = \left(\| u \|^2_{\mathrm{W}^r(\Omega)} + | \theta |^{2r\eta} \| u \|^2_{\mathrm{W}^0(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

con $\mathrm{H}^r(\Omega, \theta)$ lo spazio delle distribuzioni $u \in \mathrm{H}^r(\Omega)$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{H}^r(\Omega,\theta)} = \left(\| u \|^2_{\mathrm{H}^r(\Omega)} + | \theta |^{2r\eta} \| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Come ovvia conseguenza de lemma 1.1 si ha:

LEMMA 8.1. *Per ogni* $r \in \mathrm{R}_+$ *e per ogni* $\theta \in \mathrm{C}$, *i due spazi* $\mathrm{W}^r(\Omega, \theta)$ *e* $\mathrm{H}^r(\Omega, \theta)$ *sono isomorfi algebricamente e topologicamente.*

Inoltre come conseguenza del lemma 1.2 si ha:

LEMMA 8.2. *Per ogni* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *è denso in* $\mathrm{W}^r(\Omega, \theta)$. *Se* $r \leq r'$ *allora si ha:* $\mathrm{W}^{r'}(\Omega, \theta) \subset \mathrm{W}^r(\Omega, \theta)$ *algebricamente e topologicamente.*

Proviamo ora il seguente:

LEMMA 8.3. *Comunque si assegnino* $r \in \mathrm{R}_+$, $0 \leq \ell \leq r$, $\theta \in \mathrm{C}$ *si ha:*

$$(8.1) \qquad | \theta |^{2\ell\eta} \| u \|^2_{\mathrm{W}^{r-\ell}(\Omega,\theta)} \leq c \| u \|^2_{\mathrm{W}^r_{(\Omega,\theta)}} \qquad \forall u \in \mathrm{W}^r(\Omega, \theta)$$

dove c è una costante indipendente da u e da θ.

Dim. Cominciamo con l'osservare che risulta:

$$(8.2) \quad | q |^{2\ell} (1 + \langle \xi \rangle^2)^{r-\ell} \leq (1 + | q |^2 + \langle \xi \rangle^2)^r \quad \forall q \in \mathrm{C}, \ \forall \xi \in \mathrm{R}^n.$$

Infatti, se $|q| \leq \langle\xi\rangle$ si ha:

$$|q|^{2\ell}(1 + \langle\xi\rangle^2)^{r-\ell} \leq \langle\xi\rangle^{2\ell}(1 + \langle\xi\rangle^2)^{r-\ell} \leq$$

$$\leq (1 + \langle\xi\rangle^2)^r \leq (1 + |q|^2 + \langle\xi\rangle^2)^r .$$

Se invece $\langle\xi\rangle < |q|$ si ha:

$$|q|^{2\ell}(1 + \langle\xi\rangle^2)^{r-\ell} \leq |q|^{2\ell}(1 + |q|^2)^{r-\ell} \leq$$

$$\leq (1 + |q|^2)^r \leq (1 + |q|^2 + \langle\xi\rangle^2)^r .$$

Assegniamo ora $u \in H^r(R^n, \theta)$. Dalla (8.2) scritta con $|q| = |\theta|^\eta$ segue:

$$|\theta|^{2\ell\eta}(1 + \langle\xi\rangle^2)^{r-\ell}|\hat{u}|^2 \leq (1 + |\theta|^{2\eta} + \langle\xi\rangle^2)^r|\hat{u}| \qquad \forall\xi \in R^n .$$

Integrando su R^n si ha:

$$|\theta|^{2\ell\eta}\|u\|^2_{H^{r-\ell}(R^n)} \leq c_1\left(\|u\|^2_{H^r(R^n)} + |\theta|^{2r\eta}\|u\|^2_{L^2(R^n)}\right) \tag{8.3}$$

dove c_1 è una costante indipendente da u e da θ.

Dalla (8.3) si deduce:

$$|\theta|^{2\ell\eta}\|u\|^2_{H^{r-\ell}(R^n,\theta)} =$$

$$= |\theta|^{2\ell\eta}\left(\|u\|^2_{H^{r-\ell}(R^n)} + |\theta|^{2(r-\ell)\eta}\|u\|^2_{L^2(R^n)}\right) =$$

$$= |\theta|^{2\ell\eta}\|u\|^2_{H^{r-\ell}(R^n)} + |\theta|^{2r\eta}\|u\|^2_{L^2(R^n)} \leq$$

$$\leq c_1\left(\|u\|^2_{H^r(R^n)} + |\theta|^{2r\eta}\|u\|^2_{L^2(R^n)}\right) + |\theta|^{2r\eta}\|u\|^2_{L^2(R^n)} \leq$$

$$\leq c\|u\|^2_{H^r(R^n,\theta)} .$$

Da quest'ultima relazione e dal lemma 8.1 si deduce la (8.1) nel caso $\Omega = R^n$.

Facendo ora uso del lemma 1.3 si ha per $u \in W^r(\Omega, \theta)$:

$$|\theta|^{2\ell\eta} \, \| u \|_{W^{r-\ell}(\Omega,\theta)} \leq |\theta|^{2\ell\eta} \, \| p\, u \|^2_{W^{r-\ell}(R^n,\theta)} \leq$$

$$\leq c_1 \, \| p\, u \|^2_{W^r(R^n,\theta)} \leq c_2 \, \| u \|_{W^r(\Omega,\theta)}$$

e quindi la tesi.

LEMMA 8.4. *Comunque si assegnino* $r \in \bar{R}_+$, $\alpha \in N^n_o$ *e* $u \in W^{r+<\alpha,q>}(\Omega,\theta)$ *si ha* $D^\alpha u \in W^r(\Omega,\theta)$ *e*

$$\| D^\alpha u \|^2_{W^r(\Omega,\theta)} \leq c \, \| u \|^2_{W^{r+<\alpha,q>}(\Omega,\theta)} ,$$

dove c è una costante indipendente da u e da θ.

Dim. Assegnata $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ si ha in conseguenza dei lemmi 1.4 e 8.3

$$\| D^\alpha u \|^2_{W^r(\Omega,\theta)} = \| D^\alpha u \|^2_{W^r(\Omega)} + |\theta|^{2r\eta} \, \| D^\alpha u \|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_1 \, \| u \|^2_{W^{r+<\alpha,q>}(\Omega)} + c_2 \, |\theta|^{2r\eta} \, \| u \|^2_{W^{<\alpha,q>}(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_1 \, \| u \|^2_{W^{r+<\alpha,q>}(\Omega,\theta)} + c_2 \, |\theta|^{2r\eta} \, \| u \|^2_{W^{<\alpha,q>}(\Omega,\theta)} \leq$$

$$\leq c_1 \, \| u \|^2_{W^{r+<\alpha,q>}(\Omega,\theta)} + c_3 \, \| u \|^2_{W^{r+<\alpha,q>}(\Omega,\theta)} .$$

Da tale relazione e dal lemma 8.2 si deduce la tesi.

Passiamo ora a stabilire il seguente teorema di tracce, dove facciamo uso delle notazioni del n. 1.

TEOREMA 8.1. *Qualunque siano* $r \in]q_n/2, +\infty[$ *e* $\theta \in C$, *l'applicazione* $\gamma_a : u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) \to u(x_1, \ldots, x_{n-1}, a)$ *si prolunga per continunità in un'applicazione, che denotiamo ancora con* γ_a, *lineare e continua da* $W^r(\Omega,\theta)$ *in* $W^{r-q_n/2}(\Omega',\theta)$ *e avente norma indipendente da* θ.

Dim. Cominciamo col provare che

$$(8.4) \quad \| \gamma_a u \|_{W^{r-q_n/2}(R^{n-1},\theta)} \leq c \, \| u \|_{W^r(R^n,\theta)} \quad \forall u \in \mathfrak{D}(\bar{R}^n) , \ \forall \theta \in C$$

dove c è una costante indipendente da u.

Infatti dal lemma 1.8 si ha:

$$(8.5) \qquad \| \gamma_a u \|^2_{W^{r-q_n/2}(R^{n-1})} \leq c_1 \| u \|^2_{W^r(R^n_a)} \leq c_2 \| u \|^2_{W^r(R^n,\theta)} .$$

Proviamo che:

$$(8.6) \qquad |\theta|^{2(r-q_n/2)\eta} \| \gamma_a u \|^2_{L^2(R^{n-1})} \leq c_3 \| u \|^2_{W^r(R^n,\theta)} .$$

A tale scopo, denotate con $F' u$ e $F_n u$ rispettivamente le trasformate di Fourier rispetto alle prime $n-1$ variabili e rispetto alla n-esima variabile e posto $|\theta|^\eta = |q|^{\frac{m_n}{m}}$ osserviamo che:

$$|\theta|^{2(r-q_n/2)\eta} \| \gamma_a u \|^2_{L^2(R^{n-1})} = |q|^{2r-\frac{m_n}{m}-1} \int_{R^{n-1}} |F' u(\xi', a)|^2 d\xi'$$

e quindi, osservando che

$$F' u(\xi', a) = (F_n^{-1} F_n F' u)(\xi', a) = F_n^{-1} \hat{u}(\xi', a) = 1/2\pi \int_R e^{i<a,\xi_n>} \hat{u}(\xi) d\xi_n ,$$

$$|\theta|^{2(r-q_n/2)\eta} \| \gamma_a u \|^2_{L^2(R^{n-1})} \leq 1/(2\pi)^2 |q|^{2rm_n/m-1} \int_{R^{n-1}} \left(\int_R |\hat{u}(\xi)| d\xi_n \right)^2 d\xi' .$$

D'altra parte, moltiplicando e dividendo per $(1+|q|^{2m_n/m}+|\xi_n|^{2m_n/m})^{r/2}$ e applicando la disuguaglianza di Schwartz si ottiene:

$$\left(\int_R |\hat{u}(\xi)| d\xi_n \right)^2 \leq$$

$$\leq \int_R \left(1+|q|^{2\frac{m_n}{m}}+|\xi_n|^{2\frac{m_n}{m}} \right)^r |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_n \int_R \frac{d\xi_n}{\left(1+|q|^{2\frac{m_n}{m}}+|\xi_n|^{2\frac{m_n}{m}}\right)^r}$$

dove l'ultimo integrale a secondo membro, con la posizione $\frac{|\xi_n|}{1+|q|} = y$

è equivalente alla quantità $\dfrac{1}{1+|q|^{2-\frac{m_n}{m}r-1}} \int\limits_{R} \dfrac{dy}{1+|y|^{2\frac{m_n}{m}r}}$ in cui l'integrale converge per l'ipotesi $r > \dfrac{m}{2m_n}$.

Ne segue:

$$\left(\int\limits_{R} |\hat{u}(\xi)|\, d\xi_n \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{c_4}{1+|q|^{2-\frac{m_n}{m}r-1}} \int\limits_{R} \left(1+|q|^{2\frac{m_n}{m}} + |\xi_n|^{2-\frac{m_n}{m}} \right)^r |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi_n \leq$$

$$\leq \frac{c_4}{1+|q|^{2\frac{m_n}{m}r-1}} \int\limits_{R} (1+|\theta|^{2\eta} + \langle \xi \rangle)^r |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi_n$$

dove evidentemente c_4 non dipende da u né da θ.

Dalle precedenti relazioni segue la (8.6) dove $c_3 = c_4/(2\pi)^2$.

Le (8.5) e (8.6), se si tiene conto della definizione 8.1, implicano la (8.4).

Dalla (8.4) e dal lemma 8.2 si deduce che γ_a si prolunga in un'applicazione denotata ancora con γ_a, lineare e continua da $W^r(R^n, \theta)$ in $W^{r-q_n/2}(R^{n-1}, \theta)$ ed avente norma indipendente da u e da θ.

Consideriamo ora l'operatore di prolungamento p definito al n. 1.

Dalle proprietà di p (cfr. il n. 1) e da quanto sopra stabilito si ha per ogni $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$

$$\|\gamma_a u\|_{W^{r-q_n/2}(\Omega', \theta)} \leq c_1 \|\gamma_a(p u)\|_{W^{r-q_n/2}(R^{n-1}, \theta)} \leq c_2 \|p u\|_{W^r(R^n, \theta)} \leq$$

$$\leq c_3 \|u\|_{W^r(\Omega, \theta)}$$

dove c_1, c_2 e c_3 sono delle costanti indipendenti da u.

Da quest'ultima relazione si deduce la tesi.

9. - Gli spazi $U_s^r(R_+^n)$.

Nel seguito, assegnato $r \in R_+$ porremo:

$$k_i = [r/q_i], \quad \lambda_i = r/q_i - [r/q_i], \quad i = 1, \ldots, n, \quad J = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_i > 0\}.$$

DEF. 9.1. Per ogni $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ e per ogni $s \in \mathrm{R}$ indicheremo con $\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ il il completamento di $\mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$ rispetto alla norma:

$$(9.1) \qquad \| u \|_{\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{k_i} \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2s}(x) \, | \, \partial^t_{x_i} u \, |^2 \, dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i \in \mathrm{J}} \int_{\mathrm{R}_+} \frac{dh}{h^{1+2\lambda_i}} \int_{\mathrm{R}^n_+} (\rho^{2s-|\tau|} g)(x, x^{ih}) \, | \, \partial^{k_i}_{x_i} u(x) - \partial^{k_i}_{x_i} u(x^{ih}) \, |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

dove l'ultima somma non figura se $\mathrm{J} = \Phi$.

DEF. 9.2. Per ogni $r \in \mathrm{R}_+$ e $s \in \mathrm{R}$ indicheremo con $\mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ lo spazio delle distribuzioni $u \in \mathrm{W}^r_{s-r\eta}(\mathrm{R}^n_+) \cap \mathrm{W}^0_s(\mathrm{R}^n_+)$ munito della norma:

$$(9.2) \qquad \| u \|_{\mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} = \left(\| u \|^2_{\mathrm{W}^r_{s-r\eta}(\mathrm{R}^n_+)} + \| u \|^2_{\mathrm{W}^0_s(\mathrm{R}^n_+)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

TEOREMA 9.1. *Qualunque siano* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *e* $s \in \mathrm{R}$ *si ha* $u \in \mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$ *se e solo se* $(x_0 \to \rho^{s-r\eta}(x_0) \, \| u^* \|_{\mathrm{W}^r(\mathrm{I}^*(x_0), \rho(x_0))}) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n_+)$ *inoltre:*

$$\| u \|^2_{\mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \sim \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2(s-r\eta)}(x_0) \, \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{I}^*(x_0), \rho(x_0))} \, dx_0 .$$

Dim. Infatti dalla definizione 9.2 e dal teorema 3.1 si ha:

$$\| u \|_{\mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \sim \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2(s-r\eta)}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{I}^*(x_0))} \, dx_0 + \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2s}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^0(\mathrm{I}^*(x_0))} \, dx_0 =$$

$$= \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2(s-r\eta)}(x_0) \left[\| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{I}^*(x_0))} + \rho^{2r\eta}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^0(\mathrm{I}^*(x_0))} \right] dx_0 =$$

$$= \int_{\mathrm{R}^n_+} \rho^{2(s-r\eta)}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{I}^*(x_0), \rho(x_0))} \, dx_0 .$$

TEOREMA 9.2. *Qualunque siano* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *e* $s \in \mathrm{R}$, $\mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$ *è denso in* $\mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$.

Dim. Faremo uso delle notazioni e dei risultati del n. 4.

Assegniamo $u \in \mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+) = \mathrm{W}^r_{s-r\eta}(\mathrm{R}^n_+) \cap \mathrm{W}^o_s(\mathrm{R}^n_+)$; in virtù del lemma 4.4 si ha:

$$\forall k \in \mathrm{N} \qquad \delta_k u - u \in \mathrm{W}^r_{s-r\eta}(\mathrm{R}^n_+) \cap \mathrm{W}^o_s(\mathrm{R}^n_+) \text{ e inoltre}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \| \delta_k u - u \|_{\mathrm{W}^r_{s-r\eta}(\mathrm{R}^n_+)} = \lim_{k \to +\infty} \| \delta_k u - u \|_{\mathrm{W}^o_s(\mathrm{R}^n_+)} = 0$$

da cui si deduce che

$$\lim_{k \to +\infty} \| \delta_k u - u \|_{\mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} = 0 . \tag{9.2}$$

D'altra parte, poiché per ogni $k \in \mathrm{N}$ supp $(\delta_k u)$ è un compatto, per il lemma 4.3 si ha:

$$\forall k \in \mathrm{N} \qquad \delta_k u \in \mathrm{W}^r(\mathrm{R}^n_+) \cap \mathrm{W}^o(\mathrm{R}^n_+) .$$

Dalla densità di $\mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$ in $\mathrm{W}^r(\mathrm{R}^n_+)$ segue che esiste una successione $(u^k_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi di $\mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \| v^k_n - \delta_k u \|_{\mathrm{W}^r(\mathrm{R}^n_+)} = 0 . \tag{9.3}$$

In virtù poi del lemma 4.2 si ha:

$$\| \delta_k u^k_n - \delta^2_k u \|_{\mathrm{V}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \leq c_1 \| \delta^k u^k_n - \delta^2_k u \|_{\mathrm{W}^r(\mathrm{R}^n_+)} \leq \tag{9.4}$$

$$\leq c_2 \| u^k_n - \delta_k u \|_{\mathrm{W}^r(\mathrm{R}^n_+)} .$$

Dalle (9.3) e (9.4) si deduce la tesi con considerazioni analoghe a quelle tenute per dedurre la tesi del teorema 4.1 dalle (4.3) e (4.4).

TEOREMA 9.3. *Per ogni* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *e per ogni* $s \in \mathrm{R}$ *i due spazi* $\mathrm{U}_s^r(\mathrm{R}_+^n)$ *e* $\mathrm{V}_s^r(\mathrm{R}_+^n)$ *sono isomorfi algebricamente e topologicamente.*

Dim. In conseguenza del teorema 9.2, è sufficiente provare che:

$$\forall\, u \in \mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}_+^n) \;:\; \| u \|_{\mathrm{U}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} \sim \| u \|_{\mathrm{V}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} .$$

Assegniamo $u \in \mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}_+^n)$. Poiché risulta:

$$\min_{x \in \bar{\mathrm{R}}_+^n} \rho(x) \geq c_0 > 0 \tag{9.5}$$

si ha evidentemente che esiste una costante c_1, indipendente da u, tale che:

$$\| u \|_{\mathrm{V}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} \leq c_1 \| u \|_{\mathrm{U}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} .$$

Resta così da provare che esiste una costante c_2, indipendente da u, tale che

$$\| u \|_{\mathrm{U}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} \leq c_2 \| u \|_{\mathrm{V}_s^r(\mathrm{R}_+^n)}$$

e per stabilire tale relazione è sufficiente dimostrare che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni $t \in \{1, \ldots, k_i\}$ risulta:

$$\| \partial_{x_i}^t u \|_{\mathrm{L}_s^2(\mathrm{R}_+^n)} \leq c_3 \| u \|_{\mathrm{V}_s^r(\mathrm{R}_+^n)} , \tag{9.6}$$

dove c_3 è una costante indipendente da u.

Per il teorema 3.1 si ha:

$$\| \partial_{x_i}^t u \|^2_{\mathrm{L}_s^2(\mathrm{R}_+^n)} \sim \int_{\mathrm{R}_+^n} \rho^{2s}(x_0) \, \| (\partial_{x_i}^t u)^* \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I}^*(x_0))} \, dx_0 =$$

$$= \int_{\mathrm{R}_+^n} \rho^{2(s-\tau_i t)}(x_0) \, \| \partial_{\xi_i}^t u^* \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I}^*(x_0))} \, dx_0 \leq$$

$$\leq \int_{\mathrm{R}_+^n} \rho^{2(s-\tau_i t)}(x_0) \, \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^{\frac{m}{m_i} t}(\mathrm{I}^*(x_0))} \, dx_0 \leq$$

$$\leq \int_{\mathrm{R}_+^n} \rho^{2(s-r\eta)+2\left(r-\frac{m}{m_i}t\right)\eta}(x_0) \, \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^{\frac{m}{m_i} t}(\mathrm{I}^*(x_0), \rho(x_0))} \, dx_0 \leq$$

per il lemma 8.3 e per il teorema 9.1.

$$\leq c_3 \int_{R^n_+} \rho^{2(s-r\eta)}(x_0) \,\|\, u^* \,\|^2_{W^r\,(I^*(x_0),\rho(x_0))}\, dx_0 \sim \|\, u \,\|^2_{V^r_s\,(R^n_+)}$$

e con ciò è provata la (9.6).

Dai teoremi 9.1 e 9.3 segue che

TEOREMA 9.4. *Qualunque siano* $r \in \bar{R}_+$ *e* $s \in R$ *si ha* $u \in U^r_s(R^n_+)$ *se e solo se* $(x_0 \to \rho^{s-r\eta}(x_0) \,\|\, u^* \,\|_{W^r\,(I^*(x_0),\rho(x_0))}) \in L^2(R^n_+)$; *inoltre*:

$$\|\, u \,\|^2_{U^r_s\,(R^n_+)} \sim \int_{R^n_+} \rho^{2(s-r\eta)}(x_0) \,\|\, u^* \,\|^2_{W^r\,(I^*(x_0),\rho(x_0))}\, dx_0 .$$

10. - TEOREMI DI IMMERSIONE E DI IMMERSIONE COMPATTA PER GLI SPAZI $U^r_s(R^n_+)$.

TEOREMA 10.1. *Siano* $\alpha \in N^n_0$, $r \in \bar{R}_+$, $s \in R$; *per ogni* $u \in U^{r+<\alpha,q>}_s(R^n_+)$ *si ha* $\partial^\alpha u \in U^r_s(R^n_+)$ *e inoltre*

$$\|\, D^\alpha u \,\|_{U^r_s\,(R^n_+)} \leq c \,\|\, u \,\|_{U^{r+<\alpha,q>}_s\,(R^n_+)}$$

dove c *è una costante indipendente da* u.

Dim. Sia $u \in \mathfrak{D}(\bar{R}^n_+)$. In conseguenza del teorema 9.4 e del lemma 8.4 si ha:

$$\|\, D^\alpha u \,\|_{U^r_s\,(R^n_+)} \sim \int_{R^n_+} \rho^{2(s-r\eta)}(x_0) \,\|\, (D^\alpha_x u)^* \,\|^2_{W^r\,(I^*(x_0),\rho(x_0))} =$$

$$= \int_{R^n_+} \rho^{2(s-r\eta-<\alpha,\tau>)}(x_0) \,\|\, D^\alpha_\xi u^* \,\|^2_{W^r\,(I^*(x_0),\rho(x_0))}\, dx_0 \leq$$

$$\leq c \int_{R^n_+} \rho^{2(s-r\eta-<\alpha,q>\eta)}(x_0) \,\|\, u^* \,\|^2_{W^{r+<\alpha,q>}\,(I^*(x_0),\rho(x_0))}\, dx_0 \sim \|u\|^2_{U^{r+<\alpha,q>}_s\,(R^n_+)}$$

e quindi evidentemente si ha la tesi.

TEOREMA 10.2. *Per ogni* $k, r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *con* $k \leq r$ *e per ogni* $\alpha \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *sussiste l'inclusione algebrica e topologica:*

$$\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+) \subset \mathrm{U}^k_{s-\alpha}(\mathrm{R}^n_+).$$

Dim. Se $u \in \mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$, in conseguenza del teorema 9.4, del lemma 8.3 e della (9.5) si ha:

$$\| u \|^2_{\mathrm{U}^k_{s-\alpha}(\mathrm{R}^n_+)} \sim \int_{\mathrm{R}^n_+} \varrho^{2(s-\alpha-k\eta)}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^k(\mathrm{I}^*(x_0),\varrho(x_0))} dx_0 \leq$$

$$\leq c_1 \int_{\mathrm{R}^n_+} \varrho^{2(s-\alpha-r\eta)}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{I}^*(x_0),\varrho(x_0))} dx_0 \leq$$

$$\leq c_2 \int_{\mathrm{R}^n_+} \varrho^{2(s-r\eta)}(x_0) \| u^* \|^2_{\mathrm{W}^r(\mathrm{I}^*(x_0),\varrho(x_0))} dx_0 \sim \| u \|^2_{\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+)}.$$

Da tale relazione segue la tesi.

TEOREMA 10.3. *Siano* $r, r' \in \mathrm{R}_+$; $s, s' \in \mathrm{R}$ *con* $r' < r$ *e* $s' < s$. *Per ogni* $\varepsilon \in \mathrm{R}_+$ *esiste* $c(\varepsilon)$ *tale che:*

$$\| u \|_{\mathrm{U}^{r'}_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} \leq \varepsilon \| u \|_{\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} + c(\varepsilon) \| u \|_{\mathrm{L}^2_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} \qquad \forall u \in \mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+).$$

Dim. Porremo: $r'' = \max\left\{r', r - \frac{s-s'}{\eta_i}\right\}$ e quindi $r' \leq r'' < r$, $s' - r''\eta_i \leq s - r\eta_i$.

Assegnata una $u \in \mathfrak{D}(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$ in conseguenza dei teoremi 10.2, 9.3, 5.3, 5.1 si ha:

$$\| u \|_{\mathrm{U}^{r'}_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} \leq c_1 \| u \|_{\mathrm{U}^{r''}_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} \sim \| u \|_{\mathrm{V}^{r''}_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} =$$

$$= \| u \|_{\mathrm{W}^{r''}_{s'-r''\eta}(\mathrm{R}^n_+)} + \| u \|_{\mathrm{W}^0_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} \leq$$

$$\leq \varepsilon \| u \|_{\mathrm{W}^r_{s'-r''\eta}(\mathrm{R}^n_+)} + c(\varepsilon) \| u \|_{\mathrm{W}^0_{s'-r''\eta}(\mathrm{R}^n_+)} + \| u \|_{\mathrm{W}^0_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} \leq$$

$$\leq c_2 \left(\varepsilon \| u \|_{\mathrm{W}^r_{s-r\eta}(\mathrm{R}^n_+)} + c_3(\varepsilon) \| u \|_{\mathrm{W}^0_{s'}(\mathrm{R}^n_+)} \right).$$

Se ne deduce in modo ovvio la tesi.

TEOREMA 10.4 *Qualunque siano* $k, r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $k < r$, $s \in \mathrm{R}$ *e* $\varepsilon \in \mathrm{R}_+$ *l'immersione*

$$\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+) \hookrightarrow \mathrm{U}^k_{s-\varepsilon}(\mathrm{R}^n_+)$$

è compatta.

Dim. Sia $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ una successione limitata $\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$:

$$\| u_n \|_{\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+)} \leq \mathrm{M} \qquad \forall\, n \in \mathrm{N}\,. \tag{10.1}$$

Allora $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ è limitata in $\mathrm{W}^r_{s-rn}(\mathrm{R}^n_+)$ e in $\mathrm{L}^2_s(\mathrm{R}^n_+)$.

Da ciò, con ragionamenti analoghi a quelli tenuti nel corso della dimostrazione del teorema 5.4, si deduce che esiste una successione estratta da $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ convergente verso un elemento $u \in \mathrm{L}^2_{s-\varepsilon}(\mathrm{R}^n_+)$.

Si deduce allora la tesi osservando che dalla (10.1) e dal teorema 10.3 segue che una relazione del tipo

$$\| u_j - u_i \|_{\mathrm{L}^2_{s-\varepsilon}(\mathrm{R}^n_+)} \leq \varepsilon / c(\varepsilon)\,,$$

implica la relazione

$$\| u_j - u_i \|_{\mathrm{U}^k_{s-\varepsilon}(\mathrm{R}^n_+)} \leq (2\,\mathrm{M} + 1)\,\varepsilon\,.$$

11. - SPAZI DI TRACCE PER GLI SPAZI $\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^n_+)$.

Useremo le stesse notazioni date all'inizio dei numeri 7 e 9, inoltre porremo $\mathrm{J}' = \{ i \in \{1, \ldots, n-1\} : \lambda_i = r/q_i - [r/q_i] > 0 \}$.

DEF. 11.1. Per ogni $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ e per ogni $s \in \mathrm{R}$, indicheremo con $\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^{n-1})$ il completamento di $\mathfrak{D}(\overline{\mathrm{R}^{n-1}})$ rispetto alla norma

$$\| u \|_{\mathrm{U}^r_s(\mathrm{R}^{n-1})} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{t=0}^{k_i} \int_{\mathrm{R}^{n-1}} \bar{\rho}^{2s}(y)\, |\, \partial^t_{y_i} u\, |^2\, dy + \right.$$

$$\left. + \sum_{i\in\mathrm{J}'} \int_{\mathrm{R}_+} \frac{dh}{h^{1+2\lambda_i}} \int_{\mathrm{R}^{n-1}} (\bar{\rho}^{2s-|\tau'|}\, \bar{g})\,(y, y^{ih})\, |\, \partial^{k_i}_{y_i} u\,(y^{ih}) - \partial^{k_i}_{y_i} u\,(y)\, |^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove l'ultima sommatoria non compare se $\mathrm{J}' = \emptyset$.

Ora, ricordando la definizione 7.3, e posto

$$(11.1) \qquad \| u \|_{V_s^r(R^{n-1})} = \left(\| u \|^2_{W^r_{s-r\eta}(R^{n-1})} + \| u \|^2_{W^0_s(R^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall r \in \bar{R}_+, \quad \forall s \in R$$

con ragionamenti analoghi a quelli tenuti al n. 9 per provare i teoremi 9.1, 9.2 e 9.3 si prova che:

$$\| u \|_{V_s^r(R^{n-1})} \sim \int_{R^{n-1}} \bar{\rho}^{2(s-r\eta)}(y_0) \| u^{\bar{*}} \|^2_{W^r(\bar{I}^{\bar{*}}(y_0), \bar{\rho}(y_0))} \, dy_0 ,$$

che $\mathfrak{D}(\overline{R^{n-1}})$ è denso in $V_s^r(R^{n-1})$ e che gli spazi $V_s^r(R^{n-1})$ e $U_s^r(R^{n-1})$ sono isomorfi algebricamente e topologicamente.

Segue quindi che:

TEOREMA 11.1. *Qualunque siano* $r \in \bar{R}_+$ *e* $s \in R$ *si ha* $u \in U_s^r(R^{n-1})$ *se e solo se* $(y_0 \to \bar{\rho}^{s-r\eta}(y_0) \| u^{\bar{*}} \|_{W^r(\bar{I}^{\bar{*}}(y_0), \bar{\rho}(y_0))}) \in L^2(R^{n-1})$ *inoltre:*

$$\| u \|^2_{U_s^r(R^{n-1})} \sim \int_{R^{n-1}} \bar{\rho}^{2(s-r\eta)}(y_0) \| u^{\bar{*}} \|^2_{W^r(\bar{I}^{\bar{*}}(y_0), \bar{\rho}(y_0))} \, dy_0 .$$

Possiamo ora stabilire il seguente teorema di tracce:

Supponiamo che ρ soddisfa le condizioni a), b) e la (7.3). Allora

TEOREMA 11.2. *Qualunque siano* $r \in]q_n/2, +\infty[$ *e* $s \in R$ *l'applicazione* $\gamma_0 : u \in \mathfrak{D}(\bar{R}^n_+) \to \gamma_0 u$ *si prolunga per continuità in un'applicazione, che denotiamo ancora con* γ_0, *lineare e continua da* $U_s^r(R^n_+)$ *in* $U_s^{r-q_n/2}(R^{n-1})$.

Dim. La tesi si deduce dai teoremi 11.1, 9.4, dalla (7.8) e dal teorema di tracce 8.1 con ragionamenti (che per brevità tralasciamo di riportare) concettualmente analoghi a quelli tenuti per dedurre la tesi del teorema 7.2 dei teoremi 7.1, 3.1, dalla (7.8) e dal lemma di tracce 1.8.

BIBLIOGRAFIA

[1] AVANTAGGIATI A., TROISI M., *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo*, I, II e III Ann. di Mat. pura ed appl., Vol. 95 (1973) pp. 361-408; Vol. 97 (1973) pp. 207-252; Vol. 99 (1974) pp. 1-64.

[2] AGRANOVICH M. S., VISHICH M. I., *Elliptic problem with a parameter and parabolic problems of general type*, Russian Math. Surveys **19** (1964).

[3] DEL PRETE V., FORTUNATO D., *Teoremi di regolarizzazione per problemi quasi ellittici in un semispazio ed applicazoini*, Ricerche di Matematica, Vol. XXIII, pp. 87-128 (1974).

[4] FORTUNATO D., *Spazi di Sobolev con peso ed applicazioni ai problemi ellittici*, Rendiconto dell'Accademia di Sci. Fis. Mat. di Napoli, Serie 4, **41** (1974).

[5] FORTUNATO D., *Una limitazione a priori in spazi di Sobolev con peso per problemi ellittici nel semispazio*, (in corso di stampa su Ricerche di Mat.).

[6] NECAS J., *Les méthods en theorie des equations elliptiques*, Masson et C.ie Editeurs, Paris, Acad. Editeurs Prague (1967).

[7] SLOBODECKII L. N., *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations*, trad. inglese: Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, **57** (1966).

[8] TROISI M., *Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi ellittiche*, Ann. di Mat. pura ed appl., Vol. XC, pp. 331-412 (1971).

[9] TROISI *M.*, *Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso*, Ricerche di Mat., Vol. XVIII (1969).

[10] TROISI M., *Ulteriori contributi alla teoria degli spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche di Mat., Vol. XX, pp. 90-117 (1971).

[11] TROMBETTI G., *Problemi ellittici in un angolo*, (in corso di stampa su Annali di Mat.).

[12] VOLEVICH L. R., PANEYAK B. P., *Alcuni spazi di funzioni generalizzate e teoremi d'immersione*, Trad. inglese: Russian Math. Surveys, **20**, pp. 1-73 (1965).

Presentazione ai consoci del Museo Mineralogico dell'Università di Napoli

(tenuta il 28 giugno 1975 dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO)

Una recente iniziativa della Società Nazionale vuole che ogni anno i consoci della Società e dell'Accademia Pontaniana siano accompagnati a visitare — previa illustrazione — almeno una delle tante istituzioni culturali che hanno dato, e ancora danno, decoro a Napoli. Lo scopo è di far conoscere *de visu* tali istituzioni, note molto spesso solo per fama e di permetterne una adeguata valutazione.

Il « Real Museo Mineralogico » è uno dei musei scientifici universitari ed è strettamente collegato per storia, per contiguità, per tipo di sistemazione col museo zoologico. La visita avrebbe dovuto essere abbinata, ma, per ragioni pratiche, si è creduto opportuno limitarla al museo di mineralogia che, tra l'altro, è quello di più antica fondazione. È inutile ripeterne qui in dettaglio la storia che ho già precedentemente illustrata in una tornata dell'Accademia Pontaniana e che si trova inserita negli Atti di quell'Accademia (vol. XV, nuova serie, 1966). Comunque è bene evidenziare che il museo è stato destinato fin dall'inizio alla « pubblica istruzione » e che la sua fondazione precede quella dell'Istituto di Mineralogia.

Caratteristica — e ormai quasi una singolarità — del museo è che questo è rimasto sempre nella sua sede monumentale originaria, cioè nel salone della biblioteca del Collegio del Salvatore (detto anche del Gesù Vecchio) dal quale i Gesuiti erano stati sfrattati nel 1767 per ordine del ministro Tanucci, e dove si era trasferita l'Università dal Palazzo degli Studi, ora sede del Museo Nazionale. L'unica modifica al salone è stata l'aggiunta negli angoli di quattro intagli di legno dorato rappresentanti strumenti minerari o topografici dell'epoca.

Ed ecco ora in sintesi, attraverso le date più importanti, la storia del museo e dell'istituto di mineralogia.

1789. Su proposta del Generale Parisi viene bandito un concorso per inviare all'estero sei giovani allo scopo di perfezionarsi nelle tecniche minerarie e per raccogliere campioni di minerali. I sei vin-

citori sono Giovanni Faicchio, Andrea Savarese, Giuseppe Melograni, Vincenzo Ramondini, Carmine Antonio Lippi, Matteo Tondi. La missione dura fino al 1797. Il nucleo della raccolta del nostro museo è rappresentato appunto dai campioni raccolti da Tondi (e anche da Lippi) nel suo viaggio in Transilvania, Ungheria, Sassonia, Inghilterra, Islanda.

1801 (20 marzo). Regnando Ferdinando IV di Napoli è aperto il Real Museo Mineralogico.

1806 (30 ottobre). Giuseppe Bonaparte, re di Napoli, istituisce la Cattedra di Mineralogia e Metallurgia.

1807 (5 gennaio). Vincenzo Ramondini (morto il 5 settembre 1811) è nominato professore di Mineralogia e Metallurgia.

1811 (29 novembre). Con decreto di Gioacchino Murat, re di Napoli, si unificano le funzioni di direttore del museo e di professore di mineralogia.

1814. L'abate Carlo Gismondi, insegnante di mineralogia presso l'Università di Roma, è chiamato a Napoli come direttore del museo e professore di mineralogia.

1815 (24 luglio). In seguito alla restaurazione dei Borboni, Gismondi è rimandato a Roma « perché non regnicolo ».

1815 (28 luglio). Matteo Tondi è nominato professore di mineralogia (« Geognosia »). Tondi muore il 16 novembre 1835 ancora in attività di servizio.

1841. Dopo un lungo periodo di vacanza è nominato « professore interino di Mineralogia e Geodesia » Leopoldo Pilla, che nel 1842 è chiamato all'Università di Pisa come professore di Geologia.

1841 (14 settembre). Arcangelo Scacchi è nominato, su proposta di Pilla, assistente di Mineralogia e Geologia.

1844 (1 agosto). Ferdinando II sanziona la nomina di Arcangelo Scacchi, vincitore di apposito concorso, a professore ordinario di Mineralogia e Geologia.

1845 (20 settembre). Si inaugura nel salone del Real Museo Mineralogico, alla presenza di Ferdinando II, il VII Congresso degli Scienziati Italiani. Il congresso prosegue fino al 5 ottobre.

1848 (maggio). Per disposizione del governo borbonico il salone del museo è attrezzato per accogliere la Camera dei Deputati, istituita collo statuto del 10 febbraio. La seduta inaugurale, fissata per il 15 maggio, non ha luogo a causa della sommossa. La legislatura è chiusa il 17 maggio, ma sono indette nuove elezioni e la Camera viene riconvocata per il 1° luglio; le sedute continuano fino al 12 marzo 1849. In seguito, sospeso lo statuto, coll'appoggio di una apposita petizione, la Camera dei Deputati non è più convocata e nel 1850 il museo riprende la sua funzione.

1860. Il governo italiano separa la cattedra, l'istituto, il museo di geologia dalla mineralogia. Scacchi rimane alla mineralogia.

1890. Arcangelo Scacchi, ormai settantottenne, si ritira dall'insegnamento e muore a Napoli l'11 ottobre 1893.

1891-1928 (8 febbraio). Eugenio Scacchi — figlio di Arcangelo — è direttore dell'Istituto e del Museo di Mineralogia.

1929-1939 (21 aprile). Direttore dell'istituto e del museo è Emanuele Quercigh.

1939 (29 ottobre). A Emanuele Quercigh succede Antonio Scherillo.

1940-1945. Guerra e occupazione alleata. Il tetto del salone del museo è colpito da una bomba il 4 agosto 1943. Coll'ingresso delle truppe alleate a Napoli l'istituto è requisito dalle truppe americane.

1950-1960. Lavori di ripristino del salone e delle collezioni. Il museo, riordinato, è inaugurato l'11 ottobre 1960 in occasione del XVII congresso della Società Mineralogica Italiana.

Il museo attualmente comprende diverse sezioni: la collezione vesuviana, la collezione dei minerali flegrei e del « tufo campano » e la collezione generale.

La collezione vesuviana è sistemata nel corridoio di accesso al salone del museo e rappresenta del museo stesso la parte più preziosa e interessante perché è specifica e unica nel suo genere. È stata iniziata nel 1844 da Arcangelo Scacchi, ma ha ricevuto un notevole incremento dall'acquisto, da parte del governo borbonico, della collezione mineralogica dell'abate Teodoro Monticelli (morto nel 1845) nel 1851. Comprende circa 3000 campioni, di cui una parte rappresenta i minerali nelle lave vesuviane, un'altra, un po' maggiore, i prodotti delle fumarole e la parte preponderante i proietti vulcanici formati in seguito al metamorfismo tra il magma profondo e le rocce calcaree e soprattutto dolomitiche con cui questo è venuto a contatto.

Nell'atrio del grande salone è collocata la collezione dei minerali flegrei e di quelli del « tufo campano » di Fiano. Quest'ultima è dovuta ad Arcangelo Scacchi e comprende i blocchi di rocce carbonate imballati nel « tufo campano » di Fiano (Nocera) coi minerali — in buona parte fluorurati — che vi si sono formati a contatto col tufo stesso. Anche questa collezione è una peculiarità del nostro museo mineralogico.

Nell'atrio sono inoltre esposte una modesta collezione di meteoriti e i « grandi cristalli », cioè campioni di minerali cristallizzati che si presentano in cristalli di dimensioni eccezionali. Il più notevole fra questi, vanto del nostro museo, è l'esemplare costituito da due enormi cristalli di quarzo, limpidi e di forma perfetta, del peso complessivo di quasi mezza tonnellata (si tratta dei più grandi cristalli di quarzo raccolti finora). È il più antico tra i campioni del

museo perché era già conservato nel Palazzo degli Studi, prima ancora che fosse fondato il Real Museo Mineralogico.

La collezione generale originariamente era piuttosto limitata come provenienza dei campioni e come numero di specie perché era il risultato delle visite di Matteo Tondi alle miniere del ristretto numero di paesi europei da lui visitati. Notevolissima è la raccolta di fluoriti e di calciti inglesi. La collezione però si è progressivamente arricchita di specie e di esemplari ed è diventata più rappresentativa, pur conservando l'impronta originaria. Dalla collezione Monticelli proviene il campione di smeraldo della Columbia e l'altro di quarzo, incluso nel marmo di Carrara nel quale Canova ha scolpito, quasi per gioco, un mascherone. Da segnalare è anche la rappresentanza di celestine e di zolfi e aragoniti siciliane; alcuni con cristalli di insolite dimensioni sono stati procurati da Emanuele Quercigh.

Fa parte del museo anche la « collezione orittognostica Tondi » che Tondi aveva raccolto privatamente e che comprendeva campioni di minerali e rocce per uso didattico. Tale collezione, dopo la morte di Tondi, è stata acquistata dall'Università. Esiste ancora la maggior parte dei mobili di mogano che la accoglievano. Il tutto però attualmente, per mancanza di spazio, ha avuto una sistemazione, inadeguata, nell'aula per lezioni. Nella collezione sono rimasti solo i campioni di rocce, perché quelli di minerali sono stati riuniti da Quercigh alla collezione generale. Di altre collezioni minori che sono confluite nel museo è inutile parlare, ma un ricordo merita la « collezione di cristalli artificiali » che Arcangelo Scacchi — sommo cristallografo — aveva costituito e donata all'Università nel 1862. Tale collezione, esposta e premiata nelle esposizioni internazionali di Londra (1862) e di Parigi (1867), è stata gravemente danneggiata in seguito agli eventi bellici.

La collezione generale è ordinata secondo il classico criterio sistematico che è il criterio chimico. Inoltre, come si usa nei musei mineralogici, i campioni piccoli sono separati da quelli di dimensioni maggiori. Questi ultimi sono collocati negli scaffali a muro (e sono occorsi molti accorgimenti perché, senza sovvertire la sistematica, nei ripiani più alti, che permettono una visione soltanto sommaria, non capitassero campioni meritevoli di una osservazione accurata), mentre i campioni piccoli sono collocati in una doppia fila di vetrine in mezzo al salone. I campioni meno importanti sono conservati nei cassetti sotto le vetrine. Negli armadi sul ballatoio sono disposte le incrostazioni vesuviane, il « medagliere del Vesuvio », alcune raccolte di materiali vulcanici, una serie di apparecchi scientifici antiquati e quanto resta della raccolta dei « cristalli artificiali ». Nel complesso l'esposizione può ritenersi soddisfacente.

Il salone è un insieme quanto mai imponente e armonioso e i minerali si accordano bene colle originarie strutture della biblioteca. In questo il nostro si distingue dai moderni musei mineralogici, più funzionali, ma, esteticamente, quasi insignificanti. Questa è una delle particolarità del nostro museo.

Attualmente la collezione generale comprende un po' più di 20.000 campioni. In seguito all'occupazione amerciana è andato perduto circa il 25 % dei campioni esistenti prima della guerra. Un pubblico ringraziamento voglio qui rivolgere al mio caro amico prof. Antonio Parascandola, per molti anni aiuto presso l'Istituto di Mineralogia, per l'efficace opera di salvaguardia del museo svolta durante il tristissimo periodo dell'occupazione alleata e per la sua costante collaborazione [1].

Per quanto riguarda il salone è da precisare che il pavimento, un po' malconcio ma ancora decoroso, in piastrelle rosse e verdi dipinte a mano, cogli stemmi sabaudi ai lati, è del 1862. Il soffitto attuale è stato completamente rifatto, in una forma nuova, in questo dopoguerra. Il soffitto originario era però crollato in seguito al terremoto del 1930. La sua decorazione era il solo ricordo tangibile dell'utilizzazione della sala come sede del Parlamento Napoletano, perché era istoriato a medaglioni col nome delle province del Regno. I mobili centrali sono anch'essi moderni e sostituiscono delle indecorose vetrine del 1877 che erano state danneggiate, per fortuna in modo irreparabile, in seguito all'occupazione alleata. Anche il sistema di illuminazione artificiale è recente (prima i musei non si illuminavano). Ma, a parer mio, l'antico, il vecchio e il nuovo si fondono ben insieme e non nuocciono all'unità dell'insieme. I visitatori giudicheranno.

Il vestibolo colla scritta REAL MUSEO MINERALOGICO è l'originario.

Ed ora qualche dato numerico. Il museo copre complessivamente una superficie di circa 74 m^2; di questi 20 spettano al corridoio colla collezione vesuviana, 3 al vestibolo, 51 al salone. Le dimensioni di quest'ultimo, escludendo la scaffalatura, sono: lunghezza m. 39, larghezza m. 13,50, altezza m. 8,50. Per l'esposizione dei campioni la collezione vesuviana ha richiesto 13 armadi/vetrine verticali per quelli di dimensioni maggiori e 5 orizzontali per i minori. Tutti questi mobili sono forniti di cassetti per i campioni di minore interesse. Nel vestibolo vi sono 2 armadi/vetrine verticali con i minerali del

[1] Una perdita recente e molto grave è stato il furto — dovuto a mano nordista — di campioni unici, cioè di grothina e di rivaite, durante il XXV Congresso della Società Italiana di Mineralogia e Petrologia che si è tenuto, nel 1968, presso l'Istituto di Mineralogia, con libero accesso al museo.

tufo di Fiano, 2 vetrine da esposizione (meteoriti e minerali flegrei e di Fiano) e 2 bacheche centrali per i « grandi cristalli », tutti forniti di cassetti e due bacheche minori.

Nel grande salone la collezione generale è collocata, per quanto riguarda i campioni più grandi, nella scaffalatura a muro, che comprende 38 scomparti, di varie dimensioni, e, per quanto riguarda i minori, in 18 vetrine orizzontali da esposizione, con cassetti. Vi sono inoltre 3 bacheche.

Infine sul ballatoio, che ha una funzione estetica importantissima perché conferisce « respiro » al salone, sono collocati 12 armadi fissi alle pareti, nello spazio tra i finestroni.

È difficile stabilire un valore inventariale della collezione. Alcuni campioni sono unici nel loro genere e quindi non valutabili. Molto approssimativamente si può indicare un valore complessivo di circa 200 milioni.

Questo è, attualmente, il nostro museo mineralogico, che tra poco visiterete. Ma un museo come il nostro non si limita certo ad una raccolta e ad una esposizione di campioni — e nel nostro museo è singolare come l'esposizione dei minerali si sia adattata alla struttura originaria — ma ha anche una storia, un significato nella storia della scienza e deve avere anche un avvenire, pianificabile (per usare una recente espressione) per quanto è possibile.

Per la storia, si è visto che il nostro museo vanta una antica e particolare origine e, ciò detto, si può distinguere tra la storia del museo/salone e quella del salone. All'epoca dei Borboni il museo era considerato giustamente « ornamentum regni » e quindi vi si conducevano i sovrani ospiti di Napoli. Così il museo fu visitato dal re di Prussia e nel 1819 da Francesco II imperatore d'Austria. L'ultima visita di sovrani al museo avvenne nel 1876 e fu quella di don Pedro II di Braganza, imperatore del Brasile, che seguiva ancora la tradizione illuministica. Tale visita fu però dovuta alla fama, nel campo internazionale, di Scacchi che nel salone tenne una conferenza, perché, dopo il 1860, il museo non era più « ornamentum regni », ma un semplice museo universitario.

Anche la scelta del museo, nel 1846, come sede del VII congresso degli Scienziati Italiani dimostra che il complesso museo/salone era ritenuto quanto di più decoroso potesse presentare la capitale del Regno delle Due Sicilie nel campo culturale.

Invece quando il museo fu destinato, nel 1848, a sede provvisoria della Camera dei Deputati, si tennero presenti solo i pregi del salone, perché, anzi, gli scaffali coi minerali furono ricoperti dalle due tribune a gradinata che si fronteggiavano secondo il modello della Camera dei Comuni inglese.

Molti dei più bei nomi della mineralogia e della geologia italiana, quelli cioè che sono tuttora citati e ricordati anche all'estero, sono legati al nostro istituto/museo. Nessuna delle consorelle istituzioni italiane può menare un simile vanto.

Vanto del nostro museo mineralogico è proprio quello di esser strettamente collegato ai progressi e alle glorie della mineralogia italiana. Per ricordare questo invidiabile privilegio ho collocato nel salone i busti in bronzo di alcuni illustri cultori di scienze geomineralogiche che sono molto strettamente collegati col nostro museo. Teodoro Monticelli deve esser considerato l'iniziatore, in Italia, degli studi, su basi scientifiche, dei minerali vesuviani e a lui si devono molti dei più antichi e notevoli campioni della collezione vesuviana. Arcangelo Scacchi è stato il massimo mineralogista italiano; le sue geniali ricerche riguardano i minerali vesuviani, spesso posti in relazione, quando è stato possibile, coll'attività del Vesuvio, i minerali flegrei e quelli del tufo campano, il vulcanismo in Campania, i cristalli naturali e artificiali. Ferruccio Zambonini, per altezza d'ingegno e per l'operosità, è stato il continuatore di Scacchi e ne ha completato l'opera per quanto riguarda i minerali del Vesuivo e del « tufo campano » ed è stato un gran maestro in cristallografia e soprattutto in mineralogia chimica. È nel nostro museo che ha completato la sua educazione scientifica e ha trovato molto del materiale per le sue ricerche. Giuseppe De Lorenzo è stato assistente di Eugenio Scacchi, ed è stato uno studioso, geniale e indimenticabile, del vulcanismo dell'Italia Meridionale, oltre che della geologia dell'Appennino.

Avrei desiderato aggiungere i busti di Matteo Tondi e di Leopoldo Pilla. Il primo, come ho detto, è da considerare il fondatore della collezione mineralogica generale ed è stato, per i suoi tempi, uno dei migliori conoscitori e trattatisti di mineralogia sistematica e di litologia. Pilla, grande geologo dell'Appennino, va anche ricordato perché collega il nostro museo, di cui è stato « direttore interino » alle lotte per il Risorgimento; cadde infatti nel 1848 sul campo di Curtatone, capitano nel battaglione volontari toscani, a lato dei fanti dell'esercito regolare napoletano. Confido che i miei successori possano colmare questa lacuna e rimediare a un torto verso il passato.

Per quanto riguarda il presente il museo non si trova certo in fase di espansione, anche per mancanza di spazio e di fondi, ma in fase almeno di gelosa conservazione e di valorizzazione. Un notevole progresso è stata la possibilità di nominare un conservatore (che è il prof. Maurizio de Gennaro). Il museo è aperto al pubblico, quando è aperto l'istituto, ed è visitato da studenti universitari, da studiosi e dilettanti di mineralogia, italiani e stranieri e da scolaresche. Una grave limitazione è rappresentata dalla mancanza, per il museo, di

una dotazione propria. Negli anni passati, coi fondi dell'istituto, ho provveduto all'acquisto di alcuni esemplari vistosi (quarzo affumicato, brasilianite ecc.), ma allora le necessità dell'istituto non erano così incalzanti ed io potevo procedere in modo autonomo.

Il presente però non è che il punto che congiunge l'avvenire col passato e, essendo un punto, non ha dimensioni. Al passato ho accennato: occupiamoci ora dell'avvenire, per quanto è possibile. L'argomento è molto importante perché il passato non è modificabile, mentre l'avvenire dipende, in parte, da noi stessi. È chiaro che l'avvenire del museo mineralogico non può essere separato da quello degli altri musei naturalistici universitari.

I musei sono come le accademie: sono retaggio del passato, ma, con qualche modifica, penso che nel futuro saranno ancora più importanti che nel presente.

La modifica più semplice è quella di rendere il museo indipendente dall'istituto con una sua dotazione e proprio personale, dirigente e subalterno: così tra l'altro sarà possibile tenere aperto il museo la domenica, che è il giorno più propizio alle visite. Museo ed istituto sono rimasti felicemente riuniti per più di un secolo e mezzo, ma ora è venuto il momento della separazione, altrimenti il museo sarà sopraffatto dall'istituto.

Ma il punto più importante è il seguente e vi invito a meditarlo. Se, tra pochi anni, la Facoltà di Scienze sarà trasferita il museo deve rimanere nella sua sede attuale e, anzi, occupare i locali che saranno lasciati liberi dall'istituto: allora finalmente troverà la sua degna sistemazione. La collezione vesuviana potrà essere collocata nell'attuale salone della biblioteca e il museo vesuviano (e flegreo) sarà degno, come presentazione, della collezione generale. Per gli attuali ambienti dell'istituto, per lo più adibiti ora a laboratorio, la sistemazione è indicata dalla logica; di uno dovrà farsi la « sala Tondi » trasferendovi la « collezione orittognostica » e i volumi dell'epoca che hanno grandissimo valore storico e bibliografico, un altro sarà destinato alla direzione e ai cataloghi, un'altro ancora a biblioteca per opere soprattutto di sistematica mineralogica e in altri i laboratori per il riconoscimento, lo studio e la preparazione dei campioni. Il nostro è un museo sistematico e non dimostrativo e deve mantenere tale carattere che, scientificamente, è il più serio, ma nulla vieta che nel vasto corridoio di accesso al museo, dove è ora la collezione vesuviana, si collochino modelli e diagrammi espositivi e didattici, carte geografiche e geologiche e plastici. Lo spazio non mancherebbe; è augurabile che non manchino i mezzi. L'aula deve rimanere tale ed essere adibita a conferenze e a convegni.

Ma questo progetto per il museo di mineralogia è parte di un progetto per la sistemazione globale dei ricchissimi musei scientifici universitari. Il museo di zoologia, che è un insieme di valore architettonico e scientifico pari a quello del nostro, deve rimanere anche esso nella sua sede attuale e intorno al cortile centrale dell'edificio universitario devono raggrupparsi anche gli altri musei: cioè quelli di paleontologia, di geologia e di antropologia. Si avrebbe così un complesso unico, al centro cittadino, di enorme valore e significato, adiacente — e non sarebbe l'ultimo vantaggio — alla sede delle nostre accademie.

Voglio fare un'osservazione finale. L'Università di Napoli è per antichità di fondazione la seconda d'Italia, ma nella sua sede attuale non appare troppo ricca di memorie storiche. Le memorie però non mancano e sono appunto rappresentate dai musei di mineralogia e di zoologia, ancora nella loro sede originaria, ben degna dell'importanza storica della nostra università e degni di Napoli, la capitale del maggiore Stato e la vera metropoli dell'Italia non unificata. A coloro che volessero trasferire tali musei in una nuova sede si potrebbe ripetere la frase di Carlo V agli architetti che gli proponevano di trasformare gli edifici monumentali della Spagna araba « Voi volete rovinare quello che si può vedere solo qui per sostituirlo con ciò che si vede dovunque ».

Origine e significato del colore negli animali *

Nota del socio ordinario RODOLFO A. NICOLAUS **,
del dott. ETTORE NOVELLINO *** e del prof. GIUSEPPE PROTA ****

(Adunanza dell'8 novembre 1975)

RIASSUNTO. — Viene presentata una monografia critica sull'origine ed il significato del colore negli animali. Viene mostrato come nella scala filogenetica il numero dei pigmenti elaborati dagli animali aumenta dall'uomo ai pesci.

SUMMARY. — A critical review on the origin and significance of colour in animals is presented. The number of pigments found in different classes of animals increases from man to fishes.

INTRODUZIONE.

L'interesse per il colore è connaturato nell'uomo. Plinio pensava che gli atomi fossero colorati. Leonardo da Vinci si chiedeva perché il cielo fosse azzurro. Lord Rayleigh era colpito dai colori dei fiori. Chevreul amava l'armonia e la composizione dei colori. Shakespeare usava immagini colorate nella sua potente poesia. Boyle intuiva che il colore era una sensazione provocata dalla luce. Padre Grimaldi era convinto che il colore dipendesse dalle radiazioni. Young dava molta importanza ai colori rosso, giallo e azzurro. Newton voleva capire come si generasse il colore. Goethe era affascinato dalle sfumature colorate. Dalton fu vivamente sorpreso quando constatò che percepiva alcuni colori diversamente da come li percepivano i suoi amici. Helmholtz vedeva i colori in funzione della lunghezza d'onda. Armstrong fu subito attirato dai riflessi colorati di alcune pietre lunari...

I colori nascono dalla luce. Un raggio di luce che attraversa un prisma triangolare di vetro si scompone in vari colori. Nell'arcoba-

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.
** Cattedra di Chimica Organica della Facoltà di Farmacia - Università di Napoli.
*** Titolare di assegno biennale di formazione didattica e scientifica - Università di Napoli.
**** Istituto di Chimica Organica della Facoltà di Scienze - Università di Napoli.

leno piccole gocce d'acqua provocano lo stesso effetto del prisma. Le radiazioni o raggi a bassa lunghezza d'onda (475 mμ) producono la sensazione del colore violetto, quelle ad alta lunghezza d'onda (645 mμ) quella del colore rosso, mentre le lunghezze d'onda intermedie producono il blu, il verde, il giallo e l'arancione. L'intervallo delle radiazioni, aventi una lunghezza d'onda compresa fra 400 mμ e 750 mμ, viene chiamato, comunemente, spettro del visibile. È difficile dire quali sensazioni producano le radiazioni che si trovano fuori dell'intervallo, e cioè nelle cosiddette zone dell'ultravioletto e dell'infrarosso.

I colori e le sfumature colorate degli animali sono dovuti a fenomeni di assorbimento selettivo della luce ad opera di composti chimici (pigmenti) o a fenomeni fisici o ad ambedue i fenomeni. I pigmenti sono anche chiamati biocromi e i colori « fisici » schemocromi [1]. È facile distinguere un biocromo da uno schemocromo: il primo si può isolare con mezzi chimici, il secondo no.

Biocromi o i pigmenti.

Alcuni composti chimici assorbono una parte delle radiazioni che compongono la luce bianca incidente, mentre lasciano passare l'altra parte che giunge all'occhio dell'osservatore. I colori e le varie colorazioni appaiono perciò come complementari di quelli assorbiti.

All'occhio umano possono perciò giungere fotoni o radiazioni di due tipi: quelli non assorbiti dalla molecola e quelli, più rari, emessi dalla molecola. Nel momento in cui i fotoni a vario contenuto energetico colpiscono la retina umana il colore diventa un processo biochimico.

I composti insaturi sono, in modo particolare, sensibili alla luce. Quando in una molecola vi sono più doppi legami e quando questi sono coniugati, la molecola è colorata.

I cromofori dei pigmenti animali possono far parte di molecole anche complesse nelle quali vi possono essere presenti strutture particolari che influenzano notevolmente il colore della sostanza.

Tutti i pigmenti animali si possono isolare e spesso ottenere sotto forma cristallina. Naturalmente a parità di concentrazione e di stato fisico non vi è nessuna differenza fra il colore del pigmento isolato e quello visto sull'animale. Il fatto di poter studiare il pigmento fuori della fonte biologica è un grande vantaggio per chi si propone di stabilire la formula di struttura.

Come apparirà chiaramente in seguito, alla varietà dei colori del mondo animale corrisponde, con nostra grande sorpresa, solo un numero piuttosto ristretto di architetture chimiche fondamentali.

Schemocromi o i pigmenti che non esistono.

Diverse colorazioni degli animali sono dovute a fenomeni di dispersione (*scattering*) o di interferenza e di diffrazione della luce. Le entità ottiche responsabili del fenomeno fisico che la natura crea con una perfezione incredibile possono essere particelle, microscopici prismi, reticoli, striature, strati sottili, cavità.

Uno dei colori più belli, di origine fisica, che si incontra nel mondo animale, è il blu. La manifestazione si ha con particelle, cellule alveolari o altre eterogeneità ottiche, quando il diametro delle particelle ($\sim$ 0,6 μ) è dell'ordine di grandezza di quello della lunghezza d'onda della luce blu e quando il loro indice di rifrazione è differente da quello del mezzo che le circonda. Questo tipo di blu si vede solo per riflessione, mentre con luce trasmessa appaiono colorazioni rossastre, brune o grigie. La grandezza relativa delle particelle determina l'intensità e le sfumature del blu: l'azzurro del cielo, dovuto alla diffusione della luce solare ad opera delle molecole gassose dell'aria, aumenta nelle zone industriali per la presenza di particelle molto fini, mentre particelle più grandi rendono il colore più sbiadito. Dopo un temporale il cielo è più azzurro perché la pioggia opera una selezione delle particelle portando in basso quelle più grandi. L'azzurro degli occhi umani, il blu del piumaggio degli uccelli, di alcuni rettili, dei pesci *Hypsurus caryi* e *Trachinotus Kennedyi*, gli anelli azzurri vicino agli occhi del polipo *Octopus bimaculatus* sono dovuti al fenomeno fisico che i biologi chiamano comunemente dispersione Tyndall (*Tyndall scattering*). Questo tipo di colore, che non viene modificato dall'angolo di visione a differenza dei colori dovuti a diffrazione o interferenza, è dovuto a particelle o cavità di circa 0,6 μ di diametro, disposte su un substrato nero o bruno costituito quasi sempre da quel particolare pigmento chiamato melanina. Senza melanina l'azzurro scompare o si attenua di molto; la melanina assorbendo la luce riflessa da altri corpi impedisce che quest'ultima mascheri la piccola frazione di luce dispersa dalle particelle o dalle cavità.

È facile convincersi che il colore non è dovuto a un pigmento mediante dei semplici esperimenti su del materiale biologico colorato in blu. Se ad esempio ci si serve di una penna blu di un uccello prima di tutto si osserva che trattando la penna con i più diversi

solventi liquidi questi non si colorano, cioè non si riesce ad estrarre alcun pigmento, ma se si immerge la penna in un liquido (ad es. solfuro di carbonio) e ve la si lascia per alcuni giorni esso penetra lentamente negli alveoli scacciandone l'aria; a mano a mano che il tempo passa compare una colorazione bruna o nera perché il liquido ha un indice di rifrazione diverso da quello dell'aria prima contenuta nell'alveolo. Se si fa evaporare il liquido la penna riprende il suo colore blu. Un diverso esperimento consiste nel pestare finemente una penna in un mortaio fino a distruggere l'architettura cellulare che produce il colore blu, che infatti scompare rimpiazzato da una colorazione grigia o brunastra.

Anche in questo modo possiamo facilmente distinguere un biocromo da uno schemocromo.

Singolare è l'origine dei numerosi colori verdi degli animali. Il verde si produce con uno schemocromo azzurro munito di un biocromo giallo che funge da filtro. Molti esempi li troviamo tra gli Uccelli, i Rettili, gli Anfibi e più raramente fra i Mammiferi. Nell'uomo il verde si manifesta unicamente negli occhi che, forse per la rarità del fenomeno, sono considerati di rara bellezza. Il biocromo giallo è generalmente solubile nei solventi organici e può essere perciò asportato: interessante è l'esperimento col quale si può mutare il colore verde di un animale in azzurro. Questa mutazione avviene occasionalmente anche in natura; la rana può apparire azzurra per un'alterazione genetica, a livello del DNA cromosomico, perché perde la capacità di sintetizzare il pigmento giallo che funge da filtro della luce.

Il bianco si origina in modo diverso. Le superfici e le fasi colloidali, costituite da materia che non assorbe la luce visibile e il cui stato di suddivisione è tale da non interferire con le lunghezze d'onda della luce visibile, riflettono la luce bianca senza alterarla e perciò appaiono di colore bianco.

Tessuti di cheratina intercalati da spazi d'aria sono responsabili del colore bianco dei capelli, delle penne, come della pelliccia dell'orso dell'Artico. Il bianco si può originare anche per deposizione di composti inorganici nei tessuti, quale il carbonato di calcio nei Molluschi e nei Crostacei, o di composti organici come la guanina e l'acido urico nella parte ventrale dei Pesci e in molti Invertebrati.

L'iridescenza è un fenomeno comune fra gli Insetti, specie fra i Lepidotteri e i Coleotteri, ma non mancano esempi fra i Crostacei, Cefalopodi e Uccelli. Vari tipi di Coleotteri (ad es. scarafaggi) dal colore cosiddetto metallico sono fortemente iridescenti. La farfalla *Urania riphoesus* del Madagascar deve i suoi colori oltre che a biocromi anche a particolari lamine di trasparenti squamette che pro-

ducono colorazioni azzurre e verdi. Le parti iridescenti hanno architetture diverse a seconda dell'animale, ma hanno tutte in comune la disposizione in lamine sottilissime intercalate da aria o films di materiale a indice di rifrazione diverso.

La purezza dei colori da interferenza è aumentata negli animali da uno strato scuro che spesso è costituito, come per l'effetto Tyndall, da melanina, che ha lo scopo di assorbire la riflessione della luce bianca o colorata del fondo.

Le lamine che producono l'iridescenza possono essere di materiale chitinoso come nei Crostacei, Insetti e vermi, di materiale cheratinoso e proteico come nelle penne degli Uccelli, nelle scaglie dei Pesci e dei Rettili. In certi casi anche cristalli di composti chimici possono produrre l'iridescenza, come nella pelle della seppia dove l'effetto è dato da piccoli cristalli di guanina ordinati in cellule dette iridociti.

Un bell'esempio di iridescenza si osserva nel copepode (crostaceo) *Saffirina* alla Stazione Zoologica di Napoli; su un fondo scuro appare di una lucentezza color rame e oro con riflessi rossi e blu, e variando l'angolo di visione si osservano colori blu, viola, rosso, arancione, giallo. Questi effetti, che scompaiono dopo la morte dell'animale, sono dovuti a lamine submicroscopiche contenenti cristalli di guanina che si trovano sulle cellule epidermali. È interessante osservare che la femmina non è iridescente; ciò può essere in parte dovuto ad una diversa struttura delle lamine e in parte all'assenza di guanina. Altri esempi di iridescenza, anche se meno cospicui, si osservano nel pelo della talpa dorata *Chrysocloris* e nelle penne dello storno e del tacchino.

Nelle barbe del colibrì, e più precisamente dove appare la zona iridescente, si trovano granuli di melanina molto regolari e disposti in un singolo strato a forma di mosaico circondato dalla cheratina; poiché i granuli di melanina hanno un indice di rifrazione molto più alto della cheratina il fenomeno dell'iridescenza è possibile. I granuli di melanina della borsa della seppia che sono rotondi e molto regolari producono colori di interferenza quando sono essiccati con precauzione; l'iridescenza si spiega in quanto i granuli vengono ad essere ricoperti da un film di materiale mucillaginoso che si trova normalmente nella borsa.

Solo raramente si osserva iridescenza per diffrazione della luce. Il fenomeno è prodotto da reticoli dalle forme geometriche le più diverse. Nella perla i cristalli di carbonato di calcio disposti a grata scompongono la luce in tonalità rosse e azzurre caratteristiche. Un caso di iridescenza per diffrazione è quello dato dalla *Aphrodite aculeata*, un piccolo verme marino che vive nei fondali tirrenici, dalle setole splendenti e iridescenti, ove la funzione del reticolo è supplita

da piccole fibrille longitudinali. Altri casi si osservano negli Ctenofori appartenenti agli animali da plancton e, forse, l'iridescenza degli occhi degli Ungulati è dovuta oltre che a fenomeni di interferenza anche a fenomeni di diffrazione.

Gli schemocromi conservano anche dopo la morte dell'animale i loro vivaci colori. Le sottili lamine iridescenti degli scarabei sono così ben fatte e resistenti che gli antichi egizi li usavano per adornare le loro tombe, e tuttora essi costituiscono un ornamento presso alcune tribù selvagge dell'Africa. Sorprendente il fatto che i meravigliosi colori di origine fisica, a differenza dei pigmenti, non trovino ancora impiego pratico. Timidi tentativi si trovano in alcune stoffe ottenute tessendo fili di diverso colore o adornando gli abiti con pagliuzze di vetro o altro materiale lucente. Con l'uso di materiale plastico, di diverse colorazioni, e l'inclusione di sabbia si possono ottenere lastre e pareti che producono effetti diversi a seconda che si vedano a luce riflessa o a luce trasmessa, come avviene per i colori prodotti dagli schemocromi animali.

Le complicate architetture che producono i colori fisici degli animali, fedelmente riprodotte, costituiscono certo un problema econo-

giallo	*arancione*	*rosso*
carotenoidi pterine flavine zooantoxantine	carotenoidi pterine ommocromi	carotenoidi pterine ommocromi porfirine echinocromi hallacromo antrachinoni
verde	*blu*	*violetto*
schemocromi+pigmento giallo pigmenti biliari carotenoproteine clorocruorine feoforbidi	schemocromi carotenoproteine pigmenti biliari	carotenoproteine ommocromi echinocromi
rosso-bruno	*bruno*	*nero*
feomelanine melanine	feomelanine melanine	melanine
grigio	*bianco*	
melanine (alternanza di bianco e nero)	schemocromi (totale riflessione della luce)	

mico non indifferente, ma il loro impiego farebbe pulsare un nuovo mondo variopinto sulla tavolozza del pittore e darebbe al quadro una nuova forza espressiva.

Dal nostro posto di osservazione situato a cavallo dell'anno 1975 possiamo constatare che sotto l'aspetto chimico e fisico le nostre conoscenze sul colore degli animali sono più che soddisfacenti. È possibile comporre, ad esempio, una tavola che illustra le relazioni tra il colore e i composti chimici o le entità fisiche che lo generano e che ci permette di fare una prima grossolana ricognizione nel mondo dei colori animali. Quali sono le strutture chimiche? Come sono distribuiti questi pigmenti fra gli animali? Saranno questi alcuni dei temi illustrati.

Biochimica della visione colorata.

La fisica ottica, i fotoni e gli elettroni sono i protagonisti di quello che potremmo definire il primo atto della visione colorata. Il secondo atto ha inizio allorché il fotone giunge alla retina. Questa è dotata di un sistema di recettori (bastoncelli), che servono a percepire minime quantità di luce, accanto a un secondo sistema (coni) atto a ricevere una quantità maggiore di luce e di segnali. Cioè, i bastoncelli servono per la visione crepuscolare (scotopica) e i coni per la visione diurna (fotopica). Nella retina dell'occhio umano vi sono circa 100 milioni di bastoncelli e 5 milioni di coni; essi sono provvisti di piccoli sacchi contenenti dei pigmenti.

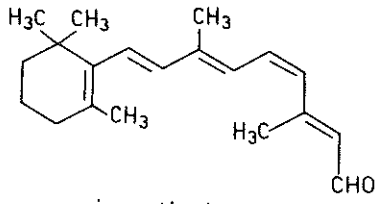
I pigmenti sono delle cromoproteine. Queste hanno peso molecolare elevato e sono in genere formate da due parti, facilmente distaccabili, una colorata, di diversa natura chimica, e l'altra incolore di natura proteica che costituisce la massima parte dell'intera molecola. I pigmenti umani, detti rodopsine, sono formati dalle opsine (parte proteica) e dall'11-*cis*-retinale (parte colorata).

Nell'uomo vi sono quattro tipi di pigmenti, uno nei bastoncelli e tre nei coni; la parte colorata, cromoforo, è sempre la stessa mentre varia il tipo di opsina.

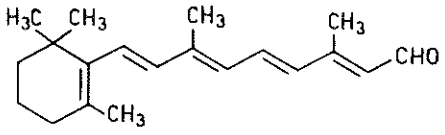
I pigmenti che si trovano nei coni si differenziano fra di loro per il massimo di assorbimento che mostrano a 450, 525, 555 mμ, cioè nelle regioni del blu, del verde e del giallo dello spettro del visibile. Esistono quindi tre tipi di coni con tre differenti sensibilità spettrali: essi sono i responsabili della visione tricromatica dell'uomo.

Il *cis*-retinale è molto simile alla vitamina A, in quanto al posto del gruppo alcolico primario $-CH_2OH$ che questa possiede vi è un gruppo aldeidico $-CHO$; si intuisce subito l'importanza che questa

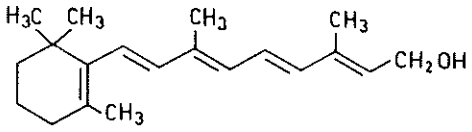
vitamina alimentare ha per il nostro processo di visione. L'azione della vitamina A si può mettere in evidenza in una delle più antiche malattie umane:



cis-retinale



trans-retinale



vitamina A

l'insensibilità dell'occhio alla luce crepuscolare. Quando il pigmento è colpito dalla luce si scinde in opsina e retinale e quest'ultima successivamente passa a vitamina A; queste reazioni chimiche si possono seguire agevolmente, in quanto si hanno cambiamenti di colore dal rosso al giallo e al bianco, colori che corrispondono rispettivamente alla rodopsina, al retinale e alla vitamina A.

Una deficienza di vitamina A, che si accumula generalmente nel nostro fegato, impedisce la sintesi dei pigmenti visivi e produce in conseguenza la cecità delle persone quando l'illuminazione sia bassa. La somministrazione di vitamina A previene e guarisce la malattia [2].

L'opsina è una lipoproteina, ricca cioè in lipidi o grassi, e appartiene a una classe di composti che si trovano, o addirittura costituiscono molte membrane biologiche. *Cis*-retinale e opsina sono legati fra di loro attraverso il gruppo aldeidico e un gruppo amminico $-NH_2$ libero della proteina a formare un legame che è tipico delle basi di Schiff. I composti, studiati molto tempo fa dal chimico Hugo Schiff, sono caratterizzati dal gruppo $-CH = N-$ e sono facilmente idrolizzabili, cioè sommano una molecola d'acqua ripristinando i prodotti di partenza; questo legame è a volte così labile che in soluzioni esiste l'equilibrio

$$-CHO + NH_2- \rightleftharpoons -CH = N- + H_2O \ .$$

Quando il pigmento è colpito dalle radiazioni il *cis*-retinale (detto anche retinaldeide) si trasforma in *trans*-retinale; questo cambiamento di forma della molecola nello spazio, che comporta una rotazione interna della molecola, dà inizio a una serie di reazioni, alcune delle quali, poiché avvengono in meno di un milionesimo di secondo, possono essere seguite solo utilizzando lampi di luce e temperature molto basse. Le principali reazioni sono: il cambiamento nella forma dell'opsina, il distacco del *trans*-retinale dalla proteina, la riduzione del gruppo $-CHO$ a gruppo $-CH_2OH$, la riossidazione del gruppo alcolico primario con formazione del *cis*-retinale e sua ricombinazione con la proteina.

La rapidissima trasformazione del *cis*-retinale in *trans*-retinale è stupefacente. È da osservare innanzitutto che dei cinque possibili isomeri *cis* che il retinale può dare l'11-*cis*-retinale possiede l'impedimento sterico più basso; rimane tuttavia sempre il fatto che per far passare la molecola dell'11-*cis*-retinale dalla forma *cis* alla forma *trans* è necessaria una notevole energia di circa 25 kcal/mole. Per comprendere come questa barriera possa essere superata si deve ammetere che il retinale sotto l'azione della luce passi ad uno stato eccitato attraverso il quale è facile il passaggio *cis-trans* e che il legame retinale-opsina favorisca questo passaggio. Questo meccanismo molecolare è, d'altra parte, comune a tutto il regno animale.

Naturalmente questi meccanismi contribuiscono a comprendere solo un aspetto della visione colorata, e cioè quello col quale i pigmenti fotoricettori riescono a discriminare le varie lunghezze d'onda della luce, ma non quello di come l'informazione sia trasmessa al cervello e come questo decifri le informazioni ricevute.

La cecità ai colori, in certi uomini, alla luce di queste recenti scoperte, si può spiegare con la mancanza o l'alterazione di una delle rodopsine dei coni. Studi successivi ci permetteranno di stabilire il numero di animali ai quali è concessa una visione colorata, numero che sarà probabilmente, stando ad alcuni recenti risultati, molto più grande di quello che i biologi abbiano fino ad oggi sospettato. Non appena saranno messe a punto delle rapide tecniche analitiche per differenziare le varie rodopsine saremo in grado di accertare quali animali hanno la capacità ad una visione tricromatica. Tale visione potrà differire però dalla nostra, sia per la diversa posizione dei massimi di assorbimento dei pigmenti, sia per una differente elaborazione da parte del cervello del dato ricevuto dal processo molecolare primario.

Mammiferi

Se per un momento pensiamo ai colori di un uccello, a quelli di una farfalla o di un pesce tropicale e li paragoniamo a quelli dei Mammiferi restiamo veramente delusi. Sono colori poco puri che vanno dal giallognolo al rossastro, al rosso-bruno, al grigio, al nero, la cui monotonia è rotta solo dall'altenarsi delle tinte come avviene negli animali pezzati.

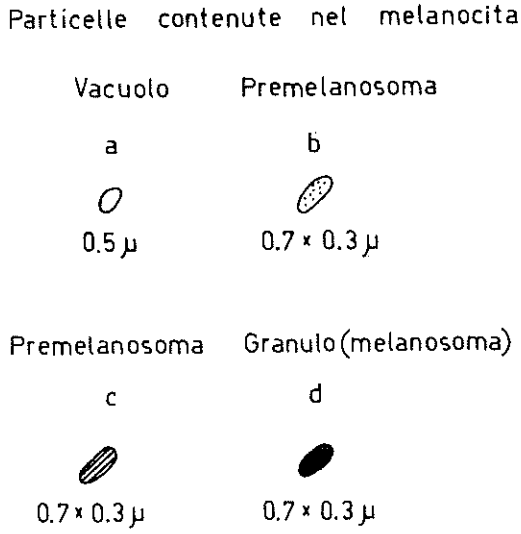
Due pigmenti, melanina e feomelanina, contribuiscono a queste colorazioni. Se si eccettua l'emoglobina del sangue, che solo in determinate occasioni affiora in superficie col suo caratteristico colore, non si conoscono pigmenti gialli, rossi, blu o verdi estraibili e classificabili come individui chimici: la pelliccia della scimmia *Cercopithecus sabaeus* appare verde solo per una mescolanza di peli giallognoli e neri. I colori azzurri e verdi dalle tonalità spesso cangianti che rendono l'occhio del mammifero così meravigliosamente piacevole a vedersi sono dovuti ad un effetto di natura fisica o nascono dall'azione combinata di uno schemocromo con un biocromo.

Il melanocita.

Il pigmento che colora la pelle e i peli dei Mammiferi viene fabbricato in una cellula che si chiama melanocita [3]. I melanociti hanno origine da cellule del sistema nervoso centrale durante lo sviluppo embrionale; la loro parentela con le cellule nervose è evidente se si osserva la struttura dendritica, cioè con prolungamenti simili a filamenti. Sulla loro origine sono state condotte indagini che possono considerarsi definitive. Usando come animale da esperimento il topo si è potuto mettere in evidenza che solo quei tessuti contenenti la cresta neurale, cioè il primo abbozzo del sistema nervoso dell'embrione, producono cellulle (melanoblasti) che si trasformeranno in melanociti; viceversa se si trapiantano tessuti embrionali, escludendo le cellulle nervose, peli e pelle bianca si sviluppano normalmente senza però produrre pigmento. Nel topo i melanoblasti, che poi diventeranno melanociti, abbandonano la cresta neurale al dodicesimo giorno dello sviluppo embrionale, mentre nell'uomo i primi melanoblasti si osservano nella pelle del feto all'incirca alla decima settimana di gestazione.

Il melanocita è caratterizzato dalla presenza di numerosi organelli o vacuoli a diverso stadio di sviluppo. All'inizio il vacuolo (*a*) è appena coperto da un sottile strato di materiale incolore e semidenso che rapidamente si indurisce e si ingrandisce prendendo una

forma definita detta premelanosoma (*b*). Il premelanosoma è uno stadio ormai organizzato e specifico per la produzione di melanina: qui si trova custodito l'enzima che deve iniziare la reazione chimica e le matrici proteiche sulle quali crescerà il pigmento-polimero. Nella fase (*c*) detto melanosoma comincia una ordinata deposizione di



melanina che procede veloce fino alla comparsa di un vero e proprio granulo (*d*) nero o bruno, in cui il principale costituente è la melanina.

