SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLI — ANNO CXIII

(gennaio - dicembre 1974)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1975

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLI — ANNO CXIII

(gennaio - dicembre 1974)

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1975

Una classe di quasicorpi di dimensione infinita sul loro nucleo

Nota di ANDREA CAGGEGI *
presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 5 gennaio 1974)

RIASSUNTO. — Costruisco una classe di quasicorpi aventi caratteristica maggiore di due e dimensione infinita sul loro nucleo.

SUMMARY. — I give the construction of a set of quasifields (VW-systems) which have caracteristic greater than two and are infinite-dimensional vector spaces over their kernel.

1. — R. H. BRUCK e R. C. BOSE, in [2] [1], hanno posto il problema della ricerca di quasicorpi aventi dimensione infinita in quanto spazi vettoriali sul loro nucleo.

Di tale problema si è occupato F. BARTOLOZZI in [1], in relazione a quasicorpi di caratteristica dispari.

In questa Nota costruisco una classe di quasicorpi, aventi caratteristica maggiore di due e dimensione infinita come spazi vettoriali sul loro nucleo, generalizzando al caso infinito il procedimento costruttivo con il quale F. W. WILKE e J. L. ZEMMER ([5]; p. 383) hanno ottenuto quasicorpi finiti.

Inizio (n. 2) richiamando i concetti essenziali per la esatta comprensione del seguito e, successivamente (n. 3), illustro la costruzione dei quasicorpi in questione.

2. — Un insieme $Q = Q(+, \cdot)$ dotato delle operazioni di addizione e di moltiplicazione è un quasicorpo rispetto a quelle operazioni se sono verificate le seguenti condizioni:

c_1) $Q(+)$ è un gruppo abeliano;

c_2) se o è l'elemento neutro di $Q(+)$, risulta $ox = xo = o$ per ogni $x \in Q$;

* Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università di Napoli, Via Mezzocannone 8, 80134 Napoli.

[1] I numeri in [ ] rinviano alla bibliografia in fine.

c_3) $Q^* = Q - \{o\}$ (è non vuoto e) rispetto alla moltiplicazione è un quasi-gruppo dotato di elemento neutro. Più precisamente, se $a, b \in Q^*$ esistono e sono univocamente definiti $x, y \in Q^*$ tali che $ax = b$, $ya = b$. Inoltre, esiste $1 \in Q^*$ tale che $1\,x = x\,1 = x$ per ogni $x \in Q^*$;

c_4) se $a, b, c \in Q$, risulta $a(b + c) = ab + ac$;

c_5) se $a, b, c \in Q$ e se $a \neq b$, esiste uno e un solo $x \in Q$ tale che $-(ax) + bx = c$.

Se Q è un quasicorpo, $N = \{a \in Q \mid (x + y)\,a = xa + ya,\ (xy)\,a = x(ya)$ se $x, y \in Q\}$ è un sottoquasicorpo di $Q(+, \cdot)$ e risulta un corpo che è detto nucleo del quasicorpo; $Q(+)$ è, in maniera naturale, spazio vettoriale destro sopra il corpo N. Le proprietà dei quasicorpi e i loro legami con i fondamenti della geometria sono ampiamente illustrati in [3], [4]; rimandando a quei trattati per una esauriente esposizione dell'argomento, mi limito, qui, a ricordare il procedimento costruttivo con il quale F. W. WILKE e J. L. ZEMMER hanno ottenuto una classe di quasicorpi finiti ([5]; p. 383).

A tal fine, siano p, n e d tre naturali dispari con p primo e d divisore proprio di n; si consideri un campo $F = F(+, \cdot)$ finito d'ordine p^n e, indicato con o l'elemento neutro del gruppo $F(+)$, il suo gruppo moltiplicativo $F^* = F - \{o\}$.

Detto g un generatore del gruppo $F^*(\cdot)$, siano F_1 e F_2 i sottogruppi di $F^*(\cdot)$ generati, rispettivamente, da g^{p^d-1} e da g^{p-1}; inoltre, indicato con G il gruppo degli automorfismi di $F(+, \cdot)$, siano 1_G l'elemento neutro di G, f e ψ i due elementi di G così definiti: $x^f = x^{p^d}$ per ogni $x \in F$; $x^\psi = x^p$ per ogni $x \in F$.

Infine, sia α: $F \longrightarrow G$ la seguente applicazione:

$$\alpha(o) = 1_G\,;$$
$$\alpha(x) = 1_G \quad \text{se} \quad x \in F_1\,;$$
$$\alpha(x) = f \quad \text{se} \quad x \in F_2 - F_1\,;$$
$$\alpha(x) = \psi \quad \text{se} \quad x \in F^* - F_2\,.$$

Con tali dati, la struttura algebrica $F(+, \circ)$, con $F(+)$ gruppo additivo sostegno del campo $F(+, \cdot)$ e « $\circ$ » definita ponendo $x \circ y = xy^{\alpha(x)}$ se $x, y \in F$, è un quasicorpo, che diremo quasicorpo di WILKE-ZEMMER relativo al campo F e all'interno d, e che indicheremo $WZ(F, d)$.

3. — Consideriamo il campo fondamentale F_p di caratteristica p maggiore di due e sia $K_{p,q}$, con q naturale primo e tale che $p \not\equiv 1 \pmod{q}$, il sottocampo della chiusura algebrica P di F_p che è costituito da tutti e soli gli elementi di P che hanno grado uguale a una potenza di q su F_p; inoltre, siano n un naturale maggiore di q e potenza di q, d un divisore proprio di n, A il sottocampo di $K_{p,q}$ avente ordine p^n.

Premesso ciò, indichiamo con $G(K_{p,q} : F_p)$ il gruppo degli automorfismi del campo $K_{p,q}$ e siano I, f e ψ i tre elementi di $G(K_{p,q} : F_p)$ così, ordinatamente, definiti:

$$x^{\mathrm{I}} = x \qquad \text{per ogni} \qquad x \in K_{p,q};$$

$$x^{f} = x^{p^d} \qquad \text{per ogni} \qquad x \in K_{p,q};$$

$$x^{\psi} = x^{p} \qquad \text{per ogni} \qquad x \in K_{p,q}.$$

I, f e ψ fissano ogni sottocampo di $K_{p,q}$ e, quindi, ha senso considerare le loro restrizioni a ogni tale sottocampo.

Se $x \in K_{p,q}$, indichiamo con $G(A(x) : F_p)$ il gruppo degli automorfismo del campo $A(x)$ [2] e con $t_x : A(x) \longrightarrow G(A(x) : F_p)$ l'applicazione che, in virtù di quanto richiamato al n. 2, consente di costruire il quasicorpo $WZ(A(x), d)$.

Con tali dati, definiamo l'applicazione $\alpha : K_{p,q} \longrightarrow G(K_{p,q} : F_p)$ ponendo:

$$\alpha(o) = \mathrm{I};$$

$$\alpha(x) = \mathrm{I} \qquad \text{se} \qquad x \in K^{*}_{p,q} \qquad \text{e} \qquad t_x(x) = \mathrm{I}_{A(x)} \ [3];$$

$$\alpha(x) = f \qquad \text{se} \qquad x \in K^{*}_{p,q} \qquad \text{e} \qquad t_x(x) = f_{A(x)};$$

$$\alpha(x) = \psi \qquad \text{se} \qquad x \in K^{*}_{p,q} \qquad \text{e} \qquad t_x(x) = \psi_{A(x)}.$$

Dotiamo, quindi, il gruppo additivo sostegno del campo $K_{p,q}(+, \cdot)$ di una operazione di moltiplicazione, $\divideontimes$, con la seguente definizione:

$$a \divideontimes b = ab^{\alpha(a)} \qquad \text{se} \qquad a, b \in K_{p,q}.$$

Per pervenire al risultato cui questa Nota è dedicata ci serviremo dei seguenti lemmi:

[2] $A(x)$ = sottocampo di $K_{p,q}$ generato da A e da x.
[3] Se h: $X \longrightarrow Y$ è applicazione e $Z \subset X$, h_z è la restrizione di h a Z.

LEMMA 1. Siano $x \in K_{p,q}$, $S(+, \cdot)$ *un sottocampo finito di* $K_{p,q}(+, \cdot)$ *contenente il campo* $A(x)$ *e* $WZ(S, d) = S(+, \circ)$ *il quasicorpo di* WILKE-ZEMMER *relativo al campo* S *e all'intero d. Risulti* $|S| = p^m$, $|A(x)| = p^h$ *e, pertanto,* $m = q^{m'} \geq h = q^{h'} \geq n$ *con* h', m' *interi opportuni.*

In tali condizioni, se $S^* = \langle g \rangle$, *è* $A^*(x) = \langle g^{(p^m-1)/(p^h-1)} \rangle$ *e i naturali* $(p^m - 1)/(p^h - 1)$ *e* $p^d - 1$ *sono primi tra loro.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare che i naturali $p^d - 1$ e $(p^m - 1)/(p^h - 1)$ sono primi tra loro, poiché qui intervengono tutte le ipotesi precisate all'inizio del n. 3.

Se $m = hr$, risulta $r = q^j$ con j opportuno intero non negativo e

$$(p^m - 1)/(p^h - 1) = [(p^h - 1)\ (p^{h(r-1)} + p^{h(r-2)} + \ldots +$$

$$+ p^h + 1)]/(p^h - 1) = (p^{h(r-1)} - 1) + (p^{h(r-2)} - 1) + \ldots +$$

$$+ (p^h - 1) + r.$$

Premesso ciò, essendo ovvio il caso $h = m$, supponiamo $h < m$ e sia s un divisore di $(p^m - 1)/(p^h - 1)$ e di $p^d - 1$; poiché d divide h, s divide r e, pertanto, $s = q^i$ con i opportuno intero non negativo.

Se $p = q$, q^i è divisore di $q^d - 1$, quindi si ha $i = o$ e $s = 1$.

Se $p \neq q$, q divide $p^{q-1} - 1$ e, poiché i naturali $q - 1$ e d sono primi tra loro, si ha m.c.d. $(p^{q-1} - 1,\ p^d - 1) = p - 1$; quindi, se fosse $i \geq 1$ si avrebbe che q divide $p^{q-1} - 1$, $p^d - 1$ e, pertanto, $p - 1$, contraddicendo l'ipotesi $p \not\equiv 1 \pmod{q}$. Ne deriva che, anche se $p \neq q$, deve essere $i = 0$ e $s = 1$.

LEMMA 2. *Nelle ipotesi del lemma* 1, $S(+, \ast)$ *è il quasicorpo* $WZ(S, d) = S(+, \circ)$.

Dimostrazione. Sia $\alpha^{(S)} : S \longrightarrow G(S : F_p)$ [4] l'applicazione che consente di costruire il quasicorpo $WZ(S, d)$. Per ottenere la prova del lemma stabiliamo, ordinatamente, che, se $x \in S$, risulta:

1) $\alpha^{(S)}(x) = I_S$ se $\alpha(x) = 1$;

2) $\alpha^{(S)}(x) = f_S$ se $\alpha(x) = f$;

3) $\alpha^{(S)}(x) = \psi_S$ se $\alpha(x) = \psi$,

[4] $G(S:F_p)$ = gruppo degli automorfismi del campo $S(+, \cdot)$.

E, infatti, se $x = o$, risulta:

$$\alpha(x) = \mathrm{I} \qquad \text{e} \qquad \alpha^{(\mathrm{S})}(x) = \mathrm{I}_{\mathrm{S}},$$

mentre se $x \in \mathrm{S}^*$ e $\alpha(x) = \mathrm{I}$ si ha:

$$t_x(x) = \mathrm{I}_{\mathrm{A}(x)} \qquad \text{e} \qquad x \in \langle g^{[(p^m-1)/(p^h-1)](p^d-1)} \rangle ;$$

ne deriva

$$x \in \langle g^{p^d-1} \rangle , \qquad \alpha^{(\mathrm{S})}(x) = \mathrm{I}_{\mathrm{S}}$$

e la 1) è così provata.

Per provare la 2), sia $x \in \mathrm{S}$ con $\alpha(x) = f$; risulta

$$x \neq o, \qquad t_x(x) = f_{\mathrm{A}(x)}$$

e

$$x \in \langle g^{[(p^m-1)/(p^h-1)](p-1)} \rangle - \langle g^{[(p^m-1)/(p^h-1)](p^d-1)} \rangle ;$$

quindi, per il lemma 1, è

$$x \in \langle g^{p-1} \rangle - \langle g^{p^d-1} \rangle$$

e, perciò,

$$\alpha^{(\mathrm{S})}(x) = f_{\mathrm{S}} .$$

Rimane da stabilire la 3). Perciò sia $x \in \mathrm{S}$ con $\alpha(x) = \psi$; risulta

$$x \neq o, \quad t_x(x) = \psi_{\mathrm{A}(x)} \quad \text{e} \quad x \in \mathrm{A}^*(x) - \langle g^{[(p^m-1)/(p^h-1)](p-1)} \rangle .$$

Ne deriva, per il lemma 1,

$$x \in \mathrm{S}^* - \langle g^{p-1} \rangle \qquad \text{cioè} \qquad \alpha^{(\mathrm{S})}(x) = \psi_{\mathrm{S}}$$

che è quanto rimaneva da provare.

In definitiva, se $x, y \in \mathrm{S}$, è $x \divideontimes y = x \circ y$ cioè le due operazioni $\circ$ e $\divideontimes$ coincidono su S; si ha, cioè, l'uguaglianza $\mathrm{WZ}(\mathrm{S}, d) = \mathrm{S}(+, \divideontimes)$ e il lemma 2 è compiutamente dimostrato.

Sfruttando i precedenti lemmi, siamo in grado di provare il

TEOREMA. $\mathrm{K}_{p,q}(+, \divideontimes)$ *è un quasicorpo il cui nucleo è il campo* F_p; *in conseguenza,* $\mathrm{K}_{p,q}(+, \divideontimes)$ *ha dimensione infinita sul suo nucleo.*

Inoltre, se $H_{p,q}$ *è un qualunque sottocampo del campo* $K_{p,q}$ *contenente* A, *il gruppo additivo sostegno di* $H_{p,q}$ *dotato dell'operazione* $\divideontimes$ *è un sottoquasicorpo* di $K_{p,q}(+, \divideontimes)$.

Dimostrazione. Se $H_{p,q}$ è un qualunque sottocampo di $K_{p,q}$ contenente A, in particolare $K_{p,q}$ stesso, si verifica immediatamente che $H_{p,q}(+, \divideontimes)$ soddisfa alle condizioni c_1), c_2) e c_4) del n. 2. Vanno verificate c_3) e c_5) ma, poiché le prove sono analoghe, ci limitiamo a verificare la

c_5) se $a, b, c \in H_{p,q}$ e se $a \neq b$, esiste uno e un solo $x \in H_{p,q}$ tale che: $-(a \divideontimes x) + b \divideontimes x = c$.

A tale scopo, detti a, b, c tre elementi di $H_{p,q}$ con $a \neq b$, si consideri il campo $S = A(a, b, c)$ generato in $H_{p,q}$ dal campo A e dagli elementi a, b e c. Tale campo contiene A e ha dimensione finita come spazio vettoriale su F_p perciò, in forza del lemma 2, $S(+, \divideontimes)$ è il quasicorpo $WZ(S, d)$; ne deriva che esiste in S uno e un solo x tale che: $-(a \divideontimes x) + b \divideontimes x = c$. Per provare l'unicità di x in tutto $H_{p,q}$, si osservi che se $y \in H_{p,q}$ è tale che $-(a \divideontimes y) + b \divideontimes y = c$, y appartiene al quasicorpo $A(a, b, c, y)(+, \divideontimes)$ contenente $S(+, \divideontimes)$ come sottoquasicorpo; da tale osservazione si deduce subito $x = y$.

Per determinare il nucleo N_H di $H_{p,q}$ si tenga presente che se $x \in N_H$ risulta x appartenente al nucleo del quasicorpo $A(x)(+, \divideontimes)$; ne deriva, per [5] (p. 383), che $x \in F_p$ = campo fondamentale di ordine p.

Poiché il nucleo di $H_{p,q}$ è un suo sottocorpo risulta, in definitiva, $N_H = F_p$ e il teorema è compiutamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bartolozzi F., *Quasicorpi di dimensione infinita sul loro nucleo.* Atti Accad. Sci. Lett. Arti Palermo Parte I, (IV) **28**, pp. 507-513 (1967-68).

[2] Bose R. C. e Bruck R. H., *The construction of traslation planes from projective spaces.* J. Algebra, 1, pp. 85-112 (1964).

[3] Pickert G., *Projektive Ebenen.* Springer, Berlin (1955).

[4] Segre B., *Lectures on Modern Geometry* (con appendice di L. Lombardo Radice). Cremonese, Roma (1960).

[5] Wilke F. W. e Zemmer J. L., *Some new finite traslation planes.* Trans. Amer. Math. Soc., **131**, pp. 378-397 (1968).

Magnetizzazione latente in ferromagnetici sottoposti a transienti magnetici

Nota di ANTONIO CARRELLI, CARLO LUPONIO e FLAVIO PORRECA
presentata dal socio ordinario A. CARRELLI

(Adunanza del 2 febbraio 1974)

RIASSUNTO. — L'applicazione di un rapido incremento $\pm \Delta H$ di campo magnetico a ferromagnetici conduttori, di forma cilindrica, polarizzati in un campo H raggiunto lentamente, dà luogo a variazioni di magnetizzazione che dipendono dal segno di ΔH e dal verso di H.

In ogni stato di magnetizzazione sembra quindi che il campione rimanga in uno stato latente relativamente al quale è possibile ricavare due valori della permeabilità dinamica μ_1 e μ_2.

Ponendo il campione in vibrazione prima della misura si riesce ad annullare tale stato per cui i valori di μ_1 e μ_2 coincidono.

SUMMARY. — Applying a fast increment $\pm \Delta H$ of a magnetic field to cylindrical ferromagnetic conductors, polarized by external magnetic field slowly achieved, we obtain magnetization changes which depend on the sign of ΔH and on the direction of H.

The sample seems to remain in some latent state whenever the magnetization state is fixed. In this condition it is possible to obtain two values μ_1 and μ_2 for the dinamic permeability.

We found that such latent states are destroyed by mechanical vibrations and the values μ_1 and μ_2 coincide thereafter.

1) INTRODUZIONE

La magnetizzazione di sostanze ferromagnetiche cilindriche immerse in campi longitudinali statici H è stata da noi studiata [1] [2] sottoponendo i campioni ad una rapida variazione ΔH ($\Delta t = 4.10^{-6}$ sec.) di campo magnetico.

La misura della variazione di flusso $\Delta \Phi$ in funzione del tempo ci ha permesso di verificare la teoria classica di B. Wwedensky per campioni sottili (diam. 0,8 mm), di studiare la permeabilità dinamica sia in funzione del tempo che del campo magnetico H, e di

analizzare, nei campioni spessi (diam. 10 mm), alcune particolarità sulla propagazione dell'induzione B lungo la direzione radiale.

Continuando le ricerche si sono osservate alcune particolarità riscontrate in tutte le sostanze studiate.

Il dispositivo sperimentale è quello già utilizzato per il lavoro [2] (schema I). La sostanza alla quale ci si riferisce nel presente lavoro è il ferro (99 % Fe; diam. 0,8 mm) ma qualitativamente analogo comportamento presentano altre sostanze sperimentate (Ni 99 %; lega: 95 % Ni, 5 % Al; lega: 51 % Ni, 49 % Fe; Invar).

La preventiva smagnetizzazione dei campioni, effettuata in campi alternati decrescenti fino a 0,03 oerst., è stata controllata mediante un sensibile magnetometro [3].

2) Risultati sperimentali

Nelle condizioni descritte si è osservato che, portato il campione in un ben definito stato di magnetizzazione mediante un campo uniforme H, l'incremento ΔH non produce sempre la stessa variazione di flusso $\Delta \Phi$.

Si eseguono gli esperimenti nel seguente modo: raggiunto un certo valore del campo in verso crescente (da 0 a $+H$) si dà un incremento nello stesso verso ($+ \Delta H_1$) e quindi lo si toglie ($- \Delta H_1$), quindi si applicano successivi incrementi dando e togliendo rispettivamente $+ \Delta H_2$, $- \Delta H_2$, $+ \Delta H_3$, $- \Delta H_3$, ... (per semplicità il valore assoluto dei ΔH_i è sempre lo stesso). I segnali f.c.m. dovuti alle variazioni $\Delta \Phi_i$ corrispondenti ai ΔH_i sono osservati all'oscillografo e fotografati; si riportano quindi in scala semilogaritmica le funzioni del tempo $f_i(t) = \log \frac{d \Phi_i}{d t}$. Si ottengono i risultati mostrati in fig. 1. Da questi si osserva che il coefficiente angolare della $f_i(t)$ dalla quale è possibile, nota la conducibilità e la geometria del campione, risalire alla permeabilità dinamica μ_i, è minore per la funzione $f_1(t)$ ottenuta applicando il primo incremento ΔH_1, mentre per i successivi incrementi $\pm \Delta H_i$ le funzioni $f_i(t)$ hanno lo stesso coefficiente angolare, ma maggiore di quello relativo a $f_1(t)$.

Ciò suggerisce che in ogni stato di magnetizzazione raggiunto lentamente mediante l'aumento di H è possibile mettere in evidenza mediante un rapido incremento ΔH due distinti valori della permeabilità μ_1 e μ_2. Tali valori, relativi rispettivamente a $+ \Delta H_1$ e ai successivi $\pm \Delta H_i$ sono stati misurati [1] facendo variare il campo H da 0 a 90 oersted. I risultati sono riportati in fig. 2. Da essa si

nota che i valori di μ_1 sono sempre maggiori di μ_2 e che il massimo di μ_1 (H) è spostato verso campi più alti rispetto al massimo di μ_2 (H).

Se il primo incremento ΔH_1 non è applicato nello stesso verso secondo il quale è stato raggiunto H, si è notato che la variazione di flusso $\Delta \Phi_1$ corrispondente, è la stessa di quella che si ottiene in conseguenza dei successivi incrementi.

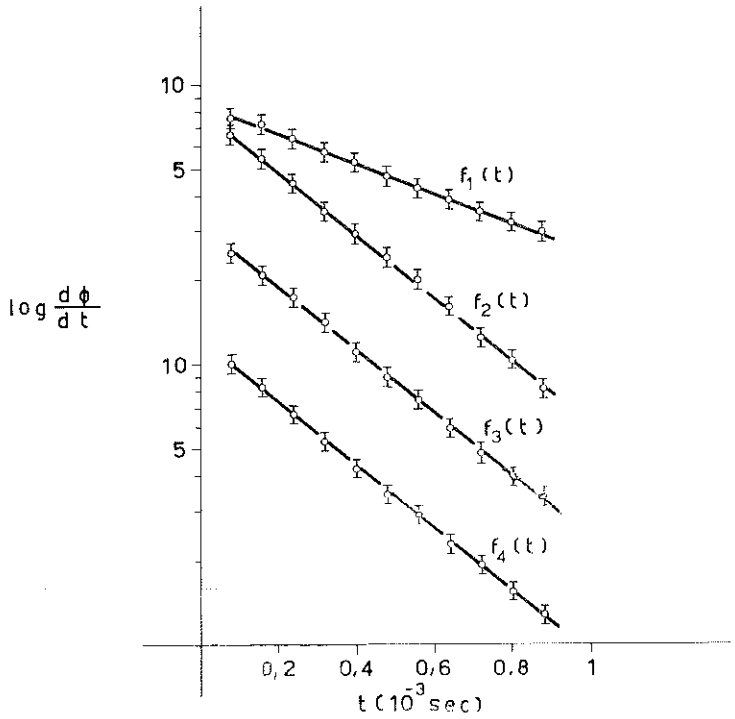


FIG. 1

Per estendere gli esperimenti descritti si raggiungono stati di magnetizzazione mediante la diminuzione di H. Si applica quindi un primo incremento $-\Delta H_1$ nel verso di H e successivamente si applicano ed eliminano gli incrementi $+\Delta H_1$, $-\Delta H_2$, $+\Delta H_2$, ...; si ottiene analogamente che la variazione di flusso $\Delta \Phi_1$ è maggiore di ognuna delle variazioni $\Delta \Phi_i$, mentre ciò non accade se il primo incremento è $+\Delta H_1$. Anche in questo caso gli andamenti di μ_1 (H) e μ_2 (H) sono quelli della fig. 2.

Si è infine provato ad applicare un incremento $+\Delta H_2$ successivamente ad un incremento $+\Delta H_1$ (entrambi nel verso di H), ma

senza preventivamente eliminare $+\Delta H_1$. Anche in tal caso il risultato è che $\Delta \Phi_i (i \neq 1)$ è sempre maggiore di $\Delta \Phi_1$.

Rappresentiamo i processi sopra descritti mediante grafici tridimensionali (figg. 3, 4) riportando sui tre assi, in unità arbitrarie, il campo H, l'intensità di magnetizzazione I e il tempo t che si impiega per magnetizzare il campione.

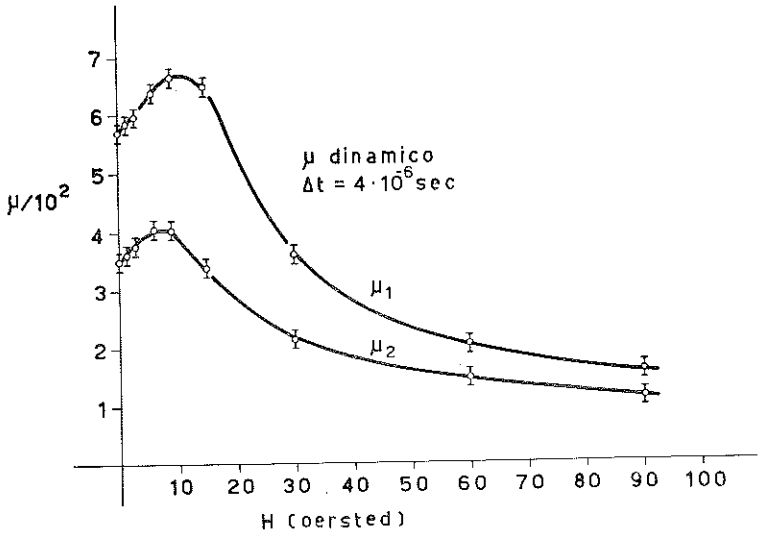


FIG. 2

Nel primo caso (fig. 3), partendo dallo stato $A(H_1 ; I_1 ; t_1)$ si raggiunge $B(H_3 ; I_3 ; t_3)$ in un tempo $t_3 - t_1$ di ≈ 30 sec. Ad intervalli di tempo uguali (≈ 30 sec.) $t_4 - t_3$; $t_5 - t_4$; $t_6 - t_5$, si applicano in $\approx 10^{-6}$ sec. gli incrementi $+\Delta H$, $-\Delta H$, $+\Delta H$, raggiungendo gli stati $C(H_3 + \Delta H ; I_3' ; t_4)$; $D(H_3 ; I_3'' ; t_5)$; $E(H_3 + \Delta H ; I_3'' ; t_6)$ rispettivamente.

Nel secondo caso (fig. 4) raggiunto lo stato $B'(H_3' ; I_4 ; t_3)$, si applicano, in $\approx 10^{-6}$ sec., gli incrementi $-\Delta H$, $+\Delta H$, $-\Delta H$, ..., ad intervalli di tempo uguali $t_4 - t_3$; $t_5 - t_4$; $t_6 - t_5$; (≈ 30 sec.) raggiungendo rispettivamente gli stati $C'(H_3' - \Delta H ; I_4' ; t_4)$; $D'(H_3' ; I_4 ; t_5)$; $E'(H_3' - \Delta H ; I_4' ; t_6)$ ... In questo secondo caso non si osserva la variazione $I_3'' - I_3'$ notata nel primo caso.

3) CONCLUSIONI

Fenomenologicamente si può affermare che, portato lentamente il campione in un definito stato di magnetizzazione mediante il campo

H, rimane in esso una tendenza a magnetizzarsi ulteriormente nello stesso verso di H; nella sostanza rimane cioè uno stato latente di magnetizzazione. Questo stato latente è messo in evidenza proprio dal fatto che un piccolo campo aggiuntivo ΔH, applicato rapidamente ($\approx 10^{-6}$ sec.), che è il primo applicato dopo che il campione

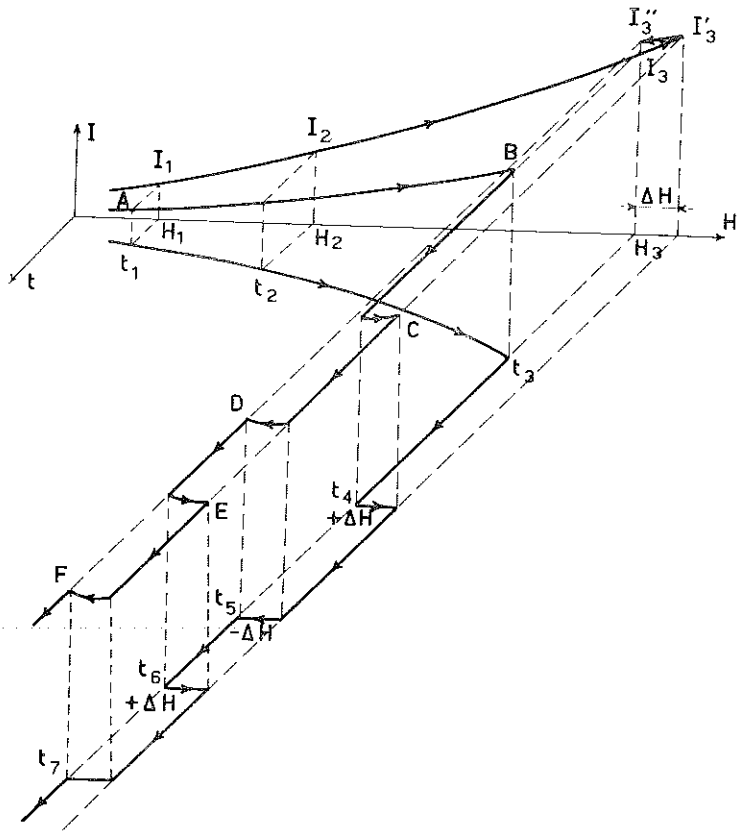


FIG. 3

è stato portato in detto stato latente, riesce a distruggere tale stato lasciando il campione in uno stato normale; i successivi incrementi $\pm \Delta H_i$ danno quindi luogo sempre alla stessa variazione $\Delta \Phi_i$. Tale fenomeno avviene solo se l'incremento è applicato impulsivamente; inoltre se l'incremento è applicato in verso opposto ad H, l'effetto non si verifica perché il ΔH non facilita lo spostamento di pareti.

Questa caratteristica « magnetizzazione potenziale » delle sostanze ferromagnetiche sembra che non sia annullata al trascorrere del tempo, cioè per incrementi impulsivi ΔH, la differenza tra $\Delta \Phi_1$ e

$\Delta \Phi_i$ è sempre la stessa anche quando il tempo trascorso tra l'applicazione di due successivi incrementi è dell'ordine di 200 min. ed anche maggiore.

Infatti nelle nostre esperienze, una volta applicato e tolto il primo incremento $+ \Delta H_1$, abbiamo anche atteso un certo tempo t

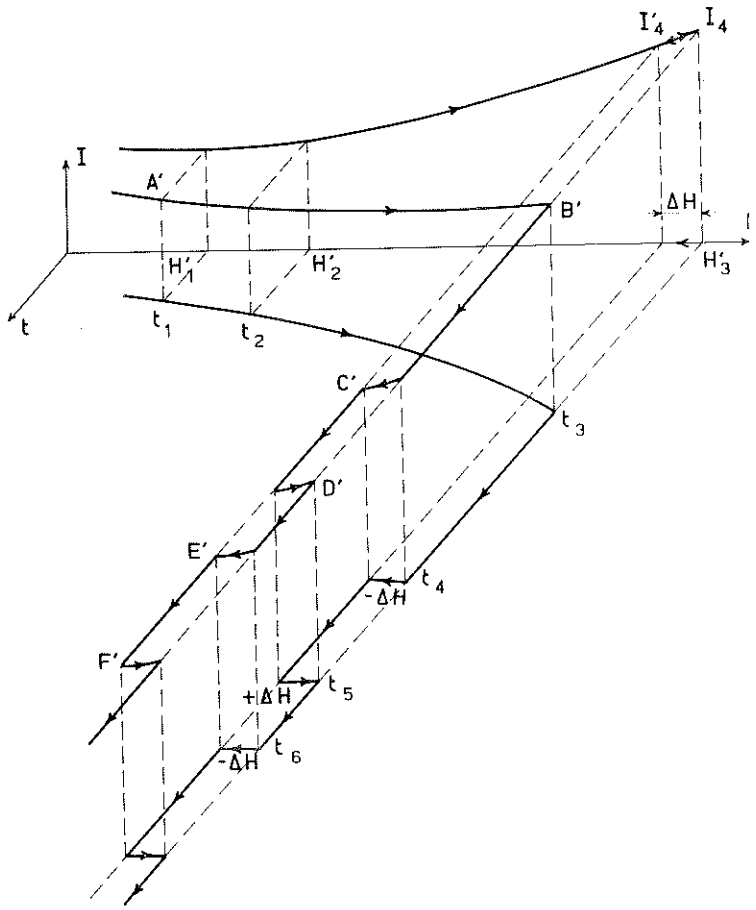


FIG. 4

(fino a 200 min.) prima di applicare un secondo incremento $\Delta H_2 = \Delta H_1$ nello stesso verso del primo e di H. Nonostante il tempo abbastanza lungo trascorso, si osserva che all'incremento ΔH_2 (applicato dopo t) fa riscontro una variazione $\Delta \Phi_2$ minore di $\Delta \Phi_1$ corrispondente a ΔH_1. Successivi ΔH_i danno poi luogo a uguali variazioni $\Delta \Phi_i$.

Si è pensato finalmente di annullare questa tendenza ad una magnetizzazione maggiore mediante procedimento meccanico.

In luogo di campioni di Fe di diam. 0,8 mm si è utilizzata una sbarretta di Fe di diam. 10 mm; ad essa è stato lasciato il magnetismo residuo diminuendo il valore del campo H da 90 oersted a zero. Estratta dal campo, la sbarretta è stata posta per un certo tempo ($\approx$ 10 sec.) in vibrazione longitudinale.

Questa volta si osserva che, posta la sostanza nel nostro dispositivo di misura, gli incrementi ΔH_i danno luogo, qualsiasi è il segno del primo incremento ΔH_1, a variazioni $\Delta \Phi_i$ tutte uguali tra loro, e quindi a valori di μ tutti uguali.

Queste ricerche, condotte su cilindri ferromagnetici conduttori, hanno una stretta analogia con gli studi condotti sui ferromagnetici ad alta resistività (ferriti) nei quali si individuano [4] processi reversibili, responsabili delle variazioni di flusso, tutte uguali, originate da incrementi impulsivi ΔH successivi al primo, e di processi irreversibili e reversibili insieme, responsabili della variazione di flusso dovuta al primo impulso.

Per alcune applicazioni (ad es. tempo di risposta dei computer) è utile lo studio [5], [6], [7], del « time switching », ossia del tempo necessario affinché l'induzione magnetica residua B_r, nei ferromagnetici cristallini, vari dal valore B_r in una direzione al valore $-B_r$ in direzione opposta mediante un incremento impulsivo ΔH.

A tal fine in seguito estenderemo le nostre ricerche applicando ai campioni incrementi ΔH più ampi in modo da esplorare zone sempre più vaste dei cicli di isteresi.

« *Gruppo Nazionale Struttura della Materia* » *del C.N.R. c/o Istituto di Fisica Sperimentale - Università di Napoli.*

BIBLIOGRAFIA

[1] CARRELLI A., LUPONIO C., PORRECA F., *Effetti di magnetizzazione rapida in fili ferromagnetici.* Rend. Acc. Sc. Fis. Matem., **4**, XXXIX, p. 3 (1972).

[2] CARRELLI A., LUPONIO C., PORRECA F., *Propagazione Radiale di un transiente magnetico in cilindri ferromagnetici.* Rend. Accad. Sc. Fis. Matem., **4**, XL, p. 44 (1973).

[3] BERNINI U., PORRECA F., *A magnetostriction measuring method.* J. Phys. D. Appl. Phys., **5**, 1951 (1972).

[4] OLSEN E., *Applied Magnetism.* Philips Technical Library (1966).

[5] MENYUK N., GOODENOUGH J. B., *A theory of flux reversal in polycrystalline ferromagnetics.* J. Appl. Phys., **26**, 8 (1955).

[6] HUNTER L. P., BAUER E. W., *High speed coincident-flux magnetic storage principles.* J. Appl. Phys., **27**, 1257 (1956).

[7] GYORGY E. M., *Rotational model of flux reversal in square loop ferrites.* J. Appl. Phys., **28**, 1011 (1957).

Problemi per la costruzione delle effemeridi dei satelliti artificiali

Calcolo di $\frac{d^n \varphi(r)}{d t^n}$

Nota di ELIO FICHERA
presentata dal socio ordinario M. T. NICOLINI

(Adunanza del 2 febbraio 1974)

RIASSUNTO. — Per la costruzione delle effemeridi dei satelliti artificiali, bisogna eseguire preliminarmente tutta una serie di misure dirette, in modo da poter stabilire l'orbita reale del satellite e la sua variazione col tempo. In questo lavoro trattiamo la questione iniziale che si presenta in tale tipo di determinazione, cioè il calcolo dell'orbita osculatirce ad un istante t. Per questa determinazione bisogna analizzare una funzione $\varphi(r)$ del raggio vettore r, a sua volta variabile in funzione del tempo t. Le misure laser hanno permesso di risolvere la questione nel modo più rigoroso e noi, dopo aver esposto i metodi noti dall'analisi matematica, diamo una relazione generale, da noi elaborata, per il calcolo esatto della derivata n-esima rispetto al tempo di questa funzione di funzione $\varphi(r)$.

SUMMARY. — For the construction of the ephemeris of artificial satellites, it is necessary to execute preliminarly all a series of direct measurements, so as to establish the true orbit of the satellite and its time variation. In this work we deal with the initial question which presents itself in such type of determinations, that is, the calculus of the osculating orbit relative to an instant t. For this determination, it is necessary to analyse a function of the vector radius r, in his turn, variable in function of the time t.

Laser measurements have allowed to resolve the question in the most rigorous manner and, after having explained the note methods from the mathematical analysis, we give a general relation. here elaborated, for the exact calculus of the n^{th} derivative with respect to the time of this function of function.

1. - PREMESSA.

I moderni mezzi di calcolo e i progressi nella tecnica strumentale di misura hanno profondamente modificato, rispetto al passato, tutti i metodi con cui condurre la ricerca sperimentale, quella

d'astrodinamica in particolare. Infatti nel passato quando si affrontava, per risolverlo numericamente, un problema di meccanica celeste, si eseguivano opportune semplificazioni sulla teoria analitica rigorosa in modo da poter stabilire delle formule più semplici, che, quantunque approssimate, permettevano però un calcolo pratico più rapido. Per stabilire queste semplificazioni si teneva conto dei limiti di precisione che potevano raggiungere gli strumenti adoperati per le misure dirette.

Oggi la situazione è ben diversa: gli strumenti di misura sono così perfezionati tecnicamente che permettono in alcune ricerche di raggiungere le precisioni più spinte, inoltre i computer permettono di eseguire i calcoli rapidamente utilizzando anche le formule più complesse. Pertanto se nel passato la teoria matematica esatta, relativa ad un fenomeno di meccanica celeste, veniva considerata come una pura astrazione, buona solo per chi si limitava a lavorare a tavolino, oggi essa fa parte integrante e insostituibile degli strumenti di lavoro che un ricercatore sperimentale deve possedere.

Ma le esigenze di programmazione sui computer richiedono che le formule teoriche, esattamente stabilite, vengano scritte sotto particolari forme, che, non alterando minimamente la loro precisione intrinseca, tengano però conto del modo d'introdurre i dati numerici iniziali, dedotti direttamente dalle osservazioni. Ora dato che su un computer è molto agevole programmare anche formule notevolmente complesse utilizzando il metodo della rotazione degli indici, oggi nella ricerca sperimentale si fa largo uso dei procedimenti analitici degli sviluppi in serie multiple, convergenti più o meno rapidamente in dati domini. Questi sviluppi vengono però trattati in modo concettualmente diverso da quello adoperato dai matematici del secolo scorso: in altre parole, nella moderna analisi anche l'antico concetto relativo all'*eleganza* di una relazione matematica ha subito notevoli modificazioni.

In quest'articolo vogliamo esporre la soluzione, da noi data, di una questione particolare riguardante il problema iniziale che si presenta nella determinazione di orbite osculatrici di satelliti artificiali.

Nello studio del moto di un corpo celeste P_2, che orbita attorno ad un altro P_1 di massa notevolmente maggiore, ha grande importanza la conoscenza delle orbite osculatrici di P_2 ai vari istanti t_i d'osservazione. Infatti, una volta che si è riusciti a determinare gli elementi di queste orbite kepleriane ai vari istanti t_i, si possono dedurre, mediante opportuni confronti, le varie perturbazioni, dovute in generale ad altri corpi presenti nello spazio (per i satelliti artificiali si devono aggiungere altre cause), a cui è sottoposto P_2

nel suo moto orbitale. Dunque in ultima analisi si riesce a determinare l'orbita reale di P_2 ad un istante qualsiasi t, cioè si è in grado di costruire un'Effemeride del corpo P_2, che verrà poi utilizzata dai nautici per condurre una moderna navigazione astronomica marittima o aerea.

Questo in sintesi è il metodo usato dagli astronomi per superare le insormontabili difficoltà analitiche, derivanti dal fatto che ancor oggi non si è in grado di trovare tutti gli integrali particolari del sistema di equazioni differenziali che reggono il moto di n corpi.

Ora nella determinazione di orbite osculatrici dalle osservazioni ha grande importanza la considerazione dei rapporti fra le superfici triangolari determinate dai raggi vettori (relativi ai vari istanti d'osservazione) e le corrispondenti corde dell'orbita, ed infine l'espressione di questi rapporti in funzione della velocità areolare.

Nelle espressioni analitiche rigorose che esprimono i suddetti rapporti figurano le derivate successive, rispetto al tempo t d'osservazione, di una funzione $\varphi(r)$, relativa al raggio vettore r che varia, a sua volta, in funzione del tempo t.

Nel passato proprio la determinazione pratica delle derivate successive di questa funzione $\varphi(r)$ rappresentava un ostacolo press'a poco insormontabile per la tecnica strumentale dell'epoca, così vennero elaborate teorie approssimate che permettevano di determinare valori iniziali grossolani, che venivano poi raffinati con procedimenti laboriosi di calcolo iterativo.

Le stesse difficoltà, anche se notevolmente attenuate con l'uso dei computer, sussistono ancora oggi nel caso di determinazioni di orbite di pianetini o di comete, ma nel caso dei satelliti artificiali la moderna attrezzatura strumentale, oltre a misurare con estrema precisione la loro posizione sulla sfera celeste (sia per via ottica, che fotografica, sia per misure Doppler), permette tramite la tecnica laser di determinare con altrettanta precisione i valori del raggio vettore r ai vari istanti d'osservazione. Ciò praticamente significa che dalle misure allo strumento si ottengono i valori numerici delle derivate successive, sino a quella di un dato ordine n, del raggio vettore r rispetto al tempo t.

Il problema quindi si sposta al modo di utilizzare questi dati, dedotti dall'osservazione, nel programma di calcolo al computer della derivata n-esima della funzione $\varphi(r)$ rispetto al tempo, cioè trovare la forma esplicita della funzione:

$$\frac{d^n \varphi(r)}{d t^n} = f\left(\frac{d r}{d t}, \frac{d^2 r}{d t^2}, \ldots, \frac{d^n r}{d t^n}\right).$$

Siccome la questione interessa anche l'analisi matematica, la tratteremo in generale, cioè ci proponiamo di scrivere la formula che permette di calcolare, noto il valore di n, direttamente la derivata n-esima di una funzione di funzione.

Inizieremo ad analizzare le formule conosciute dell'analisi matematica, esponendole in modo da vedere la loro possibile utilizzazione per un calcolo su computer. Infine daremo la relazione da noi elaborata che permette un'agevole programmazione già sperimentata.

Prima di chiudere questa premessa vogliamo accennare che la tecnica d'osservazione laser, e le elaborazioni teoriche-numeriche che ne derivano per il calcolo delle Effemeridi, hanno portato un tale perfezionamento dell'iniziale programma Transit di navigazione per satelliti artificiali, da permettere oggi il passaggio dalla fase sperimentale di ricerca a quella operativa di utilizzazione per il lavoro sociale. Così pure nel prossimo futuro, il riflettore laser posto sulla Luna permetterà di notevolmente migliorare le Effemeridi lunari, cioè perfezionare la teoria di Ernest W. Brown, basata sul problema ristretto dei tre corpi.

2. - Il metodo di Jacobi.

Questo metodo, che noi abbiamo denominato di Jacobi, è la generalizzazione di un particolare procedimento usato dal grande matematico per stabilire la relazione generale della derivata:

$$\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}\,(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}\,. \tag{1}$$

La generalizzazione di questo procedimento infatti permette di calcolare direttamente la derivata n-esima di una funzione di funzione, evitando così di eseguire tutte le derivate successive della funzione sino a quella d'ordine n incluso.

Il procedimento particolare usato da Jacobi per la determinazione della relazione generale della (1), si trova esposto nel primo degli otto volumi dei Gesammelte Werke, pubblicati postumi dalla Accademia di Berlino.

In ultima analisi il procedimento di Jacobi è molto vicino ad un altro procedimento già stabilito nel 1710 da Giovanni Bernoulli, e che oggi opportunamente modificato serve pure alla soluzione del nostro problema. Per motivi di logica analitica noi tratteremo però prima quello di Jacobi e poi quello di Bernoulli, facendo discendere quest'ultimo dal primo.

Naturalmente generalizzeremo il metodo di Jacobi, tenendo sempre conto della sua eventuale programmazione su computer.

Sia r una funzione di t e $\varphi(r)$ una funzione di funzione. Derivando successivamente $\varphi(r)$ rispetto a t, e indicando con $\varphi'(r)$, $\varphi''(r)$, $\ldots$, $\varphi^{(n)}(r)$ le derivate successive della data funzione, si avrà:

$$\frac{d\varphi(r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\varphi'(r)$$

$$\frac{d^2\varphi(r)}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\varphi'(r) + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\varphi''(r)$$

$$\frac{d^3\varphi(r)}{dt^3} = \frac{d^3r}{dt^3}\varphi'(r) + 3\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}\varphi''(r) + \left(\frac{dr}{dt}\right)^3\varphi'''(r)$$

. . . . . .

Cioè si può concludere che l'espressione della derivata n-esima della funzione $\varphi(r)$ è della forma:

$$\frac{d^n\varphi(r)}{dt^n} = A_1\varphi'(r) + A_2\varphi''(r) + \ldots + A_n\varphi^{(n)}(r)$$

dove $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dipendono dalla variabile r e dalle sue derivate rispetto a t, *ma non variano al variare della forma della funzione* $\varphi(r)$.

Il problema è quindi ricondotto alla determinazione delle espressioni dei coefficienti A_n, indipendenti dalla forma esplicita della funzione $\varphi(r)$.

Poniamo:

$$A_k = \frac{B_k}{k!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

e di conseguenza:

$$\frac{d^n\varphi(r)}{dt^n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{k!}\varphi^{(k)}(r)\,. \tag{2}$$

Ora, dato che i coefficienti $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sono indipendenti dalla forma di $\varphi(r)$, possiamo determinarli facendo su questa funzione alcune particolari comode ipotesi. Supporremo quindi successivamente

$$\varphi(r) = r\,, \quad \varphi(r) = r^2\,, \quad \ldots, \quad \varphi(r) = r^k\,, \quad \ldots, \quad \varphi(r) = r^n$$

e applicando l'equazione (2) a questi diversi casi, si avrà tra le incognite $B_1, B_2, \ldots, B_n$ il sistema composto dalle seguenti n equazioni:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^n r}{d t^n} = B_1 \\ \dfrac{d^n r^2}{d t^n} = 2 B_1 r + B_2 \\ \dfrac{d^n r^3}{d t^n} = 3 B_1 r^2 + 3 B_2 r + B_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^n r^n}{d t^n} = n B_1 r^{n-1} + \binom{n}{2} B_2 r^{n-2} + \binom{n}{3} B_3 r^{n-3} + \ldots + B_n\,. \end{cases}$$

Per calcolare uno qualunque di questi coefficienti, per esempio B_k, sommiamo fra loro le equazioni (3) sino a quella d'ordine k inclusa, dopo aver moltiplicato rispettivamente la prima, la seconda, la terza e così via per:

$$\binom{k}{1}\frac{1}{n}, \quad -\binom{k}{2}\frac{1}{n^2}, \quad \binom{k}{3}\frac{1}{n^3}, \quad -\binom{k}{4}\frac{1}{n^4}, \quad \ldots$$

Tutte le incognite $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ scompariranno, ad eccezione di B_k.

Infatti sia k' un numero qualsiasi inferiore a k, il coefficiente di $B_{k'}$ dopo la suddetta somma sarà:

$$(-1)^{k'+1}\frac{1}{r^{k'}}\left[\frac{k(k-1)\dots(k-k'+1)}{k'!}-\right.$$

$$-\frac{k(k-1)\dots(k-k')}{(k'+1)!}(k'+1)+\frac{k(k-1)\dots(k-k'-1)}{(k'+2)!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(k'+1)(k'+2)}{2!}-\dots\pm\frac{k(k-1)\dots 1}{k!}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{(k'+1)(k'+2)\dots k}{(k-k')!}\right]$$

cioè:

$$(-1)^{k'+1}\frac{1}{r^{k'}}\binom{k}{k'}\left[1-\binom{k-k'}{1}+\binom{k-k'}{2}-\dots\pm\binom{k-k'}{k-k'}\right]$$

(4)

ed infine:

$$\pm\frac{1}{r^{k'}}\binom{k}{k'}(1-1)^{k-k'}=0\,.$$

Per $k=k'$ la somma (4) invece darà:

$$(-1)^{k+1}\frac{1}{r^k}$$

quindi l'equazione che si ottiene sommando le equazioni (3), dopo averle moltiplicate rispettivamente per i fattori già detti, è dunque:

$$\frac{1}{r^k}B_k=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1}\binom{k}{i}\frac{d^n r^i}{d t^n}\,. \tag{5}$$

Così la formula (2) farà conoscere la derivata n-esima di una funzione $\varphi(r)$, in funzione delle derivate n-esime di tutte le potenze di r, il cui esponente non supera mai n.

Come si vede per il calcolo su computer bisogna introdurre le seguenti informazioni complementari:

$$\frac{d^n r}{d t^n}, \quad \frac{d^n r^2}{d t^n}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n r^k}{d t^n}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n r^n}{d t^n}$$

in modo da esplicitare la funzione:

$$B_k = f\left(n, \frac{d r}{d t}, \frac{d^2 r}{d t^2}, \quad \ldots, \frac{d^n r}{d t^n}\right)$$

che poi, tramite i dati d'osservazione, viene sostituita nella (2).

Fino a poco tempo fa, questo era il metodo utilizzato, anche se presentava inconvenienti al crescere del valore di n.

3. - Il metodo di Bernoulli.

Come già detto, il metodo che esporremo non ha nulla a che vedere nella forma col procedimento adottato originariamente da Giovanni Bernoulli, però l'idea di un artificio simile è stato introdotto per la prima volta proprio da questo matematico.

L'espressione trovata per rappresentare $B_k r^{-k}$ può trasformarsi nel seguente modo. Consideriamo lo sviluppo:

$$\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)^k = (-1)^k \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)^k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^i$$

supponendo α costante, deriviamo n volte i due membri dello sviluppo precedente, avremo

$$\frac{d^n}{d t^n}\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)^k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \frac{1}{\alpha^i} \binom{k}{i} \frac{d^n r^i}{d t^n}.$$

Se si pone $\alpha = r$ nel secondo membro di quest'ultimo sviluppo, si vede che esso coincide con lo sviluppo (5), cioè:

$$B_k = r^k \frac{d^n}{d t^n}\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)^k$$

dove nel secondo membro la lettera α, considerata come una costante quando si esegue la derivazione, sia sostituita *dopo aver eseguito la derivazione* dalla lettera r.

L'espressione della derivata n-esima rispetto a t della funzione $\varphi(r)$ è dunque:

$$\frac{d^n}{d\,t^n}\,\varphi(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^k}{k\,!}\,\varphi^{(k)}(r)\,\frac{d^n}{d\,t^n}\left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)^k$$

dove — si ripete — si deve porre $\alpha = r$ una volta che la derivazione è stata effettuata, mentre durante l'operazione di derivazione si deve porre $\alpha =$ costante.

Questo metodo è praticamente identico al precedente.

4. - Il metodo di Taylor.

Vogliamo infine citare una relazione ottenuta mediante lo sviluppo in serie di Taylor e molto usata dagli astronomi del secolo scorso nei calcoli pratici.

Questa formula si basa sul classico *Methodus incrementorum directa et inversa,* stabilito appunto da Brook Taylor nel 1710, oggi chiamato metodo delle differenze finite.

Noi daremo la formula generale, cioè valevole per la derivata n-esima di $\varphi(r)$ rispetto a t.

Se si incrementa la variabile indipendente t di h, il corrispondente incremento della funzione $\varphi(r)$ sarà dato da:

$$\Delta\,\varphi(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^i}{i\,!}\,\frac{d^i\,\varphi(r)}{d\,t^i}\,.$$

Se con k si indica il corrispondente incremento di r, allora l'incremento della funzione $\varphi(r)$ sarà ancora dato da:

$$\Delta\,\varphi(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k^i}{i\,!}\,\frac{d^i\,\varphi(r)}{d\,r^i}\,. \tag{6}$$

Applicando sempre lo stesso teorema, si avrà:

$$k = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^i}{i\,!}\,\frac{d^i\,r}{d\,t^i}\,. \tag{7}$$

Sostituendo la (7) nella (6) ed eguagliando i due valori trovati di $\Delta\varphi(r)$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n \varphi(r)}{d t^n} = \Sigma_p \frac{1}{p!} \frac{d^p \varphi(r)}{d r^p} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n r}{d t^n} \right)^p .$$

Se nel secondo membro si sviluppa la potenza p-esima secondo la nota formula per le potenze di un polinomio, si ha eguagliando i coefficienti di h^n nei due membri:

$$\frac{d^n \varphi(r)}{d t^n} = n! \; \Sigma_p \frac{d^p \varphi(r)}{d r^p} \left[\frac{1}{h_1!} \left(\frac{d r}{d t} \right)^{h_1} \cdot \frac{1}{2! \; h_2!} \left(\frac{d^2 r}{d t^2} \right)^{h_2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{3! \; h_3!} \left(\frac{d^3 r}{d t^3} \right)^{h_3} \cdots \frac{1}{m! \; h_m!} \left(\frac{d^n r}{d t^n} \right)^{h_m} \right]$$

dove $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_m$ devono prendere tutti i valori tali che:

$$h_1 + 2 h_2 + \ldots + m h_m = n \tag{8}$$

e p è uguale ad $h_1 + h_2 + \ldots + h_m$.