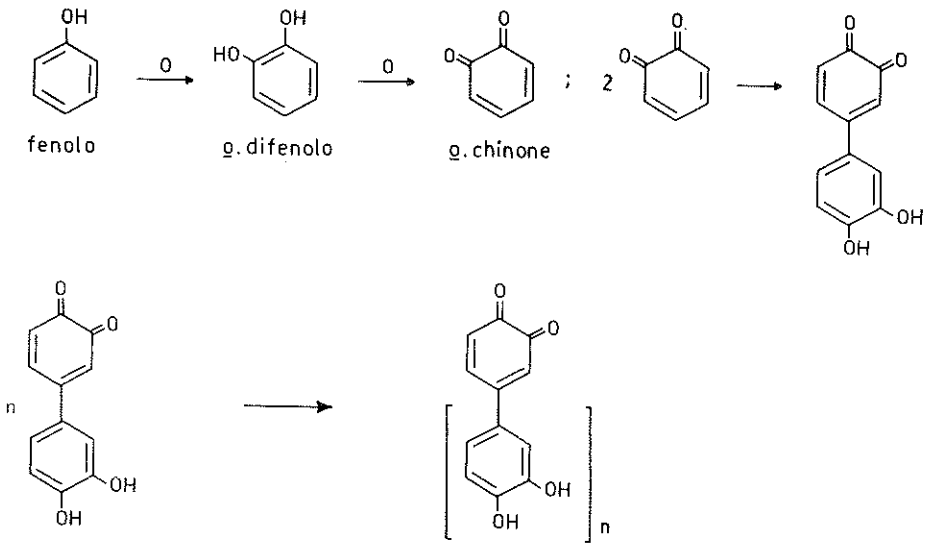
Nel granulo è spenta ogni attività chimica. Esso è pronto, come un colorante sintetico, per essere impiegato per lo scopo per cui fu costruito. Passa nell'epidermide dove si trovano due tipi di cellule: i cheratinociti e le *cellule di Langerhans*. Mentre la funzione di queste ultime non è ben chiara, esiste invece un'attività molto stretta fra melanocita e cheratinociti tanto che si può parlare, quale agente pigmentante, di un unico sistema funzionante in perfetta armonia. I cheratinociti oltre a ricevere dal melanocita i granuli di pigmento se li procurano anche fagocitando porzioni di dentriti. Ciò fa pensare che esista una particolare organizzazione biologica che integri le singole funzioni dei due tipi di cellule.

L'intensità del colore della pelle dipende principalmente dal colore e dalla forma dei granuli, dal numero e dal modo in cui essi sono distribuiti. Per esempio, la differenza di colore fra negri e mongoli è dovuta al fatto che i granuli nei primi sono isolati e sparsi nei cheratinociti, mentre nei secondi si trovano a gruppi localizzati

in alcune vescicole dei cheratinociti. Il controllo genetico si esercita probabilmente in modo complesso e diverso. Ad esempio, sulle matrici del melanosoma o a livello di un differente stadio di sviluppo delle particelle del melanocita o sul tipo di melanina sintetizzata. Oltre a geni specifici che agiscono sul melanocita, altri possono forse agire con modificazione del tessuto che lo circonda.

Come agisce la tirosinasi.

L'enzima tirosinasi si trova nei melanosomi del melanocita ed è essenziale nella sintesi della melanina. L'enzima, che si conosce anche in forma cristallizzata, è una proteina a base di rame che catalizza l'ossidazione della tirosina fino a produrre il pigmento bruno o nero. Se consideriamo che la tirosina è un fenolo sostituito possiamo immaginare, ponendo per semplicità al posto della tirosina il fenolo, che la reazione segua il seguente corso:



Senza entrare nei dettagli della reazione che è più complessa di quanto appaia nello schema va detto che l'enzima agisce sul monofenolo trasformandolo in difenolo, e successivamente in chinone.

Il chinone è il vero motore del processo di polimerizzazione, che procede fino a quando non si è formato un granulo insolubile; solo a questo stadio compare il colore nero. Nel caso della tirosina le

reazioni sono più complesse rispetto al precedente schema perché la catena alaninica (—CH_2—CH—COOH) subisce diverse modifiche. La
|
NH_2
tirosinasi è un enzima molto versatile ed è capace di catalizzare l'ossidazione della tirosina anche quando essa fa parte di una catena proteica, e probabilmente la sua azione continua ancora sui polimeri intermedi che conducono alla melanina.

Una spiegazione del perché nel melanosoma il pigmento cresca in modo ordinato, cioè in punti diversi e regolarmente distanziati, può essere fornita supponendo che i polimeri ad un certo stadio del loro sviluppo vengano ancorati a gruppi –SH della matrice proteica. Ne potrebbe risultare così un disegno a zebra che, infatti, si può osservare al microscopio elettronico.

L'assenza o l'inattività dell'enzima è causa di quell'affezione dell'uomo nota col nome di albinismo. Questo errore metabolico, che è congenito, scolora la pelle e i capelli, rende gli occhi sensibili alla luce e in genere abbrevia la vita. L'albinismo, cioè il blocco delle reazioni chimiche che conducono alla melanina, è noto anche in altri Mammiferi, ma è piuttosto raro in quelli che vivono allo stato selvatico perché vengono eliminati dalla selezione naturale. Dal punto di vista genetico l'albinismo è dovuto alla trasformazione di un gene *A* dominante, capace di sintetizzare la tirosinasi in un allele recessivo *a* che non produce più l'enzima. Un'iperattività dell'enzima può produrre, viceversa, larghe zone di cute molto pigmentata o trovarsi associata a quei terribili tumori chiamati melanomi che si osservano sulla pelle di un gran numero di animali, dai pesci all'uomo.

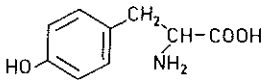
Una formula difficile da determinare.

Il dogma della chimica impone che per descrivere una molecola, anche complessa, occorre stabilire il peso molecolare, la natura degli atomi e il tipo di legami che li tengono uniti, la configurazione sterica. Anche nel caso della melanina, in molti laboratori si è puntato diritto a questi obiettivi.

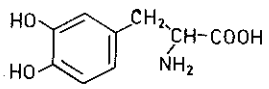
A prima vista la situazione non si presenta male. Il granulo di melanina si può isolare facilmente, ha forma ben definita e variabile a seconda dell'animale, a seconda che si trovi nella pelle dell'uomo, nel pelo del bovino, nella penna di un uccello o nell'inchiostro dei cefalopodi. Il suo diametro è tale che è possibile vederlo con un buon microscopio.

Successivamente si osserva che i granuli sono molto resistenti agli agenti atmosferici, tanto che sono stati trovati in fossili di Cefa-

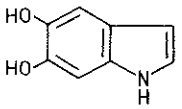
lopodi, Pesci e rane di 150 milioni di anni fa. Se una vita simile alla nostra vi fosse stata ai tempi passati sulla Luna è molto probabile che la melanina si sarebbe conservata più di ogni altro pigmento. L'insolubilità che il pigmento mostra in ogni tipo di solvente è un'altra caratteristica che spiega come le melanine dei fossili siano giunte a noi. Il fatto che un solido non si sciolga, rende molto difficile comprendere la sua struttura, almeno nel senso comune della chimica organica, ma non è questo il solo aspetto negativo che rende difficile stabilire la struttura delle melanine. Infatti, queste, oltre ad essere insolubili, sono anche amorfe [4]. Per quanto sia un'impresa scrivere la formula di una singola melanina, tuttavia, conosciamo molto della chimica di questi pigmenti. Essi si formano a partire dalla tirosina,



tirosina

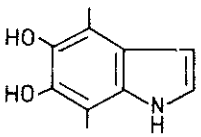


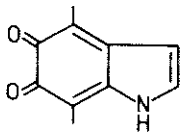
Dopa

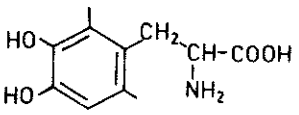


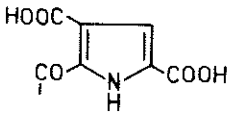
5,6-diossindolo

un amminoacido molto diffuso in natura, che si trasforma in DOPA (*Dihydroxyphenylalanine*). La Dopa in presenza di tirosinasi o in ambiente leggermente ossidante produce diversi prodotti fra cui il 5,6-diossindolo, composto incolore che si converte molto rapidamente nel corrispondente chinone, il quale facilmente polimerizza seguendo le linee dello schema prima esposte per il semplice chinone. Sia di-





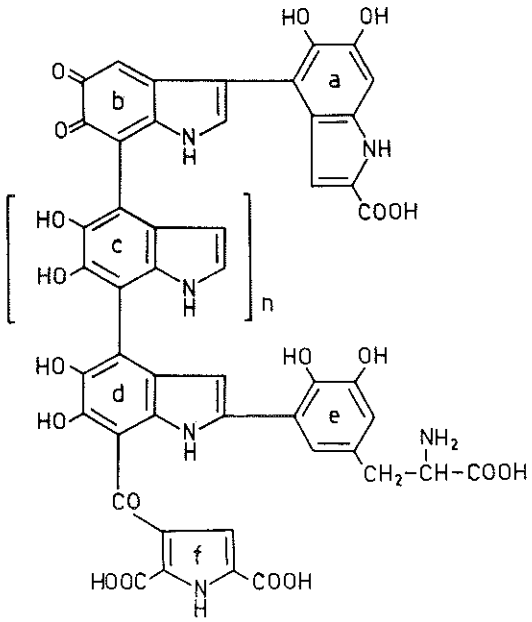




rettamente sia indirettamente è stato dimostrato che in vari tipi di melanine sono presenti strutture parziali in un rapporto che può variare da melanina a melanina e che influisce sulle proprietà fisiche della melanina. La presenza di unità, cioè di raggruppamenti

atomici diversi, indica che la formazione della melanina è un processo di copolimerizzazione accompagnato da processi ossidativi. In genere, queste reazioni non sono più controllate dagli enzimi e il pigmento cresce in modo disordinato; si formano milioni di macromolecole diverse fra loro che, per loro insolubilità, non si possono più distinguere chimicamente.

Sulla base di questi dati è possibile suggerire una formula che rappresenti qualitativamente una delle tante macromolecole melaniche che costituiscono il granulo. In una macromolecola di questo



tipo i punti di attacco delle varie unità *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, sono arbitrari anche se tengono conto delle informazioni ricavate dalle demolizioni chimiche. Probabilmente l'unità *c* rappresenta la parte più cospicua della molecola [5], mentre le altre unità sono solo una parte minore; i rapporti fra le varie unità possono però variare a seconda della fonte biologica da cui si è tratta la melanina, come ad esempio capelli o peli, pelle o tumori melanotici. In questi ultimi le unità *e* sono molto numerose; ciò starebbe a significare che la biogenesi delle melanine tumorali possa seguire un corso diverso da quelle fisiologiche, e il fatto meriterebbe di essere approfondito. È infine da tenere presente che una melanina non è sufficientemente descritta se non la si consideri, come già visto, sempre collegata ad una proteina.

A queste molecole non è più attribuibile il significato classico che il termine cromoforo ha per le comuni molecole colorate. Mentre per queste ultime noi diremo che sono rosse, gialle o viola, perché è presente un determinato raggruppamento chimico, per le melanine attribuiremo le colorazioni brune, rosso-brune e nere alla forma del granulo, alla sua grandezza, al numero di granuli.

Nel manto di alcuni agnelli rosso-bruni i granuli hanno dimensioni diverse da quelle degli agnelli neri, nei gatti grigi i granuli sono distribuiti in modo particolare. Nei capelli castani, i granuli di melanina sono trasferiti dal melanocita ai peli, sotto controllo genetico, a gruppi. Nell'uomo e nel cavallo il colore grigio è invece dovuto alla mescolanza del pelo nero con quello bianco.

I melanosomi del melanocita delle razze dai capelli biondi non sono completamente riempiti di melanina, come avviene per i granuli delle razze dai capelli neri, ma hanno invece una struttura lamellare simile a quella dei premelanosomi e sono meno numerosi.

Non vi sono metodi chimici o fisici, a parte il colore nero, che si prestano all'identificazione rapida della melanina. Bisogna ricorrere al laborioso metodo della degradazione e al riconoscimento dell'acido 2,3,5-pirroltricarbonico e del 5,6-diossindolo che sono prodotti caratteristici di demolizione.

Cambiamento di colore.

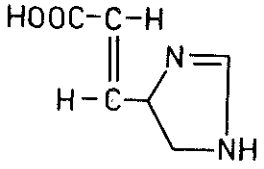
Per l'uomo il cambiamento di colore è quasi sempre un fatto drammatico. Modifiche nel colore della pelle indicano gravi malattie. L'improvviso incupirsi di un neo può essere il segno dell'insorgere del cancro. L'incanutimento, fenomeno in cui l'attività tirosinasica decresce lentamente fino a cessare del tutto, è il segno del declino. Nel quadro dell'alcaptonuria, una malattia metabolica di natura genetica, possono apparire colorati il sudore, le unghie, la pelle; talune parti della pelle assumono una colorazione blu scura e il sudore può essere rosso per deposito o escrezione rispettivamente di acido omogentisico (prodotto di degradazione della tirosina e della fenilalanina) polimerizzato. Meno preoccupante e piuttosto raro è il fenomeno che fa apparire il sudore colorato in rosso, giallo, verde e perfino nero a causa di una probabile disfunzione di membrane accoppiata ad una eccessiva ingestione di cibo o prodotti colorati. Per inciso e per curiosità si può ricordare che l'ippopotamo suda normalmente rosso, a causa di un pigmento non ancora studiato, ma di probabile natura polimerica, dato che non è dializzabile e si precipita con alcol da una soluzione acquosa.

L'unico cambiamento di colore che si può considerare un fenomeno frequente e normale è quello che va sotto il termine di abbronzatura ed è ben visibile sulla pelle delle razze bianche. Quando le radiazioni colpiscono la pelle una parte di esse è riflessa, una parte assorbita e dispersa e una parte penetra al di là dello strato corneo.

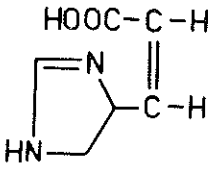
Lo strato corneo, composto di cellule per uno spessore di 10-20 μm, possiede la capacità di riflettere la luce e anche, in parte, di assorbire, per la presenza di componenti liberi (istidina, peptidi, colesterolo, fosfolipidi), le radiazioni ultraviolette che hanno una lunghezza d'onda compresa fra 260 e 290 nm. Lo strato sottile sottostante formato dalle cellule del Malpighi è composto da proteine, grassi, membrane nucleari e granuli più o meno pigmentati (melanosomi); questo strato provvede a disperdere le radiazioni a bassa lunghezza d'onda che siano riuscite a passare attraverso lo strato corneo. In particolare i granuli di melanina assorbono sia le radiazioni ultraviolette sia quelle dell'infrarosso e del visibile. Senza la protezione del pigmento, che nelle pelli più scure forma granuli più numerosi e più vicini uno all'altro quasi a formare una barriera, una considerevole frazione delle radiazioni comprese fra 240 e 300 nm raggiungerebbe le papille del derma. Nelle pelli poco pigmentate, perciò, la luce e in particolare i raggi ultravioletti possono raggiungere il derma, sede di importanti reazioni biologiche; le radiazioni trasformano molte molecole e in special modo quelle che posseggono dei gruppi –OH (ossidrili) *in radicali liberi che, trovandosi in uno stato di valenza anomalo, sono straordinariamente reattivi e si combinano con ogni altro tipo di molecola senza più obbedire alle leggi cellulari.*

Mentre uomini e fanciulle prese da improvviso raptus melanico giacciono mollemente distesi sulla sabbia rovente, i raggi ultravioletti penetrano nelle parti più vitali sconvolgendo il procedere ordinato delle catene di montaggio metaboliche. I segni di allarme dell'organismo sono evidenti: pelle rossa dolente, vesciche, brividi, febbre, nausea, senso di prostazione, desquamazione. Contemporaneamente all'azione solare scatta, fortunatamente, l'operazione antiradicalica [6]. L'enzima tirosinasi che si trovava nei melanosomi in una sorta di letargo diventa improvvisamente attivo: la pelle si pigmenta, si abbronza. Un'ipotesi abbastanza accreditata per spiegare il fenomeno in termini molecolari è che nella pelle bianca vi siano sostanze contenenti gruppi –SH (solfidrilici), che legandosi al rame della tirosinasi la rendono inattiva, e che la luce ultravioletta riesca a sbloccare la forma inibita ossidando i gruppi –SH a gruppi SO_3H (solfonici). Il risultato è che un maggior numero di granuli di pigmento vengono trasmessi agli strati superiori formando, alla fine, uno scudo efficace quasi al 95 % contro le radiazioni. Tuttavia la melanina non è la

sola difesa dell'organismo contro le radiazioni. Un'ulteriore protezione è infatti ottenuta sia con l'ispessimento dello strato corneo sia per la benefica azione conformazionale esercitata dall'acido urocanico. Questo acido che si trova in forma *trans* nell'epidermide, assorbendo i raggi ultravioletti si trasforma nella forma *cis* e può restituire poi l'energia assorbita, non più pericolosa, nel passaggio inverso *cis* $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ *trans*.



acido trans-urocanico



acido cis-urocanico

Contro i pericoli della luce solare ci si può difendere anche con l'uso di prodotti artificiali come l'acido *p*-amminobenzoico e il benzofenone che assorbono le radiazioni ultraviolette, l'ossido di zinco e di titanio che riflettono totalmente la luce; tutti prodotti che sotto una fantasmagoria di nomi fanno parte della cosmetica balneare. Un più raffinato e fisiologico modo per aumentare la pigmentazione sarebbe l'uso, tramite iniezioni, dell'ormone che si suole indicare con la sigla MSH (*Melanocyte Stimulating Hormone*).

Cospicui e di diverso significato sono i cambiamenti di colore presso gli altri Mammiferi. L'ermellino *Mustela erminea* ha una pelliccia scura d'estate e bianca d'inverno. Ciò è dovuto alla temperatura: ermellini fatti crescere e prolificare in ambienti caldi producono pellicce scure anche nel periodo invernale. Nelle donnole *Mustela cicognanii* e *Mustela frenata* il colore della pelliccia dipende dalla luce e cioè dalla diversa lunghezza del giorno estivo e di quello invernale. È probabile che sia la temperatura sia la luce siano fattori che agiscono in concomitanza sul colore dei peli di altri animali. Il coniglio domestico dell'Himalaya nasce con una pelliccia bianca, ma poi la punta del naso, delle orecchie, della coda e delle zampe diventano nere: è curioso osservare che le estremità si trovano esposte ad una temperatura più bassa delle altre parti del corpo. Anche il gatto siamese è ricco di melanina nelle zone più fredde del corpo. La lepre delle Alpi *Lepus timidus* presenta diverse mute in rapporto al variare della temperatura, della luce e di influenze ormonali. Il pelo bianco da dicembre ad aprile viene progressivamente sostituito

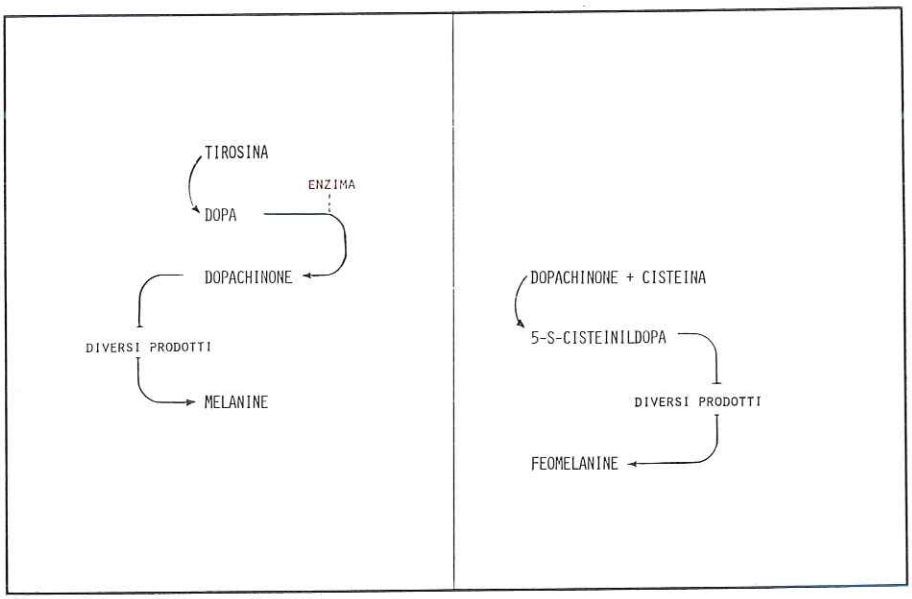
da peli grigi e bruni: questi cambiamenti di colore permettono all'animale di adattarsi al colore dell'ambiente e costituiscono un sistema difensivo contro i nemici.

Il pelo rosso.

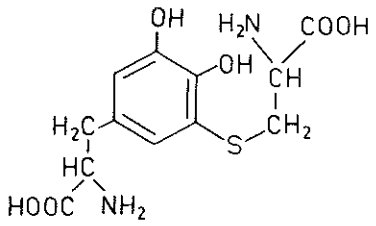
La massima parte delle colorazioni rossastre e rosso-brune dei peli dei Mammiferi sono dovute alle feomelanine [7]. Anche le lentiggini della pelle umana sono colorate da questi pigmenti. È probabile che a seconda della concentrazione e della forma dei granuli di pigmento si possono osservare anche tonalità di colore che vanno verso il giallo e verso il rosa. I colori non sono mai puri e vivaci come lo sono quelli impartiti ai diversi animali dagli altri biocromi come, ad esempio, i carotenoidi.

In molti Mammiferi, eccetto l'uomo, i peli possono essere colorati sia da melanina che da feomelanina; i due pigmenti possono essere presenti anche sullo stesso pelo.

La pigmentazione di un pelo o del capello nero o rosso si realizza attraverso diverse fasi. Il melanocita o il feomelanocita produce il granulo di pigmento (di forma e grandezza variabile) che viene trasferito alle cellule che formeranno il pelo. Le cellule che hanno ricevuto il pigmento vengono poi elaborate dalla papilla del pelo che produce tutti gli elementi strutturali del pelo e del capello vero e proprio.



Anche le feomelanine si formano a partire dalla tirosina. Arrivati però al dopachinone questo reagisce con la cisteina formando come principale prodotto la 5-S-cisteinildopa, un amminoacido scoperto di recente, che è il vero precursore delle feomelanine [8].



5-S-cisteinildopa

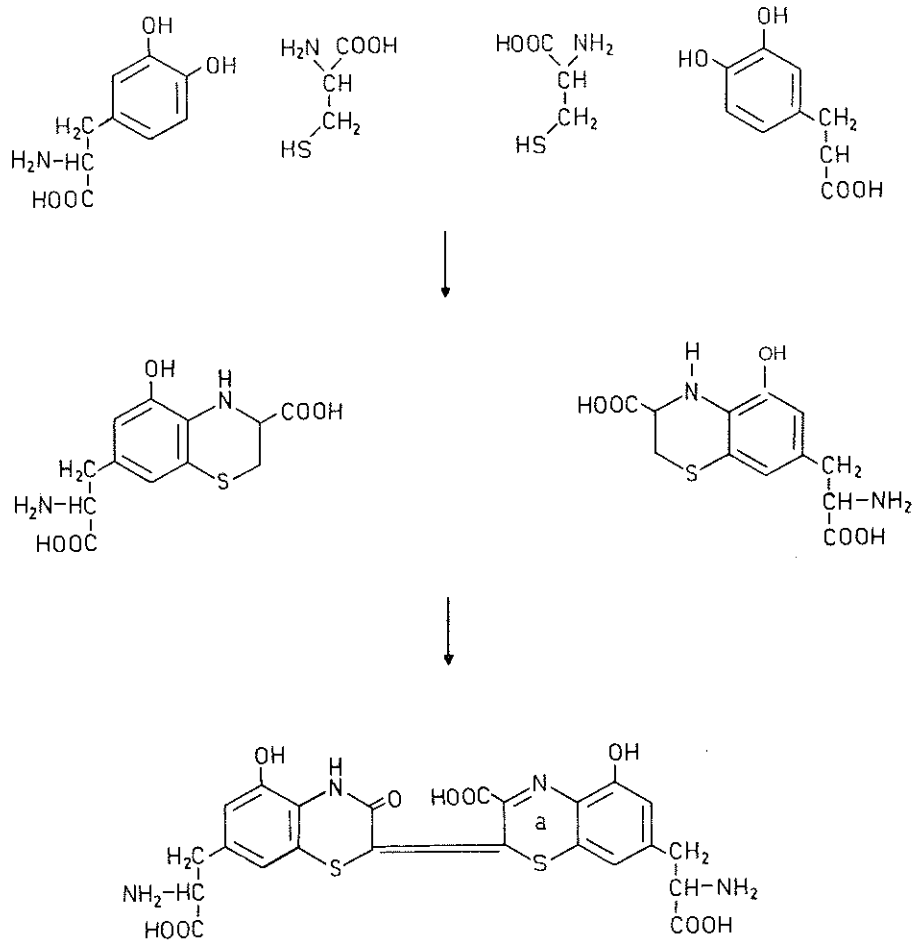
Questa reazione controllata geneticamente decide se un uomo avrà i capelli neri o rossi, se un cane o un gatto, o un altro animale avrà il manto fulvo o nero.

Per estrazione con alcali di materiale di varia origine (capelli, peli, piume) le feomelanine vengono più o meno facilmente liberate dal materiale cheratinoso e isolate. Si tratta di una miscela complessa di pigmenti legati o no a materiale proteico e a peso molecolare variabile. Uno di questi pigmenti, di colore rosso arancio allo stato cristallino e che per le sue proprietà fisiche si isola più facilmente degli altri, ha una struttura mai ritrovata prima in natura. Il pigmento presenta nel suo spettro in ambiente alcalino massimi di assorbimento a 452, 327 e 240 nm e possiede l'interessante caratteristica di convertirsi, per riscaldamento con acidi, in un pigmento dall'intenso colore rosso-viola.

Dalla formula di struttura, si vede che questo pigmento deriva dalla cisteina e dalla Dopa secondo un processo che consiste nella chiusura della catena cisteinica su un ossidrile della Dopa e sull'anello benzenico con formazione di un'unità di tipo benzotiazinico e successiva saldatura di due di queste unità benzotiaziniche.

Gli altri pigmenti, di colore rosso-bruno, che si accompagnano al composto giallo-arancio risultano avere strutture più complicate. Una parte della molecola è formata da unità caratterizzate dalla presenza di anelli tiazolici, presumibilmente formatisi per restringimento di anelli tiazinici e di anelli tipo piridinico per chiusura a ciclo della catena alaninica ($-CH_2-\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}-COOH$). Da un punto di vista chimico,

le strutture delle melanine e delle feomelanine differiscono profondamente, mentre è possibile che le due classi di pigmenti siano biologicamente correlate; ad esempio si può pensare ad un unico sistema



Struttura di uno dei pigmenti che contribuiscono a colorare i peli dei mammiferi. Lo stesso pigmento si trova anche nelle penne degli uccelli.

enzimatico che possa alternativamente operare sulla Dopa o sulla miscela Dopa+cisteina, mentre il controllo sulla formazione di melanina o feomelanina potrebbe essere esercitato dal melanocita o dal premelanosoma al livello di membrana.

I granuli dei due tipi di biocromi sono diversi. Nei peli del porcellino d'India i granuli di melanina hanno l'aspetto di bastoncelli assai simili fra loro, mentre quelli di feomelanina rossi o gialli sono di forma sferica o granulare; mentre nei primi il pigmento è orientato su una matrice proteica, nei secondi non è riconoscibile alcuna particolare disposizione [9].

Varie sono le colorazioni del pelo umano: rosso carota, arancio, rosso Tiziano, rosso-bruno. Questa varietà di tinte può essere spiegata con la quantità e il tipo di feomelanina presente nel pelo; meno probabile è che queste colorazioni possano apparire modificate dalle melanine come avviene per altri animali, per quanto l'imbrunimento dei capelli rossi con l'avanzare dell'età dell'individuo sia un fatto frequentemente osservato.

Gli individui dal pelo rosso si trovano in una situazione di disagio biologico rispetto a quelli dal pelo nero perché il pigmento rosso non offre un'adeguata protezione dalle radiazioni solari. Il carattere irritabile che si suole spesso attribuire all'uomo dal pelo rosso è forse legato ad una particolare fotosensibilità delle feomelanine e dei suoi metaboliti. Quali sono le condizioni ambientali e biologiche che hanno determinato, presso i nostri antenati, la sintesi di un pigmento rosso e quale ruolo funzionale ha giocato nel passato questo pigmento?

L'emoglobina come pigmento.

L'emoglobina che colora in rosso il sangue degli animali, oltre che avere la vitale funzione di portare l'ossigeno dai polmoni, attraverso le arterie, ai tessuti, gioca un ruolo, anche se più modesto, nei Mammiferi, come pigmento da esibizione.

Il colore roseo delle gote è dovuto alla pelle molto sottile che permette di vedere l'emoglobina. In altri animali l'emoglobina contribuirebbe maggiormente al colore della pelle ma è mascherata dalla presenza di melanina, dallo strato di cheratina e soprattutto dai peli che, come ad esempio negli orsi, costituiscono una impenetrabile pelliccia. Il suo colore roseo o rosso si può però osservare sulla lingua, sulla punta del naso, nell'interno delle orecchie e sulle natiche di parecchi mammiferi, in tutte quelle zone cioè dove la pelle o la mucosa è molto sottile. Il mandrillo africano e altre scimmie presentano zone del corpo rosse per un'alta vascolarizzazione della cute e altre parti rosso-bluastre per una combinazione del rosso dell'emoglobina col nero della melanina della pelle; altre zone, specie quelle delle natiche, sono nettamente blu per effetto Tyndall di uno schemocromo la cui struttura fine non è stata approfondita.

Una classe di pigmenti affini da un punto di vista strutturistico e biogenetico al sistema cromoforo dell'emoglobina sono le porfirine (vedi Uccelli). Questi pigmenti contribuiscono assai poco al colore dei Mammiferi ma si conosce un caso interessante rappresentato dai denti delle Nutrie e dalle ossa dello scoiattolo americano *Sciurus niger* che sono colorati in bruno rossastro da una porfirina (uroporfirine). Il pigmento può essere messo in evidenza irradiando con luce ultravioletta il tessuto osseo in quanto le porfirine diventano fluorescenti. Una singolare localizzazione di porfirina, visibile con luce ultravioletta, è quella della protoporfirina IX, prodotto di degradazione dell'emoglobina, che si trova accumulata nella ghiandola di Harder (ghiandola associata all'apparato lacrimatore del ratto).

Per un disturbo metabolico, in genere ereditario, anche i denti e le ossa dell'uomo possono risultare colorati dalle porfirine. Si tratta purtroppo di una grave malattia che, oltre a presentare sintomi diversi e gravi sofferenze, rende i pazienti fortemente fotosensibili a causa delle porfirine.

Gli occhi del galago.

Le proscimmie hanno il pelame grigio, bruno o color ruggine per la presenza di melanina e feomelanina. Questi animali ci colpiscono per i grandi occhi gialli o rossastri e per la loro vista, acutissima anche di notte. I loro occhi, colpiti da un fascio di luce, brillano nel buio come due fari. Il pigmento giallo del *Galago crassicaudatus*, costituente il *tapetum lucidum* dietro la retina, è riboflavina cristallizzata. La riboflavina è nota come vitamina B_2 ed è una vera sorpresa trovarla accumulata negli occhi del galago.

Colorazioni artificiali.

Il pipistrello africano *Lavia frons* usa spargere sui peli una polvere gialla, prodotta da ghiandole che si trovano nella parte inferiore del corpo, come se fosse un cosmetico. È difficile dire però se un tale comportamento sia intenzionale come lo è per l'uomo.

La storia del colore come ornamento è antica e piena di significati. Il colore e i disegni colorati avevano grande importanza, soprattutto in tempo di guerra, presso le razze primitive e gli antichi. Giulio Cesare rimase impressionato quando incontrò i primi britanni dalla pelle blu e viola [10] e pensava che essi si dipingessero per spaventare i nemici.

L'arte di colorarsi, assai diffusa un tempo, sopravvive tuttora, anche se i significati primitivi vanno perdendosi, presso i Maori, i Papuasi, i Giapponesi e alcune tribù africane.

Aborigeni australiani si dipingono il viso con strisce di ocra gialla o rossa, carbonella, fuliggine, gesso per il rituale che segna la fine della pubertà. Ancora oggi, usando estratti vegetali, gli indigeni brasiliani si tingono il corpo in viola e in bruno e in particolare usano farsi macchie nere sotto gli occhi per esprimere tristezza e macchie rosse per esprimere allegria. Una raffinata cosmetica policroma con un messaggio dello stato d'animo presenterebbe notevoli vantaggi nelle relazioni sociali, ma pensiamo che l'uomo nella sua ipocrisia sia riluttante a scoprire i propri sentimenti.

Nel mondo occidentale moderno gli uomini, salvo particolari casi, non si dipingono, mentre per le donne il colore, rispetto al passato, ha il solo scopo del piacere estetico e dell'attrazione sessuale.

I colori più usati sono senza dubbio il rosso e il nero. I rossetti vengono fatti con eosinato di potassio, cera bianca e olio di mandorla oppure polvere finissima di seta colorata da eosina e incorporata in cera. Altri pigmenti che si usano sono le lacche di alizarina, il giallo di cadmio, il miristato di rodammina, mentre l'aspetto perlaceo viene dato da estratti di squame di pesce. Naturalmente vi sono differenze da rossetto a rossetto, alcuni dei quali virano anche di colore a seconda del pH delle labbra.

Altri cosmetici colorati sono le tinture dei capelli, la cipria per il viso, il cosmetico per le ciglia e lo smalto per le unghie. Fra i coloranti dei capelli troviamo l'hennè, un estratto vegetale della *Lawsonia alba* contenente il naftochinone lawsone, accanto a prodotti di sintesi derivati dalla *p*-fenilendiammina. Mentre questi coloranti penetrano nel capello altri a base di argento o di rame formano uno strato sottile sul capello impartendogli oltre al colore anche una lucentezza metallica. La cipria è un miscuglio di talco, gesso, caolino, ossido di zinco, stearato di magnesio, il tutto colorato e profumato a seconda delle esigenze. Il cosmetico per le ciglia è in genere carbone d'ossa con una base oleosa, mentre l'ombretto degli occhi ha in sostanza una composizione simile al rossetto per le labbra con l'aggiunta frequente di polveri metalliche di rame o di alluminio per aumentare la lucentezza. Lo smalto per le unghie è a base di collodio, alcol butilico, acetato di etile, addizionati con pigmenti scelti nella vasta gamma di tonalità offerta dall'industria moderna: un po' di estratto ammoniacale di squame di pesce impartisce l'aspetto madreperlaceo all'unghia.

Una cosmesi per via interna non è ancora in uso, per quanto si possa riuscire a colorare in arancione i peli dei topi albini immettendo sostanze chimiche come la 9-fenil-benzoisoallossazina e a trasformare, in parte, l'inchiostro nerissimo che si trova nella borsa della seppia in un pigmento di colore rosso-bruno introducendo nel circolo sanguigno dell'animale della cisteina [11]. Questi risultati, che potrebbero essere arricchiti con nuovi esperimenti, sono in accordo con la ben nota capacità che hanno i precursori della melanina a copolimerizzare con altre molecole organiche.

L'arte del tatuaggio (dal polinesiano *tatu* = ferita) consiste nella perforazione della pelle e successiva introduzione di sostanze coloranti. Molto usata da Polinesiani, Maori, Birmani, Cinesi, Giapponesi è stata portata in Europa dai marinai. Fra i Polinesiani il tatuaggio si effettua a partire dai 12 anni ed è segno di pubertà. Il tatuaggio più esteso è praticato nelle isole Marchesi dove tutto il corpo viene coperto con colori neri o rossi. La perforazione della pelle viene fatta con aghi o con speciali arnesi acuminati che vengono applicati e martellati mentre sono roventi, in un rumore assordante di tamburi e canzoni che coprono le urla dell'infelice. In modo diverso operano gli Esquimesi che passano sotto la pelle un filo, coperto di fuliggine, il quale dopo essere stato ritirato lascia delle linee nere. Gli Australiani praticano la scarnificazione: si taglia la carne e si riempie la ferita di argilla colorata e si aggiunge cenere per agevolare la cicatrizzazione. Il significato del tatuaggio è assai diverso a seconda dei tempi e dei luoghi in cui fu praticato. Estetico, erotico, segno di potenza, segno di vendetta, di ricordo, di scongiuro, di riconoscimento. Più razionalmente, fu praticato nella II guerra mondiale nell'esercito americano per indicare il gruppo sanguigno dei soldati.

Il messaggio del colore.

Il colore suscita idee. Molte di queste debbono essere legate a ricordi che hanno radici nella preistoria, dove il colore giocò un ruolo importante per la vita dell'uomo. Ancora oggi il colore ci serve nella scelta dei cibi e dell'ambiente dove vivere. Naturalmente il messaggio « colorato » viene elaborato in modo diverso a seconda della specializzazione della persona. L'esperto valuta dal colore della campagna la sua fertilità e dal colore del terreno che cosa coltivare. Alcune malattie delle piante si individuano dal colore. Il medico si aiuta nella diagnosi dal colore del paziente. Il chimico dal colore delle sue provette trae informazioni sulla natura delle sostanze, le classifica, stabilisce se una reazione è avvenuta o se procede bene.

Esiste una vasta letteratura sulle reazioni dell'uomo al colore. Tutto l'organismo sarebbe influenzato dal colore. Diversi tipi di emozioni e di gradi di attività sarebbero da collegare all'intensità e alla lunghezza d'onda della luce. Il color porpora è maestoso e quindi finisce col diventare insopportabile, il giallo è allegro, il verde rilassante, l'azzurro diminuisce parzialmente l'attività. L'artista sente nel verde fecondità e speranza; nel blu fede, immortalità, trascendenza; nel rosso passione, potere, sensualità; nel giallo intelligenza, sapere, saggezza e a seconda delle tonalità falsità o serenità. Sono messaggi primitivi. Verde: la natura e la primavera. Rosso: il sangue. Giallo: l'oro.

Pelli calde.

Il pigmento della pelle, come tutti i corpi neri, riflette solo una piccola parte della luce incidente, la quale è perciò per la massima parte trasformata in calore. In un significativo esperimento se si tinge in nero un seme bianco di melone e lo si semina accanto ad uno bianco si osserva che germoglia prima il seme colorato.

Le pelli fortemente pigmentate « sono più calde », mantengono più a lungo il calore assorbito e hanno un ricambio idrico più difficile di quello delle pelli bianche. La quantità di melanina può inoltre influire sulla produzione della vitamina D.

Queste qualità della melanina sono poste alla base dell'ipotesi avanzata, anche se non da tutti condivisa, che i bianchi possano discendere dai negri. In epoche preistoriche grandi masse di negri provenienti dall'Africa passarono il 40° parallelo e si stabilirono in Europa. Qui trovarono condizioni di vita molto diverse come luce, umidità, temperatura; da una parte il sole europeo povero di raggi ultravioletti e dall'altra la possibilità di questi di penetrare ridotta solo ad alcuni parti del corpo meno pigmentate come l'interno delle palme della mano e dei piedi.

Le generazioni nate in Europa si trovarono presto a disagio, mentre i casi di rachitismo divenivano sempre più frequenti per l'alterato rapporto luce/melanina. Poiché l'unica speranza di sopravvivere era di smaltire la melanina in eccesso, iniziò a livello genetico un processo tale per cui fu bloccata o ridotta la sintesi di granuli di melanina; ciò portò ad un graduale schiarimento della pelle fino alla quasi totale scomparsa del colore nero. Diversa è la situazione in cui si trovano i negri d'America venuti dall'Africa solo recentemente e diversi sono i fattori che hanno portato alla ribalta il loro problema. Se è vero che il carattere violento, disorganizzato e im-

provviso delle rivolte negre d'America contro i bianchi ha radici in modi di vivere e in tradizioni diverse è anche vero che non si tiene nel debito conto l'effetto che la luce, l'umidità e il calore hanno su pelli così fortemente pigmentate. Se per un momento prescindiamo da situazioni politiche e sociali esistenti, e consideriamo il problema solo a livello biologico, appare chiaro che è assurdo attendere un periodo così lungo come quello richiesto dal chiarimento naturale della pelle; sarebbe quindi logico, anzi biologico accelerare tali tempi con una serie di incroci con le razze bianche.

Uccelli

Il colore degli Uccelli è dovuto soprattutto ai biocromi e agli schemocromi delle penne che coprono il tegumento il cui colore è solo raramente visibile. Nessun animale mostra colori belli e così assorbiti, toni così delicatamente sfumati, brillantezza e iridescenza di colori come gli Uccelli. La caduta delle penne e il loro rinnovo periodico (muta) può sostituire la livrea degli Uccelli con un'altra di un colore che meglio si adatti all'ambiente nel quale l'animale dovrà vivere per un certo periodo. Il colore ha importanza per il riconoscimento delle specie, del sesso, dell'età e del modo di vivere degli Uccelli.

Il controllo del colore è esercitato dagli Uccelli in modo diverso. Nella gallina di razza livornese il colore bruno si manifesta per l'azione di ormoni ovarici come è dimostrato dal fatto che se si eliminano gli ovari essa assume il colore brillante del maschio. Nei fagiani il colore è influenzato da ormoni ovarici, mentre i disegni del piumaggio dipendono non da ormoni ma da fattori genetici. Nel passero in fine solo fattori genetici controllano il colore e il tipo del piumaggio.

Salvo qualche rara eccezione solo tre tipi di biocromi colorano il piumaggio degli Uccelli: melanina, feomelanina, carotenoidi.

Melanine e feomelanine.

Le colorazioni nere, brune, rosso-brune, rossastre delle penne, del tegumento, e del becco degli Uccelli sono dovute alle melanine e alle feomelanine.

La pigmentazione della penna avviene in modo simile a quello della pelle o del pelo dei Mammiferi; i melanociti producono i granuli di pigmento, e questi sono poi trasferiti alle cellulle che for-

meranno la parte cheratinizzata della penna. Mentre il calamo non si pigmenta, le barbe e la rachide risultano colorati come ad esempio avviene nella penna di tacchino.

La melanina colora anche la pelle come nel pollo di razza Silky dove il fenomeno si può osservare in modo netto per il contrasto fra la pelle nera e le penne bianche, mentre il bargiglio rosso-viola appare tale per un effetto fisico della pelle nera e del sangue. Il colore bruno o nero del becco di molti Uccelli è dovuto a melanina; i granuli di pigmento formano sottili lamine incastrate nelle squame cornee che compongono la guaina del becco. I piccoli pappagalli australiani hanno il becco colorato in blu o in marrone a seconda che siano rispettivamente di sesso maschile o femminile. È interessante notare che se il becco di alcuni maschi si tinge di marrone si assiste allo straordinario spettacolo che i maschi corteggiano altri maschi, e più precisamente quelli ai quali è stato tinto il becco. Il becco di questi uccelli è colorato in bruno dalla melanina, mentre il colore azzurro è opera di uno schemocromo.

Il colore rosso-bruno [12] delle penne del pollo di razza New Hampshire è dovuto alla presenza delle gallofeomelanine. Su queste penne si ritrova una miscela di 4 composti macromolecolari molto simili fra loro.

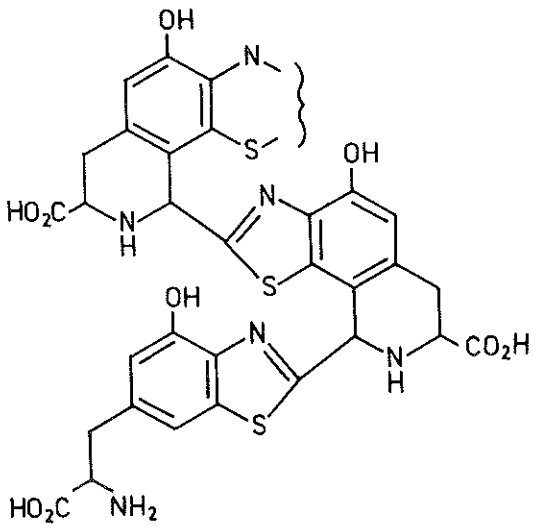
La gallofeomelanina-1, il pigmento più abbondante, può essere separata abbastanza facilmente dal materiale proteico che l'accompagna. Il suo peso medio è di 2000 ca., le gallofeomelanine-2, -3 e -4, sono delle cromoproteine contenenti circa il 60 % di una proteina che differisce dalla cheratina delle penne per l'assenza della cisteina quale sesto amminoacido. Se consideriamo più da vicino la struttura generale della gallofeomelanina-1 (struttura determinata soprattutto dai prodotti di demolizione ossidativa) notiamo che in esse sono presenti funzioni carbossiliche, amminiche primarie e fenoliche.

Dai prodotti di degradazione (fusione con alcali e ossidazione con H_2O_2) si nota l'assenza di derivati pirrolici ed indolici, prodotti caratteristici della degradazione delle eumelanine; ciò prova che le feomelanine non sono delle varianti strutturali delle eumelanine.

Le gallofeomelanine-2, -3 e -4 danno gli stessi prodotti di degradazione ottenuti dalla gallofeomelanina-1; ciò fa pensare che esse hanno la stessa struttura generale e differiscono probabilmente solo nel peso molecolare e nell'attacco alla proteina.

La feomelanina è anche responsabile di colorazioni giallastre, rosa o rosa-brune che si osservano in altri Uccelli. Generalmente, si ritiene, per quanto non ancora provato chimicamente, che il delicato e sfumato rosa-bruno del petto del fringuello *Fringilla coelebs* sia

da attribuire a granuli di feomelanina disposti a gruppi intercalati da spazi regolari che riflettono la luce bianca. Certamente tonalità e diverse colorazioni, sia di melanina, sia di feomelanina, si spiegano



con la diversa grandezza del granulo, il loro numero e la loro disposizione, piuttosto che con differenze di strutture chimiche dei pigmenti.

Carotenoidi.

Molte delle colorazioni gialle e rosse delle penne sono dovute a carotenoidi. I pigmenti vengono introdotti nell'animale con gli alimenti. Si ritrovano nelle cellule, all'inizio della crescita della penna, in goccioline grasse, e quando inizia la cornificazione lasciano la cellula pigmentaria e si diffondono nella cheratina. I carotenoidi si legano alle proteine costituendo un complesso carotene-proteina che possiede colore diverso da quello del pigmento libero. Ad esempio, mentre il carotenoide libero è giallo o rosso, in combinazione con la proteina può essere blu; naturalmente la combinazione modifica anche la solubilità del pigmento nel senso che questo quando è libero è solubile nei solventi dei grassi e insolubile in acqua, mentre quando è combinato le solubilità tendono ad invertirsi.

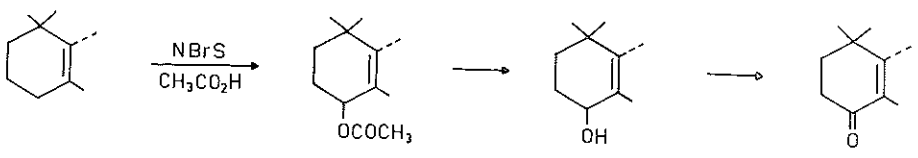
I carotenoidi, che sono formati in generale da 40 atomi di carbonio, hanno un sistema cromoforo caratterizzato da doppi legami

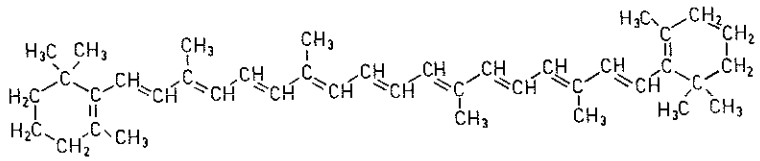
alternati da legami semplici distribuiti su una catena ramificata; all'estremità della catena essi portano, quasi sempre, due anelli cicloesenici trimetil-sostituiti, e spesso ossigenati.

I carotenoidi possono impartire alle penne colorazioni gialle, arancione, rosso, viola e in combinazione con proteine o schemocromi violetto, blu, verde. Sono solubili nei comuni solventi aprotici (cioè etere, benzina, tetracloruro di carbonio, etc.), mentre risultano insolubili in acqua anche in presenza di acidi e di alcali. Sono resistenti agli alcali, più o meno stabili all'ossigeno atmosferico che può decolorarli. Danno colorazioni blu con H_2SO_4 e con tricloruro di antimonio, ma la reazione non è da considerarsi decisiva per riconoscere un carotenoide. I carotenoidi idrocarbonici tipo β-carotene sono solubili in etere e ligroina, mentre quelli con funzioni ossigenate si sciolgono meglio in alcol metilico o etilico.

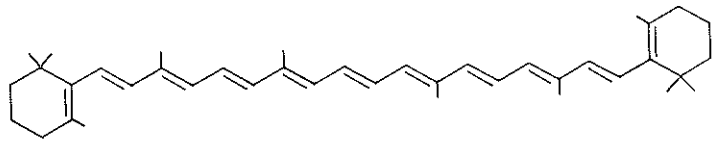
La purificazione dei carotenoidi estratti dai tessuti si fa utilizzando colonne di vetro riempite di carbonato di calcio, ossido di magnesio, idrossido di calcio, ossido di alluminio, nell'ordine scelto di volta in volta a seconda della forza di assorbimento richiesta.

Gli animali non sono capaci di sintetizzare la lunga catena di atomi di carbonio dei carotenoidi ma sono in grado di operare delle trasformazioni, in genere, introducendo funzioni ossigenate (—OH, CO, etc.) negli anelli cicloesenici. Ad esempio, nelle penne si trova il β-carotene, che come dice la parola è il pigmento della carota, accanto a zeaxantina, cantaxantina e rodoxantina, tutti contenenti ossigeno. In generale, negli animali accanto al carotenoide o ai carotenoidi introdotti col cibo si trovano altri pigmenti che non contribuiscono al colore, date le piccole quantità, e che sono solo prodotti intermedi. Esistono fattori di incertezza per quel che riguarda il meccanismo col quale l'ossigeno viene introdotto nella molecola: se cioè proviene dall'ossigeno atmosferico o dall'acqua, se il meccanismo sia sotto controllo enzimatico o sia una reazione catalizzata, provocata cioè dalla luce; è anche possibile che si tratti di un meccanismo complesso al quale concorrano insieme i vari fattori. Se si tiene presente che le sintesi di laboratorio si realizzano molto spesso in natura, vale la pena ricordare che se si tratta il β-carotene con N-bromosuccinimmide (NBrS) e acido acetico si può ottenere la cantaxantina; come mostrano le reazioni illustrate nello schema seguente:

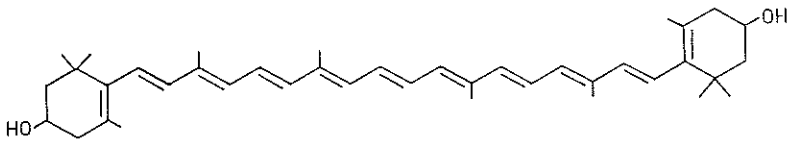




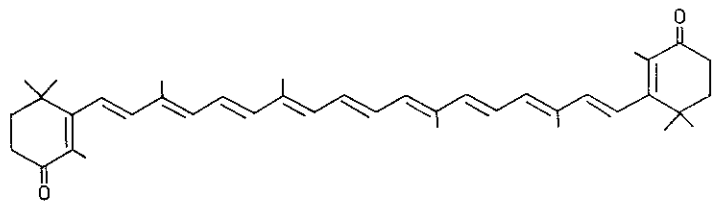
formula per esteso del β-carotene



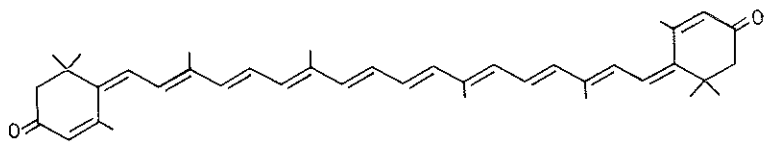
β-carotene



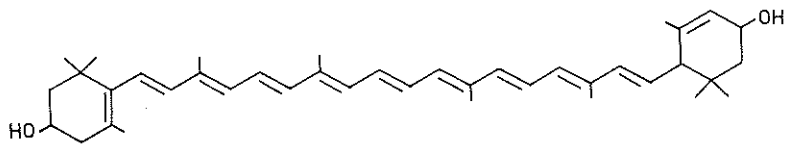
zeaxantina



cantaxantina



rodoxantina



luteina

Il colore rosso delle penne del *Lanarius atrococcineus*, del *Phoenicirens nigricollis*, *Ajaia ajaia*, *Rupicola rupicola*, *Guara rubra*, *Pyrrhula pyrrhula* sono dovute all'accumulo di rodoxantina, cantaxantina e astaxantina (vedasi Cap. Invertebrati). Sempre a carotenoidi sono dovute le colorazioni gialle, arancione e rosse dei picchi *Colaptes cofer* e *Colaptes auratus*, *Melanerpes erytrocephalus*, del tessitore *Euplectes franciscanus*, *Euplectes orix*, *Euplectes nigroventis*, *Euplectes afran*, *Euplectes taha*, *Ploceus cucullatus*, *Oriolus xanthornis*, del *Pyroderus scutatus*, della procellaria *Fulmarus glacialis*, il brillante colore del becco e delle penne dei tucani. I colori blu, viola e rosso che si osservano nelle barbe e nelle penne dei piccioni orientali *Ptilinopus* sono dovuti alla diversa dispersione del pigmento e allo spessore della cheratina; è interessante notare che la rodoxantina presenta diverse colorazioni fra cui quella rossa, violetta, blu quando in esperimenti cromatografici su colonna si vari il substrato o il mezzo eluente. Il *Xipholena lamellipennis* presenta penne color rosso scure, quasi nere, dovute sia alla concentrazione sia all'abito cristallino del carotenoide; è possibile infatti per semplice macinazione della penna modificare la tonalità che appare rossa, come avviene spesso in laboratorio polverizzando dei cristalli.

Ai carotenoidi, a differenza del bargiglio del pollo Silky, è dovuta la pelle rossa sotto gli occhi del *Lyrurus tetrix* e del *Tetrao urogallus*.

Nei Fenicotteri, come il *Phoenicopterus ruber*, il principale pigmento è la cantaxantina che viene sintetizzata a partire dai carotenoidi alimentari. Il colore delle penne è in stretta relazione con la dieta: gli uccelli appaiono rossi quando si nutrono di piccoli crostacei ricchi di carotenoidi, mentre in mancanza di questo alimento possono diventare completamente bianchi. Il fenomeno è sempre reversibile.

I canarini presentano varie tonalità di giallo e di arancione, dovute alla luteina e alla canarixantina la cui struttura non molto diversa dagli altri carotenoidi non è stata ancora chiarita in dettaglio. Spesso le penne di questi uccellini si schiariscono per una dieta in cui vengono esclusi i carotenoidi; l'abitudine di aggiungere al cibo piccole quantità di carotenoidi puri che si trovano facilmente in commercio dà risultati sorprendenti.

Le cince *Paridae* presentano un piumaggio verde oliva perché mentre alla base delle barbe si trova un carotenoide giallo alla cima vi è melanina. Per la stessa ragione nella grande cincia *Parus major* le penne del dorso appaiono di una tonalità blu-grigio-verdastra, e verdastre quelle del fringuello verde *Chloris chloris*. Il verde dell'uccello tropicale *Zosterops* risulta dal fatto che le barbe sono gialle

per un carotenoide, mentre le barbule sono nere per la melanina. Nel tropicale americano *Tanagra lutea* l'effetto verde oliva è ottenuto dalla sovrapposizione delle penne gialle delle ali su quelle nere della groppa. Invece, le cosce verde oliva del *Tringa nebularia* hanno questa colorazione perché un carotenoide giallo copre lo strato di melanina della pelle. Il verde tipico dovuto ad un schemocromo azzurro più un filtro giallo costituito da carotenoidi è rappresentato in molti uccelli.

Il piumaggio verde del corvo del sud-est asiatico *Cissa chimensis* diventa blu se esposto alla luce per la perdita del carotenoide che funge da filtro: perciò gli uccelli che vivono nel profondo delle foreste sono verdi, mentre quelli che preferiscono le radure prive d'ombra sono azzurri.

Nel lorichetto *Trichoglossus flavicans* delle isole del Pacifico le penne possono essere verde intenso, verde oliva giallastro, e il fenomeno viene interpretato come dovuto alla variazione dello spessore del filtro giallo. Va ricordato che in genere la colorazione oliva o verdastra non è prodotta dal fenomeno di Tyndall accoppiato ad un filtro giallo, che produce piuttosto un verde puro, ma dalla semplice sovrapposizione di penne o peli gialli e neri.

La bella macchia rossa, comune anche ad altri uccelli, che spicca sul becco giallo dei gabbiani è prodotta dai carotenoidi. Questa macchia gioca un ruolo importante nell'allevamento della prole, in quanto i piccoli picchiano su essa per reclamare il cibo.

La ghiandola uropigiale del grande bucero indiano secerne un olio ricco di carotenoidi col quale l'uccello si tinge. Utilizzando il becco con arte sopraffina, si dipinge l'angolo delle ali e le penne dell'estremità della coda; come con il rossetto delle labbra, il becco ripete spesso l'operazione onde mantenere la vivacità del colore.

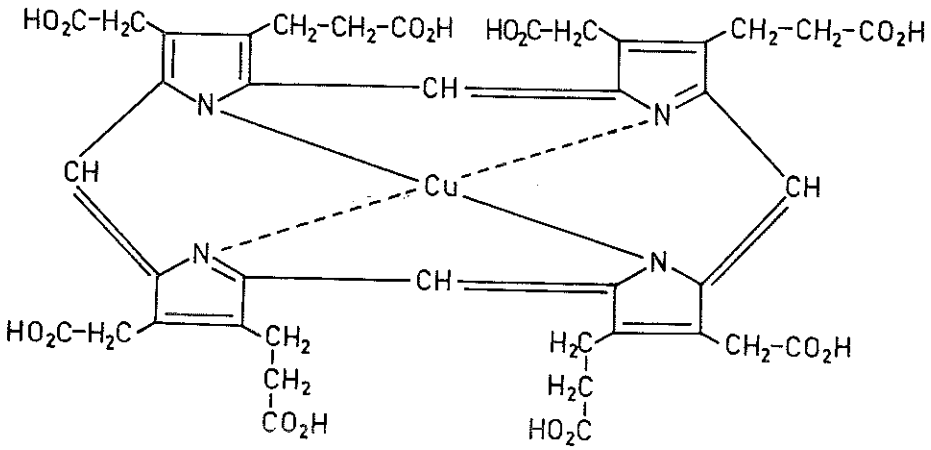
Un pigmento più unico che raro.

« Le dodici o quattordici penne delle ali che risaltano per il loro magnifico color viola porpora perdono la loro bellezza non appena si bagnano, anzi esse scoloriscono se si toccano e si strofinano con le dita.

Una coppia di questi uccelli durante un bagno colorava il contenuto di un recipiente di media grandezza in modo così notevole che l'acqua assomigliava ad un inchiostro di tinta debolmente rossa. Fintantoché le penne erano bagnate il loro colore rosso-porpora assumeva una forte tonalità azzurra, riasciugate esse brillavano nuovamente nella loro originaria tinta porporina. Nel giardino zoologico

di Amsterdam un turaco venne colpito da convulsioni e, come si suol fare in tali circostanze, venne spruzzato con acqua fredda. L'uccello rimase a giacere nella posizione in cui era caduto, sopravvisse ancora per alcune ore e quindi morì. Avvenne che un fianco si riasciugò, mentre il fianco appoggiato al pavimento rimase bagnato: si constatò quindi che il colore rosso dell'ala sinistra ancora bagnata era diventato azzurro, mentre la colorazione rossa dell'ala destra si era mantenuta in tutta la sua bellezza. Sulle spoglie pennute i lavaggi con acqua non hanno la minima influenza, non appena invece un uccello viene immerso in ammoniaca diluita o in acqua saponata si può notare come le ali si scoloriscono (A. Brehm-Tierleben, 1829-1884) ».

Il turaco della famiglia dei Musofagiti (dal latino « che si cibano di banane ») abita le foreste dell'Africa centrale e occidentale. Ha



turacina

penne colorate in verde, blu e color ruggine. Le penne remiganti possono essere anche di color rosso vivo con bordo scuro. Il ciuffo sul capo è verde o nero come nel turaco gigante *Coritheola cristata*. Il colore blu è dovuto ad uno schemocromo, il verde ad uno schemocromo modificato da un pigmento giallo e il nero ad una melanina. Il pigmento rosso è invece per noi, da un punto di vista biochimico, un'autentica sopresa. Si tratta di un complesso rameico della uroporfirina-III facilmente estraibile, come altre porfirine, con ammoniaca diluita e caratterizzato da uno spettro con massimi di assorbi-

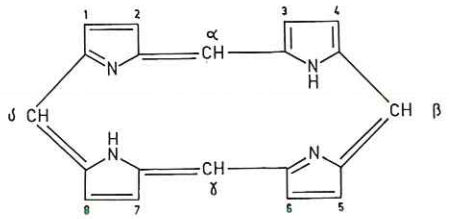
mento a 526 e 563 nm. Questo pigmento chiamato turacina non si trova in altri uccelli.

È stato detto che dalle penne verdi del turaco si può estrarre un pigmento, che sarebbe il primo pigmento verde estraibile da una penna di un uccello, al quale è stato dato anche un nome, turacoverdina, ma le tracce sulla sua struttura chimica si perdono misteriosamente quando si consulta la letteratura più recente.

Questo è perciò un esempio più unico che raro di un pigmento visivo di natura porfirinica. L'emoglobina invece contribuisce, come per i Mammiferi, e in taluni casi anche in modo vistoso, al colore degli uccelli. Il suo colore rosso vivo risalta infatti in alcune parti del corpo degli uccelli come ad esempio nel caso del bargiglio del tacchino.

Dalle porfirine ai pigmenti biliari.

Le porfirine derivano tutte dal sistema macrociclico chiamato porfirina. Le varie porfirine si ottengono sostituendo nelle posizioni numerate diversi raggruppamenti atomici indicati nelle parentesi accanto al numero che indica la posizione che tali raggruppamenti



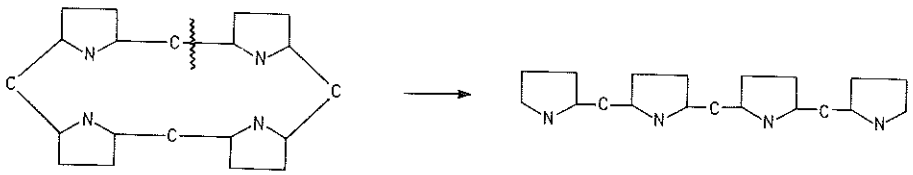
porfina

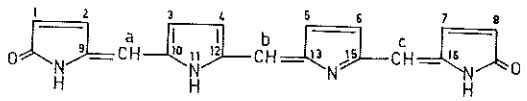
	1	2	3	4	5	6	7	8
PROTOPORFIRINA-IX	CH_3	$CH=CH_2$	CH_3	$CH=CH_2$	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_3
CLOROCRUORINA	CH_3	CHO	CH_3	$CH=CH_2$	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_3
UROPORFIRINA-I	CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_2COOH	CH_2CH_2COOH
UROPORFIRINA-III	CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_2COOH
COPROPORFIRINA-I	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_3	CH_2CH_2COOH
COPROPORFIRINA-III	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_3	CH_2CH_2COOH	CH_2CH_2COOH	CH_3

occupano. Hanno uno spettro caratteristico nella zona visibile fra cui spicca un'intensa banda nel violetto, detta banda di Soret. L'intensa fluorescenza, che scompare quando sono combinate con proteine o metalli, come nel caso dell'emoglobina, permette di riconoscere piccole quantità (ordine dei γ) di porfirine nelle fonti biologiche.

Tra le porfirine ritrovate nel guscio delle uova vi è la proto-porfirina-IX (la stessa che si può ottenere dall'emoglobina del sangue). Da questa porfirina si possono far derivare i pigmenti biliari. Se il ciclo si apre a partire dall'atomo di carbonio α, si ottiene un nuovo sistema in cui gli anelli si trovano in una catena lineare.

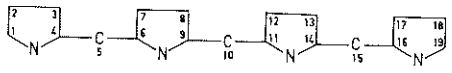
La nomenclatura, per distinguere i vari pigmenti, deriva o dal sistema del bilenone o da quello della bilina. Naturalmente i vari sostituenti che si trovano sulla porfirina si riscontrano spesso anche nei pigmenti biliari. Per esempio, se osserviamo la formula della biliverdina è facile riconoscere che tutti i sostituenti della porfirina-IX si sono conservati nel pigmento biliare.





bilenone

BILIVERDINA: 1,3,6,7-TETRAMETIL-4,5-DICARBOSSIETIL-2,8-DIVINIL-BILENONE
BILIRUBINA : 1,3,6,7-TETRAMETIL-4,5-DICARBOSSIETIL-2,8-DIVINIL-(b-13)-DIIDROBILENONE
UROBILINA : 1,3,6,7-TETRAMETIL-4,5-DICARBOSSIETIL-2-ETIL-8-VINIL-(9-a),(c-16)-TETRAIDROBILENONE
MESOBILIVERDINA: 1,3,6,7-TETRAMETIL-4,5-DICARBOSSIETIL-2,8-DIETIL-BILENONE



bilina

Se le prime porfirine sono state sintetizzate nell'era pre-biologica, come taluno sostiene, i pigmenti biliari si sono formati allorché l'atmosfera della Terra divenne ossidante. In effetti, dalle porfirine, per blanda ossidazione, è possibile passare a pigmenti molto simili a quelli naturali.

Il nome pigmento biliare deriva dal fatto che alcuni di questi pigmenti, come la biliverdina (verde) e la bilirubina (rossa) furono

isolati per la prima volta dalla bile. I pigmenti biliari trattati con acido nitrico fumante danno una serie di colorazioni blu, porpora, rosse, gialle, che permettono di riconoscerli e distinguerli. Questa reazione detta di Gmelin è dovuta a reazioni di ossidazione e di riarrangiamento.

I pigmenti biliari possono produrre una vasta gamma di tonalità di colori a seconda del grado di diluizione o, come avviene anche con i carotenoidi, cambiare colore a seconda che siano liberi o combinati con le proteine. Nelle uova azzurre di alcuni gabbiani è stata isolata la biliverdina, mentre in quelle verdi dell'emù, sia la biliverdina che la bilirubina. Non si conosce se questi pigmenti o le porfirine hanno giocato un ruolo all'atto della calcificazione e se ne abbiano uno nel guscio formato.

Tavolozze viventi.

Negli uccelli possono essere presenti contemporaneamente numerosi colori. Nel *Bengala pitta* il colore delle penne nere è dovuto alle melanine, il rosso e giallo delle penne e del becco ai carotenoidi, il rosso-bruno alle feomelanine, mentre le penne bianche, verdi e azzurre appaiono così per effetto degli schemocromi.

Il piumaggio dei colibri non può non destare un'intima commozione.

Il colore rosso rubino, unito talvolta a riflessi violacei, e il blu acquamarina sono colori indescrivibili che non si osservano in altri uccelli e che neppure le più perfette fotografie a colori riescono a riprodurre fedelmente; anche il verde a riflessi bronzei e il verde smeraldo cupo, come una pietra brasiliana, sono raramente visibili in altri Uccelli. Nel *Panterpe insignis* sono rappresentati tutti i colori dell'iride. Il rapidissimo volo, i repentini cambi di direzione, che ricordano quelli degli Insetti, contribuiscono a rendere il loro colore mutevole, vario, straordinario. Le sfumature colorate sono il frutto di un sapiente dosaggio di carotenoidi e melanine su una struttura lamellare microscopica del piumaggio che disperde la luce. Le barbe verdi sono dei gioielli di architettura forniti di piccole quantità di pigmento nero all'interno e di uno giallo all'esterno. Usando un solvente come solfuro di carbonio e acido acetico, il pigmento giallo può essere rimosso e la penna appare blu, poiché le cellule alveolari che sono dotate di un fine materiale spugnoso, producono l'effetto Tyndall. Se su una penna blu, viceversa, si fa depositare, in sottile film, un pigmento giallo, ad esempio lasciando evaporare una soluzione eterea di β-carotene, riappare il colore verde.

I pappagalli presentano forti colori gialli, blu, rossi e verdi dovuti sia a schemocromi sia a carotenoidi, ma alcune colorazioni gialle o rosse non sembrano, per quanto il problema della struttura dei pigmenti non sia stato troppo approfondito, attribuibili ad una delle classi di biocromi noti fra gli Uccelli.

Melanina e feomelanina sono i biocromi dei Mammiferi. Melanina, feomelanina e carotenoidi sono i biocromi degli Uccelli. Gli schemocromi che sono rari nei Mammiferi sono invece frequenti negli Uccelli: i bellissimi colori verdi e blu del loro piumaggio ne sono una testimonianza convincente.

Rettili

Per quanto i Rettili presentino spesso colori assai vivaci manca un esteso studio sulla natura chimica dei pigmenti. È presumibile da alcuni dati in nostro possesso che le colorazioni brune e nere siano dovute a melanine, ma manca ogni notizia sulla presenza delle feomelanine.

I colori gialli e rossi sono dovuti a carotenoidi e pterine e il bianco a deposito di guanina o leucopterine. Il colore blu è uno schemocromo e il verde risulta come effetto di un pigmento giallo con uno schemocromo blu. Nei Cheloni e nei Loricati il colore è dovuto soprattutto ai granuli di pigmento localizzati nelle cellule corneificate delle squame, mentre negli altri Rettili il pigmento si trova nei cromatofori del derma.

Il cromatoforo.

Alcuni rettili, fra cui il camaleonte, sono capaci di mutare rapidamente il colore. Questa straordinaria possibilità si realizza in un nuovo tipo di cellula pigmentata chiamata cromatoforo. A seconda del colore del pigmento prodotto, la cellula si dice melanoforo (nero), xantoforo (giallo), eritroforo (rosso), leucoforo (bianco). In queste cellule i granuli di pigmento si possono muovere, ad esempio dalla periferia al centro e viceversa, producendo variazioni nel colore della pelle e nei disegni colorati così che, in casi limite, tutto l'aspetto dell'animale risulta modificato.

Il movimento dei granuli è controllato dal sistema nervoso centrale o da un sistema ormonico o da ambedue i sistemi. Le sostanze ad azione ormonica sono di natura proteica come l'MSH della ghiandola pituitaria, ma possono anche avere struttura chimiche semplici

come le catecolammine; l'adrenalina è, per esempio, capace di causare il movimento dei granuli. Nei Rettili in condizioni di riposo il pigmento è più o meno disperso e in queste condizioni la pelle è più scura, mentre sotto lo stimolo nervoso, provocato da fattori fisici diversi come luce e temperatura, si concentra facendo apparire la pelle più chiara. Esiste poi un apposito meccanismo sotto controllo nervoso per far tornare subito, nel caso sia necessario, il pigmento sulle posizioni di partenza, mentre in caso contrario il pigmento si muove lentamente nell'interno del cromatoforo. Si rende talvolta necessario per l'animale mantenere la risposta allo stimolo nervoso cioè una certa colorazione o figura colorata per un tempo più lungo, e in tal caso intervengono ormoni di natura proteica prodotti dalla ghiandola pituitaria. È con questi meccanismi che il camaleonte sotto l'azione della luce e della temperatura cambia il suo colore e il suo aspetto in quel modo così straordinario che lo ha reso famoso.

Carotenoidi.

I carotenoidi sono stati isolati dai serpenti *Tropidonotus natrix, Elaphis quadrilineatus, Callopeltis quadrilineatus, Rhinechis scalaris,* da varie specie di camaleonti, dalla piccola tartaruga giapponese *Chrysemis scripta elegans,* dai nuclei cerosi giallo-bruni del tegumento dell'iguana *Ctenosaura acanthura.* Il serpente corallo dal morso letale, temuto oltre che dall'uomo anche dagli uccelli, ha una bellissima livrea, ben distinta, colorata da melanina e carotenoidi e forse anche da pterine.

Pterine.

Le pterine, pigmenti caratteristici delle ali delle farfalle, sono state riconosciute in varie specie di camaleonti e probabilmente sono diffuse nei rettili più di quanto si creda. Al colore verde del mamba *Dandroaspis viridis* contribuisce l'isoxantopterina (gialla).

Anfibi

Gli Anfibi devono i loro colori, alle volte anche brillanti, ai carotenoidi, alle pterine, alle melanine, alle flavine; il colore bianco o le macchie bianche alla guanina e altre basi puriniche contenute nei cromofori. Nessuna ricerca è stata ancora intrapresa per stabilire

se le feomelanine siano presenti nel tegumento di questi animali. Il colore verde degli Anfibi è dovuto ad uno schemocromo azzurro più un pigmento giallo che è in genere una pterina o un carotenoide.

Il cromatoforo.

Nei Mammiferi i melanociti insieme ai cheratinociti costituiscono un gruppo di lavoro molto affiatato: il melanocita sintetizza i granuli di melanina e i cheratinociti provvedono alla loro distribuzione e trasporto verso la superficie. Il colore della pelle può essere modificato da agenti chimici o fisici, ma la trasformazione non è mai rapida. Negli Anfibi, come già nei Rettili, e soprattutto negli animali meno evoluti, le trasformazioni colorate possono essere rapidissime. I temi colorati degli Anfibi, che si possono comporre aggregando i granuli di pigmento nell'interno delle cellule sotto l'azione di stimoli fisici, sono numerosi dato anche l'aumentato numero di pigmenti disponibili rispetto alle precedenti classi di animali.

Il rapido cambiamento di colore degli Anfibi è dovuto a tre tipi di cromatofori: melanofori, xantofori, leucoferi o iridofori. I cromatofori fanno parte di una caratteristica e distinta unità, sia da un punto di vista morfologico, sia fisiologico. Gli iridofori sono corpi riflettenti, formati oltre che da guanina anche da ipoxantina e adenina. Gli iridofori sono fatti da ammassi di piastrine molto dure ed è probabile che, a seconda dello stato cristallino della base purinica, della grandezza dei cristalli e del loro orientamento, essi possano dare effetti diversi come il bianco, l'iridescenza o il blu. Infatti, se una sottile sezione di pelle verde della rana *Hyla cinerea* si lava con alcol viene rimosso il pigmento giallo e appaiono gli iridofori blu per effetto Tyndall.

Flavine e pterine.

Negli xantofori dei rospi *Bufo alarius* e *Scaphiopus couchi* è stata recentemente identificata la riboflavina, pigmento da noi già incontrato negli occhi del galago. Le cute della *Salamandra maculusa* appare al microscopio (50 x) nera per la presenza di melanina (melanofori), gialla per la presenza di pterine (pterifori) e bianca per la presenza di guanina (guanofori, iridofori). Le pterine si possono isolare da varie specie di rane.

Carotenoidi.

I carotenoidi si possono isolare dalle rane *Hyla arborea, Rana esculenta, Rana temporaria, Pelobates fuscus, Alytes obstetricans, Atelopus stelzneri, Phrynomerus bifasciatus, Hyperolius marmoratus, Dendrobates tinctorius, Rana pipiens, Xenopus laevis, Hyla cinerea, Hyla arenicolor, Agalychnis dachnicolor* o dalle salamandre *Triton cristatus, Salamandra maculosa, Salamandra salamandra, Salamandra atra.*

Diversi carotenoidi sono stati identificati nella pelle dei rospi *Bufo viridis, Bufo calamita, Bufo vulgaris, Bombinator ingneus, Bufo alarius, Scaphiopus couchi.*

Nel tritone *Triturus, Pleurodeles waltli, Taricha torosa, Diemictylus viridiscens.*

Carotenoidi si sono trovati anche negli occhi degli axolotl, genere di Anfibi uredeli allevati in laboratorio per compiere esperimenti scientifici (*Ambystoma mexicanum, Siredon mexicanum*).

Pesci

La pelle dei Pesci è spesso riccamente colorata e dotata di composizioni e disegni che colpiscono per la loro eleganza, come ad esempio quella dei pesci tropicali. Il bianco e l'iridescenza dei Pesci sono dovuti a depositi di piccoli cristalli di guanina di cui è particolarmente ricca la parte ventrale; il fenomeno dell'iridescenza e l'effetto luccicante dei cristalli birifrangenti può essere modificato dalla melanina nel suo movimento di espansione e di concentrazione nell'interno del cromatoforo. Il colore blu dei Pesci può essere dovuto sia a cromoproteine sia a schemocromi, il verde all'effetto di uno schemocromo con un pigmento giallo, mentre il verdastro e il verde-oliva risulta dalla combinazione di un cromatoforo nero con uno giallo o arancione. La colorazione dei Pesci è spesso in relazione allo stato fisico e psichico o ambientale; gli animali possono cambiarla anche velocemente e sensibilmente sotto l'azione di stimoli fisici con un meccanismo neuroormonale. In talune specie di Pesci, frequentemente in quelle abissali, la pelle è dotata di organi luminosi di natura ghiandolare che emettono luce, sia spontaneamente sia sotto l'azione di stimoli fisici e che possono essere aperti o chiusi. La luce può risultare colorata per la presenza di cromatofori sul derma che ricopre gli organi generatori di luce e assumere colori

gialli, rossi, blu, di intensità variabile, talvolta anche da individuo a individuo.

I pigmenti che contribuiscono alla colorazione dei Pesci appartengono alla classe delle melanine, carotenoidi, pterine, flavine, pigmenti biliari, basi puriniche (bianco).

Il cromatoforo.

Gli iridofori chiari, i melanofori, gli eritrofori ed il fondo bluastro schemocromico appaiono molto chiaramente nel preparato di una sezione di pelle dei pesci pappagallo delle Bermude *Sparisoma viride* e *Sparisoma abildgaardi.* Nel gioco fra i vari cromatofori e nella distribuzione dei granuli di pigmento nel citoplasma del cromatoforo è il segreto dell'affascinante policromia, sia statica, sia dinamica, dei Pesci. Il movimento dei granuli di pigmento, del resto comune anche ad altri elementi cellulari, rimane sempre un aspetto ancora misterioso della materia vivente. Vi sono per quanto riguarda i Pesci due teorie:

La prima considera che i granuli, caricati negativamente, migrino elettroforeticamente attirati o respinti da zone della cellula aventi un gradiente di potenziale diverso, e a loro volta i gradienti di potenziale, che si verificano sulle membrane, sarebbero influenzati da ioni potassio (concentrazione esterna e interna degli ioni rispetto alla membrana). La seconda trae spunto dall'osservazione che nei melanofori di alcuni Pesci si osservano al microscopio elettronico dei microtubi del diametro di circa 500 *A*, fra i quali i granuli di pigmento si muoverebbero. Il movimento si potrebbe realizzare ad opera di microfilamenti di circa 50 *A* disposti lungo i microtubi e capaci di contrarsi sotto l'azione di ormoni o altre sostanze attive.

Melanina.

Tutte le colorazioni nere dei Pesci sono dovute alla deposizione nella pelle di granuli di melanina. Diversi fattori fisici ed ambientali possono influire sulla produzione di melanina. In esperimenti condotti in acquario si può, ad esempio, mettere in evidenza l'influenza della luce sulla pigmentazione in un modo che ricorda l'abbronzatura dell'uomo: illuminando la parte ventrale di alcuni pesci si ha la comparsa di melanina. Il piccolo pesce tropicale *Lebistes reticulatus* produce più melanina quando è allevato su un fondo scuro e con-

temporaneamente diminuisce la quantità di guanina che lo renderebbe più chiaro.

L'oscurità totale causa invece una riduzione della melanogenesi. Per i Pesci essere bianchi o neri è molto importante: i pesci bianchi su un fondo nero sono facilmente preda di uccelli come i gabbiani, mentre i pesci neri su un fondale scuro riescono più facilmente a sfuggire ai predatori.

La melanina si trova localizzata anche in forme tumorali, simili a melanomi dei Mammiferi, che, fatto interessante, sono ereditarie (*Platypoecilus*). Spesso associate alle melanine, come nelle anguille, si trovano flavine (riboflavine); questi pigmenti colorano in giallo molti occhi dei pesci.

Pterine.

Diverse colorazioni gialle e rosse possono essere dovute a pterine. Questi pigmenti si distinguono dai carotenoidi perché sono fluorescenti. Sono stati isolati dal *Carassius auratus,* dal *Xiphophorus helleri,* dal *Platypoecilus maculatus.*

Carotenoidi.

I carotenoidi, in specie la luteina, la taraxantina e l'astaxantina, come cromoproteina blu o rossa, o sotto forma di esteri, contribuiscono al colore dei Pesci. Il pigmento astaxantina si trova nel comune pesciolino d'acqua dolce *Carassius auratus,* nel merluzzo *Sebastes norvegicus* comune sui mercati norvegesi, nel salmone, nelle macchie rosse delle trote. Carotenoidi sono stati identificati nella pelle delle sogliole *Pleuronectes flesus, Pleuronectes platessa, Pleuronectes limanda, Pleuronectes microcephalus.* Nell'eperlano *Osmerus eperlanus,* nello sgombro *Scomber scombrus,* nei salmoni *Salmo salar, Salmo gairdneri, Salmo fario, Salmo umbla, Oncorhyncus nerka, Cyclopterus limpus,* nelle pinne rosse del luccio *Esox lucius,* nella corifena marina *Beryx dedactylus,* nelle parti rosse del merluzzo di roccia *Sebastes marinus,* nella perchia d'acqua dolce *Perca fluviatilis,* nelle macchie gialle dell'anguilla *Lota lota,* nei pesci messicani *Platypoccilus maculatus* e *Xiphoohorus helleri,* nel ciprinodontide giapponese *Oryzias latipes* (luteina), nel pesce paradiso *Macropodus opercularis,* nel *Colisia lalia, Colisia fasciata* (luteina e violaxantina), nel pesce siamese da combattimento *Betta splendens* (luteina), nella pelle bruna della trota *Salmo trutta* (luteina e astaxantina), nel pesce del

Pacifico *Fundulus parvipinnis* (taraxantina), nel pesce verde *Girella nigricans*, nello ghiozzo *Gillichthys mirabilis* nella perchia *Cymatogaster aggregatus* (taraxantina), nel pesce Garibaldi *Hypsypops rubiconda* (taraxantina esterificata).

Anche i Pesci possono cambiar colore con la dieta. Il merluzzo *Gadus morrhua* è in genere giallastro, verdastro, grigio argenteo, ma una varietà delle coste norvegesi che si nutre di piccoli granchi ricchi di carotenoidi è rosso-arancione.

I carotenoidi, come quelli nel *Labrus mixtus* e nel *Crenilabrux parvus*, giocano un ruolo importante nelle colorazioni che differenziano il sesso. I Pesci possono assumere abiti nuziali a mezzo di trasformazioni cinetiche dei colori, come fanno il labro, il pagello e lo spinarello, sotto l'azione di certi ormoni.

Emoglobina - Pigmenti biliari.

L'emoglobina contribuisce poco al colore dei Pesci. Le branchie sono rosse per l'emoglobina. Poche notizie abbiamo sul ruolo giocato dalle porfirine come coloranti della pelle. Derivati del bilenone invece impartiscono il colore blu al labro, i colori verdi e verde-blu all'aguglia *Belone belone*, al *Cottus scorpius* e al *Strongylira exilis*.

La piramide.

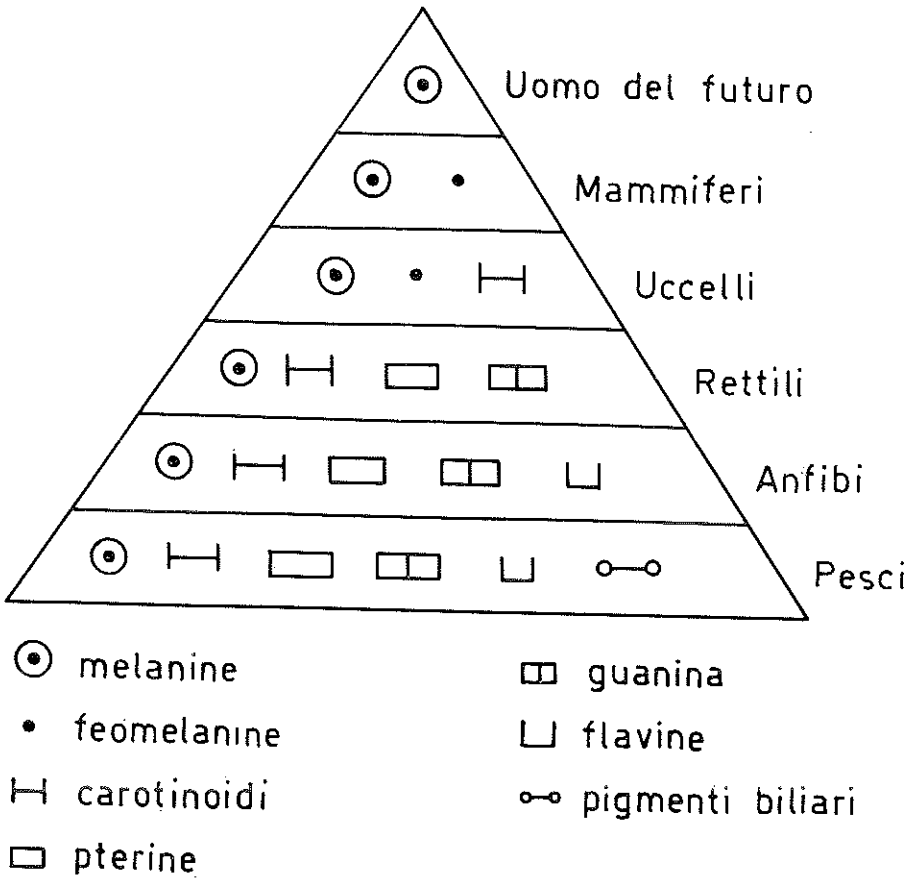
Se per un momento ci fermiamo a considerare le strutture chimiche che contribuiscono alla pigmentazione dei tessuti (pelle, peli, piume, tegumento) dei Vertebrati ci accorgiamo che il loro numero è limitato a pochi tipi fondamentali: le melanine nere, le feomelanine rossastre o brune, i carotenoidi gialli rossi e blu, le flavine gialle, i pigmenti biliari verdi o blu, le pterine bianche, gialle o rosse, la guanina bianca.

Distribuendo nelle classi animali i vari pigmenti si può costruire una piramide che ci fa pensare che con l'evolversi dell'animale dal pesce al mammifero il numero delle specie chimiche delle cellule pigmentanti vada sempre più diminuendo. Naturalmente, volendo attribuire ai pigmenti un particolare ruolo nell'evoluzione, ci appare sempre più straordinaria la localizzazione di una flavina nell'occhio del galago e ci viene voglia di chiederci come una porfirina sia potuta andare a finire nelle penne del turaco.

Nell'uomo dal pelo rosso la pelle non è più protetta dalle radiazioni solari, in quanto non è capace di sintetizzare la melanina ed è

presumibile, tenuto conto anche della pressione genetica delle razze, molto più numerose, dotate di melanociti, che nell'uomo di un lontano futuro non siano più presenti le feomelanine.

Anche nel campo dei biocromi l'uomo potrà distinguersi dagli altri animali e sedere solo in cima alla piramide.



Tunicati

I Tunicati contengono vanadio, acido solforico libero, e sono capaci di sintetizzare una cellulosa animale.

Il vanadio si trova nelle cellule del sangue, sotto forma di un complesso proteico detto emovanidina il cui colore, verde chiaro in soluzione, può essere visto su alcuni animali trasparenti della famiglia delle Ascidie. Non si conosce bene la funzione dell'emovanidina, che non sembra possedere le proprietà dei cosiddetti pigmenti respiratori come l'emoglobina, l'emocianina, etc. Le Ascidie si pro-

curano il metallo dal mare, e una grossa ascidia è capace di accumulare 5 γ di vanadio per ora, tanto che sono in corso studi rivolti a comprendere il meccanismo di setacciamento che questi animali posseggono per utilizzarlo a scopo pratico per l'estrazione di metalli preziosi del mare. I Tunicati presentano inoltre anche colori vivaci rossi, gialli e colorazioni rosso-brune. Alcuni sono bianchi o hanno parti colorate in bianco. Lo studio di questi pigmenti è alquanto trascurato, forse per difficoltà incontrate nell'ottenere in quantità sufficiente, almeno per le tecniche d'indagine del passato, il materiale biologico. In alcuni casi è stato accertato che il bianco è dovuto, come avviene per altri animali, alla presenza di guanina o acido urico (vedasi quanto detto delle pterine) e il giallo e il rosso a carotenoidi.

Carotenoidi.

I carotenoidi (astaxantina) sono stati identificati nel *Botrillus violaceus, Amaroucium proliferum, Styela rustica, Cynthia papillosa, Microcosmus sulcatus, Dendrodoa grossularia.* In alcuni di questi animali è stata trovata della capsaxantina, un carotenoide presente in molti alimenti; giustamente si ritiene che il carotenoide non sia un pigmento dell'animale ma che lo si trovi occasionalmente in esemplari che abbiano ingerito detriti alimentari buttati in mare dalle navi.

Dalle Ascidie, come l'*Ascidia fumigata,* si possono estrarre dei pigmenti gialli e rossi o rosso-bruni che si distinguono dai carotenoidi perché per riscaldamento o per azione degli alcali diventano neri; non sono noti.

Echinodermi

I colori e i disegni colorati di questi animali sono fra i più belli e i più fantasiosi degli invertrebrati marini. Le diverse colorazioni, oltre che ad essere dovute a pigmenti comuni ad altri tipi di animali, sono anche dovute alla presenza di una nuova classe di composti chimici: gli spinocromi e gli echinocromi. Essi sono spesso responsabili del rosso intenso e del violetto cupo degli Echinoidi. Tuttavia, il significato biologico di tali pigmenti non è ben chiaro.

Si ha la sensazione che molte cellule pigmentate dei ricci di mare e delle oloturie siano elementi sensori e che i pigmenti, catturando determinati fotoni, trasmettano il loro stato eccitato ad un recettore che, dopo analisi, correlazione e integrazione, permette all'animale di percepire e utilizzare la luce per la sua vita. I pigmenti poi, anche

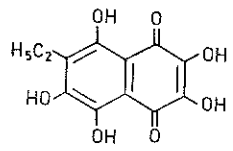
non partecipando direttamente a processi fotochimici, possono svolgere un ruolo significativo di protezione e filtrazione delle superfici dell'animale, sensibili sia alla luce sia a determinate lunghezze d'onda della luce.

Melanina.

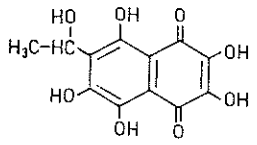
L'*Holothuria nigra*, alcune varietà del riccio di mare tropicale *Diadema*, molti Ofiuroidi e alcuni Crinoidi sono neri. È probabile che i pigmenti siano melanine, per quanto manchino al riguardo analisi chimiche condotte secondo i metodi messi a punto recentemente. Sembra che il pigmento nero della *Holothuria forskali*, che ha le proprietà di una melanina, si formi ad opera di protozoi che sono dotati del sistema ossidante per trasformare la tirosina in melanina, e che si trovano nel plasma dell'animale. Il pigmento nero della *Ophiocomina nigra* è, da un punto di vista istologico, una melanina, in quanto è contenuto in melanociti dalla forma caratteristica.

Spinocromi ed echinocromi.

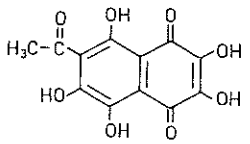
Sono pigmenti caratterizzati da un sistema naftochinonico; possono essere isolati estraendo, con etere contenente HCl, i gusci e le spine dei ricci di mare. Essi colorano in bruno, rosso e violetto gli animali. La quantità relativa di spinocromi può modificare il colore, come nel caso delle spine violette e verde-oliva del *Paracentrotus lividus*.



echinocromo A

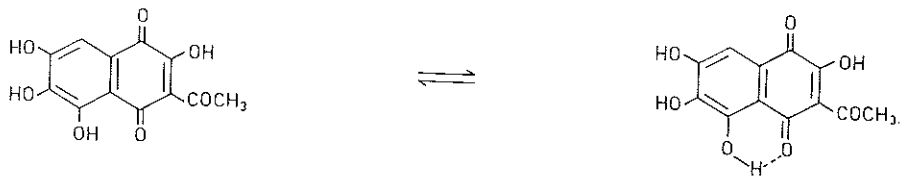


spinocromo A



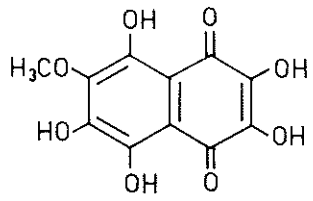
spinocromo E

Recentemente è stato isolato dalle spine e dal guscio dell'echinoide *Salmacis sphaeroides* un nuovo spinocromo che ha la seguente struttura:



Gli echinocromi e spinocromi sono stati identificati nel *Dendraster excentricus, Pseudocentrotus depressus, Anthocidaris crassispina, Heterocentrotus mammilatus, Echinus esculentus, Diadema antillarum, Psammechinus miliaris, Strongylocentrotus purpuratus, Arbacia aequiturbeculata, Arbacia pustolosa, Arbacia punctulata.*

Questi pigmenti sono molto diffusi nei ricci di mare, ma si trovano anche fra gli Oluturoidi come risulta dall'isolamento e l'identificazione del namakocromo nella oloturia *Polycheira rufescens.*



namakocromo

Carotenoidi.

I carotenoidi, fra cui l'astaxantina, sia libera sia coniugata con proteine, impartiscono belle colorazioni gialle, arancione, verdi, rosso, blu e viola alle stelle di mare, come la *Solaster papposa, Henricia sanguinolenta, Asterias rubens, Solaster endeca, Astropectan californicus, Patiria minata, Pisaster giganteus, Luidia ciliaris, Astrpecten irregularis.*

Dalle stelle di mare, accanto ai carotenoidi, si possono estrarre, come nel caso della *Asterias rubens,* piccole quantità di porfirine, ma non è ben chiaro se contribuiscono al colore degli animali.

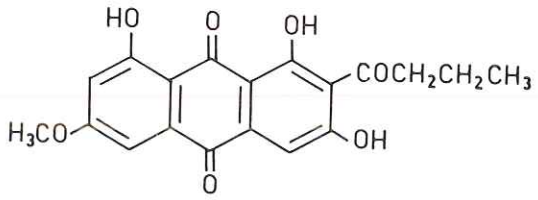
I carotenoidi si rinvengono negli Ofiuroidi (simili a stelle di mare). Quelli di acque non molto profonde sono blu, verdi, rossi, gialli, mentre quelli abissali sono arancione o rossi come cioè *Ophioderma longicauda, Ophiocomina nigra, Ophiura texturata, Ophiopholis aculeata, Ophiotrix fragilis, Ophiopteris papillosa, Amphiura chiajei.*

Nei ricci di mare si trovano carotenoidi localizzati nelle gonadi e in parte anche nel tegumento. I loro colori non appaiono bene perché sono mascherati dagli echinocromi intensamente colorati.

Gli Oloturoidi hanno spesso colori scuri poco apparenti esteriormente, per quanto carotenoidi si possono estrarre da vari parti del corpo. *Psolus phantalus, Cucumaria elongata, Phyllophorus pellucidus, Stichopus termulus.* Il colore rosso che alcuni di questi mostrano non sembrano carotenoidi, e forse sono echinocromi.

Nelle oloturie si trovano anche pigmenti gialli e rossi, di struttura ignota, che anneriscono in ambiente alcalino, simili a quelli di certi Tunicati. Chinoni?

Poco investigati i pigmenti della classe dei Crinoidi o gigli di mare che possono essere bianchi, bruni, verdi, gialli, rossi, violetti. I pigmenti sono in genere solubili in acqua e hanno la proprietà di cambiare colore in ambiente acido o alcalino. Queste proprietà ricordano quelle degli ossiantrachinoni, che sembrano essere effettivamente presenti nel *Antedon bifida, Comatula pectinata, Comatula cratera.* Dalla *Comatula pectinata* si può ottenere, con rese anche del 5 % (sul secco), una miscela di pigmenti che hanno colorazioni viola con gli alcali. Uno di questi è stato isolato per cromatografia e possiede la struttura qui di seguito riportata.



6-metiletere della rhodocomatulina

Artropodi

Gli Artropodi hanno il corpo rivestito da una cuticola per lo più abbastanza robusta ma costruita in modo tale da permettere agli animali diversi tipi di articolazioni. La cuticola è formata da uno speciale polisaccaride, la chitina (polimero acetilato della glucosammina), da una proteina, la sclerotina, le cui molecole sono saldate da *o*-diossibenzoli (il più semplice è la pirocatechina). La cuticola risulta rigida, ma è così leggera da permettere all'animale, come nel caso degli insetti, anche di volare. La cuticola dei Crostacei spessa e relativamente pesante è molto più rigida, in quanto in essa sono inglobati diversi sali di calcio, fosfati, carbonati, sia allo stato amorfo, sia allo stato cristallino. Le cuticole sono di solito intensamente colorate per la presenza di biocromi che appartengono al gruppo delle melanine, di carotenoidi, pigmenti biliari, basi puriniche, ommocromi. I pigmenti sono diffusi nella cuticola, ma nel caso dei Crostacei sono contenuti nei cromatofori che subiscono dei cicli cromatici sotto l'influenza della illuminazione solare. Il colore dell'intero animale,

data la trasparenza, può anche essere quello del plasma sanguigno; in alcuni casi piuttosto rari, l'animale può apparire tutto rosso per la presenza di emoglobina, o in altri casi cambiare di colore perché il plasma viene colorato da pigmenti di origine vegetale (clorofilla) ingeriti con i cibi. La cuticola può infine essere colorata da uno schemocromo o presentare belle iridescenze dovute a fenomeni di interferenza della luce che colpisce sottolissime lamelle di chitina sovraimposte e intercalate da strati di materiale a indice di rifrazione contrastante.

Insetti

Questa classe comprende circa 1 milione di specie, per cui è considerata la più ricca di forme esistenti sulla Terra. Il numero di pigmenti responsabili del colore di questi animali è limitato, anche se i disegni e le composizioni sono svariatissimi e assai belli a vedersi. Disegni e colori sono fattori molto importanti per la vita e l'evoluzione degli Insetti. Molte colorazioni animali sessuali sono determinate da diversi pigmenti fra cui predominano le melanine, le pterine e i carotenoidi, ma anche gli schemocromi possono intervenire; individui di un sesso possono avere i loro quadri colorati solo da pigmenti mentre negli individui dell'altro sesso possono essere presenti strutture microscopiche capaci di produrre tonalità blu per dispersione della luce, o delicati fenomeni di iridescenza per interferenza della luce. Così le ali di una farfalla femmina possono apparire gialle o marroni per la presenza di pterine od ommocromi, mentre nel maschio sono blu brillante per effetto Tyndall.

La farfalla tropicale *Heliconius erato* predilige certi colori che devono essere considerati alla base del fenomeno del corteggiamento. Se si muovono davanti ad essa pezzetti di tela o di carta colorati attaccati ad un filo, si nota che la farfalla predilige i disegni fatti con macchie arancione su fondo nero, mentre non viene attirata dai colori uniformi, fatta eccezione per il rosso. Le api cercando cibo per la prima volta sono particolarmente attirate dal blu e dal giallo, ma questa preferenza può cambiare per altri colori che siano legati a fonti di nettare più ricchi, e tale preferenza è mostrata in modo assai netto fino a quando non si è esaurita la fonte di cibo; è evidente che le api hanno la capacità di elaborare in qualche modo l'informazione cibo-colore, comportamento che può suggerire affascinanti ricerche per il neurochimico e per il biochimico.

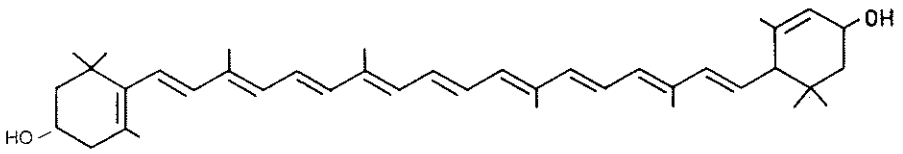
Con il mimetismo [13] attivo molte specie di Insetti possono sottrarsi ai predatori cambiando rapidamente il colore e assumen-

done uno simile al substrato su cui si trovano, o, viceversa, la pigmentazione può favorire la predazione rendendo invisibili animali che altrimenti non avrebbero la possibilità di procacciarsi il cibo necessario. Un esempio di predazione favorita dalla pigmentazione è quella del ragno che, avendo assunto lo stesso colore del fiore, riesce a catturare facilmente l'ape alla ricerca di nettare; un altro esempio di mimetismo è offerto dallo stesso *Bacillus rosius* che assume colore e forma di un ramoscello. Ma altre e più raffinate figure cromatiche sono necessarie agli Insetti nella spietata lotta della selezione naturale. Diversi Ortotteri imitano le foglie morte e le foglie con macchie di muffa, alcune farfalle assumono una livrea che raffigura escrementi di uccello e che copia un ragno o altri insetti ritenuti velenosi per il predatore, o mostrano aspetti terrificanti con la comparsa sulle ali di disegni colorati che sembrano degli occhi. Quello che più colpisce è il fatto che gli Insetti possano avere più posizioni di difesa. L'ortottero *Ommathoptera pictifolia* ha il colore e l'aspetto di una foglia morta; ma se viene disturbato, oltre a mostrare, sbattendo le ali, la vivace policromia della parte interna, produce anche due macchie colorate che appaiono come occhi, e ciò provoca un certo smarrimento nell'assalitore. Un repertorio di aspetti difensivi sfrutta l'emittero *Laternaria phosphorea* che, oltre a mimetizzarsi perfettamente con l'ambiente, assume la forma di un piccolo coccodrillo completo di denti e prominenze oculari; esso se attaccato mette in mostra due grosse macchie oculiformi sulle ali, e infine come ultimo espediente ricopre l'addome di una sostanza cerosa che sembra muffa e che probabilmente induce il predatore a ritenere che l'insetto non sia commestibile. Naturalmente, colori e disegni sono negli Insetti fattori ereditari e il loro uso non è il risultato di esperienze precedenti come avviene negli animali superiori, anche se la pressione delle esperienze nel corso dell'evoluzione influisce sui fattori ereditari.

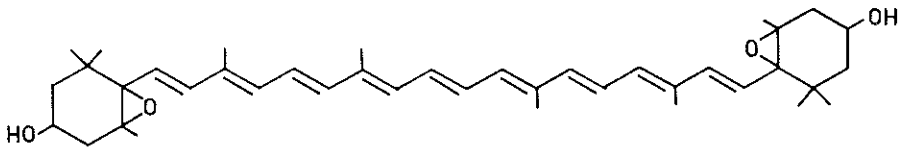
I colori degli Insetti sono sotto l'influenza di diversi fattori fisici. L'insetto bastone *Carausius morosus* è verde se allevato a bassa temperatura ed è grigio o nero a temperatura più elevata. La cavalletta del deserto *Schistocerca gregaria* se prolifera a temperatura intorno a 40° C mostra numerose macchie nere sul fondo giallo che diminuiscono o scompaiono del tutto a temperature inferiori. Particolari condizioni ambientali possono modificare le colorazioni degli Insetti. Ancora un esempio, tratto dal mondo delle cavallette, insetto molto studiato sotto ogni aspetto dall'uomo per i grandi danni che provoca alla coltura e alla vegetazione: la locusta *Locusta migratoria* se allevata in popolazione è nera e arancione, mentre prende il colore dell'ambiente se cresce individualmente.

Carotenoidi.

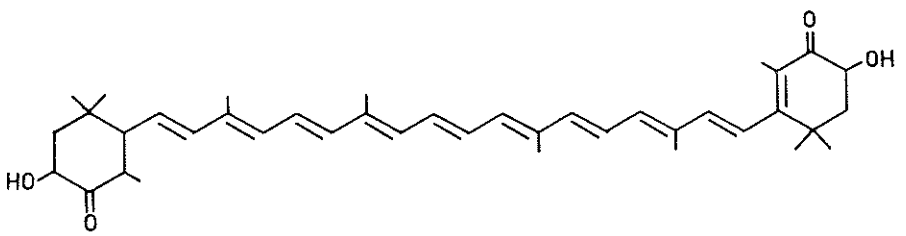
Gli Insetti accumulano e trasformano il β-carotene, contenuto nel cibo, in vari carotenoidi come luteina, violaxantina, taraxantina e astaxantina. Piccole qualità di altri carotenoidi si trovano negli estratti di tessuti, come avviene del resto anche per altri animali, che non contribuiscono in modo significativo al colore degli animali, ma rappresentano fasi intermedie nel passaggio del β-carotene ai vari carotenoidi.



luteina



violaxantina



astaxantina

I colori verde e blu, oltre che a schemocromi, sono dovuti a complessi proteina-carotenoide o proteina-pigmento biliare, o alla combinazione, come è spesso il caso del verde, di un biocromo con uno schemocromo.

I carotenoidi sono responsabili del cambiamento che si osserva all'inizio della maturità sessuale delle locuste; in questa fase di svi-

luppo i maschi diventano di colore giallo brillante (*Locusta migratoria*), in quanto il β-carotene si trasferisce dai tessuti grassi al tegumento. Le locuste del genere *Oedipoda* hanno le ali posteriori che possono essere blu, rosse o gialle, a seconda che l'astaxantina è combinata o no con una proteina. Il colore verde di questi insetti si origina invece come effetto della combinazione di due cromoproteine aventi una come gruppo prostetico un carotenoide (giallo), e l'altra un pigmento biliare (blu).

Tra gli emitteri, ordine di Insetti a cui appartiene anche la comune cimice, il *Perillus bioculatus*, colorato in giallo e in rosso, si procura i carotenoidi succhiando lo scarabeo della patata *Leptinotarsa decemlineata* che si nutre di foglie. Anche le coccinelle (Coleotteri) devono i loro colori, giallo e arancione, a carotenoidi nutrendosi di Afidi che si procurano a loro volta i pigmenti dalle piante.

Carotenoidi si trovano nelle elitre dei coleotteri *Clythra quadripunctata, Lina populi, Lina tremulae, Coccinella septempunctata, Coccinella quinquepunctata, Melanosoma vigintipunctatum* che ha una elitra con venti macchie nere su fondo giallo.

La cimice *Pyrrhocoris apterus* deve il suo colore rosso alla presenza del licopene che è lo stesso carotinoide che colora in rosso il pomodoro. Il colore rosso è però prevalentemente dovuto ad una pterina, l'eritropterina [14].

I colori rossastro, arancione, giallo di alcune api sono dovuti a carotenoidi che gli Insetti traggono dal polline dopo averli modificati o accumulati tali e quali. Alcuni di questi carotenoidi si ritrovano anche nel miele, al quale impartiscono il caratteristico colore ambra.

Il colore verde dell'insetto bastone *Carausius morosua* è dovuto all'effetto combinato del β-carotene e dell'isomero α [15] con un pigmento blu (mesobiliverdina). Le macchie rosse sul femore sono invece dovute a puro α-carotene. Il colore verde delle mantidi *Sphodromantis bioculata* e *Mantis religiosa* è dovuto a carotenoidi e ad un biocromo blu. I bruchi verdi *Sphinx ligustri, Tettigonia viridissima, Tettigonia cantans, Meconema varium,* gli ortotteri fitofagi *Acrida turrita, Phaneroptera quadripunctata* devono il loro colore ad un carotenoide che si trova mescolato ad un pigmento biliare blu. Le ali posteriori delle cavallette *Oedipoda caerulescens, Oedipoda schochii* contengono un pigmento blu solubile in acqua, mentre quelle della *Oedipoda miniata* che sono rosse dovrebbero il loro colore ad un carotenoide e ad un pigmento biliare combinato con una proteina. In altre locuste, *Acrotylus insubricus, Calliptamus italicus, Oedipoda aura, Oedipoda decorus,* i pigmenti gialli, rossi e blu sono dovuti

TAVOLA RIASSUNTIVA. - *Distribuzione dei carotenoidi in alcuni insetti.*

Specie	Pigmento
COLEOTTERI	
Coccinella septempunctata	α-carotene, β-carotene, licopene
Coccinella quinquepunctata	β-carotene, cantaxantina
Clytra quadripunctata	β-carotene
Lina populi	β-carotene
Lina tremulae	β-carotene
Melanosoma vigintipunctatum	α-carotene, β-carotene
LEPIDOTTERI	
Bombyx mori	β-carotene, luteina
Sphinx ligustri	luteina
EMITTERI	
Perillus bioculatus	β-carotene
Pyrrhocoris apterus	licopene
ORTOTTERI	
Acrida turrita	carotenoproteine
Acrotylus insubricus	carotenoproteine
Carausius morusus	α-carotene, β-carotene, isocryptoxantina, isozeaxantina, luteina, chetocarotenoide
Colliptamus italicus	carotenoproteine
Locusta migratoria	β-carotene, astaxantina
Mecomema varium	carotenoproteine
Oedipoda aurea	carotenoproteine
Oedipoda decorus	carotenoproteine
Oedipoda miniata	β-carotene
Oedipoda schochii	carotenoproteine
Phaneroptera quadripunctata	carotenoproteine
Schistocerca gragarica	β-carotene, astaxantina
Tettigonia cantans	carotenoproteine
Tettigonia viridissima	β-carotene, cryptoxantina, luteina
MANTODEI	
Mantis religiosa	carotenoproteine
Sphodromantis bioculata	carotenoproteine

a carotenoidi coniugati con proteine. I pigmenti sono precipitabili con solfato ammonico e per idrolisi danno astaxantina.

Nel baco da seta *Bombyx mori* sono stati identificati luteina, violaxantina, taraxantina.

Dalla coccinella *Coccinella septempunctata* si può isolare per cromatografia su allumina α- e β-carotene e licopene.

Mentre il verde che si può osservare nella tarma *Procris statices* è uno schemocromo, il verde smeraldo delle tarme *Geometrinae* o le linee verdi argentate della *Bena prasinana* della famiglia *Cymbiadae* sono biocromi non ben studiati. È ancora ignoto il pigmento verde del magnifico smerinto d'oleandro *Daphhis nerii* e della cimice delle piante *Psylla mali.*

Come un vestito tessuto con fili gialli e neri appare verde-oliva, così l'intervallarsi di squame gialle (carotenoidi o pterine) e nere (melanine) nelle ali posteriori delle farfalle *Euckloe cardamines* e *Pontia daplidice* produce il colore verde-oliva.

Melanine.

Molte delle colorazioni nere degli Insetti sono dovute a melanine, ma è difficile dire quali siano le differenze di tipo strutturale, data la particolare natura di questi pigmenti, con le colorazioni nere degli altri animali. La melanina delle cuticole è difficile da analizzare, in quanto non si trova in granuli ma è diffusa e mescolata, se non addirittura legata con la sclerotina e la chitina. Una melanina che è più agevole studiare è quella presente nei cosiddetti tumori della mosca *Drosophila melanogaster* e che si forma a partire dalla tirosina, come quella di altri animali. La melanina è presente anche in diverse fasi di sviluppo delle larve. La capsula dell'uovo di scarafaggio è all'inizio bianca, ma poi imbrunisce fino a diventare nera. La luce può, nel corso dello sviluppo delle larve di alcuni insetti (Lepidotteri), provocare strane variazioni di colore; illuminando con la luce blu o violetta le larve di *Pieris brassicae, Vanessa io, Vanessa urticae* si ha abbondante produzione di melanina, mentre se si usa luce gialla la sintesi di melanina è assai modesta.

Si possono osservare sugli Insetti colorazioni rosso-brune o brune che in genere sono attribuite agli ommocromi, ma non è da escludere che tali colorazioni possano invece essere impartite da melanine e feomelanine. La melanina ha la funzione di proteggere i tessuti sottostanti dall'azione della luce molto intensa e dalle radiazioni ultraviolette; inoltre essa contribuisce alla durezza della cuticola ed evita, in associazione con essa, l'essiccamento dell'organismo.

Porfirine.

Le porfirine non si accumulano negli Insetti in modo da contribuire al loro colore. I pigmenti biliari che derivano dalle porfirine colorano invece la cuticola e le ali degli animali.

Pigmenti biliari.

Le ali delle farfalle diurne Pieridi contengono piccole quantità di un pigmento biliare complessato con una proteina di colore verde; lavorando su un milione di esemplari si è isolata la mesobiliverdina allo stato cristallino. In questo caso abbiamo perciò un verde diverso che si origina dall'azione combinata di un biocromo con uno schemocromo o da due biocromi di colore diverso. È molto probabile che pigmenti biliari siano responsabili del colore azzurro delle ali posteriori della cavalletta *Oedipoda coerulescens,* frequente nei luoghi esposti al sole.

Il moscerino *Chironomus,* simile ad una zanzara e noto nell'agro romano perché succhia il sangue umano, appena nato è verde per biliverdina che accumula insieme alla bilirubina nel tessuto grasso della larva. Dalle ali delle farfalle *Pteria brassicae, Pteria napi, Gonepterix rhamni, Catopsilia rurina, Catopsilia statira* si può isolare un pigmento blu solubile in acqua, che per idrolisi fornisce un pigmento biliare.

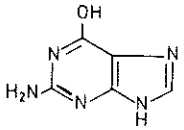
Clorofilla.

Il cromoforo della clorofilla differisce dalle porfirine sostanzialmente per avere due atomi di idrogeno in più, localizzati sulle posizioni 7 e 8. Ciò comporta l'interruzione della coniugazione dei doppi legami e come effetto il viraggio del colore dal rosso al blu.

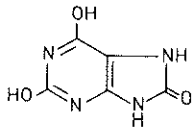
Il passaggio da derivati della clorofilla a porfirine, e da queste a pigmenti biliari richiede, se realizzata in laboratorio, una complessa serie di reazioni; le stesse trasformazioni sono invece realizzate molto facilmente dalla cimice piatta americana *Anasa tristis* che si nutre di piante verdi. Nell'intestino e nel sangue di essa si trova magnesio; l'epidermide e altre parti del corpo sono colorate dalle feoforbidi (coloranti molto simili alla clorofilla, contenenti magnesio e fitolo), mentre il tessuto grasso è verde per la presenza di un derivato del bilenone.

Pterine.

Le pterine, con i pigmenti biliari e i carotenoidi, contribuiscono al colore rosso, giallo e bruno delle ali delle farfalle. Il bianco, l'aspetto argenteo, e il fenomeno dell'iridescenza sono dovuti alle pterine insieme alla guanina e all'acido urico. Il colore nero è invece dovuto a melanine. Pterine si trovano anche negli occhi di alcuni



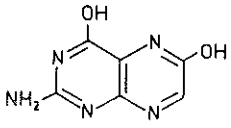
guanina



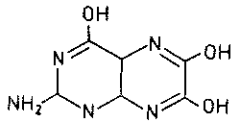
acido urico

Insetti (*Drosophila*) e nell'integumento degli Imenotteri, a cui appartiene la comune vespa, come la *Vespa crabo, Vespa germanica, Vespa vulgaris.*

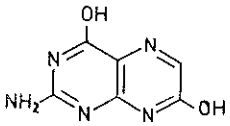
Le pterine prendono nomi diversi che indicano o la fonte o il colore o la struttura chimica: guanopterina, leucopterina (bianco), xantopterina (giallo), eritropterina (rosso), crisopterina, mesopterina, isoxantopterina, sepiapterina, pterina, acido 6-pterincarbonico, pterorodina, 7, 8-diidrossixantopterina.



xantopterina

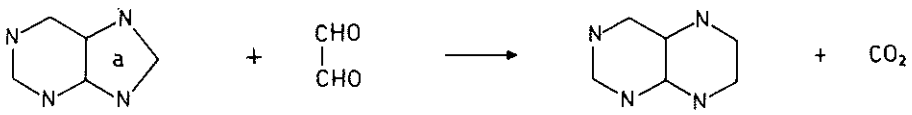


leucopterina



isoxantopterina

Il nucleo fondamentale delle pterine si originerebbe dal sistema:



della purina (2-ossipurina) per allargamento dell'anello pentatomico *a* con il gliossale che fornisce l'atomo di carbonio necessario. Il sistema

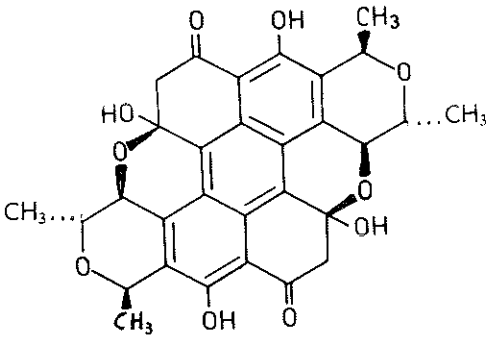
purinico sarebbe costruito a sua volta con i carboni derivati dall'acido formico e gli azoti da diversi amminoacidi [16].

Le pterine sono insolubili nei solventi organici (etere, libroina, benzolo, etc.) più o meno solubili in acqua, ma facilmente solubili in alcali o acidi. Sono in genere difficilmente cristallizzabili e per isolarle bisogna partire da migliaia di animali. Da mille *Pieris brassicae* si ottengono 0,1-0,2 g di leucopterina; da mille *Gonepteryx rhamni* 0,3-0,6 g di xantopterina.

Le cimici delle piante, scientificamente chiamate Pentatomidi, note per emettere un odore sgradevole se molestate, sono vivacemente colorate. Le *Graphosoma* rosse e nere, le *Nezara verdi*, le *Eurydema*, *Zicrona* dai colori metallici, le *Palomena* verdi. Il loro colore verde è dovuto ad un pigmento blu e ad uno giallo identificato con la xantopterina.

Afine.

L'emolinfa degli Afidi, volgarmente detti pidocchi delle piante e gorgoglioni, contiene un pigmento giallo solubile in acqua chiamato protoafina. La protoafina per ossidazione enzimatica si può trasformare in pigmenti intensamente colorati, fra cui la xantoafina, che sarebbero i responsabili della colorazione degli Afidi. L'*Aphis fabae*

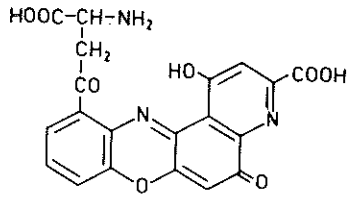


xantoafina

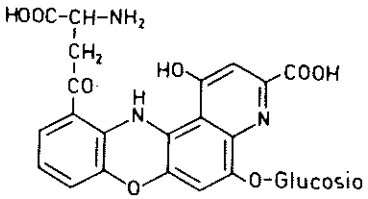
che si nutre sulla *Vicia faba*, pianta nella quale è presente la Dopa, appare nera, ma la colorazione non è dovuta a melanina ma all'intenso colore dell'Afina [17].

Ommocromi.

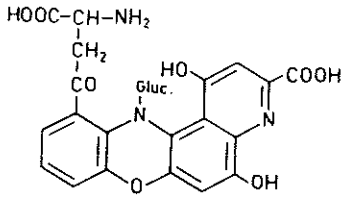
Sono pigmenti che, per alcune loro proprietà, sono stati talvolta scambiati con le melanine. Gli ommocromi sono spesso bruni, ma possono essere anche gialli, rossi e viola. Somigliano, per la solubilità in HCOOH, alcali e acidi minerali, ad alcune feomelanine. Danno un colore violetto con H_2SO_4, e alcuni cambiano di colore, reversibilmente, sia con gli ossidanti che con i riducenti. Il loro nome deriva dal fatto che furono trovati negli occhi (dal greco ὄμμα = occhio). Si dividono in ommatine, a basso peso molecolare e labili agli alcali, ed in ommine ad alto peso molecolare e stabili agli alcali. È facile riconoscerli: se si tagliano le teste ad una ventina di mosconi *Calliphora erythrocephala* e si macerano con un po' di alcol metilico acido per acido cloridrico si ottiene una soluzione gialla; aggiungendo un poco di boroidruro di potassio si ha una colorazione rossa dovuta alla formazione della forma ridotta della xantommatina.



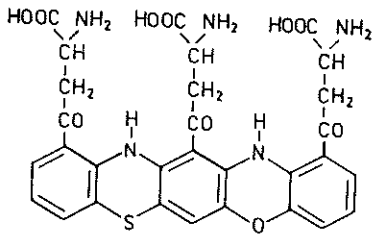
xantommatina



rodommatina



ommatina D



ommina A

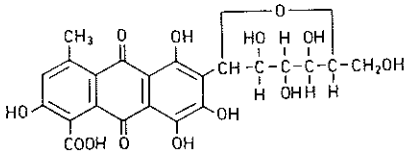
Gli ommocromi non sono localizzati solo negli occhi degli Insetti come si credeva una volta. Nei cromatofori di alcuni insetti bastone (*Dixippus*) si trova una ommatina bruna che concentrandosi o diluendosi nella cellula rende la colorazione del tegumento più chiara o più scura. Rodommatina e ommatina D si trovano nelle ali

della nifelide *Aglais urticae*; nelle farfalle *Papilio xuthus* e *Papilius dardanus* la chinurenina, un precursore degli ommocromi, è presente nelle ali, il che lascia pensare che accanto a pterine vi siano anche ommocromi.

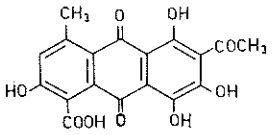
Ommocromi si trovano anche nelle locuste e la loro quantità varia, come avviene anche per le melanine, a seconda che gli Insetti siano in fase solitaria o gregaria. Fra gli Odonati le ommatine sono responsabili delle colorazioni bruno-rosse delle libellule; nel genere *Sympetrum* il colore rosso e giallo-bruno che distingue i maschi dalle femmine sembrerebbe prodotto da ommatine a diverso stadio di ossidazione. L'ommatina si trova talvolta in sottile strato con la funzione di rendere più evidente l'effetto Tyndall come avviene per alcune libellule dal bel colore blu metallico.

Antrachinoni.

Negli insetti coccidici sono presenti derivati antrachinonici come l'acido carminico (I), l'acido kermesico (II) e l'acido laccaico.



I



II

L'acido carminico è il principale pigmento delle coccinelle; esso si ritrova nei corpi essiccati della femmina dell'insetto messicano *Dactylopius coccus*, che si nutre di cactus; più precisamente è localizzato nei globuli, nelle uova e nei tessuti adiposi e può rappresentare circa il 50 % del peso secco del corpo. Esso è quasi assente nei maschi. L'acido carminico, o un pigmento strettamente correlato ad esso, è stato ritrovato anche in altre specie sud-americane comprendenti la *D. confus*, la *D. tomentosus* e la *D. indicus*, e probabilmente nella specie europea *Porphyrophora polonicus*.

L'acido kermesico è il maggior componente del chermes, ed è il più vecchio colorante conosciuto; si ottiene dalla femmina del *Kermococcus ilicis*, che si nutre di quercia mediterranea, ed è in particolare della *Quercus coccifera*.

La lacca è una complessa miscela secreta dalle femmine di vari coccidici in India e nel Sud-Est asiatico, in particolar modo dalla

Techardia lacca e *Coccus laccae*. L'acido laccaico è un pigmento rosso idrosolubile presente nella lacca; la sua struttura non è nota, ma è simile a quella dell'acido carminico e kermesico. Non si conosce la biogenesi di questi pigmenti.

Crostacei

Carotenoidi.

I carotenoidi sono molto diffusi nei Crostacei. Le colorazioni rosse, blu e verdi sono dovute all'astaxantina (*Astacus*, tipo di aragosta) libera, esterificata o combinata con proteine. In genere il colore blu indica astaxantina combinata con una proteina. Il complesso carotene-proteina può realizzarsi attraverso gli ossigeni con gruppi reattivi della proteina o attraverso un doppio legame attivato della catena lineare del carotenoide con la proteina, con un meccanismo non ancora ben chiarito.

Per azione della temperatura il complesso proteico si scinde e si mette in libertà l'astaxantina, la quale si trasforma in un composto intensamente colorato in rosso chiamato astacina.

Chimicamente l'astaxantina si stacca dalla proteina per saponificazione alcalina anche usando condizioni più blande di temperature. Si può ottenere, ad esempio, come sale disodico dal quale può essere messa in libertà con acido acetico; l'astaxantina, allo stato puro e cristallizzato, ha un colore blu-violetto diverso da quello che si osserva sull'animale dove è ovviamente diluita. Cristallizza in aghi violetti da benzene o piridina.

Anche i Crostacei, come altri animali, non sanno sintetizzare lo scheletro dei carotenoidi, ma usano il β-carotene presente nel nutrimento come prodotto di partenza, che modificano con l'introduzione di ossigeno con un processo cioè essenzialmente ossidativo. Il β-carotene si trova infatti quasi sempre presente negli animali accanto a intermedi parzialmente ossidati.

Il colore dei Crostacei, risultante dalla concentrazione dei pigmenti nei tessuti e dalla combinazione con proteine, è sotto l'influenza di fattori diversi. I gamberi cambiano colore per l'adattarsi all'ambiente e lo possono fare in meno di mezz'ora. Luce intensa e alta temperatura possono indurre il gambero a cambiare di colore; in alcuni gamberi il colore varia con l'altitudine ed è molto più intenso in montagna. La luce favorisce la deposizione dei carotenoidi nei tessuti, infatti il dorso di un granchio o dell'aragosta, più esposto, è molto più colorato. Il granchio *Carcinus moenas* quando si avvicina al periodo della

riproduzione diventa verde o rosso arancio. Sullo stesso granchio sono visibili macchie bianche che vanno scomparendo con la maturità: poiché il bianco è dovuto quasi sempre a deposizione di basi puriniche (guanina, acido urico, leucopterina) nel tessuto, e poiché le basi provengono verosimilmente dall'acido nucleico (ricco di purine) della dieta se ne può dedurre che il granchio giovane, a differenza di quello maturo, predilige un cibo ricco di acidi nucleici. Per la femmina del gambero *Palaemon serratus* la comparsa di una fila di macchie bianche sotto l'addome significa che è pronta per le nozze e anche qui vi è forse il segno di un attivo metabolismo di acidi nucleici.

La colorazione verde scuro dell'anfipodo (sottordine dei crostacei Artrostraci) *Gammarus chevreuxi* è dovuta ad un complesso carotenoide-proteina, mentre invece gli occhi sono colorati da ommocromi; negli occhi rossi di un mutante *so so* gli ommocromi bruni sono assenti, rimpiazzati da carotenoidi. Il gene quindi determina se gli occhi siano rossi per carotenoidi o scuri per ommocromi (ommine). I carotenoidi impartiscono le loro caratteristiche colorazioni a numerose specie di Crostacei Decapodi come *Homarus, Palinurus, Galathea, Carcinus*. Da diverse varietà colorate dell'isopodo, sottordine degli Artrostraci, *Idothea granulosa* si possono isolare β-carotene, echinenone, cantaxantina, luteina accanto a ommocromi. Anche l'isopodo, crostaceo cavernicolo, *Asellus aquaticus* contiene β-carotene e altri carotenoidi ed è probabile che, data la mancanza di luce nell'ambiente dove questo animale vive, i carotenoidi presi dal cibo vengano conservati tali e quali senza subire la tipica ossidazione. Fra i piccoli crostacei entomostraci, che costituiscono parte importante del plancton e servono d'alimento ai Pesci, come nel *Diaptomus vulgaris* si trovano complessi carotenoidi-proteine blu.

Gli occhi (lo strato ottico cuboidale) del capepode *Idya furcata* sono blu per un carotenoide probabilmente in forma complessa con una proteina.

L'astaxantina è stata identificata, previo isolamento, da *Astacus gammarus, Maja squinado, Portunus puber, Leander serratus, Potomiobus astacus, Cancer pagurus,* dal gambero rosa *Nephrops norvegicus* accanto ad un idrocarburo $C_{31}H_{64}$, dal copepode *Calanus finmarchicus,* da *Homarus gammarus, Hippolyte californiensis, Eupagurus prideauxii, Lepas fascicularis,* dal gambero gigante indiano d'acqua dolce *Palaemon carcinus,* dal *Palinurus vulgaris,* dal *Pandulus borealis,* dai gamberi inglesi d'acqua dolce bruno-verdastri *Astacus pallipes* o da quelli danesi *Astacus astacus* blu o rossi.

I carotenoidi non si trovano localizzati solo nel tegumento dei Crostacei ma colorano anche le loro uova. L'astaxantina è sempre

il pigmento più comune e quello che colora, nelle sue varie combinazioni, le uova verdi dell'aragosta, le uova bluastre del *Anapagurus chiroacanthus*, le ovarie blu-verdi del *Pandalus borealis*, le uova blu del balano *Lepas fascicularis*.

Il colore verde del piccolo gambero *Hippolyte varians* è prodotto dalla sovrapposizione di un carotenoide giallo con un carotenoide-proteina blu.

I Cladoceri *Daphnia e Simocephalus* sono più o meno colorati in rosso per il fatto che su essi, che sono trasparenti, vive il batterio *Spirobacillus cienkowskii* ricco di carotenoidi rossi.

Il cromatoforo.

Abbiamo già osservato come i pigmenti si trovino sempre in cellule speciali. Nell'aragosta invece il pigmento (astaxantina) è, eccezionalmente, sciolto nel guscio; l'animale non può perciò cambiare colore se non abbandonando l'intero involucro. Il pigmento del gambero si trova normalmente nei cromatofori ma non è fisso e può anche diffondere fuori della cellula; in particolare quando si concentra al centro del cromatoforo, il pigmento si lega ad una proteina formando un complesso solubile in acqua, spesso di colore blu, che si può così diffondere fuori della cellula. Questo è un modo diverso, rispetto ad altri animali, di colorarsi.

Il colore dei gamberetti e dei granchi, apparentemente monotono, risulta in effetti dalla combinazione di pigmenti dal colore brillante contenuti in cromatofori dalla forma ramificata; le variazioni di colore sono determinate dal flusso citoplasmataico che sposta i granuli di pigmento lungo direzioni fisse sotto un controllo ormonale.

Emoglobina.

Le parti rosse del piccolo crostaceo *Apus* (*Triops cancriformis*) sono dovute all'emoglobina; sullo stesso animale è riconoscibile anche un pigmento granulare verde scuro, la cui struttura è ignota ma si potrebbe suggerire che sia un pigmento biliare.

Pigmenti biliari.

Il gamberetto *Chirocephalus diaphanus* è colorato dalla biliverdina.

I parassiti Rizocefali (sottordine dei Crostacei) vivono sull'addome dei Decapodi, come il granchio *Carcinus moenas*, e possono provocare all'ospite la castrazione e l'inversione sessuale. Sono colorati per biliverdina *Septosaccus cuenoti, Peltogaster paguri, Peltogaster curvatus, Lernaeodiscus squamiferae* Perez e naturalmente possono colorare l'ospite.

Ommocromi.

Si trovanon negli occhi dei Crostacei ma sembra che possano anche contribuire alla colorazione del tegumento dell'animale. Gli occhi scuri del gamberetto *Crangon vulgaris* sono colorati da ommine che si trovano anche nei cromatofori.

Il pigmento dei cromatofori dell'isopodo (sottordine degli Artrostraci) *Asellus aquaticus* è molto simile alla xantommatina; l'animale dopo la morte diventa spontaneamente rosso, probabilmente per azione di batteri riducenti.

Biocromi non noti.

Il pigmento rosso del miriapodo *Lepralia foliacea* non è noto. Anche il pigmento violetto del tessuto connettivo che si osserva nei giovani centopiedi *Lithobius fortificatus* e che somiglia per alcune proprietà chimico-fisiche all'emocianina non è stato ancora studiato.

Aracnidi

Carotenoidi.

Il carotenoide presente nel baco del *Thrombidium* è risultato essere astaxantina, mentre il 10 per cento dei carotenoidi presenti nel baco *Metatranycus ulmi* è costituito da α-carotene; la restante porzione invece non è stata ancora identificata. L'idracarine *Eylais extendens* ed *E. hamata* contengono β-carotene, echinenone, cantaxantina, astaxantina sia in forma libera che esterificata, luteina ed un altro carotenoide non ben identificato.

Le emocianine sono presenti nel sangue di alcuni ragni e scorpioni; esse sono state studiate particolarmente nel *Limulus polyphemus*.

Molluschi

Grande è in questo *philum* la varietà di forme viventi, purtuttavia vi è una notevole omogeneità sia dal punto di vista morfologico che biochimico; una caratteristica è la presenza nel sangue dell'emocianina, una proteina contenente rame, azzurra se ossidata, mentre più rara è l'emoglobina. La conchiglia è un elemento diffuso della morfologia esterna di gran parte dei Molluschi. Lo strato esterno è spesso vivacemente colorato e dotato di raffinati disegni geneticamente determinati. Lo strato madreperlaceo interno, iridescente per l'intreccio e l'alternanza di lamelle calcaree, può dare origine, in conseguenza di secrezioni anomale, alle perle dalle forme più svariate e di diverso colore.

Tutti i pigmenti finora incontrati contribuiscono al colore, talvolta brillante, dei Molluschi o alle loro rapidissime variazioni di colore, come nel ben noto caso del polipo e della seppia.

Il cromatoforo.

Quando nella lunga storia evolutiva, per i Molluschi primitivi, venne il giorno in cui fu deciso di abbandonare il vecchio ed ingombrante sistema difensivo della conchiglia con un sistema più agile e moderno molti problemi si dovettero risolvere per difendere il tenero corpo dai predatori. Nei Cefalopodi, ad esempio nel calamaro, fu aumentata notevolmente la velocità con un sistema di propulsione a reazione (espulsione di un getto d'acqua da una delle cavità del corpo) o creato come nel polipo e nella seppia un cromatoforo a risposta rapida e sempre mutevole. Granuli di pigmento bianco, giallo, arancione, rosso, bruno, nero, di diverse grandezze sono disposti in strati sulla pelle dell'animale. I gialli in superficie, i rossi nel mezzo e i bruni in profondità; dalla loro disposizione e sovrapposizione, dal gioco delle macchie che possono cambiare di posizione per contrazione della pelle, nascono i vari effetti cromatici che ci danno alle volte la sensazione che i colori pulsino e percorrano il corpo dell'animale.

Le striscie bianche e nere, a zebra, della seppia che nuota fra le alghe mobili, come arbusti al vento, rendono la forma dell'animale poco significativa e perciò non riconoscibile. Il rapido cambiamento di colore dal nero al bianco, quando ormai il pericolo è vicino, dà l'impresisone al predatore che l'animale è scomparso e, se il pericolo persiste, come ultima risorsa la seppia emette una grossa nube nera fatta da una sospensione colloidale di melanina: si può dire che ad ogni particolare situazione la seppia reagisca con tecniche cromatiche

diverse. Diverse colorazioni e disegni dei Cefalopodi, probabilmente, vengono interpretati dal predatore come potenti armi difensive e il trucco, come nelle guerre antiche e recenti dell'uomo, spesso funziona.

Nei Cefalopodi il pigmento è contenuto in sacchetti sferici circondati da fasci di fibre muscolari che quando si contraggono comprimono il sacco che assume una forma piatta molto sottile e che occupa una superficie 100 volte maggiore della forma a sfera. La variazione della forma del sacco avviene in uno spazio di tempo inferiore a mezzo secondo e permette all'animale di esibire rapidamente macchie, disegni, e produrre variazioni continue di colorazioni. Tutto ciò è sotto un complesso e rigoroso controllo operato dal sistema nervoso centrale; cioè le piccole fibre muscolari, che provocano i cambiamenti di colorazione della pelle comprimendo il sacco, sono collegate, attraverso fibre nervose, direttamente al cervello o più precisamente ai lobi dei gangli subesofagei. Questa situazione, per quanto l'organizzazione dell'insieme delle fibre nervose sembri diversa, è comune nel polipo, nella seppia e nel calamaro.

A seconda dei segnali luminosi che giungono ai recettori ottici (occhi) gli animali inviano ai motori (fibre muscolari) dei numerosi e diversi cromatofori, indicazioni ben precise del colore e dei disegni che la pelle dovrà assumere. Il cervello è, in altre parole, capace di elaborare il messaggio ottico.

Porfirine.

Colorano il guscio del gasteropodo *Chanculus pharaonis;* l'uroporfirina-III è il pigmento del guscio dei bivalvi *Venus fasciata* e *Pteria macroptera.* L'uroporfirina-I si trova nel tegumento delle lumache *Arion rufus, Arion emipiricoum,* nella lepre di mare *Aplysia, Akera* e nel bivalve *Solecurtus.* È interessante notare, sotto l'aspetto biogenetico, che il pigmento rosso che le lepri di mare emettono a scopo di difesa è da taluni considerato un derivato del bilenone. Il colore nero della pelle delle lumache, come nella *Arion ater,* è dovuto non a porfirine bensì a melanine.

Una porfirina molto diffusa nel guscio dei Molluschi è la concoporfirina, molto simile strutturalmente alla porfirina-III. Nella *Pteria radiata, Pteria vulgaris, Pteria margaritifera* si ritrovano sia la concoporfirina sia l'uroporfirina-I; quest'ultima si può facilmente ottenere per cromatografia su talco di una soluzione acida nella quale sono stati digeriti i gusci, eluendo la zona fluorescente con acetone.

Le varie colorazioni delle perle sono dovute a porfirine libere o in combinazioni con metalli (perle verdi) e più raramente a pigmenti biliari.

Il mollusco *Tivella stultorum* molto apprezzato dai buongustai della California deve il suo colore all'emoglobina.

Pigmenti biliari.

I pigmenti biliari colorano il guscio dei gasteropodi *Turbo* in verde, *Haliotis* in blu.

Dal *Turbo regenfussi* si può isolare un pigmento blu che, sia fisicamente sia per le proprietà chimiche, somiglia molto alla glaucobilina, un derivato del bilenone.

L'ostracode di acqua dolce *Heterocypris incongruens* accumula un pigmento biliare solo quando si nutre di alghe blu o verdi. Le branchie di certe ostriche, come la *Ostrea edulis*, sono verdi: probabilmente le ostriche ingeriscono Diatomee, come la *Navicula ostrearia* di colore bluastro per un pigmento biliare, e il colore verde risulterebbe dalla combinazione del pigmento blu con un giallo presente nelle branchie.

Sono derivati del bilenone il pigmento rosso della pelle della lumaca *Arion rufus* e quello arancione del guscio del mollusco di mare *Haliotis rufescens*. Un pigmento, violetto allo stato cristallino, strutturalmente correlato al bilenone si può ottenere dal mollusco nero *Haliotis cracherodii*.

Ommocromi.

Gli ommocromi color arancio e violetto bruno si trovano nella pelle della seppia e forse il pigmento del gasteropodo oceanico *Janthina* è un ommocromo.

Carotenoidi.

I colori più vivaci e frequenti dei Molluschi sono dovuti alla presenza di carotenoidi, quali il β-carotene, echinenone ed altri. Nel Lamellibranca *Mytilus edulis* è presente l'alloxantina, mentre nel *Mytilus californianus* la zeaxantina insieme ad un altro pigmento di natura acida, la mitiloxantina, un nuovo carotenoide con legami acetilenici.

Nel gasteropode *Pleurobranchus elegans* è stato isolato l'astaxantina, ritrovato anche nel bivalve *Lima excavata*, nonché nelle uova del *Pomacea caniculata*.

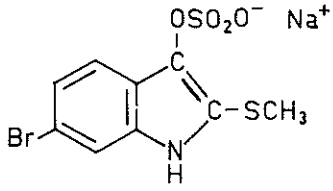
Dal nudibranchio delle coste del Pacifico *Hopkinsia rosacea* è stata isolata una xantina che presenta, a differenza degli altri carotenoidi, un solo anello.

Il mollusco *Chromodoris zebra* ha la superficie in blu scuro con striscie laterali di color arancione. Il pigmento arancione è sicuramente un carotenoide, mentre è incerta la natura del pigmento blu, che probabilmente potrebbe essere un carotenoide coniugato con una proteina.

Un famoso colorante.

Nei tempi passati i coloranti usati per tingere i tessuti erano di origine naturale, costosissimi, e utilizzati con un'arte segreta tramandata di padre in figlio. Famosa fra i coloranti dell'antichità la preziosa porpora che, a seconda del procedimento usato, tingeva in rosso fuoco, in viola o in rosso-nero. Usata per tingere i papiri dai Greci, i tessuti dai Fenici, Egiziani, Romani, e ancora nel primo Medioevo per tingere le vesti, donde il nome porporati dei cardinali e dei preti. Ricordata da Omero, Aristotele e Virgilio per la sua bellezza ed il suo elevato costo era il colorante dei re e dei dignitari.

Alcuni Gasteropodi, come il *Murex brandaris, Murex trunculus, Purpura lapillus*, producono nella ghiandola ipobranchiale una secrezione giallastra che all'aria diventa rossa. Nel materiale biologico è presente la leucobase, in forma protetta, che, dopo l'estrazione, di-



tirianindossil-solfato

venta sensibile all'ossigeno atmosferico e si trasforma col tempo in 6,6′-dibromoindaco. Questo composto era certamente uno dei principali pigmenti della porpora degli antichi.

La molecola è interessante per la presenza di due atomi di bromo; non si conosce come e a quale stadio avvenga l'alogenazione,

reazione chimica molto rara nel mondo animale. Le varie tonalità che si dice assumessero i tessuti con la porpora si possono spiegare oggi facilmente dato che gli atomi di bromo non sono molto stabili e la porpora, perdendoli, si trasforma in indaco, che come tutti sanno è blu. Un modo di tingere con la porpora, che non deve essere stato molto diverso da quello usato dagli antichi, è il seguente: si rompono i gusci di *Murex* e si estraggono gli animali che vengono lavati con acqua di mare. Per riscaldamento si ottiene un liquido, che può assumere colori diversi, nel quale, si immergono le stoffe da tingere. Esposti al sole, i tessuti, che emanano un pessimo odore, assumono una bella tinta purpurea che si intensifica fino a diventare stabile nel tempo.

Anellidi

Gli animali di questa classe presentano talvolta colorazioni vivaci e casi di iridescenza; il quadro delle strutture chimiche responsabili del colore è forzatamente incompleto dato che solo per un limitato numero di Anellidi sono stati isolati e adeguatamente caratterizzati i relativi pigmenti. Melanine sono certo responsabili delle tonalità grigie, brune o nere, mentre le colorazioni gialle e rosse sono state, nei casi studiati, attribuite ai carotenoidi. Il colore verde è spesso dovuto ai pigmenti biliari, ma alcune tonalità verdastre sono dovute alla clorocruorina, il caratteristico pigmento respiratorio che in alcuni animali tiene il posto dell'emoglobina. Altri pigmenti degli Anellidi sono le porfirine e l'emeritrina.

Quando si manipola il verme *Arenicola tinctoria* (= *Arenicola marina*) la pelle delle mani si colora in giallo. Il verme giovane è rosa o rosso a causa dell'emoglobina ma poi diventa scuro. Si ritiene che il pigmento giallo contenuto nel verme si trasformi in quello scuro nel corso di un processo ossidativo non ben chiarito.

Non sono ancora ben classificabili da un punto di vista chimico i pigmenti che colorano in verde i policheti *Eulalia viridis*, *Phyllodore viridis* e i pigmenti gialli, bianchi, rossi, blu del serpulide *Pomatoceros triqueter*, la cui colorazione dovrebbe risultare dalla combinazione dei vari pigmenti.

Uranidine.

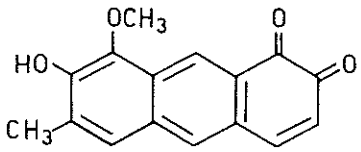
Pigmenti di vario colore, gialli, rosso-bruni, poco studiati e chiamati uranidine, si trovano nei coralli, nelle spugne, in qualche olo-

turia e in qualche verme. Facilmente imbruniscono o diventano neri all'aria. Sono presenti nella sanguisuga *Haemopsis sanguisuga* ma non nella comune *Hirudo medicinalis.*

Melanine.

Fantasiose interpretazioni frutto di ricerche superficiali appaiono di tanto in tanto sul palcoscenico scientifico e tengono cartello anche per numerosi anni. È il caso del pigmento del verme marino *Halla parthenopeia* (Costa) che colora l'animale in rosso-arancio. Ad esso fu attribuita la struttura di acido 2,3-diidro-5,6-indolchinone-2-carbonico con grande gioia di chi si occupa della biogenesi delle melanine, in quanto questa sostanza, chiamata dopacromo, può essere presente nel corso della trasformazione che la tirosina subisce quando si forma la melanina (vedi). In effetti non vi è nessuna relazione fra i due composti: attualmente la formula di struttura di tale pigmento è stata chiaramente determinata e si è visto che si tratta di un composto antrachinonico [18].

Il pigmento che colora in rosso l'epitelio del polichete *Halla Parthenopeia* è di natura antrachinonica; si tratta cioè del 7-idrossi-



8-metossi-6-metil-1,2-antrachinone. Esso rappresenta il primo antrachinone rinvenuto in natura non sostituito nelle posizioni 9 e 10.

Quasi certamente questo pigmento è presente anche nell'epitelio del polichete *Lumbriconeris impatiens,* della famiglia delle Eunicide, usato comunemente come esca dai pescatori napoletani.

Un'interpretazione anch'essa probabilmente sbagliata viene data della natura del biocromo che colora l'anellide *Polycelis nigra* che vive in acque dolci e che appare alle volte nero e alle volte rosa: si ritiene che il pigmento rosa sia dopacromo.

L'anellide marino *Chaetopterus variopedatus* è nero per la presenza di melanina. Accanto a melanina si può estrarre anche un pigmento rosso-bruno che alcuni esperti ritengono essere una feomelanina. Un altro caso fra gli Invertebrati, nel quale si parla di feomelanina, è quello del protista, organismo molto semplice fra i primi

apparsi sulla Terra, *Coccolithus fragilis,* il cui pigmento arancione apparterrebbe alla classe delle feomelanine. È difficile dire quanto di vero ci sia in queste affermazioni, in quanto solo nel 1969 sono state scoperte le strutture delle feomelanine e chiarita la loro biogenesi.

Emoglobina e porfirine.

Vari Anellidi sono colorati dall'emoglobina, come nel verme marino *Thoracophelia mucronata;* l'emoglobina non è intracellulare ma in sospensione. Nel comune lombrico la parte anteriore terminale è colorata per la presenza di protoporfirina come per gli uomini; il lombrico muore alla luce per la fluorescenza della porfirina. Il verme *Lineus longissimus* deve il suo colore alle porfirine; coproporfirina-III si trova nelle visceri di diversi vermi policheti *Nereis, Chaetopterus, Myxicola, Owenia.* Non è sicuro se le porfirine colorino il verme marino *Urechis caupo,* ma le uova deposte da questo animale sono colorate in rosa dalle porfirine. L'emeritrina, una volta ritenuta una porfirina, è invece una specie di emocianina contenente ferro al posto del rame; il pigmento, rosso se ossigenato o giallo chiaro in assenza di ossigeno, contribuisce in parte al colore dei Sipunculoidi marini *Sipunculus, Phascolosoma, Priapulus* e nell'anellide policrate Magelona.

Il pigmento clorocruorina simile all'emoglobina, anche nella funzione, si trova nel sangue di alcuni Anellidi. È dicroico: verde in soluzione diluita e rosso in soluzione concentrata. Il pigmento contribuisce al colore dell'animale solo negli Anellidi policheti *Chlorhaemidae* e *Ampharetidae.* Fatto eccezionale è che nel sangue degli anellidi *Serpula* vi è sia clorocruorina sia emoglobina; i giovani hanno più emoglobina, mentre la clorocruorina predomina nei vecchi. La parte colorata della clorocruorina può essere staccata dalla parte proteica come nel caso dell'emoglobina; partendo da 10 kg di verme Spirographis si possono ottenere 250 mg di clorocruorina sotto forma di estere metilico. L'eme (parte colorata) differisce da quello dell'emoglobina perché un gruppo $-CH = CH_2$ è stato sostituito da un gruppo –CHO (vedasi la formula della protoporfirina-IX).

Questa sostituzione così semplice oltre a far mutare il colore del pigmento varia anche l'affinità, rispetto all'emoglobina, per l'ossigeno che è più bassa mentre è più alta quella verso l'ossido di carbonio. Questo pigmento respiratorio era comune nel passato quando la composizione dell'atmosfera era diversa?

Derivati della clorofilla.

Il verde intenso della *Bonellia viridis* è dovuto ad una diossi-mesopirroclorina (derivato della clorofilla), mentre pigmenti analoghi impartiscono la colorazione verde-bluastra al *Thalassema lankesteri.* Nelle *Owenia* e *Chaetopterus* i colori verdi sono dovuti a feoforbidi (altri derivati della clorofilla), come nella *Owenia fusiformis.*

Pigmenti biliari.

Il verde scuro del polichete del Pacifico *Eupolymmia heterobranchia* e del polichete *Clymenella torquata* è dovuto alla mesobiliverdina (classe dei pigmenti biliari). Le colorazioni, più pronunciate nella maturità sessuale del polichete *Nereis diversicolor* sono dovute, oltre che a carotenoidi, alla biliverdina che si trova in granuli nelle cellule epiteliali. Il lombrico *Allolobophora chlorotica* è verde in alcune parti del corpo a causa di un pigmento biliare.

Carotenoidi.

Negli Anellidi sono presenti diversi carotenoidi e in alcuni casi sono visibili come nei nematodi (fra cui si annoverano noti parassiti dell'uomo), ma in generale, come nella *Arenicola piscatorium,* sono mascherati dal nero del tegumento. Il pigmento cantaxantina è stato estratto dal polichete *Sabella penicillus,* mentre sono stati trovati astaxantina ed echinenone nel *Myxicola infundibulum* e nel *Megalomma vesciculosum.*

Celenterati

I colori dei Celenterati sono fra i più belli e i più vari del regno animale. È probabile che i pigmenti in taluni di questi animali dal corpo acquoso abbiano importanti funzioni biologiche ed è sorprendente che essi siano stati molto poco studiati.

Le idre, celenterati di acqua dolce, mostrano diverse colorazioni spesso dovute ad alghe. La *Chlorohydra viridissima* (*Hydra viridis*) deve il suo colore verde alla Chlorella. Altre specie sono infettate temporaneamente ed altre devono il loro colore al cibo. La *Pelmatohydra oligactis* trae i suoi pigmenti dal nutrimento costituito da chironomidi, insetti simili alle zanzare. L'*Hydra circumcincta* quando

si nutre di microcrostacei copepodi che sono rossi si colora sempre più in rosso-arancio, mentre se il cibo è costituito da *Daphnia* assume un colore rosso-bruno.

Carotenoidi.

L'attinia *Metridium senile* è colorata in bianco, arancio, rosso, rosso-bruno, bruno, nero. La varietà nera contiene melanina, mentre il bianco è dovuto ad un deposito di acido urico; le altre colorazioni sono dovute a carotenoidi sulle quali influisce la quantità di melanina. Numerose varietà colorate dell'*Actinia equina* della *Tealia felina* e dell'anemone delle coste americane del Pacifico *Epiactis prolifera* sono prodotte dai carotenoidi. Nelle varietà rosse, il pigmento più diffuso è l'astaxantina esterificata. Il colore delle attinie può essere modificato dalle alghe; la *Cribrina Xantogrammica* ha i tentacoli bruni, quando si trova in acque illuminate, perché vi crescono le alghe.

Il magnifico antozoo (anthos = fiore, zoin = animale) *Cerianthus membranaceus* dai colori vivacissimi contiene un pigmento rosso, forse un acido carotenico, solubile in ammoniaca.

Molte colorazioni blu e viola delle meduse sono dovute a carotene-proteine, le quali diventano rosse per riscaldamento (confrontare l'aragosta), ma si è messo in dubbio che i pigmenti violetti della *Rhizostoma pulmo* e della *Pelagia noctiluca* siano carotenoproteine.

Fra i sifonori la *Velella lata* e la *Velella spirans* presentano tessuti blu, a causa di un complesso astaxantina-proteina.

Il predatore nudibranchio *Fiona marina* è blu perché si nutre di *Velella.*

Carotenoidi si trovano nel corallo rosso *Eunicella verrecusa,* ma non nei coralli *Corallium rubrum* e *Tubipora musica.* Carotenoidi sono presenti nella madrepora *Cariophyllia lloydi,* nel cerianto dai tentacoli vivamente colorati *Cerianthus lloydi,* nello idrozoo *Tubularia indivisa,* nello scifozoo *Lucernaria quadricornis.*

Pigmenti biliari.

Biliverdina si trova nell'ectoderma, alla base della suola *Actinia felina,* nelle parti verdi della *Tealia felina* e della *Anemonia sulcata.* Sulla pelle della *Sagartia parasitica* (= *calliactis effoeta*) si vedono dei granuli rossi che, in strato più spesso, appaiono violetti. Il pigmento si scioglie in alcol acidificato con acido acetico e dà una

serie di colori gialli e arancioni in ambiente acido che virano al blu e al violetto in ambiente alcalino. È probabile che sia un pigmento biliare.

Il blu del corallo del Pacifico *Halipora coerulea* è invece dovuto ad un derivato del bilenone. Nel corallo giallo-arancio *Eugorgia ampla* e in altri coralli alcionari si rinvengono acidi grassi insaturi con più doppi legami salificati con calcio e magnesio accanto a terpenoidi ed idrocarburi aromatici.

Zoantoxantine.

Il colore giallo fluorescente che si nota anche alla luce solare di alcuni celenterati quali il *Parazoanthus axinellae* e l'*Epizoanthus arcenus* è dovuto alla presenza di alcuni pigmenti azotati scoperti recentemente.

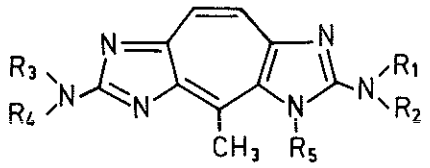
Il sistema cromoforo [19] è costituito dallo scheletro tetrazociclopentazulenico che, sotto forma di due isomeri, è presente in questi pigmenti, mentre le differenze sono dovute solo alla posizione ed al numero dei sostituenti sullo scheletro base. Nello schema sono riportate le strutture dei principali pigmenti finora isolati.

Ruolo dei biocromi nei processi viventi.

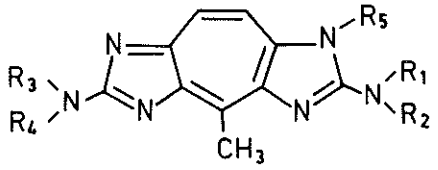
Il fitocromo è un pigmento che si trova nei semi che, assorbendo radiazioni di una determinata lunghezza d'onda, mette in moto i complessi sistemi biologici latenti nel seme: provoca cioè lo sviluppo della pianta (possiamo immaginare il seme come il motore di un automobile e fitocromo come il motorino di avviamento).

Un meccanismo molecolare dovuto a sostanze che assorbono la luce deve essere anche alla base di numerosi e delicati processi fisiologici degli animali.

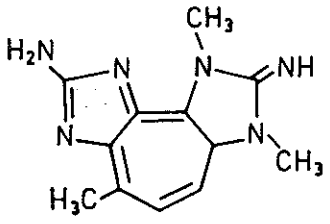
I granchi diventano scuri durante il giorno e chiari durante la notte, sotto l'azione della luce i Tunicati chiudono gli orifizi, i ricci di mare aumentano l'attività ovarica e testicolare, i pedicelli ambulacrali delle stelle di mare si muovono, i tentacoli degli anemoni accompagnano l'arco del sole, i polipi d'acqua dolce inseguono la luce, la durata e l'intensità della luce influenzano lo sviluppo delle gonadi maschili e femminili degli uccelli, la lunghezza del giorno stimola la deposizione delle uova, ed infine il colore nasce nel nostro cervello sotto l'azione di determinate radiazioni.



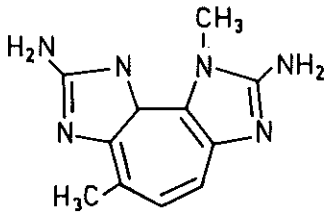
		R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
Zoantoxantina		H	H	CH_3	CH_3	CH_3
Parazoantoxantina	A	H	H	H	H	H
" " " "	B	H	H	CH_3	H	H
" " " "	C	H	CH_3	CH_3	H	H
" " " "	D	H	H	CH_3	CH_3	H



		R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
Epizoantoxantina	A	H	CH_3	CH_3	CH_3	H
" " " "	B	CH_3	CH_3	H	CH_3	CH_3



Pseudozoantoxantina



3-Norpseudozoantoxantina

Sia il fitocromo che la rodopsina sono delle cromoproteine che si differenziano per la parte colorata, in quanto nel primo alla proteina è legato un pigmento biliare e nella seconda alla proteina un pigmento che è correlato chimicamente ai carotenoidi. Ambedue i pigmenti attivano il sistema biologico cambiando configurazione.

Noi abbiamo considerato finora i biocromi coniugati con le proteine, soprattutto sotto l'aspetto decorativo, ma è possibile che taluni di essi giochino un ruolo importante come iniziatori di catene metaboliche o essere dei preziosi modelli biologici. In questa prospettiva si auspica un più approfondito studio sulla configurazione delle cromoproteine e del meccanismo molecolare con il quale esse trasmettono gli impulsi fisici.

Poriferi

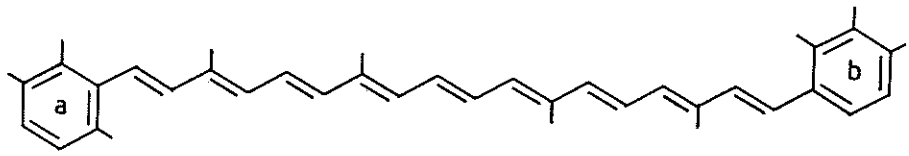
I poriferi si dividono in tre classi: Demosponge, Calcisponge, Esatinellidi. Le spugne non sono altro che lo scheletro di alcune specie di poriferi fissati alle rocce o sul fondo a 20-30 metri di profondità; esse sono grigiastre o brunastre, ma possono presentare anche vivace colore giallo, arancione, rosso, viola, nero, dovuto a carotenoidi e melanine. Non sempre il colore è proprio dell'animale ma, come avviene anche per i celenterati, molluschi gastropodi, ascidie, è impartito dalle alghe che vi crescono sopra e che ovviamente modificano il loro colore. Ciò ha provocato, specie nel passato, una certa confusione sulla vera natura chimica dei pigmenti dei poriferi.

Carotenoidi.

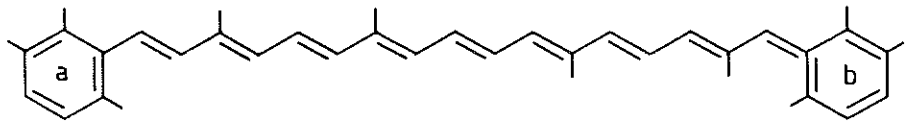
Le tonalità rosse della *Suberites domuncula*, della spugna della costa inglese *Hymeniacidon sanguineum*, *Ficulina ficus*, *Axinella crestagalli* sono dovute a miscele di carotenoidi che probabilmente sono, in parte, solo prodotti intermedi della sintesi della astaxantina. La La comune spugna *Halichondria panicea* appare verdastra perché contiene una miscela di un carotenoide giallo e di uno blu (carotenoproteina).

Il colore arancione della spugna giapponese *Reniera japonica* è dovuto alla presenza di β-carotene e di due nuovi carotenoidi, il renieratene e l'isorenieratene facilmente separabili.

Una caratteristica di questi carotenoidi, rispetto a quelli finora incontrati è la presenza di due anelli aromatici (a, b) e la disposizione dei metili; inoltre, essi presentano uno spettro di assorbimento molto simile a quello del β-carotene e γ-carotene rispettivamente.



renieratene



isorenieratene

Poiché in questa spugna manca l'astaxantina, che rispetto al renieratene è a un più alto livello di ossidazione, vuol dire che l'animale è capace di operare, a differenza di altri invertebrati marini e di altre spugne, solo una blanda ossidazione (anelli aromatici) senza introdurre atomi di ossigeno.

Protozoi

I protozoi sono animali microscopici che si suddividono nelle classi dei Flagellati, Sarcodici, Sporozoi, Infusori. Con questi animali arriviamo ai confini tra il regno animale ed il vegetale e dove, date le dimensioni dell'animale il colore è visto solo quando essi appaiono numerosi, in colonia. È il caso ad esempio dei dinoflagellati marini. Questi esseri d'aspetto vario e bizzarro che vivono di preferenza nei mari caldi tropicali si possono moltiplicare all'improvviso e così rapidamente da far apparire le acque colorate in rosso-salmone o brunastre. Molti di questi organismi unicellulari sono anche luminescenti per cui nella notte il mare può apparire, all'osservatore, come una gigantesca e a volte improvvisa luminaria.

Gli animali sono spesso pigmentati, ma non si conosce molto intorno alle strutture chimiche ed al ruolo biologico dei pigmenti.

Carotenoidi.

Carotenoidi sono stati però isolati e identificati in alcuni casi, β-carotene e carotenoidi ossigenati si trovano nel *Gonyalax polyedra,* nel *Prorocentrum micans, Ceratium furca* ed è perciò che a questi biocromi si deve attribuire il « colore » delle acque.

Bioluminiscenza

La capacità di emettere luce da parte di alcuni animali è ben nota grazie alle lucciole, ma il fenomeno è più diffuso di quello che si creda. Le specie luminose sono infatti molto numerose tra i Celenterati, Ctenofori, Crostacei, Cefalopodi, teleostei pelagici. La luminescenza è caratteristico degli animali che vivono nelle profondità degli oceani: al disotto di 600 mt in certe zone di mare circa il 75 % dei pesci sono luminescenti. L'emissione di luce avviene in genere in modo intermittente, sia per un processo spontaneo, sia sotto l'azione di stimoli esterni; più rara negli animali l'emissione di luce continua come nel cefalopode abissale *Spirula* e in alcuni millepiedi.

In genere il colore della luce è azzurra e verde o più raramente giallo topazio e rossa; l'effetto colorato è talvolta dovuto al fatto che la luce emessa è filtrata attraverso membrane pigmentate. Interessante è la relazione che esiste fra lunghezza d'onda emessa e la sensibilità degli organi visivi dell'animale. Ad esempio, gli occhi dei pesci di superficie sono particolarmente sensibili alla luce verde, mentre quelli degli animali che vivono in acque profonde sono più sensibili alla luce azzurra che è quella più comunemente emessa dagli animali stessi; il pesce è così messo nella migliore condizione per percepire i deboli bagliori che provengono sia dalla stessa specie sia da specie diversa.

La luminescenza misurata finora negli animali interessa la zona dello spettro visibile, mentre nulla sappiamo sulla possibilità di emettere luci ultraviolette.

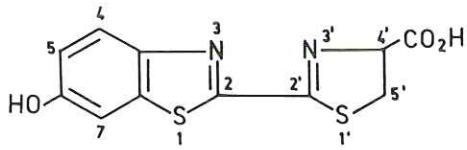
Particolare è la luminescenza delle larve del coleottero brasiliano *Phrixothris* dotato di due macchie rosse sul capo e una fila di macchie verdi lungo il corpo; normalmente nell'oscurità si vedono solo le macchie rosse, mentre se l'animale è disturbato si « accendono » le luci verdi. L'aspetto dell'animale ricorda quello di un treno nella notte: nella lingua inglese viene chiamato comunemente « railroad worm ».