Si comprende come in questo sviluppo, quantunque figurino in esso i valori di

$$\frac{d^k r}{d t^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

bisogna fornire informazioni supplementari al programma base per tener conto della relazione (8).

5. - Metodo delle serie multiple.

La relazione da noi elaborata tiene evidentemente conto delle esigenze che richiede la nostra ricerca; cioè dato che le misure laser ci forniscono i valori delle:

$$\frac{d r}{d t}, \quad \frac{d^2 r}{d t^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^n r}{d t^n}$$

dobbiamo trovare una formula generale in cui figurano direttamente queste derivate, in modo che programmando questa formula non si

devono fornire altre informazioni complementari per l'esecuzione del calcolo.

Trovare una relazione di questo tipo è, d'altra parte, utile all'analisi matematica al di fuori delle esigenze del calcolo moderno.

Incominciamo col considerare la relazione generale che ci fornisce la derivata n-esima del prodotto di due funzioni $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{Q}(t)$:

$$\frac{d^n(\mathrm{P\,Q})}{d\,t^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k \mathrm{P}}{d\,t^k} \frac{d^{n-k}\mathrm{Q}}{d\,t^{n-k}} \tag{9}$$

e notiamo che se $\varphi(r)$ è una funzione di funzione, si ha:

$$\frac{d^n \varphi(r)}{d\,t^n} = \frac{d^{n-1}}{d\,t^{n-1}}\left[\frac{d\,r}{d\,t}\,\varphi'(r)\right] \tag{10}$$

cioè:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n \varphi(r)}{d\,t^n} &= \binom{n-1}{0} \frac{d^n r}{d\,t^n}\,\varphi'(r) + \binom{n-1}{1} \frac{d^{n-1} r}{d\,t^{n-1}}\left[\frac{d\,r}{d\,t}\,\varphi''(r)\right] + \\
&+ \binom{n-1}{2} \frac{d^{n-2} r}{d\,t^{n-2}}\left[\varphi''(r)\,\frac{d^2 r}{d\,t^2} + \varphi'''(r)\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2\right] + \\
&+ \binom{n-1}{3} \frac{d^{n-3} r}{d\,t^{n-3}}\left[\varphi''(r)\,\frac{d^3 r}{d\,t^3} + 3\,\varphi'''(r)\,\frac{d\,r}{d\,t}\,\frac{d^2 r}{d\,t^2} + \right. \\
&\left. + \varphi''''(r)\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^3\right] + \binom{n-1}{4} \frac{d^{n-4} r}{d\,t^{n-4}}\left[\varphi''(r)\,\frac{d^4 r}{d\,t^4} + \right. \\
&+ 4\,\varphi'''(r)\,\frac{d\,r}{d\,t}\,\frac{d^3 r}{d\,t^3} + 3\,\varphi'''(r)\left(\frac{d^2 r}{d\,t^2}\right)^2 + 6\,\varphi''''(r)\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 \frac{d^2 r}{d\,t^2} + \\
&\left. + \varphi''''''(r)\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^4\right] + \ldots + \binom{n-1}{n-1} \frac{d\,r}{d\,t}\left[\varphi''(r)\,\frac{d^{n-1} r}{d\,t^{n-1}} + \ldots + \right. \\
&\left. + \varphi^{(n)}(r)\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^{n-1}\right].
\end{aligned}$$

Vogliamo esprimere questa derivata sotto la forma:

$$\frac{d^n \varphi(r)}{d\,t^n} = \mathrm{A}_0\,\varphi'(r) + \mathrm{A}_1\,\varphi''(r) + \mathrm{A}_2\,\varphi'''(r) + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\,\varphi^{(n)}(r).$$

Se nello sviluppo precedente si mettono in evidenza successivamente $\varphi'(r)$, $\varphi''(r)$, $\varphi'''(r)$, ..., $\varphi^{(n)}(r)$, si vede, sfruttando successivamente le proprietà espresse dalle relazioni (9) e (10), che:

$$A_0 = \binom{n-1}{0} \frac{d^n r}{d t^n} = \frac{d^n r}{d t^n}$$

$$A_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-k} r}{d t^{n-k}} \cdot \frac{d^k r}{d t^k}$$

$$A_2 = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-k} r}{d t^{n-k}} \left[\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{d^{k-i} r}{d t^{k-i}} \cdot \frac{d^i r}{d t^i} \right]$$

$$A_3 = \sum_{k=3}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-k} r}{d t^{n-k}} \left[\sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{d^{k-i} r}{d t^{k-i}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} \frac{d^{i-j} r}{d t^{i-j}} \cdot \frac{d^j r}{d t^j} \right) \right]$$

. . . . . .

$$A_{n-1} = \binom{n-1}{n-1} \frac{d r}{d t} \left(\frac{d r}{d t} \right)^{n-1} = \left(\frac{d r}{d t} \right)^n .$$

Quindi in generale:

$$A_h = \sum_{k=h}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{d^{n-k} r}{d t^{n-k}} \sum_{i=h-1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{d^{k-i} r}{d t^{k-i}} \sum_{j=h-2}^{i-1} \binom{i-1}{j} \frac{d^{i-j} r}{d t^{i-j}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=h-3}^{j-1} \binom{j-1}{m} \frac{d^{j-m} r}{d t^{j-m}} \cdot \ldots \cdot \sum_{z=1}^{v-1} \binom{v-1}{z} \frac{d^{v-z} r}{d t^{v-z}} \cdot \frac{d^z r}{d t^z}$$

dove, come si vede, il numero di sommatorie dipende solo dall'indice h di A_h ($h = 1, 2, \ldots, n-1$).

Questa relazione, agevolmente programmabile, fornisce direttamente la forma esplicita dei coefficienti

$$A_h = f\left(\frac{d r}{d t}, \frac{d^2 r}{d t^2}, \ldots, \frac{d^n r}{d t^n} \right)$$

indipendenti dalla forma esplicita della funzione $\varphi(r)$. La derivata n-esima di questa funzione di funzione, sarà data dalla relazione, da noi scritta nel modo che segue perché preferiamo non inserire l'indice zero nel programma:

$$\frac{d^n \varphi(r)}{d t^n} = \frac{d^n r}{d t^n} \varphi'(r) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \varphi^{(k+1)}(r) .$$

Essendo nel nostro problema particolare d'astrodinamica:

$$\varphi^{(k)}(r) = (-1)^{k+1} \frac{(k+2)!}{2} r^{-(k+3)}$$

si avrà in generale:

$$\frac{d^n \varphi(r)}{d t^n} = -\frac{3}{r^4} \frac{d^n r}{d t^n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(k+3)!}{2} \frac{A_k}{r^{k+4}}$$

con r = raggio vettore del satellite all'istante t ed A_k dato dalle serie multiple suddette.

Sulla caratterizzazione degli operatori differenziali del 2° ordine di tipo ellittico

Nota di CARLO SBORDONE
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 2 febbraio 1974)

RIASSUNTO. — Si stabilisce una caratterizzazione astratta degli operatori ellittici della forma

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

a coefficienti a_{ij}, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, Ω aperto di R^n, mediante particolari forme bilineari continue su $H_o^1 \times H_o^1$.

SUMMARY. — It is checked an abstract characterization of elliptic operators of the form

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

with a_{ij}, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, Ω open set of R^n, by particular continuous bilinear forms on $H_o^1 \times H_o^1$.

In una nota di qualche anno fa [4], S. Spagnolo stabiliva una caratterizzazione astratta (tipo quella di Peetre [2]) degli operatori differenziali del 2° ordine autoaggiunti della forma

$$\text{(j)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

a coefficienti misurabili e limitati.

In una nota successiva [3] ho dato una caratterizzazione astratta di operatori della forma

$$\text{(jj)} \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

a coefficienti $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, $b_i \in L^{r}(\Omega)$ $(r > 2)$, $c \in L^{q}(\Omega)$ $(q > 1)$, Ω aperto di R^n, che generalizza la precedente.

In questa nota stabilisco innanzitutto due teoremi, distinti dai precedenti, di caratterizzazione degli operatori differenziali del 2° ordine: il primo relativo ad operatori del tipo

$$\text{(jjj)} \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

e il secondo ad operatori di tipo (jj), su un aperto di R^n.

Come nei lavori precedenti, si danno, in sostanza, delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma bilineare $\alpha : H_o^1 \times H_o^1 \longrightarrow R$ sia del tipo $\alpha(u, v) = \langle Au, v \rangle$, con A operatore della forma (jj). In questi nuovi teoremi però viene precisato che, sotto la condizione $a_{ij} = a_{ji}$, i coefficienti di A sono univocamente determinati. Inoltre si stabilisce una limitazione per le norme di tali coefficienti dipendente dalle costanti che figurano nelle ipotesi su α.

Quindi (Teorema 3) dimostro che la coercitività di una forma α soddisfacente alle ipotesi di uno dei teoremi su citati è condizione sufficiente per la uniforme ellitticità dell'operatore differenziale da essa definito; risultato che generalizza uno analogo di Spagnolo relativo al caso di forme simmetriche.

Infine (Teorema 4) ottengo una caratterizzazione della classe C degli operatori di tipo non variazionale della forma

$$\text{(jv)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad (a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty})$$

e della classe M degli operatori di tipo (jv), con coefficienti le cui derivate nel senso delle distribuzioni hanno certi esponenti di sommabilità, che sono stati considerati da C. Miranda nello studio del problema di Dirichlet (cfr. [1]).

1. - Sia Ω un aperto dello spazio euclideo R^n.

Si denota al solito con $C_o^\infty = C_o^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali su Ω dotate di derivate di ogni ordine continue e a supporto compatto contenuto in Ω.

Se $u \in C_o^\infty(\Omega)$, con $\overset{m}{u}$ si denota una funzione di classe C_o^∞ uguale ad 1 in un intorno del supporto di u.

$C_o^{\infty\prime} = C_o^{\infty\prime}(\Omega)$ è lo spazio delle distribuzioni reali su Ω.

$L^p = L^p(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni reali misurabili su Ω aventi potenza p-sima sommabile ($p \geqslant 1$).

$L^\infty = L^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni reali misurabili su Ω essenzialmente limitate.

$H_o^1 = H_o^1(\Omega)$ è la chiusura di C_o^∞ rispetto alla topologia definita dalla norma

$$\| u \|_{H_o^1} = \left(\| u \|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2} \right)^{1/2}$$

Se $u \in H_o^1$, si porrà inoltre

$$\| u_x \|^2_{L^2} = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2}$$

Infine con 2^* si denota il numero definito da $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, n essendo la dimensione dello spazio ambiente.

Tutti questi spazi si intenderanno dotati delle loro usuali strutture algebrico-topologiche.

2. - Una forma bilineare α agente su spazi di distribuzioni si dice *locale* se:

$$\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v) = \varnothing \Longrightarrow \alpha(u, v) = 0 .$$

Si dirà poi che α è D-*locale a sinistra* se è verificata la condizione:

$$(u, v \in C_o^\infty, u \text{ costante in un intorno di } \text{supp}(v)) \Longrightarrow \alpha(u, v) = 0 .$$

L'applicazione

$$\alpha : (u, v) \in H_o^1 \times H_o^1 \longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx +$$

(1)

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx \qquad (a_{ij} = a_{ji}\,,\ b_i \in L^\infty)$$

definisce una forma bilineare continua su $H_o^1 \times H_o^1$ che è D-locale a sinistra e tale che la sua parte antisimmetrica soddisfa alla limitazione

$$(2) \qquad |\alpha(u, v) - \alpha(v, u)| \leqslant M_1 (\| u \|_{H_o^1} \| v \|_{L^2} + \| u \|_{L^2} \| v \|_{H_o^1})$$

Cominciamo col dimostrare che la (1) è l'espressione più generale di una forma bilineare, D-locale a sinistra, continua su $H_o^1 \times H_o^1$ soddisfacente la (2); con il seguente

TEOREMA 1. *Sia* $\alpha : H_o^1 \times H_o^1 \longrightarrow R$ *bilineare tale che*:

(i) α *è* D-*locale a sinistra*

(ii) $$|\alpha(u, v) - \alpha(v, u)| \leqslant M_1 (\| u \|_{H_o^1} \| v \|_{L^2} + \| u \|_{L^2} \| v \|_{H_o^1})$$

(iii) $$|\alpha(u, v)| \leqslant M \| u \|_{H_o^1} \| v \|_{H_o^1}$$

Allora esistono, e sono univocamente determinate, delle funzioni $a_{ij} = a_{ji}$, b_i *di classe* L^∞ *tali che* $\| a_{ij} \|_{L^\infty} \leq 12\,M$, $\| b_i \|_{L^\infty} \leq 12\,M_1$ e

$$\alpha(u, v) = \sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx \qquad \forall\, u, v \in H_o^1 .$$

DIM. Ricalcando la dimostrazione del Teorema 1 di [3] si perviene a dimostrare che le ipotesi (i) e (iii) sono sufficienti a garantire l'esi-

stenza di una matrice simmetrica (a_{ij}) di funzioni di classe L^∞ con $\| a_{ij} \|_{L^\infty} \leqslant 12\ M$ e di n distribuzioni $A_i \in C_o^{\infty\prime}(\Omega)$ tali che:

$$\alpha(u, v) = \sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_i < A_i, \frac{\partial u}{\partial x_i} v > .$$

Resta da provare l'appartenenza delle A_i a L^∞ . A tale scopo, ponendo $\beta(u, v) = \alpha(u, v) - \alpha(v, u)$, fissato un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ e fissata $u \in C_o^\infty$, consideriamo le seguenti funzioni:

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} u(x) \operatorname{sen}^2(\rho x_i)$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} u(x) \cos^2(\rho x_i) + \frac{2}{\sqrt{\rho}} u(x) \operatorname{sen}(\rho x_i) \cos(\rho x_i)$$

$$w_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} u(x) \operatorname{sen}(\rho x_i) \cos(\rho x_i)$$

$$w_4(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} u(x) \operatorname{sen}(\rho x_i) \cos(\rho x_i) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\rho}} u(x) (\cos^2(\rho x_i) - \operatorname{sen}^2(\rho x_i))$$

$$w_5(x) = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} u(x) \cos^2(\rho x_i)$$

$$w_6(x) = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} u(x) \operatorname{sen}^2(\rho x_i) + \frac{2}{\sqrt{\rho}} u(x) \operatorname{sen}(\rho x_i) \cos(\rho x_i)$$

ove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ e $\rho = \dfrac{\| u \|_{H_o^1}}{\| u \|_{L^2}}$

Si riconosce facilmente che:

$$\beta(w_1, w_2) + 2\beta(w_3, w_4) + \beta(w_5, w_6) = 4 < A_i, u^2 >$$

$$\| w_1 \|_{H_0^1} \| w_2 \|_{L^2} + \| w_1 \|_{L^2} \| w_2 \|_{H_0^1} \leq 16 \| u \|^2_{L^2}$$

$$2(\| w_3 \|_{H_0^1} \| w_4 \|_{L^2} + \| w_3 \|_{L^2} \| w_4 \|_{H_0^1}) \leq 16 \| u \|^2_{L^2}$$

$$\| w_5 \|_{H_0^1} \| w_6 \|_{L^2} + \| w_5 \|_{L^2} \| w_6 \|_{H_0^1} \leq 16 \| u \|^2_{L^2}$$

da cui segue per la (ii)

$$| < A_i, u^2 > | \leq 12 M_1 \| u \|^2_{L^2} = 12 M_1 \| u^2 \|_{L^1};$$

formula dalla quale segue, utilizzando gli stessi ragionamenti fatti nella dimostrazione del Lemma 3 di [3], che $A_i \in L^\infty$ e $\| A_i \|_{L^\infty} \leq 12 M_1$.

Per concludere la dimostrazione del nostro teorema basterà dimostrare il seguente

LEMMA 1. *Siano* $A_{ij} = A_{ji}$, $A_{ij}' = A_{ji}'$, B_i, B_i', C, C' *distribuzioni sull'aperto* Ω *di* R^n *tali che*:

$$\gamma(u, v) = \gamma'(u, v) \qquad \forall\, u, v \in C_0^\infty(\Omega)$$

essendo:

$$\gamma(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} < A_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} > + \sum_{i=1}^{n} < B_i, \frac{\partial u}{\partial x_i} v > + < C, u v >$$

$$\gamma'(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} < A_{ij}', \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} > + \sum_{i=1}^{n} < B_i', \frac{\partial u}{\partial x_i} v > + < C', u v >$$

Allora:

$$A_{ij} = A_{ij}' \qquad B_i = B_i' \qquad C = C'$$

per ogni $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.

DIM. Fissata $w \in C_o^\infty(\Omega)$; $k, s \in \{1, \ldots, n\}$; posto

$$w_1(x) = w(x) \operatorname{sen}(x_k) \cos(x_s)$$

$$w_2(x) = -w(x) \cos(x_k) \cos(x_s)$$

$$w_3(x) = w(x) \operatorname{sen}(x_k) \cos(x_s)$$

$$w_4(x) = w(x) \cos(x_k) \operatorname{sen}(x_s)$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$; si ottiene, con semplici calcoli:

$$\gamma(w_1, w_2) + \gamma(w_2, w_1) + \gamma(w_3, w_4) + \gamma(w_4, w_3) = 2 \langle A_{ks}, w^2 \rangle$$

$$\gamma'(w_1, w_2) + \gamma'(w_2, w_1) + \gamma'(w_3, w_4) + \gamma'(w_4, w_3) = 2 \langle A'_{ks}, w^2 \rangle$$

ossia $A_{ks} = A'_{ks}$.

Ne segue che, posto

$$\delta(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \langle B_i, \frac{\partial u}{\partial x_i} v \rangle + \langle C, u v \rangle$$

$$\delta'(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \langle B_i', \frac{\partial u}{\partial x_i} v \rangle + \langle C', u v \rangle$$

si ha per ogni $u, v \in C_o^\infty(\Omega)$

$$\delta(u, v) = \delta'(u, v) .$$

Allora, fissata $w \in C_o^\infty(\Omega)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$; posto

$$w_1(x) = w(x) \operatorname{sen}^2 x_i$$

$$w_2(x) = -w(x) \cos^2 x_i + 2 w(x) \operatorname{sen} x_i \cos x_i$$

$$w_3(x) = w(x) \operatorname{sen} x_i \cos x_i$$

$$w_4(x) = w(x) \operatorname{sen} x_i \cos x_i + w(x)(\cos^2 x_i - \operatorname{sen}^2 x_i)$$

$$w_5(x) = -w(x) \cos^2 x_i$$

$$w_6(x) = w(x) \operatorname{sen}^2 x_i + 2 w(x) \operatorname{sen} x_i \cos x_i ,$$

si ha, con semplici calcoli:

$$\delta\ (w_1\,,\, w_2) + 2\,\delta\ (w_3\,,\, w_4) + \delta\ (w_5\,,\, w_6)\ =\ 2\ \langle\, \mathrm{B}_i\,,\, w^2\,\rangle$$

$$\delta'\,(w_1\,,\, w_2) + 2\,\delta'\,(w_3\,,\, w_4) + \delta'\,(w_5\,,\, w_6)\ =\ 2\ \langle\, \mathrm{B}'_i\,,\, w^2\,\rangle$$

da cui $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}_i'$ e perciò pure $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$.

OSSERVAZIONE

Il lemma precedente risulta falso (per $n > 1$) se si sopprime l'ipotesi di simmetria delle matrici (A_{ij}) e (A'_{ij}). Infatti ciò segue subito dal lemma 1 di [3].

Osserviamo anche che, modificando la dimostrazione del Teorema II di [3] in maniera analoga a come si è fatto ora per quella del Teorema I, si ottiene ancora il seguente

TEOREMA 2. *Sia* $\alpha : \mathrm{H}_o^1 \times \mathrm{H}_o^1 \longrightarrow \mathrm{R}$ *una forma bilineare tale che valgano le* (ii) *e* (iii) *del Teorema 1 e*:

(i′) α *è locale*

(iv) $|\,\alpha\,(\tilde{u}, u)\,| \leq \mathrm{M}_2\,\|\,u\,\|_{\mathrm{L}^1}$.

Allora esistono e sono univocamente determinate delle funzioni $a_{ij} = a_{ji}$, b_i , $c \in \mathrm{L}^\infty$ *tali che*

$$\alpha\,(u, v)\ =\ \sum_{ij}\ \int_\Omega a_{ij}\ \frac{\partial\, u}{\partial\, x_i}\ \frac{\partial\, v}{\partial\, x_j}\ d\,x\ +\ \sum_i\ \int_\Omega\ b_i\ \frac{\partial\, u}{\partial\, x_i}\ v\, d\,x\ +\ \int_\Omega c u v\ dx$$

$$\forall\, u, v \in \mathrm{H}_o^1\,.$$

3. - Ricordiamo, a questo punto, il seguente lemma per la cui semplice dimostrazione cfr. [5] p. 201.

LEMMA 2. *Sia* $f \in \mathrm{L}^p\,(p > 1)$ *ed* $\varepsilon > 0$, *allora si ha*:

$$f = f' + f''$$

ove $f' \in \mathrm{L}^\infty$ *e* $f'' \in \mathrm{L}^p$ *con* $\|\,f''\,\|_{\mathrm{L}^p} < \varepsilon$.

Passiamo infine a dimostrare il seguente

TEOREMA 3. *Sia*:

$$\alpha(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty}(\Omega)$, $b_i \in L^{n}(\Omega)$, $c \in L^{n/2}(\Omega)$, Ω *aperto limitato di* R^n.

Condizione sufficiente affinché

$$(3) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_i \geq \lambda_0 |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in R^n, \text{ per q.o. } x \in \Omega$$

è che esista $\overline{\lambda} \geq 0$ *tale che*:

$$(4) \qquad \lambda_0 \| u_x \|^2_{L^2} \leq \alpha(u, u) + \lambda \| u \|^2_{L^2} .$$

DIM. Si noti che, se i coefficienti della parte principale di un operatore del secondo ordine verificano la condizione di uniforme ellitticità (3), si dimostra (cfr. [5]) che la forma bilineare associata all'operatore ammette come costante di coercitività un qualunque numero reale minore di λ_0. Quanto alla sufficienza della condizione (4) si osservi che, grazie alla densità in L^{∞} delle funzioni a scalino, basta dimostrare il teorema nel caso particolare che le a_{ij} siano funzioni a scalino.

La tesi equivale a dire che q.o. in Ω la matrice $(a_{ij}(x))$ ha gli autovalori $\geq \lambda_0$.

Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme S di Ω di misura positiva tale che per ogni $x \in S$ la matrice $(a_{ij}(x))$ abbia un autovalore minore di λ_0.

Restringendo S si può fare in modo che le $a_{ij}(x)$ abbiano su S il valore costante $\overset{(0)}{a_{ij}}$. Siano allora $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di $(\overset{(0)}{a_{ij}})$ e supponiamo per assurdo che $\lambda_1 < \lambda_0$. Si può inoltre sempre supporre che S sia compatto.

Sia $\varepsilon > 0$, si denoti con S_ε un aperto contenente S tale che $\text{mis}\,(S_\varepsilon - S) \leq \varepsilon$. Allora $\forall\, u \in C_o^\infty\,(S_\varepsilon)$ si ha:

$$-\bar{\lambda}\,\|u\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} + \lambda_o \sum_j \int_S \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx \leq \sum_{i,j} \int_S a_{ij}^{(o)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx +$$

(5)

$$+ \varepsilon K \sup_{S_\varepsilon} \sum_j \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 + \sum_i \int_{S_\varepsilon} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,u\,dx + \int_{S_\varepsilon} c\,u^2\,dx\,.$$

Ora, fissato $\sigma > 0$, grazie al lemma precedente si ha:

$$b_i = b_i' + b_i'' \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$c = c' + c''$$

ove b_i', $c' \in L^\infty\,(\Omega)$ e di più

$$\|b_i''\|_{L^n(\Omega)}\,,\ \|c''\|_{L^{n/2}(\Omega)} < \sigma\,.$$

Allora, poiché

$$\sum_i \int_{S_\varepsilon} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,u\,dx \leq \sum_i \int_S b_i' \frac{\partial u}{\partial x_i}\,u\,dx +$$

$$+ \varepsilon K'(\sigma) \sup_{S_\varepsilon} \sum_j \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \cdot |u| + \sigma\,\|u_x\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}$$

$$\int_{S_\varepsilon} c\,u^2\,dx \leq \int_S c'\,u^2\,dx + \varepsilon K''(\sigma) \sup_{S_\varepsilon} |u|^2 + \sigma\,\|u\|^2_{L^{2^*}}\,,$$

dalla (5) segue subito

$$\sum_{i,j} \overset{(o)}{a_{ij}} \int_S \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \sum_i \int_S b_i' \frac{\partial u}{\partial x_i} u \, dx + \int_S c' u^2 \, dx \geq$$

$$\geq \lambda_o \sum_i \int_S \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx - \bar{\lambda} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon K_1(\sigma) \sup_{S_\varepsilon} \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 -$$

$$- \varepsilon K_1(\sigma) \sup_{S_\varepsilon} |u|^2 - \frac{\sigma}{2} (\| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} + 3 \| u \|^2_{L^{2^*}(\Omega)}) .$$

Operando a questo punto il cambiamento di coordinate $f : x \longrightarrow y = M x$, M essendo una matrice ortogonale che diagonalizza la matrice $(\overset{(o)}{a_{ij}})$ e ponendo $T = f(S)$, $T_\varepsilon = f(S_\varepsilon)$, si ricava, denotati con β_i e γ rispettivamente i coefficienti trasformati di b_i' e c':

$$\sum_i \lambda_j \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy + \sum_i \int_T \beta_i \frac{\partial u}{\partial y_i} u \, dy + \int_T \gamma u^2 \, dy \geq$$

$$(6) \quad \geq \lambda_o \sum_j \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy - \bar{\lambda} \| u \|^2_{L^2(f(\Omega))} - \varepsilon K_1(\sigma) \sup_{T_\varepsilon} \sum_j \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 -$$

$$- \varepsilon K_1(\sigma) \sup_{T_\varepsilon} |u|^2 - \frac{\sigma}{2} [\| u_y \|^2_{L^2(f(\Omega))} + 3 \| u \|^2_{L^{2^*}(f(\Omega))}]$$

per ogni $u \in C_o^\infty(T_\varepsilon)$.

Sia ora $w \in C_o^\infty$ tale che $|w| \leq 1$ e:

$$w = \begin{cases} 0 & \text{su } f(\Omega) - T_\varepsilon \\ 1 & \text{in un intorno di T;} \end{cases}$$

allora, applicando la (6) alle funzioni

$$u_k(y) = \frac{1}{k} w(y) \operatorname{sen}(k y_1)$$

$$v_k(y) = -\frac{1}{k} w(y) \cos(k y_1)$$

e osservato che

$$\sum_i \left(\left| \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right|^2 \right) = w^2 + \frac{1}{k^2} \sum_i \left| \frac{\partial w}{\partial y_i} \right|^2$$

$$\sum_i \int_T \beta_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_i} u_k + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} v_k \right) dy = 0$$

$$\| u_k \|^2_{L^2}, \ \| v_k \|^2_{L^2} \leq \frac{\text{mis}(\Omega)}{k^2}$$

si ha, sommando le disuguaglianze relative allo stesso valore di k:

$$\lambda_1 \text{ mis}(T) \geq \lambda_0 \text{ mis}(T) - \frac{\overline{\lambda}}{k^2} \text{ mis}(\Omega) - \varepsilon K_1(\sigma) \left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^2} \sum_i \sup_{f(\Omega)} \left| \frac{\partial w}{\partial y_i} \right|^2 \right) - \varepsilon \frac{K_1(\sigma)}{k^2} - \frac{\sigma}{2} \left(\int_{f(\Omega)} w^2 \, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^2} \int_{f(\Omega)} \sum_i \left| \frac{\partial w}{\partial y_i} \right|^2 dy \right) - 3\sigma \text{ mis}(\Omega) - \frac{1}{k^2} \sup_{f(\Omega)} |\gamma| \text{ mis}(T).$$

Passando al limite per $k \longrightarrow +\infty$ si ha

$$\lambda_1 \geq \lambda_0 - \varepsilon K(\sigma) - \frac{7}{2} \sigma \text{ mis}(\Omega).$$

Per l'arbitrarietà di ε e σ si perviene ad un assurdo.

4. - In questo paragrafo ci occupiamo della caratterizzazione astratta di operatori differenziali del 2° ordine di tipo non variazionale a coefficienti misurabili e limitati.

E cominciamo con la seguente

DEFINIZIONE. Una forma bilineare α su spazi di Sobolev si dice D^2-*locale a sinistra* se:

$$\left(\begin{array}{l} u, v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = c_i \text{ in un intorno di } \text{supp}(v) \end{array} \right) \Longrightarrow \quad \alpha(u, v) = 0.$$

Sussiste il seguente

TEOREMA 4. *Sia* $\alpha : H_o^2 \times L^2 \longrightarrow R$ [1] *una forma bilineare continua* D^2*-locale a sinistra. Allora esistono e sono univocamente determinate delle funzioni* $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty$ *tali che*:

$$\alpha(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} v \, dx \qquad \forall (u, v) \in H_o^2 \times L^2 .$$

DIM. Utilizzando ragionamenti fatti in [4], si ha che, nelle nostre ipotesi esiste una famiglia localmente finita $\{T_r\}$ di distribuzioni su Ω tali che, per ogni $u, v \in C_o^\infty(\Omega)$ sia

$$\alpha(u, v) = \sum_r \langle T_r , (D^r u) v \rangle .$$

Proviamo ora che la continuità di α, ossia la validità di una formula del tipo

$$| \alpha(u, v) | \leq M \| u \|_{H_o^2} \| v \|_{L^2}$$

implica che $T_r = 0$ per $| r | > 2$ [2].

Sia, a tale scopo, $w \in C_o^\infty$ e sia $\psi \in C_o^\infty$ tale che $\psi \equiv 1$ in un intorno del supp (w). Consideriamo, $\eta = (\eta_1 , \ldots , \eta_n) \in R^n$ $(\eta_j \geq 1)$, le funzioni

$$\begin{aligned} u_\eta(x) &= \psi(x) \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle \\ v_\eta(x) &= w(x) \cos \langle \eta, x \rangle \\ u_\eta'(x) &= -\psi(x) \cos \langle \eta, x \rangle \\ v_\eta'(x) &= -w(x) \operatorname{sen} \langle \eta, x \rangle . \end{aligned}$$

Si ha

$$\| u_\eta \|_{H_o^2} , \quad \| v_\eta \|_{H_o^2} , \quad \| u_\eta' \|_{H_o^2} , \quad \| v_\eta' \|_{H_o^2} \leq C | \eta |^2$$

$$\| u_\eta \|_{L^2} , \quad \| v_\eta \|_{L^2} , \quad \| u_\eta' \|_{L^2} , \quad \| v_\eta' \|_{L^2} \leq C$$

ove la costante C dipende solo da w e ψ. Allora seguendo i ragionamenti fatti in [4] si ha l'asserto.

[1] Con $H_o^2 = H_o^2(\Omega)$ denotiamo il completamento di C_o^∞ rispetto alla norma

$$\| u \|_{H_o^2} = \left(\| u \|_{L^2}^2 + \sum_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 + \sum_{ij} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} .$$

[2] Se $r = (r_1 , \ldots , r_n)$ è una n-pla di interi non negativi si pone: $| r | = \sum_{j=1}^n r_j$ e $D^r = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{r_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{r_n}$.

E dunque, potendo sempre supporre $T_{ij} = T_{ji}$ avrò

$$\alpha(u, v) = \sum_{i,j} \langle T_{ij}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} v \rangle + \sum_i \langle T_i, \frac{\partial u}{\partial x_i} v \rangle + \langle T, u v \rangle .$$

Introducendo ora, una volta fissati $w \in C_o^\infty$ e $k, s \in \{1, \ldots, n\}$, le seguenti funzioni:

$$w_1(x) = \frac{1}{\rho} w(x) \operatorname{sen}(\rho x_k) \operatorname{sen}(\rho x_s)$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{\rho} w(x) \cos(\rho x_k) \cos(\rho x_s)$$

$$w_3(x) = \frac{1}{\rho} w(x) \operatorname{sen}(\rho x_k) \cos(\rho x_s)$$

$$w_4(x) = \frac{1}{\rho} w(x) \operatorname{sen}(\rho x_s) \cos(\rho x_k)$$

con $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ e $\rho = \dfrac{\| w \|_{H_o^2}}{\| w \|_{L^2}}$ si ha:

$$\alpha(w_1, w_2) + \alpha(w_2, w_1) + \alpha(w_3, w_4) + \alpha(w_4, w_3) = -2 \langle T_{ks}, w^2 \rangle$$

$$\| w_i \|_{H^2} \| w_j \|_{L^2} \leq c \| w \|^2_{L^2} .$$

E quindi, con i soliti ragionamenti, $T_{ks} \in L^\infty$.

Utilizzando, a questo punto la D^2-località si ricava $T_i = T = 0$.

OSSERVAZIONE.

Sia C la classe delle forme bilineari soddisfacenti le ipotesi del Teorema 4, e sia E la classe delle forme bilineari soddisfacenti le ipotesi del Teorema 1 di [3] con $p = 2^*$.

Sia infine M la classe costituita dalle forme bilineari che generano operatori del tipo

$$\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty$, $\sum_i \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \in L^n$, che sono stati considerati da C. Miranda (cfr. [1]) nello studio del problema di Dirichlet.

Si può vedere facilmente che $C \cap E = M$.

E sia infatti $\alpha \in C \cap E$, allora per α sussistono le rappresentazioni:

$$a(u, v) = \sum_{ij} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \, v \, dx$$

$$\alpha(u, v) = \sum_{ij} \int_{\Omega} \alpha_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i} \int_{\Omega} \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \, v \, dx$$

con a_{ij}, $\alpha_{ij} \in L^{\infty}$, $\beta_i \in L^n$. Allora:

$$\sum_{ij} \left\langle a_{ij}, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \, v \right) - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle = - \sum_{ij} \int a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx$$

$$+ \sum_{j} \left\langle - \sum_{i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j} \, v \right\rangle = \alpha(u, v)$$

da cui, utilizzando il lemma 1, si ha:

$$\beta_j = - \sum_{i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \qquad a_{ij} = - \alpha_{ij}$$

e perciò l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Miranda C., *Equazioni lineari ellittiche di tipo non variazionale.* Sem. Mat. e Fis Milano, **33**, pp. 206-219 (1963).

[2] Peetre J., *Rectification à l'article: Une caractèrisation des operateurs differentiels* Math. Scand., **8**, fasc. 1, pp. 116-120 (1960).

[3] Sbordone C., *Su una caratterizzazione degli operatori differenziali del 2° ordine.* Rend. Acc. Naz. Lincei, **3**, LIV, pp. 365-372 (1973).

[4] Spagnolo S., *Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del 2° ordine a coefficienti misurabili e limitati.* Rend. Semin. Mat. Univ., Padova, **39**, pp. 56-64 (1967).

[5] Stampacchia G., *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15**, 1, pp. 189-258 (1965).

Sull'isochimia di alcuni silicoalluminati idrati di sodio sintetici

Nota di Rosario Aiello e Carmine Colella
presentata dal socio ordinario Riccardo Sersale

(Adunanza del 2 febbraio 1974)

Riassunto. — Vengono riportate le condizioni chimico-fisiche sotto le quali è possibile sintetizzare, per trattamento idrotermale di vetri sintetici o naturali in ambiente alcalino, tre zeoliti sodiche isochimiche di formula generale: $Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$, con quantità variabili di acqua di idratazione.

Due di tali zeoliti (Na–A e Na–V) non hanno equivalente in natura, mentre la terza (zeolite Na–I) costituisce un termine sintetico riferibile alla sodalite.

Mediante indagini roentgenografiche, microscopiche e chimiche viene messo in evidenza che le tre zeoliti presentano simmetria cubica, con notevole variabilità di habitus cristallino, e che due di esse, i termini V e I, hanno attitudine ad intrappolare idrossido di sodio.

Sulla scorta dei dati sperimentali viene infine discusso il ruolo fondamentale dell'alcalinità della soluzione di contatto sulla neoformazione preferenziale dell'uno o dell'altro termine.

Summary. — The physico-chemical conditions under which three sodic isochemical zeolites, having general formula: $Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$ with variable amounts of hydration water, can be synthesized by hydrothermal treatment of synthetic or natural glasses in alkaline environment, have been reported.

Two of these zeolites (Na–A and Na–V) have no natural counterpart, while the third one (zeolite Na–I) is a synthetic term related to sodalite.

By means of X-ray, microscope and chemical analyses it has been pointed out that the above mentioned isochemical zeolites show cubic simmetry, with large variability of crystalline habitus and that zeolites Na–V and Na–I are able to trap sodium hydroxide.

The basic role played by the alkalinity of the contact solution on the preferential neo-formation of the various zeolites, has been at last discussed on the ground of experimental results.

Introduzione

Tectosilicati a struttura diversa, che denunzino identica popolazione cationica ed identico rapporto Si/Al, possono ritenersi isochimici.

Limitandosi a considerare la famiglia delle zeoliti e, in particolare, termini omocationici [1], la possibilità di esistenza di specie isochimiche è legata semplicemente alla uguaglianza del predetto rapporto, stante il fatto che le molecole d'acqua ospiti non costituiscono parte integrante della struttura.

È da tener presente a tale proposito che, nell'ambito di singoli tipi zeolitici, si riscontra spesso un'ampia variabilità di tale parametro, la qual cosa rende del tutto casuale la coincidenza della composizione chimica di due termini strutturalmente diversi. Esistono però alcuni termini che tendono ad assumere composizione chimica costante.

Scopo della presente Nota è innanzitutto la determinazione delle condizioni di sintesi e lo studio delle caratteristiche strutturali e morfologiche di tre zeoliti isochimiche, di formula generale $Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot aq.$, ottenute per trattamento idrotermale di vetri sintetici o naturali in ambiente alcalino ed inoltre, l'approfondimento, sulla base dei dati sperimentali, del ruolo dell'alcalinità della soluzione di contatto ai fini della cristallizzazione, nell'ambito di più fasi isochimiche, di una determinata specie zeolitica.

Parte sperimentale

I termini presi in esame sono le zeoliti sintetiche Na-A(1) e Na-V(2) e la zeolite Na-I(3), che rappresenta l'equivalente idrato del feldspatoide naturale sodalite.

Le suddette tre fasi sono state sintetizzate per trattamento idrotermale a temperature inferiori a 100°C [2], sia a partire da vetri naturali (pomici riolitiche) (4, 2), sia a partire da vetri sintetici di composizione generale Na_2O, Al_2O_3, $nSiO_2$ con $1 \leq n \leq 6$ (5, 6).

Le fasi sono state identificate per via roentgenografica, utilizzando una Camera di Guinier-De Wolff. Le distante reticolari, calcolate a partire dalle tracce densitometriche degli spettri di polvere, sono state corrette impiegando come standard $Pb(NO_3)_2$, mentre i parametri di cella sono stati computati, con l'ausilio di apposito programma, mediante il calcolatore elettronico.

Lo studio della morfologia dei cristalli è stato eseguito mediante osservazioni in microscopia elettronica a scansione (microscopio Jeol,

[1] Si ritengono qui esclusi termini omocationici ottenuti attraverso procedimenti di scambio ionico.

[2] In questa Nota non vengono presi in considerazione equivalenti sintetici idrati di feldspatoidi naturali (quali cancrinite e noseanite), anch'essi a rapporto Si/Al = 1, in quanto tali termini, richiedendo temperature di sintesi molto elevate (7), non sono stati da noi mai ottenuti.

mod. JSM-2) di campioni preventivamente ombreggiati con una lega Au-Pd.

Le analisi chimiche dei campioni sono state eseguite, previo ambientamento degli stessi, per una settimana, su soluzione satura di $Ca(NO_3)_2$ (umidità relativa $\sim$ 54 %), determinando la SiO_2 gravimetricamente, l'alluminio complessometricamente con EDTA, il sodio mediante fotometria di fiamma e l'acqua tramite il rilevamento del diagramma perdita di peso/temperatura (termobilancia Stanton Massflow tipo MF-H5).

Risultati

Sintesi. La sperimentazione è stata condotta secondo due diverse direttrici: da un lato si è effettuato uno studio di ottimizzazione della sintesi, già in precedenza (2, 4, 5, 6) da noi conseguita, dei tre termini

Tabella I

Condizioni di sintesi di campioni delle zeoliti A, V ed I.

Zeolite	Na-A	Na-V	Na-I
Vetro di partenza	Sintetico di comp. Na_2O, Al_2O_3, SiO_2	Sintetico di comp. Na_2O, Al_2O_3, $2SiO_2$	Pomici riolitiche di Lipari (4)
Conc. sol. NaOH di contatto	1 *m*	10 *m*	5 *m*
Temperatura	80°C	50°C	80°C
Rapporto in peso vetro/acqua	1:20	1:10	1:50
Durata del trattamento	2 giorni	2 giorni	7 giorni

isochimici A, V ed I, allo scopo di ottenere campioni atti alla successiva caratterizzazione; dall'altro si è voluto indagare sull'influenza che l'alcalinità della soluzione di contatto, a parità delle altre condizioni di trattamento, esercita sulla crescita differenziata delle tre zeoliti.

La Tab. I riporta un esempio delle condizioni sotto le quali è stato possibile ottenere campioni puri delle tre fasi. La purezza è stata controllata via raggi X ed otticamente, accertandosi in quest'ultimo caso, dell'assenza, nei solidi a fine reazione, di frammenti di vetro non reagito.

Con riferimento al ruolo dell'alcalinità, la sperimentazione ha messo in luce la possibilità di sintetizzare i tre termini a partire da

uno stesso vetro sintetico e nelle stesse condizioni di trattamento, facendo variare unicamente la concentrazione di NaOH nella soluzione di contatto.

La Tab. II riporta, limitatamente al caso più indicativo ed indipendentemente da considerazioni di carattere quantitativo, i risultati di tale ricerca, mettendo in evidenza gli intervalli di concentrazione alcalina, entro i quali è possibile ottenere nelle seguenti condizioni di sintesi, ciascuno dei tre termini, oggetto della presente Nota:

— composizione del vetro sintetico: Na_2O, Al_2O_3, $2SiO_2$;
— temperatura: 50°C;
— rapporto in peso vetro/acqua: 1:10;
— durata del trattamento: 48 ore.

TABELLA II

Influenza della concentrazione alcalina sulla sintesi delle fasi A, V ed I.

Conc. alcalina (molalità)	Fasi neoformate	Conc. alcalina (molalità)	Fasi neoformate
< 1,6	—	7,0 ÷ 7,9	X + V
1,9 ÷ 2,8	A	8,3 ÷ 9,7	V*
3,1 ÷ 5,9	A + X	10,2 ÷ 12,9	V + I
6,2 ÷ 6,6	A + X + V	> 13,5	I

* Come già riportato in precedenza (6), la zeolite V tende spesso a cristallizzare in associazione con la I, per cui non sempre la sua sintesi, quale singola fase cristallina, è risultata riproducibile.

Come si può rilevare dalla tabella, accanto alle tre fasi isochimiche, ne compare una quarta, designata con X, corrispondente ad una zeolite di tipo faujasite (8). Tale zeolite può presentare una notevole variabilità del rapporto Si/Al, ma il campione cui si fa riferimento nella tabella deve presumibilmente avere composizione identica alle altre tre fasi (valore del rapporto: 1). Tale campione, infatti, cristallizzando in condizioni di alcalinità più pronunciate di quelle che determinano la crescita della A, non può avere rapporto Si/Al superiore ad essa (9), né tanto meno, in accordo con la regola di Loewenstein (10), inferiore.

L'esame della Tab. II consente infine di notare come la cristallizzazione delle varie fasi, al crescere dell'alcalinità, rispetti un ordine che, nel caso in esame, è: A, X, V ed I.

Caratterizzazione. La Fig. 1 riporta i diffrattogrammi di raggi X di polveri (Camera Guinier-De Wolff), relativi ai campioni delle zeoliti A, V ed I, ottenuti nelle condizioni di Tab. I.

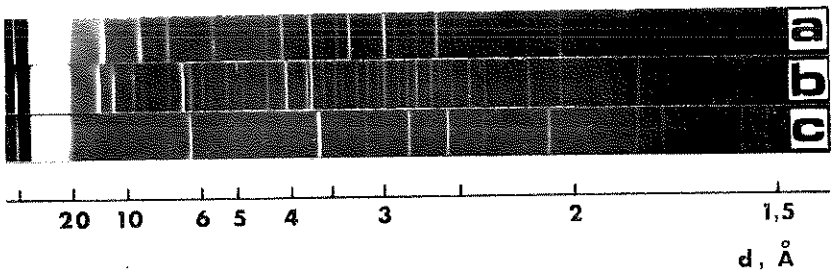


FIG. 1. - Diffrattogrammi di raggi X, rilevati tramite Camera Guinier-De Wolff, Rad. CuKα.
a) zeolite Na-A;
b) zeolite Na-V;
c) zeolite Na-I.

Le fasi sintetizzate sono state indicizzate secondo il sistema cubico ed i relativi parametri di cella compaiono in Tab. III.

TABELLA III

Dati cristallografici e morfologici relativi ai tre termini isochimici.

Zeolite	Na-A	Na-V	Na-I
Simmetria	Cubica	Cubica	Cubica
Gruppo spaziale	Pm3m (11)	F3d o F3dm (?) (6)	$P\bar{4}3n$ (12)
Costante di cella	12,29 Å *	36,99 Å	8,90 Å
Habitus cristallino osservato	Cubico Cubo-dodecaedrico	Cubo-ottaedrico Cubo-ottaedro-dodecaedrico Sferolitico	Sferolitico

* Il valore riportato si riferisce ad una pseudo-cella. Il valore reale, ricavato da dati strutturali, deve ritenersi doppio (13).

Le analisi chimiche dei tre campioni hanno confermato la composizione molecolare: $Na_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$. Le tre zeoliti hanno denunciato inoltre quantità d'acqua pari a 4,5 (A); 2,5 (V) e 1,5 (I) moli di H_2O per singola unità di formula ed inoltre, limitatamente alle sole specie V ed I, tenori di NaOH incluso pari, in entrambi i casi, a 0,6 moli, sempre per unità di formula.

La caratteristica di presentare inclusioni, talvolta estraibili a mezzo di lavaggi, è del resto comune alle tre zeoliti. È noto infatti che la zeolite A può intrappolare $NaAlO_2$ (14), la I una serie di sali

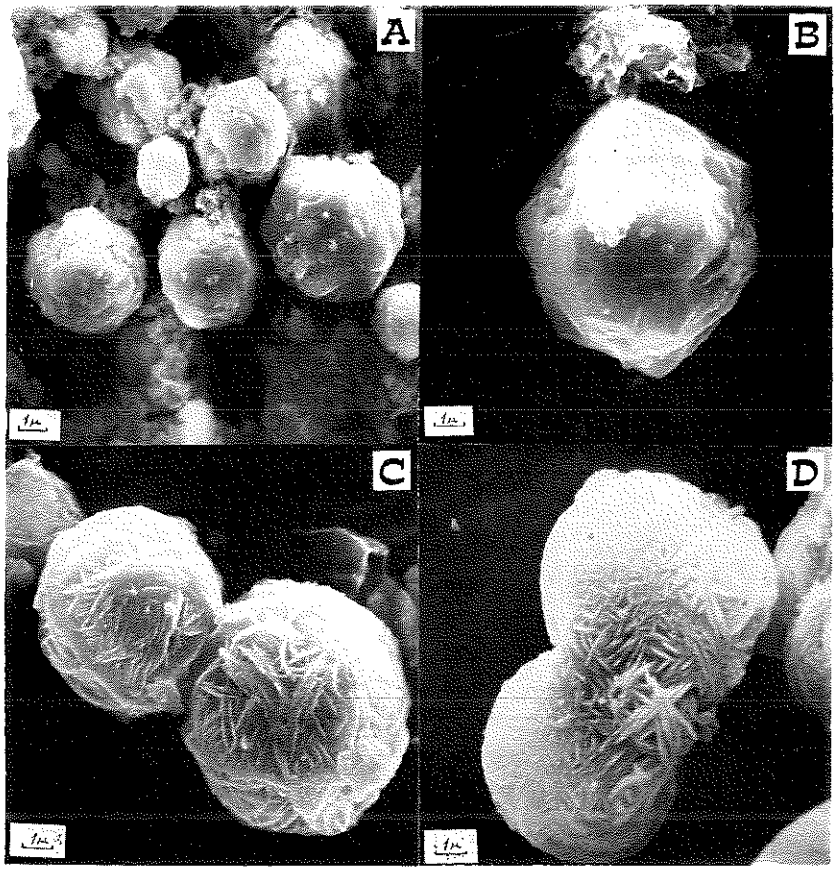


FIG. 2. - Micrografie elettroniche a scansione.
Zeoliti Na-I (A, B e C) ed Na-V (D).
Condizioni di sintesi (P = pomici, Vn = vetro sodico sintetico a rapporto $SiO_2/Al_2O_3 = n$; m = molalità di NaOH nella soluzione di contatto; T = temperatura; v/a = rapporto in peso vetro/acqua; t = durata del trattamento):
A-B : P; $m = 5$; T = 80° C; v/a = 1 : 50; t = 7 giorni.
C : V_2; $m = 16{,}7$; T = 50° C; v/a = 1 : 10; t = 48 ore.
D : V_2; $m = 9{,}5$; T = 50° C; v/a = 1 : 25; t = 48 ore.

sodici (15), mentre è stata di recente segnalata la sintesi della zeolite V in presenza di $NaClO_4$ (16).

Nell'ambito delle condizioni sperimentali adottate, le zeoliti A e V presentano habitus cristallino ben definito (cfr. Tab. III). Nelle Figg. 2 (micrografia D), 3 e 4 viene riportata una serie di micro-

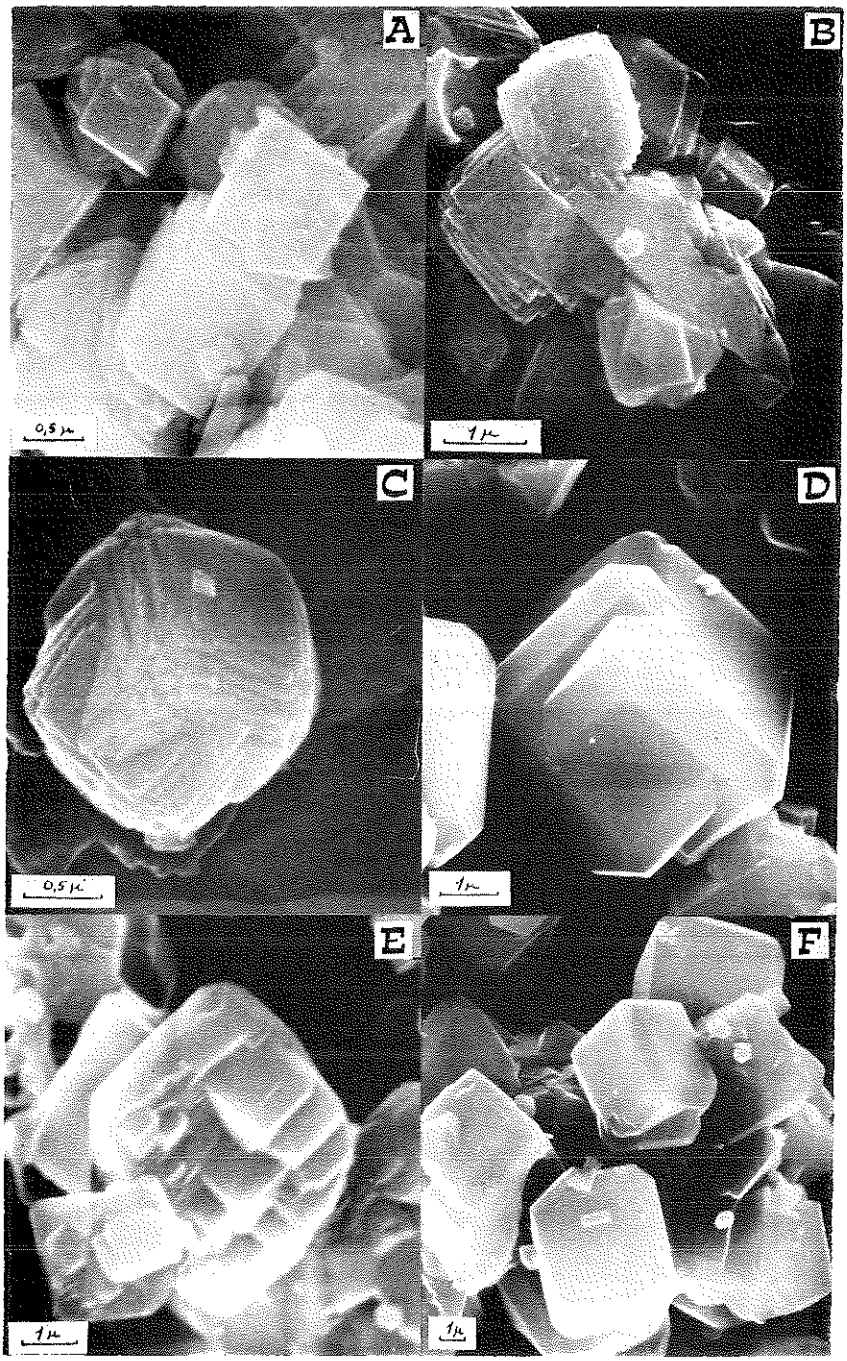


FIG. 3. - Micrografie elettroniche a scansione.
Zeolite Na-A.
Condizioni di sintesi (cfr. Fig. 2):
A : V_2; $m = 2,8$; T = 50° C; v/a = 1 : 10; t = 48 ore.
B-C : V_2; $m = 2,5$; T = 50° C; v/a = 1 : 10; t = 48 ore.
D-E-F : V_1; $m = 0,8$; T = 80° C; v/a = 1 : 20; t = 48 ore.