Il significato della bioluminescenza è lungi dall'essere completamente compreso, soprattutto per le difficoltà che si presentano nello studio degli animali nel loro ambiente naturale, tuttavia alcuni punti

fermi sono stati raggiunti e alcune ipotesi molto ragionevoli sono state avanzate. È sicuro ad esempio che le lucciole ed alcune specie di pesci abissali usano la bioluminiscenza come richiamo sessuale. Il maschio della lucciola si aggira nelle tenebre a caccia di femmine emettendo i caratteristici bagliori; quando la luce è emessa in prossimità di una femmina questa lampeggia di rimando. Si viene a creare così una serie di lampi incrociati che permettono al maschio di avvicinarsi sempre più alla femmina fino ad individuare esattamente la sua posizione...

È stato proposto il seguente meccanismo per spiegare l'emissione di luce: l'impulso che arriva alle terminazioni nervose libera della acetilcolina che diffonde nel fotocita liberando l'enzima luciferasi da uno stato di inibizione; ha così inizio la reazione luminosa.

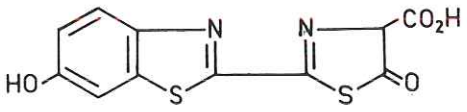
La chimica della bioluminescenza della lucciola *Photinus pyralis* è stata chiarita in ogni suo dettaglio. La reazione che genera la luce consiste in una interazione tra luciferina e ATP catalizzata dall'enzima luciferasi in presenza di ossigeno e ioni magnesio. La luciferina,



+ ATP + Mg^{++} + O_2

luciferina

---- Luciferasi



+ AMP + PP + H_2O + Luce

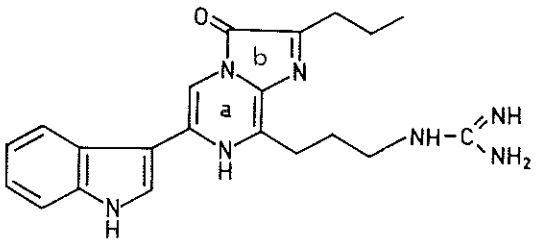
ATP = adenosintrifosfato - PP = fosforo inorganico - AMP = adenosinmonofosfato

che si può estrarre dalla lucciola con rese di circa 1 mg per 2000 lucciole, è il 2-(4′-carbossi-tiazolina)-6-ossi-benzotiazolo; essa è stata anche ottenuta per sintesi e il prodotto, purché l'atomo di carbonio asimmetrico 4′ abbia la configurazione D-, emana luce come quello naturale. La luciferina può avere notevole importanza nelle ricerche biologiche specialmente per l'analisi dell'adenosintrifosfato (ATP): aggiungendo ad una soluzione acquosa di ATP la luciferina e la

luciferasi si ottiene la tipica luce che in base alla sua intensità permette di calcolare la quantità di ATP presente nella soluzione.

Anche l'enzima luciferasi è stata isolata allo stato puro (in lunghi aghi bianchi) e dalle prime analisi risulta costituito da circa mille amminoacidi; resta però da stabilire la sequenza degli amminoacidi e il sito attivo dell'enzima.

Un substrato chimico del tutto diverso dalla luciferina si trova nel *Cypridina* un piccolo crostaceo simile alla pulce d'acqua che vive sia in acque dolci che salate. La specie marina emette un'abbondante secrezione luminosa di colore azzurro. La reazione è più



cipridina

semplice di quella della lucciola, in quanto per la produzione di luce interviene solo cipridina, l'enzima e naturalmente l'ossigeno. Di tutta la molecola della cipridina solo una parte è responsabile della luminescenza, e precisamente quella costituita dagli anelli *a* e *b*.

Lavorando con luciferina e luciferasi si è anche potuto stabilire che per ogni molecola di luciferina utilizzata viene emesso esattamente un quanto di luce. Un rendimento del 100 %. L'efficienza dei fotogeneratori animali colpisce se si pensa ai sistemi che l'uomo utilizza per produrre una luce che rappresenta solo una piccola parte dell'energia trasformata. Forse non è lontano il giorno che, approfondite le nostre conoscenze sui fotociti animali, potremo passare delle più economiche notti al romantico chiarore della luce biologica.

Gli Autori ringraziano vivamente il sig. Giuseppe Ferracane per l'assistenza tecnica prestata.

BIBLIOGRAFIA

[1] Butenandt A., Angew. Chem., **69**, 16 (1957).
Dennel R., Biol. Rev., **33**, 178 (1958).
Fisher L. R., Kon S. K., Biol. Rev., **34**, 1 (1959).

FLOREY E., FINGERMAN M., FUJII R., NOVALES R. R., BAGNARA J. T., MAC HADLEY E., DAVIS W. J., GOLDMAN J. M., CHAVIN W., RALPH C. L., QUEVEDO W. C., *Cellular Aspects of the Control of Color Changes*, American Zoologist, vol. 9, N. 2 (1969).
FOX S. W., *The Origins of Prebiological System*, Academic Press, New York (1965).
FOX D. L., *Animal Biochromes and Structural Colours*, Cambridge Press, Cambridge (1953).
FOX H. M., VEVERS G., *The Nature of Animal Colours*, Sidgwich and Jackson, London (1960).
GOODWIN T. W., Biol. Rev., **27**, 439 (1952).
MONTAGNA W., HU F., *The Pigmentary System*, Pergamon Press, Oxford (1967).
MORTON R. A., G. A. J., Fort. Chem. Org. Naturst., **14**, 244 (1957).
RIMINGQON C., Endeavour, **14**, 126 (1955).
ZIEGLER GUNDER I., Biol. Rev., **31**, 313 (1956).

[2] Talvolta può però accadere che la guarigione sia lenta o addirittura la cura non ha successo. Una spiegazione si può dare in termini molecolari: la rodopsina è molto più stabile della opsina e questa rimanendo per lungo tempo priva del suo biocromo si altera e finisce col provocare la degenerazione dell'intera cellula visiva che, come altre cellule del sistema nervoso, non è più in grado di riprodursi.

[3] BLOIS M. S., BROWN H. W., MALING J. E., *Free Radicals in Biological Systems*, Academic Press, New York (1961).
DUCHON J., FITZPATRIK T. B., SEIJI M., *Melanin*, Year Book of Dermatology, Year Book Medical Publishers Inc. - USA (1968).
GORDON M., *Pigment Cell Biology*, Academic Press, New York (1959).
GORDON M., *Pigment Cell Growth*, Academic Press, New York (1953).
MONTAGNA W., ELLIS R. A., *The Biology of Hair Growth*, Academic Press, New York (1958).
NICOLAUS R. A., *Melanins*, Chemistry of Natural Products - Series Edited by E. Lederer-Hermann, Paris (1968).
RILEY V., FORTNER J. G., *The Pigment Cell Molecular, Biological and Clinical Aspects*, Annals of the New York Academy of Sciences, New York (1963).

[4] Consideriamo lo splendido diamante e il comune carbone coke che si usa per riscaldare. Ambedue sono fatti di atomi di carbonio e insolubili. Per il primo, cristallino, applicando i metodi sistematici d'indagine, si è potuto stabilire che è formato da atomi di carbonio con disposizione tridimensionale, nella quale ogni atomo di carbonio si trova al centro di un tetraedro portante sui vertici altri quattro atomi legati ognuno con l'atomo centrale. Il secondo, amorfo, è costituito da macromolecole in cui gli atomi di carbonio sono distribuiti in modo eterogeneo. Volendo stabilire un grossolano parallelismo con i pigmenti animali, possiamo dire che i gialli carotenoidi, la rossa emoglobina, i violetti echinocromi, tanto per citarne alcuni, appartengono al « tipo diamante », mentre la melanina appartiene al « tipo carbone coke ».

[5] Il termine molecola o macromolecola non può avere il significato tradizionale ma quello di particella, granulo, etc.

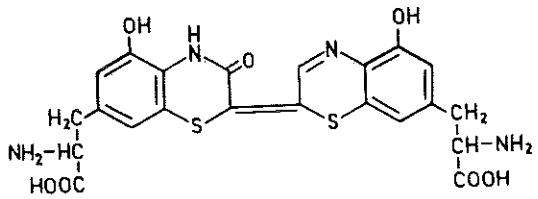
[6] È probabile che alcune forme cancerogene della pelle insorgano per interazione fra radicali liberi e gli acidi nucleici.

[7] Poiché non è possibile ancora una chiara nomenclatura su di una base chimica di questi pigmenti manteniamo la vecchia definizione e classifica.

[8] MINALE L., FATTORUSSO E., CIMINO G., DE STEFANO S. e NICOLAUS R. A., Gazz. Chim. Ital., **99**, 431 (1969).
NICOLAUS R. A., PROTA G., SANTACROCE C., SCHERILLO G. e SICA D., Gazz. Chim. Ital., **99**, 323 (1969).

NICOLAUS R. A., « The Nature of Mammalian Colors », Chim. Ind., **54**, 427 (1972).
MISURACA G., NICOLAUS R. A., PROTA G. e GHIARA G., Experientia, **25**, 920 (1969).

[9] Un capello rosso può anche essere distinto da uno nero per riscaldamento con acido cloridrico: nel primo caso il liquido non si colora, mentre nel secondo si ha una soluzione rossa o viola. La colorazione che si osserva è dovuta alla formazione del pigmento:



che si origina da quello giallo-arancio per perdita di un carbossile. Questo esperimento ed altri, basati su dati chimici, rendono possibile, per la prima volta, di stabilire quando un pelo sia veramente rosso. Una non equivocabile definizione del pelo rosso, offerta dalla chimica, sarà di prezioso ausilio alla genetica e alla medicina legale.

[10] Colorazioni ottenute con succhi vegetali estratti dalla crocifera *Isatis tinctoria*.

[11] Esperimenti inediti.

[12] FATTORUSSO E. et al., Esaminando i pigmenti rosso-bruni presenti nelle penne di fagiani, pernici, piccioni, polli di razza Rhode Island, nei peli di coniglio, di capra e nei capelli umani rossi hanno trovato che essi sono costituiti interamente da gallofeomelanine. I peli di alcune capre e pecore brune contengono solo eumelanine, mentre i peli del capriolo contengono eumelanine e gallofeomelanine. (Gazz. Chim. Ital., **100**, 452 (1970).

[13] COTT H. B., *Adaptive Coloration in Animals*, Methuen London (1966).

[14] Comunicazione privata del prof. A. Quilico, Politecnico di Milano.

[15] Differente per la posizione di un doppio legame.

[16] Purine come l'adenina si formano a temperature relativamente basse da una miscela di acido cianidrico, ammoniaca e acqua, o per azione di scariche elettriche in recipienti contenenti metano, ammoniaca, acqua. Data la relazione esistente fra purine e pterine si può supporre che anche questi pigmenti si siano formati sulla terra, come le porfirine, prima che la materia venisse organizzata in catene metaboliche.

[17] Comunicazione privata di Lord A. Todd, Cambridge.

[18] PANIZZI L. e NICOLAUS R. A., Gazz. Chim. Ital., **82**, 435 (1952).
NICOLAUS R. A., « Biogenesis of Melanins », Ed. Idelson - Napoli (1962).
NICOLAUS R. A. e CAGLIOTI L., Ric. Sci., **27**, 113 (1957).
PROTA G., D'AGOSTINO M. e MISURACA G., J. Chem. Soc. (C), 1614 (1972).

[19] CARIELLO L., CRESCENZI S., PROTA G., GIORDANO F. e MAZZARELLA L., Chem. Comm., **99** (1973).
CARIELLO L., CRESCENZI S., PROTA G., CAPASSO S., GIORDANO F. e MAZZARELLA L., Tetrahedron, **30**, 3281 (1974).
CARIELLO L., CRESCENZI S., PROTA G. e ZANETTI L., Experientia, **30**, 849 (1974).
CARIELLO L., CRESCENZI S., PROTA G. e ZANETTI L., Tetrahedron, **30**, 3611 (1974).
CARIELLO L., CRESCENZI S., PROTA G. e ZANETTI L., Tetrahedron, **30**, 4191 (1974).

Analisi elettroforetica di proteine solubili durante l'ontogenesi di *Drosophila melanogaster*

Nota di GIOVANNI PARISI e ANNA RITA FRANCO *
presentata dal socio ordinario BALDASSARRE DE LERMA

(Adunanza dell'8 novembre 1975)

RIASSUNTO. — Gli autori descrivono le variazioni dei tracciati elettroforetici di alcune proteine solubili di *Drosophila melanogaster* nel corso dell'ontogenesi, evidenziate con nero anilina. Saggi specifici sono stati eseguiti per le lipoproteine, per le α e β-esterasi, per l'alcool deidrogenasi, per l'ottanolo deidrogenasi e per l'aldeide ossidasi. I risultati ottenuti vengono discussi.

SUMMARY. — The authors describe the variations of electrophoretic patterns of some soluble proteins in *Drosophila melanogaster*, evidenced with aniline black during ontogenesis. Specific assays have been made for the lipoproteins, α and β-esterases, alcohol dehydrogenase, octanol dehydrogenase and aldehyde oxidase. The results have been discussed in the light of available literature.

Tra i problemi più interessanti della Biologia, ci sono certamente quelli connessi con l'ontogenesi: ora, se da un punto di vista morfologico, lo sviluppo degli eucarioti è abbastanza conosciuto, ben poco si conosce sui meccanismi biochimici che lo determinano e sulla loro regolazione.

Un approccio a questo problema può essere rappresentato dallo studio delle variazioni di una o più classi di proteine che si verificano durante lo sviluppo e che possono essere messe in evidenza con la tecnica elettroforetica.

I notevoli cambiamenti di forma che si verificano durante lo sviluppo degli insetti olometaboli, ne fanno un materiale biologico particolarmente adatto a questo tipo di ricerche: in effetti molti ricercatori hanno seguito questa logica ed una rassegna sui primi risultati ottenuti è stata realizzata da CHEN, P. S. nel 1966 [1]. Da allora gli

* Laboratorio di Zoofisiologia, Istituto di Zoologia dell'Università di Napoli.

studi sono continuati e misure quantitative e qualitative del contenuto proteico a vari stadi di sviluppo sono state eseguite su vari insetti sia considerando le proteine dell'intero animale, sia seguendo più specificamente le proteine di un singolo organo. Variazioni dei tracciati elettroforetici delle proteine solubili derivate da estratti totali, sono state eseguite in *Ostrinia nubilalis* [2], in *Sarcophaga bullata* [3] e nel *Bombus terrestris* [4]. Variazioni quantitative e qualitative dei tracciati elettroforetici dell'emolinfa, sono state determinate in *Plodia interpunctella* [5], in *Pieris brassica* [6, 7], in *Calliphora eritrocephala* [8], in *Manduca sexta* [9] ed in *Chironomus pallidivitatus* [10]. Variazioni sono state determinate anche per le proteine ribosomiali [11], per le proteine della cuticola, come è stato visto in *Galleria mellonella* [12], e per le proteine del corpo grasso, come è stato visto in *Diatraea grandiosella* [13] ed in *Ostrinia nubilalis* [2].

Una difficoltà, non facile da superare, in questo tipo di ricerca, è la impossibilità di paragonare tra loro i risultati ottenuti da ricercatori diversi e questo per vari motivi tra cui l'eterogenità del materiale di studio e le differenze nella tecnica sperimentale usata; da qui la necessità di concentrare gli studi, se non sulla stessa specie animale, su specie sistematicamente vicine preferibilmente dello stesso genere, e di adoperare tecniche che portino a risultati tra loro confrontabili.

L'insetto che fino a questo momento si conosce meglio dal punto di vista genetico e biochimico, è la *Drosophila melanogaster* che sta diventando, quindi, il materiale d'elezione per gli studi sul differenziamento biochimico.

Gli studi condotti sino ad ora sulla drosofila seguono due indirizzi completamente diversi: o analizzano, utilizzando coloranti aspecifici, le variazioni proteiche totali, oppure quelle di una singola funzione enzimatica o di una singola classe di proteine.

Nel primo filone di ricerca si inseriscono i lavori di PASTEUR, N. [14] e di PAPPAS, P. W. e RODRICK, G. E. [15] sulle proteine solubili, di CHEN, P. S. [16] e di BOYD, J. e coll. [17] sulle proteine dell'emolinfa, di ROBERTS, D. B. [18] sugli antigeni, di OLIVER, D. e CHALKLEY, R. [19] sulle proteine istoniche e di LAMBERTSON, A. G. [20, 21] sulle proteine ribosomiali.

Per il secondo indirizzo vi è una bibliografia molto più vasta. Tali studi hanno portato ad un primo risultato molto interessante: molte funzioni enzimatiche sono caratterizzate da isoenzimi stadio specifici; è il caso della glicerofosfato deidrogenasi [22], della lattico deidrogenasi [23] e della malico deidrogenasi [24] e, tra gli enzimi aspecifici, delle esochinasi [25], delle fosfatasi sia acide [26] che alcaline [27, 28, 29, 30, 31] e delle esterasi [32].

Una rassegna su questi lavori è stata realizzata da noi [33] mentre a WAGNER, R. P. e SELANDER, R. K. [34] si deve una discussione sui possibili ruoli degli isoenzimi stadio specifici negli insetti.

Se il primo approccio al problema ha il merito di dare una panoramica generale dei principali cambiamenti che si verificano durante l'ontogenesi, ha il difetto di essere troppo generico, di non evidenziare le eventuali corrispondenze tra le variazioni dei tracciati osservati e la fisiologia dell'insetto e di non dare dei risultati confrontabili con quelli di altri ricercatori. Il secondo approccio, d'altra parte, nella maggior parte dei casi, non consente di stabilire una relazione con le grandi modificazioni morfologiche dello sviluppo.

A causa di queste difficoltà nell'interpretazione dei dati sperimentali riportati, abbiamo iniziato una ricerca tendente a porre in diretta relazione le variazioni riscontrate nei tracciati elettroforetici con le variazioni di ben determinate classi di proteine. Sono stati seguiti due diversi indirizzi di ricerca: il primo tendente a chiarire la natura delle grosse variazioni registrate nei tracciati elettroforetici degli stadi di sviluppo considerati, il secondo tendente ad evidenziare per ben determinati enzimi, la presenza di isoenzimi e le loro eventuali fluttuazioni con l'età dell'insetto.

MATERIALI E METODI

Per le nostre ricerche sono state utilizzate *Drosophile melanogaster*, ceppo CANTON, R., allevate su un terreno di coltura realizzato secondo KELLER, E. C. e GLASSMAN, E. [35] con l'aggiunta dello 0,7 % di nipagina, a 25° C e con fotoperiodo di 12 ore.

La tecnica elettroforetica usata è stata messa a punto da PARISI, G. e coll. [36] con alcune modifiche per quanto riguarda la preparazione degli estratti proteici.

Gli estratti proteici degli adulti del 1° e del 10° giorno dopo lo sfarfallamento erano preparati omogenizzando 70 drosofile in 1,7 ml di F. L'omogenato veniva centrifugato a 1.000 g per 10 minuti. A 1,2 ml di questa soluzione venivano aggiunti 0,3 ml di B, 0,3 ml di D e 0,3 ml di E. In ogni tubo per elettroforesi, già approntato con il separeting e lo stacking gel, venivano posti, al di sopra di questo ultimo, 0,3 ml della soluzione precedentemente preparata e si lasciava polimerizzare fotochimicamente per 40 minuti.

Gli estratti proteici delle larve terzo stadio, delle farate pupe e dei farati adulti [37] sono stati preparati omogenizzando 60 individui in 1,7 ml di F e poi procedendo come per gli adulti del primo e decimo giorno dopo lo sfarfallamento.

Le concentrazioni proteiche così ottenute erano troppo basse per mettere bene in evidenza le lipoproteine e le esterasi. Per questi due saggi, gli estratti proteici sono stati realizzati omogenizzando rispettivamente 70 larve, 70 farate pupe, 70 farati adulti e 70 adulti primo giorno dopo lo sfarfallamento in 1 ml di F e procedendo poi come precedentemente descritto.

Le elettroforesi erano condotte a 0° C; l'apparecchio era predisposto per permettere l'esecuzione contemporanea di 12 corse elettroforetiche, pertanto si è avuto l'accortezza di riservare tre tubi per ogni campione esaminato in modo da rendersi indipendenti dagli errori strumentali.

La colorazione aspecifica delle proteine è stata realizzata col nero anilina come descritto da PARISI, G. e coll. [36]; la colorazione delle lipoproteine col PONCEAU, S. è stata realizzata secondo il metodo proposto da PAPPAS, P. W. e RODRICK, G. E. [23]; il metodo colorimetrico usato per mettere in evidenza le esterasi, è quello messo a punto da WRIGHT, T. R. F. [38]; il metodo colorimetrico usato per mettere in evidenza l'aldeide ossidasi è quello messo a punto da DICKINSON, W. J. [39]. Per mettere in evidenza l'α-glutamato deidrogenasi, la lattico deidrogenasi, l'alcool deidrogenasi, l'ottanolo deidrogenasi e l'isocitrico deidrogenasi abbiamo adoperato il metodo proposto da SIMS, M. [40] con alcune modifiche; per la xantina deidrogenasi abbiamo adoperato il metodo proposto da YEN, T. T. T. e GLASSMAN, E. [41].

Colorazione delle lipoproteine

Dopo l'elettroforesi i gel erano posti per un'ora in una soluzione al 12 % di acido tricloroacetico. Erano, quindi, sciacquati con acqua distillata e posti per 24 ore in una soluzione 0,5 % di Ponceau S. La decolorazione era fatta per diffusione contro acido acetico 7 % per 24 ore.

Colorazioni delle esterasi

Dopo l'elettroforesi, i gel erano posti per un'ora in una soluzione di acido borico 0,5 M a 4° C, per abbassare il pH del gel e successivamente in 50 ml della soluzione colorante per 30 minuti a 37° C al buio.

Soluzione colorante: a 100 ml di tampone fosfato (pH = 6,5) si aggiungevano 300 mg di fast blue B. B. e 30 mg di α o β-naftilacetato a seconda del tipo di esterasi che si voleva evidenziare.

Colorazione dell'aldeide ossidasi e delle deidrogenasi

Dopo l'elettroforesi, i gel erano posti ad incubare per 30 minuti a 37° C al buio, in 25 ml di soluzione colorante.

Soluzione colorante per l'aldeide ossidasi: a 20 ml di un tampone tris/HCl 0,2 M e 0,001 M di acido etilendiaminotetracetico sale sodico (pH = 8, 9) si aggiungevano 25 mg di nitro blu tetrazolio, 1 mg di fenazina metasolfato e 0,1 ml di benzaldeide.

Soluzione colorante per l'alcool deidrogenasi e per l'ottanolo deidrogenasi: a 25 ml di una soluzione 5×10^{-2} M di fostato sodico bibasico (pH = 7) $9{,}1 \times 10^{-4}$ M NAD^+, $1{,}63 \times 10^{-4}$ M fenazina metasolfato e $4{,}3 \times 10^{-4}$ M nitro blu tetrazolio, si aggiungevano 2,4 ml di alcool etilico assoluto o di alcool ottilico.

Soluzione colorante per l'α-glutamato deidrogenasi: a 100 ml di un tampone fosfato 0,110 M (pH = 8,5) si aggiungevano 99,5 mg di NAD^+, 5 mg di fenazina metasolfato, 35 mg di nitro blu tetrazolio e 4,45 g di glutamato sodico.

Soluzione colorante per l'isocitrico deidrogenasi: consisteva di un tampone tris 0,18 M (pH = 7,7) 7×10^{-3} M isocitrato trisodico, $2{,}6 \times 10^{-4}$ M di $NADP^+$, 1,6 M $MnCl_2$, $4{,}6 \times 10^{-4}$ M fenazina metasolfato e $2{,}1 \times 10^{-4}$ M di nitro blu tetrazolio.

Soluzione colorante per la lattico deidrogenasi: a 100 ml di un tampone $2{,}5 \times 10^{-2}$ M di tris (pH = 7,3) si aggiungevano 0,25 gr di lattato di litio, 5 mg di fenazina metasolfato, 25 mg di nitro blu tetrazolio e 15 mg di NAD^+.

Soluzione colorante per la xantina deidrogenasi: a 100 ml di un tampone $2{,}5 \times 10^{-2}$ M di tris (pH = 8), si aggiungevano 30 mg di NAD^+, 32 mg di nitro blu tetrazolio, 8 mg di fenazina metasolfato e 13 mg di ipoxantina.

Risultati e discussione

La figura 1, riassume i principali cambiamenti nei tracciati elettroforetici delle proteine solubili colorate con nero di anilina che si verificano nel corso dell'ontogenesi di *Drosophila melanogaster*.

Le proteine messe in evidenza migrano tutte verso l'anodo ed i loro pesi molecolari sono compresi tra 30.000 e 300.000 dalton, in conseguenza della particolare tecnica elettroforetica utilizzata.

La curva 1. è il tracciato densitometrico relativo alle proteine solubili delle larve 3° stadio; la curva 2. è relativa a quelle delle farate pupe; la curva 3. è relativa a quelle dei farati adulti e la curva 4. agli adulti del 1° e del 10° giorno dopo lo sfarfallamento.

Un primo dato ottenuto è che non ci sono cambiamenti significativi tra le proteine solubili degli insetti del 1° e del 10° giorno dopo lo sfarfallamento mentre i passaggi di stadio sono in genere accompagnati da profonde modificazioni qualitative e quantitative delle proteine solubili.

La regione del tracciato più conservativa è la regione II, nella quale si verificano solo variazioni nella concentrazione delle bande.

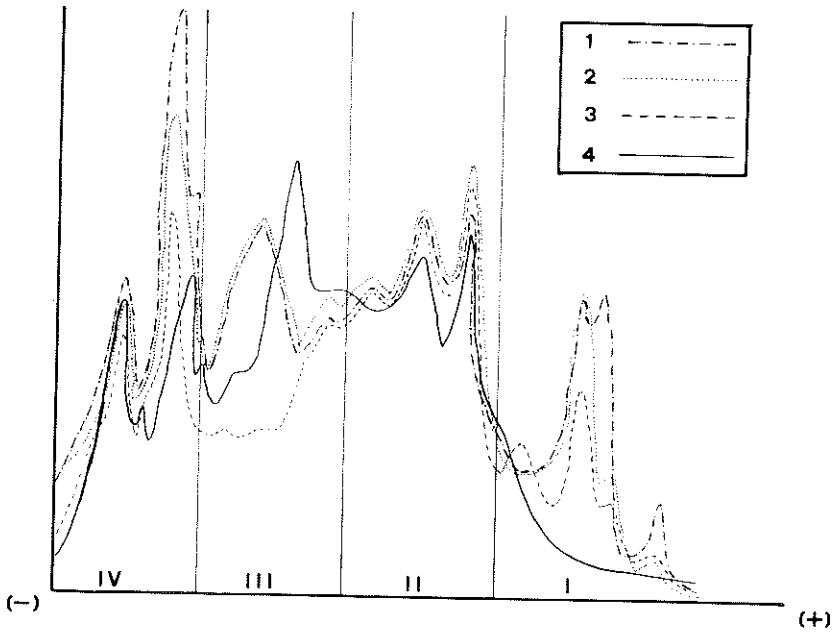


FIG. 1. - Curve densitometriche di tracciati elettroforetici

Nella regione I, è evidente una banda caratteristica del 3° stadio larvale; le proteine in questa regione subiscono una variazione progressiva di concentrazione nel passaggio ad uno stadio successivo fino alla quasi assenza di bande elettroforetiche negli adulti.

La composizione della regione III si mantiene relativamente costante nel passaggio da larve 3° stadio a farate pupe; la concentrazione diminuisce drasticamente nei farati adulti ed una nuova banda compare negli adulti con una velocità elettroforetica maggiore rispetto a quella delle larve.

La regione IV subisce essenzialmente delle grandi variazioni quantitative; la concentrazione della penultima banda, decisamente la più concentrata nello stadio larvale, si abbassa progressivamente fino a raggiungere una concentrazione media nell'adulto dopo lo sfarfallamento.

Nella tabella I sono riportati i risultati globali per i saggi enzimatici eseguiti sui gel. Sono risultati positivi i saggi per l'aldeide ossidasi, per l'alcool deidrogenasi, per l'ottanolo deidrogenasi e per le esterasi.

TAB. I

Saggi enzimatici eseguiti su gel

ENZIMA	Larve 3° stadio	Farate pupe	Farati adulti	Adulti 1° g. d. s.
Alcool DH.	+	+	+	+
Ottanolo DH.	+	+	+	+
Glutamato DH.	+	+	+	+
Isocitrico DH.	–	–	–	–
Lattico DH.	–	–	–	–
α-Esterasi	–	–	–	–
β-Esterasi	+	+	+	+
Aldeide ossidasi	+	+	+	+

Tranne che per le esterasi, non sono stati messi in evidenza isoenzimi stadio specifici.

L'aldeide ossidasi, l'alcool deidrogenasi e l'ottanolo deidrogenasi sono compresi nella parte finale del gel, regione IV del tracciato densitometrico. Rispetto a questi tre enzimi, il nostro ceppo presenta il fenomeno del polimorfismo: per ciascuno di questi, infatti, sono presenti alloenzimi.

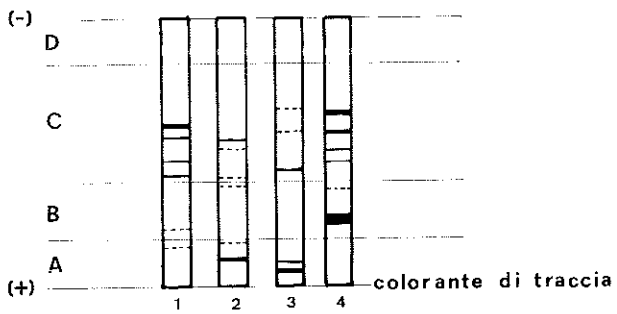


FIG. 2. - α-Esterasi

I tracciati elettroforetici per le α-esterasi, Fig. 2, presentano notevoli differenze tra i vari stadi che non sono facili da interpretare per la possibile presenza di alloenzimi. Un altro inconveniente è rappresentato dall'impossibilità di identificare le bande delle singole esterasi:

tutti i lavori di mappatura delle esterasi, infatti, sono stati realizzati con elettroforesi su gel di amido e non è possibile l'estrapolazione delle mobilità elettroforetiche relative.

In complesso, col nostro sistema elettroforetico, si identificano 14 α-esterasi con differenti mobilità elettroforetiche; per ogni stadio, però, non ne sono mai presenti più di 7.

Abbastanza interessante è la presenza di una banda con bassa mobilità elettroforetica e che rimane all'inizio del gel; questa banda si colora sia per le α che per le β esterasi e la sua presenza è stata rivelata anche da PASTEUR, N. e KASTRITSIS, C. D. [26] in *Drosophila pseudoobscura.*

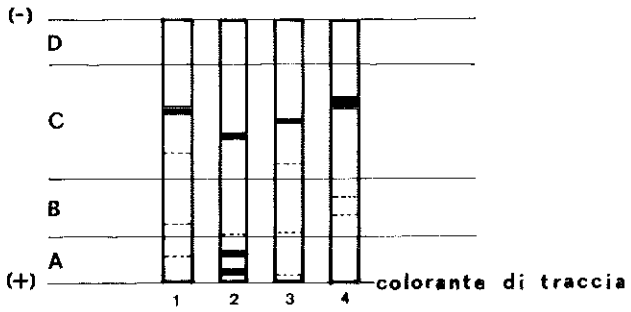


FIG. 3. - β-Esterasi

In *Drosophila melanogaster,* contrariamente a quanto rilevato da PASTEUR, N. e KASTRITSIS, C. D. [26] in *Drosophila pseudoobscura,* abbiamo messo in evidenza degli isoenzimi stadio specifici per le β-esterasi, Fig. 3. In complesso, col nostro sistema elettroforetico, abbiamo messo in evidenza 9 attività β-esterasi che, però, non sono mai presenti più di 5 per ogni stadio.

I tracciati elettroforetici relativi all'alcool deidrogenasi, all'aldeide ossidasi ed all'ottanolo deidrogenasi sono riportati rispettivamente nelle Figure 4, 5 e 6.

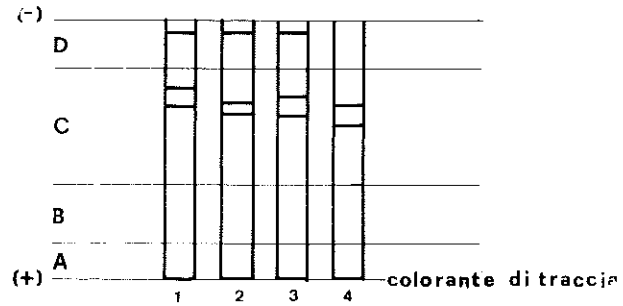


FIG. 4. - Alcool deidrogenasi

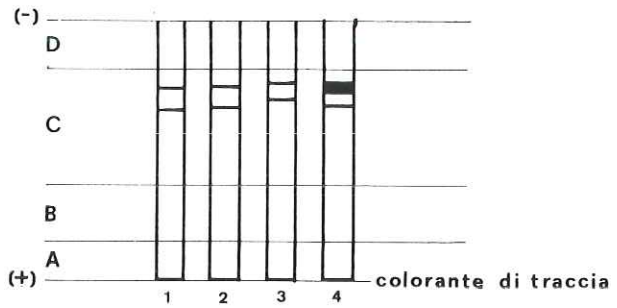


FIG. 5. - Aldeide ossidasi

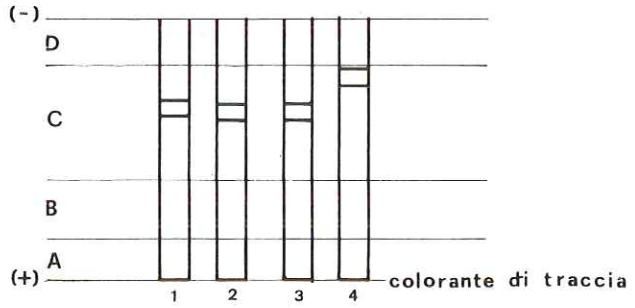


FIG. 6. - Ottanolo deidrogenasi

Abbiamo colorato, inoltre, i gel, con un colorante aspecifico, il Ponceau S., che mette in evidenza le lipoproteine, Fig. 7: la concentrazione delle lipoproteine ed il numero di bande messe in evidenza con il nostro sistema elettroforetico, decresce rapidamente con l'età. Si passa dalle larve 3° stadio, in cui sono presenti 10 bande, alle farate pupe, in cui ne sono presenti sempre 10 alcune delle quali, però, con diversa mobilità elettroforetica. Nei farati adulti sono presenti, invece,

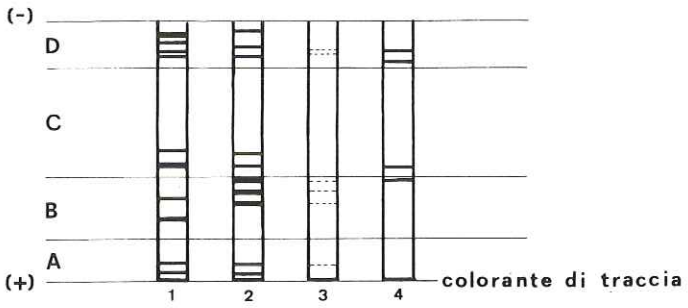


FIG. 7. - Lipoproteine

6 bande che negli adulti 1° giorno dopo lo sfarfallamento si riducono a 4. Per due sole bande della regione catodica del gel, la presenza è costante per tutto lo sviluppo dell'insetto e si verifica solo una diminuzione di concentrazione nei farati adulti. La scomparsa delle bande colorate con nero anilina nella regione I, potrebbe essere causata dalla scomparsa delle lipoproteine della regione A ad essa corrispondente.

Il presente lavoro, ovviamente, rappresenta la necessaria premessa per un più approfondito esame del complesso problema della regolazione della espressione genica nel corso dell'ontogenesi, problema sul quale stiamo ora indagando.

BIBLIOGRAFIA

[1] Chen P. S., *Amino acid and protein metabolism in insect physiology*, Advances in Insect Physiology, pp. 53-114 (1966).

[2] Chippendale G. M. and Beck S. D., *Fat body proteins of Ostrinia nubilalis during diapause and prepupal differentiation*, J. Insect Physiol., **13**, pp. 995-1005 (1967).

[3] Goldberg E., Whitten J. and Lawrence G., *I: Changes in soluble proteins during foot-pad development in Sarcophaga bullata*. J. Insect Physiol., **15**, pp. 409-420 (1969).

[4] Röscler I. und Röscler P. F., *Änderunger im muster der haemolymph proteine von adulten königinnen der hummerlart Bombus terrestris*, J. Insect Physiol., **19**, pp. 1741-1751 (1973).

[5] Pentz S. and Kling H., *Protein pattern in the Haemolymph of the pharate pupa of Plodia interpunctella (Lepidoptera) in different age groups*, J. Insect Physiol., **18**, pp. 2277-2283 (1972).

[6] Chippendale G. M. and Kilby B. A., *Relationship between proteins of the haemolynph and fat body during development of Pieris brassicae*. J. Insect Physiol., **15**, pp. 905-926 (1969).

[7] Van Der Geest, L. P. S. and Borgsteed F. H. M., *Protein changes in the haemolymph of Pieris brassicae during the last larval instars and the beginning of the pupal stage*, J. Insect Physiol., **15**, pp. 1687-1694 (1969).

[8] Mum E. A. and Greville G. D., *The soluble proteins of developing Calliphora erytrocephala, particullarly calliphorin, and similar proteins in other insect*, J. Insect Physiol., **15**, pp. 1935-1950 (1969).

[9] Greene J. R., Jr. and Dahlman D. L., *Haemolymph protein patterns in developing tobacco hornworm larvae*, J. Insect Physiol., **20**, pp. 1241-1250 (1973).

[10] Schin K., Poluhovich J. J., Gamo T. and Lanfer H., *Degradation of haemolymph in Chironomus during metamorphosis*. J. Insect Physiol., **20**, pp. 561-571 (1974).

[11] Sekeri R. E., Sekeris C. E. and Karlson P., *Protein synthesis in subcellular fractions of the blowfly during developmental stages*, J. Insect Physiol., **14**, pp. 425 (1968).

[12] Srivastava R. P., *The amino acid composition of cuticolar proteins of different development stages of Galleria mellonella*, J. Insect Physiol., **17**, pp. 189 (1971).

[13] Chippendale G. M., *Metamorphic changes in fat body proteins of the southwestern corn borer, Diatraea grandiosella*, J. Insect Physiol., **16**, p. 105 (1969).

[14] Pasteur N., *Developmental studies in Drosophila. X Developmental electrophoretic* pattern *of salivary gland unspecific proteins in* Drosophila pallidipennis, Experientia, **28**, p. 1108 (1972).

[15] PAPPAS P. W. and RODRICK G. E., *An electrophoretic study of lactate dehydrogenase isoenzymes, proteins and lipoproteins of* Drosophila melanogaster *larvae, pupae and adults,* Comp. Biochem. Physiol. B, **40**, pp. 709-713 (1971).

[16] CHEN P. S., *Elektrophoretische bestimmung des proteingehaltes im blut normaler und letaler* (ltr) *larven von* Drosophila melanogaster, Rev. Suisse Zool., **63**, p. 216 (1956).

[17] BOYD J. and MITCHELL H., *Turnover of the haemolymph proteins of* Drosophila melanogaster, Ach. Biochem. Biophysic., **117**, p. 310 (1966).

[18] ROBERTS D. B., *Antigens of developing* Drosophila melanogaster, Nature, **233**, p. 394 (1971).

[19] OLIVER D. and CHALKLEY R., *An electrophoretic analisys of* Drosophila *histones: II Comparison of larval and adult histone patterns in two species of* Drosophila, Exp. Cell. Res., **73**, p. 303 (1972).

[20] LAMBERTSON A. G., *The ribosomal proteins of* Drosophila melanogaster, Mol. Gen. Genet., **118**, p. 215 (1972).

[21] LAMBERTSON A. G., *The ribosomal proteins of* Drosophila melanogaster. *II Further studies on the ribosomal protein composition during development,* Mol. Gen. Genet., **128**, p. 241 (1974).

[22] WRIGHT D. A. and SHAW C. R., *Genetic control of α-glycerophosphate dehydrogenase isozymes in Drosophila,* Genetics, **60**, pp. 239-240 (1968).

[23] PAPPAS P. W. and RODRICK G. E., *An electrophoretic study of lactate dehydrogenase isoenzymes, proteins and lipoprotein of* Drosophila melanogaster *larvae, pupae and adults,* Comp. Biochem. Physiol., **40**, pp. 709-713 (1971).

[24] O' BRIEN S. J., *Comparative analysis of malate dehydrogenase of* Drosophila melanogaster, Biochem. Genet., **10**, pp. 191-205 (1973).

[25] MADHAVAN K., FOX D. und URSPRUNG H., *Development genetics of hexokinase in* Drosophila melanogaster, J. Insect Physiol., **18**, p. 1523 (1972).

[26] PASTEUR N. and KASTRITSIS C. D., *Acid phosphatase, esterase and other proteins in organs and whole-fly homogenates during development of Drosophila pseudoobscura,* Dev. Biol., **26**, pp. 525-536 (1971).

[27] JOHNSON F. M., *Developmental differences of alkaline phosphatase zymograms from* Drosophila melanogaster *and Drosophila ananassae,* Nature, **212**, pp. 843-844 (1966).

[28] JOHNSON F. M. and SCAFFER P. D., *Isoenzyme variability in species of the genus* Drosophila. *VII Genotype-environment relations in population of* Drosophila melanogaster *from eastern United States,* Biochem. Genet., **10**, p. 149 (1973).

[29] SCHNEIDERMAN H., *Alkaline phosphatase relationships in* Drosophila, Nature, **216**, pp. 604-605.

[30] SCHNEIDERMAN H., JOUNG W. J. and CHILDS B., *Patterns of alkaline phosphatase in developing* Drosophila, Science, **152**, p. 261 (1966).

[31] WALLIS B. B. and FOX A. S., *Genetic and developmental relationships between two alkaline phosphatase in* Drosophila melanogaster, Biochem. Genet., **2**, p. 141 (1968).

[32] BERGER E. and CANTOR R., *The esterases of Drosophila. I The anodal esterases and their possible role in eclosion.* Develop. Biol., **33**, pp. 48-55 (1973).

[33] PARISI G. e FRANCO A. R., *Proteine in* Drosophila melanogaster, Boll. Soc. Nat. Napoli, in corso di stampa, LXXXIV (1975).

[34] WAGNER R. P. and SELANDER R. K., *Isozymes in insect and their significance,* Annual Review of Entomology, **19**, pp. 117-138 (1974).

[35] KELLER E. C. and GLASSMAN E., *Phenocopies of the ma-l and ry mutants of Drosophila melanogaster: Inibition in vivo of xanthine dehydrogenase by 4-hydroxypyrazolo (3,4-d) pyrimidine,* Nature, **208**, p. 202 (1965).

[36] PARISI G., and D'AMORA D., *Disco elettroforesi di proteine solubili in* Drosophila melanogaster, Boll. Soc. Nat. Napoli, Vol. LXXXII, pp. 77-83 (1973).

[37] HINTON H. E., *Spiracular gills,* Advances in Insect Physiol, pp. 65-159 (1968).

[38] WRIGHT T. R. F., *Genetics of an esterase in* Drosophila melanogaster, *Genetics,* **48**, pp. 787-801 (1963).

[39] DICKINSON W. J., *The genetics of aldehyde oxidase in* Drosophila melanogaster, Genetics, **66**, p. 487 (1971).

[40] SIMS M., *Methods for detection of enzymatic activity after electrophoresis on polyacrylamide gel in* Drosophila *species,* Nature, **207**, pp. 757-759 (1965).

[41] YEN T. T. T. and GLASSMAN E., *Electrophoretic variants of xanthine dehydrogenase in Drosophila melanogaster,* Genetics, **52**, pp. 977-981 (1965).

Comportamento geochimico di alcuni elementi in tracce nelle mineralizzazioni manganesifere del Messiniano di Serra d'Aiello (Catena Costiera calabra)

Nota di M. Boni *, G. Rolandi ** e D. Stanzione **

presentata dal socio ordinario Antonio Scherillo

(Adunanza dell'8 novembre 1975)

Riassunto. — Nel quadro delle ricerche in corso sulle mineralizzazioni manganesifere nel Messiniano della Calabria, è stato effettuato uno studio sul comportamento geochimico di alcuni elementi minori ed in tracce della serie mineralizzata di Serra d'Aiello, in rapporto all'andamento degli elementi maggiori, fra i quali sono stati messi in evidenza essenzialmente ferro e manganese.

Dall'esame dei dati analitici si evidenzia un'origine probabilmente detritica per Li, Rb, Ba e forse Sr, mentre Zn, Pb e Cu mostrano arricchimenti particolari soprattutto nei livelli in cui risulta prevalente la componente argillosa e marnosa con abbondante sostanza organica. Per Co e Ni è stato possibile osservare un comportamento particolare, dal momento che questi due elementi, più di tutti gli altri tendono a seguire (con poche eccezioni), i tenori percentuali delle mineralizzazioni ferro-manganesifere.

Si fa notare come, nel caso del cobalto, sembra esistere una coerenza maggiore fra quest'ultimo elemento e il manganese, invece che con il ferro, come sarebbe stato più logico attendersi. Tale comportamento è probabilmente da ascrivere alla presenza di fasi manganesifere notevolmente ossidate a cui possono associarsi, come è già noto dalla letteratura, notevoli percentuali di cobalto.

Abstract. — During a study on manganese mineralization of Messinian age in Calabria (Southen Italy) has been investigated the geochemistry of some minor and trace elements in the Serra D'Aiello series.

The risults are: Li, Rb, Ba, and perhaps Sr are detritical, while Zn, Pb, and Cu are in major abundance in shales with organic matter; Co and Ni follow iron-manganese mineralization.

Cobalt follows manganese over iron. That probably is due to oxidized manganese.

* Istituto di Geologia e Geofisica dell'Università di Napoli.
** Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli.

Introduzione

Nel Miocene superiore (Messiniano) del versante tirrenico della Catena Costiera calabra (zona di Amantea), sono stati individuati notevoli arricchimenti di minerali manganesiferi in una serie sedimentaria costituita da alternanze arenaceo-argilloso-diatomitiche, il cui spessore totale è di circa 30 metri [1].

In un recente lavoro (Boni e Rolandi 1975), al quale si rimanda anche per un più dettagliato quadro geologico stratigrafico, vengono prese in esame le caratteristiche di tali mineralizzazioni, sia dal punto di vista sedimentologico che chimico-mineralogico, e discusse alcune probabili ipotesi genetiche e deposizionali.

Le fasi manganesifere presenti sono risultate essere essenzialmente birnessite (manganite a 7 Å) e todorokite (manganite a 10 Å), oltre ad altri ossidi e idrossidi manganesiferi a struttura criptocristallina. Soprattutto dagli studi effettuati sui campioni in sezione sottile è apparsa comunque evidente l'origine diagenetica di tali minerali, che si presentano spesso con strutture pseudomorfiche e dendriformi, formatesi in seguito alla precipitazione dalle acque interstiziali delle fasi ferro-manganesifere mobilizzatesi all'interno dei sedimenti.

Per quanto riguarda l'origine del manganese ed i suoi meccanismi deposizionali nel bacino in esame (ambiente euxinico a fauna bentonica scarsa, plankton oligotipico, presenza di pirite e di residui non scheletrici di organismi nectonici), sono stati presi in considerazione diversi fattori, come la ciclica proliferazione del fitoplankton a diatomee, (che avrebbe modificato in senso alcalino il pH delle acque superficiali, facilitando così la ossidazione e la precipitazione degli ioni Mn^{+2} arricchiti negli strati più profondi), le condizioni riducenti del fondo ed il probabile *upwelling* stagionale, i quali tutti avrebbero potuto contribuire al formarsi della mineralizzazione in oggetto.

È stata inoltre considerata probabile una connessione tra gli arricchimenti manganesiferi ed i fenomeni vulcanici evidenziati nelle serie messiniane da livelli cineritici presenti ad altezze variabili.

Scopo principale del presente lavoro è comunque lo studio, nell'ambito della serie mineralizzata, del comportamento geochimico degli elementi minori e in tracce, in rapporto all'andamento degli elementi maggiori e segnatamente delle percentuali di ferro e manganese.

[1] L'affioramento è stato segnalato da alcuni ricercatori dell'Istituto di Geologia e Geofisica di Napoli, che studiano la copertura altomiocenica della Calabria, nel programma Geodinamica, su tema Messiniano del C.N.R.

Mineralogia

È importante innanzitutto far notare come la serie oggetto del presente lavoro sia costituita da tre principali gruppi litologici: arenarie, argille e marne diatomitiche, i cui limiti non sono però rigorosamente definiti, potendosi presentare anche dei termini aventi caratteristiche comuni. Infatti, prescindendo dai livelli a mineralizzazione manganesifera prevalente, si rinvengono, oltre a campioni rigorosamente ascrivibili ad arenarie, argille e marne, anche altri del tipo peliti argillose, arenarie siltose, siltiti e marne a componente siltosa.

Nella tab. 1 vengono riportati i tipi litologici dei quali è stata effettuata la campionatura: accanto ad essi figurano la maggior parte delle specie mineralogiche presenti, corredate da simboli che ne indicano le relative abbondanze.

I termini di natura prevalentemente arenacea (1049a-1050a-1051a-1055-1058-1063-1070) presentano notevoli quantità di calcite (+ del 35 %), in parte costituente i gusci dei microorganismi presenti, in parte di natura detritica. Quest'ultimo tipo di origine è ascrivibile anche a gran parte degli altri costituenti i campioni sopracitati: larghissima diffusione ha la muscovite, il quarzo ed i plagioclasi, di natura prevalentemente acida, mentre percentuali maggiormente variabili si riscontrano per la clorite, la dolomite e, forse per una parte degli altri minerali argillosi.

Per quanto riguarda i termini litologici a granulometria molto sottile (1049b-1050b-1051b-1051c-1057-1059-1060-1062-1066) vi si può osservare tutta una gamma di variazioni nelle componenti mineralogiche, fra le quali sono presenti, oltre ai già citati minerali di chiara origine detritica, anche alcuni tipi di fillosilicati (montmorillonite, illite, *mixedlayer*) la cui natura autigena o detritica non è stata ancora chiaramente definita.

I campioni, infine, di natura prevalentemente marnosa e marnoso-diatomitica, ($1052_{(1)}$-1053-1056-$1061_{(1)}$-1065-1069) hanno come caratteristica alti quantitativi di calcite, quarzo essenzialmente microcristallino e percentuali variabili di minerali argillosi.

Fra i livelli di natura argillosa e argilloso-marnosa alcuni mostrano evidenze di residui organici non scheletrici del tipo pesci e piante (1053-1057-1060-$1061_{(1)}$-1069), la cui presenza, come si vedrà, è probabilmente evidenziata da significative percentuali di elementi minori, come ad esempio il rame, che si potrebbe supporre quindi legato in composti metallorganici.

Come già riscontrammo nel nostro precedente lavoro i minerali di manganese presenti nella serie in esame, oltre ad essere caratte-

TABELLA I

1070	arenaria silicea	C'' Q'' M' I' MT' CL' ML' F' D' CB''
1069	marna diatomotica mineralizzata	C''' MT'' Q' M' I' CL' F' Mn''
1068	concrezione manganesifera	B' T' M' Mn'''
1067	arenaria mineralizzata	B''' T'' M'' F'' Q' CL' MT' C' Mn''
1066	pelite argillosa mineralizzata	C'' MT''' M' I' ML' CL' D' B' Mn''
1065	marna argillosa mineralizzata	C'' Q' M'' I'' CL' MT' B' F' Mn''
1064	siltite	C'' Q'' M'' CL''' MT' D' F' I'
1063	arenaria siltosa	C''' Q''' M''' C'' MT' ML' I'' D''' F''' G'
1062	pelite argillosa	C'' M'' Q'' D' F' CL'' MT''' I' ML'
$1061_{(1)}$	argilla mineralizzata	B''' T'' M' I'' MT' Mn'''
$1061_{(2)}$	argilla marnosa (pesci)	C'' Q'' M'' CL' MT''' D' F' I' Mn'
1060	siltite (pesci)	C'' M''' Q'' F''' D' CL'' MT'' ML' I''
1059	pelite argillosa	C'' Q'' M'' I' MT'' CL'' F'D' I'
1058	arenaria siltosa	C''' Q'' M''' CL'' MT' ML' D''' F'' I'' G'
1057	pelite argillosa	C'' Q'' M'' CL'' MT'' ML' D' F' I'
1056	marna diatomitica	C'' Q'' M'' CL' MT'' ML' F' D' I'
1055	arenaria siltosa	C''' Q'' M''' F''' D'' I'' CL'' MT' ML'
1054	siltite mineralizzata	C'' Q' ML' CL' M'' MT' F' I' B' Mn''
1053	argilla marnosa (pesci)	C'' Q'' M'' F'' D' CL'' MT' ML' I'
$1052_{(2)}$	marna diatomitica mineralizzata	C''' Q'' M''' F''' D'' I'' CL'' MT' ML'
$1052_{(1)}$	argilla marnosa	C''' Q'' M'' I'' F' MT'' ML'' CL' Mn'
1051_c	siltite	C'' Q'' M'' CL' I' MT' ML' F' D'
1051_b	pelite argillosa	C'' Q'' M'' CL'' MT'' I'' F' D' ML'
1051_a	arenaria siltosa	C''' Q''' M''' D'' F'' CL'' I' MT' ML'
1050_b	pelite argillosa	C''' Q'' M'' CL'' MT' ML' F' D'
1050_a	arenaria siltosa	C''' Q''' M''' F'' D'' CL'' MT' ML' I'
1049_b	pelite argillosa	C''' M'' Q'' CL'' MT' ML' F' I''
1049_a	arenaria siltosa	C''' Q''' M''' D''' F'' CL' I'' ML'

C = calcite; CL = clorite; M = muscovite; Q = quarzo; I = illite; MT = montmoril; F = feldspato; D = dolomite; ML = mixed layer; G = goethite; B = birnessite; T = todorokite; Mn = manganese.

rizzati in fasi del tipo birnessite (Ca, Mg, Na, K). (Mn^{+4}, Mn^{+2}) $(O,OH)_2$ e todorokite (Mn, Ba, Ca, Mg) $Mn_3O_7.2H_2O$, si rinvengono anche sottoforma di composti criptocristallini, talché spesso la loro presenza è evidenziata dalle diffrattometrie solo in base agli alti valori del « noise » della traccia ed alle significative contrazioni dei picchi degli altri minerali presenti ($1052_{(1)}$-$1052_{(2)}$-1054-$1061_{(2)}$-1065-1066-1067-1068-1069).

Geochimica

a) Elementi maggiori.

Le analisi riportate in Tab. 2, rappresentative dell'intera campionatura, mettono in evidenza una variazione percentuale degli elementi maggiori che riflette le cicliche alternanze evidenziate dalla mineralogia, come già riscontrato in parte nel precedente lavoro.

Per quanto riguarda i valori di SiO_2, le sue variazioni, talora anche molto forti lungo la serie analizzata, non assumono caratteri particolarmente indicativi, data la vasta gamma dei minerali presenti in cui essa compare, sia libera, (quarzo, calcedonio, cristobalite), che combinata (essenzialmente in feldspati e fillosilicati).

Al_2O_3 mostra un prevedibile incremento nei termini a prevalente componente argillosa, mentre diminuisce in quelli più arenacei, dove è presente solo nelle muscoviti e nei feldspati.

I tenori riscontrati di Fe_2O_3 non subiscono invece forti variazioni, tranne che nei campioni ad alta concentrazione di manganese, con il quale il ferro mostra una notevole affinità.

MgO e CaO mostrano un andamento percentuale nettamente diverso; mentre MgO, che appare legato in prevalenza alla dolomite e alle cloriti, si stabilizza su valori pressoché costanti, CaO oscilla tra percentuali inferiori al 10 % ed altre superiori al 25 %. Tale variazione è evidenziata soprattutto dalla maggiore o minore presenza di $CaCO_3$.

Fra i metalli alcalini il sodio, tranne poche eccezioni, non si presenta particolarmente variabile, ed il potassio mette in evidenza una ancora maggiore regolarità nell'ambito della serie.

I valori del fosforo non forniscono apprezzabili indicazioni, essendo P_2O_5 distribuito lungo la serie in maniera quanto mai irregolare; esso si mostra svincolato sia da tipi litologici particolari, che (tranne in poche eccezioni), dagli arricchimenti manganesiferi.

MnO, i cui tenori massimi si rinvengono nelle parti superiori della serie, ha un andamento strettamente ciclico, rispecchiante la

TABELLA II

Campione	Valori %	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	MnO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O	P_2O_5	CO_2	$H_2O_{tot.}$	Somma	$CaCO_3$
1070		51.15	6.50	2.86	0.39	2.49	16.16	0.74	1.57	0.08	10.34	7.80	100.08	23.50
1069		32.44	7.77	6.60	10.27	2.99	16.46	0.73	2.04	0.16	11.0	9.03	99.49	25.0
1068		14.30	2.04	8.72	48.54	1.63	8.23	0.43	2.51	0.44	5.72	7.88	100.44	13.0
1067		21.20	1.27	5.50	42.60	1.98	9.00	0.68	3.08	0.28	6.38	8.62	100.59	14.50
1066		28.10	8.41	4.82	15.34	3.10	20.28	0.29	1.45	0.21	12.54	5.97	100.51	28.50
1065		34.06	10.96	5.92	7.23	3.00	16.31	0.77	2.03	0.14	11.44	7.78	99.64	26.0
1064		40.05	12.62	4.22	0.26	2.32	17.35	0.60	2.12	0.08	11.13	9.23	99.98	25.3
1063		29.40	6.50	3.12	0.73	3.0	28.0	0.95	2.50	0.21	21.12	5.16	100.69	48.0
1062		41.70	11.22	3.65	0.34	2.06	14.88	0.67	1.86	0.05	10.12	14.02	100.57	23.0
1061_2		24.46	2.80	8.02	36.15	2.17	9.04	0.67	3.37	0.21	2.64	10.89	100.42	6.0
1061_1		36.30	10.20	5.22	5.03	2.35	15.10	0.82	1.81	0.12	9.90	12.26	99.11	22.50
1060		39.01	13.0	6.01	0.26	2.92	15.67	1.08	2.19	0.09	9.06	10.36	99.65	20.60
1059		36.0	13.05	4.27	0.97	2.36	19.10	1.08	2.02	0.22	13.42	7.40	99.89	30.50
1058		28.50	7.0	3.32	2.22	2.56	28.67	1.24	1.32	0.24	20.24	5.19	100.50	46.0
1057		37.95	12.24	5.80	1.19	2.25	15.11	0.86	2.19	0.13	10.56	10.98	99.26	24.0
1056		38.60	11.60	6.65	0.59	2.36	17.13	0.87	2.68	0.89	12.98	5.08	99.43	29.50
1055		35.52	9.56	4.02	2.07	2.40	22.38	2.52	1.39	0.18	16.94	3.61	100.59	38.50
1054		30.70	6.50	6.22	14.20	1.93	14.90	5.07	1.97	0.17	11.0	7.37	100.03	25.0
1053		40.94	12.88	6.22	0.39	2.42	15.32	0.63	2.17	tr.	9.68	9.88	100.53	22.0
1052_2		25.0	7.58	6.40	17.04	2.20	19.80	0.59	1.80	0.27	14.78	5.22	100.68	33.50
1052_1		33.74	8.43	5.00	6.69	2.55	20.00	1.74	2.31	0.30	14.96	4.14	99.86	34.0
1051_c		34.18	10.56	5.57	0.96	2.44	16.96	0.56	2.09	0.21	12.87	14.16	100.56	29.25
1051_b		33.96	11.22	3.92	0.31	2.00	22.23	0.67	1.64	0.12	15.62	7.98	99.67	35.5
1051_a		30.06	8.30	3.93	0.81	2.02	26.86	0.88	1.47	0.06	19.36	5.46	99.21	44.0
1050_b		32.76	10.83	3.52	0.17	1.67	23.50	0.62	1.81	0.09	16.94	8.12	100.03	38.50
1050_a		28.03	7.52	4.01	0.63	2.12	29.38	0.93	1.33	0.10	20.90	4.92	99.87	47.50
1049_b		32.89	11.47	4.00	0.15	2.49	21.38	0.54	1.83	0.10	15.18	9.86	99.89	34.50
1049_a		39.66	8.41	3.26	0.41	1.90	23.60	1.16	1.57	0.10	12.63	7.01	99.71	38.70

TABELLA III

	Mn %	Fe %	Ni p.p.m.	Co p.p.m.	Cu p.p.m.	Zn p.p.m.	Pb p.p.m.	Cr p.p.m.	Li p.p.m.	Rb p.p.m.	Sr p.p.m.	Ba p.p.m.	Fe/Mn	Fe/Co	Mn/Ni	Mn/Cu
1070	0.30	2.00	78	40	43	80	16	70	15.4	38.50	385	576	5.13	50	3.8	6.98
1069	7.95	4.61	272	364	104.8	160	tr.	114	26.4	61.6	589.6	888	0.58	12.6	29	75.8
1068	37.59	6.09	132	114	50	100	32	58	17.8	44	1725.2	192	0.16	53.5	284.7	751.8
1067	32.99	3.84	200	194	64.8	60	tr.	84	26.4	48.4	308.1	408	0.11	19.8	165	509
1066	11.88	3.37	300	512	68	60	tr.	60	22	61.6	325.5	240	0.28	6.5	39.6	174.7
1065	5.60	4.14	210	435	56	60	48	63	30.8	70.4	589.8	504	0.74	9.5	26.6	100
1064	0.20	2.95	85	49	100	100	32	92	35.2	66	456	420	14.75	60.2	2.4	2
1063	0.57	2.18	120	44	32.8	10.4	tr.	60	22	44	514.9	1152	3.89	49	4.6	17.4
1062	0.26	2.55	80	70	70	110	64	54	27.5	52.8	429	576	9.62	70.6	3.37	3.7
$1061_{(2)}$	27.99	5.60	544	432	148	200	38	160	68.2	110	1522.7	888	0.20	12.9	51.4	189
$1061_{(1)}$	3.90	3.65	108	104	150	112	48	80	37.4	48.4	478	624	0.94	35.1	36	26
1060	0.20	4.20	130	69.8	183	130	48	150	33	70	456	1740	20.49	60.2	1.57	1.1
1059	0.75	2.98	176	100	56	120	64	120	33	70.4	739.4	648	3.98	29.9	4.3	13.4
1058	1.72	2.32	136	84	32.8	54	tr.	56	15.4	61.6	682.2	724.8	1.34	27.6	12.6	52.4
1057	0.92	4.05	98	147	105	96	64	92	33	66	528	528	3.80	23.8	9.4	8.8
1056	0.46	4.65	172	66	66	120	tr.	130	70.4	124.5	959.4	840	10.10	70.4	2.6	7
1055	1.60	2.81	152	90	42	64	tr.	76	22	66.0	638.1	504	1.08	31	10.5	38.1
1054	11.0	4.35	145	84	63	64	16	84	28.6	70.4	636.1	840	0.396	51.8	75.8	174.6
1053	0.30	4.35	70	92	138	112	32	125	34	75.4	498	384	14.5	47.3	4.3	2.2
1052_2	13.20	4.47	176	420	74.8	22	tr.	86	24.2	59.4	528.1	576	0.339	10.6	75	176.5
1052_1	5.18	3.49	184	146	54.8	28	tr.	96	33	77	607.2	600	0.675	23.9	28.1	94.5
1051_c	0.74	3.89	120	124	62.8	64	32	140	33	77	590	576	5.27	31.4	6.2	11.8
1051_b	0.24	2.74	78	45	80	110	tr.	92	24	53.9	728	420	11.42	60.9	3	3
1051_a	0.63	2.73	72	45	43	140	tr.	63	16	45.5	638	2736	3.81	53.3	8.7	14.7
1050_b	0.13	2.46	62	38	52	100	tr.	62	24.2	52.8	670	420	18.92	64.7	2.1	2.5
1050_a	0.49	2.80	68	40	35	188	tr.	38	16.5	44	576	1500	5.71	70	7.2	14
1049_b	0.12	2.80	80	42	80	122	64	89	33.0	57.2	572	480	23.33	66.7	1.5	1.5
1949_a	0.32	2.28	66	38	24	70	tr.	40	14.96	38.5	340	528	7.12	60	4.8	13.3
= Rapporti X		1.000														

già citata alternanza litologica. Infatti, come già facemmo notare nel precedente lavoro (BONI - ROLANDI 1975), tranne valori notevolmente alti, denotanti particolarmente anormali arricchimenti in sede diagenetica (1067-1068), le sue percentuali maggiori si riscontrano essenzialmente nei campioni di natura argillosa e marnoso-diatomitica. Appare evidente, comunque, che anche in questi ultimi è preponderante la funzione espletata nel suo arricchimento dai processi diagenetici. Infatti, come discuteremo anche in seguito a proposito del comportamento geochimico di alcuni elementi minori, fra i quali spiccano soprattutto il Ni ed il Co, da molti autori (LYNN e BONATTI 1965; PRICE 1967; PRICE e CALVERT 1970 ecc.), sono stati evidenziati, nell'ambito dei sedimenti già deposti, le variabili che possono influire in modo determinante sui meccanismi diagenetici che regolano la deposizione secondaria dei minerali manganesiferi e subordinatamente ferriferi in conseguenza delle midificazioni ambientali.

b) Elementi minori.

Nella Tab. 3 sono riportati, oltre ai valori percentuali di ferro e manganese, espressi come Fe e Mn metallico per facilitare i confronti, anche i tenori di un certo numero di elementi in tracce espressi in ppm. Le ultime tre colonne sono occupate dagli indicativi rapporti Fe/Mn, Fe/Co, Mn/Ni e Mn/Cu.

Litio e Rubidio.

Nel comportamento di litio e rubidio è stato riscontrato uno stretto parallelismo lungo tutta la serie: i valori di questi due elementi che seguono, pur con rare eccezioni, le percentuali in potassio, sono costantemente in rapporto 2 (rubidio): 1 (litio).

Gli arricchimenti di entrambi si verificano soprattutto nei livelli a maggiore componente argillosa e marnoso-diatomitica, da cui si denota, come già riscontrato in precedenza per il potassio, il loro stretto rapporto non solo con le miche, ma con i fillosilicati in generale (fig. 1).

Come è noto dai dati di alcuni autori (TUREKIAN & WEDEPOHL 1961; ARRHENIUS 1963), i minerali argillosi adsorbono gli elementi alcalini in proporzione diretta del loro raggio ionico: cesio > rubidio > potassio > sodio > litio. In questa ottica si giustificherebbe pertanto anche il citato rapporto 2/1 da noi riscontrato del rubidio rispetto al litio, il cui grado di adsorbimento ha un valore molto inferiore.

Stronzio e Bario.

Dalle risultanze sperimentali si evince che i due elementi in questione non presentano nell'ambito della serie particolari analogie di comportamento, se non con rare eccezioni. Il bario si presenta arricchito essenzialmente nei livelli a maggiore componente detritica (fig. 2); ciò potrebbe far supporre un suo parziale legame nel reticolo delle muscoviti in cui talvolta esso sostituisce il potassio. Non escludiamo però la eventuale presenza di piccole percentuali, non individuabili diffrattometricamente, di minerali di tipo baritico arricchitisi nelle fasi più arenacee da ipotizzabili sedimenti evaporitici che avrebbero fornito anche le già rilevate percentuali di clasti dolomitici presenti in alcuni campioni più arenacei. Ciò potrebbe rappresentare quindi una eventuale conferma all'ipotesi, già prospettata in BONI e ROLANDI (1975) dell'esistenza di parti del bacino di sedimentazione a precoce evoluzione evaporitica, che potrebbero aver fornito ai livelli detritici il materiale dolomitico e baritico.

Il bario, inoltre, risulta talora impoverito nei campioni in cui la percentuale in ferro aumenta, denotando così un comportamento simile a quello riscontrato da BONATTI et al. (1972) nei sedimenti mineralizzati dell'Afar, nei quali i tenori in Ba aumentano inversamente al rapporto Fe/Mn. Naturalmente per questi sedimenti ciò viene messo in relazione ad una attività fumarolico-esalativa, che produce un particolare arricchimento di un certo numero di elementi, mentre nel nostro caso ciò potrebbe solo essere ipotizzato. Potrebbe invece evidenziarsi nei nostri sedimenti (a parte il già prospettato arricchimento di natura detritica), l'esistenza di meccanismi di adsorbimento preferenziale del bario, da parte delle fasi manganesifere-ferrifere nel corso della diagenesi.

BURNS e FUERSTENAU (1966) osservano con studi alla microsonda la sostituzione di Ba su Mn^{+2} nel reticolo delle « manganiti »; alte percentuali di bario sono state rinvenute ovunque siano presenti mineralizzazioni manganesifere, come nei depositi di Tchiaturi, in Georgia (URSS), nonché nei sedimenti oceanici ad alti tenori in ferro e manganese (ARRHENIUS 1963). OSTWALD e FRAZER (1973) anche ritrovano associati, nei noduli dell'oceano a Sud dell'Australia, ad alte percentuali di manganese, corrispondenti valori, non solo di Ni, Co, Zn, Cu, Mo, ma anche di Ba, Sr, S e P. Per quanto riguarda lo stronzio, esso presenta un andamento non riferibile esattamente a nessuna componente litologica preferenziale; il suo massimo arricchimento lo si riscontra in alcuni campioni, dei quali una parte sono rappresentati dalle marne diatomitiche ed un'altra da termini ad intensa mineralizzazione (fig. 2). Non è stato possibile osservare alcuna

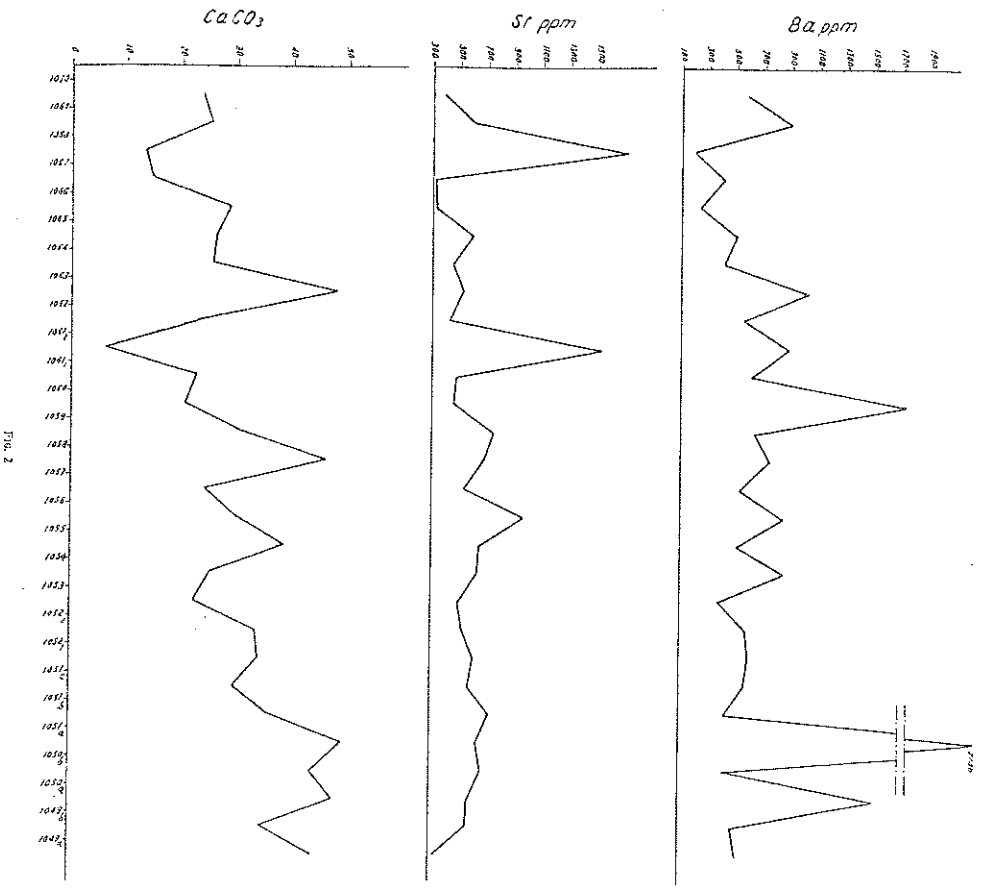


Fig. 2

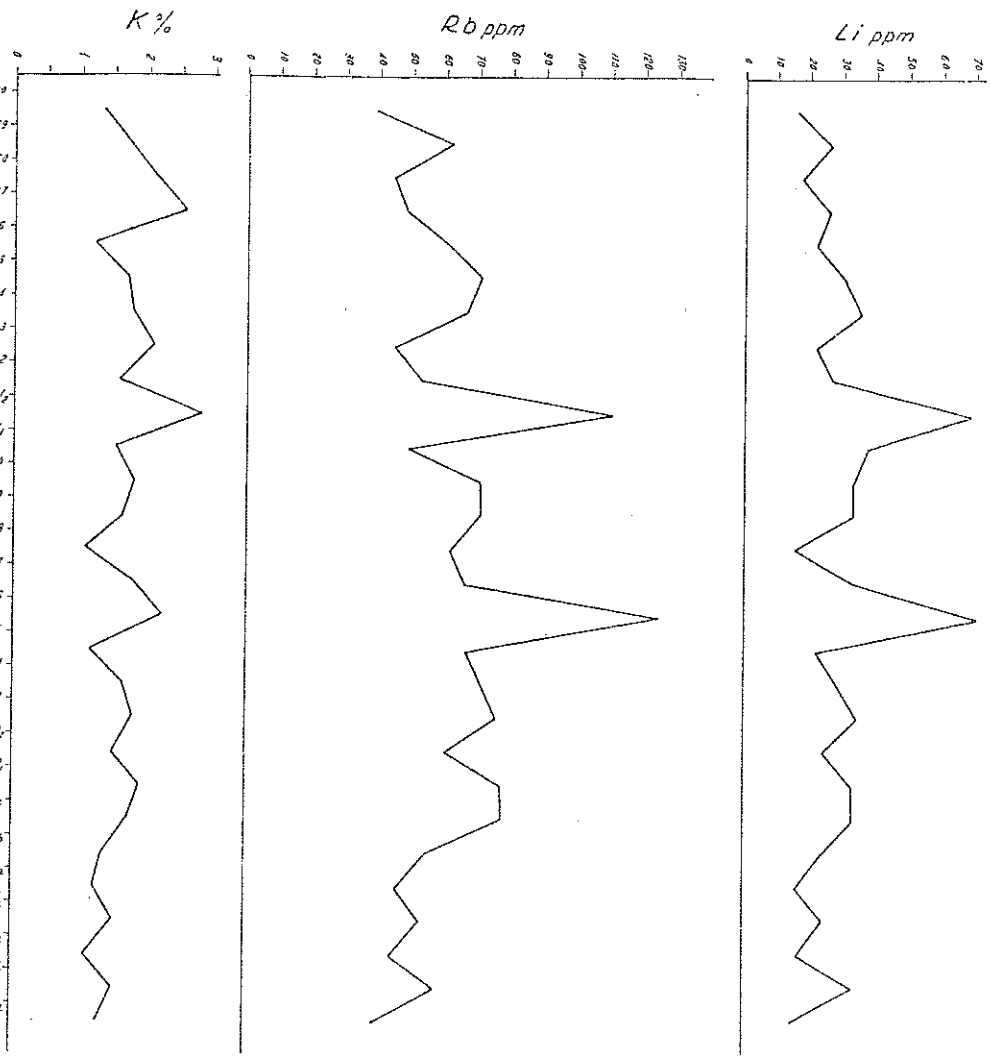

K %
Rb ppm
Li ppm
1059
1058
1057
1056
1055
1054
1053
1052
1051
1050
1049
1048

Fig. 1

stretta associazione tra i campioni più ricchi in $CaCO_3$ ed i maggiori valori di stronzio, il che potrebbe essere forse interpretato in base alle relativamente basse percentuali di carbonati provenienti da residui scheletrici di organismi (condizioni moderatamente euxiniche del bacino di deposizione) rispetto a quelle dei clasti di origine detritica, forse evaporitica.

Ad esempio BONATTI et al. (1972) associata alla già citata barite dei sedimenti dell'Afar rinvengono anche variabili percentuali di stronziobarite, in soluzione solida con la barite, né può escludersi l'apporto di celestina in minime quantità, da ascrivere ad una simile origine.

In ogni caso l'ampia variabilità dei tenori in stronzio riscontrata nella serie indicherebbe la sua dipendenza da molteplici condizioni deposizionali e diagenetiche.

Cromo

L'arricchimento in Cromo è evidenziato soprattutto nei termini a maggiore componente argillosa, in cui sono riconoscibili resti nectonici (argille e diatomiti). Tale caratteristica indicherebbe sia l'accumulo mediante meccanismi di adsorbimento nei minerali argillosi (montmorillonite?) presenti del cromo sciolto nelle acque, sia la formazione di composti organometallici in cui il cromo potrebbe essere stato fissato nella struttura di alcune molecole organiche, come ad esempio le proteine. Generalmente esso mostra un andamento nell'ambito della serie rispecchiante in sommo grado che pure si ipotizza legato con rapporti di chelazione in molecole organiche, nei campioni in cui è minima la componente detritica più grossolana.

È stato inoltre riscontrato per il cromo un comportamento abbastanza simile a quello del ferro, di cui segue l'andamento: i suoi valori vanno infatti aumentando con l'incremento del rapporto Fe/Mn. Sono però presenti talune eccezioni, soprattutto in quei campioni ove alti valori di ferro risultano associati ad altrettanto alte percentuali di manganese, probabile indizio di una precipitazione contemporanea di questi due elementi, forse da soluzioni colloidali.

È interessante infine far notare le basse percentuali di cromo presenti nei campioni a maggior componente arenacea, da cui se ne può dedurre un materiale primario non particolarmente arricchito in cromo: verrebbero pertanto ad essere accantonate come esclusive rocce madri delle mineralizzazioni le rocce basiche ed ultrabasiche (ofioliti calabresi), i cui tenori in cromo si aggirano su medie abbastanza alte (TUREKIAN e WEDEPOHL 1961).

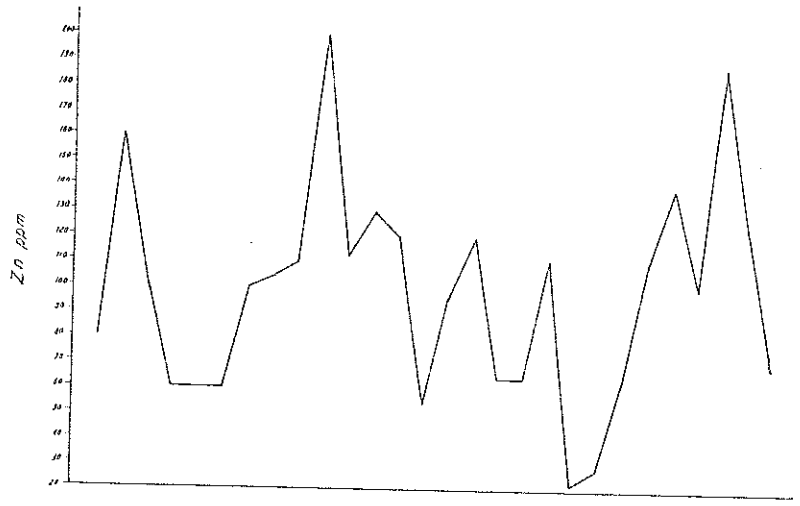
Zinco, Piombo e Rame.

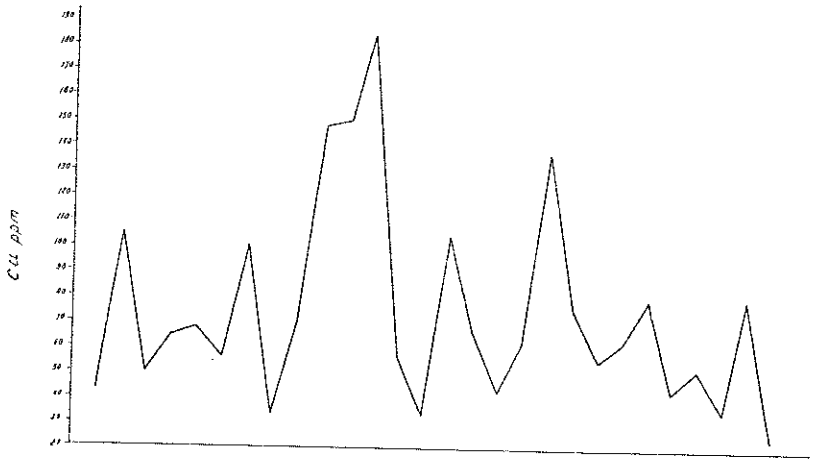
Tali elementi presentano evidenti arricchimenti nei livelli argillosi e marnoso-diatomitici, nei quali probabilmente venivano a concentrarsi le maggiori percentuali di sostanza organica. Il comportamento descritto risulta più evidente soprattutto nel rame, che in alcuni dei campioni di tale natura raggiunge valori superiori alle 150 ppm. Più modesta risulta la percentuale di rame nei campioni manganesiferi, (tranne che nel campione $1061_{(2)}$, dove del resto si trovano arricchiti inspiegabilmente quasi tutti gli elementi considerati nel presente lavoro), ed il suo andamento è piuttosto variabile. Tali concentrazioni possono essere spiegate considerando il fatto che, a parte una certa percentuale di rame contenuto nei minerali della ganga argillosa dei campioni più ricchi in manganese, non solo il rame, ma anche lo zinco ed il piombo possono trovarsi inclusi nei reticoli dei criptomelani e di alcune « manganiti » (todorokite) (BURNS e FUERSTENAU 1966; PRICE e CALVERT 1970; SKORNYAKOVA e ANDRUSHCHENKO 1974).