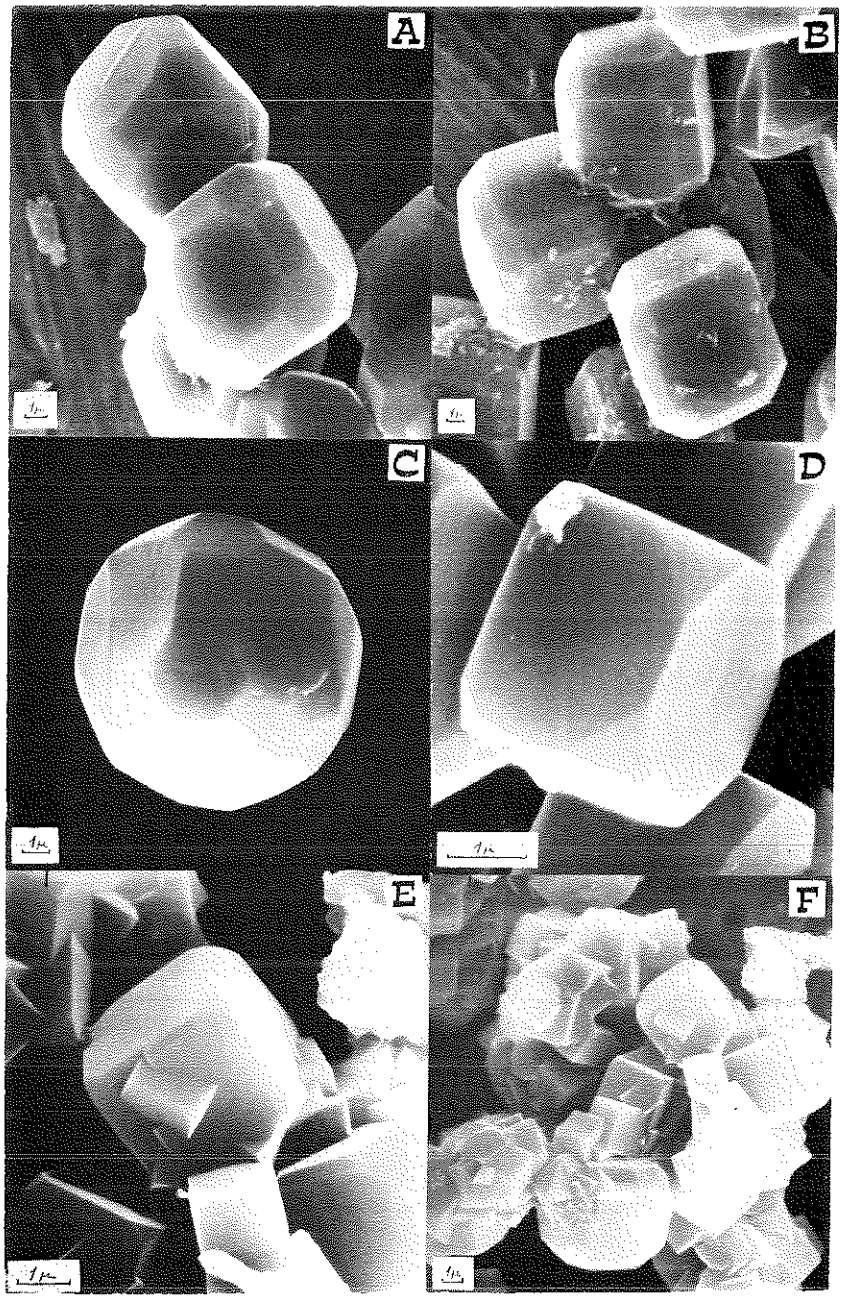


FIG. 4. - Micrografie elettroniche a scansione.
Zeolite Na-V.
Condizioni di sintesi (cfr. Fig. 2):
A-B-C-E-F : V_2; $m = 9,7$; T = 50° C; v/a = 1 : 10; t = 48 ore.
D : V_2; $m = 10,2$; T = 50° C; v/a = 1 : 10; t = 48 ore.

grafie elettroniche relative a campioni delle due zeoliti, ottenuti in diverse condizioni di sintesi.

Per quanto concerne i campioni della specie A, ottenuti a partire da vetri sodici sintetici a rapporto SiO_2/Al_2O_3 pari a 1 e a 2, la maggiore acidità del vetro di partenza sembra favorire la crescita di cristalli di habitus cubico (Fig. 3, A-C), mentre nel caso del vetro più basico l'habitus preferito è quello cubo-dodecaedrico (Fig. 3, D-F).

La zeolite V, ottenuta quale unica fase cristallina solo a partire da un vetro sintetico di composizione Na_2O, Al_2O_3, $2SiO_2$, mostra habitus cristallino cubo-ottaedro-dodecaedrico (Fig. 4, A-C) o cubo-ottaedrico (Fig. 4, D), rilevabili anche nello stesso campione (Fig. 4, E-F). Si presenta talvolta anche sotto forma di sferoliti (Fig. 2, D), senza che sia stato possibile riscontrare una relazione tra condizioni di sintesi e tipo di habitus.

La specie I (Fig. 2, A-C), ottenuta sia a partire da pomici riolitiche che da vetro sodico sintetico a rapporto $SiO_2/Al_2O_3 = 2$ non mostra mai habitus cristallino ben definito e si presenta spesso sotto forma di sferoliti.

Discussione

La possibilità di ottenere per sintesi termini zeolitici di identica composizione chimica, cui competono strutture notevolmente diverse, consente di trarre interessanti indicazioni sul meccanismo della loro formazione.

Se, infatti, come è risultato dalla sperimentazione espletata, è possibile sintetizzare i tre termini isochimici, a partire dallo stesso vetro e a parità di condizioni di trattamento, facendo variare unicamente l'alcalinità della soluzione di contatto, si può dedurre che la concentrazione di OH^- svolge un ruolo fondamentale non soltanto nel determinare il rapporto Si/Al della specie neoformata (9), ma anche, a parità di tale rapporto, nell'indirizzare il sistema verso la cristallizzazione di una ben determinata specie zeolitica.

Il meccanismo della zeolitizzazione, nell'ipotesi esemplificativa che tale processo si realizzi attraverso stati di equilibrio, può essere allora schematizzato nella maniera seguente.

Come già messo in luce in precedenza (17), lo stadio iniziale di dissoluzione del vetro comporta la precipitazione di un gelo allumosilicatico, la cui funzione, in accordo con un meccanismo di nucleazione in fase liquida (18, 19), sarebbe unicamente quella di « nutrire » la soluzione di contatto, a mano a mano che la cristallizzazione procede.

In tale soluzione l'alluminio è presente nell'unica forma mononucleare di $Al(OH)_4^-$ (20) mentre il silicio, sempre limitatamente a specie mononucleari, può trovarsi in forme dissociate, a diverso grado di ossidrilazione, in equilibrio fra di loro:

$$[SiO_n(OH)_{4-n}]^{n-} + OH^- \Longleftrightarrow [SiO_{n+1}(OH)_{3-n}]^{(n+1)-} + H_2O$$

con $0 \leq n \leq 3$.

Inoltre, data la proprietà degli ioni silicato a dar luogo a specie polinucleari (21, 22), che nel nostro sistema interesseranno anche lo ione alluminato, si dovranno prendere in considerazione una serie di equilibri di policondensazione con formazione di unità poliedrali (3, 23), i quali, nel caso esemplificativo della specie $Si(OH)_4$ ($n = 0$), potranno essere così descritti:

$$p\,Si(OH)_4 + q\,Al(OH)_4^- \Longleftrightarrow \left[Si_p\,Al_q\,O_{\frac{3}{2}(p+q)}(OH)_{(p+q)} \right]^{q-} + \frac{3}{2}(p+q)\,H_2O$$

Il primo dei due equilibri riportati chiarisce l'influenza che la concentrazione alcalina della soluzione di contatto esercita sul rapporto Si/Al ($= r$) della specie in via di formazione. Infatti, al crescere di tale concentrazione, diminuisce il grado medio di ossidrilazione delle specie silicato e quindi la capacità totale di queste ultime a policondensare, col risultato che il rapporto $Si(OH)_4/Al(OH)_4^-$, utile ai fini della cristallizzazione e correlato con r, tenderà ad assumere valori sempre più bassi, fino al valore limite di 1, previsto dalla regola di Loewenstein (10). Per comprendere poi la ragione per la quale, a parità di tale rapporto, è possibile la cristallizzazione di termini isochimici a struttura diversa, bisognerà ammettere che la concentrazione di OH^-, attraverso i due tipi di equilibri descritti, influisca sulla geometria, sulla concentrazione e sulla capacità di successiva condensazione delle unità poliedrali più su riportate, unità che, impacchettandosi successivamente secondo un ordine determinato, darebbero luogo alla crescita dei vari termini zeolitici.

Gli Autori sono vivamente grati al Sig. Antonio Canzanella per l'effettuazione delle micrografie elettroniche riportate nella presente Nota.

Istituto di Chimica Applicata della Facoltà d'Ingegneria dell'Università

Napoli, gennaio 1974

BIBLIOGRAFIA

[1] BRECK D. W., EVERSOLE W. G., MILTON R. M., REED T. B., THOMAS T. L., J. Am. Chem. Soc., **78**, p. 5963 (1956).
[2] COLELLA C., AIELLO R., Ann. Chim., **61**, p. 721 (1971).
[3] BARRER R. M., BAYNHAM J. W., BULTITUDE F. W., MEIER W. M., J. Chem. Soc., p. 195 (1959).
[4] AIELLO R., COLELLA C., Ann. Chim., **61**, p. 122 (1971).
[5] COLELLA C., AIELLO R., Chim. Ind., **52**, p. 151 (1970).
[6] AIELLO R., COLELLA C., Chim. Ind., **55**, p. 692 (1973).
[7] BARRER R. M., WHITE E. A. D., J. Chem. Soc., p. 1561 (1952).
[8] BRECK D. W., FLANIGEN E. M., *Molecular Sieves*, Soc. Chem. Ind., London, 1968, p. 47.
[9] ZHDANOV S. P., Adv. in Chem. Series, **101**, p. 20 (1971).
[10] LOEWENSTEIN W., Am. Min., **39**, p. 92 (1954).
[11] BROUSSARD L., SHOEMAKER D. P., J. Am. Chem. Soc., **82**, p. 1041 (1960).
[12] LOENS J., SCHULZ H., Acta Cryst., **23**, p. 434 (1967).
[13] MEIER W. M., OLSON D. H., Adv. in Chem. Series, **101**, p. 155 (1971).
[14] BARRER R. M., MEIER W. M., Trans. Faraday Soc., **54**, p. 1074 (1958).
[15] BARRER R. M., COLE J. F., STICHER H., J. Chem. Soc., p. 2475 (1968).
[16] MADIGAN G., comunicazione personale.
[17] AIELLO R., COLELLA C., Chim. Ind., **52**, p. 347 (1970).
[18] KERR G. T., J. Phys. Chem., **70**, p. 1047 (1966).
[19] KERR G. T., J. Phys. Chem., **72**, p. 1385 (1968).
[20] MOOLENAAR R. J., EVANS J. C., Mc KEEVER L. D., J. Phys. Chem., **74**, p. 3629 (1970).
[21] LAGERSTRÖM G., Acta Chem. Scand., **13**, p. 722 (1959).
[22] INGRI N., Acta Chem. Scand., **13**, p. 758 (1959).
[23] BRECK D. W., J. Chem. Educ., **41**, p. 678 (1964).

Some surjectivity results for non compact multivalued maps *

Nota di MARIO MARTELLI ** e ALFONSO VIGNOLI ***
presentata dal socio corrispondente GUIDO STAMPACCHIA

(Adunanza del 2 marzo 1974)

SUMMARY. — In the first part of this note we present some surjectivity results for non compact acyclic-valued maps defined in Banach spaces. In the second part we extend an intersection theorem, proved by A. Granas for compact single-valued maps, to the context of α-nonexpansive convex-valued maps.

RIASSUNTO. — In questo lavoro si prendono in considerazione trasformazioni multivoche a valori aciclici, definite in spazi di Banach. Vengono stabilite delle condizioni che assicurano la suriettività di tali trasformazioni. Il seguente teorema può essere considerato come il principale risultato del lavoro:

Sia $T : E \multimap E$ una funzione multivoca semicontinua superiormente e a valori aciclici, definita in uno spazio di Banach E. Se T è α-nonespansiva e quasi limitata con quasi-norma minore di 1 allora $(I-T)(E)$ è denso in E.

Si dimostra anche un teorema di intersezione, che generalizza alle funzioni multivoche dei risultati ottenuti precedentemente per le funzioni univoche.

INTRODUCTION.

The main purpose of this note is to present some surjectivity results for multivalued acyclic maps. Our task is to give generalizations of known results regarding singlevalued maps. We will show how these results can be extended to the context of multivalued maps modifying in a quite natural way the definitions and proofs of the singlevalued case. In some instances however one has to be a little careful and take into account the peculiarities of the multivalued

* Work performed under the auspices of the National Research Council of Italy (C.N.R.).

** Istituto Matematico U. Dini, viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze

*** Dipartimento di Matematica dell'Università della Calabria, C.P. 377, 87100 Cosenza.

theory. For example, the sum $f + g$ of two multivalued acyclic maps f and g need not be acyclic.

The first section consists of a listing of notations and definitions to be used throughout the paper. In particular we specify which homology is used and therefore it becomes clear what is meant by « acyclic ».

The second section deals with α-Lipschitz multivalued acyclic maps. The concept of quasibounded multivalued map is introduced and some surjectivity results are given. This way we extend the work done in [2], [7], [11], [15].

Finally, in the third section using the results of the previous one we give an intersection theorem for α-Lipschitz multivalued acyclic maps. As immediate consequences of this theorem we get the results obtained in [8], [12], [14].

1. - Notations and Definitions.

Upper semicontinuous multivalued maps.

Let X and Y be two topological spaces. An upper-semicontinuous multivalued (u.s.c.m.) map F from X into Y is a map which assigns to each point of X a nonempty and compact subset of Y and which verifies the following condition at every point $x \in X$: for any open subset 0 of Y containing $F(x)$ there exists an open neighborhood U of x such that $F(U) \subset 0$, where $F(U) = \bigcup_{z \in U} F(z)$. For a multivalued map F from a set A into a set B we will use the following notation $F : A \multimap B$.

An u.s.c.m. map $F : X \multimap Y$ is said to be acyclic valued if for any $x \in X$, $F(x)$ has the same homology of a point. We shall always use the Vietoris-Čech homology with coefficients in Z_2.

If Y is a topological vector space then F is said to be convex valued if $F(x)$ is convex for any $x \in X$.

If the following weaker condition is verified: for any $x \in X$ there exists a point $y \in F(x)$ such that the line segment joining y with every point of $F(x)$ is entirely contained in $F(x)$, then F is said to be star-shaped valued.

α-Lipschitz mapsings.

Let $A \subset X$ be any bounded set of a metric space X. Following Kuratowski [9] we define $\alpha(A)$ as the infimum of all $\varepsilon > 0$ such

that A can be covered by a finite number of subsets with diameter less than ε. Such a number is frequently called a *measure of non-compactness* since $\alpha(A)$ is equal zero if and only if A is precompact. For properties of this measure of noncompactness see Sadovskij [13].

A multivalued map $F : X \multimap X$ is said to be α-Lipschitz with constant $k \geqslant 0$ if $\alpha(F(A)) \leqslant k\,\alpha(A)$ for any bounded subset A of X. If $k < 1$ ($k = 1$) then F is called α-contractive (α-nonexpansive) (Darbo [1]). If for any bounded and nonprecompact subset $A \subset X$ we have $\alpha(F(A)) < \alpha(A)$ then F is called densifying.

Quasibounded multivalued maps.

Let X and Y be Banach spaces and $F : X \multimap Y$ be a multivalued map. We define

$$|F| = \sup_{\|x\| \to \infty} \frac{\varphi(F(x))}{\|x\|} = \overline{\lim_{\|x\| \to \infty}} \frac{\varphi(F(x))}{\|x\|};$$

where $\varphi(F(x)) = \sup\{\|y\| : y \in F(x)\}$.

If $|F| < \infty$ then F is said to be quasibounded and the number $|F|$ is called the quasinorm of F. This definition extends in a natural way the one given by Granas in [7] for the singlevalued case.

2. - Surjectivity results.

In this section we will give some surjectivity results concerning quasibounded multivalued maps.

The quasiboundedness concept was first introduced by Granas [7] for singlevalued maps. Granas pointed out that any continuous linear map L is quasibounded and $|L| = \|L\|$.

For our purpouses we need the following two lemmas.

Lemma 2.1. *Let* $T : E \multimap E$ *be a multivalued map satisfying the two conditions*

i) T *is quasibounded and* $|T| < 1$,

ii) T *sends bounded sets into bounded sets.*

Then there exists M such that $T(B(0, M)) \subset B(0, M)$.

PROOF. From i) it follows that there exists a number $c > 0$ satisfying $|T| < c < 1$ and $R > 0$ such that $\varphi(T(x)) \leqslant c \|x\|$, for any x with $\|x\| \geqslant R$.

On the other hand $T(B(0, R)) \subset B(0, L)$ for some $L > 0$ since T satisfies ii).

Therefore $\varphi(T(x)) \leqslant L + c\|x\|$, for any $x \in E$. Let M be such that $L + cM \leqslant M$, i.e. $M \geqslant \dfrac{L}{1-c}$. We have that $\varphi(T(x)) \leqslant M$ for any x with $\|x\| \leqslant M$. This implies that $T(x) \subset B(0, M)$ for any $x \in B(0, M)$. Q.E.D.

Remark. If T is α-Lipschitz then T satisfies condition ii) of Lemma 2.1.

LEMMA 2.2. *Let* $T : B(0, R) \multimap B(0, R)$ *be an u.s.c. α-nonexpansive multivalued map with acyclic values. Then*

$$\inf \{ d(x, T(x)) : x \in B(0, R) \} = 0 .$$

PROOF. Let $b_n = \dfrac{n}{n+1}$ and define $T_n(x) = b_n T(x)$. T_n is u.s.c. acyclic valued and maps $B(0, R)$ into itself. Furthermore

$$\alpha(T_n(A)) = b_n \alpha(T(A)) \leqslant b_n \alpha(A)$$

for any $A \subset B(0, R)$, i.e. T_n is an α-contraction with constant $b_n < 1$. By Theorem 2 of [10] there exists $x_n \in B(0, R)$ such that $x_n \in T_n(x_n)$ for any $n \geqslant 1$. This implies that $x_n \in b_n T(x_n)$ and so there exists $y_n \in T(x_n)$ such that $x_n = b_n y_n$. We have

$$d(x_n, T(x_n)) \leqslant \|y_n - x_n\| = \|y_n - b_n y_n\| =$$

$$= \|y_n\|(1 - b_n) \leqslant R(1 - b_n) .$$

Since $\lim_{n \to \infty} b_n = 1$ the result follows. Q.E.D.

Remark. Lemma 2.2 represents an extension of a result obtained in [4] for singlevalued maps.

We are now in a position of proving the main result of this section.

THEOREM 2.1. *Let* $T : E \multimap_o E$ *be an u.s.c. quasibounded* α*-nonexpansive multivalued map with acyclic values and let* $|T| < 1$.

Then $(I - T)(E)$ *is dense in* E.

PROOF. Let $y \in E$. For any $\varepsilon > 0$ we have to find $x_\varepsilon \in E$ and $y_\varepsilon \in B(y, \varepsilon)$ such that $y_\varepsilon \in x_\varepsilon - T(x_\varepsilon)$.

Let $G(x) = y + T(x)$, $x \in E$. G is clearly u.s.c. α-nonexpansive with acyclic values and $|G| < 1$. Therefore, by Lemma 2.1, there exists $M > 0$ such that $G(B(0, M)) \subset B(0, M)$. Applying Lemma 2.2 we get $\inf\{ d(x, G(x)) : x \in B(0, M) \} = 0$. This means that given $\varepsilon > 0$ there exists $x_\varepsilon \in B(0, M)$ such that

$$d(x_\varepsilon, G(x_\varepsilon)) < \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad d(x_\varepsilon, y + T(x_\varepsilon)) < \varepsilon .$$

This implies that we can find $\bar{x} \in T(x_\varepsilon)$ such that

$$\| (y + \bar{x}) - x_\varepsilon \| < \varepsilon .$$

Set $y_\varepsilon = x_\varepsilon - \bar{x}$. We get $\| y - y_\varepsilon \| < \varepsilon$ and $y_\varepsilon \in x_\varepsilon - T(x_\varepsilon)$.

Q.E.D.

Remark. If we strenghten the assumption on T by requiring T to be densifying then we get a stronger result, namely $(I - T)(E) = E$.

The following Corollaries are direct consequences of Theorem 2.1 and the remark above.

COROLLARY 2.1 (Granas [7]). *Let* $F : E \to E$ *be a quasibounded completely continuos singlevalued map with* $|F| < 1$. *Then* $(I - F)(E) = E$.

COROLLARY 2.2 (Dubrovskij [2]). *Let* $F : E \to E$ *be a completely continuous singlevalued map such that* $\| F(x) \| = o(\| x \|)$ *as* $\| x \| \to \infty$. *Then* $(I - rF)(E) = E$ *for any real number* r.

The above Corollaries have been extended in [15] to the context of densifying singlevalued maps.

As remarked in the introduction the sum of two acyclic valued maps need not be acyclic. But if we restrict our attention to star-shaped valued maps then the following proposition holds.

PROPOSITION 2.1. *The sum* $F + G$ *of two star-shaped valued maps* F *and* G *is star-shaped.*

PROOF. It is enough to prove that if A and B are star-shaped with respect to x_0 and y_0 then A + B is star shaped with respect to $x_0 + y_0$. Let $z \in A + B$. Then $z = x + y$ where $x \in A$ and $y \in B$. We have to prove that

$\lambda(x_0 + y_0) + (1 - \lambda) z \in A + B$ for any $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. But $\lambda(x_0 + y_0) +$ $+ (1 - \lambda) z = \lambda(x_0 + y_0) + (1 - \lambda)(x + y) = \lambda x_0 + (1 - \lambda) x +$ $+ \lambda y_0 + (1 - \lambda) y$. But $\lambda x_0 + (1 - \lambda) x \in A$, $\lambda y_0 + (1 - \lambda) y \in B$ and so the result follows. Q.E.D.

Proposition 2.1 will be useful in proving the following.

COROLLARY 2.3. *Let* $F : E \multimap_0 E$ *be a quasibounded u.s.c. star-shaped valued densifying map with* $|F| \leqslant k$, $0 \leqslant k < 1$, *and let* $G : E \multimap_0 E$ *be quasibounded u.s.c. star-shaped valued and completely continuous. Let* λ *be a real number such that* $|\lambda|\,|G| < 1 - k$. *Then* $(I - F - \lambda G)(E) = E$.

Remark. Corollary 2.3 represents an extension of a result due to Nashed and Wong [11]. In their paper they assume F and G to be singlevalued, $\| F(x) - F(y) \| \leqslant k \| x - y \|$, $0 \leqslant k < 1$, $x, y \in E$, $\lambda = 1$.

3. - AN INTERSECTION THEOREM.

We are going to give an intersection theorem first proved by Granas [8] for singlevalued quasibounded completely continuous maps and later extended in [14] to the context of singlevalued quasibounded densifying maps. For analogous results see also Petryshyn [12].

Let E be a Banach space and let $E = V \oplus W$ be a direct topological sum of two closed subspaces $V \subset E$ and $W \subset E$. By $P_v : E \longrightarrow V$, $P_w : E \longrightarrow W$ we denote the two canonical projection mappings of E onto V and W respectively.

The following result holds.

THEOREM 3.1. *Let* $f : V \multimap_0 E$ *and* $g : W \multimap_0 E$, *where* $V \oplus W = E$, E *being a Banach space, be two u.s.c. star-shaped valued maps. Assume that*

$$f(v) = v + F(v) \quad \textit{for any} \quad v \in V$$

$$g(w) = w + G(w) \quad \textit{for any} \quad w \in W,$$

where F *and* G *are* α*-Lipschitz with constants* L *and* L′ *respectively, which satisfy*

i) $L \| P_v \| + L' \| P_w \| \leqslant 1$.

Furthermore assume that F *and* G *are quasibounded and that the inequality*

ii) $| F | \, \| P_v \| + | G | \, \| P_w \| < 1$ *holds.*

Then $d(f(V), g(W)) = \inf \{ \| x - y \| : x \in f(V), \ y \in g(W) \} = 0$.

PROOF. Define $T(x) = F \circ P_v(x) - G \circ P_w(x)$. Clearly $F \circ P_v$ and $G \circ P_w$ are star-shaped valued maps.

Thus T is star-shaped valued (see Proposition 2.1) u.s.c. and α-nonexpansive. Let us show that T is quasibounded and $| T | < 1$. This is the case if $| F \circ P_v | \leqslant | F | \, \| P_v \|$ since

$$| T | = | F \circ P_v - G \circ P_w | \leqslant | F \circ P_v | + | G \circ P_w | .$$

The inequality $| F \circ P_v | \leqslant | F | \, \| P_v \|$ holds since

$$\| P_v \| \, | F | \geqslant \| P_v \| \lim_{\| v \| \to \infty} \frac{\varphi(F(v))}{\| v \|} = \| P_v \| \overline{\lim_{\| x \| \to \infty}} \frac{\varphi(F \circ P_v(x))}{\| P_v(x) \|} \cdot$$

$$\cdot \frac{\| x \|}{\| x \|} \geqslant \| P_v \| \overline{\lim_{\| x \| \to \infty}} \frac{\varphi(F \circ P_v(x))}{\| x \|} \cdot \frac{1}{\| P_v \|} = | F \circ P_v | .$$

Now applying Theorem 2.1 we have that $(I - T)(E)$ is dense in E. Therefore given $\varepsilon > 0$ there exists x_ε such that

$$d(x_\varepsilon, \ T(x_\varepsilon)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Let $v_\varepsilon \in V$ an $w_\varepsilon \in W$ be such that $v_\varepsilon - w_\varepsilon = x_\varepsilon$.
Then

$$d(x_\varepsilon, \ T(x_\varepsilon)) = d(v_\varepsilon - w_\varepsilon, \ F(v_\varepsilon) - G(w_\varepsilon)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

This implies that we can find $x_1 \in F(v_\varepsilon)$ and $x_2 \in G(w_\varepsilon)$ such that

$$\| v_\varepsilon - w_\varepsilon - (x_1 - x_2) \| = \| v_\varepsilon - x_1 - (w_\varepsilon - x_2) \| < \varepsilon$$

i.e.

$$w_\varepsilon - x_2 \in B(v_\varepsilon - x_1, \varepsilon) .$$

But

$$B(v_\varepsilon - x_1, \varepsilon) \subset B(f(v_\varepsilon), \varepsilon) \quad \text{and} \quad w_\varepsilon - x_2 \in g(w_\varepsilon).$$

This implies that

$$B(f(V), \varepsilon) \cap g(W) \neq \varnothing. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Remark. In the case when $L\|P_w\| + L'\|P_w\| < 1$ and T is densifying we get the following stronger result

$$f(V) \cap g(W) \neq \varnothing.$$

COROLLARY 3.1 (Granas [7]). *Let* $E = V \oplus W$ *and* $f : V \longrightarrow E$, $g : W \longrightarrow E$ *be singlevalued completely continuous maps which can be written in the form*

$$f(v) = v - F(v) \quad \textit{for any} \quad v \in V,$$

$$g(w) = w - G(w) \quad \textit{for any} \quad w \in W.$$

If the maps F and G are quasibounded and

$$|F|\,\|P_v\| + |G|\,\|P_w\| < 1$$

then

$$f(V) \cap g(W) \neq \varnothing.$$

COROLLARY 3.2. *Let* $E = V \oplus W$ *and* $f : \mathbb{R} \times V \longrightarrow E$, $g : \mathbb{R} \times W \longrightarrow E$ *be singlevalued continuous maps, which can be written in the form*

$$f(l, v) = v - l\,F(v) \quad \textit{for any} \quad v \in V,\ l \in \mathbb{R}$$

$$g(m, w) = w - m\,G(w) \quad \textit{for any} \quad w \in W,\ m \in \mathbb{R}.$$

Assume that the maps F *and* G *are α-Lipschitz with constants* L *and* L′ *respectively, satisfying*

$$L\|P_v\| + L'\|P_w\| < 1.$$

If $\|F(v)\| = o(\|v\|)$ *as* $\|v\| \longrightarrow \infty$

and $\|G(w)\| = o(\|w\|)$ *as* $\|w\| \longrightarrow \infty$

then $f(\{l\} \times V) \cap g(\{m\} \times W) \neq \emptyset$ *for any* l, m

such that $|l| + |m| < 1$.

Let us note that the result of COROLLARY 3.2 remains valid if we assume that F and G are quasibounded and l, m are such that

$$|l|\,|F|\,\|P_v\| + |m|\,|G|\,\|P_w\| < 1 .$$

Remark. It should be pointed out that there exists another measure of non compactness. Let $A \subset E$ be a bounded set. Goldenstein, Gochberg and Markus [6] defined $\chi(A)$, the *ball measure of non compactness*, as the infimum of all $\varepsilon > 0$ such that A admits a finite ε-net.

The results of this paper are valid also if we change our measure of non compactness into the one of Goldenstein, Gochberg and Markus since Theorem 1 of [10] remains valid in this context.

REFERENCES

[1] G. DARBO, *Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Padova, 24, pp. 84-92 (1955).

[2] V. M. DUBROVSKIJ, *On some nonlinear integral equations*, Uč. Zap. Mosk. Gos. Univ., bol. 30, pp. 49-60 (1939).

[3] C. FRANCHETTI and M. FURI, *Some characteristic properties of real Hilbert spaces*, Rev. Roum. Math. Pures et App, Tom XVII, pp. 1045-1048 (1972).

[4] M. FURI and A. VIGNOLI, *On α-nonexpansive mappings and fixed points*, Accad. Naz. Lincei, vol. 48, fasc. 2, pp. 195-198 (1970).

[5] G. GODINI, *Semicontinuity properties of setvalued metric projection*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. vol. 18, n. 2, pp. 243-249 (1973).

[6] L. S. GOLDENSTEIN, I. Z. GOCHBERG and A. S. MARKUS, *The study of some properties of linear bounded operators in relation with their q-norms*, Uč. Zap. Kišinëvsk Univ., vol. 29, pp. 29-36 (1957).

[7] A. GRANAS, *On a class of nonlinear mappings in Banach spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, vol. 5, n. 9, pp. 867-870 (1957).

[8] A. GRANAS, *On a geometrical theorem in Banach spaces*. Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, vol. 5, n. 9, pp. 873-877, 1957.

[9] C. KURATOWSKI, *Sur les espaces complètes*, Fund. Math. 15, pp. 301-309 (1930).

[10] M. MARTELLI, *Some results concerning multivalued mappings defined in Banach spaces*, Rend. Accad. Naz. Lincei LIV, fasc. 6, (1973), pp. 865-871.

[11] M. Z. NASHED and J. S. W. WONG, *Some variants of a fixed point theorem of Kranosel'skij and applications to nonlinear integral equations*, J. Math. Mech., vol. 18, pp. 767-777, 1969.

[12] W. A. PETRYSHYN, *Remarks on condensing and k-set-contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 39, pp. 717-741, (1972).

[13] B. N. SADOVSKIJ, *Limit compact and condensing mappings*, Uspechi Mat. Nauk, vol. 27, 1 (163), pp. 81-145 (1972).

[14] A. VIGNOLI, *An intersection theorem in Banach spaces*, Accad. Naz. Lincei, vol. 49, n. 3-4, pp. 180-183 (1970).

[15] A. VIGNOLI, *On quasibounded mappings and nonlinear functional equations*, Accad Naz. Lincei, vol. 50, n. 2, pp. 114-117 (1971).

Alcune questioni di risolubilità in anelli associativi

Nota di SALVATORE RAO *
Presentata dal socio ordinario MARIO CURZIO

(Adunanza del 6 aprile 1974)

SUMMARY. — We give a new definition of « solvable » associative ring (possibly with identity). Some theorems like in group theory are proved; a class containing artinian but not noetherian rings is considered; a characterization of solvable artinian rings is proposed. Finally, we show some applications to torsion free rings.

RIASSUNTO. — Si propone una definizione di anello associativo « risolubile ». Si ottengono teoremi analoghi a quelli della teoria dei gruppi, si esamina una classe di anelli includente gli artiniani ma non i noetheriani, caratterizzando infine gli anelli artiniani risolubili.

La teoria di HIGGINS dei gruppi con multioperatori ([9]; si veda anche l'ampia riesposizione datane dal KUROSH in [12], p. 90 e segg., o, per un rapido sunto, [15]) permette, come è noto, di riunire in un'unica trattazione diverse strutture algebriche, dando ragione, tra l'altro, di molte delle numerose analogie esistenti fra la teoria dei gruppi e la teoria degli anelli. Un ruolo fondamentale in tale teoria è assolto dalle cosiddette espressioni « commutatore » e « ideale », che, consentendo una generalizzazione delle classiche nozioni di *commutatore* e di *sottogruppo normale* della teoria dei gruppi, conducono all'estensione a queste strutture più generali — gli Ω-gruppi — di concetti quali *abeliano, risolubile, nilpotente, centro* e così via.

Tuttavia, l'applicazione di queste nozioni agli anelli (associativi) non sembra troppo fruttuosa: la nozione di *derivato* di un anello si riduce a quella di *quadrato* dell'anello; la nozione di anello *abeliano* equivale a quella di *zero-anello;* quelle di anello *risolubile* e di anello *nilpotente* (tra loro equivalenti per gli anelli associativi: [12], p. 123) coincidono con la nozione classica di anello nilpotente (se Λ è l'anello, esiste un intero n tale che $\Lambda^n = 0$) e quindi sono inuti-

* L'autore usufruisce di una borsa di studio del C.N.R.

lizzabili per gli anelli unitari. Mentre ben altro ruolo svolgono gli analoghi concetti nella teoria dei gruppi.

Non pare, quindi, inutile tentare di impostare una teoria della risolubilità per gli anelli associativi (eventualmente unitari), indipendente da quella che si deduce dalla teoria degli Ω-gruppi e basata su una particolare forma di « commutatore ».

Nei primi due paragrafi, introdotte le nozioni di « modulo (o anello) risolubile » e di « modulo (o anello) speciale », si mostra la loro sostanziale analogia con le nozioni, rispettivamente, di « gruppo risolubile » e « gruppo nilpotente », dando alcune proposizioni analoghe a quelle classiche della teoria dei gruppi; e si prova che, per i moduli (o gli anelli), esse sono equivalenti.

Nel terzo paragrafo, dopo aver dimostrato l'analogo, per gli anelli, del teorema di WIELANDT sui gruppi nilpotenti, si introduce una classe di anelli, gli « anelli di Wielandt », che contiene gli anelli artiniani, ma non quelli noetheriani, e si dà una caratterizzazione degli anelli artiniani speciali.

Nell'ultimo paragrafo, infine, studiando gli anelli senza torsione e di rango finito, si dimostra che tutti quelli il cui rango è minore di quattro sono speciali.

1. - MODULI RISOLUBILI.

Sia M un modulo sinistro (non necessariamente unitario) su un anello Λ.

Chiameremo *commutatore* della terna $(\alpha, \beta, x) \in \Lambda \times \Lambda \times M$ l'elemento di M:

$$[\alpha, \beta, x] := (\beta\alpha - \alpha\beta)\, x\,.$$

Il sottomodulo di M generato dai commutatori di tutte le terne $(\alpha, \beta, x) \in \Lambda \times \Lambda \times M$ verrà detto *derivato* (o *derivato primo*) di M e denotato con $K(M)$ (o $K_1(M)$). Ponendo, poi:

$$K_0(M) = M \qquad \text{e} \qquad K_n(M) = K(K_{n-1}(M)),\ n \in \mathbb{N}\ ^{1},$$

si definirà induttivamente il *derivato n-esimo* di M.

Il Λ-modulo M possiede così la successione discendente di sottomoduli:

$$M = K_0(M) \supseteq K_1(M) \supseteq \ldots \supseteq K_n(M) \supseteq \ldots,$$

che chiameremo *serie derivata* di M.

[1] Con $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$ si denoteranno, rispettivamente, l'insieme degli interi positivi e quello degli interi non negativi.

Se esiste un $m \in \mathbb{N}_0$ tale che sia

(i) $$K_m(M) = 0 ,$$

il Λ-modulo M si dirà *risolubile* e il minimo valore di m per cui vale la (i) sarà il *grado* di M.

Di facile verifica sono le proposizioni seguenti:

1.1. - *Il Λ-modulo sinistro* M *è bilatero se, e solo se, è risolubile di grado uno.*

1.2. - *Sia* H *un sottomodulo del Λ-modulo sinistro* M. M/H *è bilatero se, e solo se,* $H \supseteq K(M)$.

1.3. - *I fattoriali della serie derivata del Λ-modulo sinistro* M *sono bilateri.*

1.4. - *Sia* H *un sottomodulo del Λ-modulo sinistro* M. *Si ha:* $K(M/H) = (K(M) + H)/H$.

1.5. - *Per ogni Λ-modulo sinistro* M, $M/K_n(M)$ *è risolubile di grado non maggiore di* n.

1.6. - *Se* M *è un Λ-modulo sinistro risolubile di grado* m, *ogni sottomodulo di* M *ed ogni immagine omomorfa di* M *è risolubile di grado non maggiore di* m.

Ne segue:

TEOR. 1.1. - *Per un Λ-modulo sinistro* M, *sono equivalenti le proposizioni:*

(a) M *è risolubile.*

(b) *Esiste un sottomodulo risolubile* H *di* M *tale che* M/H *è risolubile.*

(c) *Esiste una catena di sottomoduli di* M *a fattoriali bilateri.*

(DIM. (a)$\Rightarrow$ (b). Ovvia per la 1.6.
(b)$\Rightarrow$ (c). Sia H un sottomodulo di M risolubile di grado r e tale che M/H sia risolubile di grado s. I primi $r + 1$ termini della serie derivata di H costituiscono una catena di lunghezza r, $H = K_0(H) \supseteq \supseteq K_1(H) \supseteq \ldots \supseteq K_r(H) = 0$, che, per la 1.3, è a fattoriali bilaterali; similmente, è a fattoriali bilateri la catena:

$$M/H = K_0(M/H) \supseteq K_1(M/H) \supseteq \ldots \supseteq K_s(M/H) = H/H .$$

Indicando con M_i $(i=0, 1, \ldots, s)$ l'immagine inversa di $K_i(M/H)$ nell'omomorfismo canonico di M su M/H, la catena di sottomoduli di M:

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_s = H \supseteq K_1(H) \supseteq \ldots \supseteq K_r(H) = 0$$

è a fattoriali bilateri.

(c) $\Longrightarrow$ (a). Sia $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_l = 0$ una catena di sottomoduli di M a fattoriali bilateri. Poiché M/M_1 è bilatero, per la 1.2, $M_1 \supseteq K_1(M)$. Analogamente, si ha $M_2 \supseteq K_1(M_1)$ e quindi $M_2 \supseteq K_2(M)$. Così procedendo, si trova: $0 = M_l \supseteq K_l(M)$ ed M è risolubile di grado $m \leq l$).

Si noti che, se un Λ-modulo sinistro M è risolubile di grado m, ogni sua catena a fattoriali bilateri ha lunghezza non minore di m.

2. - Moduli speciali.

M sia ancora un Λ-modulo sinistro. Un $x \in M$ si dirà *s-centrale* se, qualunque siano $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, risulta: $[\alpha, \beta, \gamma x] = 0$.

L'insieme $Z(M)$ degli elementi *s-centrali* di M si chiamerà *s-centro* (o *primo s-centro*) di M.

È immediato che:

2.1. - $Z(M)$ *è un sottomodulo del* Λ*-modulo sinistro* M.

2.2. - *Se* M *è un* Λ*-modulo sinistro unitario,* $Z(M)$ *è un sottomodulo bilatero.*

Posto $Z_0(M) = 0$ e $Z_1(M) = Z(M)$, il sottomodulo $Z_n(M)$, definito induttivamente con la posizione:

$$Z_n(M)/Z_{n-1}(M) = Z(M/Z_{n-1}(M)), \quad n \in \mathbb{N},$$

si chiamerà *n-esimo s-centro* di M.

Ha senso in tal modo considerare la successione ascendente di sottomoduli di M:

$$0 = Z_0(M) \subseteq Z_1(M) \subseteq \ldots \subseteq Z_n(M) \subseteq \ldots,$$

che chiameremo *serie s-centrale ascendente* di M e che, se M è unitario, è a fattoriali bilateri.

Se esiste un $m \in \mathbb{N}_0$ per il quale si abbia:

(ii) $$Z_m(M) = M,$$

il Λ-modulo sinistro M si dirà *speciale* (o *nilpotente* [2]) e il minimo valore di m per cui vale la (ii) sarà la *classe* di M.

Ci si propone ora di mostrare l'equivalenza, per i moduli, delle nozioni di risolubilità e nilpotenza.

A questo scopo, conviene innanzi tutto riferire ad un anello Λ (associativo, ma non necessariamente unitario) le nozioni finora introdotte per un modulo. Ciò può farsi in modo naturale considerando il Λ-modulo sinistro Λ_s canonicamente associato a Λ e trasferendo all'anello base le definizioni date per Λ_s.

Così, un $x \in \Lambda$ si dirà *s-centrale*, se è tale come elemento di Λ_s; $Z(\Lambda) := Z(\Lambda_s)$ si dirà l'*s-centro* di Λ ed è chiaro che $Z(\Lambda)$ è un ideale bilatero di Λ. Analogamente, il *derivato* $K(\Lambda)$ dell'anello è $K(\Lambda_s)$ riguardato come ideale di Λ ed anche $K(\Lambda)$ è un ideale bilatero di Λ [3]. Si dirà, infine, che Λ è *risolubile di grado m* (*speciale di classe m*), se tale è Λ_s.

Si ricorda ancora che, se A e H sono parti non vuote rispettivamente di un anello Λ e di un Λ-modulo sinistro M, si denota con AH il sottomodulo di M generato da tutti i prodotti αx, con $\alpha \in A$ e $x \in H$.

Ciò premesso:

2.3. - *Per un Λ-modulo sinistro* M, *si ha, qualunque sia* $n \in \mathbb{N}$:

(a) $K(\Lambda)^n Z_n(M) = 0$

(b) $K_{n+1}(M) \subseteq K(\Lambda) K_{n-1}(M)$

(c) $K_{2n}(M) \subseteq K(\Lambda)^n M$

(d) $K_{2n+1}(M) \subseteq K(\Lambda)^n K(M)$.

[2] Per mantenere una più stretta analogia con la teoria dei gruppi, sarebbe senz'altro preferibile il termine « nilpotente », generalmente adottato per indicare un gruppo la cui serie centrale ascendente termini con il gruppo stesso (si veda, p. es., [18] p. 141 e [17] p. 139). D'altra parte, tale termine potrebbe dar luogo ad equivoci nel caso di algebre o anelli non unitari. Per questo motivo si preferisce riprendere il termine « speciale », talvolta adoperato in teoria dei gruppi in luogo di « nilpotente » (p. es.: [14], p. 69; [11], p. 216; o il più recente [16], p. 111).

[3] Quali sottomoduli di Λ_s, $Z(\Lambda)$ e $K(\Lambda)$ sono ideali sinistri di Λ. Se $x \in Z(\Lambda)$, avendosi $[\alpha, \beta, \gamma\ (x\,\delta)] = [\alpha, \beta, \gamma\ x]\,\delta = 0$, $\forall\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda$, pure $x\,\delta$ è s-centrale e così $Z(\Lambda)$ è anche ideale destro di Λ. Un $k \in K(\Lambda)$ è del tipo:

$$k = \sum_{i \in I} \gamma_i [\alpha_i, \beta_i, x_i] + m_i [\alpha_i, \beta_i, x_i], \text{ con } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, x_i \in \Lambda \text{ e } m_i \in \mathbb{Z}$$

e così, per ogni $\alpha \in \Lambda$, si ha:

$$k\alpha = \sum_{i \in I} \gamma_i [\alpha_i, \beta_i, x_i \alpha] + m_i [\alpha_i, \beta_i, x_i \alpha] \in K(\Lambda).$$

Dunque, anche $K(\Lambda)$ è ideale destro di Λ.

(DIM. Poiché $Z_n(M)/Z_{n-1}(M) = Z(M/Z_{n-1}(M))$, per ogni $x \in Z_n(M)$, si ha:

$$[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 (x + Z_{n-1}(M))] = Z_{n-1}(M)$$

e quindi

$$[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1] x \in Z_{n-1}(M), \forall \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \Lambda .$$

Analogamente, poiché $Z_{n-1}(M)/Z_{n-2}(M) = Z(M/Z_{n-2}(M))$, si ha:

$$[\alpha_2, \beta_2, \gamma_2] [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1] x \in Z_{n-2}(M), \forall \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \Lambda .$$

Così procedendo, si trova:

$$[\alpha_n, \beta_n, \gamma_n] \ldots [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2] [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1] x \in Z_0(M), \forall \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Lambda ,$$

e di qui segue la (a).

Per quanto riguarda la (b), basta osservare che $K_n(M)$ è il sottomodulo di M generato dai commutatori di tutte le terne (α, β, x), con $\alpha, \beta \in \Lambda$ e $x \in K_{n-1}(M)$, e quindi un $y \in K_n(M)$ è del tipo:

$$y = \sum_{(\alpha,\beta,x)\in\mathfrak{I}_{n-1}} \gamma_{\alpha\beta x} [\alpha, \beta, x] + m_{\alpha\beta x} [\alpha, \beta, x] ,$$

con $\gamma_{\alpha\beta x} \in \Lambda$, $m_{\alpha\beta x} \in \mathbb{Z}$ e $\mathfrak{I}_{n-1}$ sottoinsieme non vuoto di $\Lambda \times \Lambda \times K_{n-1}(M)$ [4].

Si può allora porre:

$$y = \sum_{(\alpha,\beta,x)\in\mathfrak{I}_{n-1}} \lambda_{\alpha\beta x} x ,$$

con

$$\lambda_{\alpha\beta x} = \gamma_{\alpha\beta x} (\beta\alpha - \alpha\beta) + m_{\alpha\beta x} (\beta\alpha - \alpha\beta) \in \Lambda ,$$

e così il commutatore di una terna $(\gamma, \delta, y) \in \Lambda \times \Lambda \times K_n(M)$ è del tipo:

$$[\gamma, \delta, y] = \sum_{(\alpha,\beta,x)\in\mathfrak{I}_{n-1}} [\gamma, \delta, \lambda_{\alpha\beta x}] x .$$

Ne segue che i generatori di $K_{n+1}(M)$ sono in $K(\Lambda) K_{n-1}(M)$ e quindi la (b).

[4] Con $\mathbb{Z}$ si denota l'insieme degli interi relativi. È superfluo avvertire che si considerano somme aventi effettivamente significato, nelle quali, cioè, gli addendi non nulli sono al più in numero finito.

Dimostriamo, infine, (c) e (d). Per la (b) si ha intanto:

$$K_2(M) \subseteq K(\Lambda) M \qquad \text{e} \qquad K_3(M) \subseteq K(\Lambda) K(M) .$$

Inoltre, ancora per la (b), se si suppone che sia $K_{2n}(M) \subseteq \subseteq K(\Lambda)^n M$, si ha:

$$K_{2(n+1)}(M) \subseteq K(\Lambda) K_{2n}(M) \subseteq K(\Lambda)^{n+1} M ;$$

e, analogamente, da $K_{2n+1}(M) \subseteq K(\Lambda)^n K(M)$, si deduce:

$$K_{2(n+1)+1}(M) \subseteq K(\Lambda) K_{2n+1}(M) \subseteq K(\Lambda)^{n+1} K(M) .$$

Pertanto, (c) e (d) sono valide per il principio di induzione).

2.4. - *Se* M *è un* Λ*-modulo sinistro unitario, si ha, qualunque sia* $n \in \mathbb{N}$:

(a) $K_{n+1}(M) = K(\Lambda) K_n(M)$

(b) $K_n(M) = K(\Lambda)^n M$.

(DIM. Un $y \in K_n(M)$ è del tipo:

$$y = \sum_{(\alpha,\beta,x)\in\mathfrak{I}_{n-1}} \gamma_{\alpha\beta x} [\alpha, \beta, x] ,$$

con $\gamma_{\alpha\beta x} \in \Lambda$ e $\mathfrak{I}_{n-1}$ sottoinsieme non vuoto di $\Lambda\times\Lambda\times K_{n-1}(M)$.

Quindi, il commutatore di una terna $(\gamma, \delta, y) \in \Lambda \times \Lambda \times K_n(M)$ è della forma:

$$[\gamma, \delta, y] = \sum_{(\alpha,\beta,x)\in\mathfrak{I}_{n-1}} [\gamma, \delta, \gamma_{\alpha\beta x}] [\alpha, \beta, x]$$

e se ne deduce:

(*) $$K_{n+1}(M) \subseteq K(\Lambda) K_n(M) .$$

Un $\lambda \in K(\Lambda)$ è del tipo:

$$\lambda = \sum_{(\gamma,\delta,\varepsilon)\in I} \lambda_{\gamma\delta\varepsilon} [\gamma, \delta, \varepsilon] ,$$

con I sottoinsieme non vuoto di $\Lambda\times\Lambda\times\Lambda$ e $\lambda_{\gamma\delta\varepsilon} \in \Lambda$.

Pertanto, un generatore $\lambda\, y$ di $K(\Lambda)\, K_n(M)$ può porsi nella forma:

$$\lambda y = \sum_{I \times \mathfrak{I}_{n-1}} \lambda_{\gamma\delta\varepsilon} [\, \gamma, \delta, \varepsilon\, \gamma_{\alpha\beta x} [\alpha, \beta, x]\,]$$

e quindi:

$$(**) \qquad K(\Lambda)\, K_n(M) \subseteq K_{n+1}(M)\,.$$

Dal confronto di (*) e (**) si ottiene la (a).
La (b) è poi immediata conseguenza della (a)).

Si è in grado ora di provare quanto già annunciato:

TEOR. 2.1. - *Per un* Λ*-modulo sinistro* M, *sono equivalenti le proposizioni*:

(a) M *è speciale*

(b) M *è risolubile.*

(DIM. (a) $\Rightarrow$ (b). M sia speciale di classe m. Essendo $Z_m(M) = M$, la (c) e la (a) della 2.3 forniscono:

$$K_{2m}(M) \subseteq K(\Lambda)^m\, Z_m(M) = 0$$

e quindi M è risolubile di grado $\leq 2\, m$.
(b) $\Rightarrow$ (a). M sia risolubile di grado m. Dato che:

$$[\alpha, \beta, \gamma\, x] = 0, \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda \quad \text{e} \quad \forall\, x \in K_{m-1}(M)\,,$$

si ha:

$$K_{m-1}(M) \subseteq Z_1(M)\,.$$

Se ora $x \in K_{m-2}(M)$, qualunque siano $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, risulta s-centrale:

$$[\alpha, \beta, \gamma\, x] \in K_{m-1}(M)\,;$$

l'omomorfismo canonico di M su $M/Z_1(M)$ associa ad x l'elemento $x + Z_1(M)$ tale che:

$$[\alpha, \beta, \gamma\, (\, x + Z_1(M)\,)] = Z_1(M)$$

e, per l'arbitrarietà di α, β, γ, si ha:

$$x + Z_1(M) \in Z(M/Z_1(M)) .$$

Dunque:

$$x \in Z_2(M) \quad \text{e} \quad K_{m-2}(M) \subseteq Z_2(M) .$$

Così procedendo, si riconosce che:

$$K_{m-r}(M) \subseteq Z_r(M) , \quad r \in [1, m] ,$$

ed allora:

$$M = K_0(M) \subseteq Z_m(M) .$$

Ciò prova che M è speciale di classe $\leq m$).

Si è anche riconosciuto che, se è risolubile, M è speciale di classe non maggiore del suo grado di risolubilità, mentre quest'ultimo non supera il doppio della classe. In generale, quindi, il grado e la classe di M possono anche essere distinti, come mostra il seguente semplice esempio.

Considerato, nell'anello degli interi mod. 16, l'ideale $A = (\mathbf{2})$ generato dalla classe **2**, sia:

$$\Lambda = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{pmatrix} ; \ \mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A \right\} .$$

Rispetto alle ordinarie operazioni di somma e prodotto (righe per colonne) di matrici, Λ è un anello non unitario, non commutativo e nilpotente di indice 4 (nel senso classico della teoria degli anelli).

Posto $M = \Lambda_s$, si verifica facilmente che M è un Λ-modulo sinistro non unitario, speciale di classe 1 e risolubile di grado 2.

Al contrario, se M è unitario, la classe e il grado — quando M sia speciale — coincidono. Il TEOR. 2.1. si precisa, infatti, nel seguente:

TEOR. 2.2. - *Per un Λ-modulo sinistro unitario* M, *sono equivalenti le proposizioni*:

(a) M *è speciale di classe* m.

(b) M *è risolubile di grado* m.

(DIM. Per quanto già provato nella dimostrazione del TEOR. 2.1., basta riconoscere che il grado di risolubilità di M è non maggiore

della sua classe. Ma ciò è immediata conseguenza della (a) della 2.3. e della (b) della 2.4.).

Un semplice esempio di applicazione delle nozioni introdotte è il seguente:

TEOR. 2.3. - *Se* M *è un* Λ*-modulo sinistro unitario a radicale*[5] *nullo, sono equivalenti le proposizioni*:

(a) M *è bilatero.*

(b) M *è risolubile di grado* 1 *e speciale di classe* 1.

(c) *Per ogni sottomodulo massimale* H *di* M *esiste un* $x \notin H$ *s-centrale.*

(DIM. (a) $\Rightarrow$ (b). Ovvia per la 1.1 e il TEOR 2.2.

(b) $\Rightarrow$ (c). Essendo a radicale nullo, M possiede sottomoduli massimali. Se H è uno di questi, esiste almeno un $x \notin H$ che sia s-centrale, avendosi, per (b), $Z(M) = M$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Sia H un sottomodulo massimale di M ed $x \notin M$ un elemento di Z(M). Avendosi $M = H + \langle x \rangle$, un qualunque $y \in M$ è del tipo: $y = h + \gamma x$, con $h \in H$ e $\gamma \in \Lambda$.

Pertanto, per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$, si ha:

$$[\alpha, \beta, y] = [\alpha, \beta, h] + [\alpha, \beta, \gamma x] = [\alpha, \beta, h] \in H$$

e quindi: $K(M) \subseteq H$.

Per l'arbitrarietà di H, se ne deduce:

$$0 = J(M) \supseteq K(M)$$

e così M è bilatero (1.1.)).

3. - ANELLI SPECIALI E ANELLI DI WIELANDT.

Passando agli anelli, cominciamo col provare che:

TEOR. 3.1. - *Per un anello* Λ *sono equivalenti le proposizioni*:

(a) Λ *è speciale.*

(b) $K(\Lambda)$ *è un ideale nilpotente di* Λ.

(c) *Ogni* Λ*-modulo sinistro è speciale.*

[5] Qui e nel seguito, per « radicale » si intende « radicale secondo Jacobson ». Se M è un Λ-modulo sinistro unitario, il radicale secondo Jacobson, J(M), può definirsi come l'intersezione di M con tutti i suoi sottomoduli massimali (cfr. [3], p. 63).

(DIM. (a) $\Rightarrow$ (b). Λ sia speciale di classe m.

Essendo $Z_m(\Lambda) = \Lambda$, la (a) della 2.3. assicura che: $K(\Lambda)^m \Lambda = 0$. Se ne deduce: $K(\Lambda)^{m+1} = 0$, e così $K(\Lambda)$ è nilpotente.

(b) $\Rightarrow$ (c). Sia M un Λ-modulo sinistro. Se $K(\Lambda)$ è nilpotente — e sia $K(\Lambda)^n = 0$ — per la (c) della 2.3. si ha: $K_{2n}(M) = 0$. Quindi, M è risolubile e, per il TEOR. 2.1., anche speciale.

(c) $\Rightarrow$ (a). Evidente).

È facile riconoscere, se Λ è unitario e speciale, che l'indice di nilpotenza di $K(\Lambda)$ e la classe di un qualunque Λ-modulo unitario coincidono con la classe di Λ. Basta, per questo, osservare che $K(\Lambda)^m \Lambda = K(\Lambda)^m$ e tener conto della (b) della 2.4.

Per il teorema precedente, ogni anello che sia nilpotente è anche speciale [6]; così, la nozione di « anello speciale » si presenta come una generalizzazione di quella classica di « anello nilpotente », oltre che, naturalmente, di quella di « anello commutativo ».

Altra immediata conseguenza del TEOR. 3.1. è che ogni anello che possa immergersi in un anello speciale è speciale. Infatti:

3.1. - *Ogni sottoanello di un anello speciale è speciale.*

(DIM. Siano Λ un anello speciale ed H un suo sottoanello. Riguardando H come anello, il suo derivato $K(H)$ — l'ideale bilatero di H generato dai commutatori di tutte le terne di elementi di H — è un sottoanello di $K(\Lambda)$. Pertanto, $K(H)$ è nilpotente al pari di $K(\Lambda)$ ed H è speciale (TEOR. 3.1.)).

Il TEOR. 3.1. consente di stabilire facilmente un risultato analogo al classico teorema di Wielandt sui gruppi nilpotenti. Si ha, infatti:

TEOR. 3.2. - *Se Λ è un anello a radicale [7] nilpotente, sono equivalenti le proposizioni:*

(a) Λ *è speciale.*

(b) $\Lambda/J(\Lambda)$ *è commutativo.*

(c) $K(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$.

[6] Ma esistono anelli speciali che non siano nilpotenti: si pensi, per esempio, agli anelli commutativi unitari.

[7] Anche qui si intenda « radicale secondo Jacobson ». Com'è noto, il radicale secondo Jacobson, $J(\Lambda)$, di un anello Λ si può caratterizzare, fra l'altro, come l'insieme: $\{x \in \Lambda \mid x\alpha$ è q.r.d., $\forall\, \alpha \in \Lambda\}$. Si ricorda che un $x \in \Lambda$ si dice « quasi-regolare a destra » (q.r.d.) se esiste un $y \in \Lambda$ tale che: $x + y - xy = 0$. (Si veda, p. es., [13], p. 112).

(DIM. (a) $\Rightarrow$ (b). Per il TEOR. 3.1., se Λ è speciale, $K(\Lambda)$ è nilpotente e, quindi, il commutatore $[\alpha, \beta, \gamma]$ di una qualunque terna $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda \times \Lambda \times \Lambda$ è un elemento nilpotente di Λ. Ma ogni elemento nilpotente è quasi regolare ([13], p. 111, 6.2) e tale è, dunque, $[\alpha, \beta, \gamma] = (\beta\alpha - \alpha\beta)\gamma$, qualunque sia γ. Ne segue:

$$\beta\alpha - \alpha\beta \in J(\Lambda)$$

e, di qui, per l'arbitrarietà di α e β, la commutatività di $\Lambda/J(\Lambda)$.
(b) $\Rightarrow$ (c). Se è commutativo, $\Lambda/J(\Lambda)$, riguardato come Λ-modulo, è bilatero. Per la 1.2., è allora: $K(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$.
(c) $\Rightarrow$ (a). Se vale la (c), $K(\Lambda)$ è nilpotente perché ideale di un ideale nilpotente; il TEOR. 3.1. assicura che Λ è speciale).

Si noti che per dimostrare le implicazioni (a) $\Rightarrow$ (b) e (b) $\Rightarrow$ (c) non si è fatto uso dell'ipotesi.

Utilizzando il TEOR. 3.2., si è in grado di dare la seguente caratterizzazione degli anelli artiniani speciali.

TEOR. 3.3. - *Se Λ è un anello non nullo artiniano a sinistra, sono equivalenti le proposizioni:*

(a) Λ *è speciale.*

(b) $\Lambda/J(\Lambda)$ *è somma diretta*[8] *di un numero finito di suoi sottocampi.*

(DIM. (a) $\Rightarrow$ (b). Poiché Λ è artiniano a sinistra, $J(\Lambda)$ è un ideale nilpotente ([13], p. 120, 6.24) e, quindi, per l'ipotesi (a) e per il TEOR. 3.2., $\Lambda/J(\Lambda) = A$ è un anello commutativo. È chiaro, inoltre, che A è artiniano al pari di Λ ([3], p. 25, prop. 6).

Essendo a radicale nullo ([13], p. 114, teor. 6.9), A è privo di nil-ideali non nulli ([13], p. 113, cor. 6.8) ed è unitario ([6], p. 24, cor.). Pertanto, per un noto teorema di struttura[9], si ha:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \ ,$$

dove $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ è la famiglia finita costituita da tutti e soli gli ideali

[8] Per la nozione di « somma diretta » qui adottata, si veda [6], p. 25.

[9] « Ogni anello R, non nullo, nil-semisemplice (cioè, privo di nil-ideali non nulli) e artiniano a sinistra, possiede solo un numero finito di ideali semplici. Questi sono anelli semplici, non nilpotenti e artiniani a sinistra, ed R è somma diretta di essi. Una tale decomposizione di R è unica, a meno dell'ordine degli addendi ». ([6], p. 28, teor. 10; si veda anche [10], p. 43, teor. 2). Nell'APPENDICE si darà una dimostrazione del teor. 3.3 che non fa uso di questo risultato.

bilateri di A, che — riguardati come anelli — siano semplici [10]. Di qui la (b), poiché A_i è commutativo e unitario [11].

(b)$\Rightarrow$ (a). Se vale la (b), $\Lambda/J(\Lambda)$ è commutativo e, poiché Λ è artiniano, $J(\Lambda)$ è nilpotente. Così, per il TEOR. 3.2., Λ è speciale).

Il TEOR. 3.2. suggerisce la seguente definizione:

Un anello Λ si dirà *di Wielandt* (W-*anello*) se per esso sono equivalenti:

(A) Λ è speciale.

(B) $\Lambda/J(\Lambda)$ è commutativo.

(C) $J(\Lambda) \supseteq K(\Lambda)$.

Si ha:

3.2. - *Un anello* Λ *è un* W-*anello, se è verificata almeno una delle condizioni*:

(a) $J(\Lambda) \supseteq K(\Lambda) \Rightarrow \Lambda$ *è speciale.*

(b) *Esiste un ideale bilatero* H *di* Λ *tale che* H *e* Λ/H *siano* W-*anelli.*

(c) $J(\Lambda)$ *è un* W-*anello.*

(DIM. Se vale la (a), è chiaro che (A)$\Leftrightarrow$(B)$\Leftrightarrow$(C) (cfr. la DIM. del TEOR. 3.2.).

Sia ora soddisfatta la (b). Se $J(\Lambda) \supseteq K(\Lambda)$, poiché $J(H) = H \cap J(\Lambda)$ ([10], p. 10, teor. 1) e $J(\Lambda/H) \supseteq (J(\Lambda) + H)/H$ [12], si ha, ricordando la 1.4:

$$J(H) \supseteq H \cap K(\Lambda) \supseteq K(H),$$

$$J(\Lambda/H) \supseteq (K(\Lambda) + H)/H = K(\Lambda/H).$$

Quindi, essendo W-anelli, H e Λ/H sono speciali. Ne segue, per i Teor. 1.1 e 2.1, che anche Λ è speciale. Si è così provato che Λ verifica la (a) e perciò Λ è un anello di Wielandt.

Valga, infine, la (c). Essendo a radicale nullo ([13], p. 114, 6.9), $\Lambda/J(\Lambda)$ è un W-anello per il TEOR. 3.2. Valendo la (b), Λ è di Wielandt).

[10] Per « semplice » si intenda « privo di ideali bilateri non banali ».

[11] Se $1_\Lambda = \sum_i^n e_i$, $e_i \in A_i$, si ha: $a_i e_j = e_j a_i = 0$, per $j \neq i$ e per ogni $a_i \in A_i$.

Quindi: $a_i = 1_\Lambda a_i = e_i a_i$.

[12] Un elemento di $(J(\Lambda) + H)/H$ è del tipo $x + H$, con $x \in J(\Lambda)$. Ne segue che, $\forall\, y + H \in \Lambda/H$, l'elemento $(x + H)(y + H)$ è quasi-regolare a destra e quindi $x + H \in J(\Lambda/H)$.

Mostreremo in seguito con un esempio che non ogni ideale o quoziente di un W-anello è un W-anello. Si ha, però:

3.3. - *Siano* Λ *un* W*-anello ed* H *un suo ideale bilatero. Se* $H \subseteq J(\Lambda)$, *allora* Λ/H *è un* W*-anello.*

(DIM. Supposto che sia $J(\Lambda/H) \supseteq K(\Lambda/H)$, poiché $J(\Lambda/H) = J(\Lambda)/H$ [13] e $K(\Lambda/H) = (K(\Lambda) + H)/H$ (cfr. 1.4), è chiaro che $J(\Lambda)$ include $K(\Lambda)$. Essendo un W-anello, Λ è allora speciale e tale, quindi, è anche Λ/H, per la 1.6 e il TEOR. 2.1. Di qui l'asserto, avendo provato la (a) della 3.2).

3.4. - *Se* H_1, H_2 *sono ideali bilateri di un anello* Λ, *tali che* Λ/H_1, Λ/H_2 *siano* W*-anelli, anche* $\Lambda/H_1 \cap H_2$ *è un* W*-anello.*

(DIM. Se $J(\Lambda/H_1 \cap H_2) \supseteq K(\Lambda/H_1 \cap H_2)$, si ha:

$$J(\Lambda/H_i) \backsimeq J(\Lambda/H_1 \cap H_2/H_i/H_1 \cap H_2) \supseteq$$
$$\supseteq (J(\Lambda/H_1 \cap H_2) + H_i/H_1 \cap H_2)/(H_i/H_1 \cap H_2) \supseteq$$
$$\supseteq (K(\Lambda/H_1 \cap H_2) + H_i/H_1 \cap H_2)/(H_i/H_1 \cap H_2) =$$
$$= K(\Lambda/H_1 \cap H_2/H_i/H_1 \cap H_2) \backsimeq K(\Lambda/H_i), \qquad \text{per } i = 1,2.$$

Pertanto, valendo la (C) ed essendo un W-anello, Λ/H_i è speciale $(i = 1,2)$.

Ora, $H_1 \cap H_2$ è un ideale bilatero di Λ contenuto in H_2 e così $H_2/H_1 \cap H_2$ è un ideale bilatero di $\Lambda/H_1 \cap H_2$.

Risulta:

$$H_2/H_1 \cap H_2 \backsimeq (H_1 + H_2)/H_1$$

e quest'ultimo quoziente, quale ideale di Λ/H_1, è speciale (1.6 e TEOR. 2.1). Inoltre, essendo isomorfo a Λ/H_2, anche il quoziente $(\Lambda/H_1 \cap H_2)/(H_2/H_1 \cap H_2)$ è speciale.

[13] Se $a + H \in J(\Lambda/H)$, $(a + H)(x + H)$ è q.r.d. in Λ/H, per ogni $x \in \Lambda$. Cioè, posto $c \circ d = c + d - cd$ $(c, d \in \Lambda)$, esiste un $y \in \Lambda$ tale che:

$$[(a + H)(x + H)] \circ (y + H) = H.$$

Deducendosi di qui: $ax \circ y \in H \subseteq J(\Lambda)$, $ax \circ y$ è q.r.d. in Λ e perciò esiste uno $z \in \Lambda$ per cui: $(ax \circ y) \circ z = 0$. Ma, allora, è anche $ax \circ (y \circ z) = 0$ e così ax è q.r.d. in Λ, qualunque sia x. Ne segue che a è in $J(\Lambda)$ e quindi: $a + H \in J(\Lambda)/H$. Di qui, per l'arbitrarietà di $a + H$, $J(\Lambda/H) \subseteq J(\Lambda)/H$.

È chiaro, poi, che $J(\Lambda)/H \subseteq J(\Lambda/H)$ e, pertanto, $J(\Lambda/H) = J(\Lambda)/H$ (nell'ipotesi: $H \subseteq J(\Lambda)$).

Pertanto, per i TEOR. 1.1 e 2.1, $\Lambda/H_1 \cap H_2$ è speciale.

Avendo provato la (a) della 3.2, $\Lambda/H_1 \cap H_2$ è un W-anello, come volevasi).

ESEMPI.

È chiaro che ogni anello speciale è un W-anello. Ma non vale il viceversa: un corpo non commutativo non è speciale ed è un anello di Wielandt.

Evidentemente, tutti gli anelli a radicale nilpotente sono W-anelli; in particolare, quindi, lo sono gli anelli artiniani. Per il ben noto teorema di ARTIN ([6], p. 48, teor. 15), gli anelli artiniani a sinistra (a destra) con unità a sinistra (a destra) sono anche noetheriani a sinistra (a destra). Allora può aver senso la domanda: gli anelli noetheriani sono W-anelli? La risposta, come mostra il seguente esempio, è negativa.

La parte del campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a = m/(2n+1);\ m, n \in \mathbb{Z}\ ;\ (m,\ 2n+1) = 1\}$$

è sostegno di un sottoanello di $\mathbb{Q}$, che risulta principale e locale [14].

La parte dell'anello A_2 delle matrici quadrate d'ordine 2 su A:

$$\Lambda = \left\{ \alpha \in A_2 \mid \alpha = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix} \right\}$$

è un sottoanello unitario di A_2.

Riguardato Λ come Λ-modulo sinistro Λ_s, le parti:

$$H_1 = \left\{ \beta \in \Lambda \mid \beta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad H_2 = \left\{ \gamma \in \Lambda \mid \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}$$

sono sottomoduli di Λ_s tali che:

$$\Lambda_s = H_1 \oplus H_2 .$$

[14] Se H è un ideale non nullo di A e $a = m/(2n+1) \in H$, anche $m = (2n+1)a$ è in H. Se m' è il minimo intero positivo appartenente ad H, da $m = qm' + r$, con $0 \leqslant r < m'$, segue $r \in H$ e quindi $r = 0$. Allora: $a = m'\,q/(2n+1)$ ed $H = (m')$ è principale. Per l'arbitrarietà di H, A è principale.

L'inverso in $\mathbb{Q}$ di $a = m/(2n+1) \in A$ è in A se, e solo se, m è dispari. Ne segue che l'insieme degli elementi non invertibili di A è:

$$B = \{\, b \in A \mid b = 2a,\ a \in A\},$$

che è un ideale di A. Dunque, A è locale.

Se L è un sottomodulo non nullo di H_1 e $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \in L$, con $a \neq 0$ e $c \neq 0$ [15], posto:

$$a = \frac{2^h(2m+1)}{2n+1} \quad , \qquad c = \frac{2^k(2p+1)}{2q+1}$$

$$(h, k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{e} \quad m, n, p, q \in \mathbb{Z}),$$

si ha:

$$\begin{pmatrix} 2^h & 0 \\ 2^{k+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{2m+1} & 0 \\ 0 & \frac{2q+1}{2p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \in L .$$

Ha senso, allora, considerare i minimi interi non negativi, $\bar{h}$ e $\bar{k}$, per i quali:

$$\begin{pmatrix} 2^{\bar{h}} & 0 \\ 2^{\bar{k}+1} & 0 \end{pmatrix} \in L .$$

Dopo di ciò, per ogni $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \in L$, si ha:

$$a/2^{\bar{h}}, c/2^{\bar{k}} \in A \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2^{\bar{h}} & 0 \\ 0 & c/2^{\bar{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{\bar{h}} & 0 \\ 2^{\bar{k}+1} & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi L è monogeno. Per l'arbitrarietà di L, H_1 è allora noetheriano ([3], p. 21, prop. 1°).

In modo analogo, si prova che anche H_2 è noetheriano. Pertanto, essendo somma diretta di due sottomoduli noetheriani, Λ_s è noetheriano ([3], p. 22, cor.) e quindi Λ è noetheriano a sinistra [16]. Ciò premesso, un $\alpha = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix} \in \Lambda$ è invertibile se, e solo se, $ad - 4bc \neq 0$

[15] Un tale elemento esiste certamente in L, poiché il sottoinsieme di Λ_s costituito dalle matrici con almeno tre elementi nulli non è un sottomodulo non nullo di Λ_s.

[16] Osservando che $L_1 = \left\{ \beta \in \Lambda/\beta = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $L_2 = \left\{ \gamma \in \Lambda/\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & d \end{pmatrix} \right\}$ sono sottomoduli di Λ_d (Λ-modulo destro canonicamente associato a Λ), noetheriani e tali che:

$$\Lambda_d = L_1 \oplus L_2 ,$$

si riconosce che Λ è anche noetheriano a destra.

e la matrice inversa:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{a\,d - 4\,b\,c} & \dfrac{-2\,b}{a\,d - 4\,b\,c} \\ \dfrac{-2\,c}{a\,d - 4\,b\,c} & \dfrac{a}{a\,d - 4\,b\,c} \end{pmatrix}$$

è in Λ. E ciò accade quando, e solo quando, a e d hanno entrambi il numeratore dispari.

D'altra parte, per un teorema di NAKAYAMA ([3], p. 67, teor. 1), il radicale, $J(\Lambda)$, dell'anello Λ è l'insieme degli $\xi \in \Lambda$ per i quali $1 - \alpha\,\xi$ sia invertibile per ogni $\alpha \in \Lambda$.

Allora, posto:

$$\xi = \begin{pmatrix} x & 2\,y \\ 2\,z & t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & 2\,b \\ 2\,c & d \end{pmatrix},$$

si ha:

$$1 - \alpha\,\xi = \begin{pmatrix} (1-4\,b\,z) - a\,x & -2\,(a\,y + b\,t) \\ -2\,(c\,x + d\,z) & (1-4\,c\,y) - d\,t \end{pmatrix}$$

e perciò $\xi \in J(\Lambda)$, se, e solo se, x e t hanno il numeratore pari.

Dunque:

$$J(\Lambda) = \left\{ \alpha \in \Lambda \mid \alpha = \begin{pmatrix} 2\,a & 2\,b \\ 2\,c & 2\,d \end{pmatrix} \right\} .$$

Ora, per ogni terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di elementi di Λ, con $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & 2\,b_i \\ 2\,c_i & d_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$, si ha:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\,(c_1\,b_2 - b_1\,c_2) & 2\,[b_1\,(a_2 - d_2) - b_2\,(a_1 - d_1)] \\ 2\,[c_2\,(a_1 - d_1) - c_1\,(a_2 - d_2)] & 4\,(b_1\,c_2 - c_1\,b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & 2\,b_3 \\ 2\,c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

e, quindi, il commutatore di ogni terna di elementi di Λ è in $J(\Lambda)$. Ne segue $K(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$, e ciò equivale (per la 1.2 e poiché Λ è unitario) alla commutatività di $\Lambda/J(\Lambda)$.

D'altra parte, $K(\Lambda)$ non è nilpotente, in quanto contiene certamente elementi non nilpotenti [17], e quindi Λ non è speciale (TEOR. 3.1.).

[17] Per esempio, il commutatore:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

non è nilpotente.

Pertanto, avendosi (B) $\Leftrightarrow$ (C) $\not\Leftrightarrow$ (A), l'anello noetheriano (unitario) Λ non è un W-anello.

Come si è già avvertito, possono esistere ideali e quozienti di un W-anello che non siano anelli di Wielandt. Un esempio è il seguente.

Sia Λ_1 un anello unitario non speciale e tale che $J(\Lambda_1) \supseteq K(\Lambda_1)$ [18] e sia Λ_2 un corpo non commutativo. Allora, Λ_1 non è un anello di Wielandt, mentre Λ_2 lo è.

Posto $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, è chiaro che Λ_1 e Λ_2 possono ritenersi, a meno di isomorfismi, ideali bilateri di Λ. Avendosi:

$$J(\Lambda) = J(\Lambda_1) \oplus J(\Lambda_2),$$
$$K(\Lambda) = K(\Lambda_1) \oplus K(\Lambda_2),$$
$$K(\Lambda_2) \not\subseteq J(\Lambda_2),$$

è chiaro che $K(\Lambda) \not\subseteq J(\Lambda)$ e che Λ non è speciale [19]. Dunque, valendo la (a) della 3.2, Λ è un anello di Wielandt.

D'altra parte, esiste in Λ un ideale (bilatero) che non è di Wielandt — Λ_1 — ed anche il quoziente Λ/Λ_2, essendo isomorfo a Λ_1, non è un W-anello.

Questo esempio mostra anche che la 3.3 non è invertibile. Infatti, Λ e Λ/Λ_1 sono anelli di Wielandt, pur avendosi: $\Lambda_1 \supset J(\Lambda_1) \not\cong J(\Lambda)$.

4. - Anelli senza torsione e di rango finito.

In quest'ultimo paragrafo, ci si propone di mostrare che è speciale ogni anello unitario che sia senza torsione e di rango finito non maggiore di tre.

Nel seguito, se Λ è un anello, ogni proprietà gruppale di $\Lambda(+)$ verrà attribuita a Λ; così, per esempio, Λ *divisibile* significherà che $\Lambda(+)$ è un gruppo divisibile, il *rango* — $\rho(\Lambda)$ — di Λ sarà quello di $\Lambda(+)$, ecc. Si dirà, infine, che Λ è *semplice*, se $\Lambda^2 \neq 0$ e Λ è privo di ideali bilateri non banali.

Ciò premesso, si ha:

4.1. - *Se Λ è un anello senza torsione* [20] *e di rango 1, Λ è commutativo.*

(Dim. Con z fissato elemento non nullo di Λ, qualunque siano $x, y \in \Lambda$, si ha: $m\,x = n\,z$ e $m'\,y = n'\,z$, per opportuni interi rela-

[18] Si pensi, per esempio, all'anello noetheriano Λ dell'esempio precedente.
[19] Se Λ fosse speciale, si avrebbe $J(\Lambda) \supseteq K(\Lambda)$ (cfr. la dim. del teor. 3.2).
[20] Poiché è senza torsione, Λ è, evidentemente, non nullo.

tivi $m \neq 0, n, m' \neq 0, n'$. Ne segue che:

$$m\,m'\,x\,y = m\,m'\,y\,x$$

e quindi $x\,y = y\,x$, poiché Λ è senza torsione).

4.2. - *Se Λ è un anello senza torsione, di rango 2 e a centro non nullo, Λ è commutativo.*

(DIM. Fissato un $u \neq 0$ del centro di Λ, è certo possibile determinare, per il teorema di STEINITZ, un $v \in \Lambda$ indipendente da u. Poiché Λ ha rango 2, qualunque siano $x, y \in \Lambda$, esistono degli interi relativi $m \neq 0, r, s, m' \neq 0, r', s'$, tali che:

$$m\,x = r\,u + s\,v \qquad \text{e} \qquad m'\,y = r'\,u + s'\,v\,.$$

Ne segue, u essendo permutabile con v, che:

$$m\,m'\,x\,y = m\,m'\,y\,x$$

e così: $x\,y = y\,x$).

LEMMA 4.1. - *Se Λ è un anello divisibile, senza torsione e di rango n, Λ è un'algebra (associativa) di rango n sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.*

(DIM. Poiché Λ è divisibile, qualunque siano gli interi relativi m, $n \neq 0$ e per ogni $x \in \Lambda$, esiste un $y \in \Lambda$ tale che:

$$(*) \qquad m\,x = n\,y$$

e, poiché Λ è senza torsione, y è unico e non dipende dalla rappresentazione del numero razionale m/n. È lecito, quindi, considerare l'applicazione:

$$\psi : \mathbb{Q} \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$$

tale che $\psi\,(m/n, x) = y$, con y soddisfacente la (*). Ne segue subito l'asserto).

4.3. - *Se Λ è un corpo, senza torsione, il cui rango n sia 1 o un numero primo, Λ è commutativo.*

(DIM. Poiché Λ ha caratteristica zero, il suo gruppo additivo è somma diretta di una famiglia di sottogruppi ciascuno dei quali è

isomorfo al gruppo additivo razionale ([4], p. 517), e così Λ è divisibile ([7], p. 59, (d)). Per il LEMMA 4.1., Λ è allora un'algebra di divisione sul campo razionale $\mathbb{Q}$, di grado n rispetto a $\mathbb{Q}$. Inoltre, poiché Λ è senza torsione, la sua unità è indipendente, $\mathbb{Q}$ è isomorfo ad una sottoalgebra del centro $C(\Lambda)$ di Λ e, identificando $\alpha 1$ con α ($\alpha \in \mathbb{Q}$, $1 \in \Lambda$), può dirsi che $\mathbb{Q} \subseteq C(\Lambda)$.

Per il teorema di moltiplicazione dei gradi ([4], p. 396, 7), si ha:

$$[\Lambda : \mathbb{Q}] = [\Lambda : C(\Lambda)]\,[C(\Lambda) : \mathbb{Q}]\,.$$

Pertanto, se è $n = 1$, deve essere $\Lambda = C(\Lambda) = \mathbb{Q}$ e così Λ è commutativo; mentre, se n è un numero primo, deve aversi $\Lambda = C(\Lambda)$ oppure $C(\Lambda) = \mathbb{Q}$. Ma quest'ultima eventualità è da escludere, poiché altrimenti n dovrebbe essere un quadrato [21], e quindi è $\Lambda = C(\Lambda)$. Dunque, Λ è commutativo).

LEMMA 4.2. - *Sia Λ un anello divisibile, senza torsione e di rango $n < 4$. Se è semplice, Λ è un campo.*

(DIM. Per il LEMMA 4.1., Λ è un'algebra di rango n su $\mathbb{Q}$. Se è semplice, per un classico teorema di WEDDERBURN [22], Λ è prodotto diretto [23] di una $\mathbb{Q}$-algebra di divisione D e di una $\mathbb{Q}$-algebra semplice di matrici M ad elementi razionali (il cui rango è un quadrato). Allora, denotati con d ed m^2 i rispettivi ranghi di D ed M, avendosi $d\,m^2 = n$, deve risultare $m = 1$ e così Λ è un'algebra di divisione. Per la 4.3, Λ è poi un campo).

4.4. - *Se Λ è un anello divisibile, senza torsione e di rango 2, Λ è speciale di classe ≤ 2.*

(DIM. Se Λ è un campo, l'asserto è evidente. Supposto, allora, che Λ non sia un campo, per il LEMMA 4.2., Λ contiene un ideale

[21] È ben noto che « Se D è un'algebra di divisione di dimensione finita sul proprio centro C(D), la dimensione di D su C(D) è un quadrato ». ([8], p. 91, teor. 4.1.2; o, anche, [10], p. 122, teor. 2 e p. 180, prop. 1).

[22] « Un'algebra semplice A su di un campo F, che non sia una zero-algebra ($A^2 = 0$) di rango uno, si può esprimere come prodotto diretto di un'algebra di divisione D su F e di un'algebra semplice di matrici, M, su F ». ([5], p. 78).

[23] Per « prodotto diretto » si intende che ogni $x \in \Lambda = D \times M$ è esprimibile in unico modo come prodotto $\delta\mu$, $\delta \in D$ e $\mu \in M$; e che ogni elemento di D è permutabile con ogni elemento di M. Risulta che il rango di Λ è prodotto dei ranghi di D ed M. ([5], p. 72, n. 50).

bilatero non banale H. Poiché è senza torsione ed ha rango uno [24], H è commutativo per la 4.1.

Fissato in H un $x_1 \neq 0$, si può certo determinare un $x_2 \in \Lambda$ indipendente da x_1. Allora, per il LEMMA 4.1., ogni $x \in \Lambda$ può essere posto nella forma:

$$x = \sum_1^2{}_i \alpha_i x_i \ , \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbb{Q} \ .$$

Ne segue che il commutatore di una terna (y_1, y_2, y_3) di elementi di Λ, con $y_h = \sum_1^2{}_i \alpha_{hi} x_i$, è del tipo:

$$[y_1, y_2, y_3] = \sum_{r,s,t}^{1,2} \alpha_{1r} \alpha_{2s} \alpha_{3t} [x_r, x_s, x_t]$$

e quindi è in H.

Si ha, dunque, $H \supseteq K(\Lambda)$ e così $K(H) \supseteq K_2(\Lambda)$.

Ma un generatore di K(H) è del tipo $[y_1, y_2, y]$, con $y_1, y_2 \in \Lambda$ e $y \in H$. Quindi, posto $y = \alpha x_1$, si ha:

$$[y_1, y_2, y] = \sum_{r,s}^{1,2} \alpha_{1r} \alpha_{2s} \alpha [x_r, x_s, x_1] = 0 \ ,$$

poiché $[x_r, x_s, x_1] = 0$ [25].

Pertanto, avendosi $K_2(\Lambda) = 0$, Λ è risolubile di grado ≤ 2 e speciale di classe ≤ 2 (TEOR. 2.1.)).

4.5. - *Se Λ è un anello unitario, divisibile, senza torsione e di rango $n < 4$, Λ è speciale.*

(DIM. Per la 4.1 e la 4.4, si può supporre che sia $n = 3$. Se Λ è un campo, l'asserto è ovvio. Supposto, allora, che Λ non sia un campo, per il LEMMA 4.2. e per il teorema di KRULL ([4], p. 302), esiste in Λ un ideale bilatero massimale $H \neq 0$.

[24] Per il LEMMA 4.1 Λ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ di dimensione 2 ed H è un suo sottospazio. Allora: $\dim H \leq 2$; e $\dim H = 2$ se, e solo se, $H = \Lambda$.

[25] Per $r = s$, è $[x_r, x_s, x_1] = 0$; se $r \neq s$, si ha:

$$[x_1,x_2,x_1] = (x_2 x_1) x_1 - x_1 x_2 x_1 = x_1 (x_2 x_1) - x_1 x_2 x_1 = 0$$

e, analogamente, $[x_2, x_1, x_1] = 0$.

Poiché Λ è senza torsione, se H non fosse puro, esisterebbe un numero primo p tale che $p\Lambda \subseteq H$ [26]. Ma ciò è assurdo, poiché Λ è divisibile ed è quindi $n\Lambda = \Lambda$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dunque, H è puro nell'anello divisibile Λ e così è divisibile.

Inoltre, poiché H è puro in Λ, Λ/H (che non è nullo) è senza torsione, altrimenti esisterebbero in Λ elementi periodici ([17], p. 212, teor. VII, 3.6).

Ora, per il teorema di addizione dei ranghi ([1], p. 718, 3.2), si ha:

$$\rho(\Lambda) = \rho(H) + \rho(\Lambda/H)$$

e quindi, poiché sono senza torsione, H e Λ/H hanno al più rango due [27] e, se uno di essi ha rango due, l'altro ha rango uno. Ne segue, tenuto conto delle 4.1 e 4.4, che H e Λ/H sono entrambi risolubili e così Λ è speciale per i TEOR. 1.1. e 2.1.).

Si è ora in grado di provare quanto si è annunciato all'inizio di questo paragrafo. Conviene, però, ricordare ancora che ogni anello senza torsione può essere immerso in un anello divisibile minimale e senza torsione, unico a meno di isomorfismi ([7], p. 270, teor. 70.2). Se Δ è il minimo sopra-anello divisibile dell'anello Λ, il sostegno di Δ è il quoziente dell'insieme $\Lambda \times \mathbb{N}$ modulo la relazione di equivalenza:

$$(x, m) \backsim (y, n) :\Leftrightarrow n\,x = m\,y \,(x, y \in \Lambda;\ m, n \in \mathbb{N}).$$

Posto $[(x, m)]_{\backsim} = x/m$, $\Delta(+, \cdot)$ è un anello, unitario (se Λ è unitario) e senza torsione, rispetto alle operazioni:

$$x/m + y/n = (n\,x + m\,y)/m\,n\,;\ (x/m)\cdot(y/n) = x\,y/m\,n\,.$$

Un isomorfismo di Λ in Δ è fornito dall'applicazione:

$$f : x \in \Lambda \longrightarrow x/1 \in \Delta$$

e, identificando gli elementi corrispondenti, si ha $\Lambda \subseteq \Delta$ ([2], p. 39).

Ciò premesso, si ha:

TEOR. 4.1. - *Se Λ è un anello unitario, senza torsione e di rango $n < 4$, Λ è speciale.*

(DIM. Sia Δ il minimo sopra-anello divisibile di Λ. Essendo $\Lambda \subseteq \Delta$, il rango di Δ è intanto non minore di n; di più, se la k-pla

[26] « Se Λ è un anello senza torsione, ogni ideale massimale di Λ o è puro o include $p\Lambda$ per qualche numero primo p ». ([7], p. 271, teor. 70.3).

[27] Il rango di un anello è uguale a zero, se, e solo se, l'anello è di torsione.

$(x_i/m_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ di elementi di Δ è linearmente indipendente, tale è anche la k-pla $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ di elementi di Λ ed è quindi $k\leq n$. Ne segue che Δ ha lo stesso rango di Λ. Ma, allora, Δ è speciale per la 4.5 e tale è anche Λ per la 3.1).

Ne segue:

COR. 4.1. - *Sia Λ un anello unitario, senza torsione e di rango $n<4$. Allora, se è a radicale nullo, Λ è commutativo.*

(DIM. Per i TEOR. 4.1 e 3.2, si ha $0=J(\Lambda)\supseteq K(\Lambda)$ e quindi l'asserto).

APPENDICE.

Si fornisce una dimostrazione del TEOR. 3.3 ((a) $\Longrightarrow$ (b)) che non utilizza il teorema di struttura sugli anelli artiniani nil-semisemplici.

Sia, dunque, Λ un anello non nullo, artiniano a sinistra e speciale. Poiché Λ è artiniano a sinistra, $J(\Lambda)$ è nilpotente ([13], p. 120, 6.24) e così $\Lambda/J(\Lambda)=A$ è un anello commutativo per il TEOR. 3.2. Inoltre, A è, come Λ, artiniano ([3], p. 25, prop. 6).

Essendo unitario [28], A possiede, per il teorema di KRULL, ideali massimali e perciò l'insieme S degli ideali di A ottenibili come intersezione di un numero finito di ideali massimali è non vuoto. Poiché A è artiniano, esiste almeno un ideale L minimale in S. Si riconosce subito che $L=0$. Infatti, avendosi, per ogni ideale massimale H di A:

$$H\cap L\subseteq L \quad \text{e} \quad H\cap L\in S,$$

deve essere $H\cap L=L$; quindi, L è incluso in ogni ideale massimale di A e perciò anche nel radicale di A [29]. Ma $J(A)=0$ ed allora $L=0$.

Poiché $L\in S$, deve esistere un insieme finito $\{H_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ di ideali massimali di A, tali che:

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i = L = 0$$

e si può certamente supporre che L sia intersezione essenziale di essi.

[28] Com'è noto, un anello artiniano non nullo e a radicale nullo è sempre unitario ([6], p. 24, cor.).

[29] È chiaro che, essendo A unitario, il radicale J(A) coincide con l'intersezione degli ideali (sinistri) massimali di A ([6], p. 95, lemma 54).

Ciò premesso, sia ω_i l'omomorfismo canonico di A sul campo A/H_i e si consideri l'applicazione:

$$\varphi : x \in A \longrightarrow (\omega_i(x))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in B = \bigoplus_{i=1}^{n} A/H_i ,$$

che, evidentemente, è un omomorfismo di A nella somma diretta [30] B dei campi A/H_i, $i \in [1, n]$.

Inoltre, se $x \in \ker \varphi$, poiché $\omega_i(x) = 0$, $\forall\, i \in [1, n]$, si ha:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i = 0 .$$

Quindi, $\ker \varphi = 0$ e φ è un monomorfismo.

Proviamo ora che φ è surgettiva.

Un qualunque $b \in B$ è del tipo:

$$b = (a_1 + H_1, a_2 + H_2, \ldots, a_n + H_n), \text{ con } a_i \in A .$$

Poiché L è intersezione essenziale degli H_i, si ha, per ogni $i \in [1, n]$:

$$K_i = H_1 \cap \ldots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \ldots \cap H_n \neq 0$$

e, quindi, per la massimalità di H_i:

$$A = H_i + K_i , \quad \forall\, i \in [1, n] .$$

Dunque, a_i è del tipo:

$$a_i = h_i + k_i , \quad h_i \in H_i , \quad k_i \in K_i .$$

Se ne deduce:

$$\varphi(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = b$$

e, per l'arbitrarietà di b, $\varphi(A) = B$.

Resta così provato che, a meno di isomorfismi, A è somma diretta di un numero finito di campi.

[30] Per la nozione di « somma diretta » di anelli, si veda, p. es., [13], p. 17. È chiaro che, a meno di isomorfismi, i campi A/H_i possono ritenersi sottocampi di B e che B è loro somma diretta nel senso di [6], p. 25.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALEKSANDROV P. S., *Topologia combinatoria*, Einaudi, Torino (1957).
[2] BARSOTTI I., *Appunti di Algebra*, Zanichelli, Bologna (1968).
[3] BOURBAKI N., *Eléments de Mathématique*, Livre II, *Algèbre*, Ch. 8 (Modules et anneaux semi-simples), Hermann, Paris (1958).
[4] CURZIO M., *Lezioni di Algebra*, Liguori, Napoli (1967).
[5] DICKSON L. E., *Algebras and their Arithmetics*, Dover, N. Y. (1960).
[6] DIVINSKY N. J., *Rings and Radicals*, Math. Exp. No. 14, Univ. of Toronto Press (1965).
[7] FUCHS L., *Abelian Groups*, Pergamon Press, Oxford (1960).
[8] HERSTEIN I. N., *Noncommutative Rings*, The Carus Math. Monographs, The Math. Ass. of America (1968).
[9] HIGGINS P. J., *Groups with Multiple Operators*, Proc. of the London Math. Soc., **6** (1956), pp. 366-416.
[10] JACOBSON N., *Structure of Rings*, Am. Math. Soc., Coll. Publ. XXXVII, Providence (1964).
[11] KUROSH A. G., *The Theory of Groups*, vol. II, Chelsea, N. Y. (1960).
[12] KUROSH A. G., *Algèbre Générale*, Dunod, Paris (1967).
[13] MC COY N. H., *The Theory of Rings*, The Mac Millan Co., N. Y. (1967).
[14] SCORZA G., *Gruppi astratti*, Cremonese, Roma (1942).
[15] SPANICCIATI R., *Gruppi con multioperatori*, Boll. U.M.I., **6**, (Dic. 1968), pp. 736-745.
[16] ZAPPA G. e PERMUTTI R., *Gruppi, corpi, equazioni*, Feltrinelli, Milano (1963).
[17] ZAPPA G., *Fondamenti di teoria dei gruppi*, **1**, Cremonese, Roma (1965).
[18] ZASSENHAUS H., *The Theory of Groups*, Chelsea, N. Y. (1958).

A nonoscillation result for second order ordinary differential equations *

Nota di J. R. GRAEF e P. W. SPIKES
presentata dal socio corrispondente LUIGI SALVADORI

(Adunanza del 6 aprile 1974)

RIASSUNTO. — Vengono fornite condizioni sufficienti per la non oscillatorietà delle soluzioni di $(a(t)x')' + q(t)f(x) = r(t)$. La necessità delle ipotesi formulate viene inoltre mostrata con esempi.

ABSTRACT. — The authors give sufficient conditions for all solutions of $(a(t)x')' + q(t)f(x) = r(t)$ to be non-oscillatory. Examples showing the necessity of some of the hypotheses are also given.

1. - INTRODUCTION

Since the now classic paper of ATKINSON [1] was published, a great deal of work has been done on the oscillatory behavior of solutions of second order nonlinear differential equations of the type

$$(a(t)x')' + q(t)f(x) = r(t) \qquad (*)$$

particularly when $r(t) \equiv 0$. An excellent survey of known results can be found in WONG [18] and more recently COFFMAN and WONG [2, 3]. Although many results guaranteeing that equation (*) be oscillatory can be found in the literature, there are relatively few which guarantee that (*) has a nonoscillatory solution. In the latter case we refer the reader to the discussion in [2] and the results of IZYUMOVA and KIGURADZE [8], MOORE and NEHARI [10], ONOSE [14-16], and WONG [17, 18] as examples. Even fewer conditions guaranteeing that (*) be nonoscillatory are known (see [2, 3, 4, 7, 9, 11, 12]) and in most cases they are for equations less general than (*). In fact,

* Supported by the Mississippi State University Biological and Physical Sciences Research Institute.

the authors know of no such results of this type when $r(t) \not\equiv 0$. The main result in this paper, Theorem 4, gives sufficient conditions for equation (*) to be nonoscillatory without assuming that $r(t) \equiv 0$. Examples showing the necessity of some of our hypotheses are also given. In our concluding remarks we will show how our result can be extended to a more general equation.

2. - Main result

Consider the differential equation

$$(a(t)x')' + q(t)f(x) = r(t) \tag{1}$$

where a, q, r: $(t_o, \infty) \to \mathrm{R}$ and f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ are continuous, $a(t) > 0$, and $q(t) > 0$. Let $q'(t)_+ = \max\{q'(t), 0\}$ and $q'(t)_- = \max\{-q'(t), 0\}$ so that we have $q'(t) = q'(t)_+ - q'(t)_-$. Setting

$$p(t) = q(t_o) \exp\left(-\int_{t_o}^{t} [q'(s)_-/q(s)]\, ds\right)$$

and

$$\mathrm{P}(t) = \exp \int_{t_o}^{t} [q'(s)_+/q(s)]\, ds$$

we have that

$$q(t) = p(t)\,\mathrm{P}(t), \quad 0 < p(t) \leq q(t_o), \quad 1 \leq \mathrm{P}(t),$$

$p(t)$ is nonincreasing and $\mathrm{P}(t)$ is nondecreasing.

We make the following assumptions on equation (1). Assume that

$$xf(x) > 0 \quad \text{if} \quad x \neq 0, \tag{2}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{for all} \quad x, \tag{3}$$

$$\int_{t_o}^{\infty} [q'(s)_+/q(s)]\, ds < \infty, \tag{4}$$

$$a(t) \leq a_2, \tag{5}$$

and

$$\int_{t_0}^{\infty} [a'(s)_-/a(s)]\, ds < \infty . \tag{6}$$

The following theorem, which is somewhat interesting in its own right, will be used in the proof of Theorem 4.

THEOREM 1. Suppose $r(t) \equiv 0$, conditions (2)-(5) hold, $a(t) \geq a_1$ and $k > 0$ is given. If

$$\int_{t_0}^{\infty} q(s) f(ks)\, ds < \infty \left(\int_{t_0}^{\infty} q(s) f(-ks)\, ds > -\infty \right),$$

then there exists a solution $x(t)$ of (1) and $T \geq t_0$ such that $x(t) \geq a_1 k (t - T)/2 a_2$ ($x(t) \leq -a_1 k (t - T)/2 a_2$) for $t \geq T$.

PROOF. Write equation (1) as the system

$$\begin{aligned} x' &= y/a(t) \\ y' &= -q(t) f(x) . \end{aligned} \tag{7}$$

By (4), there exists $M > 0$ such that $P(t) \leq M$ for $t \geq t_0$.

Choose $T \geq t_0$ such that $\int_T^{\infty} q(s) f(ks)\, ds \leq a_1^2 k/4Ma_2$. Let $(x(t), y(t))$ be a solution of (7) such that $x(T) = 0$ and $y(T) = a_1 k$. As long as $y(t) \geq a_1 k/2$ we have $x'(t) \geq a_1 k/2 a(t) \geq a_1 k/2 a_2$ so $2 a_2 x'(t)/a_1 k \geq 1$. Integrating the second equation in (7) we obtain

$$\begin{aligned} y(t) &= y(T) - \int_T^t q(s) f(x(s))\, ds \\ &\geq y(T) - \int_T^t Mp(s) f(x(s))\, ds \\ &\geq y(T) - (2 a_2 M/a_1 k) \int_T^t p(s) f(x(s)) x'(s)\, ds. \end{aligned}$$

Now for $y(t) \geq a_1 k/2$, $x(t)$ is increasing so x^{-1} exists and in fact is increasing. Since $y'(t) \leq 0$, $y(t) \leq a_1 k$ for $t \geq \mathrm{T}$ so $x'(t) \leq a_1 k / a(t) \leq k$ and $x(t) \leq k(t - \mathrm{T})$ for $t \geq \mathrm{T}$ as long as $y(t) \geq a_1 k/2$. Hence $t \leq$ $\leq x^{-1}(k(t - \mathrm{T}))$ and letting $u = k(t - \mathrm{T})$ we have $u/k + \mathrm{T} \leq x^{-1}(u)$. Therefore

$$y(t) \geq y(\mathrm{T}) - (2 a_2 \mathrm{M}/a_1 k) \int_0^{x(t)} p(x^{-1}(u)) f(u)\, du$$

$$\geq y(\mathrm{T}) - (2 a_2 \mathrm{M}/a_1 k) \int_0^{x(t)} p(u/k + \mathrm{T}) f(u)\, du$$

$$\geq y(\mathrm{T}) - (2 a_2 \mathrm{M}/a_1 k) \int_0^{\infty} p(u/k + \mathrm{T}) f(u)\, du$$

$$\geq y(\mathrm{T}) - (2 a_2 \mathrm{M}/a_1 k) \int_T^{\infty} kp(w) f(k(w - \mathrm{T}))\, dw$$

$$\geq y(\mathrm{T}) - (2 a_2 \mathrm{M}/a_1) \int_T^{\infty} q(w) f(kw)\, dw$$

$$\geq a_1 k - (2 a_2 \mathrm{M}/a_1)(a_1^2 k/4 \mathrm{M} a_2)$$

$$= a_1 k/2.$$

Hence $y(t) \geq a_1 k/2$ for all $t \geq \mathrm{T}$ so $x(t) \geq a_1 k(t - \mathrm{T})/2 a_2$ for $t \geq \mathrm{T}$. The proof in case $\int_{t_0}^{\infty} q(s) f(-ks)\, ds > -\infty$ is similar.

The next two lemmas will also be used in the proof of Theorem 4. The first gives us a hold on solutions of (1) in case $r(t) \not\equiv 0$. The second lemma provides us with a useful inequality. It is an extension of a result which NEHARI [13] obtained for linear equations.

LEMMA 2. Suppose conditions (2), (4) and (6) hold and $\int_{t_0}^{\infty} |r(s)|\,ds < \infty$. If $x(t)$ is a solution of (1), then there exists $A > 0$ and $T \geq t_0$ such that $|x(t)| \leq At$ for $t \geq T$.

PROOF. In this proof and the next it will be convenient to have equation (1) written as the system

$$\begin{aligned} x' &= z, \\ z' &= (-a'(t)z - q(t)f(x) + r(t))/a(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Let $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ and define $V(x, z, t) = z^2/2 + q(t)F(x)/a(t)$.

Then $V' = z(-a'(t)z - q(t)f(x) + r(t))/a(t) + q(t)f(x)z/a(t) + F(x)(a(t)q'(t) - q(t)a'(t))/a^2(t) \leq a'(t)_- z^2/a(t) + r(t)z/a(t) + F(x)q'(t)_+/a(t) + F(x)q(t)a'(t)_-/a^2(t) \leq (3a'(t)_-/a(t) + q'(t)_+/q(t))V(t) + r(t)(z^2+1)/2a(t) \leq (3a'(t)_-/a(t) + q'(t)_+/q(t) + r(t)/a(t))V(t) + r(t)/2a(t)$. Integrating we have $V(t) \leq$

$$\leq V(t_0) + \int_{t_0}^{t} (3a'(s)_-/a(s) + q'(s)_+/q(s) + r(s)/2a(s))V(s)\,ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [r(s)/2a(s)]\,ds.$$

Condition (6) bounds $a(t)$ from below and hence $1/a(t)$ from above so the second integral on the right is bounded. An application of Gronwall's inequality yields that $V(t)$ is bounded for all $t \geq t_0$. Thus $z^2(t)$ and hence $z(t)$ is bounded for all $t \geq t_0$, say $|z(t)| \leq B$ for $t \geq t_0$. It follows that $|x(t)| \leq |x(t_0)| + B(t - t_0)$ and so there exists $A > 0$ and $T \geq t_0$ such that $|x(t)| \leq At$ for $t \geq T$.

LEMMA 3. Suppose $r(t) \equiv 0$, conditions (2), (3) and (5) hold, f' is nondecreasing on $[0, \infty)$ (f' is nonincreasing on $(-\infty, 0]$) and $x(t)$ is a solution of (1) such that $x(t) > 0$ ($x(t) < 0$) for $t \geq b \geq t_0$.

If $u(t)$ is a function of class C′ such that $u(b) = 0$ and $0 \leq u(t) \leq x(t)$ ($x(t) \leq u(t) \leq 0$) on $[b, c]$, then

$$\int_b^c q(t) f^2(u(t))\, dt \leq \int_b^c a(t) f'(u(t)) [u'(t)]^2\, dt.$$

PROOF. For $b \leq t \leq c$ we have $f'(u(t)) \geq 0$, $f(u(t)) \geq 0$, and $f(x(t)) > 0$ so

$$\begin{aligned}
0 &\leq \{[a(t) f'(u(t))]^{1/2} u'(t) - \\
&\quad - [a(t) f'(u(t))]^{1/2} f(u(t)) z(t)/f(x(t))\}^2 \\
&= a(t) f'(u(t)) [u'(t)]^2 + a(t) f'(u(t)) f^2(u(t)) z^2(t)/f^2(x(t)) - \\
&\quad - 2a(t) f'(u(t)) u'(t) f(u(t)) z(t)/f(x(t)) \\
&\leq a(t) f'(u(t)) [u'(t)]^2 + a(t) f'(x(t)) f^2(u(t)) z^2(t)/f^2(x(t)) - \\
&\quad - 2a(t) f'(u(t)) u'(t) f(u(t)) z(t)/f(x(t)) - \\
&\quad - f^2(u(t)) (a(t) z(t))'/f(x(t)) + f^2(u(t)) (a(t) z(t))'/f(x(t)) \\
&= a(t) f'(u(t)) [u'(t)]^2 - [f^2(u(t)) a(t) z(t)/f(x(t))]' + \\
&\quad + f^2(u(t)) (a(t) z(t))'/f(x(t)) \\
&= a(t) f'(u(t)) [u'(t)]^2 - [f^2(u(t)) a(t) z(t)/f(x(t))]' - \\
&\quad - q(t) f^2(u(t)).
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_b^c a(s) f'(u(s)) [u'(s)]^2\, ds - \int_b^c q(s) f^2(u(s))\, ds - \\
- f^2(u(c)) a(c) z(c)/f(x(c)).
\end{aligned}$$

Notice that if there exists $t_1 \geq b$ such that $a(t_1) z(t_1) = a(t_1) x'(t_1) = -N < 0$, then since $(a(t) x'(t))' = -q(t) f(x(t)) < 0$ for $t \geq t_1$, we have $a(t) x'(t) \leq -N$ for $t \geq t_1$ so $x'(t) \leq -N/a(t) \leq -N/a_2$ for $t \geq t_1$. Hence $x(t) \leq x(t_1) - N(t - t_1)/a_2 \to -\infty$ as $t \to \infty$ contradicting the fact that $x(t) > 0$. Thus $a(c) z(c) \geq 0$ and the desired inequality follows. The other half of the proof is similar and will be omitted.

When Nehari proved Lemma 3 for $f(x) = x$ and $a(t) \equiv 1$, he did not require $u(t) \leq x(t)$ ($x(t) \leq u(t)$) on $[b, c]$. To see that this restriction is necessary for nonlinear equations, consider

$$x'' + x^3/(t+2)^2 (\ln(t+2))^3 = 0, \qquad t \geq 0.$$

Now $x(t) = \ln(t+2)$ is a solution of this equation and $u(t) = t$ satisfies $u(0) = 0$ and $u(t) > x(t)$ for $t \geq 2$. If the inequality in the conclusion of Lemma 3 did hold, we would have

$$\int_0^t [s^6/(s+2)^2 (\ln(s+2))^3 - 3s^2]\, ds \leq 0$$

which is impossible since the integrand increases without bound. Notice also that strict inequality can be obtained in Lemma 3 if $u(c) > 0$.

REMARK 1. If the hypotheses of Theorem 1 are satisfied, the solution $x(t)$ in the conclusion satisfies $x(t) \geq a_1 k\, t/4\, a_2$ ($x(t) \leq$ $\leq -a_1 k\, t/4\, a_2$) for $t \geq T_1 = 2T$.

REMARK 2. A solution $x(t)$ of (1) is said to be Z-type (see [6]) if it has arbitrarily large zeros but is ultimately nonnegative or nonpositive. Observe that if $r(t) \geq 0$ and $x(t)$ is a Z-type solution of (1) such that $x(t) \leq 0$ for $t \geq t_1 \geq t_0$, then $(a(t)x'(t))' = r(t) - q(t) f(x(t)) \geq 0$ for $t \geq t_1$. Choosing $t_2 \geq t_1$ to be a zero of $x'(t)$ and integrating we have $a(t)x'(t) \geq 0$ for $t \geq t_2$. Thus $x'(t) \geq 0$ for $t \geq t_2$ which is impossible for Z-type solutions. Similarly, if $r(t) \leq 0$, then (1) can have no nonnegative Z-type solutions.

In order to prove our main result, we make the following additional assumptions:

$$r(t) \geq 0 \; (r(t) \leq 0), \tag{9}$$

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} r(s)\, ds \right| < \infty, \tag{10}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} q(s) f(ks)\, ds < \infty \; \left(\int_{t_0}^{\infty} q(s) f(-ks)\, ds > -\infty \right) \text{ for every } k > 0. \tag{11}$$

THEOREM 4. If conditions (2)-(6) and (9)-(11) hold and f' is nondecreasing on $[0, \infty)$ (nonincreasing on $(-\infty, 0]$), then all solutions of (1) are nonoscillatory.

PROOF. Suppose that (1) has a solution $u(t)$ which is either oscillatory (actually changes signs) or Z-type. By Lemma 2, there exists $A > 0$ and $T \geq t_0$ such that $|u(t)| \leq At$ for $t \geq T$. Theorem 1 and Remark 1 insure the existence of a solution $x(t)$ of the unforced equation and a number $T_1 \geq T$ such that $x(t) \geq 2At$ for $t \geq T_1$. Notice that if $u(t)$ is a Z-type solution, then $u(t)$ is ultimately nonnegative by Remark 2. Hence, in either case, there are consecutive zeros b and c of $u(t)$ such that $T_1 < b < c$ and $u(t) > 0$ for $b < t < c$. Now $[a(t)u'(t)f(u(t))]' = f(u(t))(a(t)u'(t))' + a(t)f'(u(t))[u'(t)]^2 = f(u(t))(-q(t)f(u(t)) + r(t)) + a(t)f'(u(t))[u'(t)]^2 \geq -q(t)f^2(u(t)) + a(t)f'(u(t))[u'(t)]^2$.

Integrating, we have

$$a(t)\,u'(t)\,f(u(t)) \geq \int_b^t \{a(s)\,f'(u(s))\,[u'(s)]^2 - q(s)\,f^2(u(s))\}\,ds \geq 0$$

by Lemma 3. But this implies that $u'(t) \geq 0$ for $b \leq t \leq c$ which is a contradiction. The proof of the other half of the theorem is similar.