Per quanto riguarda lo zinco, per esso si può infatti riscontrare un andamento simile a quello del rame (con qualche eccezione), con arricchimenti abbastanza netti nei livelli a maggior componente argilloso-marnosa. Non si rinvengono accumuli particolari nei campioni più mineralizzati, tranne che forse in casi sporadici. Così anche per il piombo è del tutto trascurabile il suo tenore nelle arenarie e nelle mineralizzazioni manganesifere, mentre si evidenzia di nuovo un aumento nei campioni in cui l'elemento in questione può essere stato fissato da minerali argillosi o da sostanza organica.

Riassumendo, i tre elementi su accennati, anche se in modo alquanto differenziato, mostrano tutti una tendenza particolare ad arrichirsi nei livelli ad alto contenuto in minerali argillosi e residui di materiali organici di natura non scheletrica (fig. 3). Ciò verrebbe spiegato con la presenza di processi di adsorbimento preferenziale di questi metalli da parte sia delle argille che della sostanza organica contenuta nei sedimenti; tali particolari legami, di cui possono essere esempi i rapporti di chelazione, la formazione di humati, ecc., tenderebbero a preservare da una ulteriore mobilizzazione in sede diagenetica sia il rame che il piombo e lo zinco (e talvolta il cromo), impedendone l'arricchimento nelle acque interstiziali dei sedimenti e quindi la loro riprecipitazione sotto altra forma come è probabilmente avvenuto per il ferro e soprattutto per il manganese.

Nella numerosa letteratura sull'argomento è stato possibile rinvenire un gran numero di conferme alla teoria suesposta, per cui si evidenzia da un lato la grande facilità di adsorbimento per Cu,





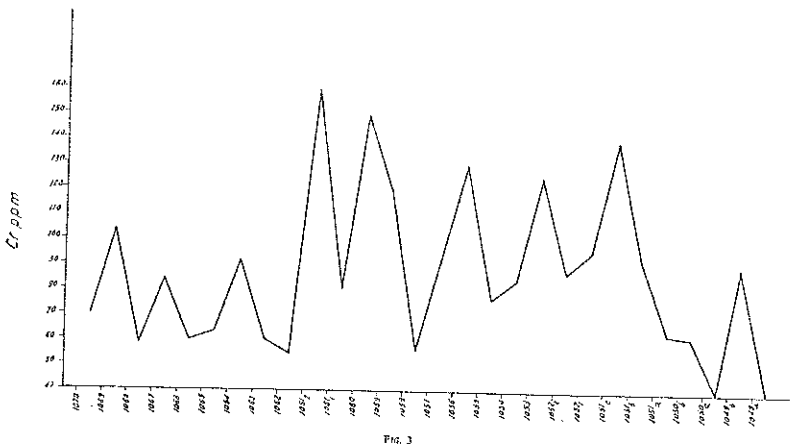


Fig. 3

Pb e Zn da ogni tipo di adsorbenti, compreso il plankton (infatti grandi arricchimenti di questi elementi si rinvengono soprattutto nei fondi oceanici ricoperti da diatomee e radiolari), dall'altra la grande stabilità dei composti metallorganici in cui tali elementi sono combinati: essi, infatti, anche nel passaggio del sedimento a condizioni ambientali più ossidanti o alcaline, non tendono ad essere disgregati e quindi non si arricchiscono, se non in minime percentuali, insieme ai minerali di deposito diagenetico (KUIJPERS 1974; PRICE 1967 ecc.).

Nichel e Cobalto.

Notiamo innanzitutto una perfetta analogia nel comportamento di questi due elementi, con una prevalenza associativa del nichel con il manganese e del cobalto con il ferro (fig. 4). Tale tendenza non trova però riscontro nei campioni ad altissimo contenuto manganesifero, (1067-1068), dove le percentuali sia di nichel che di cobalto si aggirano su valori di poco superiori alla media della serie mineralizzata. Il cobalto mostra una coerenza geochimica con il ferro, seguendone l'incremento, pur non escludendo in alcuni casi anche una certa coerenza con il manganese, che probabilmente sostituisce nelle sue fasi più ossidate (BURNS e FUERSTENAU 1966). Una ulteriore prova di questo assunto potrebbe quindi venire dalle maggiori percentuali di birnessite presenti nei campioni mineralizzati, rispetto alla todorokite, nel cui reticolo dovrebbero trovare posto elementi a più basso numero di ossidazione, come il Ni^{+2}, il Cu^{+2} e lo Zn^{+2}. (Nei campioni più mineralizzati notiamo infatti alti rapporti Mn/Ni, e Mn/Cu contro valori abbastanza bassi del rapporto Fe/Co).

A differenza degli elementi già discussi, il Co ed il Ni non si trovano arricchiti in modo preferenziale nei campioni argillosi e ricchi in sostanza organica, se non con rare eccezioni: ciò potrebbe essere interpretato con un loro arricchimento parallelamente alla precipitazione diagenetica dei colloidi ferro-manganesiferi.

A parte la loro grande affinità per le fasi ossidate di Fe e Mn (BURNS 1965), Co e Ni presentano inoltre nei loro composti metallorganici una minore tendenza alla stabilità, e quindi una propensione alla mobilizzazione nei sedimenti con conseguente arricchimento nelle acque interstiziali. Ciò non è però da considerare di valore assoluto, dal momento che anche nella nostra serie è stato possibile osservare una discrepanza tra forti arricchimenti di Mn e Fe e i corrispondenti tenori in Co e Ni che si mantengono relativamente bassi. Del resto è stato già osservato come questi elementi

possano arricchirsi più o meno preferenzialmente in minerali manganesiferi che pure hanno la stessa denominazione. LARSON (1970) ha infatti notato come possano rinvenirsi due tipi di litioforite, dei quali uno risulta arricchito in nichel e l'altro in cobalto.

Come già si è detto precedentemente, quindi, nelle nostre mineralizzazioni sembrerebbe che il nichel (come Ni^{+2}) sia soprattutto inserito nel reticolo della todorokite e forse in quello dei criptomelani, mentre il cobalto, a numero di ossidazione 3, viene ad arricchirsi soprattutto nei campioni in cui compaiono la birnessite e gli ossidi. Il passaggio $Ni^{+2} \rightarrow Ni^{+3}$ risulta comunque piuttosto sfavorevole ed è universalmente riconosciuto come Ni^{+2} sia l'unico stato di questo elemento ad avere una certa importanza. È incerto comunque se Ni^{+2} tenda a sostituire soprattutto Mn^{+4} nei criptomelani (il raggio ionico di 0,60 Å di Mn^{+4} renderebbe per questo la sostituzione più verosimile con Ni^{+2}, a raggio ionico 0,69 Å, rispetto a Mn^{+2} il cui raggio ionico è di circa 0,80 Å) o Mn^{+2} nelle « manganiti », come è stato evidenziato da BURNS e FUERSTENAU (1966).

Per quanto riguarda il cobalto, invece, il passaggio $Co^{+2} \rightarrow Co^{+3}$ è molto più semplice, specie se a favorirlo sono presenti condizioni alcaline ed agenti complessanti. Co^{+3}, con il suo raggio ionico di 0,63 Å è quindi in posizione ideale per sostituire Mn^{+3} (raggio ionico 0,66 Å) la cui ossidazione è stata probabilmente favorita dalle stesse condizioni alcaline che hanno provocato l'ossidazione del cobalto.

Un arricchimento notevole del cobalto come Co^{+3} viene segnalata anche da BURNS (1965) nelle fasi amorfe di $FeOOH \cdot nH_2O$ dei noduli oceanici, soprattutto se fattori aggiuntivi come il vulcanismo sottomarino portano ad alti valori la percentuale di cobalto nelle acque stesse.

VARENTSOV e PRONINA (1973) nei loro esperimenti sull'adsorbimento, da parte degli idrossidi di ferro e manganese di nichel e cobalto, osservano che questo si svolge, una volta innescato il processo, mediante meccanismi autocatalitici, come già del resto HEM (1963) aveva notato per la precipitazione dei composti ferromanganesiferi; una grande importanza si deve comunque attribuire ai loro ambienti di deposizione, come ad esempio i pori dei sedimenti e le microfessure, i cui meati possono in un certo senso condizionare il passaggio delle soluzioni interstiziali.

BONATTI e JOENSUU (1966) mostrano infine come alcuni sedimenti del Pacifico, a rapporto Fe/Mn piuttosto alto, siano eccezionalmente poveri di cobalto e nichel, dimostrando che è soprattutto il manganese il fattore dominante nell'assorbimento di questi due elementi.

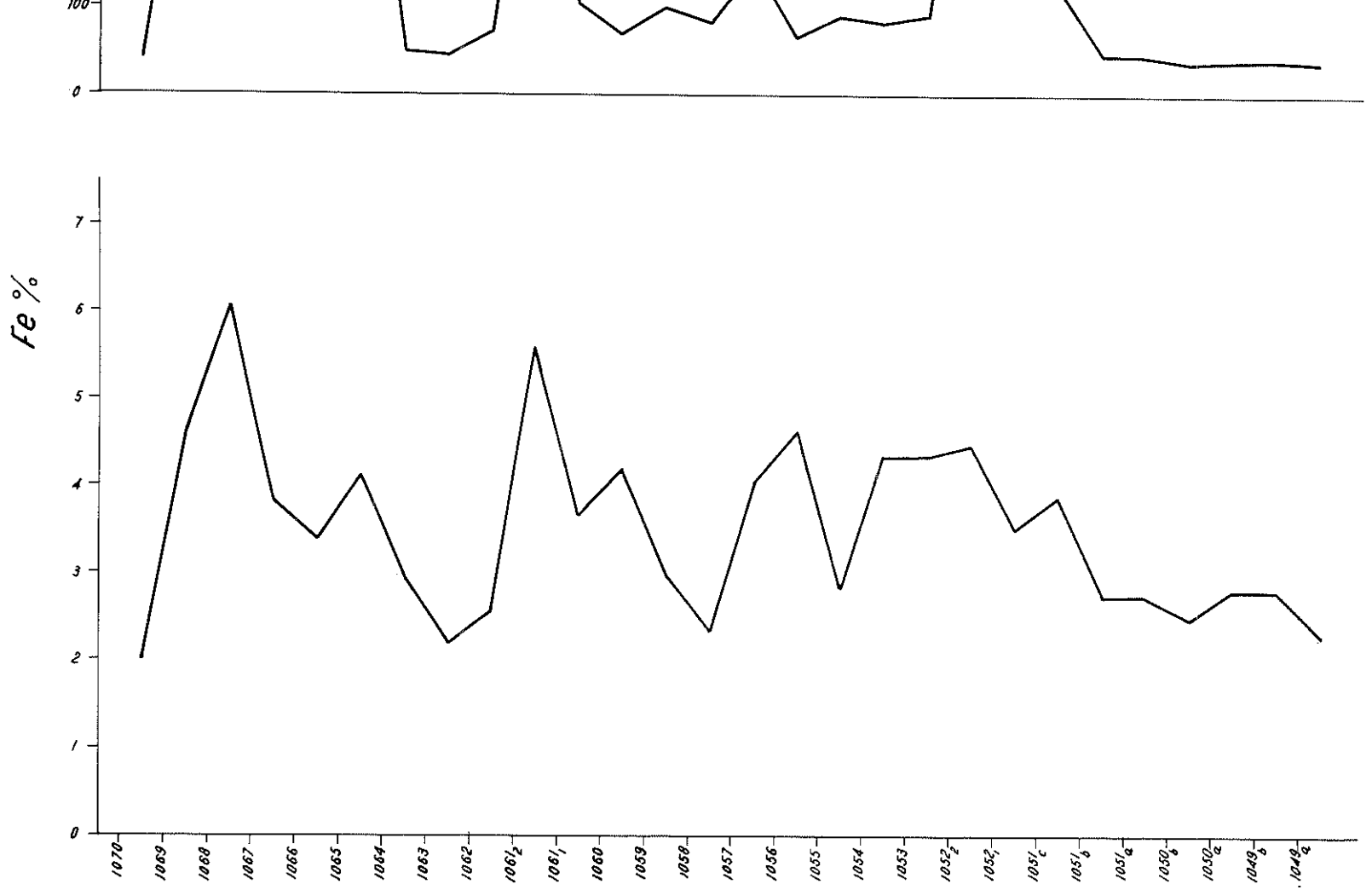

100
0
Fe %
7
6
5
4
3
2
1
0
1070
1069
1068
1067
1066
1065
1064
1063
1062
1061₂
1061₁
1060
1059
1058
1057
1056
1055
1054
1053
1052₂
1052₁
1051c
1051b
1051a
1050b
1050a
1049b
1049a

FIG 4

Per quanto si riferisce al comportamento di Co e Ni nel corso della diagenesi, è necessario ricordare la loro già citata scarsa stabilità nei composti organici, soprattutto in quelli costituiti da humati che, nei sedimenti dei bacini non tanto profondi, per i quali è notevole l'influenza delle terre emerse, rappresentano talvolta il 60 % della sostanza organica. Comunque, pur non verificandosi nel loro caso né una precipitazione veloce come accade per Mn e Fe dalle acque interstiziali, n'é particolarmente lenta come quella che si è già puntualizzata per Zn, Pb e Cu è stato osservato per i complessi organici di Co e Ni un comportamento molto variabile, in rapporto non solo alla percentuale di sostanza organica nel sedimento, ma anche al pH dell'ambiente ed alla velocità di sedimentazione nel bacino in esame.

Dai campioni provenienti dalla serie esaminata nel presente lavoro, si deve essere quindi verificata per Co e Ni la seguente serie di processi:

a) precipitazione iniziale probabilmente contemporanea alle fasi ferro-manganesifere con associazione di questi due elementi in composti di natura colloidale. Si può essere inoltre verificata una parziale formazione di composti metallorganici, frequenti soprattutto in quei momenti in cui la sedimentazione detritica era meno abbondante.

b) Rottura dei composti metallorganici, nel corso della diagenesi precoce, nonché riduzione e concentrazione di Co e Ni nelle acque interstiziali dei sedimenti, già arricchite in Fe e Mn.

c) Riprecipitazione delle fasi ossidate ferro-manganesifere in cui vanno a concentrarsi buona parte delle percentuali di Ni e Co, per adsorbimento nei reticoli di quelle mediante meccanismi autocatalitici a continuo incremento.

Conclusioni

Dall'esame dei dati analitici sugli elementi maggiori della serie mineralizzata di Serra d'Aiello, non emergono indicazioni di particolare rilievo che possano modificare in modo decisivo le conclusioni raggiunte nel nostro precedente lavoro sull'argomento (Boni e Rolandi 1975), né causare la formulazione di nuove ipotesi sulla probabile genesi delle mineralizzazioni in questione.

Maggior valore indicativo è affidato alle variazioni lungo la serie delle percentuali degli elementi minori ed in tracce, il cui andamento rispecchia abbastanza fedelmente quello della litologia. Tale variazione è in rapporto anche alla loro diversa provenienza, che può es-

sere detritica (come in gran parte dei campioni più arenacei) o autigena, (nei campioni a maggiore componente argillosa o marnosa, nonché in quelli mineralizzati); è comunque un fatto abbastanza indubbio che nella loro distribuzione abbiano avuto grande importanza soprattutto meccanismi di tipo diagenetico in rapporto alle modificazioni ambientali.

Un'origine prevalentemente detritica si può assegnare a Li e Rb, il cui arricchimento si è verificato soprattutto nei fillosilicati, ed a Ba, la cui attribuzione ad ipotetici sedimenti evaporitici è già stata discussa in precedenza. Ma mentre Li e Rb mostrano una certa analogia di comportamento con K, non è stato possibile riscontrare nessuno degli elementi maggiori le cui variazioni potessero essere seguite da Ba, se non il manganese, ed in casi abbastanza sporadici.

Così pure non si è riuscito ad evidenziare un coerente comportamento geochimico per Sr, che non sembra legato a nessun elemento in particolare. Indubbiamente, comunque è da escludere ogni suo rapporto con le variazioni percentuali lungo la serie di $CaCO_3$, come sarebbe invece stato abbastanza logico attendersi.

Zn, Pb e Cu mostrano molte evidenze di un comportamento simile, mostrandosi prevalentemente arricchiti nei livelli argillosi e marnosi ricchi in sostanza organica, da cui si deduce per loro, sia un probabile stretto rapporto con i minerali delle argille (adsorbimento), che la formazione di composti metallorganici in cui questi elementi possono essere particolarmente concentrati. Talune analogie (arricchimento in livelli marnosi e argillosi) sono presentate anche da Cr, che del resto, pur seguendo abbastanza fedelmente le variabili concentrazioni del ferro, non sembra presentare alcuna evidenza di un'origine detritica.

Ni e Co sono gli elementi che maggiormente si concentrano nelle mineralizzazioni ferro-manganesifere. Come già dicemmo essi seguono con molta coerenza gli andamenti rispettivamente il Ni del Mn ed il Co del Fe; nei campioni più mineralizzati, tuttavia, sono stati notati valori abbastanza bassi del rapporto Fe/Co, indizio questo della parziale associazione del cobalto anche nelle fasi più ossidate dei minerali di Mn. È da tener presente, comunque, che nei campioni in cui le percentuali del Mn sono maggiori del 25 %, Co e Ni non appaiono arricchiti in modo tale, come sarebbe stato normale attendersi, probabilmente a causa di meccanismi agenti nelle ultime fasi dei processi diagenetici.

Rimane da sottolineare un fatto finora apparentemente inspiegabile: il campione $1061_{(2)}$ presenta arricchimenti anomali di quasi tutti gli elementi minori, dei quali risulta difficile ipotizzare la provenienza. È pur vero che, essendo stata riscontrata nel campione in

esame una percentuale in MnO superiore al 36 %, si potrebbe attribuire ai minerali manganesiferi tali anomale concentrazioni, ma, d'altronde, essendo dei campioni con percentuali in MnO ancora superiori, addirittura carenti in elementi minori, tale spiegazione potrebbe non essere valida.

È necessario a questo punto invocare o particolari condizioni diagenetiche per cui possa essersi verificata solo in quel livello una così densa concentrazione di elementi, o un possibile evento trascendente gli ordinari fenomeni di sedimentazione (fenomeno vulcanico?) che abbia elevato bruscamente nel bacino il tenore in Mn ed in altri elementi minori. Bisogna infatti giustificare, oltre al 5,60 di Fe ed al 28 % di Mn, anche 544 ppm di Ni, 432 di Co, 148 di Cu, 200 di Zn, 160 di Cr, 110 di Rb e 1522 di Sr.

Ulteriori studi da noi già intrapresi, tesi essenzialmente stavolta al chiarimento dell'origine e composizione dei minerali argillosi non solo della serie mineralizzata, ma dell'intero bacino di sedimentazione di cui quella fa parte, si spera che potranno contribuire al chiarimento, sia di buona parte dei problemi locali ancora insoluti che di alcuni di quelli più generali che caratterizzano il Messiniano dell'Italia meridionale.

BIBLIOGRAFIA

ALEXANDROV E. A., *Sedimentary cycle of manganese and its practical implications.* Progr. Annual Meetings, Denver 1961, Geol. Soc. Amer. Mem., 2 A (1961).

ARRHENIUS G., *Pelagic sediments.* In: M. N. Hill (Gen. Ed.) « The Sea », **3**, Interscience, New York (1963).

ARRHENIUS G., MERO J., KORKISCH J., *Origin of oceanic manganese minerals.* Science, **144**, pp. 170-173 (1964).

BARNES S. S., *Minor elements composition of ferromanganese nodules.* Science, **167**, pp. 63-65 (1967).

BARNES S. S., DYMOND J. R., *Rates of accumulation of ferromanganese nodules.* Nature, **213**, pp. 1218-1219 (1967).

BEZRUKOV P. L., ANDRUSHCHENKO P. F., *Geochemistry of iron-manganese nodules from the Indian Ocean,* Int. Geol. Rev., **16**, n. 9 (1974).

BONATTI E., FISHER D. E., JOENSUU D., RYDELL H. S., *Postdepositional mobility of some transition elements, phosphorus, uranium and thorium in deep-sea sediments.* Geochim. et Cosmoch. Acta, **35**, pp. 189-202 (1971).

BONATTI E., FISHER D. E., JOENSUU D., RYDELL H. S., BEYTH M., *Iron-Manganese-Barium deposit from the Northern Afar Rift (Ethiopia).* Econ. Geol., **67**, n. 6 (1972).

BONI M., ROLANDI G., *Mineralizzazioni manganesifere nel Messiniano del versante tirrenico della Catena Costiera (Serra d'Aiello).* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. s. 1, **42** (1975).

BORCHERT H., *On the ore deposition and geochemistry of manganese.* Min. Dep., **5**, (1970).

BURNS R. G., *Formation of cobalt (III) in the amorphous $FeOO.nH_2O$ phase of manganese nodules.* Nature, **215**, n. 4975 (1965).

BURNS R. G., FUERSTENAU D. W., *Electron-probe determination of interelement relationships in manganese nodules.* Am. Miner., **51**, n. 5-6 (1966).

CRONAN D. S., THOMAS R. L., *Geochemistry of ferromanganese oxides concretions and associated deposits in Lake Ontario.* Geol. Soc. America Bull., **83**, n. 5 (1972).

DI NOCERA S., NARDI G., ORTOLANI F., TORRE M., *Cineriti riolitiche nei depositi messiniani della Valle del Crati (Calabria settentrionale).* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4, **41** (1975).

DI NOCERA S., ORTOLANI F., RUSSO M., TORRE M., *Successioni sedimentarie messiniane e limite Pliocene-Miocene nella Calabria settentrionale.* Boll. Soc. Geol. Ital., **93**, n. 3 (1974).

GLASBY G. P., *The mineralogy of manganese nodules from a range of marine environment.* Mar. Geol., **13**, n. 1 (1972).

GUERIN H., *Dispersion et concentration du manganese dans les roches volcaniques.* Min. Dep., **8**, n. 2 (1973).

HEGM J. D., *Deposition and solution of manganese oxides.* Geol. Surv. Waters-suppl. pap., 1667-B (1964).

JONES L. H. P., MILNE A. A., *Birnessite, a new manganese mineral from Aberdeenshire, Scotland.* Mineral. Mag., **13**, pp. 283-288 (1956).

KOCZY F. F., *Factors determining the element concentration in sediments.* Geochim. Cosmoch. Acta, **1**, pp. 73-85 (1951).

KOMUKLIJKE NEDERLANDSE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN, *Messinian events in the Mediterranean.* Geodynamic Scientifics Report, n. 7, on the Colloquium held in Utrecht, March 2-4, Ed. C. W. Drooger, Amsterdam (1973).

KRAUSKOPF K. B., *Separation of manganese from iron in sedimentary processes.* Geochim. et Cosmochim. Acta, **12**, pp. 61-84 (1957).

KULIPERS A., *Trace elements at the depositional interface and in sediments of the outher parts of the Eckennförden Bucht, Western Baltic.* Meyniana, **26** (1974).

LARSON L. T., *Cobalt and nickel-bearing manganese oxides from the Fort Payne Formation, Tennessee.* Econ. Geol., **65**, pp. 952-962 (1970).

LYNN D. C., BONATTI E., *Mobility of manganese in diagenesis of deep-sea sediments.* Mar. Geol., **3**, pp. 457-474 (1965).

MANHEIM F. T., *Manganese-iron accumulations in the shallow marine environment.* Narragansett Marine Lab., Occasional Publ., **3**, pp. 217-276 (1965).

MARCHANDISE H., *Contribution à l'étude des gisements de manganèse sédimentaires.* Symposium sobre yacimientos de manganeso, XX Congreso Geologico Internacional, Tomo I, Mexico (1956).

MORGAN J. J., STUMM W., *Colloid-chemical properties of manganese dioxide.* Journ. Coll. Sci., **67**, n. 6 (1964).

OSTWALD J., FRAZER F. W., *Chemical and mineralogical investigation on Deep-Sea manganese nodules from the Southern Ocean.* Min. Dep., **8**, n. 4 (1973).

PERRONE V., TORRE M., ZUPPETTA A., *Il Miocene della Catena Costiera calabra. Primo contributo: zona Diamante-Bonifati-S. Agata d'Esaro (Cosenza).* Riv. Ital. Paleont., **79**, n. 2 (1973).

PRICE N. B., *Some geochemical observations on manganese-iron oxide nodules from different depht environments.* Mar. Geol., **5**, n. 5-6 (1967).

PRICE N. B., *Chemical diagenesis in sediments.* WHOI, Tech. Rep., 73-79 (1973).

PRICE N. B., CALVERT S. E., *Compositional variation in Pacific Ocean ferromanganese nodules and its relationship to sediments accumulation rates.* Mar. Geol., **9**, n. 3 (1970).

SAPOZHNIKOV D. G., *Manganese deposits of the Soviet Union.* Akad. of Sciences of the U.R.S.S. Israel Progr. Scient. Trasl. Jerusalem. (1970).

SKORNYAKOVA N. S., ANDRUSHCHENKO P. F., *Iron-manganese concretions in the Pacific Ocean.* Int. Geol. Rev., **16**, n. 8 (1974).

SOLOKOVA E. I., *Physicochemical investigation of sedimentary iron and manganese ores and associated rocks (Oxidaction-Reduction properties of sedimentary ore complexes).* Acad. of Sciences of the USSR. Israel Progr. (1970).

STRACZEK J. A., HOREN A., WARSHAW C. M., *Studies of the manganese oxides. IV Todorokite.* Amer. Miner., **45**, pp. 1174-1184 (1960).

STRAKOV N. M., *Types of manganese accumulation in present day basins: their significance in understanding of manganese mineralisation.* Int. Geol. Rev., **8**, n. 4 (1966).

SUMMERHAYES C. P., *Geochemistry of manganese deposits in relation to environment on the sea floor around southern Africa.* Mar. Geol., **18**, n. 3 (1975).

TUREKIAN K. K., WEDEPOHL K. H., *Distribution of the elements in some major units of the earch's crust.* Geol. Soc. Amer. Bull., **72**, n. 2 (1961).

VARENTSOV I. M., *On the main aspects of formation of ferromanganese ores in recent basins.* 24 Int. Geol. Congr., sect. 4 Mineral Deposits (1972).

WILLIS J. P., AHRENS L. H., *Some investigations in the composition of manganese nodules with particular reference to certain trace elements.* Geochim. et Cosmochim. Acta, **26**, pp. 751-764 (1962).

A fixed point theorem for non compact acyclic-valued maps *

Nota di G. CONTI ** and P. NISTRI **
presentata dal socio corrispondente G. STAMPACCHIA

(Adunanza dell' 8 novembre 1975)

RIASSUNTO. — Si dimostra un teorema di punto fisso per applicazioni multivoche non compatte a valori aciclici, e si dà un lemma che caratterizza le trasformazioni compatte di uno spazio di Banach riflessivo in sé.

SUMMARY. — We prove a fixed point theorem for multivalued non compact acyclic-valued maps. Moreover we give a characterization of the compact maps defined on a reflexive Banach space.

INTRODUCTION.

In a recent paper (see [8]) S. P. SINGH proved the following theorem:

Let E *be a reflexive Banach space and* C *a non empty, bounded, closed and convex subset of* E.

Let

$$f : C \to C$$
$$g : C \to E$$
$$h : C \to E$$

be such that

a) $f = g + h$;

b) g *is* α*-nonexpansive and* $(I - g)$ *is demiclosed;*

c) h *is strongly continuous.*

Then f *has at least one fixed point.*

* Work performed under the auspices of the National Research Council of Italy (C.N.R.).

** Università della Calabria - Dipartimento di Matematica - C.P. 377 - 87100 Cosenza.

In this paper we extend the above theorem to the class of upper-semicontinuous multi-valued maps. Our results extend the one of S. P. SINGH also in the single-valued case.

Moreover we give a characterization of compact maps in reflexive Banach spaces. This characterization improves the result of D. G. DE FIGUEIREDO (see [2]) since he gave only a sufficient condition for f to be compact, while our condition is also necessary.

NOTATIONS AND DEFINITIONS.

We recall that a *multivalued map* f from a set X into a set Y is a triple (G, X, Y) where G, the *graph* of f, is a subset of $X \times Y$ such that $f(x) = \{y \in Y : (x, y) \in G$ is non empty for each $x \in X\}$.

$f(X) = \cup \{f(x) : x \in X\}$ is the *range* of f while X is its *domain*.

We will use the symbol $f : X \multimap Y$ to indicate a multi-valued map and $f : X \to Y$ for the single-valued ones.

Let $A \subset X$ and $B \subset Y$ be subsets; we shall use the following notations: $f(A) = \cup\{f(x) : x \in A\}$; $f^-(B) = \{x \in X : f(x) \cap B \neq \emptyset\}$; $f^+(B) = \{x \in X : f(x) \subset B\}$. $f^-(B)$ and $f^+(B)$ are called the *lower inverse image* and the *upper inverse image* of B respectively.

For $f : X \to Y$ single-valued we have $f^-(B) = f^+(B) = f^{-1}(B)$.

Let $f : X \multimap Y$ be a multivalued map from a topological space X into a topological space Y.

We say that f is *upper semicontinuous (u.s.)* on X if for any open set $0 \subset Y$ the set $f^+(0)$ is open or equivalently if for any closed set $C \subset Y$, $f^-(C)$ is closed.

We say that $f : X \multimap Y$ has *closed values* if $f(x)$ is closed for every $x \in X$, and f has *closed graph* if G is a closed subset of $X \times Y$.

If X and Y are metric spaces and $f : X \multimap Y$ has closed graph then $x_n \to x$, $y_n \to y$ and $y_n \in f(x_n)$ implies that $y \in f(x)$.

If Y is compact then $f : X \multimap Y$ is u.s. with closed values if and only if f has closed graph.

We say that $f : X \multimap Y$ is *compact* if for any bounded set $A \subset X$, $f(A)$ is relatively compact.

We say that $f : X \multimap Y$ is *completely continuous* if f is u.s. and $f(X) \subset K$, K being a compact subset of Y.

If Y is a locally convex topological vector space and $f(x)$ is convex for every $x \in X$, then f is called *convex-valued*.

If for every $x \in X$, $f(x)$ is acyclic in the Vietoris homology theory with coefficients in Q, then f is *acyclic-valued*.

A *fixed point* of a multi-valued map $f : X \multimap X$ is a point $x \in X$ such that $x \in f(x)$.

Let X be a normed space and $f : X \multimap X$ be a multi-valued map. We recall that

$$d(x, f(x)) = \inf \{ \| x-y \|, \ y \in f(x) \} .$$

Let A be a bounded subset of a metric space X.

Following KURATOWSKI [4] we define $\alpha(A)$ as the infimum of all $\varepsilon > 0$ such that A can be covered by a finite family of subsets with diameter less than ε. Since $\alpha(A) = 0$ if and only if $\bar{A}$ is compact, the number $\alpha(A)$ is frequently called a measure of non compactness of A.

Let X be a linear normed space, and $f : X \multimap X$ be an upper semicontinuous multi-valued map; f is said to be *α-contractive* (*α-nonexpansive*) [1]) if for any bounded set $A \subset X$ we have

$$\alpha(f(A)) \leq k \alpha(A) \qquad \text{with} \qquad 0 \leq k < 1 , \quad (k = 1)$$

If for any bounded set $A \subset X$, with $\alpha(A) > 0$, we have:

$$\alpha(f(A)) < \alpha(A)$$

then f is said to be *condensing* (or *densifying*).

RESULTS.

We give the following lemma that characterizes the compact mappings in a reflexive Banach space.

LEMMA 1. *Let* E *be a reflexive Banach space. Then* $h : E \to E$ *is compact if and only if the following property holds:*

i) *if* $x_n \rightharpoonup x$ (*converges weakly to* x) *then the sequence* $\{h(x_n)\}$ *is compact* (i.e. *any subsequence has cluster points*).

PROOF. *Only if.* Assume that h is compact and let $x_n \rightharpoonup x$. Clearly $\{x_n\}$ is bounded, therefore $\{h(x_n)\}$ is compact.

If. Let A be bounded. To prove that $h(A)$ is relatively compact it is enough to show that any sequence in $h(A)$ has cluster points.

Let $\{y_n\}$ be a sequence in $h(A)$. There exists $x_n \in A$ such that $h(x_n) = y_n$. Since $\{x_n\}$ is bounded and X is reflexive, we can find $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Therefore $\{h(x_{n_k})\}$ is compact.

This implies that $\{y_n\}$ has cluster points.

Q.E.D.

This lemma generalizes a result due to D. G. DE FIGUEIREDO [2] which states that a strongly continuous mapping (i.e. $x_n \rightharpoonup x$ implies $f(x_n) \to f(x)$) in a reflexive Banach space is compact.

Let C be a bounded, closed and convex subset of a Banach space E. Assume that 0 is an interior point of C.

It is then possible to define the continuous radial retraction $\pi : E \to C$ in the following way.

First consider

$$p(x) = \begin{cases} \sup \{\lambda,\ \lambda \geq 0 : \lambda x \in C\} & \text{if} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$

Set $q(x) = \min \{p(x), 1\}$. Finally, define $\pi(x) = x \cdot q(x)$. The map π is obviously continuous.

Moreover π is α-nonexpansive (see R. D. NUSSBAUM [7]).

We give here a proof of this fact for completeness sake.

LEMMA 2. *The radial retraction $\pi : E \to C$ is α-nonexpansive.*

PROOF. Let $A \subset E$ be a bounded set. Since $\pi(A) \subset \overline{\text{co}}(A \cup \{0\})$ it follows that

$$\alpha(\pi(A)) \leq \alpha(\overline{\text{co}}(A \cup \{0\})) = \alpha(A \cup \{0\}) = \alpha(A).$$

Q.E.D.

Let C be a bounded, closed and convex subset of a Banach space E and $f : C \multimap E$.

Assume that $0 \in C$. We recall that f satisfies the Leray-Schauder condition if $\lambda x \in f(x)$ for some $x \in \partial C$ implies $\lambda \leq 1$.

LEMMA 3. *Let C be a bounded, closed and convex subset of a Banach space E, with $0 \in \text{int } C$.*

Let $f : C \multimap E$ be an α-nonexpansive acyclic-valued mapping.

If f satisfies the Leray-Schauder condition then

$$\inf \{d(x, f(x));\ x \in C\} = 0.$$

PROOF. (compare [3] and [6]).

Let $\{k_n\}$ be a sequence of real numbers such that $0 \leq k_n < 1$ and $k_n \to 1$.

The map $k_n f : C \multimap E$ is clearly α-contractive with constant $k_n < 1$.

Lemma 2 and a result proved in [5] imply that $k_n f$ has at least one fixed point $x_n \in C$.

Let $y_n \in f(x_n)$ be such that $x_n = k_n y_n$.

We have

$$d(x_n, f(x_n)) \leq \| y_n - x_n \| = \| y_n - k_n y_n \| = \| y_n \| (1 - k_n) .$$

Since f is α-nonexpansive and C is bounded there exists $R > 0$ such that $f(C)$ is contained in the ball of radius R centered at the origin.

Thus

$$d(x_n, f(x_n)) \leq R(1 - k_n) .$$

Q.E.D.

THEOREM 1. *Let* C *be a bounded, closed and convex subset of a reflexive Banach space* E *such that* 0 *belongs to the interior of* C. *Let*

$$f : C \multimap E$$
$$g : C \multimap E$$
$$h : C \to E$$

be such that

a) $f = g + h$

b) g *is* α*-nonexpansive acyclic-valued mapping and such that:* $x_n \rightharpoonup x$, $z_n \in x_n - g(x_n)$ *and* $z_n \to z$ *implies that* $z \in x - g(x)$ *(i.e.* (I-g) *is demiclosed);*

c) h *is continuous in the weak topology and satisfies the property* i) *of Lemma 1;*

d) f *satisfies the Leray-Schauder condition.*

Then f *has at least one fixed point.*

PROOF. First let us prove that f is u.s.; to this end it sufficies to show that the map h is continuous in the strong topology.

Let $x_n \to x$; from the weak continuity of h we have $h(x_n) \rightharpoonup h(x)$.

Now by Lemma 1 we know that $\{\overline{h(x_n)}\}$ is compact and we are done, since weak and strong topologies coincide on compact sets. To prove that f is α-nonexpansive just recall that $f = g + h$, where g is α-nonexpansive and h is compact.

Lemma 3 implies that $\inf\{d(x, f(x)),\ x \in C\} = 0$.
Thus it sufficies to prove that $0 \in Im(I-f)$.
Let $y_n \to 0$ be a sequence in $Im(I-f)$.
We have

$$y_n \in x_n - f(x_n) = x_n - h(x_n) - g(x_n), \quad \text{i.e.}$$
$$y_n + h(x_n) \in x_n - g(x_n) \quad \text{with} \quad x_n \in C, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Since C is weakly compact we may assume, without loss of generality, that $x_n \rightharpoonup x \in C$.

If follows that $\{h(x_n)\}$ is compact.

Let $\{h(x_{n_k})\}$ be a convergent subsequence, say to z.

Clearly $x_{n_k} \rightharpoonup x$ and so, by the continuity of h in the weak topology, $h(x_{n_k}) \rightharpoonup h(x)$.

It follows that $h(x) = z$. Thus for a subsequence $\{\bar{x}_n\}$ of $\{x_n\}$ we have

$$\bar{x}_n \rightharpoonup x \quad \text{and} \quad h(\bar{x}_n) \to h(x).$$

Since $\bar{y}_n + h(\bar{x}_n) \to h(x)$ and $\bar{y}_n + h(\bar{x}_n) \in \bar{x}_n - g(\bar{x}_n)$ for any integer n, it follows that

$$0 \in x - h(x) - g(x) = x - f(x).$$

Q.E.D.

Let E be a reflexive Banach space and $f : E \multimap E$ a multi-valued mapping.

Then, as in lemma 1, we can prove that f is compact if and only if the property i) of Lemma 1 holds, i.e. $\overline{\bigcup_n f(x_n)}$ is compact for every $x_n \rightharpoonup x$.

THEOREM 2. *Let C be a bounded, closed and convex subset of a reflexive Banach space* E, *with* $0 \in \text{int } C$.

Let

$$f : C \multimap E$$
$$g : C \multimap E$$
$$h : C \multimap E$$

be such that

a) $f = g + h$;

b) *g is an α-nonexpansive, convex-valued mapping and $(I-g)$ is demiclosed;*

c) *h is a convex-valued mapping satisfying the property* i) *of Lemma 1 and with weakly closed graph;*

d) *f satisfies the Leray-Schauder condition.*

Then f has at least one fixed point.

PROOF. As in theorem 1 we first prove that f is u.s. By Lemma 1 h is compact, by hypotheses it has weakly closed graph. Therefore h has closed graph (in the strong topology). Since $\overline{h(C)}$ is compact then h has closed graph if and only if h is u.s. with closed values. Thus f is u.s. being a sum of two u.s. maps.

Moreover f is α-nonexpansive since g is α-nonexpansive and h is compact.

Lemma 3 insures that $\inf\{d(x, f(x)),\ x \in C\} = 0$.

Now we must prove that $0 \in Im(I-f)$.

Let $\{y_n\}$ be a sequence in $Im(I-f)$ which converges to 0.

Clearly $y_n = x_n - z_n - w_n$, with $z_n \in h(x_n)$ and $w_n \in g(x_n)$.

As in theorem 1 we can assume $x_n \rightharpoonup x$, thus $M = \overline{\bigcup_n h(x_n)}$ is compact.

The sequence $\{z_n\}$ is contained in M and so it has a convergent subsequence $z_{n_k} \to z$.

Therefore $z \in h(x)$. Hence for a subsequence $\{\bar{x}_n\}$ of $\{x_n\}$ we have

$$\bar{x}_n \rightharpoonup x\,,\ \bar{z}_n \to z\,,\ \bar{z}_n \in h(\bar{x}_n)$$

and $z \in h(x)$.

On the other hand $\bar{y}_n + \bar{z}_n = \bar{x}_n - \bar{w}_n \in \bar{x}_n - g(\bar{x}_n)$ and $\bar{y}_n + \bar{z}_n \to z$.

It follows that $z \in x - g(x)$, i.e. $0 \in x - z - g(x)$.

Since $z \in h(x)$ we finally have

$$0 \in x - h(x) - g(x)\,.$$

Q.E.D.

Remark 1. Clearly f satisfies Leray-Schauder condition if $f(C) \subset C$ or, more generally, $f(\partial C) \subset C$, where ∂C is the boundary of C.

Remark 2. Clearly the result we mentioned in the Introduction (see S. P. SINGH [8]) is a consequence of our theorems.

Remark 3. It can be easily verified that f satisfies Leray-Schauder condition if the following property holds.

$$g(x) \cap \{(1+\lambda)x - h(x)\} = \emptyset, \qquad \forall \lambda > 0 \quad \text{and} \quad x \in \partial C.$$

REFERENCES

[1] DARBO G., *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat., Padova, **24**, pp. 84-92 (1955).

[2] DE FIGUEIREDO D. G., *Topics in non linear functional Analysis*, Lecture notes, University of Maryland (1967).

[3] FURI M. - VIGNOLI A., *On α-nonexpansive mappings and fixed points*, Rend. Acc. Naz. Lincei, vol. XLVIII, pp. 195-198 (1970).

[4] KURATOWSKI C., *Topologie*, Warzawa (1958).

[5] MARTELLI M., *A Rothe's type theorem for non compact acyclic-valued maps*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **10**, suppl. fasc. 0 (1974).

[6] MARTELLI M. - VIGNOLI A., *Some surjectivity results for non compact multi-valued maps*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli, Serie 4, Vol. XLI, pp. 3-11 (1974).

[7] NUSSBAUM R. D., *The fixed point index for local condensing mappings*, Ann. Mat. Pura e Applicata, serie 4, Vol. LXXXIX, pp. 217-258 (1971).

[8] SINGH S. P., *On a theorem of Reinermann*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Vol. LIX, pp. 46-48 (1973).

Una applicazione della teoria della categoria di Liusternik - Schnirelmann alle equazioni di Hartree Fock

Nota di A. M. MICHELETTI * e F. ZIRILLI **
presentata dal socio corrispondente LUIGI SALVADORI

(Adunanza dell' 8 novembre 1975)

RIASSUNTO. — Si studia l'esistenza delle soluzioni delle equazioni di Hartree Fock per un atomo con N elettroni per mezzo della teoria della categoria di Liusternik Schnirelmann, dopo aver introdotto alcune approssimazioni.

SUMMARY. — In a finite volume the existence of the solutions of the Hartree Fock equations is studied for an N electrons atom using the Liusternik-Schnirelmann theory of critical points.

INTRODUZIONE.

Nella presente nota si studia il problema dell'esistenza delle soluzioni delle equazioni di Hartree Fock.

Le equazioni di Hartree Fock [1] sono equazioni integro differenziali derivate da un principio variazionale, e sono di uso corrente in varie discipline della fisica e della chimica teorica.

La hamiltoniana di un atomo con N elettroni di numero atomico Z è:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{h^2}{2m} \Delta_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{2Ze}{r_i} + \sum_{i \neq j=1}^{N} \frac{2e^2}{r_{ij}} \tag{1.1}$$

dove la somma sulle coppie i, j è contata una sola volta escludendo il caso $i = j$.

Il primo termine in (1.1) è la somma delle energie cinetiche e Δ_i è il laplaciano nelle coordinate dell'i-esimo elettrone, il secondo

* Istituto Matematico L. TONELLI, Università di Pisa.
** Scuola Normale Superiore - Pisa.

termine è l'energia potenziale del campo del nucleo e r_i è la distanza fra il nucleo e l'i-esimo elettrone, il terzo termine è la interazione repulsiva dell'i-esimo con il j-esimo elettrone, ed r_{ij} è la distanza fra l'i-esimo e l'j-esimo elettrone.

Consideriamo ora il funzionale

$$\langle \psi, H\psi \rangle \tag{1.2}$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare in L^2 e $\psi \in L^2$ è una funzione di $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, ..., $(x_N\, y_N\, z_N)$.

Il funzionale (1.2) è il valore medio dell'energia del sistema nello stato descritto da ψ.

Il gradiente del funzionale (1.2) rispetto a ψ soggetto al vincolo

$$\langle \psi, \psi \rangle = 1 \tag{1.3}$$

che esprime la normalizzazione dell'ampiezza di probabilità è il problema agli autovalori per l'operatore H noto ai fisici come equazione di Schroedinger stazionaria, che determina gli autostati e gli autovalori dell'energia.

L'approssimazione di Hartree, (Hartre Fock) consiste nello assumere che ψ sia della seguente forma:

$$\psi(x_1\, y_1\, z_1, \ldots, x_N\, y_N\, z_N) = |u_1(x_1\, y_1\, z_1), \ldots, u_N(x_N\, y_N\, z_N)| \tag{1.4}$$

dove $|u_1, \ldots, u_N|$ è il prodotto (completamente antisimmetrizzato) delle funzioni $u_1, \ldots, u_N$.

Nel valutare il funzionale (1.2) l'approssimazione (1.4) permette di ridurre l'integrazione 3 N dimensionale in N integrazioni 3 dimensionali fatto che dal punto di vista numerico costituisce un indubbio vantaggio, infine (1.4) esprime in modo approssimato il fatto che la ampiezza ψ è data dal prodotto di quella $u_1, \ldots, u_N$ dei singoli elettroni.

L'analogo dell'equazione di Schroedinger stazionaria sarà ora lo studio delle equazioni ottenute facendo il gradiente di (1.2) rispetto a $u_1, \ldots, u_N$ quando ψ è data da (1.4) soggetto al vincolo

$$\langle u_i, u_i \rangle_{L^2(\mathbb{R}^1)} = 1 \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.5}$$

Le equazioni così ottenute sono nate come equazioni di Hartree (Hartree Fock).

Il lavoro euristico per la maggior parte numerico svolto dai fisici e dai chimici teorici su queste equazioni è enorme e risale fino agli inizi della fisica quantistica, solo in epoca molto più recente

lo sviluppo della analisi non lineare ha permesso di affrontare il problema con pieno rigore matematico.

In questa ultima direzione segnaliamo il lavoro di REEKEN [2] in cui nell'approssimazione di Hartree viene studiato tramite la teoria della biforcazione l'atomo di elio (N = 2), il lavoro di WOLKOWISKY [3] in cui il caso generico N elettroni è studiato nell'approssimazione di Hartree con tecniche di punto fisso e ancora un lavoro di REEKEN [4] in cui le equazioni di Hartree e Hartree-Fock sono studiate con varie tecniche compresi i metodi variazionali (condizione C).

In questo lavoro noi studiamo l'esistenza per le soluzioni delle equazioni di Hartree Fock tramite la teoria della categoria di Liusternik - Schrirelmann.

Nel caso di volume finito si dimostra l'esistenza di infinite soluzioni per le equazioni di Hartree-Fock che si possono pensare, come le approssimazioni delle autofunzioni dell'operatore H.

NOTAZIONI E TERMINOLOGIA.

Sia Ω un aperto limitato connesso di $\mathbb{R}^3$ con frontiera localmente lipschtziana e $0 \in \Omega$.

Sia $L_2(\Omega)$ lo spazio di Hilbert sui reali delle funzioni complesse $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ definite in Ω, con modulo a quadrato sommabile, con il prodotto scalare.

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \alpha(x)\,\tilde{\alpha}(x)\,dx + \int_\Omega \beta(x)\,\tilde{\beta}(x)\,dx$$

dove

$$g(x) = \alpha(x) + i\tilde{\beta}(x).$$

Sia $L_p(\Omega)$ lo spazio di Banach sui reali delle funzioni complesse $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ definite su Ω, con modulo p-sommabile e con la norma

$$\| f \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega | f(x) |^p\,dx .$$

Sia $H^1_0(\Omega)$ lo spazio di Hilbert sui reali ottenuto completando $\mathcal{C}^1_0(\Omega)$ (a valori complessi) secondo la norma indotta dal prodotto scalare

$$(f, g)_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x_i} + \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x_i} \right) dx .$$

Con $[L_2(\Omega)]^n$ e $[H_0^1(\Omega)]^n$ si indicano gli spazi di Hilbert prodotto, con $[L_p(\Omega)]^n$ lo spazio di Banach prodotto.

$-\Delta$ è l'operatore di Laplace con dati nulli al bordo caratterizzato dalla relazione

$$< -\Delta f, g >_{L^2} = (f, g)_{H_0^1} .$$

L'operatore di Laplace $-\Delta : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ è lineare autoaggiunto definito positivo, iniettivo, con dominio di definizione denso in $L_2(\Omega)$ e rango $L_2(\Omega)$.

LE EQUAZIONI DI HARTREE-FOCK.

Le equazioni di Hartree-Fock sono [1]

$$(1) \qquad \left(-\frac{h^2}{2m}\Delta - \frac{Ze}{|x|} \right) u_i(x) + e^2 \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} |u_j(y)|^2 \frac{u_i(x)}{|x-y|}\, dy -$$

$$- e^2 \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} u_i(y)\, \bar{u}_j(y)\, \frac{u_j(x)}{|x-y|}\, dv = \alpha_i u_i(x) \quad i = 1, \ldots, N$$

dove $-\Delta$ è l'operatore di Laplace h, e, m sono costanti positive, $u \equiv (u_1, \ldots, u_N) \in [L_2(\Omega)]^N$. Lo scopo di questo lavoro consiste nel mostrare l'esistenza di soluzioni del problema agli autovalori non lineari [1].

Poniamo:

$$N\,u = \left(e^2 \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} [|u_j(y)|^2 u_i(x) - u_i(y)\, \bar{u}_j(y)\, u_j(x)] \frac{dy}{|x-y|} \right)_{i=1,\ldots,N}$$

$$(2) \qquad L\,u = \left(\left(\frac{-h^2}{2m}\Delta - \frac{Ze}{|x|} \right) u_i(x) \right)_{i=1,\ldots,N} .$$

Ora possiamo scrivere (1) nel modo seguente

$$(3) \qquad L\,u + N\,u = \varepsilon\, u .$$

È noto che lo spettro dell'operatore autoaggiunto chiuso

$$L_1 \equiv \frac{-h^2}{2m}\Delta - \frac{Ze}{|x|} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$$

per il problema di Dirichlet con dati zero al bordo è costituito da

una successione di autovalori reali limitata inferiormente divergente a $+\infty$. Quindi si può scegliere $\mu > 0$ tale che la forma bilineare $\langle (L_1 + \mu I) f, g \rangle_{L^2(\Omega)} \equiv (((f, g)))$, è un prodotto scalare su $H_0^1(\Omega)$ equivalente al prodotto scalare canonico. Così $L_1 + \mu I : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ è un operatore chiuso definito positivo, iniettivo, surgettivo con dominio di definizione $\mathfrak{D}_1 \subset H_0^1(\Omega)$ denso in $L_2(\Omega)$, il cui operatore, inverso $(L_1 + \mu I)^{-1}$ è continuo.

Da questo segue immediatamente che l'operatore $L + \mu I : [L_2(\Omega)]^n \to [L_2(\Omega)]^n$ è autoaggiunto definito positivo, iniettivo, surgettivo con dominio di definizione $\mathfrak{D} \subset [H_0^1(\Omega)]^n$ denso in $[L_2(\Omega)]^n$ il cui inverso $(L + \mu I)^{-1} : [L_2(\Omega)]^n \to [H_0^1(\Omega)]^n$ è continuo.

Inoltre la forma bilineare su $[H_0^1(\Omega)]^n$

$$(((u, v))) \equiv \langle (L + \mu I) u, v \rangle_{[L^2(\Omega)]^n}$$

è un prodotto scalare su $[H_0^1(\Omega)]^n$ equivalente a quello canonico, e la cui norma indotta da $(((\cdot, \cdot)))$ è indicata con $|||\cdot|||$, nel seguito indicheremo con H lo spazio di Hilbert reale $[H_0^1(\Omega)]^n$ con il prodotto scalare $(((\cdot, \cdot)))$.

È chiaro che l'equazione (3) è equivalente all'equazione

$$u + (L + \mu I)^{-1} N u = \lambda (L + \mu I)^{-1} u \tag{4}$$

dove $\lambda = \varepsilon + \mu$.

Quindi il nostro problema è trovare $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in H$ soluzioni di (4). A questo scopo enunciamo il seguente teorema:

TEOREMA A. Siano φ e ψ due funzionali reali pari definiti su uno spazio di Hilbert reale separabile $\mathcal{H}$, con derivate di Frechet φ', ψ'.

Sia $r > 0$ indichiamo con

$$M_r(\varphi) = \{x \in \mathcal{H} : \varphi(x) = r\}.$$

Siano verificate le seguenti ipotesi:

A) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \varphi(x) > 0 \quad x \neq 0 \quad \lim_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

B) $(\varphi'(x), x)_{\mathcal{H}} > 0 \quad$ per ogni $\quad x \in \mathcal{H} \quad x \neq 0$

C) $\inf_{x \in M_r(\varphi)} (\varphi'(x), x)_{\mathcal{H}} = c > 0$

D) $\varphi', \psi' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sono operatori limitati (cioè trasformano insiemi limitati in insiemi limitati)

E) $\psi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{H}$, $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

F) $\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\psi' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore fortemente continuo (cioè se $x_n \to x_0$ in $\mathcal{H}$ allora $\psi'(x_n) \to \psi'(x_0)$ in $\mathcal{H}$)

G) per ogni $\eta_i > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\| \psi'(x + h) - \psi'(x) \| \leq \eta_i \qquad \| \varphi'(x + h) - \varphi'(x) \| \leq \eta_i$$

per ogni $x \in M_r(\varphi)$ e per ogni $h \in \mathcal{H}$ con $\| h \|_{\mathcal{H}} \leq \delta$

H) se $\{\tilde{x}_n\}_{n \in N} \subset M_r(\varphi)$ e $\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0$ e $\varphi'(\tilde{x}_n) \to w$ allora, $\tilde{x}_n \to \tilde{x}_0$.

Allora esiste una successione infinita di elementi distinti $\{x_n\}_{n \in N} \subset \mathcal{H}$ tale che

$$\psi'(x_n) - \frac{(\psi'(x_n), x_n)_H}{(\varphi(x_n), x_n)_H} \varphi'(x_n) = 0$$

con $\varphi(x_n) = r$ e $0 < \psi(x_n)$ decrescente a 0.

Dim.: questo teorema è dimostrato in [5] pag. 111.

Verifichiamo ora che l'equazione (4) soddisfa le ipotesi del Teorema A.

Il funzionale reale φ_1 definito su H mediante la relazione

$$(5) \qquad u(x) \equiv (\alpha_1(x) + i\,\beta_1(x), \ldots, a_n(x) + i\,\beta_n(x)) \to$$

$$\to \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} \int_{\Omega} \sum_{|p|=1} [(D^p \alpha_s(x))^2 + (D^p \beta_s(x))^2 +$$

$$+ \left(\mu - \frac{1}{|x|}\right)(\alpha_s^2(x) + \beta_s^2(x))]\, dx = \frac{1}{2} (((u, u)))$$

è differenziabile secondo Frechet in H e la sua derivata in u è data dall'operatore

$$(6) \qquad v(x) \equiv (\tilde{\alpha}_1(x) + i\,\tilde{\beta}_1(x), \ldots, \tilde{\alpha}_n(x) + i\,\tilde{\beta}_n(x)) \to$$

$$\to \sum_{s=1}^{N} \int_{\Omega} \sum_{|p|=1} [(D^p \alpha_s(x)\, D^p \tilde{\alpha}_s(x) + D^p \beta_s(x)\, D^p \tilde{\beta}_s(x)) +$$

$$+ \left(\mu - \frac{1}{|x|}\right)(\alpha_s(x)\, \tilde{\alpha}_s(x) + \beta_s(x)\, \tilde{\beta}_s(x))]\, dx = (((u, v))) .$$

Anche il funzionale reale φ_2 caratterizzato dalla relazione

$$(7) \qquad u(x) \equiv (\alpha_1(x) + i\beta_1(x), \ldots, \alpha_n(x) + i\beta_n(x)) \to$$

$$\to -\frac{1}{4} \sum_{s,t=1}^{N} \int_{\Omega\times\Omega} \Big\{ [\alpha_s^2(x) + \beta_s^2(x)]\ [\alpha_t^2(y) + \beta_t^2(y)] -$$

$$- [\alpha_s(y)\,\alpha_t(y) + \beta_s(y)\,\beta_t(y)]\ [\alpha_s(x)\,\alpha_t(x) + \beta_s(x)\,\beta_t(x)] +$$

$$+ [\alpha_s(y)\,\beta_t(y) - \alpha_t(y)\,\beta_s(y)]\ [\alpha_t(x)\,\beta_s(x) - \alpha_s(x)\,\beta_t(x)] \frac{dx\,dy}{|x-y|} =$$

$$= \frac{1}{4} ((((\mathrm{L} + \mu\,\mathrm{I})^{-1}\,\mathrm{N}\,u,\ u)))$$

è definito su H, dato che per il teorema di Sobolev, $u \in [\mathrm{L}^6(\Omega)]^N$, inoltre è differenziabile secondo Frechet in H e la sua derivata in u è data dall'operatore.

$$v(x) \equiv (\tilde{\alpha}_1(x) + i\tilde{\beta}_1(x), \ldots, \tilde{\alpha}_n(x) + i\tilde{\beta}_n(x)) \to w(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{s,t} \int_{\Omega\times\Omega} \Big\{ [\alpha_s(x)\,\tilde{\alpha}(x) + \beta_s(x)\,\tilde{\beta}_s(x)]\ [\alpha_t^2(y) + \beta_t^2(y)]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} [\alpha_s^2(x) + \beta_s^2(x)]\ [\alpha_t(y)\,\tilde{\alpha}_t(y) + \beta_t(y)\,\tilde{\beta}_t(y)] -$$

$$- \frac{1}{4} [\alpha_s(y)\,\tilde{\alpha}_t(y) + \tilde{\alpha}_s(y)\,\alpha_t(y)]\ [\alpha_t(x)\,\alpha_s(x) + \beta_s(x)\,\beta_t(x)] -$$

$$- \frac{1}{4} [\alpha_s(y)\,\alpha_t(y) + \beta_s(y)\,\beta_t(y)]\ [\alpha_t(x)\,\tilde{\alpha}_s(x) + \tilde{\alpha}_t(x)\,\alpha_s(x)] -$$

$$- \frac{1}{4} [\beta_s(y)\,\tilde{\beta}_t(y) + \tilde{\beta}_s(y)\,\beta_t(y)]\ [\alpha_t(x)\,\alpha_s(x) + \beta_s(x)\,\beta_t(x)] +$$

$$- \frac{1}{4} [\alpha_s(y)\,\alpha_t(y) + \beta_s(y)\,\beta_t(y)]\ [\tilde{\beta}_s(x)\,\beta_t(x) + \beta_s(x)\,\tilde{\beta}_t(x)] +$$

$$+ \frac{1}{4} [\tilde{\alpha}_t(y)\,\beta_s(y) - \tilde{\alpha}_s(y)\,\beta_t(y)]\ [\alpha_s(x)\,\beta_t(x) - \alpha_t(x)\,\beta_s(x)] +$$

$$+ \frac{1}{4} [\alpha_t(y)\,\beta_s(y) - \alpha_s(y)\,\beta_t(y)]\ [\tilde{\alpha}_s(x)\,\beta_t(x) - \tilde{\alpha}_t(x)\,\beta_s(x)] +$$

$$+\frac{1}{4}\,[\alpha_t(y)\,\tilde{\beta}_s(y)-\alpha_s(y)\,\tilde{\beta}_t(y)]\,[\alpha_s(x)\,\beta_t(x)-\alpha_t(x)\,\beta_s(x)]+$$

$$+\frac{1}{4}\,[\alpha_t(y)\,\beta_s(y)-\alpha_s(y)\,\beta_t(y)]\,[\alpha_s(x)\,\tilde{\beta}_t(x)-\alpha_t(x)\,\tilde{\beta}_s(x)]\Big\}\,\frac{dx\,dy}{|x-y|}\,.$$

Da cui facilmente

$$w(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_n,\tilde{\beta}_n)=\sum_{s,t}\int_{\Omega\times\Omega}\Big\{[\alpha_s(x)\,\tilde{\alpha}_s(x)+\beta_s(x)\,\tilde{\beta}_s(x)]$$

$$[\alpha_t^2(y)+\beta_t^2(y)]-\frac{1}{2}\,\alpha_s(y)\,\tilde{\alpha}_t(y)\,[\alpha_t(x)\,\alpha_s(x)+\beta_s(x)\,\beta_t(x)]+$$

$$-\frac{1}{2}\,\alpha_s(x)\,\tilde{\alpha}_t(x)\,[\alpha_t(y)\,\alpha_s(y)+\beta_s(y)\,\beta_t(y)]+$$

$$-\frac{1}{2}\,\beta_s(y)\,\tilde{\beta}_t(y)\,[\alpha_s(x)\,\alpha_t(x)+\beta_s(x)\,\beta_t(x)]+$$

$$-\frac{1}{2}\,\beta_s(x)\,\tilde{\beta}_t(x)\,[\alpha_s(y)\,\alpha_t(y)+\beta_s(y)\,\beta_t(y)]+$$

$$+\frac{1}{2}\,\tilde{\alpha}_t(y)\,\beta_s(y)\,[\alpha_s(x)\,\beta_t(x)-\alpha_t(x)\,\beta_s(x)]+$$

$$+\frac{1}{2}\,\tilde{\alpha}_s(x)\,\beta_t(x)\,[\alpha_t(y)\,\beta_s(y)-\alpha_s(y)\,\beta_t(y)]+$$

$$+\frac{1}{2}\,\alpha_t(y)\,\tilde{\beta}_s(y)\,[\alpha_s(x)\,\beta_t(x)-\alpha_t(x)\,\beta_s(x)]+$$

$$+\frac{1}{2}\,\alpha_s(x)\,\tilde{\beta}_t(x)\,[\alpha_t(y)\,\beta_s(y)-\alpha_s(y)\,\beta_t(y)]\Big\}\frac{dx\,dy}{|x-y|}=$$

$$=\sum_{s,t}\int_{\Omega\times\Omega}\Big\{[\alpha_s(x)\,\tilde{\alpha}_s(x)+\beta_s(x)\,\tilde{\beta}_s(x)]\,[\alpha_t^2(y)+\beta_t^2(y)]+$$

$$-\alpha_s(x)\,\tilde{\alpha}_t(x)\,[\alpha_t(y)\,\alpha_s(y)+\beta_t(y)\,\beta_s(y)]-$$

$$-\beta_s(x)\,\tilde{\beta}_t(x)\,[\alpha_s(y)\,\alpha_t(y)+\beta_s(y)\,\beta_t(y)]+$$

$$+\tilde{\alpha}_t(x)\,\beta_s(x)\,[\alpha_s(y)\,\beta_t(y)-\alpha_t(y)\,\beta_s(y)]+$$

$$+\alpha_t(x)\,\tilde{\beta}_s(x)\,[\alpha_s(y)\,\beta_t(y)-\alpha_t(y)\,\beta_s(y)]=(((\mathrm{L}+\mu\,\mathrm{I})^{-1}\,\mathrm{N}\,u,v)))\,.$$

Concludendo il funzionale reale $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ definito su H è differenziabile secondo Frechet su H e la sua derivata in u è:

$$\varphi'(u) = u + (\mathrm{L} + \mu\,\mathrm{I})^{-1}\,\mathrm{N}\,u\,. \tag{8}$$

Infine il funzionale reale ψ su H definito dalla relazione

$$u \equiv (\alpha_1 + i\,\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\,\beta_n) \longrightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_s (\alpha_s^2 + \beta_s^2) \tag{9}$$

è differenziabile secondo Frechet in H e la sua derivata in u è l'operatore

$$v(x) \equiv (\alpha_1(x) + i\,\beta_1(x), \ldots, \alpha_n(x) + i\,\beta_n(x)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_s \int_\Omega (\alpha_s(x)\,\tilde{\alpha}_s(x) + \beta_s(x)\,\tilde{\beta}_s(x))\,dx = ((((\mathrm{L} + \mu\,\mathrm{I})^{-1}\,u, v))).$$

Da cui

$$\psi'(u) = (\mathrm{L} + \mu\,\mathrm{I})^{-1}\,u\,. \tag{10}$$

Quindi φ e ψ sono due funzionali reali pari definiti sullo spazio di Hilbert reale separabile H e derivabili secondo Frechet. Verifichiamo ora che φ e ψ soddisfano le altre ipotesi del Teorema A.

A) Dalla definizione di φ segue che $\varphi(0) = 0$ vediamo che $\varphi(u) > 0 \quad u \neq 0$, valutiamo dapprima

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{4}((((\mathrm{L} + \mu\,\mathrm{I})^{-1}\,\mathrm{N}u, u))) = \tag{11}$$

$$= \sum_{s,t} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{dx\,dy}{|x-y|}\,[|u_s(x)|^2\,|u_t(y)|^2 - \overline{u_s(x)}\,\overline{u_t(y)}\,u_s(y)\,u_t(x)] =$$

$$= \sum_{s<t} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{dx\,dy}{|x-y|}\,\{[|u_s(x)|^2\,|u_t(y)|^2 - u_s(x)\,\overline{u_t(y)}\,u_s(y)\,u_t(x)] +$$

$$+ [|u_t(x)|^2\,|u_s(y)|^2 - \overline{u_t(x)}\,\overline{u_s(y)}\,u_t(y)\,u_s(x)]\} =$$

$$= \sum_{s<t} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{dx\ dy}{|x-y|} \{|u_s(x)|^2 |u_t(y)|^2 + |u_t(x)|^2 |u_s(y)|^2 +$$

$$- 2\,\mathrm{Re}\,\overline{u_s(x)}\, u_t(x)\, \overline{u_t(y)}\, u_s(y)\} \geq$$

$$\geq \sum_{s<t} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{dx\ dy}{|x-y|} \{|u_s(x)|\ |u_t(y)| - |u_t(x)|\ |u_s(y)|\}^2 \geq 0.$$

Da (11) segue subito che $\varphi(u) = \frac{1}{2} |||u|||^2 + \varphi_2(u) > 0$ per $u \neq 0$ e $\varphi(u) = 0$ implica $u = 0$.

B) Da (8) e da (11) si ha che per $u \neq 0$

$$(12) \quad (((\varphi'(u), u))) = (((u + (L + \mu I)^{-1} Nu, u))) = |||u|||^2 + 4\varphi_2(u).$$

C) Dalla definizione di $M_r(\varphi)$ da (12) e da (8) si ha

$$\inf_{u\in M_r(\varphi)} (((\varphi(u), u))) = \inf_{u\in M_r(\varphi)} \{|||u|||^2 + 4\varphi_2(u)\} \geq 2r > 0.$$

D) Da (10) si ha che $\psi' : H \to H$ è l'operatore ottenuto componendo l'immersione continua, $j : H \to [L_2(\Omega)]^n$ con l'operatore lineare continuo $(L + \mu I)^{-1} : [L_2(\Omega)]^n \to H$, quindi ψ' è lineare e continuo. Da (8) si ha che $\varphi' : H \to H$ è l'operatore che associa ad u, $\varphi'(u) = u + (L + \mu I)^{-1} Nu$. È evidente che per avere la limitatezza di φ', basta verificare la limitatezza di $(L + \mu I)^{-1} N$. Si osservi che Nu è un monomio di grado 3, la cui forma polare associata è

$$(12) \quad \tilde{N}(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} u_s^{(\sigma_1)}(x) \int_\Omega \sum_t \frac{u_t^{(\sigma_2)}(y)\, \overline{u_t^{(\sigma_3)}(y)}}{|x-y|} dy +$$

$$- u_t^{(\sigma_1)}(x) \int_\Omega \sum_t \frac{u_s^{(\sigma_2)}(y)\, \overline{u_t^{(\sigma_3)}(y)}}{|x-y|} dy$$

dove $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ descrive l'insieme delle permutazioni degli indici 1, 2, 3. Inoltre per il Teorema di Sobolev vale la disuguaglianza seguente

$$(13) \quad \sum_i \int_\Omega dx \left| u_i^{(\sigma_1)}(x) \sum_j \int_\Omega \frac{u_j^{(\sigma_2)}(y)\, \overline{u_j^{(\sigma_3)}(y)}}{|x-y|} dy \right. -$$

$$- \sum_j u_j^{(\sigma_1)}(x) \int_\Omega u_i^{(\sigma_2)}(y)\, u_j^{(\sigma_3)}(y) \frac{dy}{|x-y|} \Bigg| \leq$$

$$\leq K \| u^{(\sigma_1)} \|^2_{[L_4(\Omega)]^N} \| u^{(\sigma_2)} \|^2_{[L_4(\Omega)]^N} \| u^{(\sigma_3)} \|^2_{[L_4(\Omega)]^N}.$$

Da (13), (12) e dalla continuità delle immersioni di $[L_4(\Omega)]^N$ in $[L_2(\Omega)]^N$ e di H in $[L_4(\Omega)]^N$ si ha

$$(14) \qquad \| \tilde{N}(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \|_{[L_2(\Omega)]^N} \leq c \,|||\, u^{(1)} \,|||\, |||\, u^{(2)} \,|||\, |||\, u^{(3)} \,|||$$

da questo segue la limitatezza di φ'.

E) Segue immediatamente dalla definizione di ψ.

F) Da (10) abbiamo che $\psi' = (L + \mu I)^{-1} \circ j$ dove j è l'immersione di H in $[L_2(\Omega)]^N$. Dall'iniettività e linearità di $(L + \mu I)^{-1}$ e j si ha $\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Infine dalla compattezza di j per il teorema di Rellich e dalla continuità di $(L + \mu I)^{-1} : [L_2(\Omega)]^N \to H$ segue il resto dell'ipotesi F.

G) L'affermazione relativa a ψ' è una conseguenza banale della sua linearità e continuità. Per quanto riguarda φ', osserviamo che dalla definizione di $\tilde{N}$ e da (14) segue

$$|||\, (L + \mu I)^{-1} N(x + h) - (L + \mu I)^{-1} N(x) \,||| \leq$$

$$\leq \| (L + \mu I)^{-1} \| \, \| N(x + h) - N(x) \|_{[L_2(\Omega)]^N} \leq$$

$$\leq \| (L + \mu I)^{-1} \| \, [\| \tilde{N}(x, x, h) \|_{[L_2(\Omega)]^N} + \| \tilde{N}(x, h, x + h) \|_{[L_2(\Omega)]^N} +$$

$$+ \| \tilde{N}(h, x + h, x + h) \|_{[L_2(\Omega)]^N}] \leq 2c \,|||\, h \,|||\, [|||\, x \,|||^2 + |||\, x + h \,|||^2].$$

Da questa disuguaglianza e dal fatto che se $x \in M_r(\varphi)$ allora $|||\, x \,||| \leq 2r$, si ha che la ipotesi G vale per φ'.

H) Dapprima verifichiamo che $N : H \to [L_2(\Omega)]^N$ è un operatore fortemente continuo. Sia $u_n \rightharpoonup u_0$ in H, dalla definizione di $\tilde{N}$ e dalla (14) si ha

$$\| Nu_n - Nu_0 \|_{[L_2(\Omega)]^N} \leq 2c \| u_n - u_0 \|_{[L_4(\Omega)]^N} \left\{ \| u_n \|^2_{[L_4(\Omega)]^N} + \| u_0 \|^2_{[L_4(\Omega)]^N} \right.$$

Ma per il teorema di Rellich u_n converge ad u_0 in $[L_4(\Omega)]^N$ quindi Nu_n converge in $[L_2(\Omega)]^N$ ad Nu_0 e $(L + \mu I)^{-1} Nu_n$ converge ad $(L + \mu I)^{-1} Nu_0$ in H.

A questo punto è banale che se $u_n \rightarrow u_0$ in H e $u_n(L+\mu I)^{-1}Nu_n \rightarrow w$ in H, allora $u_n \rightarrow u_0$ in H.

Concludendo, poiché sono verificate per l'equazione (4) le ipotesi del Teorema A si ha:

TEOREMA: Per ogni $r > 0$, esistono una infinità numerabile di soluzioni $u_i \in H$ della equazione

$$u_i + (L + \mu I)^{-1} Nu_i = \lambda_i (L + \mu I)^{-1} u_i$$

tali che

$$\frac{1}{2} |||\, u_i \,|||^2 + \frac{1}{4} ((((L + \mu I)^{-1} Nu_i , u_i))) = r$$

e

$$\lambda_i = \frac{|||\, u_i \,|||^2 + ((((L + \mu I)^{-1} Nu_i , u_i)))}{((((L + \mu I)^{-1} u_i , u_i)))} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] SLATER J. C., Quantum theory of matter Mc Graw Hill, New York (1968).
[2] REEKEN M., J. Math. Phys., **11**, 2505-2512 (1970).
[3] WOLKOWRISKY J. H., Indiana Math. J., **22**, 551-568 (1972).
[4] REEKEN M., in *Eigenvaules of nonlinear problems*, CIME III Ciclo '74. Ed. G. Prodi - Cremonese 2974.
[5] FUCIK - NECAS - SOUCEK - SOUCEK, *Spectral Analysis of nonlinear operators*, Springer-Verlag. Lect. notes in Math. n. 346 (1973).

Disequazioni variazionali su varietà Riemanniane di dimensione finita *

Nota di DOMENICO PERRONE **
presentata dal socio corrispondente G. STAMPACCHIA

(Adunanza dell' 8 novembre 1975)

RIASSUNTO. — In questa nota vengono estesi su una varietà Riemanniana di dimensione finita alcuni risultati ottenuti tramite disequazioni variazionali valide in $\mathbb{R}^n$.

SUMMARY. — In this paper certain results obtained by variational inequality proved for $\mathbb{R}^n$ are generalizated for Riemannian manifolds of finite dimension.

INTRODUZIONE.

In questo lavoro tratto un problema propostomi dal Prof. G. Stampacchia di estendere su una varietà Riemanniana M di dimensione finita alcuni risultati ottenuti tramite disequazioni variazionali valide in $\mathbb{R}^n$.

Il risultato è stato ottenuto per le varietà Riemanniane M complete che siano semplicemente connesse e a curvatura ≤ 0.

Dopo alcune premesse su questa classe di varietà Riemanniane si sono dimostrati i teoremi del punto fisso di Brower.

Nel § 3 si è dimostrato che per M, come già per $\mathbb{R}^n$, basta la continuità dell'operatore $F : \mathbb{K} \to T(M)$ ($\mathbb{K}$ chiuso convesso limitato di M, T(M) fibrato tangente) per assicurare l'esistenza di una soluzione $x_0 \in \mathbb{K}$ della d.v.:

$$g_{x_0}(F(x_0), X) \geq 0 \qquad \forall X \in \mathrm{Exp}_{x_0}^{-1} \mathbb{K} \subset T_{x_0}(M), \qquad (*)$$

mentre la stretta monotonia assicura l'unicità della soluzione.

* Lavoro eseguito mentre usufruivo di una borsa di studio del C.N.R. presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

** Indirizzo dell'autore: Istituto di matematica dell'Università di Lecce.

È stato inoltre dimostrato un teorema di separabilità (Th. 3.1) sotto questa forma:

se x_1 e x_2 sono le soluzioni del problema (*) relativamente a due chiusi convessi $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ con $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_1$, $x_1 \neq x_2$ e $F(x_2) \neq 0$, allora x_1 e $\mathbb{K}_2$ sono separati dall'ipersuperfice Γx_2 geodetica in x_2, supporto di $\mathbb{K}_2$ in x_2.

Si è visto infine come il problema della ricerca del minimo su un convesso $\mathbb{K}$ della varietà M può ricondursi a un problema di diseq. variaz. su varietà.

Desidero ringraziare il Prof. G. Stampacchia e la Prof.ssa I. Cattaneo Gasparini per gli utili colloqui avuti con loro sull'argomento.

§ 1. - Varietà Riemanniane omeomorfe a $\mathbb{R}^n$.

Sia M una varietà diff.le connessa Riemanniana con metrica g avente $\dim M = n$.

M può dotarsi di una struttura di spazio metrico con la distanza d definita da

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma) \qquad \forall p, q \in M$$

ove $L(\gamma)$ è la lunghezza nella metrica g di una generica curva γ di M che congiunge p e q.

La topologia originale di M coincide con la topologia definita dalla distanza d.

Def. 1.1. M la diremo geodeticamente completa (o completa) se ogni geodetica $\gamma : [ab] \to M$ può estendersi alla geodetica infinita $\gamma(t)$ definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Sussiste il seguente *teorema fondamentale* dovuto a Hopf-Rinow che dice: se M è geodeticamente completa, allora ogni coppia di punti $p, q \in M$ può essere congiunta da una geodetica minimale di lunghezza $d(p, q)$.

Osservazione 1.1. Detto $T_p(M)$ lo spazio tangente in $p \in M$, fissato $X \in T_p(M)$, indicheremo con $\gamma_X(t)$ la geodetica definita dal vettore X cioè tale che $\gamma_X(0) = p$ e $\dot{\gamma}_X(0) = X$.

L'applicazione di $T_p(M) \to M$ tale che $X \to \gamma_X(1)$ si indica con Exp_p e si chiama applicazione esponenziale.

Da notare che l'applicazione Exp_p in generale non è detto che sia definita $\forall X \in T_p(M)$, però se M è completa allora per ogni

$p \in M$ Exp_p è definita su tutto lo spazio $T_p(M)$ e inoltre Exp_p è continua e surgettiva (cfr. [2], pag. 58).

PROP. 1.1. Se la varietà M oltre che completa è tale che per ogni $q_1, q_2 \in M$ esiste un'unica geodetica (che sarà quindi quella minimale) che li congiunge, allora l'applicazione Exp_p per ogni $p \in M$ è anche ingettiva e $\mathrm{Exp}_p^{-1} : M \to T_p(M)$ è continua.

Dim. Proviamo l'ingettività di Exp_p cioè proviamo che se $\mathrm{Exp}_p X = \mathrm{Exp}_p Y$ allora $X = Y$ e ciò per ogni $X, Y \in T_p(M)$.

Sia $\mathrm{Exp}_p X = \mathrm{Exp}_p Y$, allora $\gamma_X(1) = \gamma_Y(1) = q$ e $\gamma_X(0) = p = \gamma_Y(0)$ cioè $\gamma_X(t)$ e $\gamma_Y(t)$ sono due geodetiche che congiungono p e q, pertanto $\gamma_X(t) = \gamma_Y(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Da ciò segue che $\dot{\gamma}_X(0) = \dot{\gamma}_Y(0)$ cioè $X = Y$.

Proviamo ora che Exp_p^{-1} è continua cioè proviamo che se $q_n, q \in M$ e $q_n \to q$, allora $X_n = \mathrm{Exp}_p^{-1} q_n \to X = \mathrm{Exp}_p^{-1} q$. Sia $q_n \to q$, allora $\mathrm{Exp}_p X = q = \lim_n q_n = \lim_n \mathrm{Exp}_p X_n = \mathrm{Exp}_p (\lim_n X_n)$ ed essendo Exp_p bigettiva segue che $X = \mathrm{Exp}_p^{-1} q = \lim_n X_n$. c.v.d.

LEMMA 1.1. Fissato $V \in T_p(M)$ e detta $\gamma_V(t)$ la geodetica individuata dal vettore V e definita per $t \in [0, 1]$, allora risulta

$$L(\gamma_V(t)) = \| V \| .$$

Dim. Siccome la varietà M è Riemanniana scegliamo come connessione ∇ su M quella Riemanniana e perciò tale connessione sarà compatibile con la metrica g.

Quindi posto $\gamma(t) = \gamma_V(t)$ segue che

$$\frac{d}{dt}\, g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2\, g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{\gamma}(t))$$

e siccome $\gamma(t)$ è una geodetica, è identicamente $\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{\gamma}(t) = 0$.

Pertanto abbiamo $\frac{d}{dt}\, g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ cioè $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$ non dipende da t. Ora per $t = 0$ $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) = g_p(V, V) = \| V \|^2$ e quindi segue che

$$L(\gamma_V(t)) = \int_0^1 [g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))]^{1/2}\, dt = \int_0^1 \| V \|\, dt = \| V \| . \qquad \text{c.v.d.}$$

Indicheremo con $B_R(p) = \{q \in M / d(p, q) < R\}$ la palla di centro p e raggio R in M.

Mentre indicheremo con $V_R(0) = \{X \in T_p(M) / \|X\| < R\}$ la palla di centro l'origine e raggio R nello spazio tangente $T_p(M)$.

PROP. 1.2. Nelle ipotesi della Prop. 1.1 risulta che $\forall R > 0$ $\mathrm{Exp}_p V_R(0) = B_R(p)$, cioè $\mathrm{Exp}_p : V_R(0) \to B_R(p)$ è un omeomorfismo.

Dim. Sia $q \in \mathrm{Exp}_p V_R(0)$, ciò implica che $q = \mathrm{Exp}_p X$ con $X \in V_R(0)$ e perciò avremo: $\gamma_X(0) = p$, $\gamma_X(1) = q$ e $\|X\| < R$.