3. - CONCLUDING REMARKS

A natural question to ask is whether condition (9) can be droped. To see that this cannot be done, consider the equation

$$x'' + x/t^3 = [t\cos(\ln t) + 3\,t\sin(\ln t) + \cos(\ln t)]/t^4, \quad t \geq 1.$$

Here $r(t)$ changes signs and we see that this equation has the oscillatory solution $x(t) = [\cos(\ln t)]/t$.

It is not very difficult to extend the results here to the equation

$$(a(t)\,x')' + q(t)\,f(x)\,g(x') = r(t) \tag{12}$$

where a, q, r and f are as before and g: $R \to R$ is positive and continuous. However, the conditions $a_1 \leq a(t)$ and $g(x') \leq c_2$ with $c_2 \leq a_1$ are needed to prove Lemma 3. Thus if $g(x') \equiv 1$ in (12) we would still need $a(t) \geq 1$ which was not required for equation (1).

Hence the result obtained for equation (12) would not be as sharp as that for (1). In addition, in order to prove Lemma 2 for (12), we would need $G(y) = \int_0^y [s/g(s)]\, ds \to \infty$ as $|y| \to \infty$ and $y^2/g(y) \leq$ $\leq MG(y)$ for some $M > 0$ and all large $|y|$. This last condition could be relaxed slightly by replacing (6) by $a'(t) \geq 0$. A discussion of the interplay in the roles of $a(t)$ and $g(x')$ for continuability and boundedness type results for equation (12) can be found in [5].

Finally, the monotonicity condition on $f'(x)$ in Theorem 4 can be replaced by the more artificial looking condition $f(x_1)/x_1 \leq f(x_2)/x_2$ for $|x_2| \geq |x_1| > 0$. In this case we can bypass Lemma 3 completely in proving Theorem 4. If in equation (12) we have $c_1 \leq g(x') \leq c_2$, then the above condition takes the form $c_2 f(x_1)/x_1 \leq c_1 f(x_2)/x_2$ for $|x_2| \geq |x_1| > 0$.

REFERENCES

[1] Atkinson F. V., *On second-order non-linear oscillations*, Pacific J. Math., **5**, pp. 643-647 (1955).

[2] Coffman C. V. and Wong J. S. W., *Oscillation and nonoscillation of solutions of generalized Emden Fowler equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **167**, pp. 399-434 (1972).

[3] Coffman C. V. and. Wong J. S. W., *Oscillation and nonoscillation theorems for second order ordinary differential equations*, Funkcial. Ekvac., **15**, pp. 119-130 (1972).

[4] Gollwitzer H. E., *Nonoscillation theorems for a nonlinear differential equation*, Proc. Amer. Math. Soc., **26**, pp. 78-84 (1970).

[5] Graef J. R. and Spikes P. W., *Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation*, J. Differential Eqs., to appear.

[6] Graef J. R. and Spikes P. W., *Continuability, boudedness and asymptotic behavior of solutions of* $x'' + q(t) f(x) = r(t)$, Ann. Mat. Pura Appl., to appear.

[7] Izyumova D. V., *On the conditions for the oscillation and nonoscillation of solutions of nonlinear second-order differential equations*, Differencial'nye Uravnenija, **2**, pp. 1572-1586 (1966).

[8] Izyumova D. V. and Kiguradze I. T., *Some remarks on solutions of the equation* $u'' + a(t) f(u) = 0$, Differencial'nye Uravnenija, **4**, pp. 589-605, (1968).

[9] Macki J. W. and Wong J. S. W., *Oscillation of solutions to second-order nonlinear differential equations*, Pacific J. Math., **24**, pp. 111-117 (1968).

[10] Moore R. A. and Nehari Z., *Nonoscillation theorems for a class of nonlinear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **93**, pp. 30-52 (1959).

[11] Nehari Z., *A nonlinear oscillation problem*, J. Differential Eqs., **5**, pp. 452-460 (1969).

[12] Nehari Z., *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**, pp. 101-123 (1960).

[13] Nehari Z., *Oscillation criteria for second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **85**, pp. 428-445 (1957).

[14] ONOSE H., *On oscillations for solutions of* n^{th} *order differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **33**, pp. 495-500 (1972).

[15] ONOSE H., *Oscillatory properties of solutions of even order differential equations*, Pacific J. Math., **38**, pp. 747-757 (1971).

[16] ONOSE H., *Oscillatory property of certain nonlinear ordinary differential equations*, SIAM J. Appl. Math., **18**, pp. 715-719 (1970).

[17] WONG J. S. W., *A note on second order nonlinear oscillation*, SIAM Review, **10**, pp. 88-91 (1968).

[18] WONG J. S. W., *On second order nonlinear oscillation*, Funkcial. Ekvac., **11**, pp. 207-234 (1969).

Sulle cellule neurosecretrici di *Sipunculus nudus* (Sipunculoidei)

Nota di STEFANO BIANCHI
presentata dal socio ordinario BALDASSARRE DE LERMA

(Adunanza del 6 aprile 1974)

RIASSUNTO. — È stata effettuata una ricerca istochimica sulle cellule neurosecretrici (neuroni giganti, neuroni di taglia media, cellule bipolari) di *Sipunculus nudus*. È risultato che le cellule bipolari contengono una secrezione peptidica, mentre il secreto dei neuroni giganti è di natura lipidica. I neuroni di taglia media non possono essere dimostrati con i tests impiegati.

SUMMARY. — Preliminary histochemical researches on the neurosecretory cells of *Sipunculus nudus*. A preliminary histochemical research has been carried out on the neurosecretory cells (giant neurones, neurones of medium size, bipolar cells) of *Sipunculus nudus* and it results that the bipolar cells elaborate a peptide neurosecretion, while the secretion of the giant neurones is a lipid one. The neurones of medium size are not demonstrable with the tests adopted.

Nei gangli cerebrali di *Sipunculus nudus* si possono osservare secondo GABE ([1], [2]; cfr. ÅKESSON, [3]; CARLISLE, [4]), 3 tipi di cellule neurosecretrici: neuroni giganti, neuroni di taglia media e cellule bipolari. I neuroni giganti (3° tipo di Métalnikoff) sono localizzati nella regione mediale posteriore dei gangli cerebrali. Il neurosecreto è localizzato nel citoplasma periferico (GABE, [1]). I neuroni di grandezza media (2° tipo di Métalnikoff) si trovano sopra e sotto la commessura trasversale. Il neurosecreto, secondo GABE [1], è costituito da piccoli granuli ammassati. Le cellule bipolari (cellule fusiformi di Métalnikoff) si trovano alla base del prolungamento digitiforme. Il neurosecreto è distribuito uniformemente nel citoplasma (ÅKESSON, [3]; GABE, [2]).

I particolari istologici delle cellule neurosecretrici di *Sipunculus* sono stati ben studiati (GABE, [1]; ÅKESSON, [3]; CARLISLE, [4]; GABE, [2]). Secondo GABE [1], [2] il neurosecreto dei neuroni giganti si colora in blu chiaro con il metodo di Gomori e con la fucsina-paral-

deide; il neurosecreto dei neuroni di grandezza media si colora con i coloranti acidi, con l'azocarminio e con l'ematossilina ferrica. Il neurosecreto delle cellule bipolari si colora intensamente con il Gomori e con la fucsina-paraldeide (ÅKESSON, [3]; cfr. GABE, [2]).

Al contrario, i risultati dell'esame istochimico del neurosecreto delle cellule in questione sono ancora frammentari (GABE, [1]; [2]).

Questo lavoro riassume i risultati ottenuti in una ricerca preliminare sulle proprietà istochimiche del neurosecreto delle cellule neurosecretrici di *Sipunculus nudus.*

METODI.

Gli animali, raccolti nel golfo di Napoli, sono stati fissati in Bouin ed in formalina al 10 %, tagliati in sezioni di 7 μ e colorati con la fucsina-paraldeide (PF) e con il metodo di Gomori all'ematossilina cromica-floxina. Sono stati adoperati i seguenti tests istochimici: *acido performico - alcian blu* (PFAAB), *diidrossi-dinaftile-disolfuro* (DDD) e *tetrazolio alcalino,* per i gruppi -SH e -SS- di origine proteica; *acido-periodico-Schiff* (PAS), per i glicidi contenenti il radicale glicolico; *Sudan nero B* (SBB), per i lipidi in generale (cfr. LISON, [5]; PEARSE, [6]).

RISULTATI E DISCUSSIONE.

I dati relativi alle proprietà istochimiche delle cellule neurosecretrici di *Sipunculus* sono riassunti nella tabella I.

TABELLA I

Istochimica delle cellule neurosecretrici di Sipunculus nudus.

Metodo	Neuroni giganti	Neuroni di grandezza media	Cellule bipolari
PFAAB	—	—	+++
DDD	—	—	+++
Tetrazolio alcalino	++ (rosso)	—	+++ (blu)
PAS	—	—	—
SBB	+++	—	—

— = reazione negativa; +, ++, +++ = reazione più o meno intensamente positiva.

PFAAB. Il neurosecreto delle cellule bipolari si colora in blu. Questo risultato suggerisce la presenza di quantità considerevoli di radicali disolfurici nel neurosecreto di queste cellule. Il secreto dei neuroni giganti è completamente negativo. I neuroni di grandezza media non si possono dimostrare con il test in questione.

DDD. La tecnica al DDD è specifica per la dimostrazione dei radicali solfidrilici. Essa viene impiegata anche per la dimostrazione dei radicali disolfurici. Il DDD dà una reazione positiva nelle cellule bipolari. Nel citoplasma dei neuroni giganti e dei neuroni di grandezza media la reazione è negativa.

Tetrazolio alcalino. Con questa tecnica il neurosecreto dei neuroni bipolari si colora in blu. Ciò indica la presenza di radicali -SH e -SS- di origine proteica. Il secreto dei neuroni giganti si colora debolmente in rosso. Nel citoplasma dei neuroni di grandezza media la reazione è negativa.

PAS. Con il PAS non può essere dimostrata alcuna struttura nel citoplasma delle cellule neurosecretrici.

SBB. Con questo metodo il secreto dei neuroni giganti si colora intensamente in blu nero. Nelle cellule bipolari e nei neuroni di grandezza media il test dà una reazione negativa.

Risulta dai tests istochimici suddetti che il neurosecreto delle cellule bipolari è di natura peptidica, mentre i granuli dei neuroni giganti sono di natura lipidica. È opportuno sottolineare a tal riguardo che nell'Oligochete *Echytraeus albidus* esiste un tipo cellulare (cellula P) ritenuto neurosecretore, che elabora un secreto di natura prevalentemente lipidica (Bianchi, [7]).

Un lavoro di Gabe [1] indica la presenza di una componente glicidica nei neuroni giganti e nei neuroni di grandezza media di *Sipunculus*, ma noi non possiamo confermare questo dato.

Sono in corso su questo argomento ulteriori ricerche.

Istituto di Zoologia dell'Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gabe M., *Donnés histologiques sur la neurosécrétion chez quelques Sipunculiens*, Bull. Lab. Marit. Dinard, **38**, pp. 3-15 (1953).

[2] Gabe M., *Neurosecretion*, Macmillan (Pergamon), New York (1966).

[3] Åkesson B., *A study of the nervous system of the Sipunculoideae*, Undersöknigar över Oresund, **28**, pp. 1-249 (1958).

[4] CARLISLE D. B., *On the neurosecretory system of the brain and associated structures in* Sipunculus nudus, *with a note on the cuticle*, Gunma J. med. Sci., **8**, pp. 183-194 (1959).

[5] LISON L., *Histochimie et cytochimie animale*, 3ªed., Gauthier-Villars, Parigi (1960).

[6] PEARSE A. G. E., *Histochemistry*, Churchill, Londra (1968).

[7] BIANCHI S., *A histochemical investigation of neurosecretion in Enchytraeus albidus* (*Enchytraeidae*), Gen. Comp. Endocrinol., 22, pp. 454-458 (1974).

Inversione del bradisismo flegreo
Considerazioni gravimetriche e tiltmetriche

Nota di VITO BONASIA * e di SERGIO MONTAGNA *
presentata dal socio ordinario GIUSEPPE IMBÒ

(Adunanza del 4 maggio 1974)

RIASSUNTO. — Diverse serie di misure gravimetriche effettuate nell'area flegrea a partire dal febbraio 1970 permettono di ipotizzare una intrusione magmatica quale causa iniziale dell'inversione del bradisismo. Anche in base ai dati altimetrici nell'area di Pozzuoli si deduce inoltre come l'andamento temporale del sollevamento del suolo possa essere imputato ad un comportamento visco-elastico delle vulcaniti ricoprenti il settore vulcanico puteolano.

SUMMARY. — Several gravimetric measuraments were carried out in the Phlegraean area. The gravimetric trend is consistent with initial magmatic intrusion. Also from the altimetric variations it is possible to deduce that the upheaval may be caused by visco-elastic behavior of the material covering the phlegraean volcanic area.

Il fenomeno bradisismico viene considerato quale espressione della locale attività dell'area flegrea, comprendente il golfo di Pozzuoli e le zone di terraferma adiacenti.

È noto, almeno in base ai segni lasciati dal mare sulle colonne del Serapeo, che il moto bradisismico, dall'epoca della costruzione del Serapeo intorno al 200 a. C. e fino all'anno 1000, sia stato discendente, con una velocità media annua valutabile intorno ad 1 cm. In corrispondenza dell'ultima data si sarebbe avuta un'inversione del moto, con un incremento nel gradiente di sollevamento intorno all'anno 1500 e perdurante fino al 1538, anno in cui si ebbe l'ultima manifestazione eruttiva dell'area flegrea (eruzione del Monte Nuovo). Notizie storiche indicherebbero un sollevamento di circa 6 metri prima dell'evento eruttivo (PARASCANDOLA, 1947).

* Osservatorio Vesuviano - Ercolano (Napoli).

Dopo l'eruzione il senso del moto cambiò, proseguendo, almeno negli ultimi due secoli, con un gradiente medio di 1.3 cm/anno (OLIVERI, 1960) fino all'epoca delle ultime osservazioni eseguite tra la metà e la fine del 1968 (CORRADO e PALUMBO, 1968).

Il 6 febbraio 1970, da osservazioni effettuate da OLIVERI (IMBÒ, 1971), veniva rilevata un'ulteriore inversione del moto, riscontrandosi, rispetto alle misure del 1968 al Serapeo, un sollevamento di quasi 90 cm.

Pur mancando indicazioni precise circa l'epoca in cui sia avvenuta tale inversione, sembrerebbe, da misure mareometriche, che tale epoca possa fissarsi successivamente all'aprile 1969, come dal grafico della figura 1 (CORRADO e PALUMBO, 1973).

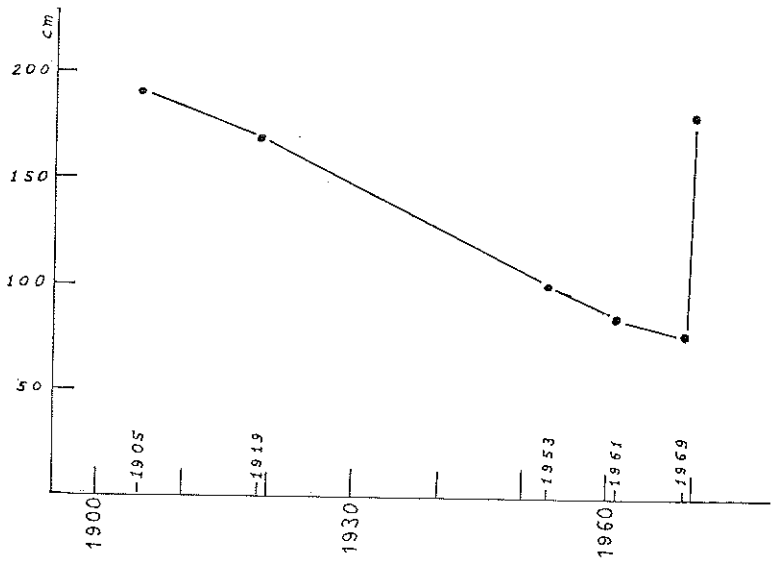


FIG. 1. - Andamento del bradisismo nell'intervallo 1900-1970.

L'avvenuta inversione e l'entità del sollevamento consentirono all'Osservatorio Vesuviano l'attuazione di un vasto programma di ricerche per lo studio del fenomeno, programma già auspicato nel passato ma non portato a realizzazione per mancanza di mezzi e personale.

In tale quadro generale, a partire dal febbraio 1970, sono state eseguite osservazioni gravimetriche lungo l'arco costiero da Bacoli a Bagnoli. I risultati di tali osservazioni vengono esaminati in re-

lazione alle variazioni altimetriche dedotte periodicamente dal Provveditorato alle Opere Pubbliche della Campania, dall'Istituto di Topografia del Politecnico di Napoli, nonché da uno degli autori.

Osservazioni gravimetriche

Nel 1963, su richiesta dell'Osservatorio Vesuviano, fu effettuato un rilevamento gravimetrico dell'area flegrea a cura del Servizio Geologico d'Italia (Maino et al., 1963). La distribuzione delle anomalie del Bouguer mostra un minimo al centro dell'area puteolana (zona di massimo sollevamento), giustificato dalla bassa densità del materiale piroclastico. L'andamento del minimo gravimetrico (figura 2)

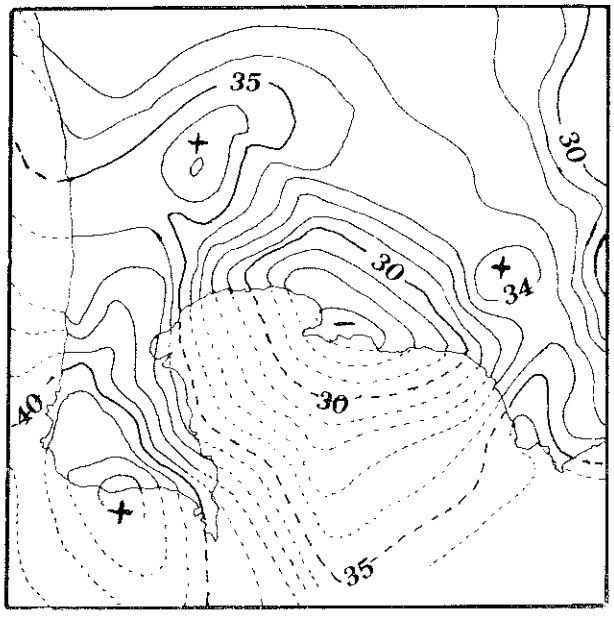


Fig. 2. - Anomalie de Bouguer del settore puteolano (da Maino et al., 1963).

evidenzia un'area circoscritta, strettamente coincidente con la zona interessata dal fenomeno bradisismico ed indicante il settore eruttivo, contornato da fratture ai sui margini continentali (Maino et al., 1963).

Un modello gravimetrico bidimensionale relativo all'area flegrea (Oliveri, 1969) indica uno spessore della pila piroclastica variabile da 1.5 Km ai bordi a 3.5 Km al centro della conca flegrea.

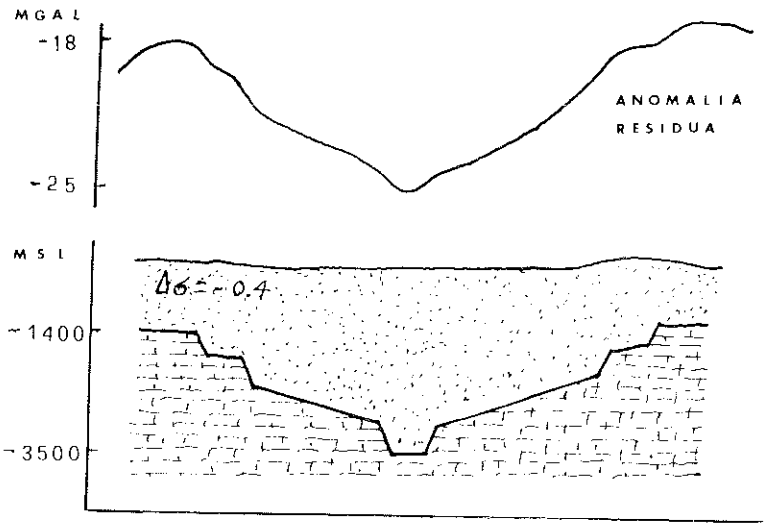


FIG. 3. - Modello bidimensionale della conca puteolana (da OLIVERI et al., 1969).

Le misure di g sono state effettuate periodicamente in alcuni punti stazione del citato rilevamento con lo scopo sia di dedurre eventuali variazioni di gravità verificatesi nell'intervallo di tempo tra

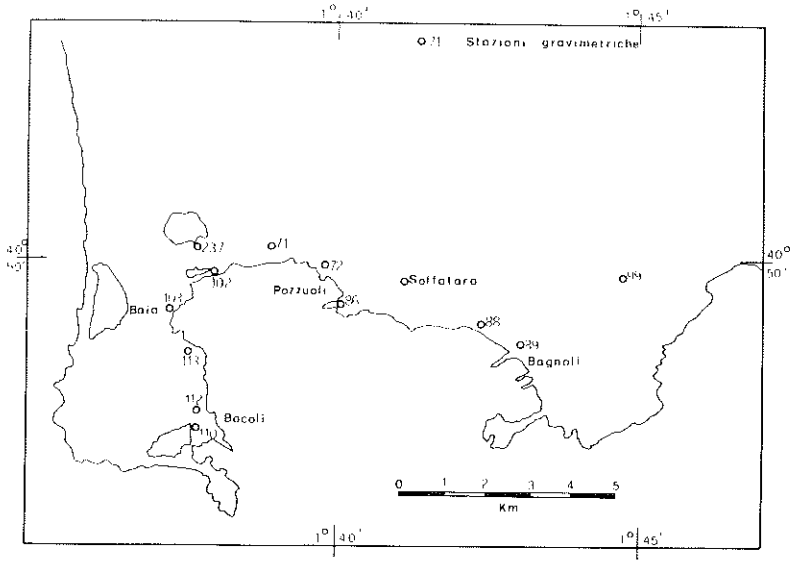


FIG. 4. - Ubicazione delle stazioni gravimetriche.

il 1963 e l'epoca in cui fu notata l'inversione del bradisismo, sia di seguire l'evolversi del fenomeno dopo l'avvenuta inversione.

Si è adoperato un gravimetrico Worden, Mod. Prospector, usando i possibili accorgimenti per la migliore accuratezza delle osservazioni (circuiti di misura in tempi brevi, misure eseguite di notte per evitare le perturbazioni del traffico, ecc.).

Quale punto di riferimento per le osservazioni di g è stata scelta la stazione n. 99 del rilevamento del Servizio Geologico, di coordinate $\lambda = 40^{\circ}\,49'\,51''$ e $\varphi = 1^{\circ}\,44'\,20''$; tale stazione, ubicata nella parte occidentale di Napoli, è situata in una zona non interessata dal bra-

TABELLA

Stazione	1963	18-2-1970			13-3-1970			30-6-197(
	Δg_o mgal	Δg_o mgal	Δh cm	Δg_T mgal	Δg_o mgal	Δh cm	Δg_T mgal	Δg_o mgal
89	8.43	— —	20	−0.05	8.43± 0.02	22	−0.05	8.42± 0.0
88	6.10	6.08± 0.04	36	−0.09	5.95 0.03	40	−0.10	5.94 0.0
Solfatara	−16.21	−16.36 0.02	62	−0.15	−16.41 0.03	68	−0.16	−16.46 0.0
86	5.76	5.80 0.02	90	−0.22	5.58 0.05	97	−0.23	5.54 0.0
72	− 2.90	− 2.79 0.03	70	−0.17	− 3.04 0.04	74	−0.18	− 3.02 0.0
71	4.05	4.25 0.03	51	−0.12	3.96 0.05	52	−0.12	3.97 0.0
237	14.88	15.06 0.04	29	−0.07	14.81 0.04	29	−0.07	14.82 0.0
102	12.16	12.23 0.03	37	−0.09	12.06 0.02	38	−0.09	12.00 0.0
103	12.98	13.19 0.02	20	−0.05	12.97 0.04	20	−0.05	12.95 0.0
113	12.82	13.07 0.03	20	−0.05	12.89 0.03	20	−0.05	12.84 0.0
112	7.28	7.51 0.02	20	−0.05	7.37 0.01	21	−0.05	7.29 0.0
110	15.16	15.43 0.04	20	−0.05	15.27 0.05	20	−0.05	15.19 0.0

disismo o al limite di esso, almeno per quanto rilevabile dalle periodiche livellazioni eseguite dal Provveditorato alle Opere Pubbliche.

Nella Tabella I sono riportate le variazioni Δg_o attribuite alla data segnata (media delle variazioni di g in tempi diversi), con l'indicazione della variazione di altezza Δh relativa al punto di misura, nonché la variazione teorica Δg_T che si sarebbe dovuta riscontrare in relazione alla variazione di quota, per gli effetti combinati di aria libera e di Bouguer. Per la serie del 2-9-1972 manca l'indicazione della variazione di quota non essendo disponibili i dati altimetrici per tutto l'arco costiero.

		20-1-1971			30-11-1971			2-9-1972	
Δh cm	Δg_T mgal	Δg_o mgal	Δh cm	Δg_T mgal	Δg_o mgal	Δh cm	Δg_T mgal	Δg_o mgal	
7	−0.06	8.31± 0.01	31	−0.07	8.36	±0.03	36	−0.09	8.35± 0.02
8	−0.12	5.85 0.01	57	−0.14	5.87	0.03	68	−0.16	5.85 0.02
9	−0.19	−16.50 0.02	95	−0.23	−16.56	0.03	115	−0.28	−16.55 0.03
2	−0.27	5.52 0.01	128	−0.31	5.40	0.05	150	−0.36	5.37 0.02
2	−0.20	− 3.03 0.05	96	−0.23	− 3.08	0.03	113	−0.27	− 3.14 0.04
4	−0.13	4.03 0.04	62	−0.15	4.00	0.03	72	−0.17	3.92 0.02
0	−0.07	14.84 0.02	31	−0.07	14.87	0.03	34	−0.08	14.78 0.03
9	−0.09	12.00 0.01	42	−0.10	12.03	0.05	47	−0.11	11.91 0.03
	−0.05	12.96 0.01	22	−0.05	12.97	0.04	26	−0.06	12.87 0.02
	−0.05	12.84 0.02	23	−0.06	12.85	0.05	28	−0.07	12.81 0.03
	−0.05	7.28 0.01	24	−0.06	7.33	0.04	28	−0.07	7.28 0.03
	−0.05	15.20 0.01	23	−0.06	15.24	0.04	26	−0.06	15.18 0.02

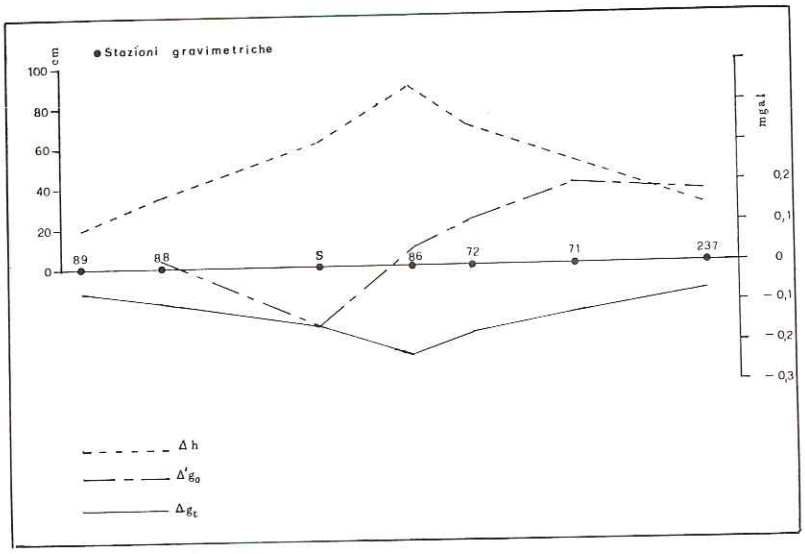


FIG. 5. a

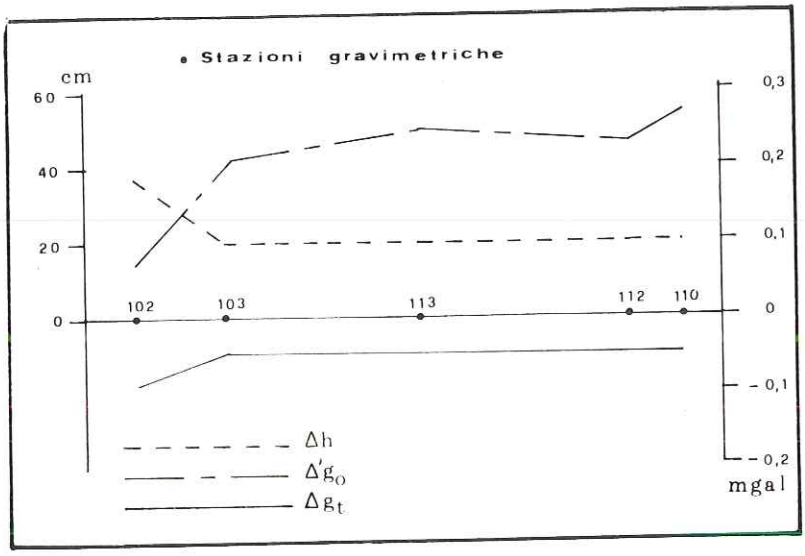


FIG. 5. b

FIG. 5. (a, b) - Variazione di g nell'intervallo 1963 - 18-2-1970.

Nelle figure 5-9 sono mostrati per ciascuna serie e per ciascun punto di osservazione:

a) gli scostamenti $\Delta' g_o$ della gravità osservata rispetto ai valori del 1963;

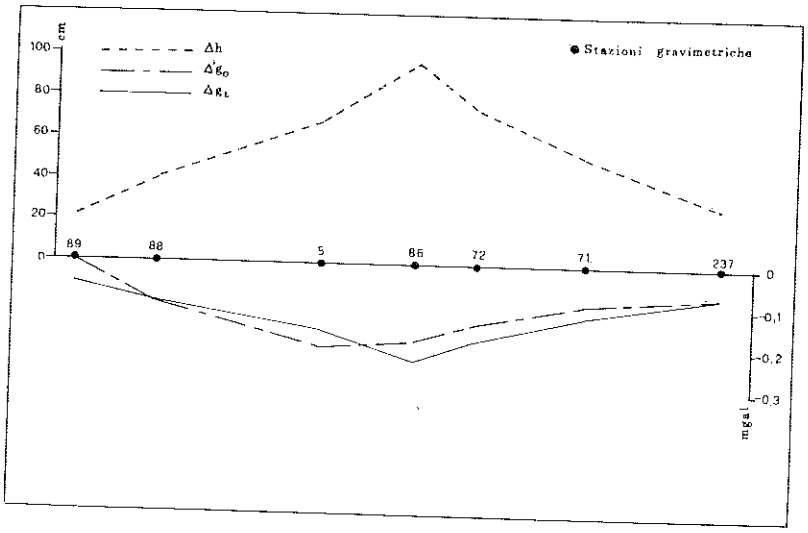


FIG. 6. a

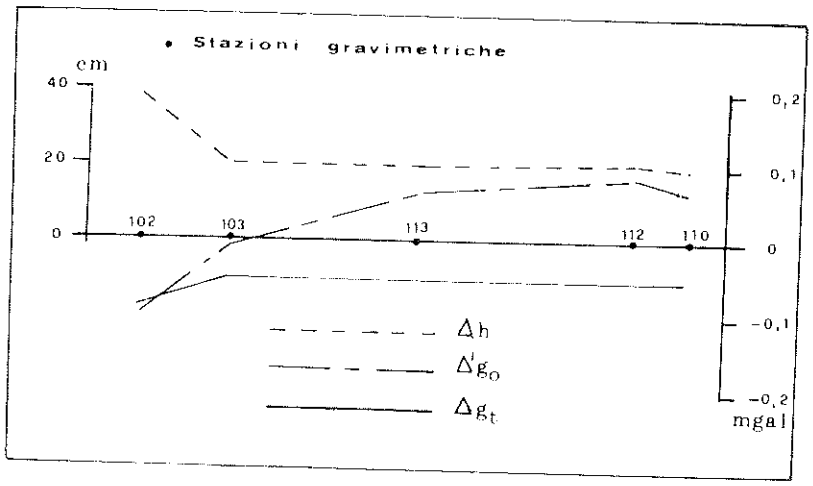


FIG. 6. b

FIG. 6. (a, b) - Variazione di g nell'intervallo 1963 - 13-3-1970.

b) le variazioni di quota in riferimento al 1963;

c) la variazione teorica Δg_T relativa alla variazione di quota.

Dai grafici risulta evidente che nella serie del 18-2-1970 per tutti i punti ad occidente del porto di Pozzuoli si sia riscontrata una variazione positiva di g ($\Delta' g_o - \Delta g_T$) valutabile mediamente intorno a 0,3 mgal.

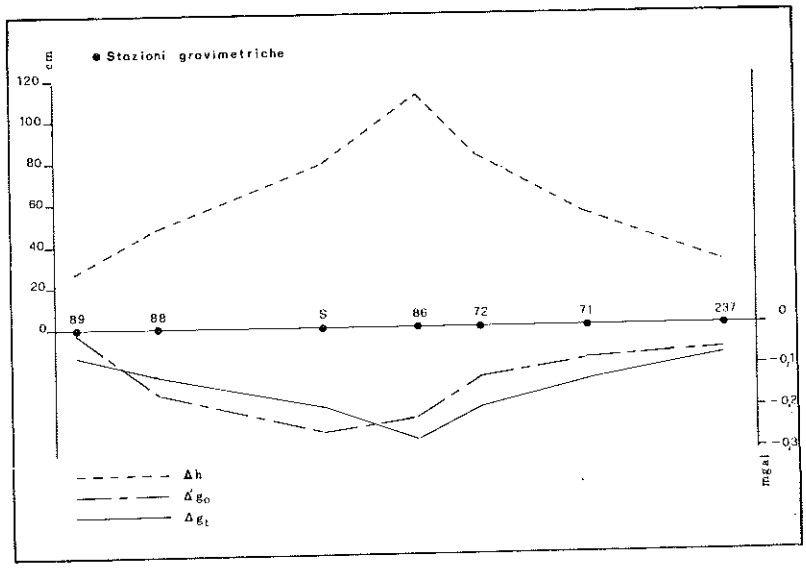


FIG. 7. a

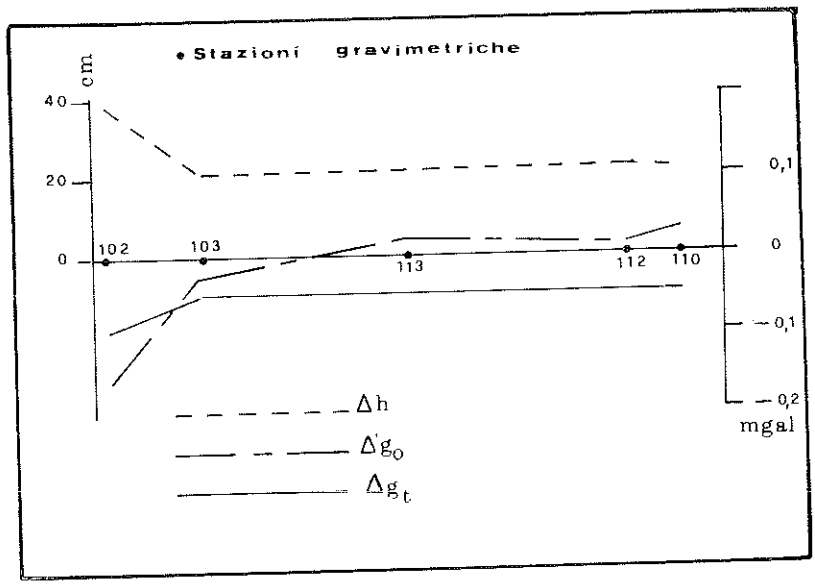


FIG. 7. b

FIG. 7. (a, b) - Variazione di g nell'intervallo 1963 - 30-6-1970.

Nelle serie successive, pur mantenendosi i valori osservati più elevati rispetto a quelli del 1963, almeno entro i limiti degli errori si nota un buon accordo fra valori osservati e valori teorici.

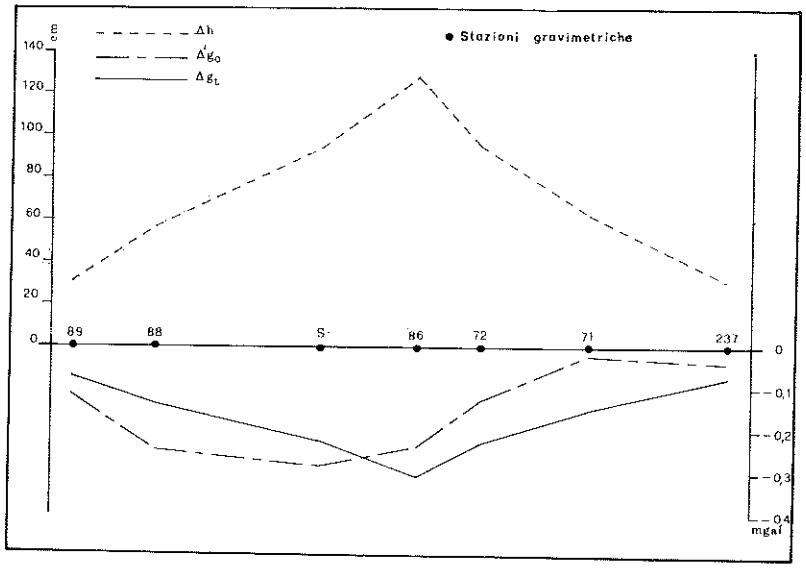


FIG. 8. a

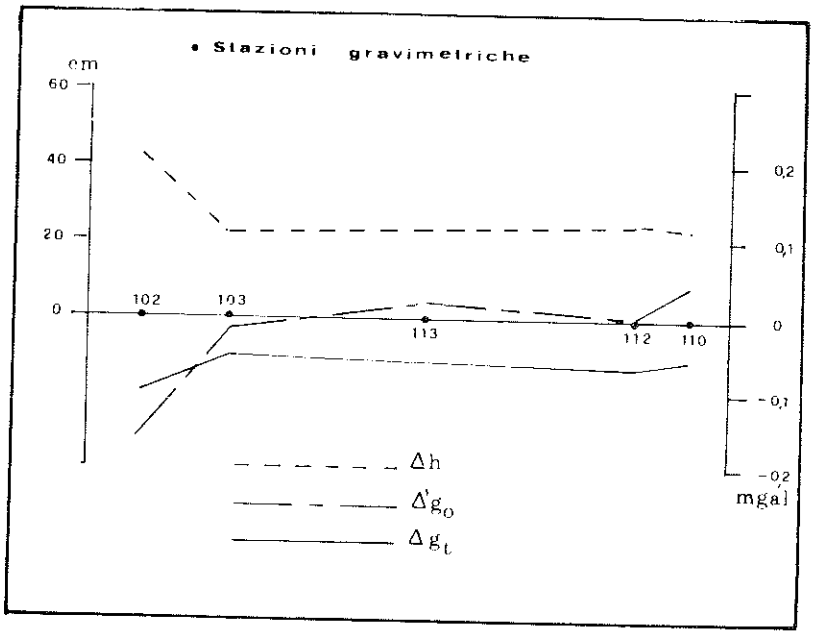


FIG. 8. b

FIG. 8. (a, b) - Variazione di g nell'intervallo 1963 - 20-1-1971.

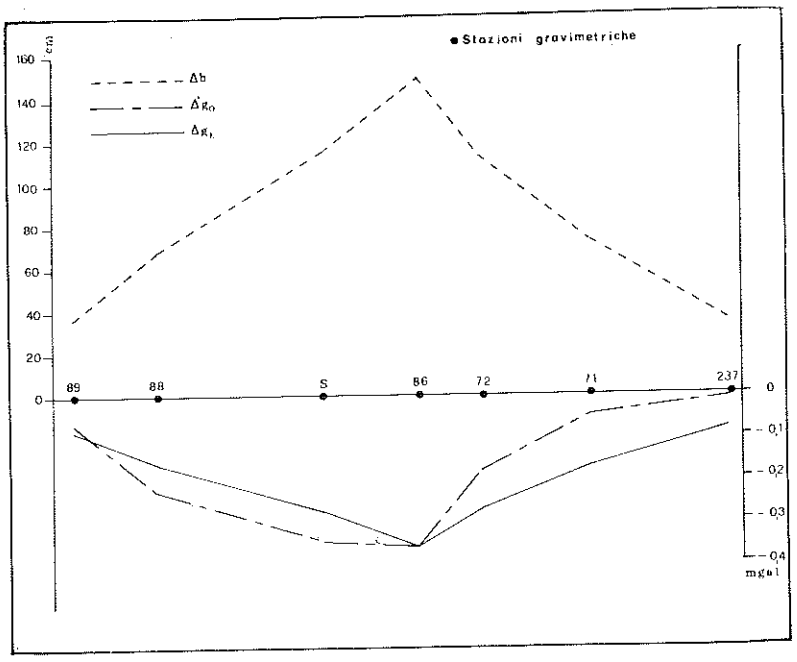


FIG. 9. a

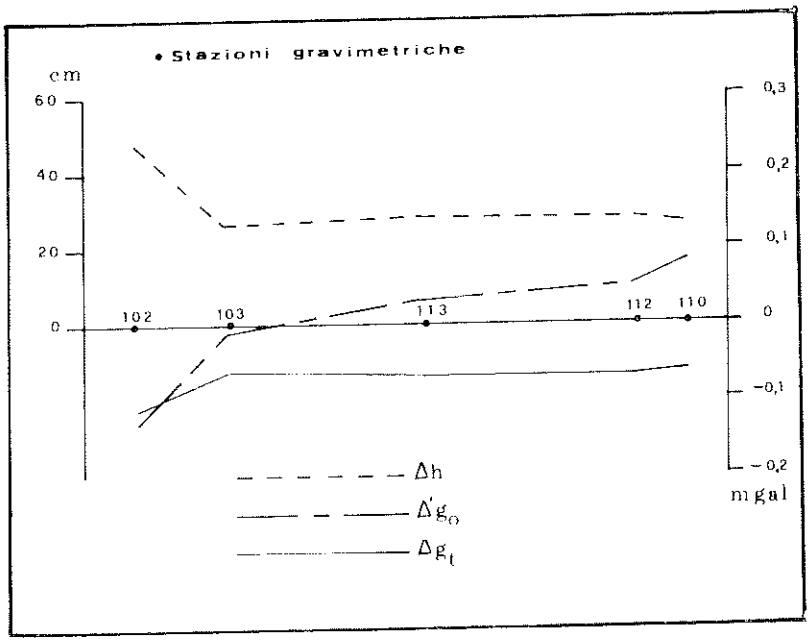


FIG. 9. b

FIG. 9. (a, b) - Variazione di g nell'intervallo 1963 - 30-11-1971.

Per la serie del 18-2-1970 l'entità della variazione di g relativa a ciascuna stazione è riportata nella fig. 10.

Esaminando la distribuzione degli ipocentri sismici (LECHI et al., 1971) si può rilevare un'ottima corrispondenza fra le aree epicentrali e le zone di aumento gravimetrico. Quest'ultimo potrebbe essere imputato a variazione di masse in alcune fratture interessanti il settore eruttivo puteolano, quale quella da Miseno a Lucrino (RITMANN et al., 1950; MAINO et al., 1963) e quelle da Lucrino a Pozzuoli (MONTAGNA et al., 1971; LECHI et al., 1971).

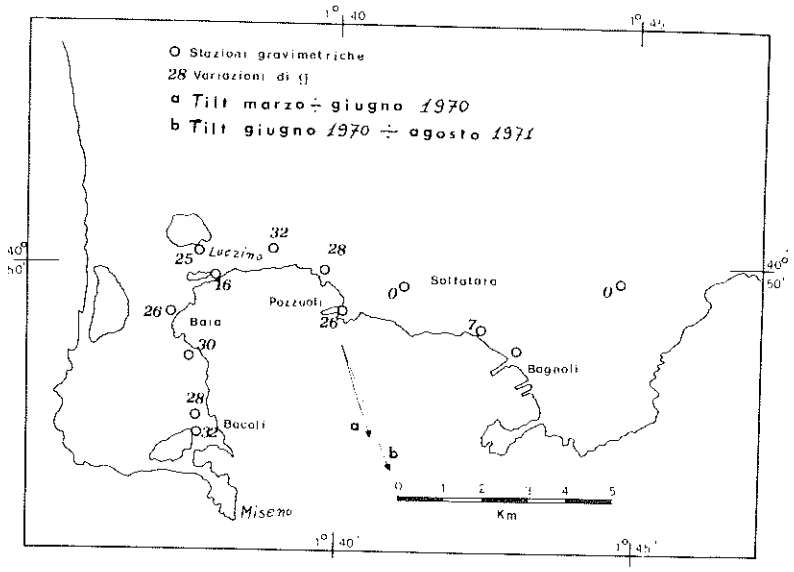


FIG. 10. - Variazione della gravità per la serie del 18-2-1970 e vettori tiltmetrici per i periodi indicati.

Sebbene l'entità delle variazioni gravimetriche non consenta una trattazione analitica dei risultati, la loro regolare distribuzione lungo l'arco costiero da Pozzuoli a Bacoli lascerebbe anche ipotizzare che la variazione di massa relativa all'aumento di gravità possa essersi verificato in una zona di mare fra Baia e Pozzuoli. Configurando una tale massa ($\Delta\sigma = 0.5$ g/cc) con un cilindro verticale indefinito verso il basso e assumento, per fissare un ordine di grandezza, quale profondità del suo top, $h = 3000$ m, cioè la base della conca puteolana, la variazione di g viene giustificata da una tale forma cilindrica con raggio di circa 300 metri.

TILTMETRIA

Sono stati presi in considerazione i risultati delle livellazioni effettuate nell'area flegrea allo scopo di dedurre l'entità della deformazione, intesa come inclinazione della superficie terrestre, connessa con il fenomeno bradisismico.

Quale punto di riferimento è stato assunto il Porto di Pozzuoli, corrispondente grosso modo al punto di massimo sollevamento. Il vettore tiltmetrico è stato determinato applicando il metodo dei minimi quadrati alla relazione (MINAKAMI, 1969):

$$\frac{\Delta h_i}{L_i} = K \cos(\varphi - \varphi_i)$$

In tale relazione i simboli indicano rispettivamente:

K — entità dell'inclinazione in radianti;

φ — angolo azimutale della direzione d'inclinazione;

Δh_i — spostamento verticale relativo dell'i.mo caposaldo;

L_i — distanza dell'i.mo caposaldo rispetto a quello fisso;

φ_i — angolo azimutale dell'i.mo caposaldo rispetto a quello fisso.

Assumendo quale tempo di riferimento il marzo 1970 è stato possibile determinare il vettore tiltmetrico solamente nei periodi Marzo - Giugno 1970 e Giugno 1970 - Agosto 1971, per i quali erano disponibili quasi simultaneamente i dati delle livellazioni per l'intero arco costiero coperto dalle osservazioni gravimetriche (Bacoli, Baia, Pozzuoli, Bagnoli).

In Tabella II sono risportati l'intensità d'inclinazione e l'azimut della direzione d'inclinazione; il loro andamento è riportato nella figura 10.

TABELLA II

Intensità d'inclinazione	Azimut	Periodo
-4.3×10^{-5} R	160° 04′	Giugno 1970 - Agosto 1971
-6.4×10^{-5} R	159° 17′	Marzo - Giugno 1970

Ne risulta per i due periodi considerati un diverso gradiente medio d'inclinazione; esso ammonta a 1.1×10^{-5} R/mese per il periodo Marzo - Giugno 1970 e 0.4×10^{-5} R/mese per il periogo Giugno 1970 - Agosto 1971.

Conclusione

L'insieme delle osservazioni gravimetriche effettuate nell'area flegrea interessata dal fenomeno bradisismico e il loro confronto con le misure precedenti del 1963 consente di affermare che la causa del sollevamento del suolo, almeno inizialmente, possa essere attribuita a variazione di massa, quasi sicuramente identificabile nel nostro caso con una intrusione di magma.

La distribuzione delle variazioni positive di gravità indicherebbe che una tale intrisione possa aver avuto luogo nelle fratture delimitanti il golfo di Pozzuoli nella sua parte occidentale; la stessa distribuzione lascerebbe anche ipotizzare che masse magmatiche possano aver interessato una zona al centro del golfo Bacoli-Baia-Pozzuoli.

Pur non avendo elementi sulla sismicità normale della zona flegrea è da tener presente che dal febbraio 1970 (epoca di installazione delle stazioni sismiche) sono state rilevate quasi unicamente microscosse. Yokoyama (1971) suggerisce che il sollevamento del suolo flegreo, non accompagnato da terremoti piuttosto intensi, possa intendersi come « una fase di attività visco-elastica del materiale superficiale crostale ».

Una tale interpretazione viene confermata dai dati gravimetrici e dalla variazione nel tempo del gradiente tiltmetrico.

Il fenomeno bradisismico sembra quindi potersi mettere in relazione « con un processo di degassazione da parte di masse magmatiche che, per intrusione, avrebbero raggiunto minori profondità » (Imbò, 1971).

È logico ammettere che una tale intrusione ha determinato un aumento della quantità di calore somministrata dal basso alla coltre di vulcaniti, che, con spessore variabile, ricopre il settore vulcanico puteolano. E, come previsto (Oliveri e Quagliariello, 1969), il sollevamento del suolo è avvenuto in maniera differenziale e proporzionale alla potenza dello strato piroclastico di copertura.

Inoltre, la diminuzione delle variazioni gravimetriche dopo la serie di misure del 18-2-1970 potrebbe essere giustificata dagli effetti derivanti dal graduale aumento di pressione, con conseguente au-

mento nel flusso orizzontale delle acque che impregnano il sottosuolo flegreo [1] (IMBÒ, 1971).

Concludendo, si è dell'avviso che l'inversione del moto bradisismico puteolano sia attribuibile a due cause distinte, di cui la seconda strettamente legata alla prima; una causa meccanica (intrusione iniziale di masse magmatiche forse al centro del golfo di Baia) e una causa termica, a cui possono attribuirsi le crisi sismiche locali, imputabili, in accordo con OLIVERI e QUAGLIARIELLO (1969), alla microfrantumazione dello scheletro di zolle dello strato poroso.

Una ulteriore serie di misure gravimetriche effettuate nell'agosto 1973 non ha fornito alcuna variazione nei valori di gravità rispetto a quelli ottenuti nel settembre 1972.

BIBLIOGRAFIA

C4RRADO G. e PALUMBO A., *Osservazioni sul bradisismo flegreo*, Boll. Soc. Natur., **77** (1968).

CORRADO G. e PALUMBO A., *Comunicazione personale* (1973).

IMBÒ G., *Inversione del bradisismo flegreo*, Boll. Soc. Natur., **79** (1971). 3

LECHI G., LO BASCIO A., LUONGO G., MANZONI G., MARINO C., NAZZARO A., RAMPOLDI R., SCARASCIA S., TONELLI G., *Report on the Pozzuoli event*, presentato all'Ass. Int. Vulcan., Mosca 1971 (1971).

MAINO A., SEGRE A., TRIBALTO G., *Rilevamento gravimetrico dei Campi flegrei e dell'isola d'Ischia*, Ann. Oss. Vesuv., S. VI, **5** (1963).

MINAKAMI T., *Crustal deformation inside the Kakuto caldera relating to the 1968 Ebino earthquakes*, B.E.R.I., **47** (1969).

OLIVERI DEL CASTILLO A., *Studio del bradisismo flegreo mediante osservazioni mareografiche*, Atti Ass. Geof. Ital. (1960).

OLIVERI DEL CASTILLO A. e QUAGLIARIELLO M. T., *Sulla genesi del bradisismo flegreo*, Atti Ass. Geof. Ital. (1969).

PARASCANDOLA A., *I fenomeni bradisismici del Serapeo di Pozzuoli*, Napoli, 1947 (1947).

YOKOYAMA I., *Pozzuoli event in 1970*, Nature, **229** (1971).

[1] Non si è effettuata una trattazione quantitativa per insufficienza di dati a disposizione (a causa principalmente della configurazione topografica locale) che potessero permettere una soluzione univoca del problema.

Un criterio di stabilità asintotica per una classe di fenomeni dissipativi *

Nota di ARMANDO D'ANNA e PASQUALE RENNO
presentata dal socio corrispondente FRANCESCO STOPPELLI

(Adunanza dell' 1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — In questa Nota dimostriamo un criterio di stabilità asintotica per la soluzione di un problema al contorno relativo ad un'equazione di tipo iperbolico che interviene nello studio di numerosi fenomeni di propagazione in presenza di cause dissipative. Dopo aver dimostrato l'esistenza ed unicità di un'opportuna soluzione debole del problema ed avere introdotto, in corrispondenza, un sistema dinamico in uno spazio di Banach, perveniamo al criterio detto considerando un funzionale di tipo Liapunov ed utilizzando un metodo di J. K. Hale. A titolo di esempio applichiamo poi i risultati ottenuti all'analisi delle oscillazioni longitudinali in una sbarra costituita da un particolare materiale viscoelastico.

ABSTRACT. — The object of this article is to present sufficient conditions of asymptotic stability for the solution of a boundary value problem concerning an hyperbolic equation which appears in numerous phenomena of propagation when dissipative processes occur. After showing the existence and uniqueness of the weak solution of the problem and introducing an appropriate dynamic system in a Banach space, we obtain the above mentioned theorem making use a Liapunov functional which allows us to use a J. K. Hale technique. The results obtained are employed when we study the longitudinal wave motions in a rod of a particular viscoelastic material.

1. - INTRODUZIONE.

Con riferimento all'insieme $Q \equiv \{(x, t) : x \in [0, 1]\ ;\ t \geq 0\}$, consideriamo il seguente problema nell'incognita funzione $v(x, t)$ definita in Q:

$$(I)\quad \begin{cases} \varepsilon\,(v_{tt} - v_{xx})_t + v_{tt} - k\,v_{xx} = 0 & (x, t) \in Q - \partial Q \\ \left(\dfrac{\partial^i v}{\partial t^i}\right)_{t=0} = v_i(x) \quad (i = 0, 1, 2) & x \in]0, 1[\\ v(0, t) = v(1, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

dove ε e k sono costanti positive, con $k < 1$.

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Ricerca per la Fisica Matematica del C.N.R.

L'equazione $(I)_1$ interviene nello studio di alcuni fenomeni di propagazione quali, ad esempio, quelli che si presentano in particolari mezzi viscoelastici oppure in miscele reagenti o, ancora, in un fluido conduttore mobile in un campo magnetico [1]. In ogni caso essa costituisce lo schema di un fenomeno fisico nel quale sono presenti cause dissipative che tendono, in *generale*, a smorzare la propagazione ondosa quando $t \to \infty$. Un'affermazione siffatta, pur trovando facile riscontro nell'intuizione fisica è, però, dal punto di vista analitico, tutt'altro che ovvia e ciò a causa delle difficoltà che presenta l'analisi del comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali. Rileviamo anzi che in [7] abbiamo anche determinato un'espressione esplicita di $v(x, t)$ mediante integrali di funzione di Bessel, ma tale formulazione non consente di ricavare in maniera agevole il comportamento di v quanto $t \to \infty$.