Ora tenendo conto che $\gamma_X(t)$ è la geodetica minimale, abbiamo che $d(p, q) = L(\gamma_X(t)) =$ (cfr. Lemma 1.1) $= \|X\| < R$ cioè $q \in B_R(p)$ e quindi $\mathrm{Exp}_p V_R(0) \subseteq B_R(p)$.

Viceversa se $q \in B_R(p)$ abbiamo, indicato con X il vettore di $T_p(M)$ tale che $\gamma_X(1) = q$, che $\|X\| = L(\gamma_X(t)) = d(p, q) < R$.

Pertanto $X \in V_R(0)$ e $q = \mathrm{Exp}_p X$ cioè $q \in \mathrm{Exp}_p V_R(0)$.

OSSERVAZIONE 1.2. Una classe di varietà che verifichino le ipotesi della Prop. 1.1 è costituita da varietà Riemanniane complete che siano semplicemente connesse e aventi curvatura sezionale ≤ 0 in ogni punto. Anzi questo tipo di varietà sono diffeomorfe allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ (cfr. [5], pag. 102), però per il nostro scopo ci basta che siano omeomorfe a $\mathbb{R}^n$.

Due esempi di questo tipo di varietà sono: (i) paraboloide iperbolico $z = x^2 - y^2$, con curvatura < 0. (ii) l'aperto di $\mathbb{R}^n$ definito da

$$(y^1)^2 + \ldots\ldots + (y^n)^2 < a^2$$

rispetto alla metrica Riemanniana data da

$$ds^2 = \frac{a^2 [(a^2 - \Sigma_i (y^i)^2)(\Sigma_i (dy^i)^2) - (\Sigma_i y^i dy^i)^2]}{[a^2 - \Sigma_i (y^i)^2]^2},$$

con curvatura uguale a $-1/a^2$.

§ 2. - TEOREMI DI BROWER SU VARIETÀ RIEMANNIANE.

Indicheremo con M una varietà Riemanniane n-dimensionale completa che sia semplicemente connessa e a curvatura sezionale ≤ 0 in ogni punto. Su questo tipo di varietà valgono i due teoremi di Brower.

TEOREMA DI BROWER 2.1. $F : B_R(p) \to B_R(p)$ continua, allora esiste $q \in B_R(p)$ tale che $F(q) = q$.

Dim. Grazie alla Prop. 1.2 possiamo porre $B_R(p) = \mathrm{Exp}_p V_R(0)$, con $\mathrm{Exp}_p : V_R(0) \to B_R(p)$ omeomorfismo.

Consideriamo allora l'applicazione

$$\Phi = \mathrm{Exp}_p^{-1} \circ F \circ \mathrm{Exp}_p : V_R(0) \to V_R(0).$$

Tale Φ è continua in quanto composta di funzioni continue, perciò applicando il teorema di Brower valido in $\mathbb{R}^n$ abbiamo che esiste $X \in V_R(0)$ tale che $\Phi(X) = X$ cioè $X = \mathrm{Exp}_p^{-1}(F(\mathrm{Exp}_p X))$. Pertanto $\mathrm{Exp}_p X = F(\mathrm{Exp}_p X)$ e posto $q = \mathrm{Exp}_p X$, abbiamo che esiste $q \in B_R(p)$ tale che $F(q) = q$. c.v.d.

LEMMA 2.1. Sia $x \in M$ e $\mathbb{K}$ un chiuso convesso [1] limitato di M, allora esiste uno ed uno solo punto $x_0 \in \mathbb{K}$ tale che $d(x, x_0) \leq d(x, y)$ per ogni $y \in \mathbb{K}$ (si pone $x_0 = pr_{\mathbb{K}} x$, ove la $pr_{\mathbb{K}}$ la diremo proiezione su $\mathbb{K}$).

Dim. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ tale che $f(y) = d(x, y)$ per ogni $y \in \mathbb{K}$.

Tale funzione è continua in $\mathbb{K}$ chiuso limitato, perciò esiste $x_0 \in \mathbb{K}$ di minimo per la f cioè $d(x, x_0) \leq d(x, y)$ per ogni $y \in \mathbb{K}$.

L'unicità di x_0 seguirà dal lemma 2.3.

LEMMA 2.2. Se $x_0 = pr_{\mathbb{K}} x$, allora detto $X \in T x_0(M)$ tale che $\mathrm{Exp}_{x_0} X = x$ si ha che:

$$(2.1) \qquad g_{x_0}(X, Y) \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad Y \in \mathrm{Exp}_{x_0}^{-1} \mathbb{K} \subset T_{x_0}(M).$$

Dim. Osserviamo intanto che se abbiamo una funzione $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ C^1, con $\mathbb{K}$ chiuso convesso di M che ammette un punto x_0 di minimo allora risulta:

$$g_{x_0}(\mathrm{grad}.\, f(x_0), Y) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad Y \in \mathrm{Exp}_{x_0}^{-1} \mathbb{K}.$$

Difatti fissato $y \in \mathbb{K}$ e considerata la geodetica $\gamma_1(t) = \gamma(x_0, y)$, segue che esiste $Y \in T_{x_0}(M)$ tale che $\gamma_Y(t) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$

[1] $\mathbb{K}$ lo diciamo convesso quando comunque si prendano due punti di $\mathbb{K}$, la geodetica che li congiunge stà in $\mathbb{K}$.

cioè $\dot{\gamma}(0) = Y$, $\gamma(0) = x_o$ e $\gamma(1) = y$. Prendiamo ora la funzione $\Phi(t) = f(\gamma(t))$ (ha senso in quanto essendo $|K$ convesso è $\gamma(t) \subset |K$), questa $\Phi(t)$ ha minimo per $t = 0$ perciò sarà $\Phi'(0) \geq 0$.

D'altronde nella carta locale fissata si ha

$$\Phi'(0) = \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_o) \frac{dx^i}{dt}(0) = \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_o)\, y^i = \Sigma_{ik}\, \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_o)\, y^k =$$

$$= \Sigma_{ik}\, \Sigma_j (g_{jk}\, g^{ji})(x_o) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_o)\, y^k = \Sigma_{ijk}\, g_{jk}(x_o)\, g^{ij}(x_o) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_o)\, y^k =$$

$$= \Sigma_{jk}\, g_{jk}(x_o) \left(\Sigma_i\, g^{ij}(x_o) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_o) \right) y^k =$$

$$= g_{x_o} \left(\Sigma_{ij}\, g^{ij}(x_o) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_o) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{x_o}, y^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{x_o} \right) =$$

$$= g_{x_o} (\text{grad.}\, f(x_o), Y),$$

pertanto

$$g_{x_o} (\text{grad.}\, f(x_o), Y) \geq 0 \qquad \forall Y \in \text{Exp}_{x_o}^{-1} |K .$$

Ora se come $f : |K \to |R$ prendiamo la funzione $f(y) = d(x, y)$ per ogni $y \in |K$, allora risulta grad. $f(x_o) = -X/\|X\|$ ove X è il vettore di $T_{x_o}(M)$ tale che $\text{Exp}_{x_o} X = x$.

Quindi sostituendo troviamo che

$$g_{x_o} (-X/\|X\|, Y) \geq 0 \quad \text{cioè}$$

$$g_{x_o} (X, Y) \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad Y \in \text{Exp}_{x_o}^{-1} |K . \qquad \text{c.v.d.}$$

LEMMA 2.3. La $pr_{|K} : x \in M \to y \in |K$ è non espansiva (ove y è il punto di $|K$ di minima distanza da x).

Dim. Fissati $x_1, x_2 \in M$, siano $y_1 = pr_{|K}\, x_1$ e $y_2 = pr_{|K}\, x_2$.

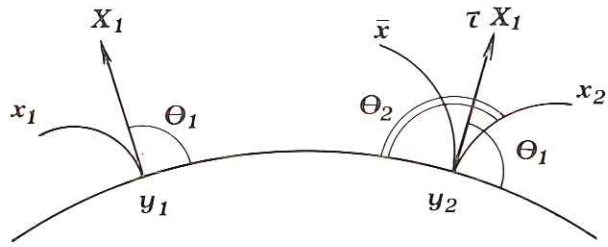
Intanto osserviamo che gli archi geodetici $\gamma(x_1, y_1)$ e $\gamma(x_2, y_2)$ devono formare con $\gamma(y_1, y_2)$ angoli θ_1 e θ_2 ottusi o retti (altrimenti y_1 e y_2 non sarebbero i punti di $\gamma(y_1, y_2)$ di minima distanza da x_1 e x_2 rispettivamente).



I vari casi che si possono presentare sono questi:

1°) $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 > \frac{\pi}{2}$, 2°) $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 > \frac{\pi}{2}$ oppure $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, 3°) $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Nel 1°) e 2°) caso, l'arco geodetico $\gamma(\bar{x}, y_2)$ (ove $\bar{x} = \mathrm{Exp}_{y_2} \tau X_1$ [2])



si verrà a trovare naturalmente prima dell'arco geodetico $\gamma(x_2, y_2)$, per cui segue che $d(x_1, \bar{x}) \leq d(x_1, x_2)$. D'altronde considerando il parallelogrammoide individuato dai punti y_1, y_2, $\bar{x}$, x_1, vale la formula di Levi-Civita $k = \frac{a^2 - a'^2}{S^2}$ (cfr. [1], pag. 233) dove a è la lunghezza dell'arco geodetico $\gamma(y_1, y_2)$, a' quella dell'arco geodetico $\gamma(x_1, \bar{x})$, S l'area del parallelogrammoide e k la curvatura.

Siccome è $k \leq 0$, allora sarà $a \leq a'$ cioè $d(y_1, y_2) \leq d(x_1, \bar{x})$, ma $d(x_1, \bar{x}) \leq d(x_1, x_2)$ perciò $d(y_1, y_2) \leq d(x_1, x_2)$.

Nel 3°) caso entrambi gli archi geodetici $\gamma(x_1, y_1)$ e $\gamma(x_2, y_2)$ formano con $\gamma(y_1, y_2)$ un angolo retto.

Siamo ora σ e σ' le geodetiche ottenute dal prolungamento di $\gamma(x_1, y_1)$ e $\gamma(x_2, y_2)$. Siccome l'arco geodetico $\gamma(y_1, y_2)$ è ortogonale a entrambe le geodetiche σ e σ' allora (cfr. [1] pag. 264 punto 1°) questo realizza la minima distanza fra σ e σ' ed è l'unico segmento geodetico ortogonale a entrambe le geodetiche σ e σ'.

Pertanto $d(y_1, y_2) \leq d(x_1, x_2)$.

Resta così completamente provata la non espansività di $pr_{|K}$.

Corollario 2.1. Essendo la $pr_{|K}$ non espansiva segue che:

1) Il punto di minima distanza è unico.

2) La $pr_{|K}$ è una applicazione continua di M in $|K$.

[2] τ è lo spostamento parallelo da $T_{y_1}(M)$ a $T_{y_2}(M)$ lungo la geodetica $\gamma(y_1, y_2)$.

Dal corollario 2.1 segue, operando con la stessa tecnica usata in $\mathbb{R}^n$, il seguente teorema:

TEOREMA DI BROWER ESTESO 2.2. $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ continua, $\mathbb{K}$ chiuso convesso limitato di M, allora esiste $x_0 \in \mathbb{K}$ tale che $F(x_0) = x_0$.

§ 3. - DISEQUAZIONE VARIAZIONALE SU VARIETÀ RIEMANNIANA.

Sia M una varietà Riemanniana del tipo considerato nel paragrafo 2.

Indicheremo con $T(M)$ la varietà fibrata dei vettori tangenti. Sia $\mathbb{K}$ un chiuso convesso non vuoto di M ed $F : \mathbb{K} \to T(M)$ continua tale che $x \to (x, F(x))$ con $F(x) \in T_x(M)$.

Il problema di trovare un $x_0 \in \mathbb{K}$ tale che:

$$(3.1) \qquad g_{x_0}(F(x_0), X) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad X \in \operatorname{Exp}_{x_0}^{-1} \mathbb{K} \subset T_{x_0}(M)$$

dicesi disequazione variazionale su M.

Esistenza della soluzione x_0.

Se $\mathbb{K}$ oltre che chiuso e convesso è anche limitato allora la d.v. (3.1) ammette soluzione.

Dim. Intanto osserviamo che per il tipo di varietà considerata, l'applicazione di $T(M) \to M$ tale che $(x, X_x) \to \operatorname{Exp}_x X_x$ è continua.

Fissato $z \in \mathbb{K}$ e considerato $-F(z) \in T_z(M)$, sia $z' = \operatorname{Exp}_z(-F(z)) \in M$ e $y = pr_{\mathbb{K}}\, z' \in \mathbb{K}$.

Abbiamo così costruita una applicazione

$$\mathbb{K} \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{K},$$

$$\overset{F}{\longrightarrow} \quad \overset{\text{cont.}}{\longrightarrow} \quad \overset{\text{cont.}}{\longrightarrow} \quad \overset{pr_{\mathbb{K}}}{\longrightarrow}$$

$$z \longrightarrow (z, F(z)) \longrightarrow (z, -F(z)) \longrightarrow z' = \operatorname{Exp}_z(-F(z)) \longrightarrow pr_{\mathbb{K}}\, z'$$

di $\mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ continua in quanto composta di funzioni continue. Applicando quindi il teorema 2.2 si ha che questa applicazione avrà un punto fisso cioè

$$\exists\, x_0 \in \mathbb{K} \text{ tale che } pr_{\mathbb{K}}(\operatorname{Exp}_{x_0} - F(x_0)) = x_0.$$

D'altronde x_o è la proiezione su $|K$ del punto $x_o = \mathrm{Exp}_{x_o}(-F(x_o))$ e perciò applicando il lemma 2.2 abbiamo che

$$g_{x_o}(-F(x_o), X) \leq 0 \qquad \forall X \in \mathrm{Exp}_{x_o}^{-1} |K \qquad \text{cioè}$$

$$\exists\, x_o \in |K : g_{x_o}(F(x_o), X) \geq 0 \qquad \forall X \in \mathrm{Exp}_{x_o}^{-1} |K\,. \qquad \text{c.v.d.}$$

DEF. 3.1. L'operatore $F : |K \to T(M)$ lo diremo *monotono* se per ogni $x_o, x_1 \in |K$ (detti $X_o \in T_{x_1}(M)$ e $X_1 \in T_{x_o}(M)$ tali che $\mathrm{Exp}_{x_1} X_o = x_o$ e $\mathrm{Exp}_{x_o} X_1 = x_1$) si ha che

(i) $$g_{x_1}(\tau F(x_o) - F(x_1), X_o) \geq 0$$

oppure equivalentemente

(ii) $$g_{x_o}(\tau' F(x_1) - F(x_o), X_1) \geq 0\,.$$

Con τ si è indicato lo spostamento parallelo, lungo la geodetica γ che congiunge x_o e x_1, da $T_{x_o}(M)$ a $T_{x_1}(M)$; mentre con τ' si è indicato lo spostamento parallelo, lungo la geodetica γ, da $T_{x_1}(M)$ a $T_{x_o}(M)$ cioè τ' è l'isomorfismo inverso di τ.

Ricordiamo che τ e τ' verificano le relazioni

(3.2) $$\tau X_1 = -X_o \qquad \text{e} \qquad \tau' X_o = -X_1\,.$$

Vediamo l'equivalenza fra la (i) e la (ii):

$$g_{x_o}(\tau' F(x_1) - F(x_o), X_1) = g_{x_1}(\tau(\tau' F(x_1) - F(x_o)), \tau X_1) =$$

$$= \text{per la (3.2)} = g_{x_1}(F(x_1) - \tau F(x_o), -X_o) = g_{x_1}(\tau F(x_o) - F(x_1), X_o)\,.$$

L'operatore F lo diremo *strettamente monotono* se oltre ad essere monotono è tale che

$$g_{x_1}(\tau F(x_o) - F(x_1), X_o) = 0 \Leftrightarrow x_o = x_1\,.$$

Unicità della soluzione x_o.

Nell'ipotesi che l'operatore F sia strett. monotono, la soluzione x_o (supposto che esista) è unica.

Supponiamo che esistano x_0, $x_1 \in |K$ tale che

a) $g_{x_0}(F(x_0), X) \geq 0 \qquad \forall X \in \operatorname{Exp}_{x_0}^{-1} |K \subset T_{x_0}(M)$,

b) $g_{x_1}(F(x_1), Y) \geq 0 \qquad \forall Y \in \operatorname{Exp}_{x_1}^{-1} |K \subset T_{x_1}(M)$.

Allora preso nella a) $X = X_1 = \operatorname{Exp}_{x_0}^{-1} x_1$, si ha:

a') $g_{x_0}(F(x_0), X_1) \geq 0$ cioè $g_{x_0}(-F(x_0), X_1) \leq 0$.

Preso poi nella b) $Y = X_0 = \operatorname{Exp}_{x_1}^{-1} x_0$, si ha:

$g_{x_1}(F(x_1), X_0) \geq 0$. D'altronde $g_{x_1}(F(x_1), X_0) = g_{x_0}(\tau' F(x_1), \tau' X_0) = g_{x_0}(\tau' F(x_1), -X_1)$, perciò si ha:

b') $g_{x_0}(\tau' F(x_1), X_1) \leq 0$.

Sommando b') e a') si ha

$g_{x_0}(\tau' F(x_1) - F(x_0), X_1) \leq 0$, ma è anche ≥ 0 in quanto F è monotono perciò segue che

$g_{x_0}(\tau' F(x_1) - F(x_0), X_1) = 0$, ed essendo F strettamente monotono viene che $x_0 = x_1$. c.v.d.

Esempio di Operatore monotono (strettamente).

Data $f : |K \to R\, C^1$, convessa (strett.) allora per ogni fissato x di $|K$ risulta:

$$f(y) \underset{[>]}{\geq} f(x) + g_x(\text{grad. } f(x), Y) \qquad \forall y \in |K$$

con $Y = \operatorname{Exp}_x^{-1} y \in T_x(M)$.

L'operatore $F = \text{grad. } f : |K \to T(M)$ è monotono (strett.). Difatti detti x e y due punti di $|K$, si ha

c) $f(y) \underset{[>]}{\geq} f(x) + g_x(\text{grad. } f(x), Y)$ con $\operatorname{Exp}_x Y = y$,

d) $f(x) \geq f(y) + g_y(\text{grad. } f(y), X)$ con $\operatorname{Exp}_y X = x$.

Ora detto τ lo spostamento parallelo da $T_y(M)$ a $T_x(M)$ lungo la geodetica $\gamma(y, x)$, si ha che $\tau X = -Y$ e pertanto la d) diventa

$$d') \quad f(x) \geq f(y) + g_x(\tau \operatorname{grad}. f(y), -Y).$$

Sommando c) e d') abbiamo che

$$g_x(\tau \operatorname{grad}. f(y) - \operatorname{grad}. f(x), Y) \underset{[>]}{\geq} 0$$

cioè grad. f è monotono. Se vale $[>]$ naturalmente grad. f è strettamente monotono.

OSSERVAZIONE 3.1. Detta x_o una soluzione della d.v. (3.1), osserviamo:

1°) Se $x_o \in \overset{\circ}{|K}$ allora $F(x_o) = 0$ vettore nullo di $T_{x_o}(M)$.

Difatti se $x_o \in \overset{\circ}{|K}$ allora esiste $B_R(x_o) \subset |K$ e quindi esiste $V_R(0) \subset T_{x_o}(M)$ tale che $V_R(0) \subset \operatorname{Exp}_{x_o}^{-1} |K$.

Perciò $g_{x_o}(F(x_o), Y) \geq 0$ con $Y \in V_R(0)$ e quindi sarà anche $g_{x_o}(F(x_o), -Y) \geq 0$ in quanto $-Y \in V_R(0)$; segue pertanto che $g_{x_o}(F(x_o), Y) = 0$ per ogni $Y \in V_R(0)$ e quindi deve aversi $F(x_o) = 0$.

2°) Se $F(x) \neq 0$ l'equazione $g_x(F(x), Y) = 0$, rappresenta un iperpiano di $T_x(M)$ avente per normale il vettore $F(x)$, perciò posto:

$$\pi_x = \begin{cases} M = \operatorname{Exp}_x T_x(M) & \text{se} \quad F(x) = 0 \\ \operatorname{Exp}_x \{ Y \in T_x(M : g_x(F(x), Y) \geq 0 \} & \text{se} \quad F(x) \neq 0 \end{cases}$$

trovare una soluzione x_o della d.v. (3.1) significa trovare un $x_o \in |K$ per cui $|K \subset \pi_{x_o}$.

OSSERVAZIONE 3.2. L'insieme $\Gamma x = \operatorname{Exp}_x \{ Y \in T_x(M) : g_x(F(x), Y) = 0 \}$ rappresenta una ipersuperfice geodetica in x (è una sottovarietà di M, $n-1$ dimensionale) in quanto formata dalle geodetiche tangenti in x a un iperpiano di $T_x(M)$.

Nel caso $\dim M = n = 2$ detto Y un vettore di $T_x(M)$ tale che $g_x(F(x), Y) = 0$ allora posto $y = \operatorname{Exp}_x Y$ e $y' = \operatorname{Exp}_x(-Y)$, Γx non è altro che la geodetica passante per i punti y, x, y'.

DEF. 3.2. Una ipersuperfice Γx geodetica in $x \in \partial |K$, la diremo *ipersuperfice supporto* di $|K$ in x se l'insieme convesso $|K$ è contenuto in una delle due parti in cui Γx taglia la varietà.

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della soluzione x_0 della d.v. (3.1) *nel caso di* $|K$ *illimitato.*

Sia $|K$ illimitato, fissato un punto $p \in M$, consideriamo un $R > 0$ tale che $|K_R = \bar{B}_R(p) \cap |K$ sia non vuoto. $|K$ è chiuso, convesso e limitato, perciò

$$\exists\, x_R \in |K_R : g_{x_R}(F(x_R), Y) \geq 0 \qquad \forall\, Y \in \mathrm{Exp}_{x_R}^{-1} |K_R .$$

Ora C.N.S. per l'esistenza della soluzione x_0 in $|K$ è:

$$\exists\, R > 0 \quad \text{tale che} \quad d(p, x_R) < R .$$

Dim. C.N. Basta prendere un $R > 0$ tale che $R > d(p, x_0)$, allora l'$x_R = x_0$ è tale che $x_R \in |K_R$ e $d(p, x_R) < R$.

C.S. Sia y un generico punto di $|K$. Consideriamo la geodetica $\gamma(t)$ tale che $\gamma(0) = x_R$ e $\gamma(1) = y$ ($\gamma(t)$ è contenuta in $|K$ in quanto $|K$ è convesso).

Ora siccome $d(p, x_R) < R$, allora esisterà un $t > 0$ suff.te piccolo in modo che $\gamma(t) \in |K_R$.

Detto $Y \in T_{x_R}(M)$ tale che $\mathrm{Exp}_{x_R} Y = y$, allora si ha che $\gamma(t) = \mathrm{Exp}_{x_R} tY$ con $t > 0$ e ciò implica che $tY \in \mathrm{Exp}_{x_R}^{-1} |K_R$ perciò vale

$$g_{x_R}(F(x_R), tY) \geq 0 \quad \text{con} \quad t > 0 .$$

Pertanto abbiamo $g_{x_R}(F(x_R), Y) \geq 0$ e ciò vale, data l'arbitrarietà della scelta di $y \in |K$, per ogni $Y \in \mathrm{Exp}_{x_R}^{-1} |K$ e quindi l'x_0 cercato è proprio x_R.

TEOREMA 3.1. Siano $|K_1$ e $|K_2$ due chiusi convessi non vuoti di M tale che $|K_2 \subset |K_1$. Siano x_1 e x_2 le due soluzioni delle disequazioni variazionali:

$$x_1 \in |K_1 , \quad g_{x_1}(F(x_1), Y) \geq 0 \qquad \forall\, Y \in \mathrm{Exp}_{x_1}^{-1} |K_1 \subset T_{x_1}(M)$$

$$x_2 \in |K_2 , \quad g_{x_2}(F(x_2), Y) \geq 0 \qquad \forall\, Y \in \mathrm{Exp}_{x_2}^{-1} |K_2 \subset T_{x_2}(M)$$

con F strettamente monotono.

Risulta:

i) se $F(x_2) = 0$ allora $x_1 = x_2$;

ii) se $F(x_2) \neq 0$ e $x_1 \neq x_2$ x_1 e $|K_2$ sono separati dalla ipersuperfice geodetica in x_2

Γx_2, ove $\Gamma x_2 = \mathrm{Exp}_{x_2} \{Y \in T_{x_2}(M) : g_{x_2}(F(x_2), Y) = 0\}$.

Dim.

i) Per ipotesi $g_{x_2}(F(x_2), Y) \geq 0$ per ogni $Y \in \mathrm{Exp}_{x_2}^{-1} |K_2$ e siccome $F(x_2) = 0$ allora $g_{x_2}(F(x_2), Y) \geq 0$ vale per ogni $Y \in \mathrm{Exp}_{x_2}^{-1} |K_1$. Tenendo conto poi che F è strett. monotono si ha l'unicità della soluzione cioè $x_1 = x_2$.

ii) Siccome $g_{x_2}(F(x_2), Y) \geq 0 \qquad \forall Y \in \mathrm{Exp}_{x_2}^{-1} |K_2$,
dire che x_1 e $|K_2$ sono separati da Γx_2 significa che

$$g_{x_2}(F(x_2), X_1) < 0 \quad \text{ove} \quad X_1 \in T_{x_2}(M) \quad \text{e} \quad \mathrm{Exp}_{x_2} X_1 = x_1 .$$

Per provare ciò, supponiamo che assurdo che sia $g_{x_2}(F(x_2), X_1) \geq 0$ cioè

$$(1) \qquad g_{x_2}(-F(x_2), X_1) \leq 0 .$$

D'altronde $g_{x_1}(F(x_1), X_2) \geq 0$, ove $X_2 \in T_{x_1}(M)$ e $\mathrm{Exp}_{x_1} X_2 = x_2$, perciò detto τ lo spostamento parallelo lungo la geodetica $\gamma(x_1, x_2)$ abbiamo

$0 \leq g_{x_1}(F(x_1), X_2) = g_{x_2}(\tau F(x_1), \tau X_2) = g_{x_2}(\tau F(x_1), -X_1)$ cioè

$$(2) \qquad g_{x_2}(\tau F(x_1), X_1) \leq 0 .$$

Sommando (1) e (2) abbiamo $g_{x_2}(\tau F(x_1) - F(x_2), X_1) \leq 0$, ma F è strettamente monotono perciò segue che $x_1 = x_2$, il che è assurdo in quanto per ipotesi $x_1 \neq x_2$. c.v.d.

Problema di minimo ricondotto a una d.v. su M.

Sia $f : |K \to |R$ di classe C^1 con $|K$ chiuso convesso non vuoto di M.

Se la f ha un punto x_0 di minimo in $|K$, allora $x_0 \in |K$ è soluzione della d.v.

$$(3.3) \qquad g_{x_0}(\mathrm{grad}.\, f(x_0), Y) \geq 0 \qquad \forall Y \in \mathrm{Exp}_{x_0}^{-1} |K \subset T_{x_0}(M)$$

(per vedere ciò si usa la stessa tecnica usata nel lemma 2.2).

Viceversa se la $f : |K \to |R$ è anche convessa cioè per ogni fissato $x \in |K$:

$$f(y) \geq f(x) + g_x(\text{grad. } f(x), Y) \qquad \forall y \in |K ,$$

con $Y = \text{Exp}_x^{-1} y$, allora se la (3.3) ammette una soluzione x_0 in $|K$ si ha che x_0 è di minimo per la f in $|K$. Difatti per ogni $y \in |K$ si ha

$$f(y) \geq f(x_0) + g_{x_0} (\text{grad. } f(x_0), Y), \quad \text{ma}$$

$$g_{x_0} (\text{grad. } f(x_0), Y) \geq 0 \quad \text{pertanto} \quad f(y) \geq f(x_0) .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CARTAN E., *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Paris (1928).

[2] HELGASON S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Acad. Press, New York (1962).

[3] KOBAYASHI - NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, Interscienze Publishers, John Wiley & Sons, New York-London (1963).

[4] MANCINO O. G. - STAMPACCHIA, *Convex Programming and Variational Inequalities*, C.N.R. - Istituto di Elaborazione dell'Informazione Pisa - Journal of Optimization Theory and Applications, **9**, 3-23 (1972).

[5] MILNOR J., *Morse Theory*, Princeton, New Jersey Princeton University Press (1963).

[6] STAMPACCHIA G., *Variational Inequalities*, Theory and Applications of Monotone Operators, Proceedings of the Nato Advanced Study Institute, Venice, Italy 1968 (Edizioni Oderisi, Gubbio Italy 1968).

Attività xantinodeidrogenasica e pigmenti oculari pterinici in *Drosophila melanogaster*

Nota di GIOVANNI PARISI e DOMENICO D'AMORA *
presentata dal socio ordinario BALDASSARRE DE LERMA

(Adunanza del 6 dicembre 1975)

RIASSUNTO. — Alcuni mutanti di *Drosophila melanogaster* deficienti in ommocromo (*v, cn, cd,* ed *st*) unitamente ai mutanti *se* e *cv* sono stati analizzati per la loro attività xantinodeidrogenasica e per il loro contenuto in pigmento oculare pterinico.

Allo scopo di interpretare la relazione esistente tra la biosintesi dei pigmenti pterinici e l'attività xantinodeidrogenasica, mutanti che non presentano attività XDH così come *mal* ed i doppi mutanti *mal v, mal cn, mal cd, mal st, mal se,* e *mal cv* sono stati analizzati per i loro pigmenti oculari pterinici. I risultati hanno mostrato che variazioni della attività XDH influenzano il contenuto oculare pterinico. Il meccanismo attraverso il quale la XDH influenza il contenuto pterinico oculare, resta ancora da stabilire.

SUMMARY. — Some mutants of *Drosophila melanogaster* deficient in ommochromes (*v, cn, cd,* and *st*) as well as the *se* and *cv* mutants were analyzed for their bodily xanthine dehydrogenase activities and their ocular pterin pigments.

In order to understand the relationship between the biosynthesis of eye pterin pigments and xanthine dehydrogenase activities, mutants lacking XDH activity such as *mal* and the double mutants *mal v, mal cn, mal cd, mal st, mal se* and *mal cv* were analyzed for their ocular pterin pigments. The results show that XDH activity enhances the content of pterin pigments in eyes: the mechanism of this intervention remains to be established.

È ormai ben noto che in *Drosophila melanogaster* l'enzima xantina deidrogenasi (xantina: NAD^+ ossidoreduttasi) (XDH) è controllato dai seguenti geni: mal^+, ry^+, lxd^+, e cin^+ [1, 2] e che nessuna attività è stata osservata nei mutanti *mal, ry* e *cin* [2, 3], mentre l'attività enzimatica determinata nel mutante *lxd* è circa il 20 % di quella del fenotipo selvatico [4, 5].

* Napoli, Laboratorio di Zoofisiologia, Istituto di Zoologia dell'Università.

Fenocopie dei mutanti *mal* e *ry* sono state ottenute mediante inibizione *in vivo* della XDH, utilizzando la 4-idrossipirazolo (3, 4-d) pirimidina (HPP) [6, 7].

D'altra parte, determinazioni quantitative dei pigmenti oculari drosopterinici nei mutanti *ry* e *mal* [8, 9, 10] hanno mostrato che il pigmento contenuto in questi mutanti è considerevolmente diminuito rispetto a quello registrato nel fenotipo selvatico. Tali dati sperimentali inducono a ritenere che l'attività XDH mostrata dai mutanti esaminati debba essere in qualche modo correlata con il contenuto drosopterinico oculare.

PARISI, G., CARFAGNA, M. e D'AMORA D. [11, 12] hanno descritto un possibile « pathway » metabolico che potrebbe spiegare la menzionata relazione ed hanno in corso ulteriori ricerche tendenti a dimostrare il modello proposto.

Sulla base di quanto esposto, intendiamo dimostrare in questo lavoro, che l'attività XDH è correlata con il contenuto in pigmenti oculari drosopterinici non soltanto nei precedentemente menzionati mutanti ma anche in altri mutanti in cui le mutazioni implichino geni destinati ad altre funzioni. Studiando i mutanti *v*, *cn*, *cd* e *st* che come è noto sono incapaci di sintetizzare il pigmento ommocromico [10], abbiamo osservato in ciascuno di questi un differente contenuto oculare drosopterinico che differisce da quello del selvatico. Tali variazioni che a prima vista non possono essere spiegate in mutanti deficienti di ommocromo possono essere interpretate sulla base delle differenti attività XDH registrate nei mutanti studiati.

MATERIALI E METODI.

I ceppi di *Drosophila melanogaster* usati sono stati:

a) fenotipo selvatico (Oregon-R), i mutanti per l'ommocromo: vermilion (*v*), cinnabar (*cn*), cardinal (*cd*) e scarlet (*st*); il mutante maroon-like (*mal*), il mutante cross-veinless (*cv*) ed il mutante sepia (*se*);

b) i doppi mutanti (*mal v*, *mal cn*, *mal cd*, *mal st*, *mal cv* e *mal se*) sono stati ottenuti mediante opportuni incroci dei ceppi in a).

Il terreno di coltura utilizzato è stato quello proposto da KELLER, E. C. e GLASSMAN, E. [6] con l'aggiunta dello 0,7 % di nipagina. L'allevamento è stato condotto a 25°C $\pm$ 1°C con fotoperiodo di 12 ore.

Tutti i ceppi utilizzati per la determinazione dell'attività XDH sono stati preventivamente saggiati medante disco elettroforesi uti-

lizzando il metodo di YEN, T. T. e GLASSMAN, E. [13] allo scopo di accertare l'assenza di una eventuale possibile variabilità nell'allele ry^+ che è il gene strutturale per la XDH e degli alleli cin^+ e lxd^+ che attraverso un meccanismo ancora ignoto concorrono all'attività enzimatica.

La xantina deidrogenasi è stata dosata utilizzando la metodica messa a punto da KELLER, E. C. e GLASSMAN, E. [5].

Ciascun campione consisteva di 10 femmine al secondo ed al decimo giorno dopo l'emergenza.

L'incremento in fluorescenza che si registra durante l'ossidazione catalizzata dalla xantina deidrogenasi della 2-amino-4-idrossipteridina a 2-amino-4, 7-diidrossipteridina era seguita con uno spettrofotofluorimetro (Ciampolini DC 3000), con il monocromatore di eccitazione a $\lambda = 340$ nm ed il monocromatore di fluorescenza a $\lambda = 405$ nm.

Il dosaggio dell'attività enzimatica è stato eseguito a 30°C.

Per unità di attività enzimatica è stato definito l'ammontare di enzima che causa un cambiamento di unità galvanometrica per minuto.

Inoltre sono stati misurati, utilizzando la tecnica proposta da EPHRUSSI, B. e HEROLD, J. L. [14], i contenuti pterinici oculari di gruppi di 20 femmine al 7°, 10° e 15° giorno dopo lo sfarfallamento.

Le misure spettrofotometriche sono state condotte utilizzando uno spettrofotometro Beckman DK-2A a $\lambda_{max} = 420$ nm per *se* e *mal se* e $\lambda = 480$ nm per gli altri mutanti.

RISULTATI E DISCUSSIONE.

I risultati delle determinazioni dell'attività XDH chiaramente mostrano che tali attività risultano sensibilmente più basse al decimo giorno dopo lo sfarfallamento e che i valori registrati sono approssimativamente simili per tutti i mutanti studiati (vedi Tabella I).

Viceversa al secondo giorno dall'emergenza, il valore dell'attività enzimatica è al suo massimo [15] per cui è possibile a questo momento apprezzare le eventuali differenze di attività tra i differenti mutanti esaminati.

I contenuti pterinici oculari sono approssimativamente costanti per ciascun mutante di età compresa tra il settimo ed il quindicesimo giorno dall'emergenza. Assumendo che il contenuto drosopterinico degli adulti di fenotipo selvaggio e di età compresa tra il settimo ed il quindicesimo giorno dall'emergenza sia uguale al 100 %, abbiamo riportato in tabella I, i valori percentuali medi delle drosopterine oculari dei mutanti esaminati entro lo stesso intervallo di età;

allo stesso modo abbiamo riportato il contenuto in sepiapterina del doppio mutante *mal se* ponendo uguale al 100 % quello del *se*. A questo punto può essere utile confrontare le attività XDH misurate al secondo giorno dallo sfarfallamento e vicine al massimo del loro valore ed i contenuti percentuali dei pigmenti pterinici determinati nei mutanti saggiati di età compresa tra il settimo ed il quindicesimo giorno dall'emergenza, nel momento in cui hanno raggiunto il massimo della pigmentazione. Tale confronto è utile se si vuole evidenziare una correlazione tra i contenuti pterinici oculari e le differenti attività XDH registrate.

TABELLA I

Attività XDH e valori medi percentuali del contenuto pterinico oculare nei mutanti di *Drosophila melanogaster* studiati.

Fenocopia	Attività XDH al 2° giorno dall'emergenza	Attività XDH al 10° giorno dall'emergenza	Valori medi percentuali del contenuto pterinico oculare (w.t. e *se* = 100 %) (7°, 10°, 15° giorno)
fenotipo selvatico	1.061 ± 0.022	0.324 ± 0.031	100
cd	1.025 ± 0.026	0.248 ± 0.027	106
cn	1.021 ± 0.028	0.228 ± 0.036	88
v	1.048 ± 0.032	0.258 ± 0.016	82
st	0.870 ± 0.035	0.262 ± 0.021	71
cv	0.651 ± 0.021	0.252 ± 0.014	80
mal	=	=	45
mal cv	=	=	45
mal cd	=	=	11
mal cn	=	=	11
mal v	=	=	11
mal st	=	=	11
se	0.690 ± 0.036	0.235 ± 0.015	100
mal se	=	=	60

I mutanti *cd*, *cn* e *v* non mostrano sensibili differenze nell'attività XDH confrontata con quella registrata nel fenotipo selvatico. Nel mutante *st*, invece, il decremento dell'attività enzimatica è notevole, così come è stato anche osservato da KELLER, E. C. e GLASSMAN,

E. [6]. Differenti risultano i contenuti percentuali drosopterinici per i mutanti sopracitati, per cui una relazione tra attività XDH e pigmenti oculari non può essere evidenziata se non studiando i seguenti doppi mutanti: *mal v, mal cn, mal cd* e *mal st* che non presentano attività xantinodeidrogenasica in conseguenza della mutazione mal ed hanno un contenuto drosopterinico oculare che è circa l'11 % di quello misurato nel fenotipo selvatico [10, 11, 12].

I risultati sperimentali raccolti hanno permesso di calcolare le differenze tra le medie percentuali dei contenuti pterinici oculari di ciascun mutante e del corrispondente doppio mutante (Tabella II).

TABELLA II

Differenze percentuali tra ciascun mutante ed i corrispondenti doppi mutanti.

Oregon-R	-	(mal)	=	55
cd	-	(mal cd)	=	95
cn	-	(mal cn)	=	77
v	-	(mal v)	=	71
st	-	(mal st)	=	60
cv	-	(mal cv)	=	35
se	-	(mal se)	=	40

Tali differenze danno la misura dei pigmenti pterinici sintetizzati attraverso una strada metabolica che deve essere in qualche modo connessa con le variazioni di attività XDH ed indirettamente fornisce una indicazione circa le differenti attività XDH mostrate *in vivo* dai mutanti esaminati. Le calcolate differenze mostrano che tutti i mutanti per l'ommocromo saggiati, sintetizzano una maggiore quantità di drosopterine rispetto al selvatico attraverso la strada metabolica precedentemente supposta, ma non nella stessa misura.

Tale fenomeno non può essere semplicemente spiegato invocando la perdita di xantommatina che sembra essere coinvolta come cofattore nella biosintesi dei pigmenti drosopterinici [11, 12] e la conseguente stimolazione della strada biosintetica influenzata dall'attività XDH (Tabella II); ciò perché, se non ci fossero altri fattori, si sarebbero dovuti registrare gli stessi contenuti drosopterinici per i mutanti *v, cn, cd* e *st*. I differenti contenuti misurati, chiaramente indicano l'intervento di un altro effetto che deve indirettamente essere causato dalla differente attività della XDH (geneticamente determinata)

dei mutanti esaminati, come abbastanza bene si vede in *st* che presenta attività xantinodeidrogenasica più bassa rispetto al selvatico.

Nei mutanti *cn* e *v*, dove le attività XDH misurate possono essere paragonate a quelle del selvatico, i contenuti drosopterinici sono approssimativamente eguali ma inferiori.

Il registrato calo in pigmenti pterinici può essere in questo caso imputato alla perdita in xantommatina [11, 12] che sembra essere coinvolta nella loro produzione. D'altra parte però, dall'esame della Tab. II, risulta che questi due mutanti sintetizzano più drosopterine del selvatico attraverso la strada metabolica che indirettamente coinvolge la XDH. Poiché l'attività XDH nei mutanti *cn* e *v* è approssimativamente identica, se c'è relazione tra attività enzimatica e pterine oculari, si comprende la ragione per cui il contenuto totale drosopterinico è circa uguale in questi mutanti. Nel mutante *st*, l'attività XDH è più bassa di quella misurata nel selvatico. Per questo motivo, *st* sintetizza meno drosopterine di *cn* e *v*, fermo restante per i motivi addotti per i precedenti mutanti, un aumento delle drosopterine, rispetto al selvatico, sintetizzate attraverso la strada metabolica che indirettamente coinvolge la XDH (Tabella II).

Per quanto riguarda poi il mutante *cd*, l'attività XDH è confrontabile con quella mostrata dal selvatico e dai mutanti *cn* e *v*, pertanto ci si attenderebbe di poter misurare, per tali fenotipi, uguali contenuti drosopterinici. Viceversa il mutante *cd* mostra addirittura possedere drosopterine in misura maggiore anche se di poco, rispetto al selvatico. Ciò può essere spiegato sulla base di quanto proposto da NOLTE, D. J. [16] e osservato da PARISI, G. e D'AMORA, D. (dati non pubblicati). Tali osservazioni hanno chiaramente mostrato che in *cd* i granuli ai quali i pigmenti pterinici sono legati e che si trovano nelle cellule pigmentarie secondarie, sono parecchio più grossi di quelli presenti nel fenotipo selvatico.

Allo scopo di meglio confermare quanto precedentemente esposto e quindi poter generalizzare il nostro assunto, abbiamo anche analizzato i mutanti *cv* e *se* ed i corrispondenti doppi mutanti *mal cv* e *mal se*. Ambedue i mutanti *cv* e *se* sono forniti di xantommatina, inoltre il primo possiede drosopterine, mentre il secondo ne è sfornito ed in loro sostituzione presenta la sepiapterina.

Il mutante *cv* ha un contenuto drosopterinico che è circa l'80 % di quello del selvatico (Tabella I) ed un valore notevolmente basso di attività XDH. Nel corrispondente doppio mutante *mal cv*, il contenuto drosopterinico è circa il 45 % di quello del selvatico e non si registra attività XDH.

Sulla base di quanto detto precedentemente, si ricava che il mutante *cv* sintetizza drosopterine per il 35 % (in confronto al 55 %

del selvatico) per la strada metabolica che è sotto l'indiretta influenza della XDH e per il 45 % per la strada che utilizza la xantommatina.

Il decremento del 20 % delle drosopterine di *cv*, rispetto al selvatico, è chiaramente dovuto all'abbassamento dell'attività XDH.

Il mutante *se* anche esso mostra una bassa attività XDH.

Ponendo il pigmento oculare sepiapterina uguale a 100 ed ammettendo, come d'altra parte è ormai quasi da tutti riconosciuto, che la sepiapterina è un precursore delle drosopterine, dallo studio del doppio mutante *mal se*, si deduce che il 40 % del pigmento è sintetizzato via XDH ed il 60 % via xantommatina. Il decremento del 15 % della sepiapterina, rispetto al 55 % teorico ammettendo la completa trasformazione della sepiapterina in drosopterine nel selvatico, è anche in questo caso da mettere in relazione con il più basso valore dell'attività XDH.

Si può pertanto concludere che vi è una chiara correlazione tra la biosintesi dei pigmenti pterinici oculari ed attività XDH.

Tale correlazione è chiaramente evidente in *se* e *cv*, è mascherata in *st*, *cn* e *v* a causa dell'assenza dell'ommocromo e non evidente in *cd* a causa della maggiore dimensione dei granuli pigmentati.

Infine occorre sottolineare che, come si vede dalla Tabella I, le attività XDH tendono a portarsi a valori piuttosto bassi ed approssimativamente eguali tra loro, per tutti i fenotipi studiati, intorno al 10° giorno dall'emergenza. Ciò non modifica i rispettivi contenuti pterinici in quanto dal 7° giorno dall'emergenza essendosi già completata la pigmentazione è necessario provvedere soltanto al necessario ricambio.

BIBLIOGRAFIA

[1] GLASSMAN E., T. SHINODA, H. MQ. MOON e J. D. KARAM, *In vitro* complementation between non allelic Drosophila mutants deficient in xanthine dehydrogenase, J. Mol. Biol., **20**, 419-422 (1966).

[2] BAKER B. S., The maternal and zygotic control of development by cinnamon A new mutant in *Drosophila melanogaster*, Dev. Biol., **33**, 429-440 (1973).

[3] GLASSMAN E. e H. K. MITCHELL, Mutants of *Drosophila melanogaster* deficient in xanthine dehydrogenase, Genetics, **44**, 153-162 (1959).

[4] GLASSMAN E., Complementation *in vitro* between non-allelic Drosophila mutants deficient in xanthine dehydrogenase. III Observations on heat stabilities, Biochim. Biophys. Acta, **117**, 342-350 (1966).

[5] KELLER E. C. e E. GLASSMAN, Xanthine dehydrogenase: differences in activity amog Drosophila strains, Science **143**, 40-41 (1964).

[6] KELLER E. C. e E. GLASSMAN, Phenocopies of the ma-1 and ry mutants of *Drosophila melanogaster*: inhibition *in vivo* of xanthine dehydrogenase by 4-hydroxypyrazolo (3, 4-d) pyrimidine, Nature **208**, 202-203 (1965).

[7] BONI P., B. DE LERMA e G. PARISI, Effects of the inhibitor of xanthine dehydrogenase, 4-hydroxypyrazolo (3, 4-d) pyrimidine (or HPP) on the red eye pigments of *Drosophila melanogaster*, Experientia **23**, 186-187 (1967).

[8] GEARHART J. D. e R. I. MACINTYRE, Quantification of drosopterins in single eyes of *Drosophila melanogaster*, Analytical Biochem. **37**, 21-25 (1970).

[9] NOLTE D. J., The eye-pigmentary system of Drosophila. VI. The pigments of the *ruby* and red groups of mutants, J. of Genet., **53**, 1-10 (1955).

[10] PARISI G., M. CARFAGNA e D. D'AMORA, Interrelazione pigmenti pterinici pigmenti ommocromici in *Drosophila melanogaster*. - I) Analisi del chemiotipo dei mutanti *v, cn, cd, st,* del mutante *mal* e dei rispettivi doppi mutanti, Boll. Soc. It. Biol. Sper. **49**, 1415-1421 (1973).

[11] PARISI G., M. CARFAGNA e D. D'AMORA, Interrelazione pigmenti pterinici pigmenti ommocromici in *Drosophila melanogaster*. - II) Possibile meccanismo di biotrasformazione della 7,8-diidrobiopterina in sepiapterina, Boll. Soc. It. Biol. Sper. **49**, 1422-1428 (1973).

[12] PARISI G., M. CARFAGNA e D. D'AMORA, A propsed biosynthesis pathway of drosopterin considering their interrelationship with ommochromes in *Drosophila melanogaster*, J. Insect Physiol. (in corso di stampa) (1976).

[13] YEN T. T. e E. GLASSMAN, Electrophoretic variants of xanthine dehydrogenase in *Drosophila melanogaster*, Genetics **52**, 977-981 (1965).

[14] EPHRUSSI B. e J. L. HEROLD, Studies of eye pigments of Drosophila. I. Methods of extraction and quantitative estimation of the pigment components, Genetics, **29**, 148-175 (1944).

[15] MUNZ P., Untersuchungen über die Aktivität der Xanthindehydrogenase in Organen und während der Ontogenese von *Drosophila melanogaster*, Z. VererbLehre, **95**, 195-210 (1964).

[16] NOLTE D. J., The eye-pigmentary system of Drosophila. IV. The pigments of the vermilion group of mutants, J. of Genet. **52**, 111-126 (1954).

On the Several Types of Neurosecretory Cells of the Brain of the Earthworm

Nota di STEFANO BIANCHI
presentata dal socio ordinario BALDASSARRE DE LERMA

(Adunanza del 6 dicembre 1975)

SUMMARY. — Comparison of the peptide secreting neurons with the amine secreting ones in the earthworm has suggested a tentative hypothesis of the derivation of the several types of neurosecretory cells in this animal.

RIASSUNTO. — Il confronto con due tipi di cellule neurosecretrici, neuroni a neurosecrezione peptidica e neuroni a neurosecrezione aminica, presenti nel lombrico, ha suggerito una ipotesi della derivazione dei numerosi tipi di cellule neurosecretrici di tale animale.

In the nervous system of the earthworm one can distinguish by histochemical properties two main types of neurosecretory cells: peptide secreting, aldehyde fuchsin-positive, A-type neurons, and amine secreting, aldehyde fuchsin-negative, B-type neurons. The neurons of the first type contain cystine and are the classical neurosecretory neurons. The neurons of the second type elaborate biogenic monoamines (BIANCHI, [1]).

Peptide secreting and amine secreting neurons may be visualized in the same area (Figs. 1, 2). The amine secreting neurons are much less frequent than the peptide secreting ones. The latter are demonstrable with the classical histological and histochemical « neurosecretory » stains (BIANCHI, [2]). The former store the biogenic monoamines in high concentrations to such degree that the monoamine is demonstrable with several histochemical tests (diazonium, argentaffin, chromaffin, Schmorl's and Gibb's reactions, yellow fluorescence) (BIANCHI, [3]; [4]; [5]; [6]), as in vertebrate adrenomedullary and duodenal enterochromaffin cells.

The existence of two fundamentally different forms of neurosecretion — peptide and amine neurosecretion — in the central nervous system of the earthworm may be recognised also at the

level of ultrastructure. Basing on the differential morphology of the typical elementary granules, OOSAKI [7] distinguishes six types of neurons in the brain of the earthworm *Eisenia foetida.* Types 1, 2 and 3 contain in the cytoplasm electron-dense vesicles with diameter

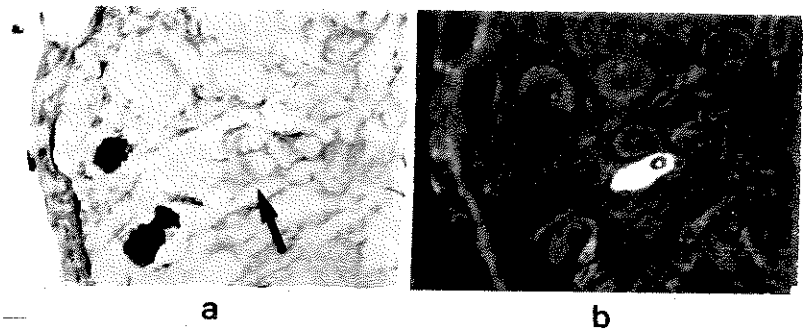


FIG. 1. - Two peptide secreting neurons (a) and one amine secreting neuron (b) in a nerve ganglion of the earthworm. The arrow indicates the amine secreting neuron in (a) section. × 290.

of 500-3000 Å. These vesicles are similar to « elementary neurosecretory vesicles », A-type vesicles (KNOWLES, [8]), in the neurosecretory systems of vertebrates and invertebrates (Fig. 3a). Type 4 contains dense vesicles which are irregular in outline and only approximately

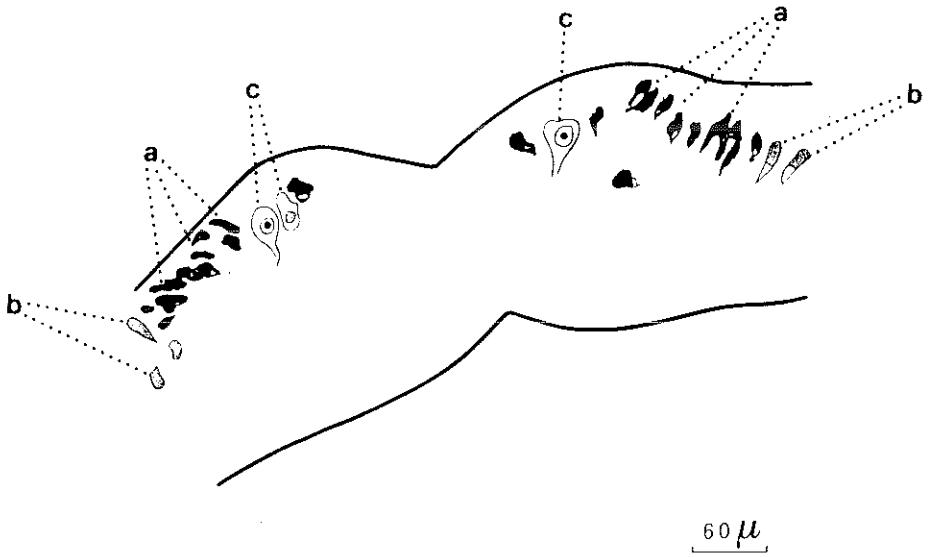


FIG. 2. - The peptide secreting (a), the amine secreting (b) and the « ordinary » (c) neurons in the earthworm brain.

spherical. Their electron-dense contents do not fill the vesicles completely, but a distinct electron-lucent space separates them and the limiting membrane. Diameters of these vesicles are 800-1500 Å. These vesicles are similar to « elementary neurosecretory vesicles », B-type vesicles, observed in fibres of the neurosecretory systems of vertebrates and invertebrates (KNOWLES, [8]) (Fig. 3b). Furthermore, these vesicles resemble the amine-containing vesicles described in chromaf-

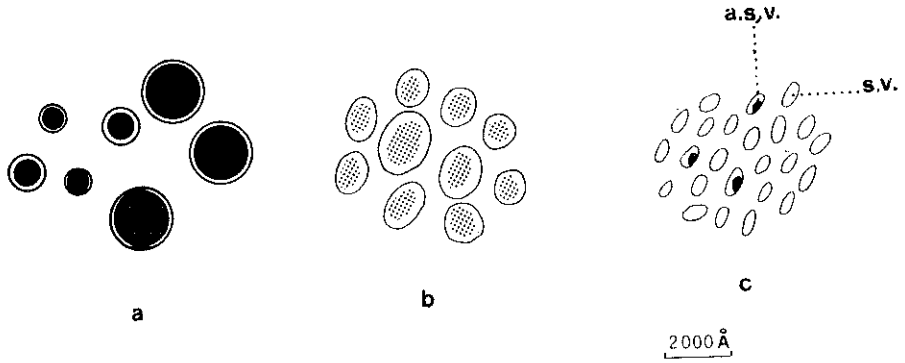


FIG. 3. - Three types of vesicles in the earthworm brain: a, A-type vesicles of the peptide secreting neurons; b, B-type vesicles of the amine secreting neurons; c, synaptic vesicles in the « ordinary » nerve cells. s.v.. « synaptic vesicles », a.s.v., « adrenergic synaptic vesicles ».

fin cells of the adrenal gland. Types 5 and 6 contain electron-lucent vesicles which attain diameters of 500-1000 Å. These vesicles are similar to classical « synaptic vesicles » (Fig. 3c). In cell types 5 and 6, the vesicles occasionally have dense content. These electron-dense vesicles are similar to « adrenergic synaptic vesicles » (Fig. 3c). All three vesicles types, namely A-type, B-type and synaptic vesicles, have the same mode of origin from Golgi membranes (OOSAKI, [7]). By the morphology and ultrastructure of the secretion product, PELLEGRINO DE IRALDI and DE ROBERTIS [9] identify four types of neurosecretory neurons in the brain of the earthworm. Types 1, 2 and 3 contain the A-type vesicles, type 4, the last frequent type, contains B-type vesicles. It is evident that neuron types 1, 2 and 3 in the classification of Oosaki and in that of Pellegrino De Iraldi and De Robertis are peptide secreting neurons, the neuron type 4 in the same classifications is amine secreting neuron. Neuron types 5 and 6 in the classification of Oosaki are « ordinary neurons ».

The peptide secreting neurons are classical neurosecretory cells. HERLANT-MEEWIS ([10]; [11]; [12]) reported two types of peptide secreting neurons, a and b, in the earthworm *Eisenia foetida*. The

axons of the a neurons transport the neurosecretory product into special places of storage. The axonal transport here may be demonstrated at both light-microscope and ultrastructural levels. The a neuron (Fig. 4a) can be visualized as « an elongate gland cell » (BERN and KNOWLES, [13]). The axons of b neurons are never seen to contain neurosecretory product (Fig. 4b).

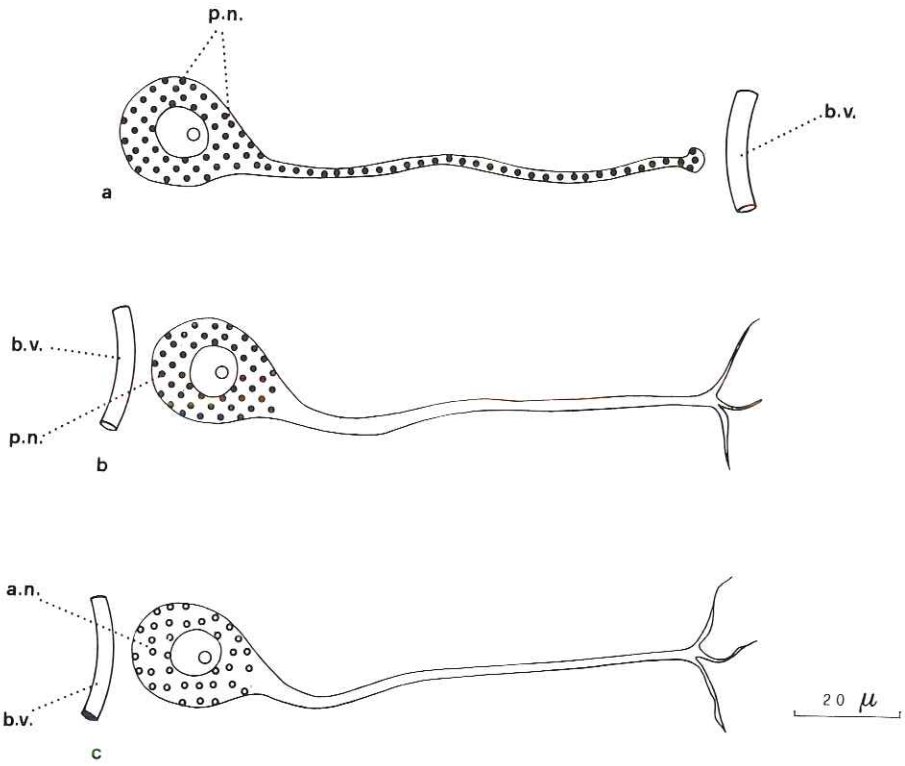


FIG. 4. - a, a neuron of the earthworm; b, b neuron of the earthworm; c, the amine secreting neuron of the earthworm. p.n., peptide neurosecretion, b.v., blood vessel; a.n., amine neurosecretion.

The amine secreting neuron resembles the « ordinary » nerve cell, with the exception of the fact that its cytoplasm contains stainable granules of a secretory nature (Fig. 4c). Here neither signs of axonal transport nor place of storage have been detected at the light-microscope (BIANCHI, [6]). The amine secreting neuron is a morphological counterpart to the b neuron. In fact both two cell types produce stainable granules and in their axons there are no signs of granule transport (Fig. 4b, c). However b neurons produce peptide neurosecretions which are not related to the transmission of nervous

stimuli, while the amine secreting neurons produce substances which are identical with or closely related to the product of the normal activity of sympathetic nerve cells.

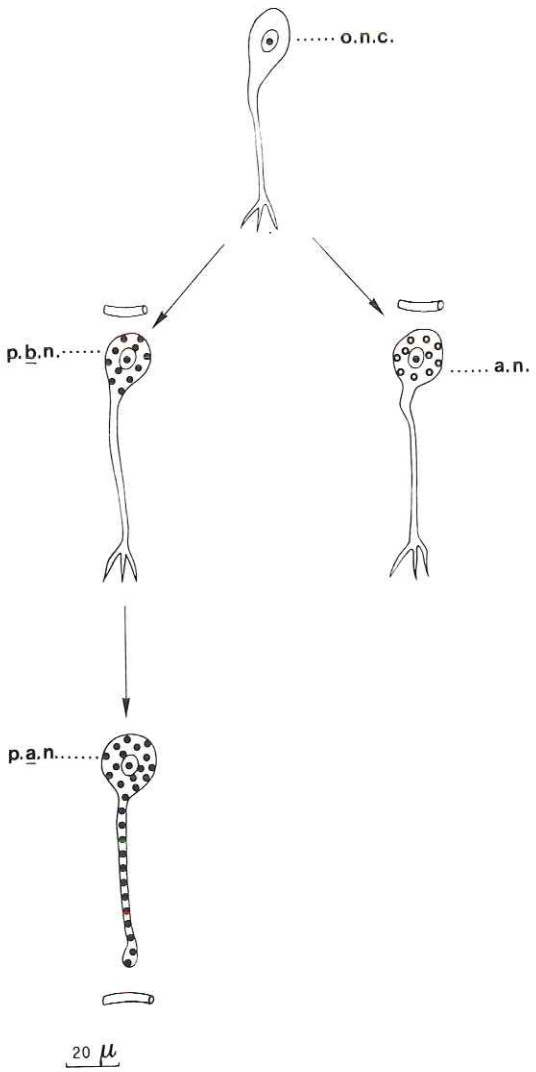


FIG. 5. - Diagram — based on the first theory — of the derivation of the neurosecretory cells in the earthworm brain. p.b.n., b neuron; p.a.n., a neuron; a.n., amine secreting neuron; o.n.c., « ordinary » nerve cell.

Three main theories regarding the origin of neurosecretory cells have been formulated. The first suggests that the neurosecretory cells are true nerve cells, their glandular characteristics are consider-

ed to have developed only secondarily (HANSTRÖM, [14]; GERSCH, [15]; [16]; [17]). The second theory considers the neurosecretory cells as primarily secretory and only secondarily as neurones (CLARK, [18]; [19]). The third theory seems to reconcile the above conceptions:

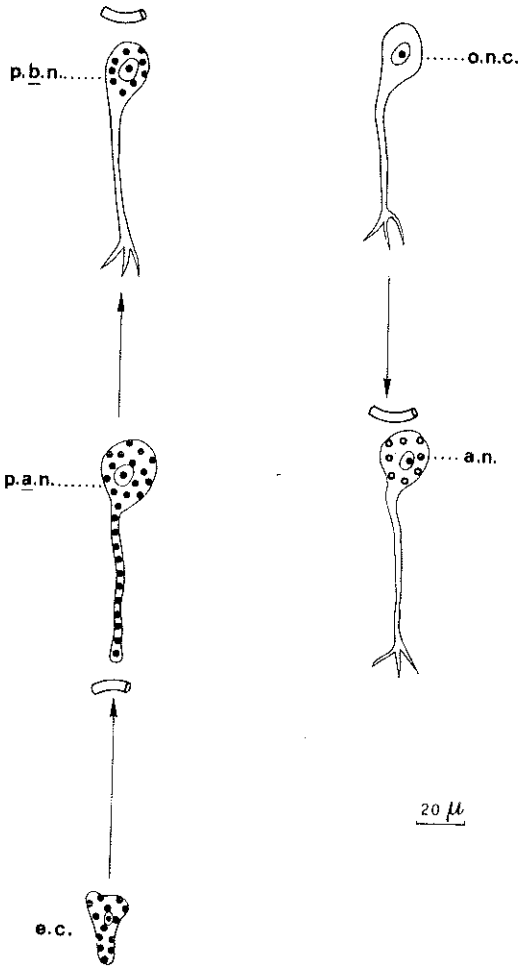


FIG. 6. - Diagram — based on the second theory — of the derivation of the neurosecretory cells in the earthworm brain. p.b.n., b neuron; p.a.n., a neuron; a.n., amine secreting neuron; o.n.c., « ordinary » nerve cell; e.c., ectodermal cell.

neurosecretory cells have developed from primitive nerve cells that originated from epidermal gland cells (NOVÁK, [20]).

Basing on the first theory the several types of neurosecretory cells of the earthworm may be arranged as in diagram of the Fig. 5, in

which b neurons and the amine secreting neurons are imagined as derived in parallel from « ordinary » nerve cells, a neurons are imagined as derived from b neurons.

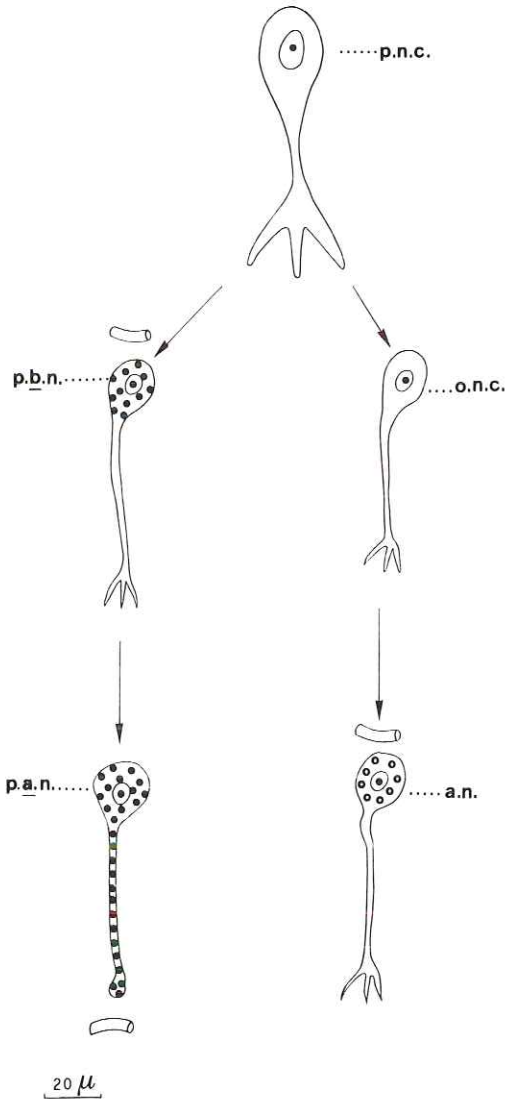


FIG. 7. - Diagram — based on the third theory — of the derivation of the neurosecretory cells in the earthworm brain. p.b.n., b neuron; p.a.n., a neuron; a.n., amine secreting neuron; o.n.c., « ordinary » nerve cell; p.n.c., primitive nerve cell.

Basing on the second theory the cells may be arranged as in diagram of the Fig. 6, in which a neurons are imagined as derived

from ectodermal cells, b neurons are imagined as derived from a neurons and the amine secreting neurons are imagined as derived from « ordinary » nerve cells.

Basing on the third theory the cells may be arranged as in diagram of the Fig. 7, in which b neurons and the « ordinary » nerve cells are imagined as derived in parallel from primitive nerve cells; a neurons are imagined as derived from b neurons and the amine secreting neurons are imagined as derived from « ordinary » nerve cells.

The diagrams of the Figs. 5, 6 and 7 suggest that the amine secreting neurons have developed from « ordinary » nerve cells whose neurohumoral substances of monoamine type changed into neurohormone of the same chemical nature. This transformation is only a question of quantity. Therefore it is easy conceive a direct filiation between the amine secreting neurons and the « ordinary » nerve cells.

If we ascribe to the chemical nature of the secretion some importance in order to establish the origin of the neurosecretory cells, the most probably arrangement of the several types of the neurosecretory cells appears to be that of the diagram in the Fig. 6. This arrangement appears to be more acceptable if we consider that in the earthworm some histochemical tests for the peptide neurosecretion are positive when applied to the secretory cells of the skin of this animal. This is in favour to the suggestion of CLARK ([18]; [19]) that the peptide secreting neurons have originated from the ectodermic cells. Nevertheles the question is still open.

Institute of Zoology of the University of Naples.

REFERENCES

[1] BIANCHI S., *Aspetti morfologici ed istochimici dell'attività neuroendocrina nei Lumbricidae,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., **34**, pp. 3-10 (1967).

[2] BIANCHI S., *Prime indagini istochimiche sul neurosecreto delle cellule nervose dei gangli di Octolasium complanatum Dugès,* Arch. Zool. Ital., **48**, pp. 323-327 (1963).

[3] BIANCHI S., *Sur la présence d'un matériel fluorescent dans les cellules nerveuses des ganglions ventraux de quelques Oligochètes. Recherches histochimiques et d'histospectrographie de fluoréscence,* Ann. Histochim. Suppl. **5**, p. 8 (1960).

[4] BIANCHI S., *Sur la présence d'un matériel fluorescent dans les cellules nerveuses des ganglions du système nerveux central de quelques Oligochètes. Recherches histochimiques et d'histospectrographie de fluoréscence,* Ann. Histochim. Suppl. **2**, pp. 143-146 (1962).

[5] BIANCHI S., *Sulle cellule fluorescenti dei gangli nervosi di alcuni lumbricidae,* Riv. Istoch. Norm. Pat., **9**, pp. 555-570 (1963).

[6] BIANCHI S., *The amine secreting neurons in the central nervous system of the earthworm (Octolasium complanatum) and their possible neurosecretory role*, Gen. Comp. Endocrinol., **9**, pp. 343-348 (1967).

[7] OOSAKI T., *Observations on the ultrastructure of nerve cells in the brain of the earthworm, Eisenia foetida, with special reference to neurosecretion*, Z. Zellforsch.., **72**, pp. 534-542 (1966).

[8] KNOWLES SIR F., *Neuroendocrine correlations at the level of ultrastructure*. Arch. Anat. Microscop., **54**, pp. 343-358 (1965).

[9] PELLEGRINO DE IRALDI A. and DE ROBERTIS E. D. P., *Electron-microscope study of a special neurosecretory neuron in the nerve cord of the earthworm*, Proc. V Intern. Congr. Electron-Microscopy 2, U-7, Academic Press, New York (1962).

[10] HERLANT-MEEWIS H., *Neurosécrétion chez les Oligochètes*, Bull. Acad. Roy. Belg., **41**, pp. 500-506 (1955).

[11] HERLANT-MEEWIS H., *Phénomènes neurosécrétoires et ponte chez Eisenia foetida*, C. R. Acad. Sci., **243**, pp. 823-825 (1956).

[12] HERLANT-MEEWIS H., *Croissance et neurosécretion chez Eisenia foetida (Sav.)*, Ann. Sci. Nat. Zool., **18**, pp. 185-198 (1956).

[13] BERN H. A. and KNOWLES SIR F., *Neurosecretion*. In « Neuroendocrinology » (L. Martini and W. F. Canong, eds.), Vol. 1, pp. 139-186, Academic Press, New York (1966).

[14] HANSTRÖM B., *On the transformation of ordinary nerve cells in the neurosecretory cells*, K. Fisiogr. Sällsk. Lund Förh., **24**, pp. 1-8 (1954).

[15] GERSCH M., *Wesen und Wirkungsweise von Neurohormonen im Tierreich*, Naturwissenschaften, **20**, pp. 525-532 (1957).

[16] GERSCH M., *Neurohormone bei wirbellosen Tieren*, Verhandl. Deut. Zool. Ges. Zool. Ans. Suppl. **22**, pp. 40-76 (1958).

[17] GERSCH M., *Neurosekretion und Neurohormone bei wirbellosen Tieren*, Symp. Biol. Hung., **1**, pp. 153-180 (1960).

[18] CLARK R. B., *On the origin of neurosecretory cells*, Ann. Sci. Natl. Zool., **11**, pp. 199-207 (1956).

[19] CLARK R. B., *On the trasformation of neurosecretory cells into ordinary nerve cells*, K. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh., **26**, pp. 1-8 (1956).

[20] NOVÁK V. J. A., *The phylogenetic origin of neurosecretion*, Gen. Comp. Endocrinol., **4**, pp. 696-703 (1964).

Vulcanismo sottomarino latitebasaltico-latitico (serie potassica) nel Canale d'Ischia (Campania) *

Nota di PIO DI GIROLAMO e GIUSEPPE ROLANDI
presentata dal socio ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza dell'8 dicembre 1975)

RIASSUNTO. — Sono stati studiati i caratteri geo-vulcanologici e petrografici di due edifici vulcanici sommersi nel Canale d'Ischia; tali vulcani si sono formati in seguito ad eruzioni sottomarine esplosive (ialoclastiti) di un magma potassico latitebasaltico-latitico. Le correlazioni petrochimiche con le attigue aree delle isole di Procida, Vivara ed Ischia indicano una parentela delle vulcaniti di tutta l'area; essa è interessata da una serie potassica latitebasalti-latiti-trachiti-fonoliti con caratteri riferibili possibilmente ad una particolare associazione ad affinità shoshonitica.

Il confronto fra le serie di vulcaniti di Ischia, Procida-Vivara, Campi Flegrei e Somma-Vesuvio indica un aumento graduale del carattere potassico da ovest verso est.

SUMMARY. — The geo-volcanologic and petrographic features of two submarine volcanoes in the Ischia Channel have been studied: they have been formed through subacqueous explosive eruptions (hyaloclastites) of a latitebasaltic to latitic magma. Petrochemical correlations with the volcanics from the nearby islands of Procida, Vivara and Ischia show a close similarity for all the magmatic products of this region. Here a latitebasalt-latite-trachyte-phonolite potassic series has been found with features to be possibly related to a particular association with shoshonitic affinity.

The comparison of the different volcanic series of Ischia, Procida-Vivara, Phlegrean Fields and Somma-Vesuvius indicates an increase of their potassic character from W to E.

INTRODUZIONE.

In questa nota vengono studiati due apparati vulcanici presenti sul fondo marino del Canale d'Ischia compreso fra le isole di Vivara-Procida e Ischia. L'esistenza di tali apparati vulcanici sommersi in questa zona, assieme ad altri nell'area sottomarina circostante, era già nota; nel presente lavoro ne viene studiata la morfologia. Inoltre le caratteristiche petrologiche e chimiche delle vulca-

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.

niti che li costituiscono permettono di segnalarne l'origine sottomarina e la composizione femica, di serie potassica, di tipo latitebasaltico-latitico.

Tale lavoro si inquadra nelle ricerche petrologiche e geomineralogiche già pubblicate sulle vicine isole di Vivara e Procida [3, 5] confermando per tutta questa area da una parte una peculiarità geologica rappresentata dal vulcanismo sottomarino (ialoclastiti) e dall'altra la preponderante abbondanza di vulcaniti potassiche femiche, diversamente dalle aree flegree attigue (isola d'Ischia e Campi Flegrei) dove, pure non mancando vulcaniti femiche [6], si ha una netta prevalenza di prodotti sialici potassici a composizione trachitica e fonolitica. La presente nota vuole infine ribadire ai fini delle conoscenze geo-petrografiche, petrogenetiche e mineralogiche dell'area flegrea, l'importanza dello studio del vulcanismo del fondo marino relativo a tale area; come è noto i dati geofisici indicano la presenza di un'estesa area magmatica continua che interessa e oltrepassa tutta la piattaforma continentale comprendente le isole vulcaniche di Procida-Vivara e Ischia [7, 8].

1. - Dati geo-vulcanologici.

1*a*. - *Bibliografia, tettonica.*

Come dati bibliografici si cita brevemente J. Walther che nel 1886 [28] segnalò la presenza di cinque forme di edifici vulcanici sul fondale del Golfo di Napoli; due di questi nei pressi dell'isola d'Ischia, nessuno sul fondale circostante le isole di Vivara e Procida.

Del Canale d'Ischia si interessò più specificatamente A. Rittmann nel 1930 [16]. Tale autore ritenne possibile una natura vulcanica per gli edifici corrispondenti alle secche delle Formiche di Vivara e La Catena oggetto del presente lavoro; inoltre per la prima notò (Figg. 1 e 2) la posizione lungo la prosecuzione della grande faglia che interessa la parte sud-orientale dell'isola di Ischia con andamento SW-NE e sulla quale si allineano molti vulcani, per la seconda l'analogia di forma con l'edificio del castello di Ischia (Fig. 2) gli fece ritenere che si trattasse di una cupola trachitica.

La zona del Canale di Ischia è collegabile morfologicamente sia all'area vulcanica di Vivara-Procida che a quella di Ischia; l'intera area, inoltre, è situata nella parte interna della piattaforma continentale e l'isobata dei 50 metri (Fig. 1) la collega ai Campi Flegrei. Anche le caratteristiche tettoniche e vulcanologiche collegano l'area insulare a quella antistante dei Campi Flegrei [5]. I dati sismici

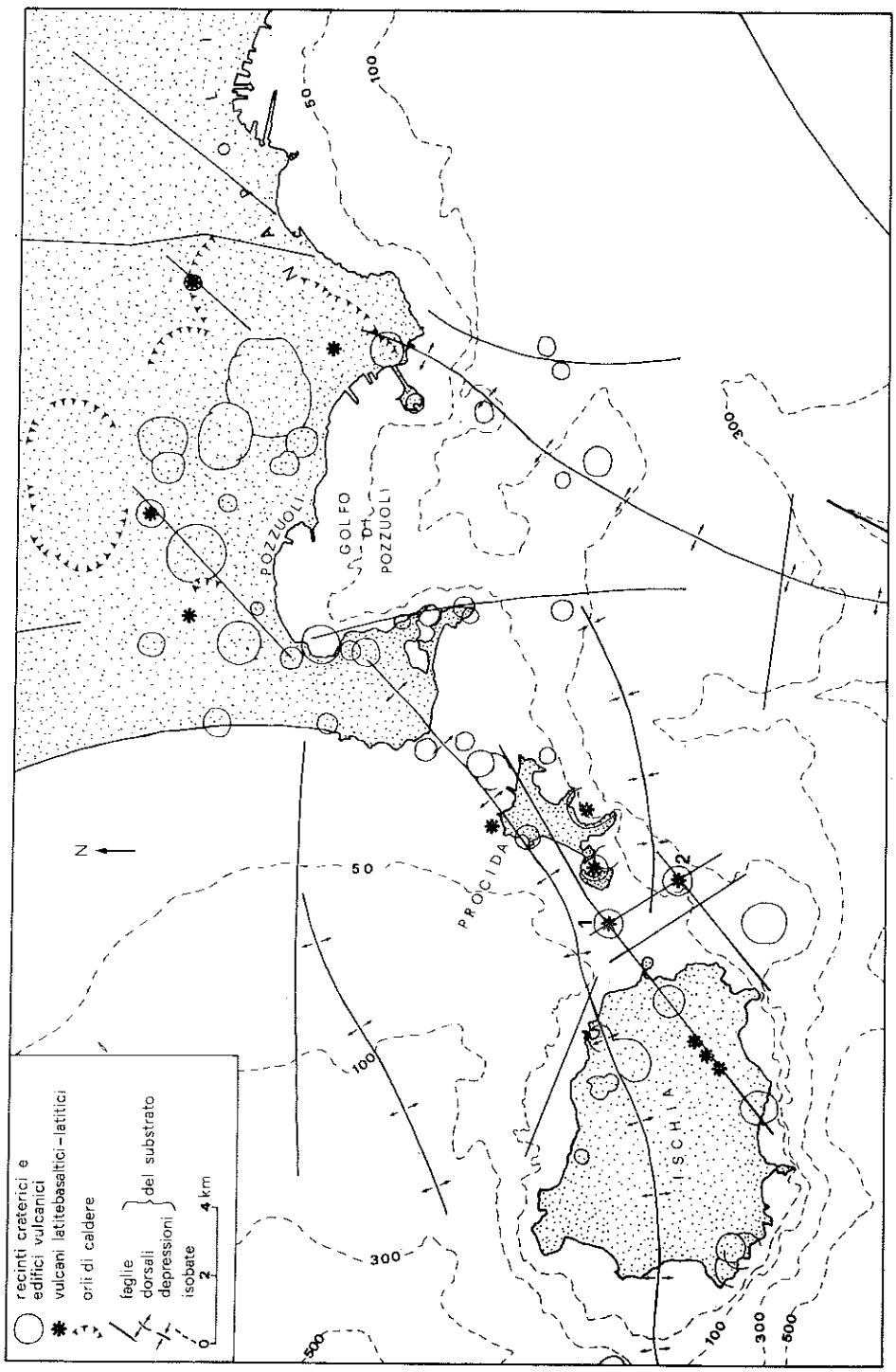


FIG. 1. - Ubicazione dei vulcani ialoclastitici latitebasaltici-latitici di Formiche di Vivara (1) e La Catena (2) nel Canale d'Ischia.