D'altra parte in [12] P. Renno, prendendo in esame il fenomeno di perturbazione singolare che si pone per il problema (I) quando ε tende a zero, ha determinato uno sviluppo asintotico che consente di approssimare v in ogni istante di un qualunque intervallo finito di tempo $[0, T]$. Per stabilire una rappresentazione che sia uniformemente valida per $t \geq 0$ $(T = \infty)$, occorre analizzare anzitutto il comportamento di v per $t \to \infty$.

Tali questioni ci hanno indotto ad affrontare in questa Nota lo studio della soluzione del problema (I) quando $t \to \infty$. Il risultato principale al quale perveniamo è la determinazione di un criterio di stabilità asintotica che, tra l'altro, consente di affermare — con riferimento al fenomeno di perturbazione singolare che si presenta per $\varepsilon \to 0$ — l'esistenza di una regione di strato limite anche per $t \to \infty$ (oltre che, ovviamente, quella relativa all'intorno della retta $t = 0$) [2].

Per stabilire il teorema detto, dimostriamo anzitutto (n. 3) l'esistenza e l'unicità di una opportuna soluzione debole del problema (I) determinandone allo stesso tempo alcune maggiorazioni a priori. Successivamente (n. 4), dopo aver introdotto un funzionale che si dimostra essere di tipo Liapunov, definiamo un opportuno sistema dinamico in uno spazio di Banach ed utilizziamo una tecnica di J. K. Hale. Si perviene in tal modo alla seguente conclusione:

[1] Cfr. Bibl. da [1] a [7] e le bibliografie ivi riportate

[2] A tale riguardo, B. J. MATKOWSKY e E. L. REISS [5] hanno stabilito, nel caso particolare che i dati iniziali $v_i(x)$ siano polinomi trigonometrici, l'esistenza dello strato limite adiacente a $t = \infty$ ed hanno determinato una formula di approssimazione valida — quando $\varepsilon \to 0$ — uniformemente per $t \geq 0$.

A) « *Se le funzioni* $v_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ *sono di classe* $C^{(3-i)}([0, 1])$ *e verificano opportune condizioni di raccordo, la soluzione regolare* v *del problema* (I) *e le sue derivate prime e seconde sono tali che*:

$$\text{a)} \qquad \lim_{t\to\infty} \int_0^1 (v^2_{xx} + v^2_{xt} + v^2_{tt})\, dx = 0$$

$$\text{b)} \qquad \lim_{t\to\infty} (\sup_x |v_x| + \sup_x |v_t| + \sup_x |v|) = 0\,.$$

Infine (n. 5), a titolo di esempio, applichiamo i risultati del teorema A) ad un problema di viscoelasticità. Più precisamente — con riferimento ad una sbarra Σ di lunghezza finita che sia costituita da un particolare materiale viscoelastico lineare — prendiamo in esame le oscillazioni longitudinali che si destano in Σ quando si suppone che la sbarra, tenuta fissa agli estremi, sia posta inizialmente con atto di moto assegnato in uno stato Σ_0 soggetto ad una prefissata distribuzione di stress. In corrispondenza il risultato che si ottiene è, conformemente all'intuizione fisica, il seguente:

B) « *Se i dati iniziali sono sufficientemente regolari, la distribuzione di stress è, al crescere di* t, *infinitesima ovunque in* Σ *e la configurazione della sbarra tende a quella relativa allo stato naturale* ».

2. - Notazioni e definizioni.

Indichiamo con B uno spazio di Banach, con $\| b \|_B$ la norma di un elemento $b \in B$, e con I l'intervallo $[0, \infty[$; sia poi $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

Cominciamo col richiamare alcune definizioni ben note.

Definizione 2.1. Si dice [10] che u è un *sistema dinamico* su B se:

i) la trasformazione $u : I \times B \to B$ è continua,

ii) $u(0, b) = b$,

iii) $u(t + \tau, b) = u(t, u(\tau, b))$
per ogni t e $\tau \in I$ e per ogni $b \in B$.

DEFINIZIONE 2.2. Si definisce *orbita positiva* $\gamma^+(b)$ attraverso $b \in B$, l'insieme $\gamma^+(b) = \bigcup_{t \geq 0} u(t, b)$.

DEFINIZIONE 2.3. Sia u un sistema dinamico definito su B e b un elemento di B; si chiama *punto limite positivo associato a* b, ogni punto $\hat{b} \in B$ per il quale esiste una successione di istanti $\{t_i\} \to \infty$ per $i \to \infty$ tale che

$$\lim_{i \to \infty} \| u(t_i, b) - \hat{b} \|_B = 0 .$$

Si chiama *insieme limite positivo* di un'orbita $\gamma^+(b)$, e lo indicheremo con $\omega^+(b)$, l'insieme dei punti limiti positivi associati a $\gamma^+(b)$.

DEFINIZIONE 2.4. Un insieme M di B si dice *insieme invariante per il sistema dinamico* u se per ogni $b \in M$ esiste una funzione $U : \mathbb{R} \times M \to B$ tale che

j) $U(0, b) = b$

jj) $u(t, U(\sigma, b)) = U(t + \sigma, b)$, $\quad \forall\, \sigma \in \mathbb{R}$ e $\forall\, t \in I$.

Con riferimento alle notazioni ora introdotte e considerando un funzionale $w : B \to \mathbb{R}$ continuo, porremo poi

$$\dot{w}(b) = \overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{w(u(t, b)) - w(b)}{t} ,$$

ed indicheremo con G un sottoinsieme chiuso e limitato di B e con M il più grande invariante contenuto nell'insieme $S = \{b \in G : \dot{w}(b) = 0\}$ del sistema dinamico dato. Inoltre, se $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : x \in]0, 1[\}$, denoteremo con $H^k(\Omega)$ lo spazio di Sobolev costituito dalle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ che sono di quadrato sommabile con tutte le derivate generalizzate fino all'ordine k, e con $H_o^k(\Omega)$ il completamento di $C_o^k(\Omega)$ rispetto a $\| \cdot \|_{H^k(\Omega)}$.

Posto $\Omega' = \{x \in \mathbb{R} : x \in]-1, 1[\}$, intenderemo con $C_{\#}^m$ la classe delle funzioni $u(x)$ definite in $\mathbb{R}$ che siano periodiche di periodo 2 e derivabili m volte con continuità, e con $H_{\#}^m$ il completamento di $C_{\#}^m$ rispetto a $\| \cdot \|_{H^m(\Omega')}$.

Infine, detto χ uno spazio di Banach, indicheremo con $C^0[0, \infty; \chi]$ lo spazio delle funzioni $t \to f(t)$ di $[0, \infty[\to \chi$ che sono continue e tali che

$$\sup_{t \geq 0} \| f(t) \|_\chi = \| f \|_{C^0[0, \infty; \chi]} < \infty ;$$

con tale norma lo spazio $C^0[0, \infty; \chi]$ è completo.

Richiamiamo a questo punto, per comodità di esposizione, alcuni risultati noti che dovremo utilizzare nel corso del lavoro (cfr. [10]).

TEOREMA 2.1. Sia u un sistema dinamico definito su B e $\gamma^+(b)$ una orbita positiva uscente da b e contenuta in G. Se esiste un funzionale $w : G \to \mathbb{R}$ tale che

j) $w(b)$ è continuo per $b \in G$,

jj) $\dot{w}(b) \leq 0$ per $b \in G$

e se inoltre

jjj) $\gamma^+(b)$ appartiene ad un insieme compatto di B,

allora $u(t, b) \to M$ quando $t \to \infty$.

L'ipotesi che $\gamma^+(b)$ sia contenuta in un compatto di B è essenziale poiché essa consente di dimostrare che l'insieme limite $\omega^+(b)$ di $\gamma^+(b)$ è *non vuoto, compatto, connesso ed invariante.*

Una condizione sufficiente a garantire tale ipotesi, come suggerisce J. K. Hale in [10], è fornita dal seguente teorema di completa continuità degli operatori di iniezione (cfr. [9]):

TEOREMA 2.2. Sia Γ un dominio limitato dotato della proprietà di segmento. Allora l'iniezione $H^s(\Gamma) \to H^m(\Gamma)$ è completamente continua per $s > m$.

Infine ricordiamo che se $f(x)$ è una funzione sufficientemente regolare nell'intervallo $[0, 1]$, sussistono le seguenti diseguaglianze

$$(2.1) \quad f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \int_0^1 f_x^2 \, dx \geq \int_0^1 f^2 \, dx ;$$

$$(2.2)\quad f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2_{xx}\,dx \geq \alpha \int_0^1 f^2_{xx}\,dx + \frac{1-\alpha}{2}\int_0^1 (f^2_x + f^2)\,dx$$

per ogni $\alpha \in [0, 1]$ (cfr. [7]);

$$(2.3)\quad f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2_x\,dx \geq \sup f^2;$$

$$(2.4)\quad f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2_{xx}\,dx \geq \frac{1}{2}(\sup f^2 + \sup f^2_x);$$

(2.5) se $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ed $s \geq 1$, si ha

$$(\sum_1^n a_i)^s \leq n^{s-1} \sum_1^n (a_i^s) \qquad \text{(cfr. [8].}$$

3. - Posizione del problema.

Ci proponiamo di determinare il comportamento per $t \to \infty$ della soluzione $v(x, t)$ definita nell'insieme $Q = \{(x, t) : x \in [0, 1];\ t \geq 0\}$ del seguente problema

$$(3.1)\quad \begin{cases} \varepsilon(v_{tt} - v_{xxt}) + v_{tt} - k v_{xx} = 0 & x \in]0, 1[\,, \quad t > 0 \\ \left(\dfrac{\partial^i v}{\partial t^i}\right)_{t=0} = v_i(x) & (i = 0, 1, 2) \quad x \in]0, 1[\\ v(0, t) = v(1, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

In tali relazioni le funzioni $v_i(x)$ sono i dati iniziali prefissati mentre ε e k sono delle costanti che verificano le limitazioni

$$\varepsilon > 0\,, \qquad k \in]0, 1[\,.$$

Il significato fisico di tali costanti e della funzione incognita $v(x, t)$ dipende ovviamente dalla natura del problema in esame; in proposito un esempio sarà esposto al n. 5.

In [7] abbiamo calcolato la soluzione del problema (3.1) che può esprimersi al seguente modo [3]

$$2\,v(x,t) = 2\,\hat{v}_0(x)\,e^{-\frac{k}{\varepsilon}t} + \varepsilon \int_{x-t}^{x+t} \hat{v}_2(z)\,F_2(|x-z|,t)\,dz +$$

$$+ \int_{x-t}^{x+t} \hat{v}_1(z)\,[\varepsilon\,G(|x-z|,t) + F_2(|x-z|,t)]\,dz - \tag{3.2}$$

$$- \varepsilon \int_{x-t}^{x+t} \hat{v}_0(z)\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,F_2(|x-z|,t)\,dz + \int_{x-t}^{x+t} \hat{v}_0(z)\,\frac{\partial}{\partial z}\,E(|z-x|,t)\,dz\,,$$

dove i nuclei E, G, F_2 sono integrali di funzioni di Bessel [7] e dove $\hat{v}_0$, $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ sono le funzioni che si ottengono prolungando in $\mathbb{R}$ i dati iniziali con legge dispari e in modo da risultare periodiche di periodo due. La funzione definita dalla (3.2) costituisce una soluzione di classe $C^{(3)}(Q)$ delle (3.1) quando i dati iniziali v_i verificano le seguenti ipotesi

$$\begin{cases} v_i\ (x) \in C^{(3-i)} \qquad \text{in } [0,1] \qquad (i=0,1,2) \\ v_i\ (0) = v_i\ (1) = 0 \qquad\qquad\qquad (i=0,1,2) \\ v_0''(0) = v_0''(1) = 0 \\ v_1''(0) = v_1''(1) = 0\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Precisiamo subito che la formulazione (3.2) non consente di determinare agevolmente il comportamento asintotico di $v(x,t)$. A tale scopo risulta invece più utile, come vedremo, l'applicazione di alcuni risultati di teoria dell'attrattività.

A tale riguardo occorre anzitutto porre il problema (3.1) in un'opportuna forma debole; più precisamente se $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione di classe $C_0^\infty(]0,\infty[)$ e se i dati iniziali $v_i(x)\,(i=0,1,2)$ sono tali che

$$\begin{cases} v_0 \in H^2\ (\Omega) \cap H_0^1\,(\Omega) \\ v_1 \in H_0^1\,(\Omega) \\ v_2 \in L^2\ (\Omega) \end{cases} \tag{3.4}$$

[3] L'espressione (3.2) della soluzione si ricava facilmente da quella riportata in bibl. [7] pag 82, mediante integrazioni per parti.

prenderemo in esame la seguente formulazione delle (3.1)

$$
(3.5)\quad \begin{cases} -\int_0^\infty \varepsilon\,(v_{tt} - v_{xx})\, g_t\, dt + \int_0^\infty (v_{tt} - k v_{xx})\, g\, dt = 0 \quad \forall g \in C_o^\infty(]0,\infty[), \\ v(x,0) = v_0(x)\,,\ v_t(x,0) = v_1(x)\,,\ v_{tt}(x,0) = v_2(x) \qquad x \in \Omega\,, \\ v \in C^0[0,\infty;\ H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)]\,,\ v_t \in C^0[0,\infty;\ H_o^1(\Omega)]\,, \\ v_{tt} \in C^0[0,\infty;\ L^2(\Omega)]\,. \end{cases}
$$

Al fine di dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione delle (3.5) e di dedurre poi alcune formule di maggiorazioni a priori, premettiamo il seguente

LEMMA 3.1. *Se* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *verifica le ipotesi*:

i) $f \in H^m(\Omega)$ $\qquad$ m *intero positivo*,

ii) $f^{(2r)}(0) = f^{(2r)}(1) = 0$ $\qquad$ $\left(r = 0, 1, \ldots, \left]\frac{m-1}{2}\right[\right)$,

allora esiste una successione di funzioni $\{f_n\}$ *tali che*

j) $f_n \in C_{\#}^{\infty}$,

jj) $f_n^{(2p)}(0) = f_n^{(2p)}(1) = 0$ $\qquad$ $\forall n, p = 0, 1, \ldots,$

jjj) $\{f_n\} \xrightarrow{H^m(\Omega)} f$.

DIM. Infatti, in virtù delle ipotesi i) ed ii), possiamo prolungare la funzione f dapprima in $[-1, 0]$ con legge dispari e poi in tutto $\mathbb{R}$ con legge periodica di periodo 2, ottenendo così una funzione $f_* \in H_{\#}^m$ che coincide con f in $[0,1]$. D'altra parte poiché è lecito identificare $H_{\#}^m$ con l'insieme delle serie di Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, a_k\, e^{ik\pi x}$ tali che $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, |a_k|^2\, |k|^{2m} < \infty$ (cfr. [9] p. 27), si ha che

$$
\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, c_k\,(ik\pi x)\, e^{ik\pi x} \xrightarrow{L^2(]-1,1[)} D^\alpha f \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, m)
$$

con

$$c_k = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, e^{-ik\pi x}\, dx \qquad (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

Se ora teniamo presente che f è una funzione dispari, deduciamo che

$$c_k + c_{-k} = \int_{-1}^{1} f(x) \cos k\pi x\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

e quindi, posto $f_n = \sum_1^n k \left(\frac{c_{-k} - c_k}{i} \right) \operatorname{sen} k\pi x$, si ha l'asserto.

Come ora proveremo, sussiste il seguente [4]

TEOREMA 3.1. *Se i dati iniziali* v_i $(i = 0, 1, 2)$ *verificano le condizioni* (3.4), *esiste una ed una sola soluzione delle* (3.5).

DIM. Indichiamo con B lo spazio di Banach

$$B = \{H^2(\Omega) \cap H_1^\circ(\Omega)\} \times H_1^\circ(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

con (φ, ψ, χ) un punto di B, con $\|\cdot\|_B$ la norma in B definita da [5]

$$\|(\varphi, \psi, \chi)\|_B^2 = \int_0^1 [(\partial_{xx}\varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2 + \varphi^2 + (\partial_x \psi)^2 + \psi^2 + \chi^2]\, dx.$$

Poiché la funzione v_0 soddisfa la $(3.4)_1$, per il lemma 3.1 esiste una successione di funzioni $\{u_n^\circ\}$ verificanti le proprietà (j), (jj), (jjj); tenendo poi conto delle $(3.4)_2$ - $(3.4)_3$, possiamo affermare che in corri-

[4] Rileviamo esplicitamente che in bibl. [11] p. 335 è dimostrato — per una classe di problemi astrattamente definiti e con procedimento diverso — un teorema di esistenza ed unicità di tipo analogo al teorema 3.1.

[5] Nel corso della dimostrazione del teorema 3.1 adotteremo costantemente la notazione ∂_{xt}^{r+s} in luogo di $\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r\, \partial t^s}$.

spondenza delle funzioni v_i $(i = 0, 1, 2)$ esistono delle successioni di funzioni $\{u_n^i\}$ $(i = 0, 1, 2)$ tali che

$$\{u_n^0\} \xrightarrow{H^2(\Omega)\cap H_1^i(\Omega)} v_0 \ , \quad u_n^0 \in C^\infty(\bar{\Omega})\cap C_0(\Omega) \ , \ \partial_x^{(2i)} u_n^0(0) = \partial_x^{(2i)} u_n^0(1) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots) \ ,$$

$$\{u_n^1\} \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} v_1 \ , \quad u_n^1 \in C_0^\infty(\Omega) \ ,$$

$$\{u_n^2\} \xrightarrow{L^2(\Omega)} v_2 \ , \quad u_n^2 \in C_0^\infty(\Omega) \ .$$

Indicando con u_n la soluzione di classe $C^\infty(\Omega)$ del problema

$$(3.6)\quad \begin{cases} -\int_0^\infty \varepsilon\,(\partial_t^2 u_n - \partial_x^2 u_n)\,\partial_t g\,dt + \\ \qquad + \int_0^\infty (\partial_t^2 u_n - k\,\partial_x^2 u_n)\,g\,dt = 0 \qquad \forall g \in C_0^\infty(]0,\infty[) \ , \\ u_n(0,t) = u_n(1,t) = 0 \qquad \forall t \in [0,\infty[\ , \\ (\partial_t^i u_n)_{t=0} = u_n^i(x) \qquad (i = 0, 1, 2) \quad x \in \Omega \ , \end{cases}$$

consideriamo il funzionale

$$(3.7)\quad w_n = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \{k\,(\partial_t^2 u_n - \partial_x^2 u_n)^2 + (1-k)\,[(\partial_{xt}^2 u_n)^2 + (\partial_t^2 u_n)^2]\}\,dx$$

che si può maggiorare così

$$w_n = -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \{(\partial_t^2 u_n)^2 + k\,(\partial_x^2 u_n)^2 - 2k\,\partial_t^2 u_n\,\partial_x^2 u_n +$$

$$+ (1 - k)\,(\partial_{xt}^2 u_n)^2\}\,dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \{(1 + k)\,(\partial^2 u_n)^2 + 2k\,(\partial_x^2 u_n)^2 + (1 - k)\,(\partial_{xt}^2 u_n)^2\}\,dx$$

e cioè

$$w_n < \varepsilon \,\|(u_n\,,\ \partial_t u_n\,,\ \partial_t^2 u_n)\|_B^2\,. \tag{3.8}$$

Osserviamo ora che, in corrispondenza di ogni soluzione u_n delle (3.6), la derivata temporale delle (3.7) fornisce

$$\dot{w}_n = -\int_0^1 (\partial_t^2 u_n - k\,\partial_x^2 u_n)^2\,dx \leq 0\,. \tag{3.9}$$

Volendo poi minorare w_n, notiamo che la (3.7) si riscrive nella forma

$$w_n = \frac{\varepsilon}{4}\int_0^1 \{k\,(\partial_t^2 u_n - \partial_x^2 u_n)^2 + (\partial_t^2 u_n - k\,\partial_x^2 u_n)^2 +$$

$$+ k\,(1 - k)\,(\partial_x^2 u_n)^2 + (1 - k)\,(\partial_t^2 u_n)^2 + 2\,(1 - k)\,(\partial_{xt}^2 u_n)^2\}\,dx$$

da cui si ricava

$$w_n > \frac{k\,(1 - k)\,\varepsilon}{4}\int_0^1 \{(\partial_x^2 u_n)^2 + (\partial_{xt}^2 u_n)^2 + (\partial_t^2 u_n)^2\}\,dx\,.$$

Pertanto tenendo conto delle diseguaglianze (2.2)-(2.1), si ricava

$$w_n > -\frac{k(1-k)\varepsilon}{4} - \left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (\partial_x^2 u_n)^2\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 [(\partial_x u_n)^2 + u_n^2]\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 [(\partial_{xt}^2 u_n)^2 + (\partial_t u_n)^2 + (\partial_t^2 u_n)^2]\,dx \right.$$

e quindi

$$w_n > -\frac{k(1-k)\varepsilon}{16} \| (u_n,\ \partial_t u_n,\ \partial_t^2 u_n) \|_B^2 . \tag{3.10}$$

Dalle (3.8), (3.9), (3.10) si deduce quindi

$$\| (u_n,\ \partial_t u_n,\ \partial_t^2 u_n) \|_B < \frac{4}{\sqrt{k(1-k)}} \| (u_n^0,\ u_n^1,\ u_n^2) \|_B . \tag{3.11}$$

Poiché l'equazione $(3.1)_1$ è lineare, dalla (3.11) si trae

$$\| (u_n - u_m,\ \partial_t u_n - \partial_t u_m,\ \partial_t^2 u_n - \partial_t^2 u_m) \|_B < \tag{3.12}$$

$$< \frac{4}{\sqrt{k(1-k)}} \| (u_n^0 - u_m^0,\ u_n^1 - u_m^1,\ u_n^2 - u_m^2) \|_B$$

e quindi anche

$$\| (u_n - u_m,\ \partial_t u_n - \partial_t u_m,\ \partial_t^2 u_n - \partial_t^2 u_m) \|_{C^0(0,\infty;B)} <$$

$$< \frac{4}{\sqrt{k(1-k)}} \| (u_n^0 - u_m^0,\ u_n^1 - u_m^1,\ u_n^2 - u_m^2) \|_B$$

e cioè che la successione $\{u_n, \partial_t u_n, \partial_t^2 u_n\} \to (v, \partial_t v, \partial_t^2 v)$ nel senso della convergenza indotta dalla norma di $C^0(0, \infty; B)$.

Resta così provata l'esistenza di una soluzione delle (3.6); per quanto riguarda l'unicità, basta osservare che la soluzione nulla del problema (3.1) è unica, e ciò completa la dimostrazione del teorema.

Le formule di maggiorazione stabilite nel corso della dimostrazione ora esposta, consentono poi di dimostrare facilmente i due corollari che seguono.

COROLLARIO 3.1. *Se v è una soluzione delle* (3.6), *allora la terna di funzioni* (v, v_t, v_{tt}) *è continua rispetto ai dati iniziali.*

DIM. La proprietà suddetta è una immediata conseguenza della relazione

$$\|(v, v_t, v_{tt})\|_B < \frac{4}{\sqrt{k(1-k)}} \|(v_0, v_1, v_2)\|_B \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.13}$$

che si ottiene dalla (3.11) passando al limite per $n \to \infty$.

COROLLARIO 3.2. *Il funzionale* $w : B \to \mathbb{R}^+$ *così definito*

$$w = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \{k(\chi - \varphi_{xx})^2 + (1-k)(\psi_x^2 + \chi^2)\}\, dx\,,$$

soddisfa, lungo ogni soluzione v *del problema* (3.5), *la condizione*

$$\dot{w}(v, v_t, v_{tt}) = -\int_0^1 (v_{tt} - k v_{xx})^2\, dx \leq 0\,. \tag{3.14}$$

DIM. Con riferimento alla dimostrazione del teorema (3.1), dalla (3.7) si deduce che la successione $\{w_n\}$ converge verso il funzionale

$$w(v, v_t, v_{tt}) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \{k(v_{tt} - v_{xx})^2 + (1-k)(v_{xt}^2 + v_{tt}^2)\}\, dx\,.$$

D'altra parte $\dot{w}_n$ si maggiora al seguente modo

$$|\dot{w}_n| < 2 \int_0^1 \{(\partial_t^2 u_n)^2 + (\partial_x^2 u_n)^2\}\, dx < 2 \|(u_n, \partial_t u_n, \partial_t^2 u_n)\|_B^2$$

da cui, ricordando la (3.11), si deduce che

$$|\dot{w}_n| < \frac{32}{k(1-k)} \, \| (u_n^0 \ , \ u_n^1 \ , \ u_n^2) \|_B^2 \qquad \forall t \geq 0 \, .$$

Pertanto la successione $\{\dot{w}_n\}$ è uniformemente convergente e quindi

$$\dot{w} = \lim_{n \to \infty} \dot{w}_n$$

e ciò, tenendo presente la (3.9), dimostra l'asserto.

4. - Un teorema sulla stabilità asintotica della soluzione.

Indicando con B, C, C′ gli spazi di Banach

$$B = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \ ,$$

$$C = (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \ ,$$

$$C' = (H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \, ,$$

con (φ, ψ, χ) di volta in volta un punto di B, C, C′; siano poi nell'ordine

$$\| (\varphi, \psi, \chi) \|_B^2 = \int_0^1 (\varphi_{xx}^2 + \varphi_x^2 + \varphi^2 + \psi_x^2 + \psi^2 + \chi^2) \, dx \ ,$$

$$\| (\varphi, \psi, \chi) \|_C^2 = \int_0^1 (\varphi_{xxx}^2 + \psi_{xx}^2 + \chi_x^2) \, dx + \| (\varphi, \psi, \chi) \|_B^2 \ ,$$

$$\| (\varphi, \psi, \chi) \|_{C'}^2 = \int_0^1 (\varphi_{xxxx}^2 + \psi_{xxx}^2 + \chi_{xx}^2) \, dx + \| (\varphi, \psi, \chi) \|_C^2$$

le norme in tali spazi.

Con riferimento al problema posto al n. 3 dimostreremo ora il seguente

TEOREMA 4.1. *Se le funzioni* $v_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ *sono tali che*

$$\begin{cases} v_0''(0) = v_0''(1) = 0\,, \\ (v_0, v_1, v_2) \in C \end{cases} \tag{4.1}$$

allora la soluzione v *delle* (3.5) *è stabile rispetto alla* $\|\cdot\|_C$ *e verifica inoltre la relazione*

$$\lim_{t\to\infty} \|(v, v_t, v_{tt})\|_B = 0\,. \tag{4.2}$$

DIM. Se indichiamo con v la soluzione del problema (3.5) allorché $(v_o, v_1, v_2) \in B$, la terna di funzioni (v, v_t, v_{tt}) costituisce un sistema dinamico definito su B, come si controlla immediatamente tenendo presente la $(3.5)_3$ e il corollario 3.1. Consideriamo ora il funzionale $w : B \to \mathbb{R}^+$

$$w(\varphi, \psi, \chi) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 [k(\chi - \varphi_{xx})^2 + (1 - k)(\chi^2 + \psi^2_x)\, dx$$

e tenendo presente l'ipotesi j) del teorema 2.1, cominciamo col verificare che esso è continuo. Infatti si ha

$$w = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 (k\chi^2 + k\varphi^2_{xx} - 2k\chi\varphi^2_{xx} + (1 - k)\psi^2_x)\, dx$$

e quindi

$$|w - w^*| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \{|\chi^2 - \chi^{*2}| + k|\varphi^2_{xx} - \varphi^{*2}_{xx}| + 2k|\chi\varphi_{xx} - \chi^*\varphi^*_{xx}| + (1 - k)|\psi^2_x - \psi^{*2}_x|\}\, dx\,.$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Schwartz e della (2.5), si ha

$$|w - w^*|^2 < 5\varepsilon^2 \left\{ \int_0^1 (\chi - \chi^*)^2\, dx \int_0^1 (\chi + \chi^*)^2\, dx + \right.$$

$$+ \int_0^1 (\varphi_{xx} - \varphi^*_{xx})^2\, dx \int_0^1 (\varphi_{xx} + \varphi^*_{xx})^2 dx + \int_0^1 \chi^2\, dx \int_0^1 (\varphi_{xx} - \varphi^*_{xx})^2\, dx +$$

$$\left. + \int_0^1 \varphi^{*2}_{xx}\, dx \int_0^1 (\chi - \chi^*)^2\, dx + \int_0^1 (\psi_x - \psi_x^*)^2\, dx \int_0^1 (\psi_x + \psi_x^*)^2\, dx \right\} <$$

$$< 5\varepsilon^2 \|(\varphi, \psi, \chi) - (\varphi^*, \psi^*, \chi^*)\|_B^2 \cdot \{\|(\varphi, \psi, \chi) + (\varphi^*, \psi^*, \chi^*)\|_B^2 +$$

$$+ \|(\varphi, \psi, \chi)\|_B^2 + \|(\varphi^*, \psi^*, \chi^*)\|_B^2\} < 15\varepsilon^2 \|(\varphi, \psi, \chi) - (\varphi^*, \psi^*, \chi^*)\|_B^2$$

$$\{\|(\varphi, \psi, \chi)\|_B^2 + \|(\varphi^*, \psi^*, \chi^*)\|_B^2\}.$$

Pertanto

$$|w - w^*| < 4\varepsilon \|(\varphi, \psi, \chi) - (\varphi^*, \psi^*, \chi^*)\|_B \{\|(\varphi, \psi, \chi)\|_B + \|(\varphi^*, \psi^*, \chi^*)\|_B\}$$

e ciò prova appunto la continuità di w rispetto a $\|\cdot\|_B$.

Per quanto riguarda poi l'ipotesi jj) essa è soddisfatta come segue dal corollario 3.2.

Riferendoci ora all'ipotesi jjj), in via preliminare osserviamo che dalla (3.13) si trae che l'orbita $\gamma_B^+(v_0, v_1, v_2)$ è contenuta in un insieme limitato di B e che quindi essa è compatta rispetto alla convergenza debole.

Mostriamo ora che se $(v_0, v_1, v_2) \in C$, $\gamma_B^+(v_0, v_1, v_2)$ risulta compatta rispetto a $\|\cdot\|_B$.

Supponendo verificate le (4.1), consideriamo nello spazio C il sistema dinamico generato dalla soluzione delle (3.5).

Con il procedimento utilizzato nella dimostrazione del teorema 3.1, si può provare che il funzionale $W : C \to \mathbb{R}^+$, definito da

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \{k(\chi_x - \varphi_{xxx})^2 + (1 - k)(\chi_x^2 + \psi_{xx}^2)\}\, dx\,.$$

verifica le condizioni

$$W(v, v_t, v_{tt}) > -\frac{k(1-k)\varepsilon}{32} \| (v, v_t, v_{tt}) \|_C^2 \qquad \forall t \geq 0 , \tag{4.3}$$

$$W(v, v_t, v_{tt}) < \varepsilon \| (v, v_t, v_{tt}) \|_C^2 \qquad \forall t \geq 0 , \tag{4.4}$$

mentre lungo l'orbita γ_C^+ descritta dal sistema dinamico in C risulta

$$W = -\int_0^1 (v_{xtt} - k v_{xxx})^2 \, dx \leq 0 . \tag{4.5}$$

Dalle (4.3)-(4.4)-(4.5), si trae quindi che

$$\| (v, v_t, v_{tt}) \|_C < -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{k(1-k)}} \| (v_0, v_1, v_2 \|_C \qquad \forall t \geq 0 \tag{4.6}$$

Naturalmente tale relazione prova soltanto che l'orbita $\gamma_C^+ (v_0, v_1, v_2)$ è contenuta in un insieme limitato di C; osservando però che l'iniezione $C \to B$, in virtù del teorema 2.2, è completamente continua, possiamo affermare che l'orbita γ_B^+ è contenuta in un insieme compatto di B.

Infine resta da provare che, detto G l'insieme

$$G = \{(\varphi, \psi, \chi) \in B : \| (\varphi, \psi, \chi) \|_B \leq c , \quad c \text{ costante positiva}\},$$

il più grande invariante contenuto in $\{(\varphi, \psi, \chi) \in G : \dot{w} = 0\}$ si riduce all'insieme $\{(0, 0, 0)\}$.

A tale scopo si osservi che l'essere $\dot{w} = 0$ [cfr. (3.14)] implica che $\chi - k\varphi_{xx} = 0$ e quindi

$$v_{tt} - k v_{xx} = 0 \tag{4.7}$$

per cui, dalla $(3.5)_1$ segue che

$$\int_0^\infty (v_{tt} - v_{xx}) g_t \, dt = 0 \qquad \forall g_t \in C_0^\infty (]0, \infty[)$$

e perciò

$$v_{tt} - v_{xx} = 0 \,. \tag{4.8}$$

Le relazioni (4.7) e (4.8), con le condizioni agli estremi $v(0, t) = v(1, t) = 0 \;\; \forall t \geq 0$, implicano ovviamente

$$v(x, t) = 0 \qquad \forall (x, t) \in Q \,.$$

In conclusione risulta

$$\lim_{t \to \infty} \| (v, v_t, v_{tt}) \|_B = 0$$

Infine la (4.6) prova la stabilità della soluzione $v(x, t)$ di (3.5) rispetto alla $\| \cdot \|_C$, e ciò completa la dimostrazione del teorema.

Dal teorema 4.1, in virtù delle diseguaglianze (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) si ha — in particolare — il

TEOREMA 4.2. *La soluzione regolare delle* (3.1)-(3.3) *e le sue derivate prime e seconde sono tali che*

$$\text{a)} \qquad \lim_{t \to +\infty} \int_0^1 (v_{xx}^2 + v_{xt}^2 + v_{tt}^2) \, dx = 0$$

$$\text{b)} \qquad \lim_{t \to +\infty} (\sup_x | v_x | + \sup_x | v_t | + \sup_x | v |) = 0 \,.$$

In vista dell'applicazione che daremo al n. seguente, enunciamo il seguente

TEOREMA 4.3. *Se le funzioni* v_i $(i = 0, 1, 2)$ *sono tali che*

$$\begin{cases} (v_0, v_1, v_2) \in C' \\ v_0''(0) = v_0''(1) = 0 \\ v_1''(0) = v_1''(1) = 0 \,, \end{cases} \tag{4.9}$$

allora la soluzione[6] v *delle* (3.5) *è stabile rispetto a* $\| \cdot \|_{C'}$ *e per essa sussiste inoltre la relazione*

$$\lim_{t \to +\infty} \| (v, v_t, v_{tt}) \|_C = 0 \,.$$

[6] Rileviamo esplicitamente che la funzione v non solo soddisfa le $(3.5)_3$, ma in più è tale che $(v, v_t, v_{tt}) \in C^0 [0, \infty ; C']$.

5. - Un esempio di applicazione del teorema 4.3.

Indichiamo con Σ una sbarra di lunghezza finita ℓ che sia costituita da un materiale viscoelastico, lineare, isotropo, incompressibile ed esente da fenomeni di conducibilità termica.

Ci proponiamo di applicare[7] i risultati esposti nel numero precedente all'analisi delle oscillazioni longitudinali che si destano in Σ quando si suppone che la sbarra — tenuta fissa agli estremi — sia posta inizialmente in uno stato Σ_0 con atto di moto assegnato e sia ivi soggetta ad una prefissata distribuzione di stress.

A tale scopo, se x è la direzione di Σ e P il generico punto della sbarra, indichiamo con x e con $x + u$, rispettivamente, le ascisse di P nella configurazione di riferimento ed in quella attuale; siano poi ρ, σ, $\tilde{e}$, nell'ordine, la densità, lo stress e lo strain infinitesimo nel punto P e all'istante t.

Con tali notazioni e nell'ulteriore ipotesi che le forze di massa siano trascurabili, le equazioni del moto di Σ sono, com'è noto [1], le seguenti:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \sigma_x = 0 \\ u_x - \tilde{e} = 0 . \end{cases} \tag{5.1}$$

Per quanto riguarda la relazione stress-strain, prendiamo in esame un'equazione costitutiva del tipo

$$\mathrm{P}_1 \sigma = \mathrm{P}_2 \tilde{e} \tag{5.2}$$

dove $\mathrm{P}_i\,(i = 1, 2)$ è l'operatore differenziale così definito

$$P_i = a_i + b_i \frac{\partial}{\partial t} \qquad (i = 1, 2), \tag{5.3}$$

ed a_i e b_i sono i moduli caratteristici del materiale che, in generale, dipendono da x e dalla temperatura. Nel caso di un materiale omogeneo ed isotermo, l'equazione (5.2) schematizza un modello proposto da J. A. Morrison [1] per il quale a_i e b_i sono costanti positive che dipendono dai moduli di elasticità e dal coefficiente di viscosità (Fig. 1).

[7] Gli altri fenomeni dissipativi di cui si è fatto cenno al numero 1, sono descritti dallo stesso problema analitico; pertanto, a titolo di esempio, riteniamo sufficiente discutere in questo numero il solo problema di viscoelasticità.

Pertanto, se le funzioni σ, $\tilde{e}$ ed u sono sufficientemente regolari, eliminando σ ed $\tilde{e}$ dalle (5.1)-(5.2) si perviene, per lo spostamento $u(x, t)$, alla seguente equazione:

$$b_1 \rho u_{ttt} - b_2 u_{xxt} + a_1 \rho u_{tt} - a_2 u_{xx} = 0 . \tag{5.4}$$

Se assumiamo che gli estremi della sbarra siano i punti di ascissa 0 ed ℓ ed indichiamo con $x + u_0(x)$, $u_1(x)$, $\sigma_0(x)$ rispettivamente lo stato Σ_0, l'atto di moto iniziale e la distribuzione di stress su Σ_0, il problema proposto si riduce allo studio dell'equazione (5.4) con le condizioni

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \quad , \qquad u_t(x, 0) = u_1(x) , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq x \leq \ell \\ u_{tt}(x, 0) = -\dfrac{1}{\rho}\, \sigma_0'(x) \end{cases} \tag{5.5}$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \qquad t \geq 0 . \tag{5.6}$$

Mediante ovvie posizioni, le (5.4)-(5.5)-(5.6) vengono quindi a coincidere con il problema (3.1); di conseguenza, tenendo presente la $(5.1)_2$, il teorema 4.3 e la diseguaglianza (2.4) consentono di affermare subito che

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = \lim_{t\to\infty} \tilde{e}(x, t) = \lim_{t\to\infty} \tilde{e}_t(x, t) = 0 . \tag{5.7}$$

D'altra parte, ponendo per brevità

$$\frac{a_1}{b_1} = \alpha , \quad \frac{a_2}{b_1} = \beta , \quad \frac{b_2}{b_1} = \gamma ,$$

$$\beta \tilde{e}(x, t) + \gamma \tilde{e}_t(x, t) = s(x, t) ,$$

dalle (5.2)-(5.3) si trae

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(x)\, e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau}\, s(x, \tau)\, d\tau . \tag{5.8}$$

Osserviamo ora che, in base alle (5.7), risulta

$$\lim_{t\to\infty} s(x, t) = 0 \tag{5.9}$$

per cui, posto

$$g(x,t) = \int_0^t e^{\alpha\tau}\, s(x,\tau)\, d\tau ,$$

sono possibili i seguenti due casi:

a) $g(x,t)$ è, per ogni x, limitata quando $t \to \infty$,

b) la funzione $e^{\alpha\tau}\, s(x,t)$ non è sommabile per $\tau \in [0, \infty[$.

Nel caso *a*) si ha ovviamente

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(x,t) = 0 ;$$

nel caso *b*), essendo $\lim_{t\to\infty} g(x,t) = \pm\infty$, in virtù della (5.9) ed applicando la regola di l'Hospital, risulta

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(x,t) = \lim_{t\to\infty} [\sigma_0(x)\, e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\, g(x,t)] = \lim_{t\to\infty} s(x,t) = 0 .$$

In conclusione possiamo quindi affermare che:

« *Se le funzioni* $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\sigma_0'(x)$ *verificano le ipotesi* (4.9) *del teorema* 4.3, *la distribuzione dello stress e l'atto di moto sono, al crescere di* t, *ovunque infinitesimi in* Σ *e la configurazione della sbarra tende a quella relativa allo stato naturale* ».

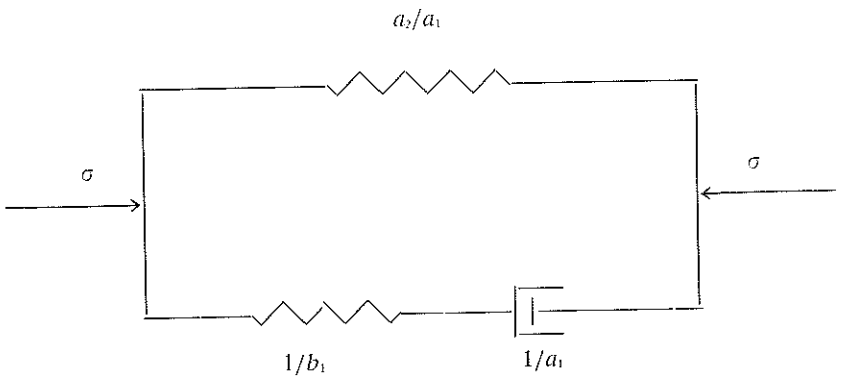


FIG. 1

BIBLIOGRAFIA

[1] MORRISON J. A., *Wave propagation in rods of Voigt material and viscoelastic material with three parameter models.* Quarterly of Applied Mathematics, **14**, pp. 153-169 (1956).

[2] CRUPI G., *Sulle onde piane magnetoidrodinamiche.* Boll. U.M.I. (3), **12**, pp. 439-442 (1957).

[3] BECKER E., *Gas Dynamics.* Academic Press (1968).

[4] BLYTHE P. A., *Non linear for field theories in relaxing gas flows.* Corso C.I.M.E. II, 3-11 settembre 1969, pp. 2-28.

[5] MATKOWSKY B. J. - REISS E. L., *On the Asymptotic Theory of Dissipative Wave Motion.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **42**, pp. 1974-212 (1971).

[6] ERINGEN A. C., *Mechanics of Continua.* John Wiley e Sons, INC.

[7] D'ANNA A. - RENNO P., *Su un'equazione di tipo iperbolico della aerotermochimica unidimensionale: calcolo e stabilità delle soluzioni nulle agli estremi.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Matematiche dela Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli, Serie IV, **40** (1973).

[8] MIRANDA C., *Diseguaglianze. Lezioni di Matematiche Superiori tenute nell'anno accademico* 1962-63.

[9] AGMON S., *Lectures on elliptic boundary value problems.* Van Nostrand Mathematical Studies, 1964.

[10] HALE J. K., *Dynamical Systems and Stability.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **26**, pp. 39-59 (1969).

[11] J. L. LIONS, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal.* Lectures Notes in Mathematics, n. 323, Springer Verlag (1973).

[12] RENNO P., *Un problema di perturbazione singolare per una classe di fenomeni ondosi dissipativi.* Ricerche di Matematica, 28 (2) (1974).

Sulle faccette olomorfe a curvatura massima dello spazio delle matrici simmetriche

Nota di SARA DRAGOTTI
presentata dal socio corrispondente VITTORIO DALLA VOLTA

(Adunanza dell' 1 giugno 1974)

SOMMARIO. — Si ottengono qui due risultati sulle faccette piane dello spazio delle matrici simmetriche, o spazio di Siegel-Hua. Il primo, di carattere locale, riguarda lo studio, in ambiente proiettivo, del luogo delle direzioni, uscenti da un punto del suddetto spazio, che con una direzione assegnata individuano una faccetta a curvatura $-1/p$. Il secondo, di carattere globale, riguarda lo studio della integrabilità di certe distribuzioni di faccette olomorfe a curvatura massima.

SUMMARY. — Two results on the plane sections in the so-called Siegel-Hua space of (real) dimension $p(p+1)$ (p integer $\geqslant 1$) are obtained; the first one is local and deals with the directions at a given point of the space which span with a given direction a section of curvature $-1/p$. The second result is global and is concerned with the integrability of certain distributions of holomorfic sectio of maximum curvature.

INTRODUZIONE.

Lo spunto per questa ricerca nasce da alcuni lavori di V. DALLA VOLTA ([2], [3], [4]) [1] sulla geometria differenziale dello spazio delle matrici simmetriche. Ad essi si rinvia il lettore sia per le notizie storiche sull'argomento, sia per le dimostrazioni dei risultati cui si fa riferimento esplicito nel corso del lavoro.

§ 0. - *Generalità.*

Sia $Z = (z_{ij})$ una matrice simmetrica quadrata complessa di ordine p. Le z_{ij} distinte si possono assumere, secondo un ordine pre-

[1] Le [ ] si riferiscono alla bibliografia alla fine del lavoro.

fissato, come coordinate di un punto di uno spazio affine S' a $p(p+1)/2$ dimensioni complesse; ovvero si possono assumere, sempre secondo un ordine prefissato, le z_{ij} e le $\bar{z}_{ij}$ [2] come coordinate di un punto di uno spazio affine a $p(p+1)$ dimensioni reali. Indicheremo con S lo spazio reale sopra citato e designeremo con una stessa lettera latina maiuscola sia una matrice del tipo in questione che il punto di essa rappresentativo in S.

In S rimane individuata la regione R rappresentativa delle matrici simmetriche Z a parte immaginaria positiva, cioè delle matrici per cui, posto $Z = X + iY$, si ha che Y è matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita. La forma hermitiana:

$$\mathrm{tr}\,(Y^{-1}\,dZ\;Y^{-1}\,d\bar{Z})\ ^{3}$$

risulta allora definita positiva e permette di introdurre in R, quando si assuma come quadrato dell'elemento lineare d'arco, una metrica riemanniana, che per $p = 1$ si riduce alla metrica non euclidea del piano iperbolico considerata da Poincaré in cui:

$$ds^2 = \frac{dz\;d\bar{z}}{y^2}$$

La metrica:

$$ds^2 = \mathrm{tr}\,(Y^{-1}\,dZ\;Y^{-1}\,d\bar{Z}) \tag{1}$$

ammette un gruppo Γ di trasformazioni analitiche a $p(2p+1)$ parametri reali. Ognuna di tali trasformazioni è del tipo:

$$Z' = (ZC + D)^{-1}(ZA + B)\ ^{4}$$

con A, B, C, D matrici reali determinate a meno di uno scalare non nullo e soddisfacenti la condizione che la matrice:

$$T = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix}$$

[2] $\bar{z}_{ij}$ indica, al solito, il complesso coniugato di z_{ij}.

[3] tr = traccia.

[4] Gli elementi di Γ però non esauriscono tutti i movimenti della varietà R. Vi sono infatti anche le trasformazioni del tipo:

$$Z' = -\bar{Z}$$

che però non sono analitiche.

sia simplettica; ossia che, posto:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

dove I designa la matrice identica, si abbia:

$$TMT^{-1} = \lambda M \qquad \text{con } \lambda \text{ scalare reale non nullo.}$$

Tale condizione si traduce nelle condizione per A, B, C, D:

$$BD_{-1} - DB_{-1} = 0$$

$$CA_{-1} - AC_{-1} = 0$$

$$DA_{-1} - BC_{-1} = \lambda I .$$

Poiché A, B, C, D sono determinate a meno di uno scalare non nullo, si può supporre $\lambda = \pm 1$.

Il gruppo Γ è assolutamente transitivo su R e per $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ si ottengono le sue due componenti connesse.

Il gruppo Γ non è doppiamente transitivo su R, sussiste però il seguente

LEMMA: Assegnato comunque un punto Z di R, esiste sempre una trasformazione di Γ che lasci fisso il punto iI e muti Z in un punto $i\Lambda$, con Λ matrice diagonale reale ([1], cap. II, nn. 15, 17).

In particolare ci interessa qui riportare alcuni risultati riguardanti lo studio della curvatura K delle faccette uscenti da un punto di R. Poiché tale curvatura è notoriamente invariante per i movimenti di Γ e data la transitività di Γ stesso, si può ridurre tale studio a quello delle faccette uscenti da un particolare punto di R. Risulta conveniente scegliere a tale scopo il punto iI. In tale punto K ha l'espressione:

$$K = \frac{\operatorname{tr} F^2}{4 \operatorname{sen}^2 \theta \, \delta_1 s^2 \, \delta_2 s^2} \tag{2}$$

dove F è la matrice antihermitiana:

$$F = \delta_1 Z \, \delta_2 \bar{Z} - \delta_2 Z \, \delta_1 \bar{Z}$$

$\delta_1 Z$ e $\delta_2 Z$ le direzioni individuanti la faccetta, $\delta_1 s$ e $\delta_2 s$ sono gli elementi d'arco nelle direzioni δ_1 e δ_2 formanti angolo 0.

I risultati cui accennavo in sintesi sono i seguenti:

a) K risulta non costante non appena sia $p > 1$.

b) K è sempre non positiva ed è nulla solo in corrispondenza alle faccette per cui sia $F = 0$ ([1], cap. II).

c) Le curvature di tutte le faccette uscenti dal punto iI ammettono come minimo assoluto il valore $K = -1$, che si realizza solo in corrispondenza alle faccette olomorfe; ossia alle faccette di R appartenenti ai piani olomorfi di S [5].

d) Le curvature di tutte le faccette uscenti da ogni punto di R ammettono come massimo assoluto il valore $K = 0$, mentre per le faccette olomorfe tale massimo vale $-1/p$.

§ 1. - *Un primo problema.*

Io mi sono occupata in particolare delle faccette a curvatura $-1/p$, valore che si è detto costituire il massimo di K nel caso di faccette olomorfe.

Seguendo il metodo usato da V. DALLA VOLTA in [2], ho trattato l'argomento riferendomi allo spazio proiettivo a $p(p+1)-1$ dimensioni reali, costituito dalla stella di rette uscenti dal punto iI di R, spazio che sarà indicato con S*.

Siano pertanto Z_1 e Z due punti di S*. Un primo problema è quello di vedere, fissato Z_1, come varia Z in modo da individuare con Z_1 una faccetta a curvatura $-1/p$.

A questo punto premettiamo quanto segue.

Se indichiamo con Γ_{il} il gruppo di isotropia relativo ad iI (ossia il gruppo dei movimenti di Γ che lasciano fisso il punto iI), gli elementi di Γ_{il} determinano altrettante omografie di S*, costituenti un gruppo Γ_{il}^*. Le trasformazioni di Γ_{il}^* sono del tipo:

$$Z' = UZU_{-1} \tag{3}$$

con U matrice unitaria arbitraria [6] (cfr. [2]).

[5] I piani olomorfi di S, detti anche piani caratteristici, sono i piani di S immagini delle rette complesse di S' nella corrispondenza che associa ad un punto di S' di coordinate (x^i) $(i = 1, 2, \ldots, p(p+1)/2)$ il punto di S di coordinate $(x^i, \bar{x}^i)$, con ovvio significato dei simboli.

[6] Ricordiamo che si chiama « unitaria » una matrice complessa quadrata U la cui inversa coincida con la coniugata della trasposta, ossia un elemento del gruppo unitario.

In virtù del lemma del § 0, si dimostra inoltre che:

« Per ogni matrice quadrata simmetrica complessa Z si può determinare una matrice unitaria U, tale che la matrice:

$$Z' = UZU_{-1}$$

sia diagonale reale » (cfr. [2]).

Quanto sopra ci consente di supporre che Z_1 sia una matrice diagonale reale, ossia che appartenza al sottospazio D a $p-1$ dimensioni di S*, di equazioni:

$$\begin{cases} z_{ij} = 0 & i \neq j \\ \bar{z}_{ij} = 0 & i \neq j \\ z_{ii} = \bar{z}_{ii} \end{cases}$$

Si possono ancora semplificare i calcoli supponendo che le direzioni individuanti la faccetta siano ortogonali (e ciò è notoriamente lecito in quanto la curvatura di una faccetta non dipende dalle direzioni che la individuano); ossia facendo variare Z non in tutto S*, bensì nell'iperpiano π di equazione:

$$\sum_1^p \alpha_i (z_{ii} + \bar{z}_{ii}) = 0$$

dove si è posto, per comodità:

$$Z_1 = A = (\delta_{ij}\, \alpha_i)$$

con δ_{ij} simbolo di Kronecker.

La curvatura K ha ora l'espressione:

$$K = -\frac{\operatorname{tr}(ZA - A\bar{Z})^2}{4 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr}(Z\bar{Z})}.$$

Pertanto le direzioni di R uscenti dal punto iI, che con la direzione Adt individuano una faccetta a curvatura $-1/p$ si dispongono, quali punti di S*, sull'intersezione Q_0 dell'iperpiano π con la quadrica Q di equazione:

$$\frac{\operatorname{tr}(ZA - A\bar{Z})^2}{4 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr}(Z\bar{Z})} = -1/p\,.$$

Ricordiamo che la matrice $F = ZA - A\bar{Z}$ è antihermitiana, per cui, posto $F = (f_{ij})$, si ha: $f_{ji} = -\bar{f}_{ij}$. E dunque:

$$\mathrm{tr}\,(F^2) = \sum_{ij}^{p} f_{ij} f_{ji} = -\sum_{ij}^{p} f_{ij} \bar{f}_{ij} =$$

$$= -\sum_{ij}^{p} [(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)\, z_{ij}\, \bar{z}_{ij} - \alpha_i\, \alpha_j\, (z_{ij}^2 + \bar{z}_{ij}^2)]$$

$$\mathrm{tr}\,(A^2) = \sum_{i}^{p} \alpha_i^2$$

$$\mathrm{tr}\,(Z\bar{Z}) = \sum_{ij}^{p} z_{ij}\, \bar{z}_{ij}\,.$$

Pertanto l'equazione di Q è, in forma esplicita, la seguente:

$$(4) \qquad \sum_{ij}^{p} [(pq_{ij} - 4q)\, z_{ij}\, \bar{z}_{ij} - pq_{ij}'\, (z_{ij}^2 + \bar{z}_{ij}^2)] = 0$$

dove si è posto: $q = \mathrm{tr}\,(A^2)$; $q_{ij} = \alpha_i^2 + \alpha_j^2$; $q_{ij}' = \alpha_i\, \alpha_j$ per ogni coppia di indici (i, j).

Per $p = 2$ si verifica facilmente che Q non è mai riducibile, ma al più degenere, nei casi in cui sia $\alpha_1 = \alpha_2$ oppure $\alpha_1 = -\alpha_2$.

Nel primo caso Q è il 2-cono con vertice nel piano di equazioni:

$$\begin{cases} z_{11} + \bar{z}_{11} = 0 \\ z_{12} + \bar{z}_{12} = 0 \\ z_{22} + \bar{z}_{22} = 0 \end{cases}$$

i cui punti sono gli unici punti reali del cono.

Nel secondo caso il vertice è il piano di equazioni:

$$\begin{cases} z_{11} + \bar{z}_{11} = 0 \\ z_{12} - \bar{z}_{12} = 0 \\ z_{22} + \bar{z}_{22} = 0 \end{cases}$$

i cui punti sono ancora gli unici punti reali del cono.

Nel caso generale che p sia qualsiasi, l'esistenza di punti doppi è legata all'esistenza di soluzioni non nulle per almeno uno dei sistemi:

$$(5) \qquad \begin{cases} -2pq_{ij}'\, z_{ij} + (pq_{ij} - 4q)\, \bar{z}_{ij} = 0 \\ (pq_{ij} - 4q)\, z_{ij} - 2pq_{ij}'\, \bar{z}_{ij} = 0\,. \end{cases}$$

L'annullarsi del determinante di uno dei sistemi (5) comporta la relazione:

$$pq_{ij} - 4q = \pm\, 2pq_{ij}'$$

ossia, esplicitando q, q_{ij} e q_{ij}':

$$(6) \qquad p\,(\alpha_i^2 + \alpha_j^2) = 4 \sum_1^p{}_h\, \alpha_h^2 \pm 2p\, \alpha_i\, \alpha_j$$

che, per $p = 2$, ridà il risultato sopra riportato.

Se allora esistono coppie di indici (i, j) per cui valga la (6), la Q degenera. Precisamente, siano (i_r, j_r), $1 \leq r \leq p\,(p+1)/2$, le coppie per cui vale la (6), Q allora degenera nel cono di vertice il sottospazio di equazioni:

$$\begin{cases} z_{ij} = \bar{z}_{ij} = 0 & \forall\, (i, j) \neq (i_r, j_r) \\ z_{i_r i_r} = \bar{z}_{i_r i_r} & \text{se nella (6) vale il segno } + \\ z_{i_r i_r} = -\bar{z}_{i_r i_r} & \text{se nella (6) vale il segno } - \end{cases}$$

Osserviamo che, se Q è non degenere, anche la quadrica Q_0, intersezione di Q con l'iperpiano π, non è degenere. In tal caso, infatti, π risulta non tangente a Q, in quanto il suo polo rispetto a Q ha per coordinate le soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{pq_{ij} - 4q}{2} \cdot \bar{z}_{ij} - pq_{ij}'\, z_{ij} = \delta_{ij}\, \alpha_i \\ -pq_{ij}'\, \bar{z}_{ij} + \dfrac{pq_{ij} - 4q}{2}\, z_{ij} = \delta_{ij}\, \alpha_i \end{cases}$$

ossia soddisfacenti le relazioni:

$$\begin{cases} z_{ij} = \bar{z}_{ij} = 0 & \forall\ i \neq j \\ z_{ii} = \bar{z}_{ii} \end{cases}$$

e non appartiene a Q, come subito si verifica.

§ 2. - *Un secondo problema.*

Si è detto che il valore $-1/p$ costituisce il massimo per la curvatura nel caso di faccette olomorfe. Vediamo allora sotto quali condizioni la direzione uscente da iI che con la direzione Adt determina una faccetta olomorfa sia tale che quest'ultima abbia curvatura massima.

Nell'ambito in cui ci siamo posti il problema è semplice: si tratta di imporre che la quadrica Q contenga il punto iA. Ciò comporta la relazione:

$$\sum_1^p{}_i\, \alpha_i^2 (p\alpha_i^2 - q) = 0\,. \tag{7}$$

La (7) si può interpretare come l'equazione di una superficie del quarto ordine dello spazio D (cfr. § 1).

Dimostreremo che tale superficie ha solo un numero *finito* di punti reali.

Poniamo per comodità, qualunque sia i: $\alpha_i^2 = \beta_i$.

La (7) diventa:

$$\sum_1^p{}_i\, \beta_i (p\beta_i - q) = 0 \tag{8}$$

dove ora $q = \sum_1^p{}_i\, \beta_i$.

La (8) si può trasformare al modo seguente:

$$0 = \sum_1^p{}_i\, \beta_i (p\beta_i - q) = \sum_1^p{}_i\, \beta_i \Big(p\beta_i - \sum_1^p{}_h\, \beta_h\Big) = \sum_1^p{}_i \Big[(p-1)\,\beta_i^2 - \sum_{\substack{1\\ h\neq i}}^p{}_h\, \beta_i \beta_h\Big] =$$

$$= (p-1)\,\beta_1^2 - 2\left(\sum_2^p{}_i\, \beta_i\right)\beta_1 + (p-1)\sum_2^p{}_i\, \beta_i^2 - \sum_{\substack{2\\ h\neq i}}^p{}_{ih}\, \beta_1 \beta_h\,.$$

Risolviamo rispetto a β_1:

$$\beta_1 = \frac{\sum_2^p{}_i \beta_i \pm \sqrt{\left(\sum_2^p{}_i \beta_i\right)^2 - (p-1)^2 \sum_2^p{}_i \beta_i^2 + (p-1) \sum_{\substack{2 \\ h \neq i}}^p{}_{ih} \beta_i \beta_h}}{p-1}.$$

La quantità Δ sotto la radice a secondo membro è non positiva, in quanto:

$$\Delta = \sum_2^p{}_i \beta_i + \sum_{\substack{2 \\ h \neq i}}^p{}_{ih} \beta_i \beta_h - (p^2 - 2p) \sum_2^p{}_i \beta_i^2 - \sum_2^p{}_i \beta_i^2 + p \sum_{\substack{2 \\ h \neq i}}^p{}_{ih} \beta_i \beta_h -$$

$$- \sum_{\substack{2 \\ h \neq i}}^p{}_{ih} \beta_i \beta_h = -p \left[(p-2) \sum_2^p{}_i \beta_i^2 - \sum_{\substack{2 \\ h \neq i}}^p{}_{ih} \beta_i \beta_h \right] =$$

$$= -\frac{p}{2} \sum_{\substack{2 \\ h \neq i}}^p{}_{ih} (\beta_i - \beta_h)^2 \leq 0 .$$

Allora, affinché β_1 sia reale occorre sia $\Delta = 0$, e quindi, per ogni valore di i ed h distinto da 1, deve risultare: $\beta_i = \beta_h$. Dopo di che si ha:

$$\beta_1 = \frac{(p-1)\beta_i}{p-1} = \beta_i .$$

In definitiva dunque il luogo rappresentato dalla (7) è un insieme finito L di punti D soddisfacenti le condizioni:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \ldots = \alpha_p^2$$

ossia:

$$\alpha_1 = \pm\alpha_2 = \ldots = \pm\alpha_p .$$

Per ricapitolare, diciamo che ogni punto di L corrisponde ad un vettore dello spazio tangente ad R nel punto iI tale che la faccetta olomorfa da esso determinata abbia curvatura massima.

Se ora ripetiamo lo stesso discorso a partire da un qualunque punto Z di R, otteniamo, al variare di Z, per ognuna delle direzioni uscenti da Z del tipo suddetto una distribuzione di faccette olomorfe. Ciascuna di tali distribuzioni risulta integrabile. Consideriamo infatti una di tali distribuzioni, precisamente quella il cui valore in iI sia

la faccetta olomorfa individuata dal punto di L per cui tutte le α_i sono uguali tra loro (ad esempio uguali ad 1, oppure, normalizzando, uguali ad $1/\sqrt{p}$). In base ad un risultato di [4] (p. I, n. 10, pag. 306), possiamo dire che la condizione $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p$ per gli invarianti di una direzione δ uscente da $i\mathrm{I}$ è condizione sufficiente affinché la superficie Ω luogo delle geodetiche uscenti da $i\mathrm{I}$ e tangenti all'unica faccetta olomorfa passante per δ, sia olomorfa e totalmente geodetica. Ω ha curvatura costante $-1/p$.

Questo risultato ci permette di affermare che:

« La distribuzione di faccette olomorfeil cui valore in $i\mathrm{I}$ è la faccetta olomorfa individuata dal punto di L per cui tutte le α_i sono uguali, risulta integrabile ».

Osserviamo infine che una qualunque altra delle distribuzioni in questione si può ottenere da quella su considerata mediante un movimento simplettico (dati due punti di L, esiste una trasformazione di Γ_n^* che porta il primo nel secondo; basta prendere come matrice unitaria della trasformazione una matrice diagonale i cui elementi non nulli valgano 1 oppure i a seconda dei casi), si giunge al risultato preannunciato che tutte le distribuzioni in questione sono integrabili.

BIBLIOGRAFIA

[1] Conforto F., *Funzioni abeliane modulari*. Roma 1951.

[2] Dalla Volta V., *Sulla geometria differenziale dello spazio delle matrici simmetriche*. Ann. Mat. p. e appl., s. 4, **34**, 291-332 (1954).

[3] Dalla Volta V., *Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche*. Rend. Acc. Naz. Linc. Cl. Sci. Mat. Fis. Nat., s. 8, **18** (6) (1955).

[4] Dalla Volta V., *Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche*. Rend. Mat. e sue appl., s. 5, Vol. XIII (1955).

Studio cromatografico della composizione della frazione insaponificabile dell'olio dei semi di « Cardiospermum Halicacabum » Identificazione e dosaggio dei tocoferoli

Nota del socio ordinario MARIO COVELLO (*)
e di ORESTE SCHETTINO (*) e LYDIA FERRARA (*)

(Adunanza dell'1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Proseguendo gli studi intrapresi al fine di caratterizzare i costituenti dell'olio di semi di « Cardiospermum Halicacabum », gli Autori ne hanno preso in esame la frazione tocoferolica.

Vengono esposti i risultati ottenuti in questa analisi, condotta mediante accoppiamento delle tecniche cromatografiche su strato sottile e in fase gassosa.

SUMMARY. — Following the rescarches undertaken with the purpose to characterize the unsaponifiable components of « Cardiospermum Halicacabum » seeds oil, the Authors have considered, in the present note, the composition of the tocopherolic fraction of this unsaponifiable. The results of the study, which has been performed by coupling both TLC and GLC techniques, are referred.

In una precedente nota [1] abbiamo esposto i risultati ottenuti nel corso dello studio da noi intrapreso della composizione dell'insaponificabile dell'olio di « Cardiospermum Halicacabum », già oggetto di precedenti indagini da parte di uno di noi [2].

Nel corso delle ricerche sulla frazione insaponificabile, di cui sopra è fatto cenno, l'indagine fu rivolta, mediante l'abbinamento delle tecniche cromatografiche su strato sottile e in fase gassosa, allo studio della costituzione delle frazioni idrocarburiche, steroliche ed alcoliche dell'insaponificabile stesso. Si riferisce, ora, sulla fase successiva del nostro studio, nel quale è stata presa in esame la frazione tocoferolica. Questa, per l'esiguità della frazione stessa in seno all'insoponificabile e per la ben nota reattività dei suoi costituenti, specie

* Napoli, Cattedra di Chimica Bromatologica della Facoltà di Farmacia.

per quanto riguarda l'ossidabilità, richiede un trattamento particolarmente cauto onde garantirne l'isolamento ed il frazionamento evitando, nel corso delle manipolazioni, l'alterazione di alcuni o di tutti i componenti. È noto, infatti, come l'alterabilità delle varie sostanze di questo gruppo presenti livelli alquanto diversi, decrescendo la loro ossidabilità col diminuire del numero di metili presenti nella molecola. È inoltre necessario tener presente, tra le cause di perdita dei tocoferoli, la relativa facilità con cui questi tendono a polimerizzare, sia in seguito all'azione dei trattamenti chimici e fisici di vario genere (determinante pare sia l'ossidazione all'aria ed alla luce) sia attraverso meccanismi biologici. Ciò può dar luogo, in sede di determinazione analitica, ad erronee valutazioni dei rapporti reciproci tra i diversi composti presenti, rapporti che, come è noto, sono determinanti ai fini della stabilità all'ossidazione degli oli proprio in dipendenza della diversa attività antiossidante esplicata dai vari tocoferoli. Tali rapporti sono, inoltre, indicativi circa l'attività vitaminica E che decresce al crescere dell'ossidabilità dei vari costituenti del gruppo.

Per quanto riguarda la scelta del metodo analitico, ci siamo orientati ancora verso le tecniche cromatografiche, stante la difficoltà di ottenere risultati probanti con le procedure spettrofotometriche. Queste ultime si basano, in genere, sulla valutazione nel visibile del complesso Fe (II)- α, α'-dipiridile, secondo il classico metodo di Emmerie-Engel [3] o del prodotto di reazione con β-fenantrolina del ferro bivalente formatosi per riduzione di ione ferrico ad opera dei tocoferoli [4]. Tali metodi oltre a prestare il fianco a fondate critiche a causa dell'errore sistematico cui sono soggetti, per le interferenze che possono verificarsi in presenza di sostanze ossido-riducenti di natura diversa [5, 6], mancano totalmente di specificità nei riguardi dei singoli tocoferoli. Essi sono tuttavia validi qualora si richieda solo una valutazione complessiva dei tocoferoli presenti.

Le tecniche cromatografiche, invece, accoppiate spesso a quelle spettrofotometriche, consentono di pervenire alla determinazione frazionata dei singoli tocoferoli [7] raggiungendo elevati livelli di precisione.

Tra i vari procedimenti riferibili a questo gruppo [8] (spettrofotometria dopo frazionamento per cromatografia su carta o su strato sottile, gascromatografia preceduta da frazionamento mediante cromatografia su colonna o su strato sottile) abbiamo data la preferenza, come accennato più sopra, a quest'ultima metodica atta a ottenere una determinazione quantitativa dei singoli tocoferoli lavorando in condizioni tali da proteggerli validamente dalle alterazioni.

Parte Sperimentale

Per quanto riguarda le caratteristiche generali del campione di olio di Cardiospermum Halicacabum adoperato, si rimanda alle precedenti note sull'argomento [1, 2]. La saponificazione del campione destinato alla ricerca dei tocoferoli è stata condotta con tutte le cautele atte ad evitare sia l'azione ossidante dell'aria (operando in corrente d'azoto) che l'azione catalitica della luce (eseguendo le operazioni in luce notevolmente attenuata).

Per il frazionamento cromatografico su strato sottile si sono adoperate lastre preparative di gel di silice G pronte all'uso (Merck) che, prima dell'impiego sono state lavate con cloroformio, indi asciugate ed attivate tenendole in stufa ad aria per 60' a 110° C. Ciascuna lastra veniva incisa con un tagliavetro, in modo da poterne staccare, dopo lo sviluppo cromatografico, una striscia da adoperare come testimone spruzzandola con reattivo cromogeno di Emmerie-Engel (soluzione cloroformica al 2 % di α, α'-dipiridile e soluzione acquosa allo 0,5 % di cloruro ferrico. Lo sviluppo dei cromatogrammi è stato eseguito impiegando come eluente la miscela: Esano-etere etilico (6:4 v/v) operando al riparo dalla luce ed in corrente di azoto, adoperando vasche da noi allestite per il lavoro in atmosfera diversa dall'aria [9].

Per il frazionamento gas-cromatografico si è fatto uso di un gas-cromatografo Perkin-Elmer F 11 con rivelatore a ionizzazione di fiamma, corredato di colonna di acciaio inossidabile del diametro di 1/8 in. e della lunghezza di due metri. Il riempimento della colonna è stato realizzato con SE 30 all'1 % su Gas-Chrom P 100-120 mesh. Gli altri dati operativi sono i seguenti:

Temperatura dell'evaporatore: 200°C.

Temperatura colonna: programmata da 180° a 240°C (incr. 5°/min).

Gas di trasporto: Azoto ad un flusso di 50 ml/min.

I tocoferoli sono stati frazionati previa trasformazione in trimetilsilileteri (TMS) dopo averli asportati dall'adsorbente cromatografico mediante eluizione con etere etilico. La preparazione dei TMS è stata eseguita per trattamento dell'eluato con miscela: esametildisilazano-trimetilclorosilano (9:3) in presenza di piridina che si è poi allontanata per evaporazione in presenza di azoto.

Si è eseguita, inoltre, la determinazione spettrofotometrica dei tocoferoli totali seguendo il metodo Emmerie-Engel. A tale scopo un'aliquota della soluzione alcoolica dell'insaponificabile (1 $\sim$ 1,5 ml) è stata posta a reagire, direttamente nella cuvetta dello spettrofotometro (apparecchio Beckman mod. DU) con ugual volume di soluzione etanolica allo 0,5 % di α, α'-dipiridile. Alla miscela si è aggiunto, poi, 0,1 ml di soluzione etanolica allo 0,2 % di cloruro ferrico e, dopo

due minuti, si è eseguita la lettura a 520 nm. Operando in questo modo si è ridotta al minimo l'esposizione del campione alla luce.

Si è quindi calcolata la concentrazione dei tocoferoli (espressa come α-tocoferolo) mediante la relazione [10]:

$$\frac{\mu g \text{ di tocoferolo}}{g \text{ di olio}} = (E_S - E_B).\ D.W. \cdot \frac{1}{0{,}041}$$

in cui E_S ed E_B sono rispettivamente le estinzioni del campione e del bianco; 0,041 = estinzione di 1 μm di α-tocoferolo in un ml di soluzione, D = fattore di diluizione, W = peso dell'olio in g.

Risultati

Il contenuto totale di tocoferoli, determinato come si è detto per via spettrofotometrica, è risultato di μg 175 per g di olio. Questo dato appare in buon accordo con quello ottenibile dalla sommatoria

Tabella I

Composizione percentuale della frazione tocoferolica dell'insaponificabile dell'olio di semi di Cardiospermum Halicacabum, valutata mediante TLC e GLC.

Tocoferoli	Determinazione	
	TLC	GLC
α	7,5 %	6,2 %
β − γ	70,7 %	71,4 %
δ	21,8 %	22,4 %

dei valori relativi agli eluati delle varie frazioni isolate su strato sottile mediante la tecnica di Gutfinger e Letan [10], che noi abbiamo voluto sperimentare onde avere un dato alternativo di verifica.

Tale tecnica prevede la cromatografia su strato sottile di gel di silice della frazione tocoferolica, usando come eluente cloroformio contenente lo 0,7 % di etanolo e, come rivelatore della striscia campione e reattivo degli eluati delle singole macchie evidenziate, il reattivo di Emmerie-Engel.

Si è anche sperimentata la rivelazione dei cromatogrammi mediante soluzione di solfato cerico (sospensione al 3 % di solfato cerico in acido tricloroacetico al 25 %, addizionata di acido solforico con-

centrato fino a completa dissoluzione del precipitato). Questo reattivo, però, si è rivelato scarsamente utile a causa dei risultati incostanti da esso forniti.

Seguendo le modalità cromatografiche più sopra descritte, si è ottenuto il cromatogramma riprodotto in fig. 1, nel quale si osservano, oltre alle macchie dei tocoferoli α, γ e δ, i cui Rf corrispondono

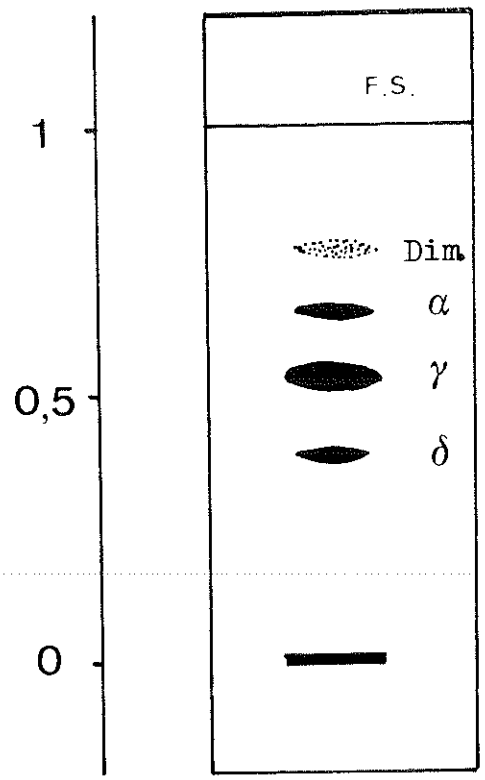


FIG. 1

bene a quelli riportati dai citati AA., anche una macchia con Rf più elevato, che, sempre con riferimento ai dati di Gutfinger e Letan, corrisponde a quello di un dimero. Tale macchia, comunque, deve essere esclusa dalla sommatoria perché il valore analitico complessivo risulti equivalente a quello totale sopra riportato, (vedi Tabella I).

Il risultato dell'analisi gascromatografica è riportato nel grafico di fig. 2. Dal gascromatogramma ivi riprodotto sono state calcolate le percentuali relative dei tocoferoli mediante planimetria delle aree dei picchi. È opportuno precisare che il picco attribuito al γ-tocofe-

rolo ingloba anche l'eventuale β-tocoferolo presente nell'insaponificabile che, con la tecnica usata, non può essere distinto dal precedente.

Come si può rilevare dai valori delle percentuali calcolate per via gascromatografica, riportati in Tab. I, questi presentano una sensibile discordanza rispetto ai corrispondenti valori calcolati dalla cromatografia su strato sottile. Tale discordanza, già chiaramente evidenziata da Fedeli, Camurati e Jacini [6] nel caso di alcuni oli vegetali

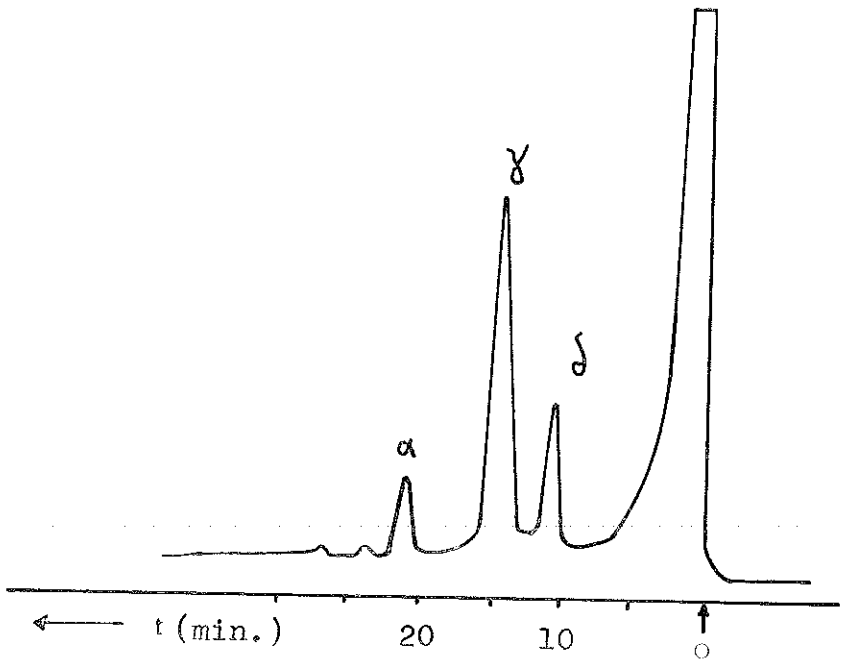


FIG. 2

di impiego alimentare, è senz'altro da attribuirsi alla scarsa specificità del metodo spettrofotometrico di Emmerie-Engel applicato alla valutazione degli eluati ottenuti dal cromatogramma su strato sottile. Questa osservazione, che conferma le considerazioni da noi esposte nella premessa circa la maggiore attendibilità della tecnica gascromatografica ai fini della valutazione quantitativa dei rapporti tra i costituenti tocoferolici dell'insaponificabile, ci è stata convalidata anche da prove condotte frazionando gascromatograficamente miscele campione di tocoferoli preparate in laboratorio, i cui risultati sono stati sempre in buon accordo col valore teorico calcolato.

BIBLIOGRAFIA

[1] COVELLO M., SCHETTINO O., FORGIONE P., Rend. Accad. Scienze Fisiche e Matematiche della Soc. Naz. di Scienze, Lettere e Arti in Napoli, Serie 4, Vol. XL-1973.
[2] COVELLO M., Annali di Chimica, **41**, 78 (1951).
[3] EMMERIE A., ENGEL C., Rech. Trav. Chim., **57**, 1351 (1938).
[4] TSEN C. C., Anal. Chem., **33**, 849 (1961).
[5] NELSON J. P., MILUM A. J., J. Am. Oil chem. soc., **45**, 848 (1968).
[6] FEDELI E., CAMURATI F., JACINI G., Riv. It. Sost. Grasse, **74** (1970).
[7] WOLF J. P., *Manuel d'analyse des corps gras,* Azoulay edit. Paris (1968).
[8] LOSI G., PIRETTI M. V., Riv. It. Sost. Grasse, **47**, 493 (1970).
[9] COVELLO M., SCHETTINO O., Rend. Accad. Scienze Fisiche e Matematiche della Soc. Naz. di Scienze, Lettere e Arti in Napoli, Serie 4, Vol. XXXII, 1965.
[10] GUTFINGER T., LETAN A., J. Agr. Food. Chem., **21**, 1120 (1973).

Regolarizzazione delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche *

Nota di SILVANO MATARASSO
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza dell' 1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — In questo lavoro vengono stabiliti dei teoremi di regolarizzazione per soluzioni di una classe di problemi al contorno relativi ad equazioni ipoellittiche a coefficienti variabili; esso fa seguito ad un altro lavoro pubblicato su questo Rendiconto e relativo a maggiorazioni a priori per il caso a coefficienti costanti.

SUMMARY. — In this paper are given regularity theorems for solutions of a class of boundary problems relative to hypoelliptic equations; in the present paper we continue another one published on this Rendiconto and relative to a priori bounds for constant coefficient case.

In un precedente lavoro ho stabilito delle formule di maggiorazione nel semispazio $t \geq 0$, per le soluzioni di un problema del tipo:

$$\begin{cases} P(D)\,u = f & t > 0 \\ Q_j(D)\,u = g_j & t = 0\,, \qquad 1 \leq j \leq r\,, \end{cases}$$

ove gli operatori considerati soddisfano da un lato a certe ipotesi simili, per molti aspetti, a quelle considerate da M. Schechter in una memoria di qualche anno fa [6], e dall'altra a un secondo gruppo di ipotesi che consentono di stabilire anche dei teoremi di regolarizzazione tangenziale per le soluzioni del problema.

Nel presente lavoro passo a considerare il caso di operatori P e Q_j a coefficienti variabili e, facendo delle ipotesi più restrittive di quelle considerate in [4] che implicano fra l'altro che P sia ipoellit-

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

tico, stabilisco dei teoremi di regolarizzazione anche non tangenziale per le soluzioni del problema.

Il punto di partenza è costituito dalle maggiorazioni stabilite in [4] per il caso delle equazioni a coefficienti costanti, mentre per passare dal caso dei coefficienti costanti a quello dei coefficienti variabili, mi servo di procedimenti del tipo di quelli seguiti da C. Parenti in [5] per stabilire un risultato dello stesso tipo per soluzioni di problemi quasi ellittici.

Ho dovuto però premettere alcuni lemmi, relativi all'equivalenza di certe norme integrali, che estendono risultati analoghi stabiliti da L. N. Slobodeckii [7] in un caso più semplice.

Il n. 1 contiene le notazioni e le ipotesi relative all'operatore P, il n. 2 le notazioni e le ipotesi relative agli operatori Q_j, nel n. 3 sono studiati gli spazi funzionali adoperati, nel n. 4 sono dimostrati alcuni lemmi preliminari e infine nel n. 5 è dimostrato il teorema di regolarizzazione.

1. - Notazioni e ipotesi relative all'operatore P.

Detto R^n lo spazio euclideo ad n dimensioni, indichiamo il suo generico elemento con $y = (x, t) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$; con R^n_+ e $\overline{R^n_+}$ indicheremo, rispettivamente, i semispazi $t > 0$ e $t \geq 0$.

Sia A un insieme finito di punti di R^n con coordinate intere non negative, contenente l'origine e soddisfacente alla proprietà che se $\alpha \in A$ e $O \leq y \leq \alpha$, se ne deduce $y \in \tilde{A}$ ove $\tilde{A}$ indica la chiusura convessa di A in R^n; detto A^* l'insieme dei punti di $\tilde{A}$ con coordinate intere non negative, porremo

$$P(y, D) = \sum_{\alpha \in A^*} p_\alpha(y) D^\alpha,$$

ove $D = (D_x, D_t) = (D_1, \ldots, D_{n-1}, D_t)$ con $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$.

Supporremo i $p_\alpha(y)$ di classe $C^\infty(\overline{R^n_+})$ e, posto con $\zeta = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \tau)$,

$$P(y, \zeta) = \sum_{\alpha \in A^*} p_\alpha(y) \zeta^\alpha = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}(y, \xi) \tau^k,$$

supporremo $a_0(y, \xi) = 1$.

Posto ancora

$$P^{(\mu)}(y, \xi, \eta) = \frac{\partial^{|\mu|} P}{\partial \xi_1^{\mu_1} \dots \partial \xi_{n-1}^{\mu_{n-1}} \partial \eta^{\mu_n}},$$

supporremo che, per ogni fissato $y \in \overline{R^n_+}$ siano verificate le ipotesi 1), 2), 3), 4), di [4] e cioè:

1) $\forall\, y \in \overline{R^n_+}$, esistono due costanti N ed M tali che, per $(\xi, \eta) \in R^n$ e $|\xi| \geq N$, si ha

$$\sum_{\mu} |P^{(\mu)}(y, \xi, \eta)| \leq M |P(y, \xi, \eta)|.$$

Indicato con $\tau_k(y, \xi)$ le radici di $P(y, \xi, \eta) = 0$ discende da tale ipotesi (cfr. [6]) che esiste una costante H_m, per la quale si ha:

$$|Im\ \tau_k(y, \xi)| \geq H_m \cdot M^{-1}, \quad |\xi| \geq N.$$

Di conseguenza se $n > 2$, $P(y, \xi, \eta)$ è, per ogni fissato y, di « tipo determinato » cioè il numero r delle radici con parte immaginaria positiva di $P(y, \xi, \eta) = 0$, considerata come equazione in η, non dipende da ξ, per $|\xi| \geq N$; noi supporremo in più che r non dipenda da y; indicheremo con $\tau_1^+(y, \xi), \dots, \tau_r^+(y, \xi), \tau_1^-(y, \xi), \dots, \tau_s^-(y, \xi)$, $r + s = m$, $|\xi| \geq N$, rispettivamente le radici con parte immaginaria positiva e con parte immaginaria negativa.

Per $n = 2$ faremo l'ipotesi che, per ogni y, $P(y, \xi, \eta)$ sia di « tipo determinato » e che, detto r il numero delle radici con parte immaginaria positiva di $P(y, \xi, \eta) = 0$, come equazione in η, esso non dipenda da y.

2) Posto

$$V(\xi, \eta) = \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \eta^{2\alpha_n}$$

$$d^2(\xi) = \sum_{\alpha \in A'} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}}$$

ove

$$A' = \{\alpha \in A \mid \alpha_n = 0\},$$

supporremo che, per ogni fissato $y \in \overline{R^n_+}$, esistano delle costanti positive K_i, tali che per $|\xi| \geq N$, si abbia

$$K_1\, V(\xi, \eta) \leq |P(y, \xi, \eta)|^2 \tag{1.1}$$

$$K_2 (d^2(\xi) + \eta^{2m}) \leq V(\xi, \eta) \leq K_3 (d^2(\xi) + \eta^{2m}); \tag{1.2}$$

si osservi che, assieme alla (1.1), sussiste, per ogni fissato $y \in \bar{R}^n_+$, la diseguaglianza

$$(1.1)' \qquad |P(y, \xi, \eta)|^2 \leq K\, V(\xi, \eta),$$

che discende dal fatto che se $\alpha \in \tilde{A}$, di conseguenza si ha $\zeta^{2\alpha} \leq V(\zeta)$.

3) Posto poi $c = c(\xi) = [d(\xi)]^{1/m}$ e

$$\dot{P}(y, \xi, \eta) = \eta^m + \frac{a_1(y, \xi)}{c(\xi)}\eta^{m-1} + \ldots + \frac{a_{m-1}(y, \xi)}{c^{m-1}(\xi)}\eta + \frac{a_m(y, \xi)}{c^m(\xi)},$$

è facile vedere (cfr. [4]) che, per ogni fissato y, le radici di $\dot{P}(y, \xi, \eta) = 0$, come equazione in η, sono contenute in un compatto indipendente da ξ; dunque le radici di $P(y, \xi, \eta) = 0$, per ogni fissato y, sono del tipo $\tau(y, \xi) = \Psi(y, \xi) \cdot c(\xi)$ con $\Psi(y, \xi)$ limitato in ξ.

Osserviamo ora che, [cfr. 1)], dette $\Psi_1^+, \ldots, \Psi_r^+, \Psi_1^-, \ldots, \Psi_s^-$ le radici di $\dot{P}(y, \xi, \eta) = 0$, come equazione in η, si ha

$$|Im\, \Psi_k^{\pm}(y, \xi)| \geq \frac{H_m \cdot M^{-1}}{c(\xi)}, \qquad |\xi| \geq N.$$

Faremo allora la seguente ipotesi:
Per ogni fissato y, esistono due costanti positive tali che, per $|\xi| \geq N$,

$$h_1 c^{-\beta^{\pm}}(\xi) \leq |Im\, \Psi_k^{\pm}(y, \xi)| \leq h_2 c^{-\gamma^{\pm}}(\xi), \qquad 0 \leq \gamma^{\pm} \leq \beta^{\pm} \leq 1;$$

indicheremo con β il più grande tra β^+ e β^-.

4) Nel caso $0 < \beta^{\pm} \leq 1$, supporremo che siano r' (risp. s') le radici con parte immaginaria positiva (risp. con parte immaginaria negativa) di $\dot{P}(y, \xi, \Psi) = 0$, che hanno parti reali distinte tra loro, essendo r' (risp. s') indipendente da ξ, per $|\xi| \geq N$, e da y; indicheremo con $\Psi_1^+, \ldots, \Psi_{r'}^+$, r' radici con parte immaginaria positiva che, per ogni y e per $|\xi| \geq N$, hanno parti reali distinte; inoltre sia χ^+, indipendente da y e da ξ per $|\xi| \geq N$, il numero di volte che ogni $Re\, \Psi_i^+$, $1 \leq i \leq r'$, compare tra le parti reali delle radici con parte immaginaria positiva; per semplicità supponiamo χ^+ indipendente dall'indice i. Analogamente definiremo χ^- e indicheremo con $\Psi_1^-, \ldots, \Psi_{s'}^-$, s' radici che per ogni y e per $|\xi| \geq N$ hanno parte immaginaria negativa e parti reali distinte tra di loro.

Supporremo ancora che le parti reali distinte tra di loro rimangano tali anche « all'infinito » e cioè che per ogni y esistano delle costanti positive K' e K'' tali che, per ogni ξ con $|\xi| \geq N$, si abbia:

$$\begin{cases} |Re\, \Psi_i^+(y, \xi) - Re\, \Psi_j^+(y, \xi)| \geq K', & i \neq j, \quad i, j \leq r' \\ |Re\, \Psi_i^-(y, \xi) - Re\, \Psi_j^-(y, \xi)| \geq K'', & i \neq j, \quad i, j \leq s'. \end{cases}$$

Oltre alle precedenti ipotesi supporremo anche che:

5) $V(\xi, \eta)$ è ipoellittico.

Si osservi che, in virtù dei teoremi 3.3.2 e 4.1.6 di [3], dalla (1.1) supposta verificata per ogni ξ, dalla (1.1)′ e dalla 5), discende che, per ogni fissato y, $P(y, \xi, \eta)$ è ipoellittico.

Vogliamo ora porre in evidenza alcune conseguenze della 5).

Incominciamo con l'osservare che, in virtù della 5), (cfr. [2]), esistono K e $b > 0$ tali che, per ogni derivata $V^{(\beta)}$ si ha:

$$V^{(\beta)}(\xi, \eta) \leq K\, V^{1-b|\beta|}(\xi, \eta), \qquad (\xi, \eta) \in R^n. \tag{1.3}$$

Sussiste ora il seguente lemma:

LEMMA 1.1. *Supposta verificata la* 5) *e quindi la* (1.3), *esiste un* ν, $0 \leq \nu < m$, *tale che se* $\alpha \in A^*$ *e* $\mu \leq \alpha$, μ *essendo un multiindice a componenti non tutte nulle, si ha:*

$$\zeta^{2(\alpha-\mu)} \leq K\, V^{\frac{\nu}{m}}(\zeta), \quad \zeta = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta). \tag{1.4}$$

E infatti, poiché $\alpha \in A^*$, esistono dei punti $(\gamma_{1i}, \ldots, \gamma_{ni}) \in A$, $1 \leq i \leq p$ e dei numeri reali t_q con $\sum_{q=1}^{p} t_q = 1$ e $0 \leq t_q \leq 1$, tali che:

$$\alpha_s = \sum_{q=1}^{p} t_q\, \gamma_{sq}, \qquad 1 \leq s \leq n.$$

Di conseguenza, (nelle osservazioni che seguono porremo per comodità $\eta = \xi_n$)

$$\xi_1^{2(\alpha_1-\mu_1)} \ldots \xi_n^{2(\alpha_n-\mu_n)} = \xi_1^{2(t_1\gamma_{11}+\ldots+t_p\gamma_{1p})} \ldots \xi_n^{2(t_1\gamma_{n1}+\ldots+t_p\gamma_{np})}\, \xi_1^{-2\mu_1} \ldots \xi_n^{-2\mu_n} =$$

$$= (\xi_1^{\gamma_{11}} \ldots \xi_n^{\gamma_{n1}})^{2t_1} \ldots (\xi_1^{\gamma_{1p}} \ldots \xi_n^{\gamma_{np}})^{2t_p}\, \xi_1^{-2\mu_1} \ldots \xi_n^{-2\mu_n};$$

supponiamo, per fissare le idee, $\mu_1 > 0$ e osserviamo che, per un certo i_1, $\gamma_{1i_1} \geq \alpha_1$ e $t_{i_1} > 0$; si ha allora

$$\xi_1^{2(\alpha_1-\mu_1)} \ldots \xi_n^{2(\alpha_n-\mu_n)} =$$

$$= (\xi_1^{(\gamma_{1i_1}-\mu_1)} \ldots \xi_n^{\gamma_{ni_1}})^{2t_{i_1}} \ldots (\xi_1^{\gamma_{1i_p}} \ldots \xi_n^{\gamma_{ni_p}})^{2t_{i_p}}\, \xi_1^{2\mu_1(t_{i_1}-1)}\, \xi_2^{-2\mu_2} \ldots \xi_n^{-2\mu_n}$$

ove $i_1 \ldots i_p$ è una permutazione degli indici $1 \ldots p$.

Nel caso $|\xi_i| \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, si deduce

$$\xi_1^{2(\alpha_1-\mu_1)} \ldots \xi_n^{2(\alpha_n-\mu_n)} \leq \left(\frac{\partial^{2\mu_1} V}{\partial\, \xi_1^{2\mu_1}}\right)^{t_{i_1}} \cdot V^{t_{i_2}+\ldots+t_{i_p}} \leq$$

$$\leq K\, (V^{1-2\mu_1 b})^{t_{i_1}}\, V^{t_{i_2}+\ldots+t_{i_p}} = K\, V^{1-2\mu_1 t_{i_1} b}.$$

Nel caso che

$$|\xi_{i_s}| \leq 1 \quad , \qquad 1 \leq s \leq q-1$$

$$|\xi_{i_s}| \geq 1 \quad , \qquad q \leq s \leq n \, ,$$

il che significa che vi è un $\mu_{i_s} > 0$ e quindi un $\alpha_{i_s} > 0$ con $1 \leq s \leq q-1$, si ha:

$$\xi_1^{2(\alpha_1-\mu_1)} \ldots \xi_n^{2(\alpha_n-\mu_n)} \leq \xi_{i_q}^{2\alpha_{i_q}} \ldots \xi_{i_n}^{2\alpha_{i_n}} =$$

$$= \left(\xi_{i_q}^{\gamma_{i_q 1}} \ldots \xi_{i_n}^{\gamma_{i_n 1}} \right)^{2t_1} \ldots \left(\xi_{i_q}^{\gamma_{i_q p}} \ldots \xi_{i_n}^{\gamma_{i_n p}} \right)^{2t_p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\partial^{2(\gamma_{i_1 1}+\ldots+\gamma_{i_{q-1} 1})} \mathrm{V}}{\partial \xi_{i_1}^{2\gamma_{i_1 1}} \ldots \partial \xi_{i_{q-1}}^{2\gamma_{i_{q-1} 1}}} \right)^{t_1} \ldots \left(\frac{\partial^{2(\gamma_{i_1 p}+\ldots+\gamma_{i_{q-1} p})} \mathrm{V}}{\partial \xi_{i_1}^{2\gamma_{i_1 p}} \ldots \partial \xi_{i_{q-1}}^{2\gamma_{i_{q-1} p}}} \right)^{t_p} \leq$$

$$\leq \mathrm{K} \, \mathrm{V}^{1-2b(\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_{q-1}})} \, .$$

È dunque dimostrato l'asserto.

OSSERVAZIONE. Posto $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$, β_i intero non negativo, e osservato che

$$[\mathrm{V}^{(\beta')}(\xi, \tau_l)]_{\tau=0} = \mathrm{D}^{\beta'} \mathrm{V}(\xi, 0) = \mathrm{D}^{\beta'} d^2(\xi) \, ,$$

dalla (1.3), per $\tau_l = 0$, si ottiene

$$\mathrm{D}^{\beta'} d^2(\xi) \leq \mathrm{K} \, [d^2(\xi)]^{1-b|\beta'|} \, , \quad \xi \text{ reale;} \tag{1.5}$$

porremo

$$1 - b = \frac{\delta}{2m} \, .$$

2. - NOTAZIONI ED IPOTESI RELATIVE AGLI OPERATORI Q_j.

Assegnamo r operatori

$$\mathrm{Q}_j(y, \mathrm{D}) = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}_j} q_{j\alpha}(y) \, \mathrm{D}^{\alpha} = \sum_{h=0}^{p_j} \mathrm{Q}_{jh}(y, \mathrm{D}_x) \, \mathrm{D}_t^h \, , \; p_j \leq m-1 \, ,$$

nell'ipotesi che, per ogni j, sia verificata la condizione, con q_j opportuno,

$$\alpha \in A_j \Longrightarrow \frac{m}{q_j}\alpha \in \tilde{A}\,, \qquad p_j \leq q_j \leq m-1\,; \tag{2.1}$$

supporremo inoltre i $q_{j\alpha}(y)$ di classe C^∞ .

Porremo

$$Q_j\ (x,\ 0,\ D) = Q_j\ (x,\ D)$$

$$Q_{jh}\ (x,\ 0,\ D_x) = Q_{jh}\ (x,\ D_x)\,.$$

Discende dalla (2.1) che, fissato $x \in R^{n-1}$,

$$Q_{jh}(x, \xi) = Q\,(\,c^{q_j-h}(\xi)\,)\,. \tag{2.2}$$

Si osservi che in [4], al posto della (2.1), si è direttamente supposto verificata la (2.2).

Sussiste il seguente lemma:

LEMMA 2.1. *Supposto verificata la* (2.1) *e la* (1.3), *esiste* ν_j *con* $0 \leq \nu_j < q_j$ *tale che, se* $\alpha \in A_j$ *e* μ *è un multiindice a componenti non tutte nulle e* $\mu \leq \alpha$, *si ha*:

$$\xi^{2(\alpha-\mu)} \leq K\, V_m^{\nu_j}(\zeta)\,. \tag{2.3}$$

E infatti, poiché $\alpha \in A_j$, si deduce, nelle nostre ipotesi, che $\frac{m}{q_j}\alpha \in \tilde{A}$ e dunque esistono dei $(\gamma_{1i}, \ldots, \gamma_{ni}) \in A$, $1 \leq i \leq p$ e $0 \leq t_q \leq 1$ con $\sum_{q=1}^{p} t_q = 1$, tali che

$$\alpha_s \frac{m}{q_j} = \sum_{q=1}^{p} t_q \gamma_{sq}\,, \qquad 1 \leq s \leq n\,;$$

allora (posto $\gamma_i = \xi_n$)

$$\xi_1^{2(\alpha_1-\mu_1)} \ldots \xi_n^{2(\alpha_n-\mu_n)} =$$

$$= \xi_1^{2\frac{q_j}{m}(t_1\gamma_{11}+\ldots+t_p\gamma_{1p})} \ldots \xi_n^{2\frac{q_j}{m}(t_1\gamma_{n1}+\ldots+t_p\gamma_{np})}\, \xi_1^{-2\mu_1} \ldots \xi_n^{-2\mu_n} =$$

$$= (\xi_1^{\gamma_{11}} \ldots \xi_n^{\gamma_{n1}})^{2\frac{q_j}{m}t_1} \ldots (\xi_1^{\gamma_{1p}} \ldots \xi_n^{\gamma_{np}})^{2\frac{q_j}{m}t_p}\, \xi_1^{-2\mu_1} \ldots \xi_n^{-2\mu_n}\,.$$

Procedendo come si è fatto nel caso del lemma 1.1, si giunge all'asserto.

Porremo

$$q = \min_{1 \le j \le r} (q_j - \nu_j) . \tag{2.4}$$

Posto poi

$$P_+(y, \xi, \eta) = \prod_{k=1}^{r} (\eta - \tau_k^+ (y, \xi))$$

$$P_-(y, \xi, \eta) = \prod_{k=1}^{s} (\eta - \tau_k^- (y, \xi)) ,$$

si ottiene

$$\frac{Q_j(x, \xi, \eta)}{P(x, 0, \xi, \eta)} = \frac{Q_j^+(x, \xi, \eta)}{P_+(x, 0, \xi, \eta)} + \frac{Q_j^-(x, \xi, \eta)}{P_-(x, 0, \xi, \eta)}$$

con $Q_j^+(x, \xi, \eta)$ e $Q_j^-(x, \xi, \eta)$ polinomi in η, di grado, rispettivamente, inferiore ad r e ad s.

Consideriamo poi le matrici

$$A = \| \alpha_{ij} \| \qquad \text{e} \qquad B = \| \beta_{ij} \| ,$$

ove

$$\alpha_{ij}(x, \xi) = \int_R \frac{Q_i^+(x, \xi, \eta) \, \overline{Q_j^+}(x, \xi, \eta)}{| P_+(x, 0, \xi, \eta) |^2} d\eta$$

$$\beta_{ij}(x, \xi) = \int_R \frac{Q_i^-(x, \xi, \eta) \, \overline{Q_i^-}(x, \xi, \eta)}{| P_-(x, 0, \xi, \eta) |^2} d\eta .$$

Posto

$$Q_j^+(x, \xi, \eta) = \sum_{k=0}^{r-1} Q_{jk}^+(x, \xi) \, \eta^k ,$$

osserviamo che (cfr. [4])

$$Q_{jh}^+(x, \xi) = c^{r-h+q_j-m(1-\beta)}(\xi) \; \dot{Q}_{jh}^+(x, \xi) ,$$

ove $\dot{Q}_{jh}^+(x, \xi)$ è una funzione limitata di ξ.

Posto poi

$$\dot{Q}^{+}(x,\xi) = \det \| \dot{Q}_{ij}^{+}(x,\xi) \|$$

si ottiene (cfr. [4])

$$\det A = c^{a}(\xi) \frac{1}{r!} |\dot{Q}^{+}(x,\xi)|^{2} \int_{R^{r}} \frac{V^{2}(\rho_1, \ldots, \rho_r)}{|\dot{P}_{+}(x,0,\xi,\rho_1) \ldots \dot{P}_{+}(x,0,\xi,\rho_r)|^{2}} d\rho_1 \ldots d\rho_r$$

ove $V(\rho_1 \ldots \rho_r)$ è il determinante di Vandermonde delle quantità indicate in parentesi e

$$a = 2 \sum_{j=1}^{r} q_j + r - 2rm(1-\beta).$$

Faremo ora la seguente ipotesi di ricoprimento: per ogni $x \in R^{n-1}$ e $|\xi| \geq N$,

A *non è singolare*

e cioè, per ogni $x \in R^{n-1}$ e $|\xi| \geq N$,

$$\dot{Q}^{+}(x,\xi) \neq 0. \tag{2.5}$$

Tale condizione non è però da sola sufficiente ai nostri scopi, essendo necessario che, per ogni $x \in R^{n-1}$ la (2.5) sia verificata uniformemente rispetto a ξ, per $|\xi| \geq N$.

Supporremo allora che, per ogni $x \in R^{n-1}$, esista un numero $H > 0$ indipendente da ξ, per $|\xi| \geq N$, tale che

$$|\dot{Q}^{+}(x,\xi)| \geq H. \tag{2.6}$$

3. - Spazi funzionali.

Indicato ora con L^{p} lo spazio delle funzioni di potenza p^{ma} sommabile, porremo per $u \in L^{1}(R^{n})$

$$\hat{u}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^{n}} e^{-i\zeta \cdot y} u(y)\, dy.$$

Considerato ora $\rho \geq 0$, definiamo lo spazio $H_{V^{-\frac{\rho}{m}}}(R^n) = H_\rho(R^n)$ delle distribuzioni temperate u, per le quali $\hat{u}$ è una funzione soddisfacente la condizione $V^{-\frac{\rho}{m}}(\xi, \eta) \mid \hat{u}(\xi, \eta) \mid^2 \in L^1(R^n)$; esso sarà dotato della norma

$$|||\, u \,|||_\rho^2 = \int_{R^n} V^{-\frac{\rho}{m}}(\xi, \eta) \mid \hat{u}(\xi, \eta) \mid^2 d\xi\, d\eta \,. \tag{3.1}$$

In virtù delle ipotesi fatte su V, consegue (cfr. [1]) che tali spazi rientrano in categorie di spazi già studiate (cfr. [8]).

Definiamo poi $H_\rho(R^n_+)$ come lo spazio delle distribuzioni su R^n_+ che sono restrizione a R^n_+ di elementi di $H_\rho(R^n)$, munito della norma

$$|||\, u \,|||_\rho^+ = \inf |||\, v \,||| \,, \qquad v = u\,|_{R^n_+} \,, \qquad v \in H_\rho(R^n) \,. \tag{3.2}$$

Vogliamo ora caratterizzare delle norme equivalenti a quelle introdotte. Sia B l'insieme dei multiindici β (a componenti intere non negative) per i quali esiste $\alpha \in A$ tale che:

$$\beta \leq \frac{\rho}{m} - \alpha \,,$$

e sia, con $\beta \in B$, A_β l'insieme degli $\alpha \in A$, per i quali, posto

$$\lambda_i = \frac{\rho}{m} - \alpha_i - \beta_i \,,$$

si ha

$$0 \leq \lambda_i < 1 \,.$$

Porremo poi

$$\Delta^i_h(u) = u(x_1 + h\,\delta_{i1}, \ldots, x_n + h\,\delta_{in}) - u(x_1, \ldots, x_n)$$

e

$$\Delta^{i_1 \ldots i_r}_{h_{i_1} \ldots h_{i_r}} = \Delta^{i_r}_{h_{i_r}} \left(\Delta^{i_1 \ldots i_{r-1}}_{h_{i_1} \ldots h_{i_{r-1}}} \right) \,,$$

e, nel caso $i_k = k$, $1 \leq k \leq n$, più semplicemente,

$$\Delta^{1,2,\ldots,n}_{h_1, h_2, \ldots, h_n} = \Delta_{h_1 \ldots h_n} \,.$$

Porremo ancora, fissato $\beta \in B$, e $\alpha \in A_\beta$,

$$L^2_\alpha (D^\beta u) = \int_{R^n} dy \int_R \frac{d h_{i_1}}{| h_{i_1} |^{1+2\lambda_{i_1}}} \cdots \int_R \frac{d h_{i_r}}{| h_{i_r} |^{1+2\lambda_{i_r}}} \left| \Delta^{i_1 \ldots i_r}_{h_{i_1} \ldots h_{i_r}} (D^\beta u) \right|^2 ;$$

ove $i_1 \ldots i_r$ sono gli indici dei β_i per i quali $0 < \lambda_i < 1$.

Definiremo poi:

$$(3.3) \qquad \| u \|^2_{*,p} = \sum_{\beta \in B} \left(\int_{R^n} | D^\beta u |^2 \, dy + \sum_{\alpha \in A_\beta} L^2_\alpha (D^\beta u) \right).$$

Sussiste il seguente lemma (cfr. il lemma 3, § 2, parte II di [7]):

LEMMA 3.1. *Su* $H_p (R^n)$ *sono equivalenti la* (3.1) *e la* (3.3).

Nella dimostrazione porremo $\eta_j = \xi_n$ e ci riferiremo a funzioni di classe $C_0^\infty (R^n)$.

Si osservi che, per $\beta \in B$ e $\alpha \in A_\beta$ (per semplicità porremo $\forall k$, $i_k = k$, ove per il significato di $i_1 \ldots i_r$ si confronti la definizione di $L^2_\alpha (D^\beta u)$)

$$\Delta_{h_1 \ldots h_n} (D^\beta u) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{iy \cdot \zeta} \prod_{j=1}^n (e^{i h_j \cdot \xi_j} - 1) \, \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n} \hat{u} (\zeta) \, d\zeta$$

ove $\zeta = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Allora:

$$L^2_\alpha (D^\beta u) = (2\pi)^{-n/2} \int_R \frac{d h_1}{| h_1 |^{1+2\lambda_1}} \cdots \int_R \frac{d h_n}{| h_n |^{1+2\lambda_n}}$$

$$\int_{R^n} \xi_1^{2\beta_1} \ldots \xi_n^{2\beta_n} \prod_{j=1}^n | e^{i h_j \cdot \xi_j} - 1 |^2 \cdot | \hat{u} (\zeta) |^2 \, d\zeta .$$

Poiché

$$| e^{i h_j \cdot \xi_j} - 1 |^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_j \, h_j}{2} ,$$

posto

$$\Phi_j (\xi_j) = \int_R \frac{d h_j}{| h_j |^{1+2\lambda_j}} \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_j \, h_j}{2} = \left(\frac{\xi_j}{2} \right)^{2\lambda_j} \int_R \frac{\operatorname{sen}^2 t}{| t |^{1+2\lambda_j}} \, dt ,$$

si ha

$$L^2_\alpha(D^\beta u) = \text{cost} \int_{R^n} \xi_1^{2\beta_1} \dots \xi_n^{2\beta_n} \Phi_1(\xi_1) \dots \Phi_n(\xi_n) |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta =$$

$$= \text{cost} \int_{R^n} \xi_1^{2(\beta_1+\lambda_1)} \dots \xi_n^{2(\beta_n+\lambda_n)} |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta .$$

Utilizzando questa eguaglianza e il teorema di Parseval, con facili considerazioni, si perviene all'asserto.

Sia ora $u \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, $\beta \in B$ e $\alpha \in A_\beta$; nel caso che n non figuri tra $i_1 \dots i_r$, ove $i_1 \dots i_r$ sono gli indici dei β_i per cui $0 < \lambda_i < 1$, porremo

$$L^2_{\alpha,+}(D^\beta u) = \int_{R^n_+} dx\, dt \int_R \frac{dh_{i_1}}{|h_{i_1}|^{1+2\lambda_{i_1}}} \dots \int_R \frac{dh_{i_r}}{|h_{i_r}|^{1+2\lambda_{i_r}}} |\Delta^{i_1 \dots i_r}_{h_{i_1} \dots h_{i_r}} (D^\beta u)|^2 ,$$

mentre se n figura tra $i_1 \dots i_r$ (ad esempio $i_r = n$) porremo

$$L^2_{\alpha,+}(D^\beta u) = \int_{R^n_+} dx\, dt \int_R \frac{dh_{i_1}}{|h_{i_1}|^{1+2\lambda_{i_1}}} \dots \int_R \frac{dh_{i_{r-1}}}{|h_{i_{r-1}}|^{1+2\lambda_{i_{r-1}}}} \int_{-t}^{+\infty} \frac{dh_n}{|h_n|^{1+2\lambda_n}}$$

$$|\Delta^{i_1 \dots i_r}_{h_{i_1} \dots h_{i_r}} (D^\beta u)|^2 ;$$

consideriamo la seguente norma in $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$

$$(3.4) \qquad |||u|||^{+2}_{*,\rho} = \sum_{\beta \in B} \left(\int_{R^n_+} |D^\beta u|^2 dx\, dt + \sum_{\alpha \in A_\beta} L^2_{\alpha,+}(D^\beta u) \right).$$

Sussiste il seguente lemma:

LEMMA 3.2. *Su* $H_\rho(R^n_+)$ *sono equivalenti la* (3.2) *e la* (3.4).