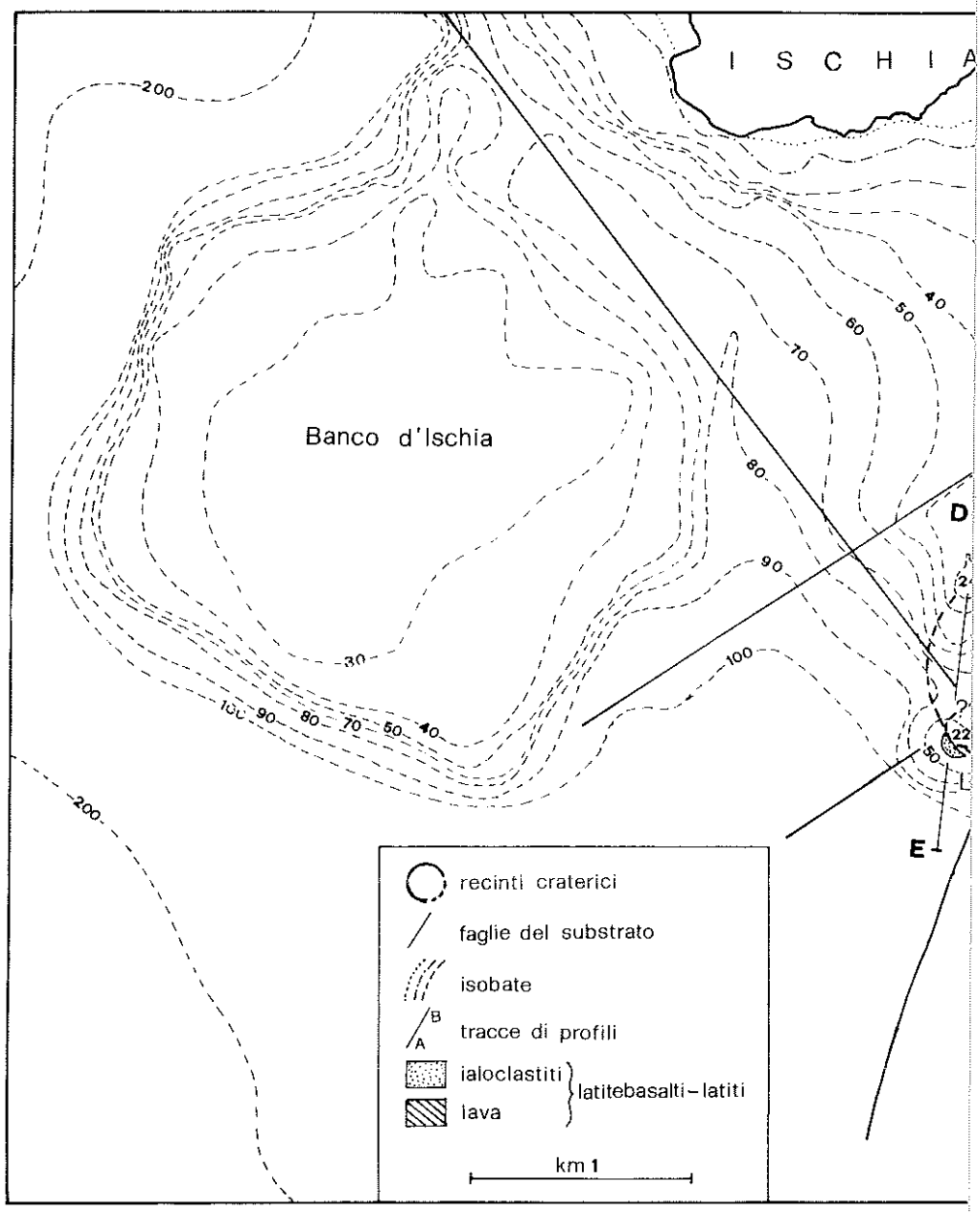
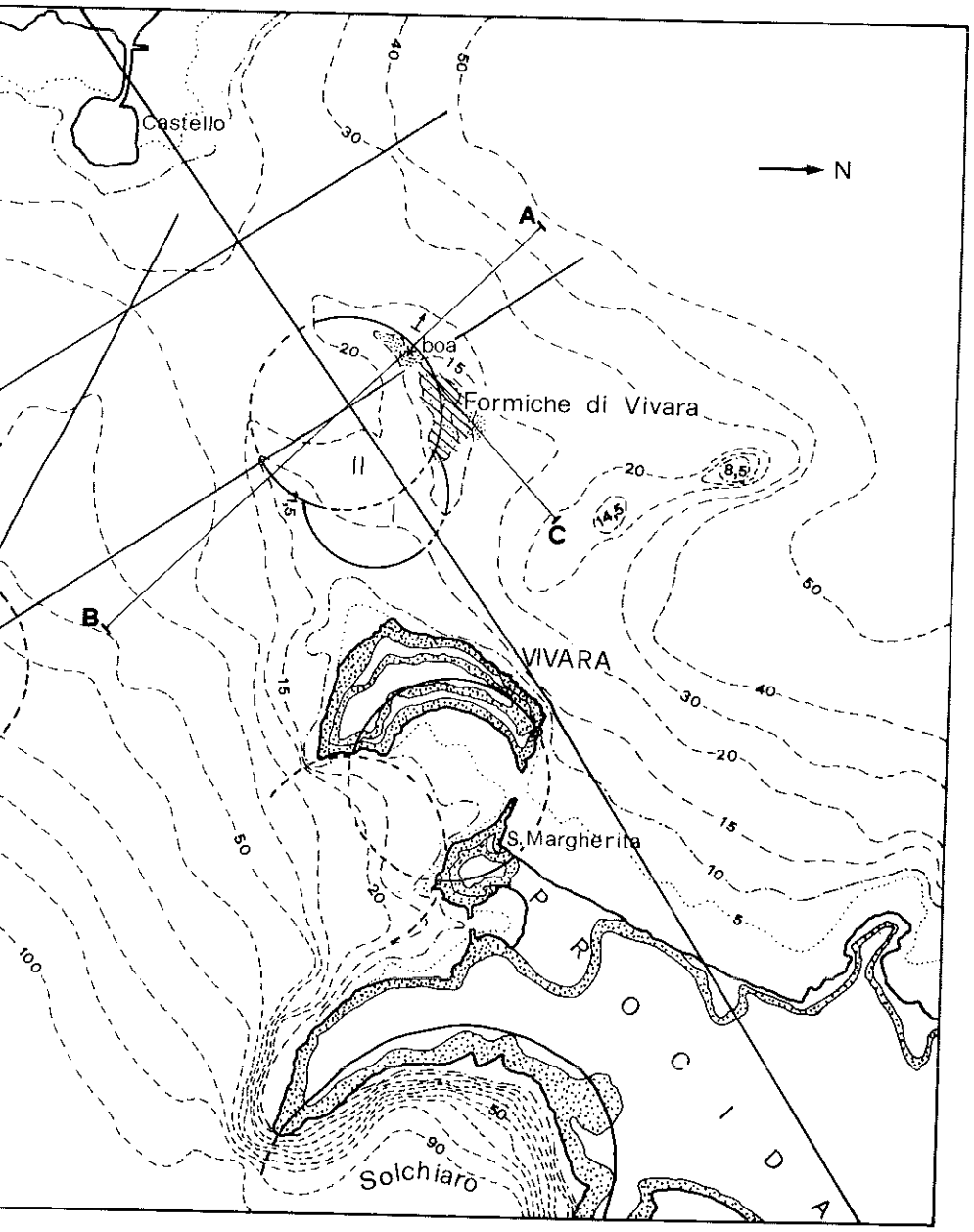


FIG. 2. - Morfologia del fondo marino nel Canale d'Ischia con i vulcani sottomai
Sono pure riportati i recinti craterici e la distribuzione delle relat



astitici di Formiche di Vivara (latitebasaltico-latitico) e La Catena (latitico).
astiti nelle isole di Vivara e Procida.

sulla struttura del substrato sedimentario fino al Mesozoico carbonatico [8] indicano che il « sistema flegreo-ischitano » (Monte di Procida-Ischia) è interessato da una dorsale continua a direzione NE-SW (Fig. 1) lungo la quale, e nelle fasce adiacenti, si sviluppa una vistosa attività vulcanica. Inoltre si vedrà che il vulcano delle Formiche di Vivara pur collegandosi, per motivi vulcanologici, mineralogici e petrografici, a Vivara e a Procida, rappresenta, assieme al vulcano La Catena, un anello di congiunzione fra queste isole e Ischia per la posizione tettonica e per le caratteristiche petrochimiche fin'ora note.

In Fig. 1 è riportata l'ubicazione dei due vulcani del Canale di Ischia nell'ambito del vulcanismo flegreo continentale e insulare e della tettonica del substrato [14, 8].

È interessante notare che i vulcani più femici dell'isola d'Ischia (latiti), quelli latitebasaltici-latitici del canale e i vulcani latitebasaltici-latitici di Vivara e Procida si allineano lungo una faglia o serie di faglie ad andamento tirrenico (NE-SW) ai bordi della già citata dorsale che, con la stessa direzione, interessa il substrato dal Mesozoico al Quaternario. La morfologia del substrato sedimentario della parte occidentale del Golfo di Napoli è caratterizzata da dorsali e depressioni con andamento tirrenico e da faglie parallele e normali a queste [8]; tale allineamento tirrenico trova riscontro nella struttura a horst e graben presente, con la stessa direzione, nel basamento mesozoico carbonatico dell'area continentale [1] ed indica che questa direzione tettonica controlla notevolmente l'attività vulcanica dell'area flegrea.

Oltre ai vulcani femici di Ischia-Canale d'Ischia-Vivara-Procida anche quelli latitici e trachitici a tendenza latitica più o meno accentuata dei Campi Flegrei [6] sembrano essere in connessione con dorsali e relative faglie tirreniche (Fig. 1) per cui è da ritenere che tale situazione tettonica ha contribuito a creare le condizioni favorevoli alla fuoriuscita del magma femico. S'intende che queste strutture, identificate a livelli relativamente superficiali, riguardano solo gli stadi più o meno finali di risalita del magma. L'area del Canale di Ischia, comunque, costituisce anche una zona di fratturazioni profonde crostali e mesocrostali ad andamento NW-SE [14].

1*b*. - *Vulcano delle Formiche di Vivara.*

Nel Canale d'Ischia (Fig. 2) 200 m a NE dalla boa inizia una secca, detta Formiche di Vivara, che si innalza piuttosto rapidamente dal fondo marino circostante che si trova ad una profondità media

di 20 m; il dislivello è di circa 15 m. Tale secca forma un rilievo con due massimi che arrivano a 4 m sotto il livello del mare; considerandone l'isobata dei 15 m essa si estende, a forma di dosso arcuato, in direzione SW-NE per circa 800 m.

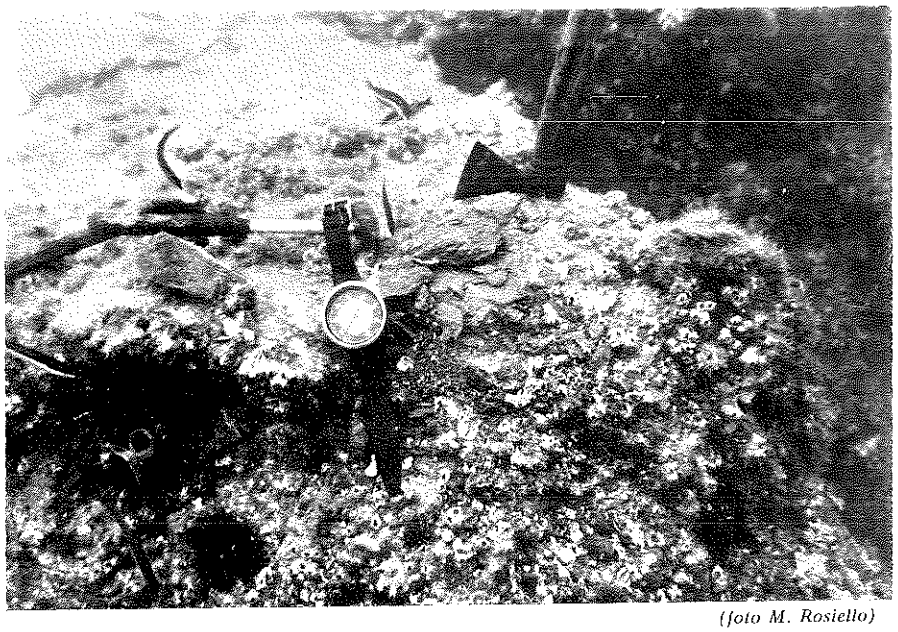
La parte più alta del dosso è formata da lava (Fig. 3) rivestita da una sottile guaina biancastra costituita da alghe e madreporari incrostanti, briozoi, cirripedi, selpulidi e lamellibranchi; il colore della lava è grigio piombo e all'osservazione macroscopica mostra fenocristalli di pirosseno, subordinato plagioclasio, poca olivina e sferule biancastre che al microscopio risultano essere plaghe analcimizzate a spese della massa di fondo vetrosa.

Lo spessore accertato della lava supera i 7 m; non è stato possibile osservare se tale banco è costituito da una o più colate, comunque le osservazioni in sezioni sottili di campioni presi a più livelli indicano una omogeneità di composizione mineralogica e strutturale. Tale banco si estende per circa 400 m di lunghezza e 100-200 m di larghezza (Fig. 2). Presenta fratture colonnari subverticali con lati di 1-3 metri; l'incrocio di tali fratture, interessanti certamente tutto il banco, danno luogo a dei prismi che, in seguito ad assestamento, a volte si sono ribassati determinando fosse poligonali a pareti liscie subverticali (Fig. 4).

Sulla superficie della lava non si osserva né una zona scoriacea, nel caso che la lava sia stata subaerea, né una guaina di pillows o breccia ialoclastitica nel caso di una messa in posto subacquea. Tali morfologie sono state sicuramente erose dalle correnti marine molto intense nel canale, comunque per analogie vulcanologiche (vedi oltre) si propende per una origine essenzialmente subaerea. L'attuale giacitura sottomarina non dà alcuna indicazione dato che i diversi caratteri litologici e stratigrafici delle attigue isole di Vivara e Procida indicano un'alternanza di sommersioni ed emersioni [5]; tale conclusione, come si vedrà, è evidente pure nell'area del vulcano delle Formiche di Vivara.

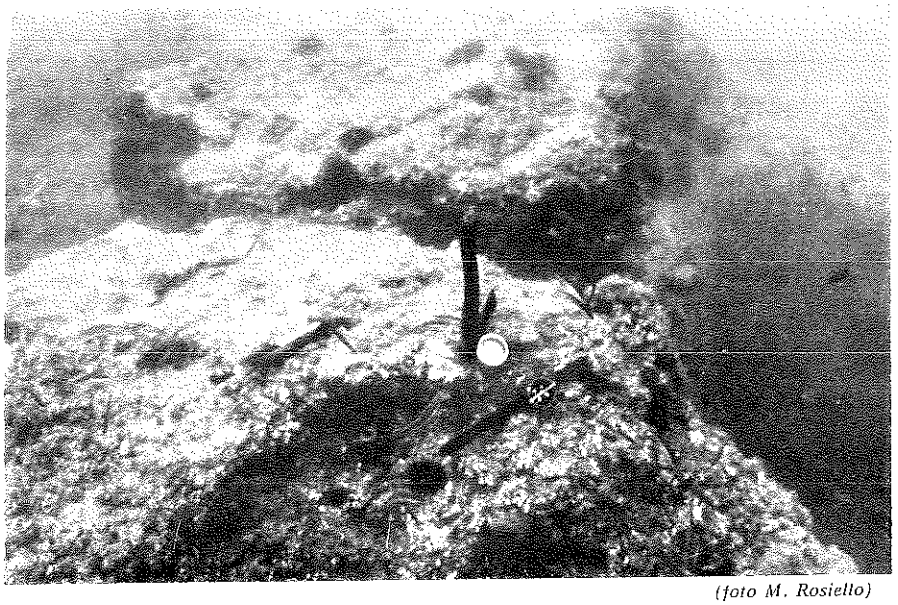
La lava ha una composizione latitebasaltica-latitica (vedi oltre); essa rappresenta il primo ritrovamento di una colata di lava con un carattere femico così relativamente accentuato nell'area flegrea sia continentale che insulare.

Al di sotto della lava, dove l'assenza di sabbia e fango rende possibile l'osservazione, si ha un tufo giallo litoide i cui caratteri microstrutturali indicano che si tratta di una ialoclastite; i dati mineralogici suggeriscono un tipo petrografico simile a quello della lava a tetto. Lungo lo strapiombo nel quale è ancorata la boa (Fig. 2) la ialoclastite è stata rinvenuta da -15 a -25 metri; essa si osserva in tutta l'area intorno alla boa e in qualche zona ripida sotto la lava.



(foto M. Rosiello)

FIG. 3. - Vulcano sottomarino delle Formiche di Vivara nel Canale d'Ischia, m. 200 a est della boa. Particolare della lava latitebasaltica-latitica, a — 7 metri, a tetto delle ialoclastiti.



(foto M. Rosiello)

FIG. 4. - Stessa zona di fig. 3. Fratture colonnari nella lava latitebasaltica-latitica.

I dati morfologici suggeriscono che la formazione ialoclastitica continua ancora sotto i sedimenti per cui lo spessore è senz'altro superiore ai 15 m. Nei pressi della boa si osserva una stratificazione costituita da livelli di ceneri intercalati a livelli più ricchi di scorie e litici, l'immersione è NW.

L'assenza di pillows o frammenti di questi suggerisce per tali ialoclastiti, come per quelle di Vivara-Procida, una genesi da esplosioni freatiche [3, 5].

Sono stati eseguiti dei profili del fondo marino mediante l'ecoscandaglio prendendo come riferimento la boa (Fig. 2). Con le batimetrie delle carte nautiche e l'ausilio di tali profili si ricava la morfologia del fondo marino riportata in Fig. 2. Con le imprecisioni dovute alle necessarie interpolazioni si osserva che la secca in oggetto rappresenta il bordo superiore di un cratere vulcanico. L'edificio ha forma di cono e risulta mutilato da azioni tettoniche e vulcaniche oltre che da possibili erosioni locali. Esso è attraversato da un canale con direzione NE-SW. Quest'ultimo si trova perfettamente sulla faglia tirrenica, già menzionata, che attraversa le isole di Ischia e Procida; inoltre l'edificio è slabbrato a SW probabilmente per abrasione marina.

L'andamento delle isobate suggerisce che il cratere è distoma, probabilmente dopo un primo episodio esplosivo che ha dato luogo ad un edificio ialoclastitico (Formiche di Vivara I) l'asse eruttivo si è spostato di qualche centinaio di metri verso SW distruggendo in parte il primo cono e formandone un altro più grande (Formiche di Vivara II); la sovrapposizione dei prodotti può aver dato luogo alla secca a $-11{,}5$ m a SW di Vivara (Fig. 2). Alla fine si è avuto l'episodio lavico.

Prescindendo dalla presenza della lava la forma generale, le dimensioni e la natura petrografica sono molto simili al vicino cratere ialoclastitico di Vivara. La vicinanza a questo cratere inoltre può far ritenere che si abbia in effetti un complesso vulcanico Vivara-Formiche di Vivara.

I profili con lo scandaglio ad eco sono stati eseguiti prendendo la boa come punto di riferimento (Fig. 2). Sono state seguite le rotte 135° e 315° (direzione A-B, Fig. 5) e 50° (boa-C, Fig. 6); le figure 5 e 6 riproducono i profili secondo i rapporti altezza/lunghezza forniti dall'ecoscandaglio. La notevole amplificazione delle altezze permette, nei limiti delle approssimazioni dello strumento, alcune osservazioni.

In Fig. 5, ad esempio, sono ben visibili i due vertici che rappresentano il bordo attuale del cratere. Il solco nel fondo del cratere conferma il canale individuato a NE dalle isobate; tale canale può essere dovuto ad erosione, in un periodo di emersione, lungo la

direttrice di maggiore erodibilità determinata dall'azione tettonica della faglia. L'emersione del vulcano e la persistenza di attività della faglia anche dopo la costruzione dell'edificio possono essere confermate dalla presenza dei ripiani sui due bordi esterni, attualmente ad una profondità media di 25 m, che possono rappresentare terrazzi di abrasione marina; successivamente si ebbe una dislocazione lunga la faglia con un rigetto di circa 4 m.

In Fig. 5 in basso è riportato il profilo in scala naturale; in esso si osserva la forma notevolmente depressa in vicinanza del cra-

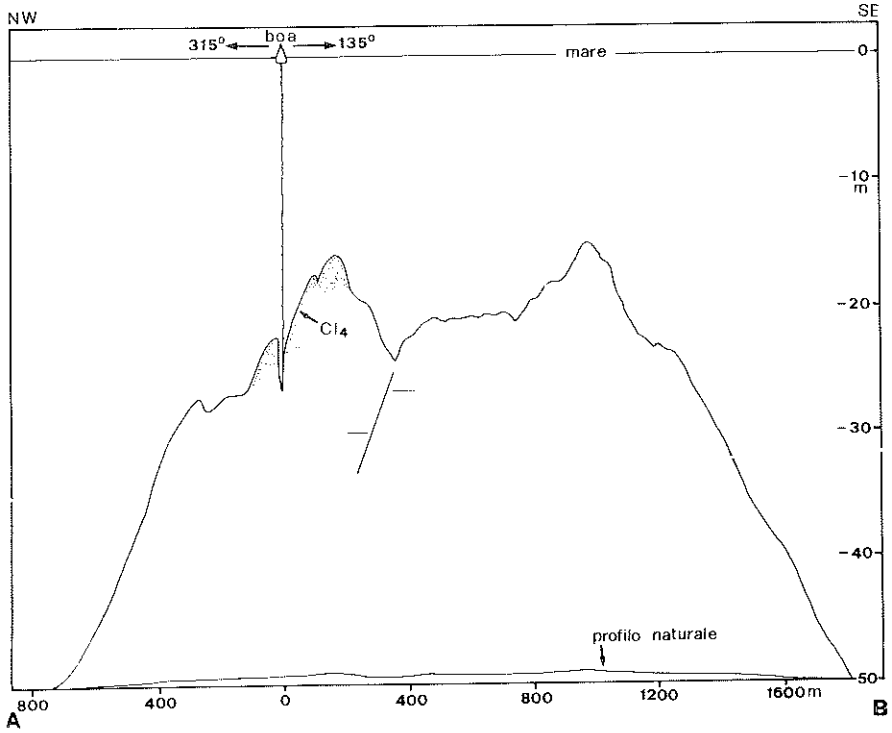


FIG. 5. - Profilo lungo la direttrice A-B (fig. 2) dell'edificio vulcanico sottomarino latitebasaltico-latitico delle Formiche di Vivara secondo i dati dell'ecoscandaglio; la scala delle altezze, molto amplificata, è 40 volte superiore a quella delle lunghezze. In basso è riportato il profilo naturale. L'area puntinata indica le zone dove è stata accertata la presenza di ialoclastite; è riportata inoltre (CI_4) la posizione del campione per le analisi chimiche.

tere. Certamente tale forma è dovuta in gran parte a interramenti del fondo del cratere e dei fianchi esterni, comunque essa può essere anche in parte originaria. Infatti è da tener presente, per analogia, che le forme degli edifici ialoclastitici di Vivara e Solchiaro (Fig. 2), come in genere accade nei crateri ialoclastitici [23], rappresentano degli « anelli » che circondano un cratere a fondo piatto il

cui diametro rispetto all'altezza del bordo del cratere è molto alto (6-8/1).

Tale morfologia appiattita si ritiene derivi dalla notevole energia cinetica prodotta per evaporazione dell'acqua a contatto con i prodotti vulcanici che raggiungono altezze notevoli, rispetto alle esplosioni subaeree, ricadendo su zone molto vaste [23]. Inoltre è da ritenere che queste ialoclastiti si siano formate per esplosioni piuttosto superficiali di tipo freatico; tale piccola profondità rispetto al fondo marino favorisce un'emissione di frammenti a raggiera.

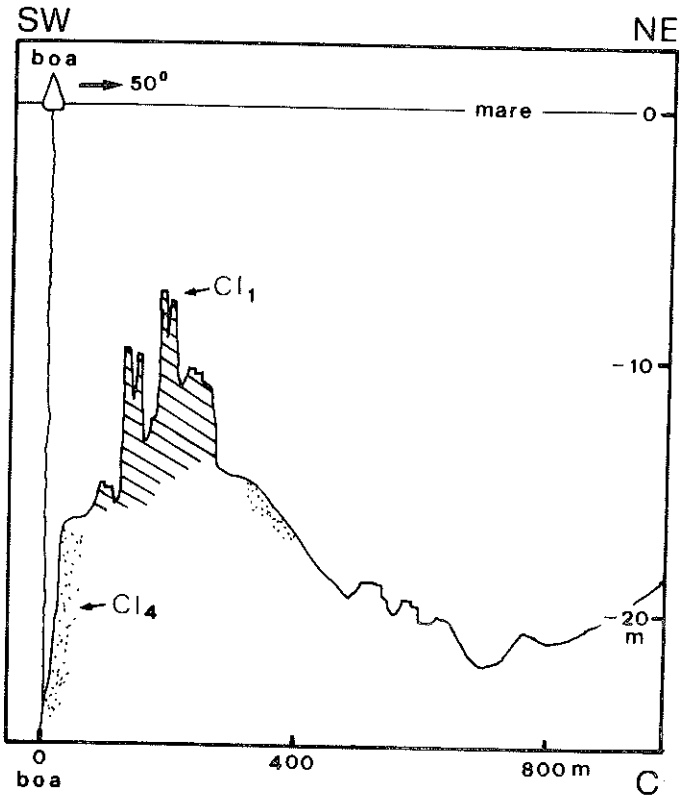


FIG. 6. - Profilo dell'ecoscandaglio lungo la direttrice boa-C (fig. 2) del vulcano delle Formiche di Vivara; rapporto ordinate/ascisse come in fig. 5. Oltre alla posizione del campione di ialoclastite CI_4 è indicata quella approssimativa del campione di lava latitebasaltica-latitica CI_1. Le aree puntinate e zebrate indicano le zone dove è stata accertata la presenza, rispettivamente, della ialoclastite e della lava.

La fig. 6, che riporta un profilo comprendente la ialoclastite e la lava soprastante, mostra la diversità morfologica dei due litotipi. La lava presenta una superficie molto irregolare dovuta ai già citati

blocchi prismatici più o meno ribassati; dalla morfologia del profilo sembra che lo spessore del banco di lava sia di circa 8 m.

Dai dati esposti e tenendo presente per analogia i dati litologici e morfologici più dettagliati per gli analoghi crateri di genesi sottomarina presenti a Vivara e a Procida [3], si può concludere quanto segue.

Un magma latitebasaltico-latitico, parzialmente gassato, nel corso terminale della sua ascesa dette luogo ad eruzioni subacquee esplosive a debole profondità dal fondo marino o forse al momento della fuoriuscita. La forma craterica e la litologia escludono che la genesi delle ialoclastiti sia dovuta a frammentazioni di lave o di pillows. La forte esplosività a livelli superficiali, che ha dato luogo al cratere svasato, è riferibile solo in parte ai gas magmatici (presenza di scorie e clasti di vetro bollosi); prevedibilmente l'energia cinetica è prevalentemente imputabile alla rapida evaporazione dell'acqua venuta a contatto con il magma. Nella genesi da eruzioni subacquee della recente isola di Surtsey, presso la costa meridionale dell'Islanda, è stato accertato che l'attività vulcanica, inizialmente esplosiva, è divenuta rapidamente effusiva allorché le acque marine non hanno potuto più accedere nel condotto vulcanico [24, 25, 26, 27].

Analogamente, per il vulcano delle Formiche di Vivara si può ritenere che nel corso della costruzione dell'edificio, e a causa di questa, dopo uno spostamento dell'asse eruttivo verso SW, si ebbe l'emersione della parte terminale del cono vulcanico nel corso della quale si verificò l'episodio lavico latitebasaltico-latitico finale. Un'ulteriore emersione formò i terrazzi marini attualmente profondi 25 m. Successive dislocazioni e sommersioni dettero luogo all'aspetto attuale.

È da aggiungere a questa sequenza di sommersioni ed emersioni, probabilmente dovute essenzialmente ad oscillazioni del fondo marino per locale attività magmatica, che, precedentemente all'ambiente subacqueo della parte del Canale d'Ischia in oggetto relativo alle ialoclastiti, ci deve essere stato un periodo di emersione come testimoniano gli inclusi lavici, spesso di notevoli dimensioni, rinvenibili nella ialoclastite di Vivara e Formiche di Vivara; tali inclusi non mostrano nella loro struttura e litologia generale caratteri di eruzioni subacquee.

1*c*. - *Vulcano de La Catena.*

Nella parte marginale del Canale d'Ischia, 3 km a SE della secca Formiche di Vivara, si trova la secca La Catena (Fig. 2) situata sul

fianco di una scarpata del fondo marino che, in direzione NW-SE, va da 40 a 100 m nello spazio di 800 m circa (Fig. 7).

Tale secca si innalza, su un fondale inclinato, da 75 m a W e 110 a E e arriva rapidamente a 21 m sotto il livello del mare. È stata studiata da −21 a −40; ha una forma lievemente arcuata allungata in direzione NE-SW. È costituita da ialoclastite litoide di colore

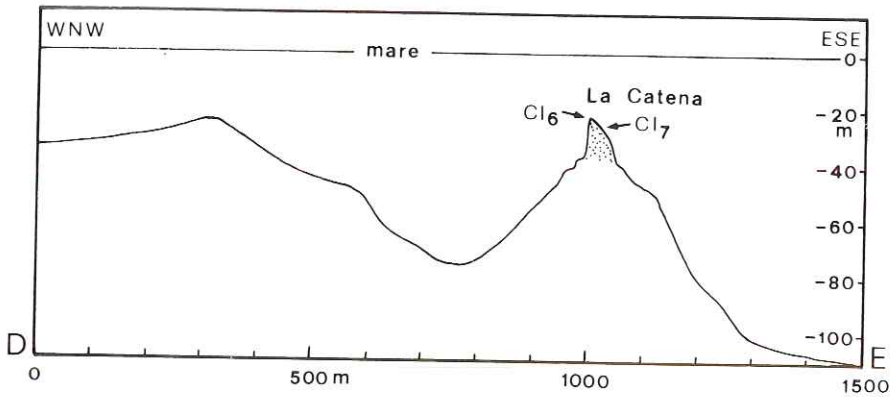
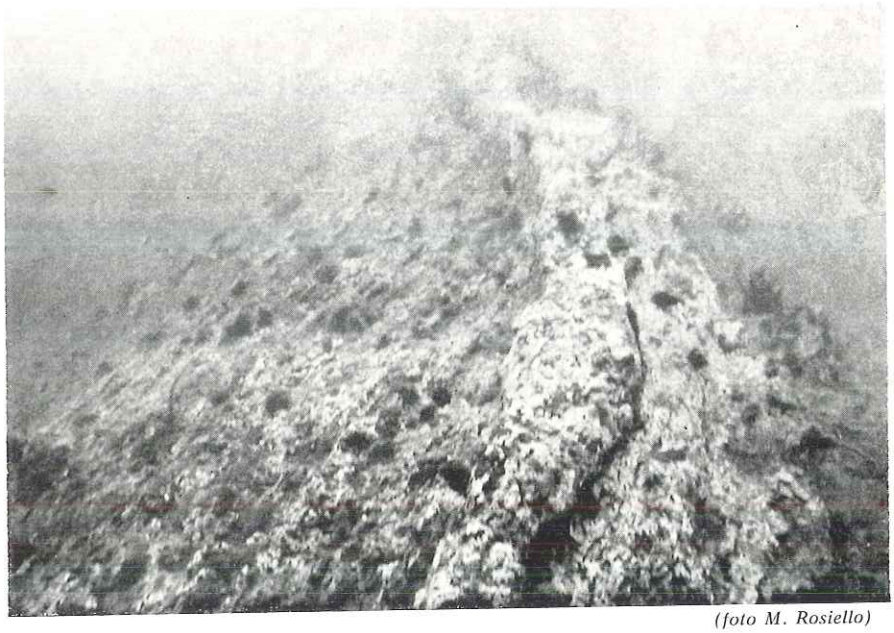


FIG. 7. - Profilo lungo la direttrice D-E (fig. 2), comprendente il vulcano ialoclastitico latitico La Catena, del fondo marino in base all'interpolazione dei dati delle carte nautiche. Rapporto ordinate-ascisse 5/1. L'area puntinata indica la zona dove è stata accertata la presenza di ialoclastite; è riportata inoltre la posizione dei campioni di ialoclastite (CI_6) e incluso scoriaceo (CI_7) per le analisi chimiche.

giallo-bruno; a −40 m circa è coperta da sabbia e limo. Scende molto rapidamente sul versante di NW, meno inclinato è quello di SE (Fig. 8-9-10).

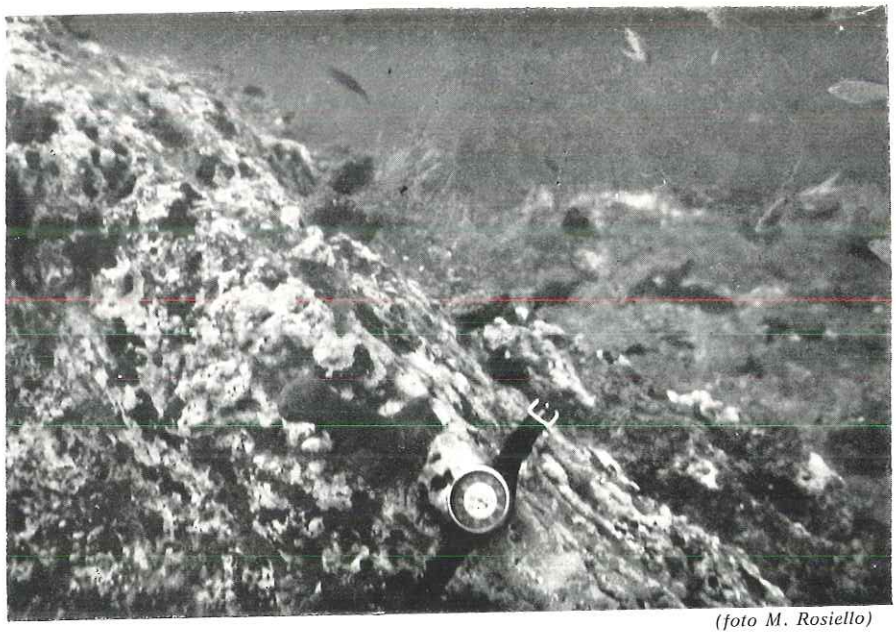
Anche questa secca, come quella delle Formiche di Vivara, è ricoperta, oltre che da gorgonie, da alghe, spugne incrostanti, briozoi, cirripedi e serpulidi che formano una sottile guaina biancastra.

La ialoclastite (Fig. 14) si presenta stratificata con livelletti più cineritici alternati ad altri più ricchi di scorie. Le dimensioni medie delle scorie, spesso arrotondate, sono di circa ½ cm ma oscillano da qualche mm a 1 dm. Si è anche rinvenuto a −25 un grosso incluso (cm 70 × 50, camp. CI_7) certamente da ritenere coevo col magma latitico che ha prodotto la ialoclastite sia per la struttura scoriacea che per l'associazione mineralogica identica a quella delle più piccole scorie costituenti la ialoclastite. In analogia con la ialoclastite di Vivara e Sorchiaro si può ritenere che la stratificazione, con lamine a volte gradate, sia in parte primaria per un'attività vulcanica intermittente e in parte dovuta a rimaneggiamento.



(foto M. Rosiello)

FIG. 8. - Vulcano sottomarino La Catena, nel Canale d'Ischia, costituito da ialoclastiti latitiche. Si osserva la parte sommitale (−21 m) della secca omonima, vista da NE, rappresentante probabilmente il bordo esterno del cratere (a sinistra) e un piano di faglia (a destra).

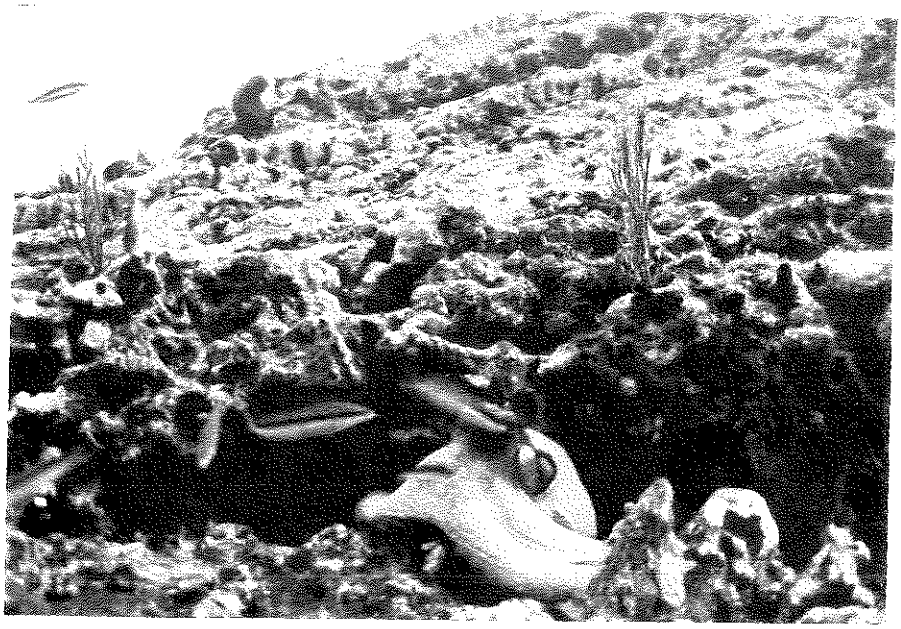


(foto M. Rosiello)

FIG. 9. - Vulcano ialoclastitico latitico de La Catena nel canale d'Ischia. Particolare della falesia che tronca la secca La Catena nella parte nord-occidentale con un salto di 20 metri.

Non si hanno dati dettagliati sulla morfologia della secca ai fini della ricostruzione dell'edificio vulcanico comunque si possono fare in prima approssimazione dei tentativi a tal fine.

La morfologia della parte terminale della secca può rappresentare un settore di cratere ialoclastitico; la pendenza del versante di SE è piuttosto simile a quella rinvenibile nei crateri di Vivara e Solchiaro. Il versante di NW, data la notevole inclinazione potrebbe



(foto M. Rosiello)

FIG. 10. - Particolare a −25 metri del versante esterno di SE del cratere ialoclastitico latitico La Catena nel Canale d'Ischia.

essere un piano di faglia. Dall'andamento delle isobate la forma della secca (Fig. 2 e 7) è quella di un piccolo cono o di una cupola abbastanza regolare; quest'ultimo dato, come già detto, fece ritenere al RITTMANN [16] che si trattasse di una cupola lavica. La ricostruzione in base alle isoipse circostanti la secca porterebbe ad un bordo craterico con un diametro poco superiore ai 100 m (Fig. 2).

Tale tentativo di ricostruzione è probabilmente poco attendibile per due motivi: si avrebbe innanzitutto intorno al cratere una morfologia ripida nettamente contrastante con gli altri edifici ialoclastitici; inoltre la tettonica ha probabilmente svolto un ruolo importante nell'attuale morfologia generale della secca. Infatti essa si trova all'incrocio di una serie di faglie di impostazione profonda (Fig. 2)

alcune delle quali attraversano il substrato mesozoico e arrivano fino al Quaternario [8].

Un'altra possibilità è che la secca distante circa 700 m a W de La Catena (Fig. 2) faccia parte del vulcano in oggetto. Non si hanno dati sulla natura di questa secca che sembra essere coperta da sabbia e fango; essa sorge sul fronte di una dorsale che può rappresentare una lava sepolta proveniente da Ischia o un modellamento per erosioni o faglie.

La seconda possibilità presenterebbe il vantaggio che si costruisce un cratere con un diametro di 900 m circa che è un valore molto simile a quelli presenti nei vulcani ialoclastitici delle Formiche di Vivara e Vivara.

Si accenna infine al grosso vulcano sommerso, a S-SW del vulcano La Catena (Fig. 2), detto Banco d'Ischia. Si tratta di un edificio appiattito tronco-conico a fianchi ripidi terminante con una piattaforma alquanto regolare sui 28-30 m. Di questo edificio e del substrato sono note le caratteristiche morfologiche e strutturali [8, 13], la composizione è trachitica alcalina [16]; non sono noti i caratteri litologici e microstrutturali dei prodotti vulcanoclastici ed eventuali lave. Tali studi di dettaglio potrebbero indicare se l'attuale forma è secondaria, derivando dall'erosione marina della parte sommitale di un cono vulcanico inizialmente emerso (guyot) oppure, eventualmente, si tratti di una morfologia tronco-conica più o meno congenita in un vulcano sottomarino ialoclastitico con cratere interrato [23]. La prima possibilità sembra confermata dalla presenza di un'antica spiaggia sul margine del banco [13].

È da notare infine che nel Canale d'Ischia si hanno superfici di erosione, terrazzi e secche ad una profondità, mediamente simile, che oscilla fra i 22 e i 28 m; studi più dettagliati potrebbero dare indicazioni sulla natura di un eventuale fenomeno geo-vulcanologico a carattere più ampio.

2. - Dati mineralogici, petrografici e petrochimici.

2*a*. - *Vulcano delle Formiche di Vivara (latitebasaltico-latitico).*

Dai dati chimici la lava (camp. CI_1), nei limiti del grado di alterazione non molto accentuato, si classifica come latite olivinica contenente nefelina al limite con i latitebasalti (Tab. III). All'osservazione macroscopica mostra una struttura porfirica con fenocristalli di clinopirosseno, plagioclasio e subordinata olivina in una massa di fondo grigio scuro interessata da plaghette globulari grigio chiare

di uno o due mm di diametro costituite da vetro analcimizzato (Fig. 11).

In sezione sottile l'indice di porfiricità risulta medio-basso, i fenocristalli, in ordine di abbondanza, sono formati da clinopirosseno, plagioclasio, olivina; nei microfenocristalli si aggiunge magnetite e rara biotite. La massa di fondo è ipocristallina, vi si rinvengono le fasi già menzionate più sanidino (dato diffrattometrico) e le citate plaghe di analcime. Le dimensioni dei cristalli diminuiscono grada-

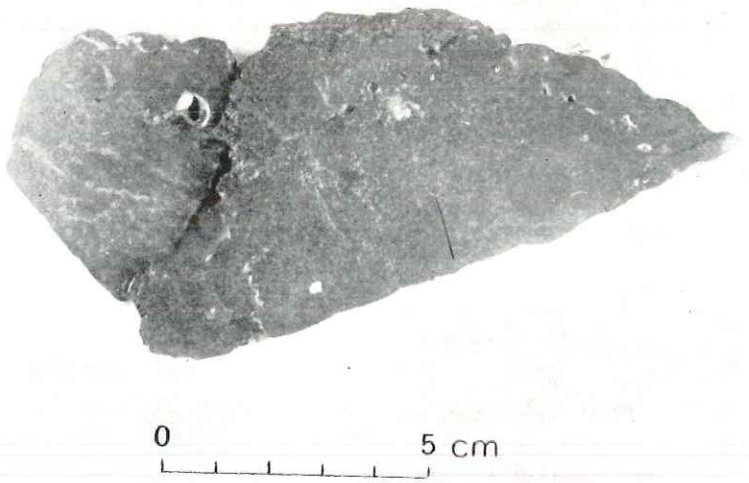


FIG. 11. - Canale d'Ischia. Lava latitebasaltica-latitica del vulcano Formiche di Vivara. Le sferule grigio chiare costituiscono plaghe analcimizzate della massa di fondo vetrosa.

tamente verso la massa di fondo indicando una risalita graduale del magma. Dai dati microstrutturali l'ordine di cristallizzazione delle fasi mineralogiche principali risulta: olivina-clinopirosseno-plagioclasio-sanidino.

In Tab. I sono riassunti i dati mineralogici sulla lava e altre vulcaniti del Canale d'Ischia prese in considerazione. Il plagioclasio in fenocristalli è sempre zonato, esso include cristalli di olivina e clinopirosseno; dai dati ottici il nucleo risulta una bytownite con 76 % di anortite, ai bordi è più sodico. Qui si ha una composizione di labradorite sodica con circa 55 % di anortite; una composizione simile è presente nei microliti determinabili della massa di fondo.

Indagini diffrattometriche sono state eseguite sulla roccia in toto. Per la valutazione della percentuale in anortite e albite si è usato il valore $2\theta_{1\bar{1}1} - 2\theta_{2\bar{0}1}$ secondo il metodo di J. V. SMITH e P. GAY [20] adoperando le curve relative allo stato strutturale dei plagioclasi vulcanici; la composizione è stata controllata con il valore $2\theta_{131} + 2\theta_{220} - 4\theta_{1\bar{3}1}$ degli stessi autori. La percentuale in Or è stata determinata sul riflesso $(\bar{2}\,0\,1)$ usando il diagramma di T. L. WRIGHT [29]. La composizione del plagioclasio totale risulta labradoritica calcica con il 67 % in An. (Tab. I).

Il clinopirosseno in fenocristalli è colorato in marrone verdastro sui toni chiari senza apprezzabile pleocroismo; diventa più ricco in ferro verso l'esterno e nella massa di fondo. Sui fenocristalli si determina un $2V\gamma$ di 60°, c/γ 43° e P.A.O. $\parallel$ (0 1 0). Tali dati ottici, pur indicando un clinopirosseno ricco in calcio, non sono del tutto indicativi, da soli, dell'appartenza alla serie augitica o a quella diopsidica. Il valore alto del 2V e la prevedibile poca abbondanza in ferro fanno propendere per un tipo diopsidico. I dati chimici su pirosseni simili di rosse femiche correlabili delle isole di Procida e Vivara (vedi oltre), indicanti, fra l'altro, una non trascurabile quantità di cationi trivalenti (Al, Fe), proiettano tali minerali nel campo del diopside, nel sistema diopside-edembergite-enstatite-ferrosilite, più o meno spostati verso il limite con la salite.

L'olivina in fenocristalli (Tab. I) ai dati ottici presenta $2V_\alpha = 88°$ che corrisponde ad una composizione crisolitica al 17 % Fa [15].

Per la composizione in base diffrattometrica è stato determinato il valore d_{130} secondo il metodo di YODER H. S. e SAHAMA Th. G. [30] usando la curva di SMITH J. V. e STENSTROM R. C. [21]. I diffrattogrammi indicano due picchi vicini, uno a $d_{130} = 2{,}7775$ Å corrispondente a 18 % Fa e l'altro a 2,7808 Å indicante una composizione più ricca in Fa (23 %). Considerando che soprattutto l'olivina della massa di fondo è in buona parte alterata in iddingsite si può ritenere che il valore più faialitico si riferisca ai microfenocristalli e solo in parte all'olivina della massa di fondo.

I dati diffrattometrici indicano pure la presenza, nel campione in toto, di feldspato potassico; la $(\bar{2}\,0\,1)$ presenta una serie di riflessi indicanti una fase di feldspato ricco in potassio che va da 74 a 45 % Or. Poiché nelle sezioni sottili non si osservano fenocristalli o microfenocristalli di feldspato potassico si conclude che la lava latitebasaltica-latitica contiene sanidino zonato nella massa di fondo ipocristallina.

Questo indica che nel frazionamento per zonature nel corso della cristallizzazione il liquido feldspatico, inizialmente nel campo di cristallizzazione dei plagioclasi del sistema An-Ab-Or, ha raggiunto nella

TAB. I - *Dati mineralogici sulle vulcaniti del Canale d'Ischia. Determinazioni ottiche (●) e diffrattometriche (+).*

Campione	Classificaz. e litologia	Minerale	Composizione	Note
CI_1	lava, latitebasalto-latite	Plagioclasio	Or Ab An % peso + 3 30 67 ● 24-45 76-55 % mol	determinazione sulla roccia in toto in fenocristalli zonati
		Sanidino	Or Ab (+An) % peso + 74-45 26-55	roccia in toto; presente, zonato, solo nella massa di fondo
		Clinopirosseno	● $2V_\gamma$ 60°, c/γ 43°; diopsidico?	fenocristalli
		Olivina	+ Fa 18 % mol ● Fa 17 % mol	fenocristalli
			+ Fa 23 % mol	microfenocristalli + massa di fondo in parte
		minerali di alteraz.	analcime, iddingsite	roccia in toto
CI_4	ialoclastite	Plagioclasio	Ab An % mol ● 20-25 80-65	fenocristalli nei clasti di vetro e scorie
		Clinopirosseno	● $2V_\gamma$ 59°, c/γ 44°; diopsidico?	
		Olivina	● Fa 17 % mol	
		fasi di alterazione	palagonite, zeoliti, montmorillonoidi, calcite	roccia in toto
CI_6	ialoclastite	Plagioclasio	Ab An % mol ● 30 70	come in CI_4
		Clinopirosseno	● $2V_\gamma$ 55°, c/γ 44°; diopsidico augitico	
		Olivina	● Fa 21 % mol	
		fasi di alterazione	palagonite, zeoliti, calcite, montmorillonoidi	
CI_7	incluso scoriaceo, latite	Plagioclasio	Or Ab An % peso + 4 45 51 ● 26-55 74-45 % mol	come in CI_1
		Sanidino	Or Ab (+ An) % peso + 51 49	
		Clinopirosseno	● $2V_\gamma$ 55°, c/γ 45°; diopsidico augitico?	
		Olivina	+ Fa 22 % mol ● Fa 21 % mol + Fa 28 % mol	microfenocristalli + massa di fondo

Camp. CI_1 - Vulcano latitebasaltico-latitico delle Formiche di Vivara. Lava a −7 metri, m. 200 a ENE della boa.
» CI_4 - Idem . Ialoclastite a −20 metri sotto la boa.
» CI_6 - Vulcano latitico de La Catena. Ialoclastite a −21 sulla secca La Catena.
» CI_7 - Idem . Incluso scoriaceo a −25 sulla secca La Catena.

massa di fondo la linea cotettica con conseguente cristallizzazione anche del feldspato potassico. È da aggiungere che tale liquido finale ha prevedibilmente una composizione trachitica-fonolitica; infatti oltre al buon inserimento di questo campione nelle curve di variazione della serie latitebasalti-fonoliti-trachiti di Procida e Vivara (Figg. 16, 17, 18, 19) è da notare che i fenocristalli di feldspati alcalini di queste rocce sialiche hanno una composizione simile a quella riscontrata nella massa di fondo della lava CI_1.

TABELLA II

Composizione chimica delle vulcaniti del Canale d'Ischia (An. G. Rolandi).

	Vulcano Formiche di Vivara		Vulcano La Catena	
	CI_1	CI_4	CI_6	CI_7
SiO_2	49.12	32.11	45.91	50.89
TiO_2	1.12	0.35	0.71	1.18
Al_2O_3	17.90	16.45	17.08	17.90
Fe_2O_3	5.48	6.97	5.75	3.71
FeO	2.72	1.75	1.82	4.71
MnO	0.15	0.17	0.20	0.15
MgO	4.87	10.60	4.64	3.30
CaO	8.73	6.19	3.95	7.92
Na_2O	4.44	2.40	3.49	3.51
K_2O	2.04	1.46	3.46	3.74
Cl_2	0.03	0.14	0.10	0.05
SO_3	0.03	2.96	0.10	0.03
P_2O_5	0.76	0.20	0.23	0.48
H_2O^-	1.80	4.25	4.50	0.83
H_2O^+	0.67	11.03	6.75	1.62
$CaCO_3$	—	3.90	0.80	—
	99.86	100.93 –	100.29 –	100.02 –
O/Cl_2+SO_3		0.62	0.04	0.01
		100.31	100.25	100.01
SI	24.9			17.4

La roccia ha subìto una certa alterazione idrotermale ad opera del contatto del magma con l'acqua di mare negli stadi finali della sua fuoriuscita e solidificazione. Delle fasi mineralogiche presenti l'olivina ne ha risentito in modo esclusivo. I fenocristalli e i microfenocristalli ai bordi e lungo le tracce di sfaldatura e frattura sono interessati da un materiale iddingsitico di colore rosso bruno-arancio bruno; i granuli di olivina della massa di fondo sono notevolmente alterati. Come si è detto anche il vetro della massa di fondo è parzialmente alterato in chiazze di analcime; si osserva infine qualche

plaga di idrossidi di ferro e poche zeoliti che tappezzano le pareti dei vacuoli.

In conclusione l'associazione mineralogica primaria della lava indica una paragenesi caratteristica della serie alcalina. Si osserva infatti, dal punto di vista mineralogico olivina stabile e clinopirosseno calcico; nella massa di fondo oltre a sanidino si ha nefelina normativa. La presenza di quest'ultima (vedi oltre) è giustificabile nei limiti

TABELLA III

Composizione mineralogica normativa in volume (Norma Rittmann) delle vulcaniti del Canale d'Ischia.

	Camp. CI_1		Camp. CI_7	
Sanidino	26.2	Or 67 % Ab 27 An 6	32.2	Or 65 Ab 30 An 5
Nefelina	3.2		2.8	
Plagioclasio	46.1	Or 8 Ab 41 An 51	43.8	Or 9 Ab 43 An 48
Diopside	11.4		11.4	
Olivina	8.8		6.2	
Magnetite	1.5		1.3	
Ilmenite	1.2		1.2	
Apatite	1.6		1.1	
feldspato medio		Or 28.5 Ab 35.8 An 35.7	feldspato medio	Or 30.7 Ab 38.9 An 30.4
A 34.7			A 40.9	
P 61.1			P 55.5	
F 4.2			F 3.6	
σ 6.0	mediterraneo medio-debole		σ 6.0	mediterraneo medio-debole
τ 13.1			τ 12.2	
indice di colore 24.5			indice di colore 21.2	
classificazione: latite olivinica contenente nefelina; al limite con leucolatitebasalto oliv. cont. nefelina.			classificazione: latite olivinica contenente nefelina.	

di un'analisi chimica con rapporto Na_2O/K_2O modificato, rispetto a quello attuale, in base alle correlazioni con vulcaniti simili inalterate presenti a Procida e Vivara.

In Tab. II è riportata la composizione chimica di un campione della lava prelevato (Fig. 6) nella parte medio alta del banco (CI_1);

tale campione, come anche gli altri è stato precedentemente lavato. L'alterazione descritta è riscontrabile nell'alto grado di ossidazione del ferro (iddingsite e idrossidi di ferro), alto rapporto soda/potassa (analcime) non rinvenibile nelle normali rocce alcalino-potassiche di questa zona, presenza non trascurabile di acqua totale.

Ai fini di una classificazione indicativa su base mineralogica normativa, considerando il grado di alterazione non molto alto e l'affinità con rocce simili latitebasaltiche-latitiche di Procida e Vivara si è dato agli alcali, sulla base della composizione chimica di queste ultime, un rapporto di 1 : 1 (Fig. 19) e a Fe_2O_3 un valore del 40 % rispetto a FeO lasciando le quantità totali di Tab. II inalterate nell'ipo-

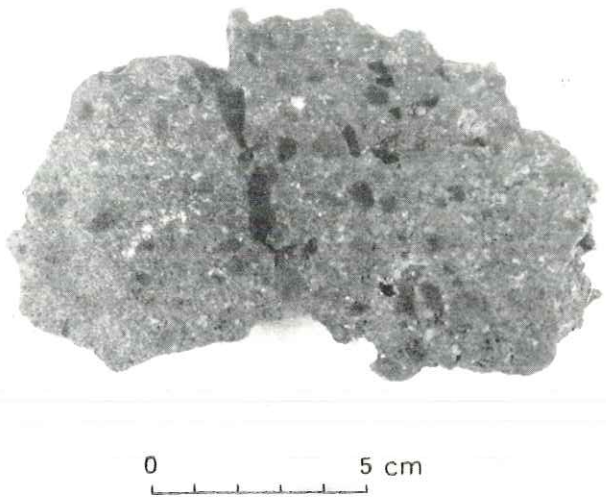


FIG. 12. - Canale d'Ischia. Ialoclastite latitebasaltica-latitica del vulcano Formiche di Vivara.

tesi semplificativa che con questa incipiente alterazione ci sia stato solo sostituzione di ioni; in effetti sarebbe prevedibile una perdita di magnesio con l'alterazione dell'olivina.

Queste modificazioni apportate sono state usate nel calcolo dei diversi parametri petrochimici dei diagrammi di variazione riportati; tali parametri sono stati calcolati dall'analisi a 100 senz'acqua. Con queste limitazioni la lava, secondo la composizione della norma di A. RITTMANN in facies vulcanica [19] si classifica, nella nomenclatura di A. L. STRECKEISEN [22], come latite olivinica contenente nefelina (Tab. III e Fig. 15) di serie potassica a carattere mediter-

raneo medio-debole; essa rientra (Fig. 17) nel campo delle rocce alcaline delimitato da H. KUNO [12] confermando le indicazioni in base mineralogica modale. In effetti la lava si proietta al limite tra le latiti e i latitebasalti (Fig. 15) per cui è più opportuno classificarla come latitebasalto-latite.

La ialoclastite sottostante la lava all'osservazione macroscopica risulta costituita da scorie nerastre in matrice gialla (Fig. 12); la roccia è litoide per neoformazione di minerali (essenzialmente zeoliti) che costituiscono il cemento fra i clasti. Contiene inclusi di lave da latitebasaltiche a trachitiche.

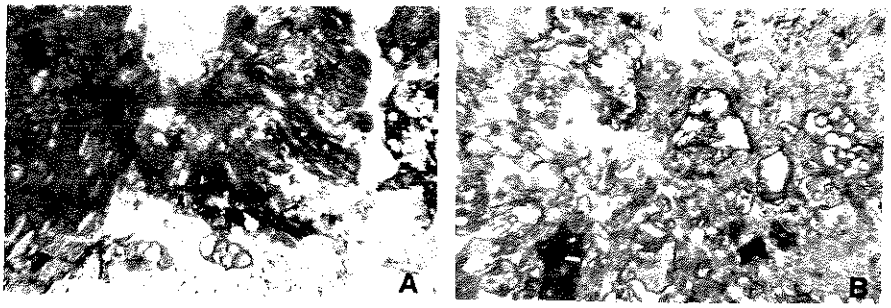


FIG. 13. - Ialoclastiti del Canale d'Ischia; solo polarizzatore. A) Clasti vetrosi e foraminiferi (in basso al centro) nella ialoclastite latitebasaltica-latitica del vulcano Formiche di Vivara. 24 ingr. lineari. B) Struttura vitroclastica nella ialoclastite latitica del vulcano La Catena. 20 ingr. lineari.

In sezione sottile mostra la caratteristica struttura vitroclastica; i caratteri strutturali e le abbondanti fasi di alterazione idrotermale sono simili a quelli descritti per la ialoclastite di Vivara [3]. Brevemente si riporta che l'abbondante matrice è costituita essenzialmente da frammenti di vetro bolloso a dimensioni variabili da un centinaio di micron a qualche millimetro. Nella parte centrale dei clasti maggiori il vetro è inalterato, isotropo e di colore bruno chiaro-vinaccia (« sideromelano » Auct.); ai bordi, lungo le pareti delle bolle e nei clasti di dimensioni minori è di colore giallo arancio e isotropo, interpretabile come vetro idratato e lisciviato (« palagonite » Auct.). Oltre a questo tipo di alterazione si hanno abbondanti zeoliti (phillipsite e subordinata cabasite) sulle pareti dei vacuoli e come cemento fra i clasti, subordinati montmorillonoidi, come prodotti di devetrificazione nelle fasce più esterne, e calcite. Tali neominerali sono stati accertati con analisi termiche e diffrattometriche.

Dai dati chimici (Tab. II) risulta presente un'abbondante fase ricca in magnesio non identificata, e solfati in parte legati al calcio.

Oltre ai clasti di vetro si osservano scorie opache, litici, clasti di cristalli prevedibilmente appartenenti al magma della ialoclastite (clinopirosseno, plagioclasio, olivina), xenocristalli (sanidino), frammenti di ialoclastite attestanti un'attività vulcanica subacquea più antica e alcuni foraminiferi (Miliolidi, Fig. 13 A).

Le determinazioni mineralogiche sono state eseguite sui fenocristalli presenti nelle scorie e frammenti di vetro; tali fasi mineralogiche sono rappresentate da plagioclasio zonato, clinopirosseno prevedibilmente diopsidico e olivina.

La composizione (Tab. I) risulta pressoché identica ai corrispondenti fenocristalli della lava latitebasaltica-latitica soprastante per cui tale ialoclastite è prevedibilmente classificabile nello stesso modo; inoltre è confermato che ialoclastite e lava rappresentano tipi litologici diversi di uno stesso magma eruttato in condizioni vulcanologiche differenti. Si riporta in Tab. II la composizione chimica (CI_4) di un campione di ialoclastite prelevato lungo la parete della fossa nella quale è ancorata la boa (Figg. 5, 6). I dati indicano uno stadio notevole di alterazione per cui le indicazioni mineralogiche e quelle geo-vulcanologiche risultano le uniche valide per una correlazione con la lava e conseguente classificazione petrografica.

2b. - Vulcano de La Catena (latitico).

Si inizia la descrizione dei prodotti di questo vulcano dal grosso incluso scoriaceo (camp. CI_7, Tabb. I, II, III), già descritto nella parte geo-vulcanologica (Fig. 7), per lo stato di freschezza e per la sicura correlazione col magma della ialoclastite dimostrata dai dati mineralogici, struttura e dimensioni.

L'incluso, dalle dimensioni visibili di cm 70×50, è di colore grigio piombo e mediamente bolloso; in base alla composizione mineralogica normativa risulta una latite olivinica contenente nefelina. All'osservazione macroscopica mostra pochi fenocristalli di clinopirosseno e plagioclasio. In sezione sottile si nota una struttura porfirica ipocristallina con fenocristalli, in ordine di abbondanza, di plagioclasio, clinopirosseno e rara olivina; è presente qualche raro sanidino lievemente corroso e arrotondato che sembra essere uno xenocristallo e qualche clasto di arenaria quarzitica. Fra i microfenocristalli si aggiunge la magnetite; nella massa di fondo, essenzialmente vetrosa, si hanno pochi microliti e cristalliti. Non si osserva apprezzabile alterazione.

Il plagioclasio in fenocristalli, zonato, va dal bytownitico sodico al centro (74 % An, Tab. I) all'andesinico calcico ai bordi (45 % An); gli abbondanti microfenocristalli hanno una composizione simile a

quella dei bordi. La composizione diffrattometrica globale nella roccia in toto (51 % An) indica appunto una prevalenza delle frazioni più sodiche.

Il clinopirosseno in fenocristalli ha caratteristiche ottiche lievemente diverse da quelle della lava latitebasaltica-latitica (CI_1) del vulcano di Formiche di Vivara (Tab. I) ed è globalmente un po' più colorato in marrone violaceo con lieve pleocroismo; dubitativamente potrebbe trattarsi di un diopside più ricco in ferro con tendenza augitica. Mostra un'arricchimento in ferro ai bordi e nei microfenocristalli.

L'olivina è più ferrifera della lava; dai dati diffrattometrici correlati con quelli ottici (Tab. I) si nota un discreto frazionamento della roccia. Dai fenocristalli con 22 % in fayalite si passa al 28 % prevedibilmente nei microfenocristalli e individui della massa di fondo. In quest'ultima i dati diffrattometrici indicano la presenza di sanidino sodico (51 % Or).

Anche qui, come nella lava CI_1, si ha un'associazione mineralogica di serie alcalina indicata anche da nefelina normativa (Tab. III) presente nel vetro della massa di fondo. L'ordine di cristallizzazione è olivina, clinopirosseno, plagioclasio, sanidino. La roccia presenta un rilevabile frazionamento per zonature e la massa di fondo in base ai dati sui feldspati è correlabile con quella di fonoliti e trachiti.

La composizione chimica e quella normativa classificano questa roccia come latite olivinica contenente nefelina, di serie alcalino-potassica a carattere mediterraneo medio-debole (Tabb. II, III e Figg. 15, 17).

I dati mineralogici e petrochimici indicano per le vulcaniti delle Formiche di Vivara e La Catena una discreta comagmaticità. Infatti in base ai caratteri petrochimici degli elementi maggiori determinati esse (camp. CI_1 e CI_7) si inseriscono in modo ugualmente soddisfacente in gran parte delle curve evolutive individuate dalla serie latitebasalti-latiti-fonoliti-trachiti di Procida-Vavara (Figg. 16, 17, 19); in tale serie, come si accenna in seguito, i diversi dati indicano come fattore determinante dell'evoluzione la cristallizzazione frazionata a partire dai termini meno femici fra i tipi latitebasaltici.

Inoltre i caratteri mineralogici del plagioclasio, olivina e clinopirosseno dei due campioni (Tab. I) sia per i fenocristalli che per le indicazioni nella massa di fondo non sono in contrasto con la possibilità che la latite meno femica CI_7 rappresenti un liquido residuale del più femico latitebasalto-latite CI_1. Comunque è da osservare che i parametri alcali-ferro-magnesio non indicano un'accettabile correlazione né un buon inserimento di CI_7 nella curva di differenziazione individuata nel diagramma AFM (Fig. 18).

La ialoclastite del vulcano La Catena ha caratteristiche litologiche simili a quelle della ialoclastite delle Formiche di Vivara. Nei campioni prelevati si osserva una stratificazione più accentuata (Fig. 14).

In sezione sottile (Fig. 13 B) mostra una struttura vitroclastica più netta della ialoclastite di Formiche di Vivara; i dati strutturali e le alterazioni sono simili, qui si nota una minore abbondanza di zeoliti e quasi assenza di montmorillonoidi.

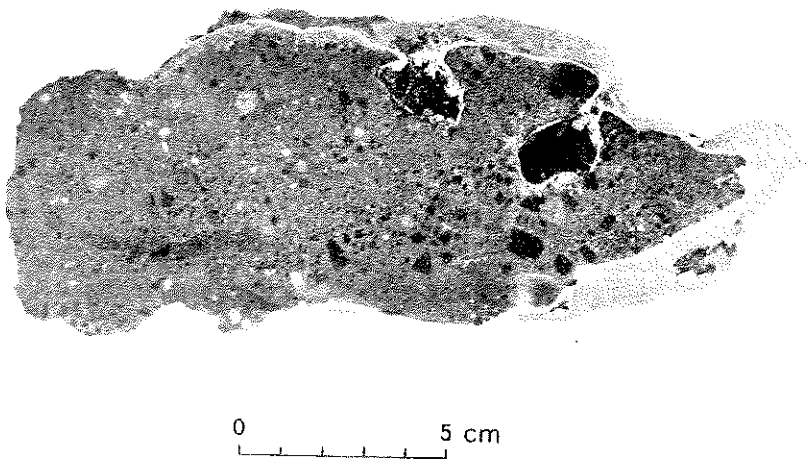


FIG. 14. - Canale d'Ischia. Ialoclastite latitica del vulcano La Catena.

Gli inclusi trachitici e xenocristalli di sanidino sono abbondanti; essi dimostrano, se non si tratta di prodotti risedimentati, che ci fu, prima dell'episodio esplosivo de La Catena, un'abbondante attività trachitica.

La composizione mineralogica in base ottica determinata sui fenocristalli presenti nei clasti di vetro e nelle scorie (Tab. I) è simile a quella della grossa scoria CI_7 per cui la classificazione del magma della ialoclastite è da ritenere latitica come il campione scoriaceo.

In Tab. III è riportata la composizione chimica di un campione di ialoclastite (CI_6) prelevato nella parte più alta della secca (Fig. 7). Il grado di alterazione è minore di quello della ialoclastite di Formiche di Vivara e la variazione della composizione chimica, per alterazione idrotermale, rispetto al magma iniziale CI_7 è essenzialmente dominata dall'idratazione del vetro e neoformazione di zeoliti (phillipsite e cabasite).

3. - Confronto con le vulcaniti di Procida-Vivara e Ischia.

È stato eseguito un confronto su base petrochimica fra le vulcaniti del canale e quelle delle due attigue aree vulcaniche di Procida-Vivara e di Ischia ai fini di individuare eventuali caratteri che le collegano all'una o all'altra zona oppure, come era più prevedibile, verificare la possibilità che tale vulcanismo rientri nell'ambito di entrambe le aree.

Per le isole di Procida e Vivara è disponibile un buon numero di analisi chimiche sulle rocce in toto già in gran parte pubblicate [3, 5] e di dati mineralogici, petrochimici e geochimici in corso di

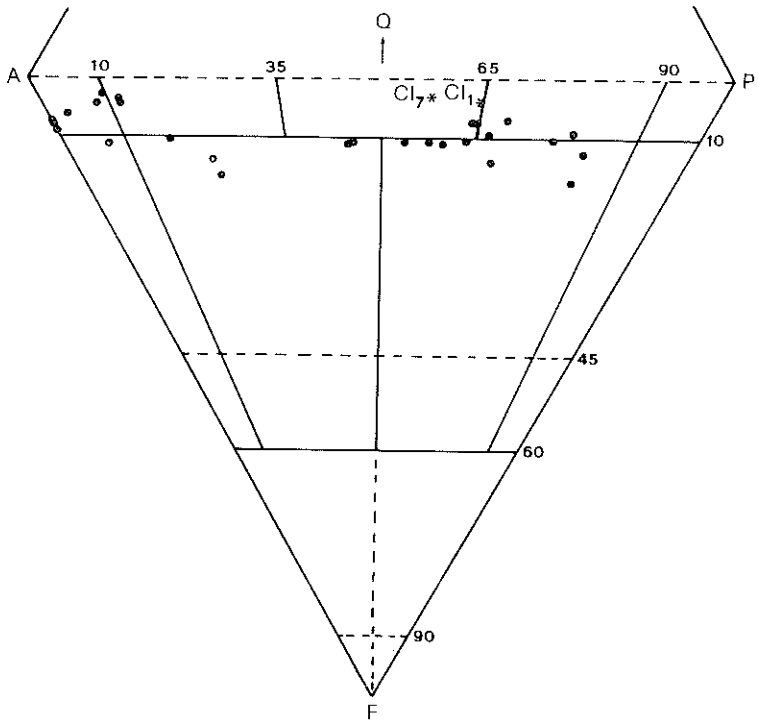


Fig. 15. - Classificazione, secondo A. L. Streckeisen, delle vulcaniti di Procida-Vivara (cerchi pieni) e Canale d'Ischia (asterischi) in base alla composizione mineralogica della norma di A. Rittmann.

elaborazione (P. Di Girolamo, G. Rolandi, D. Stanzione). Per Ischia si sono adoperati i dati contenuti in un lavoro di A. Rittmann [16] e due analisi chimiche di R. Ghiara (Ist. Min. Univ. Napoli).

Riguardo le vulcaniti, predominantemente vulcanoclastiche di Procida e Vivara è da tener presente che le due isole sono costituite da un'associazione latitebasalti-trachiti a nefelina, essenzialmente nor-

mativa, di tipo seriale mediterraneo con occasionali inclusi di rocce leucitiche. In base alla composizione normativa dell'Associazione Mineralogica Stabile [19] e secondo la nomenclatura di STRECKEISEN [22] la serie (Fig. 15) per la sua sottosaturazione non trascurabile è al limite fra la successione latitebasalti-latiti-trachiti-trachiti alcaline e quella tefriti fonolitiche-fonoliti tefritiche-fonoliti.

Pur avendo una mineralogia delle serie dei basalti alcalini il contenuto in potassio, rispetto alla silice è alto (carattere seriale mediterraneo medio) tanto che in alcuni tipi soprattutto femici, la norma A.M.S. porta al calcolo di abbondante leucite; anche gli elementi in traccia del tipo potassio sono abbondanti (soprattutto Rb e Ba). La percentuale in alcali totale e Al_2O_3 (15,5-19) è alta (Fig. 16) mentre l'arricchimento in ferro è piuttosto basso (Fig. 18). Tali dati chimici sono affini a quelli di una serie shoshonitica [11] particolarmente potassica e sottosatura.

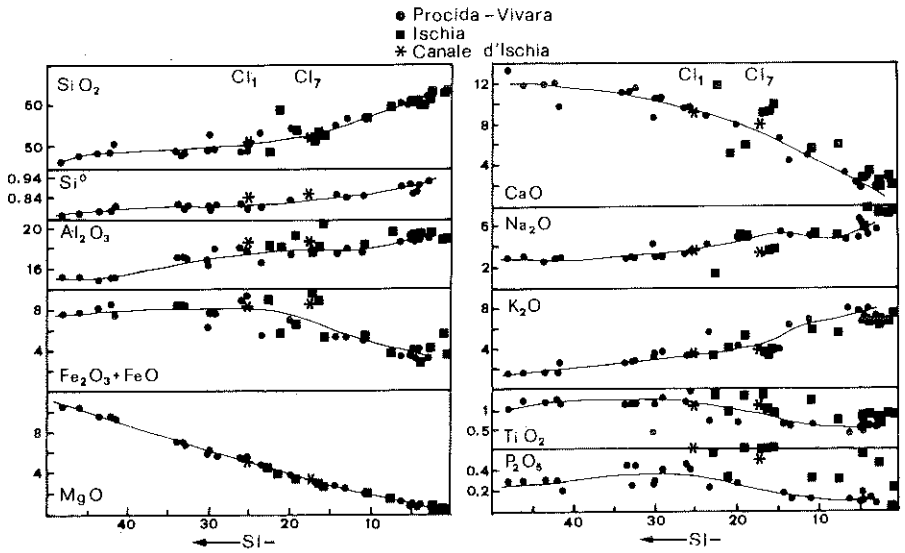


FIG. 16. - Diagramma di variazione rispetto all'Indice di Solidificazione (SI). Sono riportate, in questo e nei successivi diagrammi, le curve relative alla serie di vulcaniti latitebasalti-trachiti di Procida-Vivara.

I dati mineralogici e le curve di evoluzione dei diversi diagrammi di variazione indicano che si tratta di vulcaniti comagmatiche costituenti una serie la cui evoluzione è controllata essenzialmente dalla cristallizzazione frazionata; il magma capostipite delle vulcaniti esaminate si può assumere che sia un latitebasalto spostato verso le latiti. Oltre ad un accumulo di cristalli in alcuni tipi più femici si è

avuto un probabile trasporto gassoso che, mediante apporto selettivo di cloruri alcalini (Fig. 17), ha dato luogo ad alcune fonoliti sodalitiche nell'intervallo evolutivo fra latiti e trachiti alcaline (Fig. 15).

Si riporta (Fig. 16) il diagramma di variazione degli ossidi rispetto all'Indice di Solidificazione di H. KUNO dove si notano le curve caratteristiche della serie. I valori degli alcali rispetto alla silice (Fig. 17) indicano che la serie rientra nel campo delle rocce alcaline

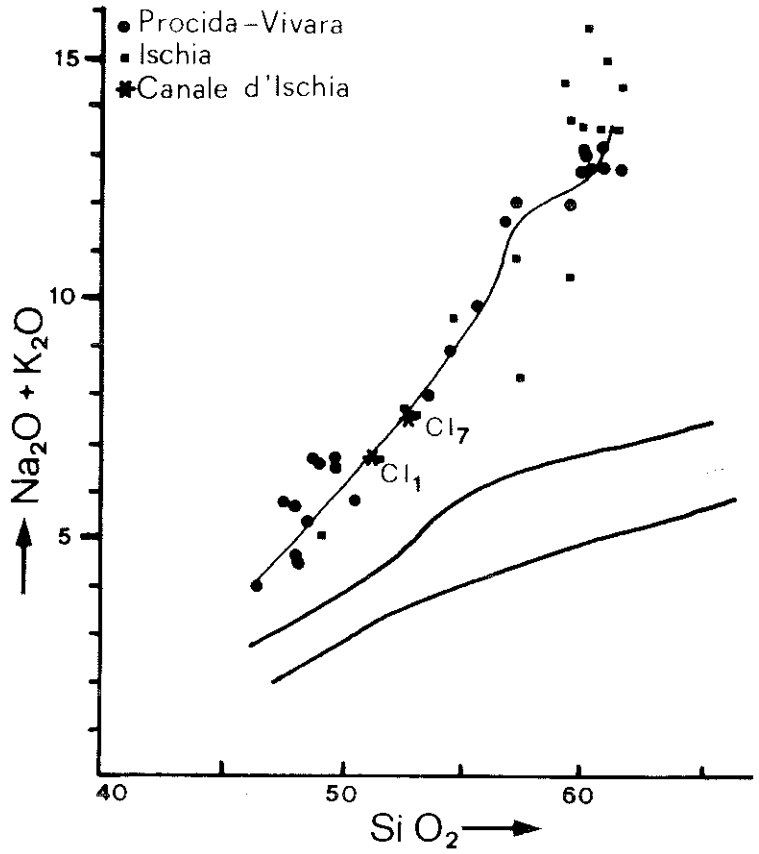


FIG. 17. - Diagramma alcali-silice per le vulcaniti di Procida-Vivara, Ischia e Canale d'Ischia.

secondo i limiti proposti da KUNO [12]. In Fig. 18 è riportata la curva evolutiva della serie che indica il già citato basso arricchimento in ferro.

Il diagramma K_2O-Na_2O-CaO (Fig. 19) mostra come, con la differenziazione, da un valore in peso piuttosto simile per i due alcali nel campo latitebasalti-latiti si ha verso le trachiti alcaline più fe-

miche un'incremento di K_2O dovuto essenzialmente al frazionamento dei plagioclasi. La brusca deviazione in direzione del vertice Na_2O, come indica anche l'andamento del liquido feldspatico nel sistema An-Ab-Or, dipende dal raggiungimento della curva cotettica con conseguente cristallizzazione anche del feldspato potassico che arricchisce il liquido in soda verso i termini trachitici alcalini più evoluti.

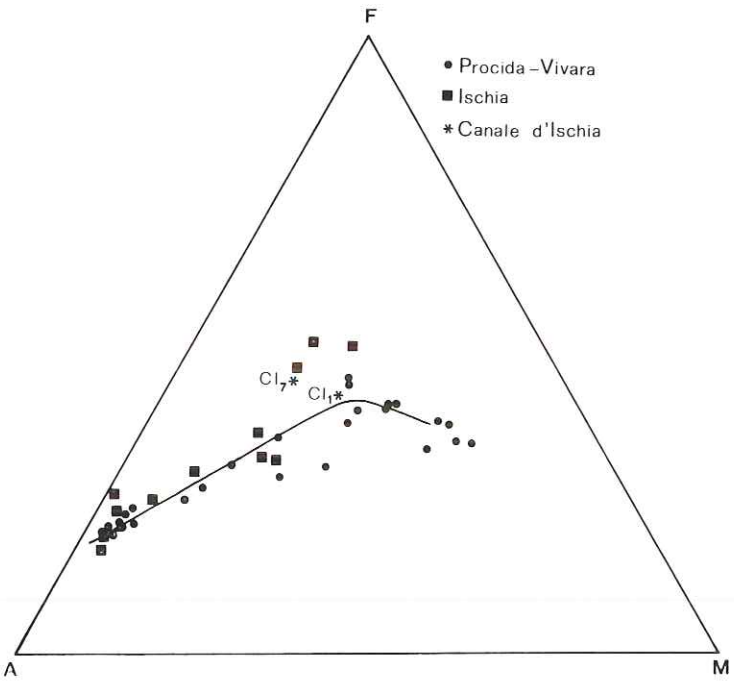


FIG. 18. - Diagramma F-A-M per le vulcaniti di Procida-Vivara, Ischia e Canale d'Ischia.

Riguardo le vulcaniti di Ischia il Rittmann in base alle dettagliate ricerche geo-petrografiche e mineralogiche [16, 18] concluse che un processo di differenziazione per cristallizzazione frazionata ad opera della gravità fece evolvere un magma capostipite latitebasaltico, del tipo di quello di Procida, a latiti, trachiti, e fonoliti essenzialmente sodalitiche; nella genesi di queste ultime l'autore ritenne che ebbe molto peso il trasporto gassoso di cloruri alcalini.

Nei diversi diagrammi citati per Procida e Vivara sono inseriti i dati petrochimici disponibili di Ischia; questi non sono molti e alcune rocce soprattutto femiche (un latitebasalto e due latiti) riprese dal Rittmann sono verosimilmente affette da errori analitici. Comunque dai diagrammi di variazione si nota per le vulcaniti di Ischia

un'evoluzione molto simile a quella di Procida-Vivara; solo in AFM sembra, con i limiti prima notati, che ci sia ad Ischia una maggiore ricchezza in ferro.

Le varie curve, in particolare, indicano che le fonoliti si trovano perfettamente sulla prosecuzione delle trachiti alcaline, cioè la variazione dei diversi parametri chimici non suggerisce nella genesi delle fonoliti fattori di evoluzione diversi da quelli che hanno agito sui fusi precedenti per cui l'apporto selettivo di sodio proposto dal Ritt-

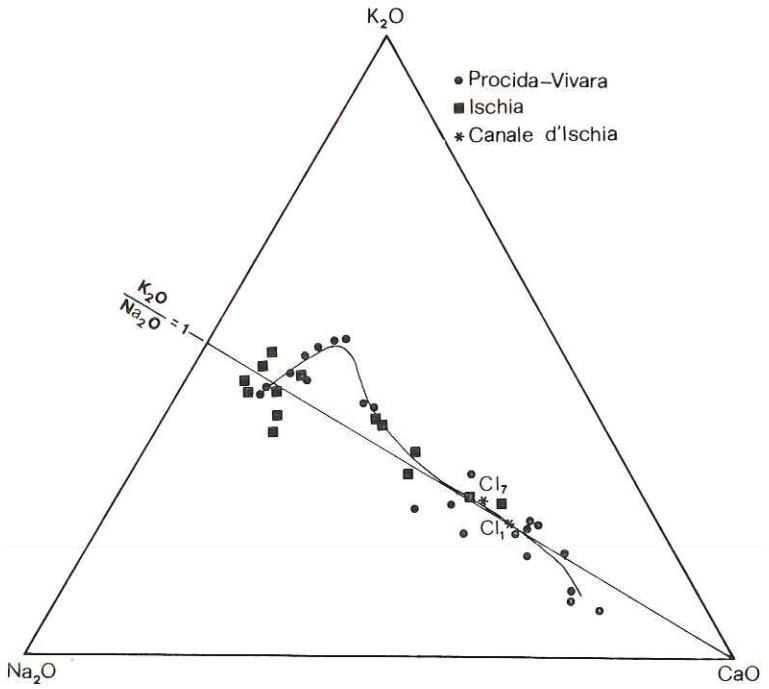


FIG. 19. - Diagramma K_2O-Na_2O-CaO per le vulcaniti di Procida-Vivara, Ischia e Canale d'Ischia.

mann sembra da escludersi. Prevedibilmente il magma fonolitico deriva da quello trachitico per cristallizzazione di feldspati; nel corso di tale processo il liquido residuale si è arricchito gradualmente nei diversi elementi pneumatofili citati dal Rittmann e in isotopi radioattivi [9].

I dati sperimentali mostrano che il magma fonolitico può derivare da quello trachitico per cristallizzazione frazionata [10].

Le vulcaniti del Canale di Ischia mostrano una minore sottosaturazione rispetto alla serie di Procida-Vivara (Figg. 15, 16); esse comunque si inseriscono bene nelle diverse curve di variazione indi-

viduate dalle vulcaniti sia di Procida-Vivara che di Ischia indicando una certa consanguineità di tutta l'area. Mentre però le vulcaniti delle Formiche di Vivara (CI_1) sono bene inserite nelle curve evolutive di Procida e Vivara, quelle de La Catena (CI_7) se ne discostano lievemente per la già citata ricchezza in ferro e povertà in magnesio (Fig. 18) ricollegandosi meglio, con i dati a disposizione, alle vulcaniti di Ischia.

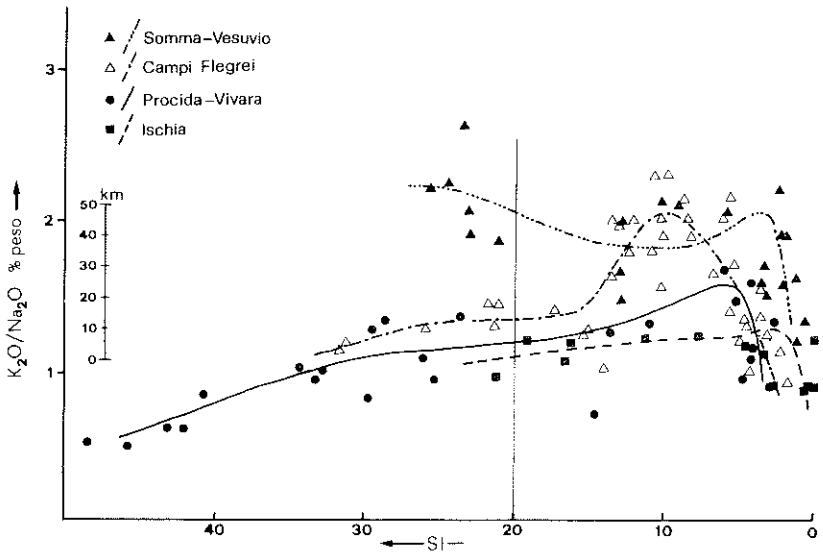


FIG. 20. - Variazione del rapporto K_2O/Na_2O rispetto all'Indice di Solidificazione (SI) nelle vulcaniti di Ischia, Procida-Vivara, Campi Flegrei e Somma-Vesuvio (Somma).

Il confronto fra vulcaniti di Procida-Vivara e Ischia mostra nei somiglianti caratteri generali degli elementi maggiori una lieve peculiarità nelle vulcaniti di Ischia rispetto ai prodotti di Procida-Vivara oltre alla differenza già descritta nel diagramma AFM (Fig. 18) e ad una maggiore quantità di fosforo e titanio (Fig. 16), cioè un più basso rapporto K_2O/Na_2O piuttosto chiaro nei termini più sialici. Per un confronto omogeneo è stato proiettato il rapporto in peso K_2O/Na_2O rispetto all'Indice di Solidificazione (Fig. 20). La stessa elaborazione è stata fatta per le vulcaniti dei Campi Flegrei e Somma-Vesuvio; tutti i dati sono stati tratti da analisi chimiche eseguite nell'Istituto di Mineralogia di Napoli.

Nei Campi Flegrei sono molto abbondanti le vulcanoclastiti potassiche alcalitrachitiche e fonolitiche; molto subordinati sono i tipi latitici [6].

Per il Somma-Vesuvio il confronto con le vulcaniti delle zone precedenti in termini di differenziazione magmatica può essere giustificato da vari dati. Come è noto A. Rittmann ritenne che la genesi delle rocce leucitiche fu dovuta essenzialmente a sintessi carbonatica da parte di un magma trachitico alcalino potassico secondo la seguente successione col progredire della sintessi: trachiti alcaline, orvietiti (fonoliti tefritiche leucitiche), ottavianiti (tefriti fonolitiche leucitiche), vesuviti (leucititi tefritiche). I dati petrochimici sugli elementi maggiori suggeriscono che gran parte delle vulcaniti costituisce una serie derivata da differenziazione per cristallizzazione frazionata a bassa pressione a partire da un magma ultrafemico potassico rappresentato da blocchi rigettati [4] o dalle lave e piroclastiti più femiche. Le diverse indagini petrografiche, mineralogiche e geologiche confermano in gran parte tali possibilità.

In Fig. 20 si nota per le vulcaniti di Ischia, Procida-Vivara e Campi Flegrei una correlazione positiva del rapporto K_2O/Na_2O col progredire della differenziazione nell'ambito di ogni serie tranne che nel tratto più differenziato ($SI < 10$) corrispondente alla già citata influenza della cristallizzazione abbondante di feldspato potassico (Fig. 19). Al Somma-Vesuvio la correlazione è essenzialmente negativa; di tale area non sono state proiettate le vulcaniti successive al 79 d.C. (vesuviti). In Fig. 20 si nota inoltre un aumento del carattere potassico passando dalla serie di Ischia a quelle di Procida-Vivara, Campi Flegrei e Somma-Vesuvio; tale peculiarità, mantenendo le stesse caratteristiche nell'ambito di ogni singola serie, deve dipendere prevedibilmente dal singolo magma capostipite.

È interessante notare che l'ordine di variazione del carattere potassico delle diverse serie (Ischia, Vivara-Procida, Campi Flegrei, Somma-Vesuvio) corrisponde alla posizione geografica delle aree considerate. L'età delle eruzioni di molte delle vulcaniti considerate va dal Pleistocene superiore all'Olocene. Prendendo come riferimento un valore di $SI = 20$ (50-53 % SiO_2) si ha da Ischia al Somma Vesuvio, cioè nello spazio di circa 50 km da ovest verso est, il seguente aumento del carattere potassico (K_2O/Na_2O) per le rispettive aree: 1,1-1,2-1,35-2,1 (Fig. 20); esso è grossolanamente proporzionale alla posizione geografica.

È da rilevare che nell'area citata si ha una variazione laterale nell'andamento delle strutture profonde della crosta e mantello superiore: i dati sismici relativi alla costa tirrenica, estrapolabili in prima approssimazione alla zona in oggetto, suggeriscono la presenza di una crosta di tipo continentale con uno spessore di circa 20 km nell'area della piattaforma continentale. Tale crosta aumenta lo spessore a circa 25 km verso la costa e subisce un raddoppio procedendo nel

continente [2]; queste ultime variazioni, dovute a processi tettonici, si attuano nello spazio di circa 50 km.

È da aggiungere inoltre che la variazione in potassio non si ha solo in funzione dello spazio ma anche di altri fattori, fra i quali prevedibilmente il tempo, come è indicato dall'associazione in gran parte delle singole aree vulcaniche della Campania di serie di rocce più ricche in potassio (a leucite modale) e meno ricche in potassio (a nefelina o sodalite normativa-modale).

Indagini geofisiche, geologiche, geochimiche e petrografiche potranno eventualmente confermare e interpretare tali caratteri delle vulcaniti suggeriti dagli attuali dati disponibili.

Conclusioni.

Lo studio geo-vulcanologico e petrografico dei vulcani attualmente sommersi nel Canale d'Ischia (Formiche di Vivara e La Catena) indica che tali edifici sono stati prodotti da un magma potassico da latitebasaltico a latitico, risalito attraverso fratture prevalentemente tirreniche, in seguito ad eruzioni esplosive sottomarine (ialoclastiti) con un episodio finale effusivo per uno di essi. L'area del canale, assieme a quelle circostanti, è stata interessata da periodi di emersione e sommersione.

Le correlazioni petrochimiche con le aree vulcaniche attigue delle isole di Procida, Vivara e Ischia indicano una certa consanguineità di tutta l'area; essa è interessata da un vulcanismo potassico latitebasaltico-trachitico-fonolitico alquanto sottosaturo le cui caratteristiche generali, fra cui la ricchezza in alcuni « elementi incompatibili », possono suggerire che si tratti di una serie ad affinità shoshonitica particolarmente potassica e sottosatura. Tale attribuzione avrebbe comunque bisogno, fra l'altro, di essere giustificata anche da dati tettonici. Come è noto, infatti, associazioni shoshonitiche vengono correlate ad ambienti di arco insulare ad avanzato stadio di evoluzione; nel corso di tale evoluzione si osserva il passaggio da un'attività vulcanica caratterizzata da associazione toleitica, ad una alcalicalcica e infine alla shoshonitica [11].

I dati petrochimici di comparazione fra le aree suddette e quelle dei Campi Flegrei e Somma Vesuvio indicano un aumento del carattere potassico delle diverse serie da W verso E.

Gli autori ringraziano l'ing. Armando Carola e il Sig. Mario Rosiello, tecnico subacqueo della Stazione Zoologica di Napoli, per la determinazione dei profili dal fondo marino, campionatura e documentazione fotografica subacquee.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARRARA E., IACOBUCCI F., PINNA E., RAPOLLA A., *Gravity and magnetic survey of the Campanian volcanic area, Southern Italy.* Boll. Geof. Teor. e Appl., vol. 15, pp. 39-51 (1973).

[2] COLOMBI B., GIESE P., LUONGO G., MORELLI C., RIUSCETTI M., SCARASCIA S., SCHÜTTE K. G., STROWALD J., DE VISINTINI G., *Preliminary Report on the seismic refraction profile Gargano-Salerno-Palermo-Pantelleria.* Boll. Geof. Teor. e Appl., vol. 15, n. 59, pp. 225-254 (1973).

[3] CRISTOFOLINI R., DI GIROLAMO P., STANZIONE D., *Caratteri genetici e mineralogici di ialoclastiti dell'Altopiano Ibleo (Sicilia) e dell'Isola di Procida (Campania).* Rend. Soc. It. Min. e Petr., vol. 29, fasc. 2, pp. 497-552 (1973).

[4] CUNDARI A., LE MAITRE R. W., *On the Petrogeny of the Leucite-bearing Rocks of the Roman and Birunga Volcanic Regions.* Journ. of Petr., vol. 11, pp. 33-47 (1970).

[5] DI GIROLAMO P., STANZIONE D., *Lineamenti geologici e petrologici dell'isola di Procida.* Rend. Soc. It. Min. e Petr., vol. 29, fasc. 1, pp. 81-125 (1973).

[6] DI GIROLAMO P., SCHERILLO A., *Vulcani latitici (serie potassica) nei Campi Flegrei.* Sottoposto a Per. Mineral. (1976).

[7] FINETTI I., MORELLI C., ZARUDSKY E., *Reflection Seismic Study of the Tyrrhenian Sea.* Boll. Geof. Teor. e Appl., vol. 12, n. 48, pp. 311-346 (1970).

[8] FINETTI I., MORELLI C., *Esplorazione sismica a riflessione dei golfi di Napoli e Pozzuoli.* Boll. Geof. Teor. e Appl., vol. 16, n. 62-63, pp. 175-222 (1974).

[9] GASPARINI P., *Radioactivity of the lavas of the island of Ischia.* Annali Oss. Ves., vol. 5, pp. 185-218 (1963).

[10] HAMILTON D. L., MAC KENZIE W. S., *Phase-equilibrium studies in the system $NaAlSiO_4$ (nepheline)-$KAlSiO_4$ (kalsilite)-SiO_2-H_2O.* Mineral. Mag., vol. 34, pp. 214-231 (1965).

[11] JAKES P., WHITE A. J. R., *Maior and Trace Element Abundances in Volcanic Rocks of Orogenic Areas.* Geol. Soc. of Am. Bull., vol. 83, pp. 29-40 (1972).

[12] KUNO H., *Differentiation of Basalt Magmas. In Basalts, the Poldervaart treatise on Rocks of Basaltic Composition.* Vol. 2, pp. 623-688, John Wiley & Sons (1968).

[13] LATMIRAL G., SEGRE A. G., BERNABINI M., MIRABILE L., *Prospezioni sismiche per riflessione nei golfi di Napoli e Pozzuoli ed alcuni risultati geologici.* Boll. Soc. Geol. It., vol. 90, pp. 163-172 (1971).

[14] MAINO A., SEGRE A. G., TRIBALTO G., *Rilevamento gravimetrico dei Campi Flegrei e dell'Isola d'Ischia.* Annali Osserv. Vesuv., vol. 5, pp. 229-312 (1963).

[15] POLDERVAART A., *Correlation of physical properties and chemical composition in the plagioclase, olivine and orthopyroxene series.* Am. Mineralogist, vol. 35, pp. 1067-1079 (1950).

[16] RITTMANN A., *Geologie des Insel Ischia.* Zeits. f. Vulk., vol. 6, 265 pp. (1930).

[17] RITTMANN A., *Die geologisch bedingte Evolution und Differentiation des Somma-Vesuv Magmas.* Zeits. f. Vulk., vol. 15, pp. 8-94 (1933).

[18] RITTMANN A., *Origine e Differenziazione del Magma Ischitano.* Bull. Suisse Min. e Petr., vol. 28, pp. 643-698 (1948).

[19] RITTMANN A., *Stable Mineral Assemblages of Igneous Rochs.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York (1973).

[20] SMITH J. V., GAY P., *The powder patterns and lattice parameters of plagioclase felspars.* II. Mineral. Mag., vol. 31, pp. 744-762 (1958).

[21] SMITH J. V., STENSTROM R. C., *Chemical analysis of olivines by the electron microprobe.* Min. Mag., vol. 34, pp. 436-459 (1965).

[22] STRECKEISEN A. L., *Classification and Nomenclature of Igneous Rocks.* N. Jb. Miner. Abh., vol. 107, pp. 144-240 (1967).

[23] TAZIEFF H., *Volcanisme sous-marin de l'Afar (Ethiopie).* C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 268, pp. 2657-2660 (1969).

[24] THORARINSSON S., *Some facts about the Surtsey eruption.* Natturufraedingurinn, vol. 35, pp. 153-181 (1965).

[25] THORARINSSON S., *The Surtsey eruption, course of events and the development of the new island.* Surtsey Res. Progress Rept., vol. 1, pp. 51-55 (1965).

[26] THORARINSSON S., *The Surtsey eruption, course of events and the development of Surtsey and other new islands.* Surtsey Res. Progress Rept., vol. 2, pp. 117-123 (1966).

[27] THORARINSSON S., EINARSSON TH., SIGVALDASON G. E., ELISON G., *The submarine eruption of the Vestmann Islands.* Bull. Volc., vol. 27, pp. 435-445 (1964).

[28] WALTHER J., *I vulcani sottomarini del golfo di Napoli.* Boll. Com. Geol. d'It., vol. 17, pp. 360-369 (1886).

[29] WRIGHT T. L., *X-ray and optical study of alkali feldspar. II. An X-ray method for determining the composition and structural state from measurement of* 2θ *values for three reflections.* Am. Mineral., vol. 53, pp. 88-104 (1968).

[30] YODER H. S. Jr., SAHAMA TH. G., *Olivine X-ray determinative curve.* Am. Mineralogist, vol. 42, pp. 475-491 (1957).

Su certi problemi al contorno nel piano

Nota di ESTER GIARRUSSO
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 6 dicembre 1975)

RIASSUNTO. — In questo lavoro stabiliamo una maggiorazione a priori per problemi ellittici in R^2_{**}(R^2_{**} è il piano tagliato lungo la semiretta $\bar{\sigma} = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 \leq 0\}$) nei quali le condizioni al contorno sono le differenze su σ, di valori limiti di certi assegnati operatori differenziali.

Tale studio è effettuato negli spazi di Sobolev con peso $W^r_{s_1, s_2, \bar{\sigma}}$.

SUMMARY. — In this paper we prove an a priori estimate for elliptic problems in R^2_{**}(R^2_{**} is the plane cut along the line $\bar{\sigma} = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 \leq 0\}$) where the boundary conditions are the differences on σ, of the limiting values of certain assigned differential operators.

The study is made within Sobolev weight $W^r_{s_1, s_2}$.

INTRODUZIONE.

In [2], [3] e [4] A. AVANTAGGIATI e M. TROISI hanno affrontato lo studio dei problemi ellittici in un angolo $\wedge$, cercando le soluzioni in certi spazi di Sobolev con doppio peso, ove i pesi hanno il ruolo di prescrivere alla soluzione e alle sue derivate un opportuno comportamento nell'origine e all'infinito:

α)

$$u \in W^r_{s_1, s_2}(\wedge)$$

$$A(x, \partial)\, u = f \qquad \text{in} \quad \wedge \qquad f \in W^{r-2m}_{s_1, s_2}(\wedge)$$

$$P_{jk}(x, \partial)\, u = f_{jk} \qquad \text{su} \quad \sigma_k \qquad f_{jk} \in W^{r-m_{jk}-\frac{1}{2}}_{s_1, s_2}(\sigma_k)$$

$$j = 1, \ldots, m; \quad k = 1, 2$$

ove:

1α) $\wedge$ è l'angolo aperto di R^2 con vertice nell'origine, delimitato dalle due semirette σ_1 e σ_2 di anomalia θ_1 e θ_2 con $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi$.

2α) $A(x, \partial)$ è propriamente ellittico in $\overline{\wedge}$ e all'infinito.

3α) $P_{jk}(x, \partial)$, $k \in (1, 2)\ 1 \leq j \leq m$, sono operatori differenziali lineari di frontiera su σ_k, soddisfacenti la condizione complementare su $\bar{\sigma}_k$ e all'infinito.

Tale studio è stato intrapreso, dapprima, (cfr. [3]) nel caso dei coefficienti costanti e di operatori omogenei e, poi, è stato esteso (cfr. [4]) al caso generale.

A. Avantaggiati (cfr. [1] n. 7 e n. 10) ha, poi, studiato il problema (la trattazione svolta in [1] si riferisce più generalmente ai sistemi):

β)

$$A(\partial)\, u = f \quad \text{in} \quad \wedge$$

$$\gamma_{o1}(P_{j1}(\partial)\, u) - \gamma_{o2}(P_{j2}(\partial)\, u) = g_j \qquad j = 1, \ldots, n\ ;$$

ove:

1β) A è un operatore ellittico omogeneo di ordine n a coefficienti costanti.

2β) P_{jk} sono operatori differenziali lineari omogenei verificanti la $\varkappa$) del n. 3.

Si osservi (cfr. [1] n. 7) che i problemi al contorno del tipo α) si inquadrano come caso particolare in quelli del tipo β) risultando la $\varkappa$) del n. 3 una naturale estensione ai problemi non propriamente ellittici della condizione complementare.

I risultati dimostrati da A. Avantaggiati rimangono validi (ed anzi diventano particolarmente significativi) quando all'angolo $\wedge$ si sostituisce:

$$R^2_{**} = R^2 - \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 \leq 0\}\,.$$

In questo lavoro viene affrontato nel caso generale lo studio dei problemi del tipo β) dove $\wedge = R^2_{**}$; si suppone dunque che σ_1 e σ_2 coincidano (γ_{o1} e γ_{o2} avranno il significato precisato nel n. 1).

I risultati ai quali si perviene sono ancora validi quando $\wedge$ è l'angolo definito in 1α) e pertanto tali risultati (per quanto detto a proposito dei problemi del tipo β) generalizzano i risultati ottenuti in [4] da A.-T.

A lavoro ultimato si è venuti a conoscenza di un lavoro di M. CARRIERO ([6]), in cui, con ipotesi differenti, tratta un problema per molti aspetti più generale di quello qui affrontato; pertanto nella dimostrazione del teorema 4.1. ci siamo soffermati in modo particolare su quei punti in cui la diversità delle ipotesi richiede considerazioni differenti.

Nel n. 1 e n. 2 vengono introdotti alcuni spazi funzionali;

nel n. 3 sono richiamati dei risultati dovuti ad A. AVANTAGGIATI (cfr. [1]);

nel n. 4 si enuncia il problema ed il risultato ottenuto, che viene dimostrato nel n. 5.

1. - GLI SPAZI $W^r_s(R^2_{**})$ e $W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$.

Incominciamo col definire (cfr. [1], n. 8) gli spazi $W^r_s(R^2_{**})$ e $W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$, ove R^2_{**} è l'insieme così definito:

$$R^2_{**} = R^2 - \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = 0\,,\ x_2 \leq 0\}\,.$$

A tale scopo indichiamo con $\mathfrak{D}_1(R^2_{**})$ lo spazio delle funzioni di classe $C^\infty(R^2_{**})$, che ammettono prolungamento di classe C^∞ in ciascuno degli insiemi:

$$I_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 \geq 0 \ \text{ e } \ x_2 < 0\}\,,$$

$$I_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 \leq 0 \ \text{ e } \ x_2 < 0\}$$

e aventi supporto compatto in $R^2 - \{(0,0)\}$.

Se $u \in \mathfrak{D}_1(R^2_{**})$ ha significato considerare per ogni $\alpha \in N^2_0$ e $x_2 < 0$: [1] $(\partial^\alpha u)(0^+, x_2)$ e $(\partial^\alpha u)(0^-, x_2)$ che in generale saranno diversi.

[1] Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in N^2_0$, porremo $\partial^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} u}{\partial^{\alpha_1} x_1\ \partial^{\alpha_2} x_2}$.

Porremo nel seguito:

$$(\gamma_{j1}\, u)(\rho) = (\partial^j_{x_1} u)(0^+, -\rho)\,; \quad (\gamma_{j2}\, u)(\rho) = (\partial^j_{x_1} u)(0^-, -\rho)$$
$$j \in \mathrm{N}_0,\ \rho > 0\,.$$

DEFINIZIONE 1.1. *Se* $r \in \mathrm{N}_0$ *ed* $s \in \mathrm{R}$ *indicheremo con* $\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^2_{**})$ *il completamento di* $\mathfrak{D}_1(\mathrm{R}^2_{**})$ *rispetto alla norma*:

$$\| u \|^2_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^2_{**})} = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \int_{\mathrm{R}^2} | x |^{2(s+|\alpha|-r)} | \partial^\alpha u |^2\, dx\,.$$

Se $r = k + \lambda$ *con* k *intero e* $\lambda \in]0,1[$ *ed* $s \in \mathrm{R}$ *indicheremo con* $\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^2_{**})$ *il completamento di* $\mathfrak{D}_1(\mathrm{R}^2_{**})$ *rispetto alla norma*:

$$\| u \|^2_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^2_{**})} = \| u \|^2_{\mathrm{W}^k_{s-\lambda}(\mathrm{R}^2_{**})} +$$

$$+ \int_{\mathrm{R}_+} \rho^{2(s-r+1)}\, \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathrm{I}_0} d\theta \int_{\mathrm{I}_0} \frac{| \partial^k_\theta u_\pi(\rho,\theta) - \partial^k_\theta u_\pi(\rho,\theta') |^2}{| \theta - \theta' |^{1+2\lambda}}\, d\theta' +$$

$$+ \int_{\mathrm{R}_+} \frac{d\rho}{\rho} \int_1^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau (\log \tau)^{1+2\lambda}} \int_{\mathrm{I}_0} | (\rho\tau)^{s-\lambda+1} (\partial^k_\rho u_\pi)(\rho\tau,\theta) - \rho^{s-\lambda+1} (\partial^k_\rho u_\pi)(\rho,\theta) |^2\, d\theta$$

dove $\mathrm{I}_0 = \left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3}{2}\pi \right]$ *e* $u_\pi(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ *con* $\rho \in \mathrm{R}_+$ *e* $\theta \in \mathring{\mathrm{I}}_0$; *porremo inoltre*:

$$u_\pi\left(\rho, -\frac{\pi}{2}\right) = u(0^+, -\rho)$$

$$u_\pi\left(\rho, \frac{3}{2}\pi\right) = u(0^-, -\rho)\,.$$

DEFINIZIONE 1.2. *Per ogni* $r \in \mathrm{N}_0$ *ed* $s \in \mathrm{R}$ *indichiamo con* $\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}_+)$ *il* completamento di $\mathfrak{D}(\mathrm{R}_+)$ [2] rispetto alla norma:

$$\| \varphi \|^2_{\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}_+)} = \sum_{\ell=0}^{r} \int_{\mathrm{R}_+} | \rho^{s+\ell-r}\, \varphi^{(\ell)}(\rho) |^2\, \frac{d\rho}{\rho}\,.$$

[2] Con $\mathfrak{D}(\mathrm{R}_+)$ indicheremo lo spazio delle funzioni di classe $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{R}_+)$ a supporto compatto in R_+.

Per ogni $r = k + \lambda$ *con* $k \in \mathbb{N}_0$ *e* $\lambda \in]0, 1[$ *e per ogni* $s \in \mathbb{R}$ *indichiamo con* $W^r_s(R_+)$ *il completamento di* $\mathfrak{D}(R_+)$ *rispetto alla norma:*

$$\| \varphi \|^2_{W^r_s(R_+)} = \| \varphi \|^2_{W^k_{s-\lambda}(R_+)} +$$

$$+ \int_1^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau (\log \tau)^{1+2\lambda}} \int_{R_+} | (\rho\tau)^{s-\lambda} \varphi^{(k)}(\rho\tau) - \rho^{s-\lambda} \varphi^{(k)}(\rho) |^2 \frac{d\rho}{\rho} .$$

È noto (cfr. [1] prop. 8.16), che con la stessa tecnica utilizzata nel teorema 7.4 di [2], si può dimostrare il

TEOREMA 1.1. *Se* $r \in \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$ *ed* ℓ_r *è il più grande intero minore di* $r - \frac{1}{2}$ *l'applicazione* $u \to T_r u = (\gamma_{01} u, \ldots, \gamma_{\ell_r,1} u, \gamma_{02} u, \ldots, \gamma_{\ell_r,2} u)$ *definita in* $\mathfrak{D}_1(R^2_{**})$ *si prolunga per continuità in un'applicazione lineare e continua da* $W^r_s(R^2_{**})$ *su*

$$F_{r,s} = \left(\prod_{j=0}^{\ell_r} W^{r-j-\frac{1}{2}}_{s+\frac{1}{2}}(R_+) \right) \times \left(\prod_{j=0}^{\ell_r} W^{r-j-\frac{1}{2}}_{s+\frac{1}{2}}(R_+) \right)$$

dotata di un « rilevamento lineare e continuo »;
$\gamma_{01} u$ e $\gamma_{02} u$ $(u \in W^r_s(R^2_{**}))$ si diranno le tracce di u sulla semiretta

$$\sigma = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = 0 , \ x_2 < 0\} .$$

Detto G uno dei due insiemi R_+, R^2_{**} diamo la seguente:

DEFINIZIONE 1.3. *Per ogni* $r \in \tilde{R}_+$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \leq s_2$, *indicheremo con* $W^r_{s_1,s_2}(G)$ *lo spazio* $W^r_{s_1}(G) \cap W^r_{s_2}(G)$ *munito della norma:*

$$\| u \|^2_{W^r_{s_1,s_2}(G)} = \| u \|^2_{W^r_{s_1}(G)} + \| u \|^2_{W^r_{s_2}(G)} .$$

Con la stessa tecnica usata per la dimostrazione del teorema 8.1. di [2] si dimostra il

TEOREMA 1.2. *Qualunque siano* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$ *e* $s_1, s_2 \in \mathrm{R}$ *con* $s_1 \leq s_2$, $\mathfrak{D}_1(\mathrm{R}^2_{**})$ *è denso in* $\mathrm{W}^r_{s_1,s_2}(\mathrm{R}^2_{**})$.

Enunciamo ora il seguente teorema di traccia che può essere dimostrato analogamente al teorema 1.1.:

TEOREMA 1.3. *Se* $r \in \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$ *e* $s_1, s_2 \in R$ *con* $s_1 \leq s_2$ *ed* ℓ_r *è il più grande intero minore di* $r - \frac{1}{2}$, *l'applicazione* $\mathrm{T}_r : u \to$ $\to (\gamma_{01} u, \ldots, \gamma_{\ell_r,1} u, \gamma_{02} u, \ldots, \gamma_{\ell_r,2} u)$ *definita in* $\mathfrak{D}_1(\mathrm{R}^2_{**})$ *si prolunga per continuità in un'applicazione lineare e continua da* $\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^2_{**})$ *su*

$$\left(\prod_{j=0}^{\ell_r} \mathrm{W}^{r-j-1/2}_{s_1+1/2, s_2+1/2}(\mathrm{R}_+) \right) \times \left(\prod_{j=0}^{\ell_r} \mathrm{W}^{r-j-1/2}_{s_1+1/2, s_2+1/2}(\mathrm{R}_+) \right)$$

dotata di « rilevamento lineare e continuo ».

DEFINIZIONE 1.4. *Se* K *è un sottoinsieme di* R^2 *indicheremo con* $\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K})$ [*risp.* $\mathrm{W}^r_{s_1,s_2}(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K})$] *il sottospazio di* $\mathrm{W}^r_s(\mathrm{R}^2_{**})$ [*risp.* $\mathrm{W}^r_{s_1,s_2}(\mathrm{R}^2_{**})$] *costituito dalle funzioni che hanno supporto contenuto in* K.

Vale, allora, il seguente teorema, di dimostrazione immediata:

TEOREMA 1.4. *Sia* K_1 *un sottoinsieme compatto di* R^2, K_2 *un sottoinsieme compatto di* $\mathrm{R}^2 - \{(0,0)\}$ *e* K_3 *un sottoinsieme di* $\mathrm{R}^2 - \{(0,0)\}$ *avente distanza positiva dall'origine. Comunque si assegnino* $r \in \bar{\mathrm{R}}_+$, $s_1, s_2 \in \mathrm{R}$, $s_1 \leq s_2$ *si ha:*

1) $\mathrm{W}^r_{s_1,s_2}(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K}_1) = \mathrm{W}^r_{s_1}(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K}_1)$ *(con norme equivalenti)*

2) $\mathrm{W}^r_{s_1,s_2}(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K}_2) = \mathrm{W}^r(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K}_2)$ » » »

3) $\mathrm{W}^r_{s_1,s_2}(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K}_3) = \mathrm{W}^r_{s_2}(\mathrm{R}^2_{**}, \mathrm{K}_3)$ » » »

2. - GLI SPAZI $\mathrm{L}^p_s(\mathrm{R}^2_{**})$, $\mathrm{L}^p_{s,\lambda}(\mathrm{R}^2_{**})$, $\mathrm{V}^k_{s,\lambda}(\mathrm{R}^2_{**})$, $\mathrm{M}_r(\mathrm{R}^2_{**})$.

DEFINIZIONE 2.1. *Indicheremo con* $\mathrm{L}^p_s(\mathrm{R}^2_{**})$ $(s \in \mathrm{R}$ e $0 < p \leq \infty)$ *lo spazio delle funzioni* $u(x)$ *tali che*:

$$|x|^s u(x) \in \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^2_{**}),$$

con la norma:

$$| u |_{p,s} = \| | x |^s u \|_{L^p(R^2_{**})} .$$

Risulterà, allora, $L^2_s(R^2_{**}) = W^0_s(R^2_{**})$.

DEFINIZIONE 2.2. *Con* $L^p_{s,\lambda}(R^2_{**})$ $(s, \lambda \in R \text{ e } 0 < p \leq \infty)$ *indicheremo, poi, lo spazio delle funzioni* $u(x)$ *tali che*:

$$| x |^s \left(\frac{| x |}{1 + | x |^2} \right)^\lambda u \in L^p(R^2_{**})$$

munito della seguente norma:

$$| u |_{p,s,\lambda} = \left\| | x |^s \left(\frac{| x |}{1 + | x |^2} \right)^\lambda \right\|_{L^p(R^2_{**})} .$$

DEFINIZIONE 2.3. *Sia* $k \in N_0$, $s, \lambda \in R$. *Si indicherà con* $V^k_{s,\lambda}(R^2_{**})$ *lo spazio delle distribuzioni* u *su* R^2_{**} *tali che* $\partial^\alpha u \in L^2_{s+|\alpha|-k,\lambda}(R^2_{**})$ *per* $|\alpha| \leq k$ *e si pone*:

$$\| u \|_{V^k_{s,\lambda}(R^2_{**})} = \sum_{|\alpha|=0}^{k} | \partial^\alpha u |_{2,s+|\alpha|-k,\lambda} .$$

Sia, ora, $k \in N_0$ e $\lambda \in]0, 1[$. Diamo la seguente

DEFINIZIONE 2.4. *Con* $M_k(R^2_{**})$ *si indicherà lo spazio delle distribuzioni* u *su* R^2_{**} *tali che* $\partial^\alpha u \in L^\infty_{|\alpha|}(R^2_{**})$ *con* $|\alpha| \leq k$; *e si porrà*:

$$\| u \|_{M_k(R^2_{**})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in R^2_{**}} | x |^{|\alpha|} | \partial^\alpha u(x) | .$$

Con $M_{k+\lambda}(R^2_{**})$ *indicheremo, poi, lo spazio delle distribuzioni* u *di* $M_k(R^2_{**})$ *per le quali, posto* $Q_+ = R_+ \times \bar{I}_0$, *si ha*:

$$\sup_{(\rho,\theta) \in Q_+} \Delta_{k,\lambda}(u; \rho, \theta) < \infty ,$$

essendo:

$$\Delta_{k,\lambda}(u;\rho,\theta) = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{|\partial_0^k u_\pi(\rho,\theta) - \partial_\theta^k u_\pi(\rho,\theta')|^2}{|\theta - \theta'|^{1+2\lambda}} \, d\theta' + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{k} \int_{\rho}^{+\infty} \frac{|\rho^j \partial_\rho^j u_\pi(\rho,\theta) - \rho'^j \partial_\rho^j u_\pi(\rho',\theta)|^2}{|\log\rho - \log\rho'|^{1+2\lambda}} \, \frac{d\rho'}{\rho'} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

In questo spazio si definisce una norma ponendo:

$$\| u \|_{M_{k;\lambda}(R^2_{**})} = \| u \|_{M_k(R^2_{**})} + \sup_{(\rho,\theta)\in Q_+} \Delta_{k,\lambda}(u;\rho,\theta) .$$

Si porrà, poi, per ogni $u \in M_r(R^2_{**})$, quando $r \in N$

$$M_r(u,\rho) = \sum_{0<|\alpha|\leq r} \sup_{\theta\in\tilde{I}_0} \rho^{|\alpha|} |(\partial^\alpha u)_\pi(\rho,\theta)| ,$$

quando $r = 0$

$$M_r(u,\rho) = 0$$

e, se $r = k + \lambda$,

$$M_r(u,\rho) = M_k(u,\rho) + \sup_{\theta\in\tilde{I}_0} \Delta_{k,\lambda}(u;\rho,\theta) .$$

Dette, poi, ζ e φ due funzioni definite in R^2_{**}, si porrà per $r \in N$:

$$M_r(\varphi,\zeta;\rho) = \sup_{\theta\in\tilde{I}_0} |\zeta_\pi(\rho,\theta)| \cdot \sum_{0<|\alpha|\leq r} \rho^{|\alpha|} |(\partial^\alpha \varphi)_\pi(\rho,\theta)| ,$$

per $r = 0$

$$M_r(\varphi,\zeta;\rho) = 0 ,$$

e, per $r = k + \lambda$,

$$M_r(\varphi,\zeta;\rho) = M_k(\varphi,\zeta;\rho) +$$

$$+ \sup_{\theta\in\tilde{I}_0} \left(|\zeta_\pi(\rho,\theta)|^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{|\partial_\theta^k \varphi_\pi(\rho,\theta) - \partial_\theta^k \varphi_\pi(\rho,\theta')|^2}{|\theta - \theta'|^{1+2\lambda}} \, d\theta' + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{k} \int_{\rho}^{\infty} \frac{|\zeta_\pi(\rho,\theta)\rho^j \partial_\rho^j \varphi_\pi(\rho,\theta) - \zeta_\pi(\rho',\theta)\rho'^j \partial_\rho^j \varphi_\pi(\rho',\theta)|^2}{|\log\rho - \log\rho'|^{1+2\lambda}} \, \frac{d\rho'}{\rho'} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

3. - Richiami di risultati noti.

Ricordiamo in questo numero alcuni risultati dimostrati da A. Avantaggiati in [1].

Sia

$$L(\partial) = \sum_{|\mu|=n} \ell_\mu \partial^\mu$$

un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n, ellittico, e siano:

$$Q_{jk}(\partial) = \sum_{|\mu|=m_j} q_{jk\mu} \partial^\mu \qquad k = 1, 2 \text{ e } j = 1, \ldots, n ,$$

$2n$ operatori lineari differenziali di frontiera su σ a coefficienti costanti.

Porremo con $r \in \bar{R}_+$ e $s_1, s_2 \in R$, $s_1 \leq s_2$:

$$E_{r,s_1,s_2} = W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**}) \times \prod_{j=1}^{n} \left(W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2,\, s_2+1/2}(R_+) \right).$$

Indicheremo, poi, con $\mathfrak{B}_{r,s_1,s_2}$ l'applicazione di $W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$ in E_{r,s_1,s_2} così definita:

$$u \to (Lu, \gamma_{o1}(Q_{11}u) - \gamma_{o2}(Q_{12}u), \ldots, \gamma_{o1}(Q_{n1}u) - \gamma_{o2}(Q_{n2}u)) .$$

Dette, poi [3], $\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{n_1,1}$ e $\beta_{1,2}, \ldots, \beta_{n_2,2}$ rispettivamente le radici a parte immaginaria positiva e le radici a parte immaginaria negativa del polinomio $L(\zeta, 1)$, porremo:

$$\nu^{kh}_{ji} = Q_{jk}(-\beta_{ih}, -1) \qquad k, h = 1, 2 \quad j = 1, \ldots, n , \quad i = 1, \ldots, n_h .$$

Si considerino, allora, le matrici:

$$V_{kh} = (\nu^{kh}_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,n_h}} \qquad k, h = 1, 2 .$$

Supporremo che:

$\varkappa$) $\det.\ (V_{11}, V_{22}) \neq 0$,

$\det.\ (V_{12}, V_{21}) \neq 0$

[3] Le radici $\beta_{11}, \ldots, \beta_{n_1,1}$ e $\beta_{12}, \ldots, \beta_{n_2,2}$ saranno supposte semplici; i risultati ai quali si perviene sussistono, però, anche senza questa ipotesi (cfr. [1], n. 12).

ove con (V_{11}, V_{22}) si indica la matrice quadrata di ordine n:

$$\begin{pmatrix} v^{11}_{11} \dots v^{11}_{1,n_1} & v^{22}_{11} \dots v^{22}_{1,n_2} \\ \vdots & \\ v^{11}_{n,1} \dots v^{11}_{n,n_1} & v^{22}_{n,1} \dots v^{22}_{n,n_2} \end{pmatrix}$$

e con (V_{12}, V_{21}) si indica la matrice quadrata di ordine n:

$$\begin{pmatrix} v^{12}_{11} \dots v^{12}_{1,n_1} & v^{21}_{11} \dots v^{21}_{1,n_2} \\ \vdots & \\ v^{12}_{n,1} \dots v^{12}_{n,n_1} & v^{21}_{n,1} \dots v^{21}_{n,n_2} \end{pmatrix}.$$

Detto, poi, r_0 un numero reale tale che:

$$r_0 \geq n$$

$$r_0 > m_j + \frac{1}{2} \qquad j = 1, \dots, n$$

e detti r, s, s_1, s_2, dei numeri reali tali che $r \geq r_0$ e $s_1 \leq s_2$ è noto che vale il teorema (cfr. [1] teorema 10.1):

TEOREMA 3.1. *Nell'ipotesi che* $L(\partial)$ *sia un operatore ellittico e valga la* $\varkappa$*) esiste un insieme* Σ *numerabile e privo di punti di accumulazione tale che*:

se $s - r + 1 \notin \Sigma$, *esiste una costante* $C > 0$ *per cui per ogni* $u \in W^r_s(R^2_{**})$

$$\| u \|_{W^r_s(R^2_{**})} \leq C \left\{ \| Lu \|_{W^{r-n}_s(R^2_{**})} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \| \gamma_{01}(Q_{j1} u) - \gamma_{02}(Q_{j2} u) \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s+1/2}(R_-)} \right\}$$

se $s_i - r + 1 \notin \Sigma$, $i = 1, 2$, *esiste una costante* $C > 0$ *per la quale, per ogni* $u \in W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$:

$$\| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq C \| \mathcal{B}_{r,s_1,s_2} u \|_{E_{r,s_1,s_2}}.$$

4. - IPOTESI E RISULTATI.

Assegnamo l'operatore differenziale lineare:

$$A = A(x, \partial) = \sum_{|\mu| \leq n} a_\mu(x)\, \partial^\mu ,$$

e consideriamo $2n$ operatori differenziali lineari di frontiera su σ:

$$P_{jk} = P_{jk}(x, \partial) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{jk\mu}(x)\, \partial^\mu , \qquad j = 1, \ldots, n ; \quad k = 1, 2$$

ove $b_{jk\mu}(x) = \gamma_{0k}(\overset{\circ}{b}_{jk\mu})$, e cioè i coefficienti $b_{jk\mu}(x)$ sono traccie su σ nel senso del teorema 1.1. di funzioni $\overset{\circ}{b}_{jk\mu}(x)$ che appartengono ad opportuni spazi funzionali che saranno in seguito precisati.

Porremo nel seguito:

$$A' = A'(x, \partial) = \sum_{|\mu| = n} a_\mu(x)\, \partial^\mu$$

$$P'_{jk} = P'_{jk}(x, \partial) = \sum_{|\mu| = m_j} b_{jk\mu}(x)\, \partial^\mu \qquad k = 1, 2 ; \quad j = 1, \ldots, n$$

$$A'' = A - A' \qquad P''_{jk} = P_{jk} - P'_{jk} \qquad k = 1, 2 ; \quad j = 1, \ldots, n .$$

Supporremo che siano verificate le seguenti ipotesi:

$\mathfrak{I}_1$) I coefficienti $a_\mu(x)$ per $|\mu| = n$ e i coefficienti $\overset{\circ}{b}_{jk\mu}(x)$ per $|\mu| = m_j$ sono continui in R^2 e convergenti all'infinito.

$\mathfrak{I}_2$) A è ellittico in R^2 e all'infinito, ed è verificata la $\varkappa$) del n. 3 relativamente agli operatori $A'(x, \partial)$ e $P'_{jk}(x, \partial)$ su $\bar{\sigma}$ e all'infinito.

Detto, poi, r_0 un numero reale tale che:

$$r_0 \geq n$$

$$r_0 > m_j + \frac{1}{2} \qquad j = 1, \ldots, n$$

e fissati due numeri reali r ed ε con $r \geq r_0$ ed $\varepsilon > 0$ supporremo che:

$\mathfrak{I}_1^{(r)}$) $a_\mu(x)$ per $|\mu| = n$ siano di classe $M_{r-n}(R^2_{**})$; $\overset{\circ}{b}_{jk\mu}(x)$ per

$|\mu| = m_j$ siano di classe $M_{r-m_j}(R^2_{**})$; inoltre:

$$\lim_{p\to 0} \Big(\sum_{|\mu|=n} \sup_{\varrho\in R_+} M_{r-n}(a^{(1)}_\mu, \varphi_p\,;\varrho) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} \sum_{|\mu|=m_j} \sup_{\varrho\in R_+} M_{r-m_j}(\overset{n}{b}{}^{(1)}_{jk\mu}, \varphi_p\,;\varrho)\Big) = 0$$

e

$$\lim_{p\to \infty} \Big(\sum_{|\mu|=n} \sup_{\varrho\in R_+} M_{r-n}(a^{(2)}_\mu, \psi_p\,;\varrho) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} \sum_{|\mu|=m_j} \sup_{\varrho\in R_+} M_{r-m_j}(\overset{\circ}{b}{}^{(2)}_{jk\mu}, \psi_p\,;\varrho)\Big) = 0$$

dove:

$$a^{(1)}_\mu(x) = a_\mu(x) - a_\mu(0)\,; \qquad a^{(2)}_\mu(x) = a_\mu(x) - \lim_{x\to\infty} a_\mu(x)$$

e:

$$\overset{\circ}{b}{}^{(1)}_{jk\mu}(x) = \overset{\circ}{b}_{jk\mu}(x) - \overset{\circ}{b}_{jk\mu}(0)\,; \qquad \overset{\circ}{b}{}^{(2)}_{jk\mu}(x) = \overset{\circ}{b}_{jk\mu}(x) - \lim_{x\to\infty} \overset{\circ}{b}_{jk\mu}(x)\,;$$

inoltre φ_p e ψ_p, $p > 0$, sono funzioni di classe $C^\infty(R^2)$ tali che:

$$\varphi_p(x) \begin{cases} = 1 & \text{per } |x| \le p \\ = 0 & \text{per } |x| \ge 2p \end{cases} \qquad \psi_p(x) \begin{cases} = 0 & \text{per } |x| \le p \\ = 1 & \text{per } |x| \ge 2p\,, \end{cases}$$

e

$$|x|^{|\alpha|}\,|\,\partial^\alpha \varphi_p(x)\,| \le K_\alpha \qquad |x|^{|\alpha|}\,|\,\partial^\alpha \psi_p(x)\,| \le K_\alpha\,,$$

dove K_α è una costante che dipende solo da α.

Inoltre si abbia [4]:

$\mathfrak{I}^{(r)}_2)$ $\partial^\alpha a_\mu \in L^\infty_{n-|\mu|+|\alpha|}(R^2_{**})$ per $|\mu| \le n-1$ e $|\alpha| \le [r]+1-n$

$\partial^\alpha \overset{\circ}{b}_{jk\mu} \in L^\infty_{m_j-|\mu|+|\alpha|}(R^2_{**})$ per $|\mu| \le m_j - 1$ e $|\alpha| \le [r]+1-m_j$,

e

$\partial^{[r]+1-n} a_\mu \in L^\infty(R^2_{**})$ per $|\mu| = n$

$\partial^{[r]+1-m_j} \overset{\circ}{b}_{jk\mu} \in L^\infty(R^2_{**})$ per $|\mu| = m_j$.

[4] Con $[r]$ indicheremo la parte intera di r.

$\mathfrak{I}^{(r)}_{3,\varepsilon}$) $a_\mu \in L^\infty_{n-|\mu|,-\varepsilon}(R^2_{**})$ con $|\mu| \leq n-1$

$\overset{\circ}{b}_{jk\mu} \in L^\infty_{m_j-|\mu|,-\varepsilon}(R^2_{**})$ con $|\mu| \leq m_j - 1$.

Indicheremo, poi, con $\mathfrak{B}$ l'applicazione di $W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$ in E_{r,s_1,s_2} che:

$$u \to (Au, \gamma_{o1}(P_{11}u) - \gamma_{o2}(P_{12}u), \ldots, \gamma_{o1}(P_{n1}u) - \gamma_{o2}(P_{n2}u)) .$$

Tale applicazione risulta lineare e continua per le ipotesi $\mathfrak{I}^{(r)}_1$) $\mathfrak{I}^{(r)}_2$) $\mathfrak{I}^{(r)}_{3,o}$).

Detto, inoltre Σ_1 l'insieme numerabile e privo di accumulazione definito dal teorema 3.1. e associato agli operatori a coefficienti costanti:

$$A'(0,\partial) \qquad P'_{jk}(0,\partial) \qquad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, 2$$

e Σ_2 l'insieme definito ancora dal teorema 3.1. e associato agli operatori a coefficienti costanti:

$$\sum_{|\mu|=n} (\lim_{x\to\infty} a_\mu(x))\,\partial^\mu \qquad \sum_{|\mu|=m_j} (\lim_{x\to\infty} b_{jk\mu}(x))\,\partial^\mu \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, n \\ k = 1, 2 \end{matrix}$$

vale il seguente:

TEOREMA 4.1. *Fissati quattro numeri reali* r, s_1, s_2 *ed* ε *con* $r \geq r_o$, $s_1 \leq s_2$ *ed* $\varepsilon > 0$; *se sono verificate le ipotesi* $\mathfrak{I}_1$), $\mathfrak{I}_2$), $\mathfrak{I}^{(r)}_1$), $\mathfrak{I}^{(r)}_2$), $\mathfrak{I}^{(r)}_{3,\varepsilon}$) *ed inoltre* $s_1 - r + 1 \notin \Sigma_1$ *ed* $s_2 - r + 1 \notin \Sigma_2$ *esiste una costante* $C > 0$ *tale che, per ogni* $u \in W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$, *si abbia*:

$$\|u\|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq C \left\{ \|\mathfrak{B}u\|_{E_{r,s_1,s_2}} + \|u\|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} \right\}$$

5. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.1.

Consideriamo un ricoprimento di R^2 mediante un numero finito di aperti $\theta_1, \ldots, \theta_\nu$ con la condizione che l'origine appartenga solo ad θ_1 e che $\theta_1\,\theta_3, \ldots, \theta_\nu$ siano limitati.

Sia, poi, $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\}$ una partizione dell'unità, relativa a tale ricoprimento, ove:

$$\zeta_i \in C^\infty(R^2) \qquad \zeta_i \geq 0 \qquad \text{supp. } \zeta_i \subset \theta_i$$

e

$$\sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(x) = 1 \qquad \text{per ogni } x \in R^2 .$$

Fissiamo, poi, i punti $x^1 = (0,0)$, $x^3 \ldots x^\nu$ con la condizione che $x^i \in \theta_i$ e, quando $\theta_i \cap \bar{\sigma} \neq \emptyset$, $x^i \in \bar{\sigma}$.

Poniamo:

$$A_i' = A'(x^i, \partial) \qquad i = 1, \ldots, \nu ;$$

dove:

$$a_{i\mu}(x^2) = \lim_{x \to \infty} a_\mu(x) ,$$

e

$$P'_{ijk} = P'_{jk}(x^i, \partial) \qquad j = 1, \ldots, n ; \quad k = 1, 2 \quad i = 1, \ldots, \nu$$

ove:

$$b_{jki\mu}(x^2) = \lim_{x \to \infty} b_{jk\mu}(x) ;$$

si noti che, se $x^i \notin \bar{\sigma}$ intenderemo $P'_{ijk}(x^i, \partial) = \sum_{|\mu| = m_j} \overset{\circ}{b}_{jk\mu}(x^i)\, \partial^\mu$.

Porremo, ulteriormente, con $v \in W^r_{s_1, s_2}(R^2_{**})$

$$\gamma_{o1}(P_{j1} v) - \gamma_{o2}(P_{j2} v) = \Delta_j v \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\gamma_{o1}(P'_{j1} v) - \gamma_{o2}(P'_{j2} v) = \Delta'_j v \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\gamma_{o1}(P''_{j1} v) - \gamma_{o2}(P''_{j2} v) = \Delta''_j v \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\gamma_{o1}(P'_{ij1} v) - \gamma_{o2}(P'_{ij2} v) = \Delta'_{ij} v \qquad j = 1, \ldots, n .$$

Posto, allora, per ogni $i \in \{1, \ldots, \nu\}$:

$$\psi_i(v) = \| (A' - A'_i) v \|_{W^{r-n}_{s_1, s_2}(R^2_{**})} + \sum_{j=1}^{n} \| \Delta'_j v - \Delta'_{ij} v \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2, s_2+1/2}(R_+)}$$

si dimostra (cfr. [4], teorema 1.1.) che per ogni $\eta > 0$ è possibile

scegliere ν e gli aperti $\theta_1 \dots \theta_\nu$ soddisfacenti le condizioni precedentemente dette) in modo tale che:

$$\psi_i(v) \leq \gamma_i \| v \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \qquad i = 1, \dots, \nu , \tag{4.1}$$

per ogni $v \in W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**}, K_i)$, essendo $K_i = \text{supp. } \zeta_i$.

Supporremo, allora, nel seguito, di aver fissato il ricoprimento $\theta_1, \dots, \theta_\nu$, in modo che valga la (4.1).

Fissata ora una $u \in W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$, poniamo:

$$u_i = \zeta_i u \qquad i = 1, \dots, \nu .$$

Si avrà $u_i \in W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**}, K_i)$.

Dimostriamo, allora, che, per ogni $i \in \{1, \dots, \nu\}$ vale la diseguaglianza:

$$\| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq \tag{4.2}$$

$$\leq C \left\{ \| A'_i u_i \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \sum_{j=1}^{n} \| \Delta'_{ij} u_i \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2, s_2+1/2}(R_-)} \right\} .$$

(Nel seguito indicheremo con C costanti positive che possono avere valori diversi e che non dipendono dalla scelta di v in $W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})$).

Per l'ipotesi $\mathfrak{I}_2$) dal teorema 3.1., poiché $s_1 - r + 1 \notin \Sigma_1$ e $s_2 - r + 1 \notin \Sigma_2$ segue per $i = 1, 2$:

$$\| u_i \|_{W^r_{s_i}(R^2_{**})} \leq \tag{4.3}$$

$$\leq C \left\{ \| A'_i u_i \|_{W^{r-n}_{s_i}(R^2_{**})} + \sum_{j=1}^{n} \| \Delta'_{ij} u_i \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2, s_2+1/2}(R_-)} \right\} .$$

Dalla (4.3), per la 1) e la 3) del teorema 1.4 segue la (4.2) per $i = 1, 2$.

Sia, ora, $i \in \{3, \dots, \nu\}$; se $x_i \in \sigma$ diciamo Σ_i l'insieme definito dal teorema 3.1. relativamente agli operatori A'_i e P'_{ijk} (cfr. ipotesi $\mathfrak{I}_2$)) scelti, poi, t_1 e t_2 con $t_1 \leq t_2$ e in modo che $t_1 - r + 1 \notin \Sigma_i$

e $t_2 - r + 1 \notin \Sigma_i$, per il teorema 3.1., si ha:

$$\| u_i \|_{W^r_{t_1,t_2}(R^2_{**})} \leq \tag{4.4}$$

$$\leq C \left\{ \| A'_i u_i \|_{W^{r-n}_{t_1,t_2}(R^2_{**})} + \sum_{j=1}^{n} \| \Delta'_{ij} u_i \|_{W^{r-m_j-1/2}_{t_1+1/2,t_2+1/2}(R_+)} \right\} .$$

Dalla (4.4) e dal teorema 1.4. consegue allora la (4.2.) anche per tali valori di i.

Se $x^i \notin \sigma$, tenendo conto che in tal caso u_i ha supporo compatto in R^2_{**}, in virtù ancora del teorema 3.1. e del teorema 1.4., è facile dedurre che vale una relazione analoga alla (4.4.) ma senza il contributo dell'ultimo addendo a secondo membro; dunque anche in questo caso consegue la (4.2.).

Dalla (4.1.) e dalla (4.2.) si deduce, poi, che:

$$\| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq C \left\{ \| \mathfrak{B} u_i \|_{E_{r,s_1,s_2}} + \| A'' u_i \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \right. \tag{4.5}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \| \Delta''_i u_i \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2,s_2+1/2}(R_-)} + \gamma_i \| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \right\} .$$

D'altra parte [5] per il teorema 8.3. di [2] si ha:

$$\| A'' u_i \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq \gamma_i \| A'' u_i \|_{W^{[r]+1-n}_{s_1+[r]+1-r,\, s_2+[r]+1-r}(R^2_{**})} + \tag{4.6}$$

$$+ c(\gamma_i) \| A'' u_i \|_{W^0_{s_1-r+n,\, s_2-r+n}(R^2_{**})} .$$

Inoltre, per l'ipotesi $\mathfrak{I}^{(r)}_2$) e per il teorema 8.2. di [2] si ha:

$$\| A'' u_i \|^2_{W^{[r]+1-n}_{s_1+[r]+1-r,\, s_2+[r]+1-r}(R^2_{**})} \leq \tag{4.7}$$

$$\leq C \| u_i \|^2_{W^{[r]}_{s_1+[r]-r,\, s_2+[r]-r}(R^2_{**})} \leq C \| u_i \|^2_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} .$$

[5] In questo numero si utilizzano alcuni teoremi e lemmi di [2] che applicheremo con R^2_{**} al posto di $\wedge$; è facile verificare, infatti, la validità di tali proposizioni in questa nuova condizione.

D'altra parte per il teorema 8.6. di [2] e per l'ipotesi $\mathfrak{I}^{(r)}_{3,\varepsilon}$) si ha:

$$(4.8)\quad \| A''u_i \|^2_{W^0_{s_1-r+n,\,s_2-r+n}(R^2_{**})} \leq C \| A''u_i \|^2_{V^0_{(s_1+s_2)/2-r+n,\,-(s_2-s_1)/2}(R^2_{**})} \leq$$

$$\leq C \sum_{|\mu|\leq n-1} \int_{R^2} |x|^{2((s_1+s_2)/2-r+|\mu|)} \left(\frac{|x|}{1+|x|^2}\right)^{2((s_1-s_2)/2+\varepsilon)} |\partial^\mu u_i|^2\, dx =$$

$$= C \| u_i \|^2_{V^{n-1}_{(s_1+s_2)/2+n-1-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} .$$

Ora dal lemma 6.5 di [2] e dalla 8.10 di [2] segue per ogni $\eta_i' > 0$:

$$(4.9)\quad \| u_i \|_{V^{n-1}_{(s_1+s_2)/2+n-1-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} \leq \eta_i' \| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} +$$

$$+ c(\eta_i') \| u_i \|^2_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} .$$

Pertanto dalle (4.8), (4.9) si deduce:

$$(4.10)\quad \| A''u_i \|_{W^0_{s_1-r+n,\,s_2-r+n}(R^2_{**})} \leq \eta_i' \| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} +$$

$$+ c(\eta_i') \| u_i \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} .$$

Quindi dalle (4.6), (4.7) e (4.10) si trae con $\eta_i > 0$:

$$(4.11)\quad \| A''u_i \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq C \left\{ \eta_i \| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \right.$$

$$\left. + c(\eta_i) \| u_i \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} \right\} .$$

In modo analogo utilizzando il teorema 1.3. e le ipotesi $\mathfrak{I}^{(r)}_2$) e $\mathfrak{I}^{(r)}_{2,\varepsilon}$) si ricava per $j = 1, \ldots, n$:

$$(4.12)\quad \| \Delta_j'' u_i \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2,\,s_2+1/2}(R_+)} \leq C \left\{ \eta_i \| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \right.$$

$$\left. + c(\eta_i) \| u_i \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} \right\} .$$

Si trae allora dalle (4.5), (4.11) e (4.12), per $i \in \{1, \ldots, \nu\}$:

$$(4.13)\quad \| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq C \left\{ \| \mathfrak{B} u_i \|_{E_{r,s_1,s_2}} + \| u_i \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^{**}_2)} \right\} .$$

Inoltre:

$$(4.14)\quad \| A u_i \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq \| \zeta_i A u \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} +$$

$$+ C \sum_{|\mu|\leq n} \sum_{\alpha<\mu} \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \zeta_i \partial^\alpha u \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} .$$

E per il teorema 8.3. di [2] per ogni $\lambda > 0$ si ha:

$$(4.15)\quad \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \zeta_i \partial^\alpha u \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq$$

$$\leq \lambda \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \zeta_i \partial^\alpha u \|_{W^{[r]+1-n}_{s_1+[r]+1-r,\, s_2+[r]+1-r}(R^2_{**})} +$$

$$+ c(\lambda) \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \zeta_i \partial^\alpha u \|_{W^{[r]-n}_{s_1-r+[r],\, s_2-r+[r]}(R^2_{**})} .$$

Inoltre, poiché, per ogni $i \in \{1,\ldots,\nu\}$ ζ_i ha derivate nulle fuori di un opportuno compatto K_i contenuto in $R^2-\{(0,0)\}$, dall'ipotesi $\mathfrak{I}^{(r)}_1$) e $\mathfrak{I}^{(r)}_2$) e dal teorema 8.2. di [2] si trae:

$$(4.16)\quad \sum_{|\mu|\leq n} \sum_{\alpha<\mu} \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \zeta_i \partial^\alpha u \|_{W^{[r]+1-n}_{s_1+[r]+1-r,\, s_2+[r]+1-r}(R^2_{**})} \leq$$

$$\leq C \| u \|_{W^{[r]}_{s_1+[r]-r,\, s_2+[r]-r}(R^2_{**})} \leq C \| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} .$$

Ancora per la $\mathfrak{I}^{(r)}_1$), e $\mathfrak{I}^{(r)}_2$) si ha, poi:

$$(4.17)\quad \sum_{|\mu|\leq n} \sum_{\alpha<\mu} \| a_\mu \partial^{\mu-\alpha} \zeta_i \partial^\alpha u \|_{W^{[r]-n}_{s_1+[r]-r,\, s_2+[r]-r}(R^2_{**})} \leq$$

$$\leq C \| u \|_{V^{[r]-1}_{t,\tau}(R^2_{**})}$$

dove t, τ sono numeri reali qualunque.

Allora dalla (4.15) in virtù della (4.16) e della (4.17) scritta per $t = (s_1 + s_2)/2 + [r] - 1 - r$ e $\tau = -\left(\frac{s_2 - s_1}{2}\right) + \varepsilon$ e tenendo

conto del lemma 6.5 di [2] e della 8.10 ancora di [2] segue che per ogni $\lambda > 0$:

$$(4.18)\qquad \sum_{|\mu|\leq n}\ \sum_{\alpha<\mu} \| a_\mu\, \partial^{\mu-\alpha}\, \zeta_i\, \partial^\alpha\, u \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq \lambda \| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} +$$

$$+ c(\lambda) \| u \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} .$$

Pertanto da (4.14) e (4.18) si deduce per ogni $\lambda > 0$:

$$(4.19)\qquad \| Au_i \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq \| \zeta_i\, Au \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \lambda \| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} +$$

$$+ c(\lambda) \| u \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} .$$

Analogamente per $j = 1, \ldots, n$, tenendo conto del teorema di traccia 1.3. si ricava che se $m_j > 0$ per ogni $\lambda > 0$:

$$(4.20)\qquad \| \Delta_j\, u_i \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2,\,s_2+1/2}(R_+)} \leq \| \gamma_0\, \zeta_i\, \Delta_j\, u \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2,\,s_2+1/2}(R_+)} +$$

$$+ \lambda \| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + c(\lambda) \| u \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})}$$

dove si è posto $\gamma_0\, \zeta_i = \gamma_{01}\, \zeta_i = \gamma_{02}\, \zeta_i \quad i = 1, \ldots, \nu$.

Dalla (4.19) e (4.20) si ha:

$$(4.21)\qquad \| \mathfrak{B} u_i \|_{E_{r,s_1,s_2}} \leq C \left\{ \| \zeta_i\, Au \|_{W^{r-n}_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \lambda \| u \|_{W^r_{s_1,s_2}} + \right.$$

$$\left. + c(\lambda) \| u \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} + \sum_{j=1}^{n} \| \gamma_0\, \zeta_i\, \Delta_j\, u \|_{W^{r-m_j-1/2}_{s_1+1/2,\,s_2+1/2}(R_+)} \right\} .$$

Per i teoremi 7.3. di [2] (cfr. nota 5) e per la (8.2) di [2] dalla (4.21) si trae per ogni $\lambda > 0$:

$$(4.22)\qquad \| \mathfrak{B} u_i \|_{E_{r,s_1,s_2}} \leq C \left\{ \| \mathfrak{B} u \|_{E_{r,s_1,s_2}} + \lambda \| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \right.$$

$$\left. + c(\lambda) \| u \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,\,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} \right\} .$$

Dalle (4.13), (4.22), consegue, poi:

$$(4.23)\qquad \| u_i \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq C \left\{ \| \mathcal{B} u \|_{E_{r,s_1,s_2}} + \lambda \| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} + \right.$$
$$\left. + c(\lambda) \| u \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} \right\} .$$

E, tenuto conto del fatto che $u = \sum_{i=1}^{\nu} u_i$, fissando opportunamente $\lambda > 0$ dalla (4.23) si ricava:

$$\| u \|_{W^r_{s_1,s_2}(R^2_{**})} \leq C \left\{ \| \mathcal{B} u \|_{E_{r,s_1,s_2}} + \| u \|_{L^2_{(s_1+s_2)/2-r,-(s_2-s_1)/2+\varepsilon}(R^2_{**})} \right\} .$$

L'asserto risulta, così, provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] AVANTAGGIATI A., *Sistemi di equazioni a coefficienti costanti in due variabili e problemi ellittici.* Ric. di Mat. Vol. XXIV (1975).

[2] AVANTAGGIATI A., TROISI M., *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo* I. Ann. di Mat. pura e app. **95**, 361-408 (1973).

[3] AVANTAGGIATI A., TROISI M., *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo* II. Ann. di Mat. pura e appl. **97**, 207-252 (1973).

[4] AVANTAGGIATI A., TROISI M., *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo* III. Ann. di Mat. pura e appl. **99**, 1-64 (1974).

[5] CARRIERO M., *Problemi discontinui e di trasmissione per equazioni ellittiche a coefficienti costanti relativi ad angoli adiacenti.* Le Matematiche, Catania (in corso di stampa).

[6] CARRIERO M., *Problemi discontinui e di trasmissione per equazioni ellittiche di ordine diverso a coefficienti variabili relativi ad angoli consecutivi* (in corso di stampa).

RELAZIONE SUI LAVORI COMPIUTI DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

durante l'anno 1975, letta nell'adunanza plenaria del 22 gennaio 1976

dal Socio BALDASSARRE DE LERMA

segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

L'attività della nostra Accademia di promozione della ricerca scientifica non è stata inferiore, nel 1975, a quella dell'anno precedente ed ha ampiamente interessato l'arco delle discipline fisiche e matematiche. Presidente il Socio Prof. Mario Galgano, sono stati illustrati dai Soci presentatori, nelle otto tornate consuetudinarie, i risultati delle ricerche di studiosi di scuole del nostro collegio accademico e di studiosi stranieri e non è venuto meno, anche per lo scorso anno, il diretto contributo di nostri Accademici. Il nuovo volume dei Rendiconti, il 42° della Serie IV, comprende ben 35 lavori su argomenti interessanti le discipline matematiche, fisiche, chimiche e naturalistiche. Inoltre si è potuto completare il volume IX, Serie 3ª, degli « Atti » con due memorie, di cui diremo appresso, che seguono quella, del 1974, di Moraldo e Galgano intorno a problemi etnologici e antropologici relativi al Monte Bego.

Non è possibile, in una relazione di carattere generale, approfondire in maniera esauriente i contenuti di tutti i lavori che figurano nei volumi dei Rendiconti e degli Atti per il 1975 e dovrò limitarmi a riferire su di essi in maniera concisa, raggruppandoli in riferimento alle varie discipline.

Nuovi ed interessanti contributi sono stati portati nel campo dell'analisi matematica. Il Socio prof. Stampacchia ci ha fatto pervenire quattro lavori che sono stati ampiamente illustrati dal prof. Miranda. Il primo di tali lavori, in ordine di tempo, presentato nella tornata del 3 maggio, riguarda la regolarità di soluzioni di problemi variazioni unilaterali ed è dovuto al dr. G. M. Troianiello; un altro lavoro, a firma di L. C. Cristiano, tratta di criteri di esistenza e perturbazoni di disequazioni quasi variazionali; e vanno ancora ricordati, della stessa scuola, gli interessati contributi di G. Conti e P. Nistri e di D. Perrone su disequazioni variazionali su varietà riemanniane di dimensione finita. Nella tornata del 4 aprile il Socio Carlo Ciliberto illustrava una nota del dr. P. Buonocore che tratta di que-

stioni di compatibilità per il primo problema al contorno relativo ad una classe di equazioni ellittico-paraboliche del II ordine. Di problemi al contorno nel piano si è occupato il dott. Giarrusso, in un lavoro che ha avuto per relatore il prof. Miranda. Altri importanti contributi a questioni di analisi matematica, presentati anche dal Socio Miranda, sono quelli del dott. R. Schianchi sugli spazi di Sobolev dissimetrici e con peso e di C. Mett riguardante « Sturm comparison theorems for systems of second order ».

Per conto del prof. Salvadori, nostro Socio dell'Università di Roma, il prof. Tolotti ha riferito su uno studio di Schiaffino e Tesei intorno all'equazione $AX - XA = iB$ in meccanica e sul lavoro di A. M. Micheletti e F. Zirilli che porta contributi alla questione della esistenza delle soluzioni di un'equazione integro-differenzale in problemi di fisica matematica. Ed infine, per concludere intorno alle discipline matematiche, va ricordato lo studio di S. Dragotti, C. Palermo e L. Parlato intorno agli spazi plurimetrici, di cui è stato presentatore il Socio prof. Dalla Volta.

Dobbiamo poi al Socio Francesco Cennamo uno studio in collaborazione con A. Colasanti su una meteorite ferrosa di cui viene esaminata la struttura. Una ricerca nel campo della scienza delle costruzioni, su cui ha riferito il Socio Giangreco, porta la firma dei dottori A. Badalà e G. Oliveto e riguarda il comportamento delle travature elasto-plastiche in riferimento ad imperfezioni della loro geometria.

Al Socio prof. Rodolfo Nicolaus dobbiamo un ampio e interessante studio comparativo, condotto in collaborazione con E. Novellino e G. Prota, sull'origine e significato del colore negli animali, nella seriazione filogenetica. Va anche ricordata la ricerca di M. D'Agostino, G. Prota e F. De Simone sulla sintesi dell'1-metil-2-idrossi-3-7-8-trimetossi-9-10-antrachinene presentata anche da Nicolaus. Altro contributo in campo chimico, più esattamente in biochimica, è quello, presentato dal prof. Leone e a firma di Galli, Palmieri, Sorrentino e Libonati, sull'azione di una ribonucleasi sugli ibridi DNA: RNA che si inquadra in un moderno campo della biologia molecolare.

Il Socio Galgano ha fatto una comunicazione sui limiti delle prestazioni entro cui può trovare impiego negli studi di antropologia un apparecchio detto tricocicloforo.

A G. L. Valenti e a V. Sabatelli si deve una approfondita ricerca sul comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico che è stata ampiamente illustrata dal Socio Sersale. Anche al Sabatelli si devono ricerche, in collaborazione con G. Mascolo, G. Bisaccia e con A. Nastro, G. Mascolo sopra l'attività idraulica su scorie d'alto forno sintetiche, mentre un'indagine sull'influenza del TiO_2

sulla struttura e sulle proprietà di un vetro melilitico porta la firma di A. Marotta, A. Perullo e A. Buri.

Nel settore della zoologia vanno ricordati un lavoro di D. Capolongo e R. Panascì sul complesso problema della sistematica di specie del genere Talpa, con particolare riferimento alle forme dell'Italia centro-meridionale e l'importante contributo di Stefano Bianchi sui due tipi di neuroni neurosecretori (neuroni a secrezione peptidica e neuroni a secrezione aminica) nel lombrico, con la formulazione di una ipotesi sulla derivazione dei vari tipi di cellule neurosecretrici in tale animale. Entrambi i lavori sono stati presentati dal Socio De Lerma, che ha presentato ed illustrato altresì un'approfondita ricerca di G. Parisi, in collaborazione con F. A. Rita, sulle proteine solubili di *Drosophila melanogaster,* delle quali viene studiato il comportamento elettroforetico nel corso dell'ontogenesi. Altra ricerca sperimentale di Parisi, in collaborazione con D'Amora, riguarda l'attività xantinodeidrogenasica per i pigmenti oculari pterinici di *D. melanogaster.*

Si riportano alle discipline geo-mineralogiche i lavori di M. Boni, G. Rolandi e D. Stanzione sul comportamento geochimico di alcuni elementi in tracce in formazioni manganesifere del Messiniano di Serra di Aiello (Catena costiera calabra): costituiscono una ricerca originale, che conduce a risultati interessanti; presentatore, il Socio Scherillo. Una ricerca, anche presentata da Scherillo, riguarda il vulcanismo sottomarino latit basaltico-latitico nel Canale d'Ischia: è dovuta a due studiosi della stessa scuola, P. Di Girolamo e G. Rolandi; ed infine, in campo mineralogico, va ricordato il lavoro di M. de Gennaro e E. Franco su alcuni casi di alterazione della biotite in vermiculite.

V. Catalano ha portato un interessante contributo alla conoscenza della morfologia del Somma-Vesuvio nei riferimenti al parossismo del 79 d.C.; V. Bonasia, M. Ferri, S. Montagna e F. Pingue si sono occupati delle deformazioni del suolo in relazione alle indagini geofisiche sul bradisismo flegreo: entrambi i lavori sono stati presentati ed illustrati dal Socio Giuseppe Imbò.

I lavori ai quali sin qui si è fatto cenno vengono presentati nei Rendiconti dell'Accademia. Nel volume degli « Atti » per il 1975 figurano tre importanti memorie: nella prima, presentata a fine del 1974, gli Autori (il Socio Mario Galgano e il dott. Moraldo) riportano notizie e interpretazioni in parte inedite intorno alle incisioni rupestri del Monte Bego delle Alpi Marittime e giungono alla conclusione che verosimilmente la popolazione del Monte Bego durante l'Epoca del Bronzo fosse, almeno in prevalenza, del tipo brachicefalo alpinoide; la memoria al N. 2, del Socio prof. Giuseppe Imbò, è un vasto ed

approfondito studio delle rapide variazioni temporali della intensità della radioattività gamma globale delle lave vesuviane giovani che ha permesso di trarre deduzioni di interesse geochimico sulla concentrazione e sull'origine di rappresentativi nuclidi nei prodotti e nel magma; nella memoria del prof. F. Angelini e di O. Picariello, presentata dal Socio Galgano, viene studiato in maniera assai approfondita il corso della spermatogenesi in Rettili nei riferimenti alle diverse modalità secondo cui la spermatogenesi si svolge, in natura, in varie specie in differenti condizioni climatiche.

Per quanto riguarda il nostro Collegio accademico la professoressa Antonietta Orrù passa col nuovo anno, a seguito di sua richiesta, nella Sezione dei soci ordinari non residenti, essendosi trasferita a Roma.

Devo purtroppo annunciare la morte del professore Giuseppe Colosi, avvenuta in Firenze il 20 ottobre. È una notizia dolorosissima per tutti noi che ricordiamo il Colosi, scienziato di vasta e profonda dottrina, professore di Anatomia Comparata nella nostra Università. Un altro gravissimo lutto per la scienza, che ci ha profondamente addolorati, è la scomparsa del professore Girolamo Ippolito, avvenuta in Napoli l'8 luglio dello scorso anno. Sono venuti a mancare anche due Soci stranieri: il chimico professore Roberto Robinson, deceduto nel febbraio 1975 e il matematico Ottone Nicodym, deceduto il 4 maggio 1974.

Oltre l'intensa attività promozionale della ricerca scientifica che è attestata dalle numerose pubblicazioni che figurano nei volumi dei Rendiconti e degli Atti per il 1975, l'Accademia ha avuto il merito di prendere importanti iniziative culturali: ha così invitato, congiuntamente all'Accademia di Scienze mediche e chirurgiche, su indicazione del nostro Socio prof. Leone, il professore S. Moore, Premio Nobel per la chimica, a tenere una conferenza presso l'Istituto di Chimica Biologica della Facoltà di Scienze della nostra Università sullo stato delle conoscenze attuali intorno alle ribonucleasi e alle desossiribonucleasi. Altra interessante iniziativa è stata la visita a uno dei nostri musei naturalistici, cioè a quello di Mineralogia, organizzata per i Soci dell'Accademia e per gli appassionati di studi naturalistici.

Per l'anno accademico che si apre il nuovo consiglio di Classe risulta così costituito: Presidente, a norma di statuto, il Prof. Mario Curzio, che è stato Vice Presidente per l'anno precedente; Vice Presidente eletto, per il 1976, il Socio Professore Rodolfo Nicolaus; Tesoriere il Socio Professore Riccardo Sersale; Segretario, per il prossimo triennio, il Socio Professore Enzo Leone.

INDICE

C. METT — Sturm comparison theorems for systems of second order elliptic partial differential equations . . . . . pag. 5

A. SCHIAFFINO, A. TESEI — On the operator equation $AX - XA = iB$ . . » 18

V. CATALANO — Contributo alla morfologia del Somma-Vesuvio . . . » 32

V. SABATELLI, G. L. VALENTI — Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico . . . . . » 59

P. AMATO — Punti uniti in spazi metrici completi . . . . . » 71

S. DRAGOTTI, C. PALERMO, L. PARLATO — Spazi plurimetrici . . . . . » 93

D. CAPOLONGO, R. PANASCÌ — Le talpe dell'Italia centro-meridionale . . » 104

R. PANASCÌ, D. CAPOLONGO — Prognatismo per ipoplasia del massiccio facciale in esemplare di *Talpa Romana* (Thomas) . . . . . » 139

G. MASCOLO, G. BISACCIA, V. SABATELLI — Influenza della magnesia sull'idraulicità di scorie d'alto forno sintetiche. Nota I^a. Scorie con rapporto CaO/SiO_2 fisso . . . . . » 144

A. BADALÀ, G. OLIVETO — The influence of geometrical imperfections in rods and of the changes in the geometry upon the behaviour of elasto-plastic trusses . . . . . » 155

A. MAROTTA, A. PERULLO, A. BURI — Influenza del TiO_2 sulla struttura e sulle proprietà di un vetro melilitico . . . . . » 169

M. GÀLGANO — Il tricocicloforo, apparecchio dalle limitate prestazioni . » 177

P. BUONOCORE — Questioni di compatibilità per il primo problema al contorno relativo ad una classe di equazioni ellittico-paraboliche del II ordine . . . . . » 183

G. M. TROIANIELLO — On the regularity of solutions of unilateral variational problems . . . . . » 200

G. L. VALENTI, V. SABATELLI — Comportamento idraulico di soluzioni solide di silicato tricalcico . . . . . » 215

V. SABATELLI, A. NASTRO, G. MASCOLO — Sulla relazione fra comportamento alla devetrificazione ed attività idraulica di scorie d'alto forno sintetiche » 229

V. BONASIA, M. FERRI, S. MONTAGNA — Le deformazioni del suolo in relazione alle indagini geofisiche sul bradisismo flegreo . . . . . » 238

M. DE' GENNARO, E. FRANCO — Su alcuni casi di alterazione della biotite in vermiculite . . . . . pag. 253

M. D'AGOSTINO, G. PROTA, F. DE SIMONE — Sintesi dell'1-metil-2-idrossi-3,7,8,-trimetossi-9,10-antrachinone . . . . . » 271

F. CENNAMO, A. COLASANTI — Irregolarità della meteorite ferrosa Coahuila e struttura delle lamelle di geminazione . . . . . » 278

M. BONI, G. ROLANDI — Mineralizzazioni manganesifere nel messiniano del versante tirrenico della catena costiera calabra (Serra d'Aiello) . . » 295

R. GALLI, M. PALMIERI, S. SORRENTINO, M. LIBONATI — Alcune caratteristiche dell'azione della ribonucleasi BS-1 sugli ibridi DNA:RNA . . . » 324

L. CARBONE — Qualche criterio di esistenza e perturbazioni di disequazioni quasi variazionali . . . . . » 333

R. SCHIANCHI — Spazi di Sobolev dissimmetrici e con peso . . . . » 349

A. SCHERILLO — Presentazione ai consoci del Museo Mineralogico dell'Università di Napoli . . . . . » 389

R. A. NICOLAUS, E. NOVELLINO, G. PROTA — Origine e significato del colore negli animali . . . . . » 398

G. PARISI, A. R. FRANCO — Analisi elettroforetica di proteine solubili durante l'ontogenesi di *Drosophila melanogaster* . . . . . » 480

M. BONI, G. ROLANDI, D. STANZIONE — Comportamento geochimico di alcuni elementi in tracce nelle mineralizzazioni manganesifere del Messiniano di Serra d'Aiello (Catena Costiera calabra) . . . . . » 492

G. CONTI, P. NISTRI — A fixed point theorem for non compact acyclic-valued maps . . . . . » 510

A. M. MICHELETTI, F. ZIRILLI — Una applicazione della teoria della categoria di Liusternik - Schnirelmann alle equazioni di Hartree Fock . . . » 518

D. PERRONE — Disequazioni variazionali su varietà Riemanniane di dimensione finita . . . . . » 530

G. PARISI, D. D'AMORA — Attività xantinodeidrogenasica e pigmenti oculari pterinici in *Drosophila melanogaster* . . . . . » 544

S. BIANCHI — On the Several Types of Neurosecretory Cells of the Brain of the Earthworm . . . . . » 552

P. DI GIROLAMO, G. ROLANDI — Vulcanismo sottomarino latitebasaltico-latitico (serie potassica) nel Canale d'Ischia (Campania) . . . . » 561

E. GIARRUSSO — Su certi problemi al contorno nel piano . . . . . » 597

Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli durante l'anno 1975 . . . . . » 617

Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli

12434

TERMINATO DI STAMPARE OGGI
X MAGGIO MCMLXXVI NELLE
OFFICINE GRAFICHE NAPOLETANE
« FRANCESCO GIANNINI & FIGLI »

Direttore responsabile: *Prof. MICHELE FUIANO*

Autorizzazione del Tribunale di Napoli, B/2315 del 14 agosto 1954