Poiché $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ è denso su $H_\rho(R^n_+)$ (cfr. [8]) se ne deduce che basta dimostrare il lemma in $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$.

Se $v \in C_0^p(R^n)$, con p sufficientemente grande, è un prolungamento di u a tutto R^n, tenendo conto del lemma 3.1, si ha che

$$|||\ u\ |||^{+}_{*,\rho} \leq |||\ v\ |||_{*,\rho} \leq K\ |||\ v\ |||_{\rho},$$

e quindi

$$|||\ u\ |||^{+}_{*,\rho} \leq K\ |||\ u\ |||^{+}_{\rho}.$$

Per dimostrare il lemma basta perciò far vedere che esiste un prolungamento $v \in C_0^p(R^n)$ con p sufficientemente grande, di u a tutto R^n, tale che

$$|||\ v\ |||_{*,\rho} \leq K\ |||\ u\ |||^{+}_{*,\rho}. \tag{3.5}$$

perché, ancora per il lemma citato, si avrà $|||\ v\ |||_{\rho} \leq K'\ |||\ u\ |||^{+}_{*,\rho}$ e quindi

$$|||\ u\ |||^{+}_{\rho} \leq K'\ |||\ u\ |||^{+}_{*,\rho}.$$

Dimostriamo dunque la (3.5).

Definiamo con p sufficientemente grande,

$$E\,u(x,t) = v(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & t \geq 0 \\ \sum_{q=0}^{p} \gamma_q\, u\left(x, -\frac{t}{q+1}\right) & t < 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

con

$$\sum_{q=0}^{p} \left(-\frac{1}{q+1}\right)^{j} \gamma_q = 1, \qquad j = 0, 1, \ldots, p.$$

Ci limiteremo a far vedere che, se $\beta \in B$ e $\alpha \in A_\beta$ (supporremo per semplicità $\forall\, k\ i_k = k$, ove per il significato di $i_1 \ldots i_r$ si confronti la definizione di $L^2_{\alpha,+}(D^\beta u)$),

$$L^2_\alpha(D^\beta v) \leq K\, L^2_{\alpha,+}(D^\beta u). \tag{3.7}$$

Si ha ora

$$L^2_\alpha(D^\beta v) = L^2_{\alpha,-1}(D^\beta u) + \sum_{j=2}^{4} I_j,$$

ove

$$I_2 = \int_{R^n_-} dx\, dt \int_R \frac{d h_1}{|h_1|^{1+2\lambda_1}} \cdots \int_R \frac{d h_{n-1}}{|h_{n-1}|^{1+2\lambda_{n-1}}} \int_{-\infty}^{-t} d h_n \frac{1}{|h_n|^{1+2\lambda_n}} \cdot$$

$$\cdot |\Delta_{h_1 \ldots h_n} (D^\beta v)|^2,$$

$$I_3 = \int_{R^n_-} dx\, dt \int_R \frac{d h_1}{|h_1|^{1+2\lambda_1}} \cdots \int_R \frac{d h_{n-1}}{|h_{n-1}|^{1+2\lambda_{n-1}}} \int_{-t}^{+\infty} d h_n \frac{1}{|h_n|^{1+2\lambda_n}} \cdot$$

$$\cdot |\Delta_{h_1 \ldots h_n} (D^\beta v)|^2,$$

$$I_4 = \int_{R^n_+} dx\, dt \int_R \frac{d h_1}{|h_1|^{1+2\lambda_1}} \cdots \int_R \frac{d h_{n-1}}{|h_{n-1}|^{1+2\lambda_{n-1}}} \int_{-\infty}^{-t} d h_n \frac{1}{|h_n|^{1+2\lambda_n}} \cdot$$

$$\cdot |\Delta_{h_1 \ldots h_n} (D^\beta v)|^2.$$

Facciamo ora vedere che

$$I_k \leq H\, L^2_{\alpha,+} (D^\beta u), \qquad k = 2, 3, 4.$$

Consideriamo per esempio I_3; poiché in questo caso

$$\Delta_{h_1 \ldots h_n} (D^\beta v) = \sum_{q=0}^{p} \gamma_q \left(-\frac{1}{q+1} \right)^{\beta_n} \left[\Delta_{h_1 \ldots h_{n-1}} (D^\beta u) (x_1, \ldots, x_{n-1}, t + h_n) \right.$$

$$\left. - \Delta_{h_1 \ldots h_{n-1}} (D^\beta u) \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \frac{-t}{q+1} \right) \right]$$

si giunge all'asserto utilizzando il cambiamento di variabili

$$t = -(q+1) t' \qquad , \qquad h_n = t' (q+2) + h_n' .$$

E analogamente per I_2 e I_4.

Sussiste infine il seguente lemma:

LEMMA 3.3. *Assegnata* $u \in H_\rho(R^n_+)$, *esiste un prolungamento* $v \in H_\rho(R^n)$, *di* u, *tale che*

$$|||\, v \,|||_\rho \leq K \,|||\, u \,|||^+_\rho .$$

Per la dimostrazione si confronti la dimostrazione del lemma 3.2 e il lemma 7, § 6, parte I, di [8].

Supposto ora $u \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, poniamo

$$\gamma_r u(x) = D_t^r u(x, 0)$$

e

$$\gamma : u \longrightarrow (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_l u),$$

si ha che, per $\rho > l + \frac{1}{2}$, γ si prolunga in un omomorfismo di $H_\rho(R^n_+)$ su $\prod_{j=0}^{l} H_{k_{j,\rho}}(R^{n-1})$, ove

$$(k_{j,\rho}(\xi))^{-1} = \int_R \frac{\eta^{2j}}{V^{\frac{\rho}{m}}(\xi, \eta)}\, d\eta \ ;$$

per questo teorema di tracce si confronti [1].

Si ha, in virtù di (1.2), con K_1' e K_2' costanti positive

$$K_1' [d^2(\xi)]^{\left(\rho - j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{m}} \leq k_{j,\rho}(\xi) \leq K_2' [d^2(\xi)]^{\left(\rho - j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{m}} \ ;$$

si osservi che $[d^2(\xi)]^{\left(\rho - j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{m}} = \text{cost.}\ [c(\xi)]^{2\rho - 2j - 1}$.

Indichiamo ora con T^σ ($\sigma \in R$) l'operatore tangenziale di derivazione frazionaria, definito nel modo seguente:

$$T^\sigma \varphi(x, t) = F_\xi^{-1}\left(c^\sigma(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi, t)\right)(x, t), \quad \varphi \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$$

ove $\hat{\varphi}(\xi, t)$ indica la trasformata di Fourier di $\varphi(x, t)$ fatta rispetto a x e F_ξ^{-1} indica la trasformata inversa.

Sussiste il seguente lemma (cfr. il lemma 1 di [5]):

LEMMA 3.4. *Sia m un intero non negativo e $\sigma > m$; su $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ sono equivalenti le norme*

a) $\quad \| u \|^+_\sigma$

b) $\quad \| T^{\sigma-m} u \|^+_m + \| D_t^m u \|^+_{\sigma-m}$.

Incominciamo con lo stabilire l'equivalenza in $C_0^\infty(R^n)$; ciò è immediato in base all'osservazione che, con S_1 e S_2 costanti positive:

$$S_1 \leq \frac{V^{(\sigma)}_m(\xi, \eta)}{c^{2(\sigma-m)}(\xi)\, V(\xi, \eta) + \eta^{2m} V^{(\sigma-m)}_m(\xi, \eta)} \leq S_2 .$$

Passiamo ora a $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$; posto $v = E u$ [cfr. (3.6)], si ottiene:

$$\| u \|^+_\sigma \leq K \left(\| T^{\sigma-m} v \|_m + \| D_t^m v \|_{\sigma-m} \right).$$

Poiché (con $p > m$)

$$D_t^m v(x,t) = \begin{cases} D_t^m u(x,t) & t \geq 0 \\ \sum_0^p \delta_j D_t^m u\left(x, -\frac{t}{j+1}\right) & t < 0 \end{cases}$$

ove $\delta_j = \gamma_j \left(-\frac{1}{j+1} \right)^m$, si ha (cfr. il lemma 3.3)

$$\| T^{\sigma-m} v \|_m \leq K \| T^{\sigma-m} u \|^+_m$$

$$\| D_t^m v \|_{\sigma-m} \leq K \| D_t^m u \|^+_{\sigma-m} .$$

Dunque la norma b) è più forte della norma a). Facciamo ora vedere che la norma a) è più forte della norma b).

Incominciamo con l'osservare che

$$T^{\sigma-m} : H_\sigma(R^n) \longrightarrow H_m(R^n)$$

è un'applicazione lineare e continua.

Si ha allora, utilizzando ancora l'operatore prolungamento E e il lemma 3.3:

$$|||\ T^{\sigma-m} u\ |||_m^+ \leq |||\ T^{\sigma-m} v\ |||_m \leq K\ |||\ v\ |||_\sigma \leq K'\ |||\ u\ |||_\sigma^+ .$$

D'altra parte è immediato far vedere che, se $v \in H_\sigma(R^n)$

$$|||\ D_t^m v\ |||_{\sigma-m}^2 \leq K\ |||\ v\ |||_\sigma^2 .$$

Di conseguenza:

$$|||\ D_t^m u\ |||_{\sigma-m}^+ \leq |||\ D_t^m v\ |||_{\sigma-m} \leq K\ |||\ v\ |||_\sigma \leq K'\ |||\ u\ |||_\sigma^+ .$$

È dunque dimostrato l'asserto.

4. - Lemmi preliminari.

Detto ρ un numero reale, indichiamo con S' lo spazio delle distribuzioni temperate e definiamo

$$K^\rho(R^{n-1}) = \{\, u \in S'(R^{n-1}) \mid F_\xi^{-1}(\, c^\rho(\xi)\, \hat{u}(\xi)\,) \in L^2(R^{n-1}) \,\} .$$

Porremo

$$|||\ u\ |||_{K^\rho}^2 = \int_{R^{n-1}} c^{2\rho}(\xi)\ |\ \hat{u}(\xi)\ |^2\ d\xi .$$

Consideriamo poi $L^2(R_+, K^\rho)$ ove, naturalmente,

$$\|\ u\ \|_{L^2(R_+, K^\rho)} = \int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} c^{2\rho}(\xi)\ |\ \hat{u}(\xi, t)\ |^2\ d\xi .$$

Sussiste il seguente lemma:

Lemma 4.1. *Nell'ipotesi che* $a \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, $u \in L^2(R_+, K^\rho)$, *allora* $a\,u \in L^2(R_+, K^\rho)$, e

$$\|\ a\,u\ \|_{L^2(R_+, K^\rho)} \leq \sup_{R^n_+} |\ a\ | \cdot \|\ u\ \|_{L^2(R_+, K^\rho)} + C_\rho(a)\ \|\ u\ \|_{L^2(R_+, K^{\rho-\delta})} .$$

Per la definizione di δ si confronti l'osservazione al lemma 1.1.

La dimostrazione è la stessa della prop. 5 di [5]; essa viene qui riportata per far vedere ove interviene l'ipotesi di ipoellitticità cui è legato il δ dell'enunciato.

$$\| a u \|^2_{L^2(R_+, K^s)} = \int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} c^{2\rho}(\xi) \, | \widehat{a u}(\xi, t) |^2 \, d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-(n-1)} \int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} c^{2\rho}(\xi) \left| \int_{R^{n-1}} \hat{u}(\xi - \sigma, t) \, \hat{a}(\sigma, t) \, d\sigma \right|^2 d\xi \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-(n-1)} \cdot 2 \int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} d\xi \left| \int_{R^{n-1}} c^{\rho}(\xi - \sigma) \, \hat{u}(\xi - \sigma, t) \, \hat{a}(\sigma, t) \, d\sigma \right|^2 +$$

$$+ (2\pi)^{-(n-1)} \cdot 2 \int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} d\xi$$

$$\left| \int_{R^{n-1}} [c^{\rho}(\xi - \sigma) - c^{\rho}(\xi)] \, \hat{u}(\xi - \sigma, t) \, \hat{a}(\sigma, t) \, d\sigma \right|^2 = I_1 + I_2 .$$

Si ha poi:

$$I_1 = 2 \int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} d\xi \, | F_x (a \cdot F_\xi^{-1} (c^{\rho} \cdot \hat{u}))|^2 =$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} | a \cdot F_\xi^{-1} (c^{\rho} \cdot \hat{u}) |^2 \, dx = 2 (\sup | a |)^2 \cdot \| u \|^2_{L^2(R_+, K^s)} .$$

D'altra parte:

$$c^{\rho}(\xi) - c^{\rho}(\xi - \sigma) = c^{\rho}(\sigma + (\xi - \sigma)) - c^{\rho}(\xi - \sigma) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D_i \, c^{\rho}(\xi - \sigma + 0\,\sigma) \cdot \sigma_i .$$

In virtù dell'osservazione relativa al lemma 1.1,

$$| D_j c^\rho(\xi) | = | D_j [d^2(\xi)]^{\frac{\rho}{2m}} | \leq K [d^2(\xi)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}},$$

e quindi

$$I_2 \leq K \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} d\xi \left| \int_{R^{n-1}} [d^2(\xi - \sigma + \theta\sigma)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}} \cdot \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot | \sigma_j \hat{u}(\xi - \sigma, t) \hat{a}(\sigma, t) | d\sigma \right|^2 \right)^{1/2}$$

e, poiché (cfr. [1])

$$[d^2(\xi - \sigma + \theta\sigma)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}} \leq K [d^2(\xi - \sigma)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}} (1 + |\theta\sigma|^{2m})^{\frac{|\rho-\delta|}{2m}},$$

si ottiene

$$I_2 \leq K \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} d\xi \left| \int_{R^{n-1}} [d^2(\xi - \sigma)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}} \cdot \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot | \hat{u}(\xi - \sigma, t) \widehat{D_j a}(\sigma, t) | (1 + |\theta\sigma|^{2m})^{\frac{|\rho-\delta|}{2m}} d\sigma \right|^2 \right);$$

da cui ricordando che

$$\| f \ast g \|_{L^2} \leq \| f \|_{L^2} \cdot \| g \|_{L^1},$$

si ha

$$\int_{R^{n-1}} d\xi \left| \int_{R^{n-1}} [d^2(\xi - \sigma)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}} | \hat{u}(\xi - \sigma, t) | \cdot | \widehat{D_j a}(\sigma, t) | \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1 + |\theta\sigma|^{2m})^{\frac{|\rho-\delta|}{2m}} d\sigma \right|^2 \leq$$

$$\leq \int_{R^{n-1}} [d^2(\xi)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}} \mid \hat{u}(\xi, t) \mid^2 d\xi \cdot \left(\int_{R^{n-1}} \mid \widehat{D_j a}(\xi, t) \mid \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1 + \mid \theta \xi \mid^{2m})^{\frac{\mid \rho-\delta \mid}{2m}} d\xi \right)^2 .$$

Si ottiene dunque

$$I_2 \leq K \left(\int_0^{+\infty} dt \int_{R^{n-1}} [d^2(\xi)]^{\frac{\rho-\delta}{2m}} \mid \hat{u}(\xi, t) \mid^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \sup_{t \geq 0} \int_{R^{n-1}} \mid \widehat{D_j a}(\xi, t) \mid (1 + \mid \theta \xi \mid^{2m})^{\frac{\mid \rho-\delta \mid}{2m}} d\xi \right)^{1/2} ;$$

posto allora

$$C_\rho(a) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sup_{t \geq 0} \int_{R^{n-1}} \mid \widehat{D_j a}(\xi, t) \mid (1 + \mid \theta \xi \mid^{2m})^{\frac{\mid \rho-\delta \mid}{2m}} d\xi \right)^{1/2} ,$$

si ottiene l'asserto.

È necessario stabilire ora una valutazione del commutatore dell'operatore T^ρ di derivazione tangenziale e dell'operatore $a \cdot$ di moltiplicazione per a, essendo $a \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$.

Sussiste in proposito il seguente lemma:

LEMMA 4.2. *Supposto* $\sigma, \rho \in R$ *e* $a \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ *si ha con continuità*:

$$[T^\rho, a \cdot] = T^\rho \circ (a \cdot) - (a \cdot) \circ T^\rho : L^2(R_+, K^\sigma) \longrightarrow L^2(R_+, K^{\sigma-\rho+\delta}) ;$$

per la definizione di δ si veda il lemma precedente.

Si ha poi:

COROLLARIO. *Supposto* $\rho, \sigma > 0$, $\sigma - \rho > 0, \delta^* \leq \delta, \rho$ *se* $a \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, *si ha con continuità*

$$[T^\rho, a \cdot] : H_\sigma(R^n_+) \longrightarrow H_{\sigma-\rho+\delta^*}(R^n_+) .$$

Per la dimostrazione del lemma 4.2 si veda la prop. 6 di [5].

Sia ora $j \in C_0^\infty(\Gamma_1')$ con $\Gamma_1' = \{ x \in R^{n-1} : |x| \leq 1 \}$; per ogni $\varepsilon > 0$ porremo,

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-(n-1)} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

e, con $u \in L^2(R^n_+)$,

$$u_\varepsilon(x,t) = (u \overset{\prime}{*} j_\varepsilon)(x,t) = \int_{R^{n-1}} u(x-z,t)\, j_\varepsilon(z)\, dz .$$

Porremo anche

$$\bar{\alpha} = \max_{\alpha \in A} |\alpha| , \qquad \bar{\alpha'} = \max_{\alpha \in A'} |\alpha| .$$

Sussiste il seguente lemma per la cui dimostrazione si confronti la prop. 7 di [5]:

LEMMA 4.3. *Supposto* $u \in L^2(R_+, K^{pv})$, *ove* p *è intero non negativo e* $0 < \nu \leq \frac{m}{\bar{\alpha'}}$, $a \in C_0^\infty(\bar{R^n_+})$, *si ha per* $\varepsilon \to 0$

$$\| (au)_\varepsilon - a u_\varepsilon \|_{L^2(R_+, K^{(p+1)\nu})} \to 0 .$$

Posto poi

$$\Gamma_1 = \{ (x,t) : |x|^2 + t^2 \leq 1 \},$$

e supposto $j \in C_0^\infty(R^n)$, se $u \in L^2(R^n)$, porremo

$$u_\varepsilon(x,t) = (u * j_\varepsilon)(x,t) = \int_{R^n} u(x-\xi, t-\tau)\, j_\varepsilon(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau .$$

ove, con $\varepsilon > 0$, $j_\varepsilon(x,t) = \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon, t/\varepsilon)$.

Sussiste il seguente corollario:

COROLLARIO. *Supposto* $u \in H_\sigma(R^n)$, $\sigma > 0$ *e* $0 < \nu \leq \frac{m}{\bar{\alpha}}$, *si ha per* $\varepsilon \to 0$:

$$\| (au)_\varepsilon - a u_\varepsilon \|_{\sigma+\nu} \to 0 .$$

5. - Il teorema di regolarizzazione.

Posto

$$J_p(x_0) = \{ (x, t) \in R^n_+ : |x - x_0| \leq p, \quad 0 \leq t \leq p \}$$

$$\omega \in C_0^\infty(\overline{R^n_+}), \quad \operatorname{supp} \omega \subset J_p,$$

sussiste il seguente teorema:

Teorema. *Supposto che l'operatore* P *verifichi le ipotesi* 1), 2), 3), 5), *con* $\beta^1 = 0$, *gli operatori* Q_j *la* (2.1) *e il sistema* $\{P, Q_j\}$ *la* (2.6), *se* $u \in H_m(R^n_+)$, $Pu \in H_\rho(R^n_+)$, $\gamma_0 Q_j u \in H_{k_{q_j}, m+\rho}(R^{n-1})$ *ove* $\rho \leq \min \{ m - \nu, \delta, \frac{m}{\alpha}, q \}$, *esiste* $p > 0$ *tale che*, $\forall \omega \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ *con* $\operatorname{supp} \omega \subset J_p$, *si ha* $\omega u \in H_{m+\rho}(R^n_+)$.

Per la definizione di ν, q, δ si confronti (1.4), (2.4) e l'osservazione al lemma 1.1.

La dimostrazione di questo teorema poggia essenzialmente sul teorema I di [4]; inoltre un teorema analogo a quello ora enunciato si ottiene sopprimendo l'ipotesi $\beta^1 = 0$ e aggiungendo l'ipotesi 4); in tal caso si utilizzerà il teorema II di [4] al posto del teorema I.

Per passare dal caso delle equazioni a coefficienti costanti a quelle delle equazioni a coefficienti variabili mediante l'applicazione dell'artificio di Korn, adatteremo al nostro caso la linea seguita da C. Parenti per dimostrare la prop. 8 di [5].

Se $\omega \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, $\operatorname{supp} \omega \subset J_\tau$, poniamo $v = \omega u$ e

$$v_\varepsilon = v \mathbin{\overset{\prime}{\ast}} j_\varepsilon = \int_{R^{n-1}} v(x - z, t)\, j_\varepsilon(z)\, dz .$$

Osserviamo che $\operatorname{supp} v_\varepsilon \subset J_{\tau+\varepsilon}$ e $\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon = v$ nella topologia di $H_m(R^n_+)$. Inoltre $T^\rho v_\varepsilon \in H_m(R^n_+)$, $\forall \varepsilon > 0$; nel seguito supporremo $0 < \varepsilon < 1$.

Posto

$$P(x_0) = P(x_0, 0, D)$$

$$Q_j(x_0) = Q_j(x_0, D) \quad , \qquad 1 \leq j \leq r ,$$

si ottiene in virtù del teorema I di [4]:

$$\| \mathrm{T}^{\rho} v_{\varepsilon} \|_{m}^{+} \leq$$

(5.1)

$$\leq \mathrm{K} \left\{ \| \mathrm{P}(x_0)\, \mathrm{T}^{\rho} v_{\varepsilon} \|_{0}^{+} + \sum_{j=1}^{r} \| \gamma_0\, \mathrm{Q}_j(x_0)\, \mathrm{T}^{\rho} v_{\varepsilon} \|_{k_{q_j}, m} + \| \mathrm{T}^{\rho} v_{\varepsilon} \|_{0}^{+} \right\},$$

e ci occorrerà maggiorare separatamente i tre termini a secondo membro.

La maggiorazione del primo termine può ottenersi con procedimenti molto vicini a quelli seguiti da C. Parenti in [5], salvo a tener conto di quelle varianti che si rendono necessarie per aver sostituito l'ipotesi di quasi-ellitticità con quella di ipoellitticità.

La maggiorazione del secondo termine si diversifica invece maggiormente da quella di Parenti per il fatto che qui si utilizzano teoremi di tracce diversi.

Infine la maggiorazione del terzo addendo è banale.

Con tali maggiorazioni si dimostrerà che $\mathrm{T}^{\rho} v \in \mathrm{H}_m(\mathrm{R}^n_+)$; per completare la dimostrazione del teorema occorreranno poi altre considerazioni conclusive.

Cominciamo con il maggiorare il primo termine a secondo membro della (5.1).

Si ha:

$$\mathrm{P}(x_0)\, \mathrm{T}^{\rho} v_{\varepsilon} = \mathrm{T}^{\rho}\, \mathrm{P}(x_0)\, v_{\varepsilon} =$$

(5.2)

$$= \mathrm{T}^{\rho} [\mathrm{P}(x_0) - \mathrm{P}]\, v_{\varepsilon} + \mathrm{T}^{\rho} [\mathrm{P} v_{\varepsilon} - (\mathrm{P} v)_{\varepsilon}] + \mathrm{T}^{\rho} (\omega\, \mathrm{P}\, u)_{\varepsilon} + \mathrm{T}^{\rho} (\mathrm{P}'(\omega)\, u)_{\varepsilon},$$

ove

$$\mathrm{P} v = \mathrm{P}(\omega u) = \omega\, \mathrm{P} u + \mathrm{P}'(\omega)\, u,$$

con

$$\mathrm{P}'(\omega) = \Sigma\, p'_{\alpha}(y, \omega)\, \mathrm{D}^{\alpha}, \quad p'_{\alpha} \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\overline{\mathrm{R}^n_+}), \quad \mathrm{supp}\ p'_{\alpha} \subset \mathrm{J}_{\tau}.$$

Maggioriamo i quattro termini a secondo membro della (5.2).

a) Valutiamo $\| \mathrm{T}^{\rho} [\mathrm{P}(x_0) - \mathrm{P}]\, v_{\varepsilon} \|_{0}^{+}$.

Possiamo supporre che i coefficienti di $\mathrm{P}(x_0) - \mathrm{P}$ siano in $\mathrm{C}_0^{\infty}(\overline{\mathrm{R}^n_+})$. Precisamente se $\chi_{\varepsilon} \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\overline{\mathrm{R}^n_+})$, $\mathrm{supp}\, \chi_{\varepsilon} \subset \mathrm{J}_{2(\tau+\varepsilon)}$, $\chi_{\varepsilon} \equiv 1$ su $\mathrm{J}_{\tau+\varepsilon}$, allora

$$[\mathrm{P}(x_0) - \mathrm{P}]\, v_{\varepsilon} = \chi_{\varepsilon} [\mathrm{P}(x_0) - \mathrm{P}]\, v_{\varepsilon} = \chi_{\varepsilon} \sum_{\alpha \in \mathrm{A}^*} d_{\alpha}\, \mathrm{D}^{\alpha} v_{\varepsilon},$$

ove

$$d_\alpha = p_\alpha(x, t) - p_\alpha(x_0, 0).$$

Osservato poi che, in virtù del lemma 4.2, si ha con continuità

$$[T^\rho, a \cdot] = T^\rho \circ (a \cdot) - (a \cdot) \circ T^\rho : L^2(R^n_+, K^{\rho-\delta}) \longrightarrow L^2(R_+, K^\omega),$$

con lo stesso procedimento utilizzato in [5] si ottiene, per ogni $\sigma > 0$

$$|||\ T^\rho (P(x_0) - P)\, v_\varepsilon\ |||_0^+ \leq$$

$$\leq (K' \sup |\chi_\varepsilon d_\alpha| + K'' \sigma)\ |||\ T^\rho v_\varepsilon\ |||_m^+ + K'''(\sigma)\ |||\ v_\varepsilon\ |||_m^+ ,$$

ove il sup. è esteso a $(x, t) \in J_{2(\tau+\varepsilon)}$ e $\alpha \in A^*$.

Si osservi che, poiché $\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon = v$ nella topologia di $H_m(R^n_+)$ si avrà con ε_1 opportuno:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_1} |||\ v_\varepsilon\ |||_m^+ < +\infty .$$

b) Utilizzando il lemma 4.3, con lo stesso procedimento utilizzato in [5] si deduce che, con ε_2 opportuno

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_2} |||\ T^\rho [P v_\varepsilon - (P v)_\varepsilon]\ |||_0^+ < +\infty .$$

c) Poiché $\omega P u \in H_\rho(R^n_+)$ e dunque $\lim_{\varepsilon \to 0} (\omega P u)_\varepsilon = \omega P u$ nella topologia di $H_\rho(R^n_+)$, si ottiene $\lim_{\varepsilon \to 0} T^\rho(\omega P u) = T_\rho(\omega P u)$ nella topologia di $L^2(R^n_+)$.

Di conseguenza, per ε_3 opportuno:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_3} |||\ T^\rho (\omega P u)_\varepsilon\ |||_0^+ < +\infty .$$

d) Incominciamo con il far vedere che, in virtù della (1.4), è continua l'applicazione:

$$P'(\omega) : H_m(R^n_+) \longrightarrow H_{m-\nu}(R^n_+) . \tag{5.3}$$

Cominciamo con il far vedere che il risultato sussiste con R^n al posto di R^n_+.

Sia $\varphi\, D^{\mu} u$ un addendo di $P'(\omega)\, u$. Si ha allora:

$$|||\ \varphi\, D^{\mu} u\ |||^2_{m-\sigma} = \int_{R^n} V^{\frac{m-\nu}{m}}(\zeta)\, d\zeta \left| \hat{\varphi}(\zeta - \zeta')\, \widehat{D^{\mu} u}(\zeta')\, d\zeta' \right|^2 \leq$$

$$\leq K \int_{R^n} d\zeta \left| \int_{R^n} \hat{\varphi}(\zeta - \zeta')(1 + |\zeta - \zeta'|^{2m})^{\frac{m-\nu}{2m}} \zeta'^{\mu}\, \hat{u}(\zeta')\, V^{\frac{m-\nu}{2m}}(\zeta')\, d\zeta' \right|^2 .$$

Si osservi che si è utilizzato il fatto che (cfr. [1])

$$V(\zeta) \leq K\, V(\zeta')\,(1 + |\zeta - \zeta'|^{2m}) .$$

Posto

$$A(\zeta) = \varphi(\zeta)(1 + |\zeta|^{2m}), \quad B(\zeta) = \hat{u}(\zeta)\, V^{\frac{m-\nu}{2m}}(\zeta) \cdot \zeta^{\mu} ,$$

si ha, in virtù di (1.4),

$$|||\ \varphi\, D^{\mu} u\ |||^2_{m-\sigma} \leq K \|\, A(\zeta) \ast B(\zeta)\,\|^2_{L^2} \leq$$

$$\leq K \|\, A(\zeta)\,\|^2_{L^1} \cdot \|\, B(\zeta)\,\|^2_{L^2} \leq K \|\, A(\zeta)\,\|^2_{L^1} \cdot |||\ u\ |||^2_m .$$

L'asserto è dunque dimostrato.

In R^n_+ l'asserto si dimostra utilizzando l'operatore prolungamento E [cfr. (3.6)]. Infatti si ha:

$$|||\ P'(\omega)\, u\ |||^+_{m-\nu} \leq |||\ P'(\omega)\, E\, u\ |||_{m-\nu} \leq K\, |||\ E\, u\ |||_m \leq K' |||\ u\ |||^+_m .$$

Dunque in virtù della continuità dell'applicazione (5.3) si ottiene $\lim_{\varepsilon \to 0} (P'(\omega)\, u)_{\varepsilon} = P'(\omega)\, u$ nella topologia di $H_{m-\nu}(R^n_+)$, pertanto, poiché, per ipotesi, $\rho \leq m - \nu$, $\lim_{\varepsilon \to 0} T^{\rho}((P'(\omega)\, u)_{\varepsilon}) = T^{\rho}(P'(\omega)\, u)$ nella topologia di $L^2(R^n_+)$.

Ne consegue che, con ε_4 opportuno,

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_4} |||\ T^{\rho}(P'(\omega)\, u)_{\varepsilon}\ |||^+_0 < +\infty .$$

Tenuto conto di *a*), *b*), *c*), *d*), si può concludere che per ogni ε con $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, ε' opportuno, si ha:

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{aligned} &|||\, P(x_0)\, T^\rho\, v_\varepsilon \,|||_a^+ \;\leq \\ &\leq K_1 + K_2(\sigma) + K_3(\sigma + \sup.\,|\,\chi_\varepsilon\, d_\alpha\,|\,)\,|||\, T^\rho\, v_\varepsilon \,|||_m^+ \;; \end{aligned}$$

il sup. è esteso a $(x, t) \in J_{2(\tau+\varepsilon)}$ e $\alpha \in A^*$, σ è arbitrario, K_1 e K_3 sono indipendenti da σ e da ε.

Passiamo ora allo studio dei termini dipendenti dagli operatori di frontiera che compaiono nella (5.1).

Si ha per $1 \leq j \leq r$:

$$\text{(5.5)} \qquad \begin{aligned} &Q_j(x_0)\, T^\rho\, v_\varepsilon = T^\rho\, Q_j(x_0)\, v_\varepsilon \;= \\ &= T^\rho\,[Q_j(x_0) - Q_j]\, v_\varepsilon + T^\rho\,[Q_j\, v_\varepsilon - (Q_j\, v)_\varepsilon] + T^\rho\,(\omega\, Q_j\, u)_\varepsilon + T^\rho\,(Q_j'(\omega)\, u)_\varepsilon\,, \end{aligned}$$

ove si è posto

$$Q_j\, v = Q_j(\omega\, u) = \omega\, Q_j\, u + Q'(\omega)\, u$$

con

$$Q'_j(\omega) = \Sigma\, s_\alpha(x, \omega)\, D^\alpha\,, \quad s_\alpha \in C_0^\infty(\bar{R}^n_+)\,, \quad \text{supp. } s_\alpha \subset J_\tau\,.$$

Maggioriamo ordinatamente i quattro termini a secondo membro della (5.5).

a') Valutiamo:

$$|||\, \gamma_0\, T^\rho\,[Q_j(x_0) - Q_j]\, v_\varepsilon \,|||_{k\;q_j, m}\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} &|||\, \gamma_0\, T^\rho\,[Q_j(x_0) - Q_j]\, v_\varepsilon \,|||_{k_{q_j, m}} \\ &= |||\, \gamma_0\, T^\rho\,[Q_j(x_0) - Q_j]\, v_\varepsilon \,|||_{k_{0, m-q_j}} \leq K\,|||\, T^\rho\,[Q_j(x_0) - Q_j]\, v_\varepsilon \,|||_{m-q_j}^+\,, \end{aligned}$$

l'ultima diseguaglianza discendendo dal teorema di tracce enunciato nel n. 3.

Sia ora $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty \ (\overline{R^n}_+)$, supp $\varphi_\varepsilon \subset J_{2(\tau+\varepsilon)}$, $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ su $J_{\tau+\varepsilon}$ e $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$; allora:

$$[Q_j(x_0) - Q_j]\, v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon\, [Q_j(x_0) - Q_j]\, v_\varepsilon .$$

Posto:

$$Q_j(x_0) - Q_j = \sum_{\alpha \in A_j} \varphi_\varepsilon\, b_{j\alpha}\, D^\alpha ,$$

osserviamo che è sufficiente valutare un solo addendo.

Perché poi:

$$T^\rho [\varphi_\varepsilon\, b_{j\alpha}\, D^\alpha v_\varepsilon] = \varphi_\varepsilon\, b_{j\alpha}\, T^\rho\, D^\alpha v_\varepsilon + [T^\rho, \varphi_\varepsilon\, b_{j\alpha} \cdot]\, D^\alpha v_\varepsilon$$

si ha:

$$|||\ T^\rho (\varphi_\varepsilon\ b_{j\alpha}\ D^\alpha v_\varepsilon)\ |||^{+}_{m-q_j} \leq$$

$$\leq \sup_{J_{2(\tau+\varepsilon)}} |\ \varphi_\varepsilon\, b_{j\alpha}\ | \cdot |||\ T^\rho\, D^\alpha\, v_\varepsilon\ |||^{+}_{m-q_j} + |||\ [T^\rho,\ \varphi_\varepsilon\ b_{j\alpha} \cdot\ ]\, D^\alpha v_\varepsilon\ |||^{+}_{m-q_j} .$$

Osserviamo poi che, in virtù della (1.2) e (2.1), e utilizzando l'operatore prolungamento E definito in (3.6), si ha:

$$|||\ T^\rho\, D^\alpha\, v_\varepsilon\ |||^{+}_{m-q_j} \leq |||\ T^\rho\, D^\alpha\, E\, v_\varepsilon\ |||_{m-q_j} \leq K\ |||\ T^\rho\, E\, v_\varepsilon\ |||_m \leq K'\ |||\ T^\rho\, v_\varepsilon\ |||^{+}_m .$$

Applicando poi il corollario al lemma 4.2, ove, avendo supposto $\rho \leq \delta$ può prendersi $\delta^* = \rho$ e utilizzando la (2.1), si ottiene:

$$|||\ [T^\rho,\ \varphi_\varepsilon\ b_{j\alpha} \cdot\ ]\, D^\alpha v_\varepsilon\ |||^{+}_{m-q_j} \leq K\ |||\ D^\alpha v_\varepsilon\ |||^{+}_{m-q_j} \leq K'\ |||\ v_\varepsilon\ |||^{+}_{m} .$$

Inoltre, con ε_1 opportuno, si ha:

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_1} |||\ v_\varepsilon\ |||^{+}_m < +\infty ,$$

per cui, in definitiva, per $\varepsilon < \varepsilon_1'$ con ε_1' opportuno, si ha:

$$||| \gamma_0 T^\rho [Q_j(x_0) - Q_j] v_\varepsilon |||_{k_{q_j},m} \leq K' + K'' \text{ sup. } | \varphi_\varepsilon b_{j\alpha} | \cdot ||| T^\rho v_\varepsilon |||_m^+ ,$$

con il sup. esteso a $(x, t) \in J_{2(\tau+\varepsilon)}$ e $\alpha \in A_j$.

b') Valutiamo ora

$$||| \gamma_0 T^\rho (Q_j v_\varepsilon - (Q_j v)_\varepsilon) |||_{k_{q_j},m} .$$

Poiché supp. $v_\varepsilon \subset J_{\tau+\varepsilon} \subset J_{\tau+1}$, se $\psi \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, $\psi \equiv 1$ su $J_{\tau+1}$, allora $\psi Q_j v_\varepsilon = Q_j v_\varepsilon$, $\forall \varepsilon$, con $0 < \varepsilon < 1$, $Q_j v = \psi Q_j v$ e quindi possiamo supporre i coefficienti di Q_j in $C_0^\infty(\overline{R^n_+})$. Si ha

$$||| \gamma_0 T^\rho (Q_j v_\varepsilon - (Q_j v)_\varepsilon) |||_{k_{q_j},m} = ||| T^\rho \gamma_0 (Q_j v_\varepsilon - (Q_j v)_\varepsilon) |||_{k_{q_j},m} \leq$$

$$\leq \Sigma ||| T^\rho \{ \gamma_0 (q_{j\alpha} D^\alpha v_\varepsilon) - \gamma_0 (q_{j\alpha} D^\alpha v)_\varepsilon \} |||_{k_{q_j},m} \leq$$

$$\leq \Sigma ||| \gamma_0 (q_{j\alpha} D^\alpha v_\varepsilon) - \gamma_0 (q_{j\alpha} D^\alpha v)_\varepsilon |||_{k_{q_j},m+\rho}.$$

Basta valutare un addendo. Osserviamo che $\gamma_0 D^\alpha v \in H_{k_{q_j},m}$. Ciò discende dal fatto che, dall'appartenenza di v a $H_m(R^n_+)$ si ottiene che $D^\alpha v \in H_{m-q_j}(R^n_+)$, per $\alpha \in A_j$ e dunque, in virtù del teorema di tracce enunciate nel n. 3, $\gamma_0 D^\alpha v \in H_{k_0, m-q_j}$ e, che è lo stesso $\gamma_0 D^\alpha v \in H_{k_{q_j},m}$.

Utilizzando allora il corollario al lemma 4.3, si deduce:

$$||| \gamma_0 (q_{j\alpha} D^\alpha v_\varepsilon) - \gamma_0 (q_{j\alpha} D^\alpha v)_\varepsilon |||_{k_{q_j},m+\rho} =$$

$$= ||| \gamma_0 (q_{j\alpha}) \gamma_0 (D^\alpha v_\varepsilon) - ((\gamma_0 q_{j\alpha}) \cdot (\gamma_0 D_\alpha v))_\varepsilon |||_{k_{q_j},m+\rho} \longrightarrow 0$$

per $\varepsilon \longrightarrow 0$, e dunque, con ε_2' opportuno,

$$\sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_2'} ||| \gamma_0 T^\rho [Q_j v_\varepsilon - (Q_j v)_\varepsilon] |||_{k_{q_j},m} < + \infty .$$

c') Poiché per ipotesi $\gamma_0(\omega\, Q_j\, u) \in H_{k_{q_j}, m+\rho}$, si ha $\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_0(\omega\, Q_j\, u)_\varepsilon = \gamma_0(\omega\, Q_j\, u)$ nella topologia di $H_{k_{q_j}, m+\rho}$; dunque $\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_0 T^\rho(\omega\, Q_j\, u)_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} T^\rho \gamma_0(\omega\, Q_j\, u)_\varepsilon = T^\rho \gamma_0(\omega\, Q_j\, u)$ nella topologia di $H_{k_{q_j}, m}$.

In definitiva, per ε_3' opportuno

$$\sup_{\varepsilon \le \varepsilon_3'} |||\, \gamma_0 T^\rho(\omega\, Q_j\, u)_\varepsilon \,|||_{k_{q_j}, m} < +\infty .$$

d') Incominciamo con l'osservare che, in virtù di (2.3), si ha con continuità:

$$Q_j'(\omega) : H_m(R^n_+) \longrightarrow H_{m-\nu_j}(R^n_+) . \tag{5.6}$$

Ciò si ottiene con lo stesso ragionamento svolto in d) per dimostrare la continuità della (5.3).

Osserviamo ancora che, poiché

$$\rho \le q = \min_{1\le j\le r} (q_j - \nu_j) ,$$

si deduce

$$k_{q_j, m}(\xi) \le \text{cost. } k_{0, m-\nu_j-\rho}(\xi) .$$

Si ha allora:

$$|||\, \gamma_0 T^\rho(Q_j'(\omega)\, u)_\varepsilon \,|||_{k_{q_j}, m} \le$$

$$\le K\, |||\, \gamma_0 T^\rho(Q_j'(\omega)\, u)_\varepsilon \,|||_{k_{0, m-\sigma_j-\rho}} \le K'\, |||\, T^\rho(Q_j'(\omega)\, u)_\varepsilon \,|||^{+}_{m-\sigma_j-\rho} ,$$

l'ultima diseguaglianza discendendo dal teorema di tracce del n. 3.

Poiché l'applicazione (5.6) è continua, si ottiene che

$\lim_{\varepsilon\to 0} (Q_j'(\omega)\, u)_\varepsilon = Q_j'(\omega)\, u$ nella topologia di $H_{m-\nu_j}(R^n_+)$ e quindi $\lim_{\varepsilon\to 0} T^\rho(Q_j'(\omega)\, u) = T^\rho(Q_j'(\omega)\, u)$ nella topologia di $H_{m-\nu_j-\rho}(R^n_+)$.

Dunque, con ε_4' opportuno:

$$\sup_{\varepsilon \le \varepsilon_4'} |||\, \gamma_0 T^\rho(Q_j'(\omega)\, u)_\varepsilon \,|||_{k_{q_j}, m} < +\infty .$$

In definitiva, in base a quanto stabilito in a'), b'), c'), d'), si ha per $\varepsilon \leq \varepsilon''$, con ε'' opportuno:

$$(5.7) \quad \| \gamma_0 T^\rho Q_j(x_0) v_\varepsilon \|_{k_{q_j},m} \leq K' + K'' \sup. | \varphi_\varepsilon b_{j\alpha} | \cdot \| T^\rho v_\varepsilon \|_m^+ ,$$

ove il sup. è esteso a $(x, t) \in J_{2(\tau+\varepsilon)}$ e $\alpha \in A_j$.

Infine per il terzo termine a secondo membro della (5.1), si ha:

$$\| T^\rho v_\varepsilon \|_0^+ \leq K \| v_\varepsilon \|_\rho^+ \leq K \| v_\varepsilon \|_m^+$$

e, ricordato che $\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon = v$ nella topologia di $H_m(R^n_+)$ si deduce

$$(5.8) \qquad \sup_{\varepsilon \leq \varepsilon'''} \| T^\rho v_\varepsilon \|_0^+ < +\infty , \qquad \varepsilon''' \text{ opportuno.}$$

In definitiva da (5.1), (5.4), (5.7), (5.8) si ricava:

$$\| T^\rho v_\varepsilon \|_m^+ \leq$$

$$\leq K' + K''(\sigma) + K''' \{ \sigma + \sup | \chi_\varepsilon d_\alpha | + \sup | \varphi_\varepsilon b_{j\alpha} | \} \| T^\rho v_\varepsilon \|_m^+ ;$$

il primo sup. è esteso ad $y \in J_{2(\tau+\varepsilon)}$ e $\alpha \in A^*$, mentre il secondo è esteso a $y \in J_{2(\tau+\varepsilon)}$, $\alpha \in A_j$ e $1 \leq j \leq r$; $\sigma > 0$ è arbitrario.

Se ne deduce

$$\| T^\rho v_\varepsilon \|_m^+ \leq K' + K''(\sigma) + O(\sigma + \tau + \varepsilon) \cdot \| T^\rho v_\varepsilon \|_m^+ ;$$

dall'arbitrarietà di σ segue che esistono ε' e p tali che, per $\varepsilon < \varepsilon'$ e supp. $\omega \subset J_p$, $\| T^\rho v_\varepsilon \|_m^+$ è limitato.

Poiché $H_m(R^n_+)$ è riflessivo (cfr. [8]) ed è inoltre separabile, la sfera unitaria è debolmente compatta; poiché T è chiuso come operatore di L^2 in L^2, si deduce che $T^\rho v \in H_m(R^n_+)$ ($v = \omega u$ con supp. $\omega \subset J_p$).

Per dimostrare il teorema sarà allora sufficiente far vedere che $D_t^m v \in H_\rho(R^n_+)$; ciò in virtù del lemma 3.4.

A tale scopo incominciamo con il far vedere che se $\alpha \in A^*$ e $\mu \leq \alpha$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) = (\mu', \mu_n)$ si ha

$$\xi^{2\mu'} \leq K\, c^{2(m-\mu_n)}(\xi)\,. \tag{5.9}$$

E infatti dalla (1.2) e (1.4) si deduce

$$\xi^{2\mu'}\, \tau_l^{2\mu_n} \leq K\,(c^{2m}(\xi) + \tau_l^{2m})$$

da cui, posto $\tau_l = \sigma\, c(\xi)$, si ottiene l'asserto.

Dimostriamo ora che, in conseguenza della (5.9), se $\alpha \in A^*$, $\mu \leq \alpha$ e $\mu_n \leq m-1$ allora $D_x^{\mu'} D_t^{\mu_n} v \in H_p(R^n_+)$.

Posto $w = E\,u$ (E è l'operatore prolungamento definito in (3.6)), allora $w \in H_m(R^n)$ e poiché $T^p v \in H_m(R^n_+)$ allora $T^p w \in H_m(R^n)$.

Incominciamo con il caso μ' nullo. Poiché $\mu_n \leq m-1$, si ha:

$$|||\, D_t^{\mu_n} w\, |||_p = \left(\int_{R^n} V^{\frac{p}{m}}(\xi, \tau_l)\, \tau_l^{2\mu_n} \,|\, \hat{w}(\xi, \tau_l)\,|^2\, d\xi\, d\tau_l \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq K \left(\int_{R^n} V^{\frac{p+\mu_n}{m}}(\xi, \tau_l) \,|\, \hat{w}(\xi, \tau_l)\,|^2\, d\xi\, d\tau_l \right)^{1/2} \leq K' \,|||\, w\, |||_m$$

e pertanto

$$D_t^{\mu_n} v = r_+\, D_t^{\mu_n} w \in H_p(R^n_+)\,.$$

ove r_+ è l'operatore restrizione.

Se poi μ' non è nullo, si ha, in virtù della (5.9)

$$|||\, D_x^{\mu'} D_t^{\mu_n} w\, |||_p = \left(\int_{R^n} V^{\frac{p}{m}}(\xi, \tau_l)\, \xi^{2\mu'}\, \tau_l^{2\mu_n} \,|\, \hat{w}(\xi, \tau_l)\,|^2\, d\xi\, d\tau_l \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq K \left(\int_{R^n} V^{\frac{p}{m}}(\xi, \tau_l)\, c^{2(m-p-\mu_n)}(\xi)\, \tau_l^{2\mu_n} \,|\, T^p w(\xi, \tau_l)\,|^2\, d\xi\, d\tau_l \right)^{1/2}.$$

Si osservi ora che, poiché $p \leq 1$ e $\mu_n \leq m-1$, si ottiene:

$$c^{2(m-p-\mu_n)}(\xi)\, \tau_l^{2\mu_n} \leq K\, V^{\frac{m-p}{m}}(\xi, \tau_l)\,,$$

da cui

$$|||\, D_x^{\mu'} D_t^{\mu_n} w \,|||_p \leq K \,|||\, T^p w \,|||_m \,. \tag{5.10}$$

Dunque

$$D_x^{\mu'} D_t^{\mu_n} v = r_+ D_x^{\mu'} D_t^{\mu_n} w \in H_p(R^n_+) \,. \tag{5.11}$$

Osserviamo ora che

$$D_t^m v = P v - \sum_{\substack{\alpha \in A^* \\ \alpha_n < m}} p_\alpha(y) D_x^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} v = \omega P u + P'(\omega) u + R v \,.$$

In tale relazione si può supporre che supp. $\omega \subset J_q$, $q < p$. Poiché i coefficienti di R si possono supporre a supporto compatto, si ha $R v \in H_p(R^n_+)$ in virtù di (5.11); d'altra parte, per ipotesi $\omega P u \in H_p(R^n_+)$.

Infine presa $\psi \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, supp. $\psi \subset J_p$, $\psi \equiv 1$ su $J_{\frac{p+q}{2}}$, poiché i coefficienti di $P'(\omega)$ sono a supporto compatto in J_q ne viene $P'(\omega) u = P'(\omega)(\psi u)$; ma $T^p(\psi u) \in H_m(R^n_+)$ e quindi, sempre per la (5.10) e (5.11) si deduce che $P'(\omega)(\psi u) \in H_p(R^n_+)$.

In conclusione

$$D_t^m(\omega u) \in H_p(R^n_+) \,.$$

Si è dunque provata l'esistenza di un $p > 0$ tale che $\forall\, \omega \in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ e supp. $\omega \subset J_p$, si ha $T^p(\omega u) \in H_m(R^n_+)$ e $D_t^m(\omega u) \in H_p(R^n_+)$.

Poiché, in virtù del lemma 3.4 le due norme

$$|||\cdot|||^+_{m\,;\,p} \quad \text{e} \quad |||\, T^p \cdot \,|||^+_m + |||\, D_t^m \cdot \,|||^+_p$$

sono equivalenti, l'asserto è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAVALLUCCI A., *Alcuni teoremi di tracce*, Atti Sem. Mat. Fis. Modena, **15**, pp. 137-157 (1966).

[2] HÖRMANDER L., *On interior regularity of the solutions of partial differential equations*, Comm. on pure and applied Mathematics XI, pp. 197-218 (1958).

[3] HÖRMANDER L., *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag (1963).

[4] MATARASSO S., *Formule di maggiorazione relative ad una classe di equazioni a coefficienti costanti*, Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli, serie 4, XL, pp. 269-302 (1973).

[5] PARENTI C., *Valutazioni a priori e regolarità per soluzioni di equazioni quasi-ellittiche*, Rend. del Sem. Mat. della Univ. di Padova, XLV, pp. 1-70 (1971).

[6] SCHECHTER M., *On the dominance of partial differential operators II*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, XVIII, pp. 255-282 (1964).

[7] SLOBODECKII L. N., *Spazi di Sobolev generalizzati e loro applicazioni ai problemi al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali*, Leningrad Gos. Ped. Inst. im. A. I. Gercena Ucen. Zap., **197**, pp. 54-112 (1958); trad. inglese: Amer. Math. Soc. Transl., serie II, **57**, pp. 207-274 (1966).

[8] VOLEVICH L. R. - PANEYAKH B. P., *Alcuni spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione*, Uspehi Mat. Nauk, **20**, pp. 3-74 (1965); trad. inglese: Russian Math. Surveys, **20**, pp. 1-73 (1965).

Sull'inflessione d'un elemento tubolare conico

Nota di GIOVANNI RIMONDI
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza dell' 1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Utilizzando un algoritmo del tutto convenzionale si risolve il caso d'una trave inflessa cava di forma tronco-conica e d'uniforme spessore, vincolata ad incastro per un estremo ed assoggettata all'altro ad un carico normale.

Dalla soluzione generale esposta in termini di soli parametri adimensionali si deriva una particolarizzazione di notevole interesse pratico per la quale non si manca di fornire l'ordine di approssimazione ed il campo di validità.

SUMMARY. — Using an algorithm of a conventional kind it has been solved the case of a flexured beam with the shape of a truncated cone and with constant thikness, fixed at one end and under the action of a normal force at the other one.

From the general solution, stated in terms of adimentional parameters, it has been derived a particular one of remarkable practical interest and for which it has been given the order of approximation and the range of validity.

La ben nota teoria delle travi inflesse usualmente applicata ai solidi prismatici può manifestamente utilizzarsi in presenza di elementi a sezione variabile ma con continuità e sotto bassi gradienti [1, 2]. Esempi caratteristici di strutture che rispondono a tali requisiti non sono soltanto i camini e le ciminiere di forma tronco-conica [3] ed è altresì noto che alla deformata di tutti questi solidi si può giungere in modo estremamente semplice quando si supponga lo spessore variabile con legge opportuna ed il carico concentrato all'estremità libera. Non altrettanto agevole è il caso in cui, ferma restando la posizione del carico, detto spessore risulta uniforme, onde l'interesse della presente breve nota che del problema porge una comoda e concisa soluzione vanamente cercata nella letteratura corrente e specializzata. Con riferimento alla fig. 1 ed ai simboli che vi compaiono cominciamo col rilevare che, una volta posto

$$\psi = \frac{l}{R} \cdot \operatorname{tag} \alpha$$

per il raggio medio della generica sezione retta del solido si potrà scrivere

$$r = R - z \cdot \operatorname{tag} \alpha = R\left(1 - \psi \frac{l}{z}\right)$$

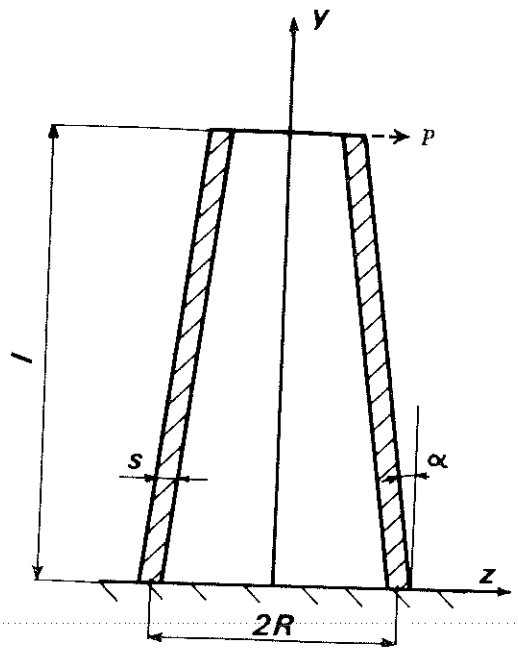


FIG. 1

essendo R il raggio medio della sezione d'incastro ed α l'angolo di semiapertura della superficie media. Detto s lo spessore del mantello saranno d'altronde

$$\left.\begin{matrix} r_i \\ r_e \end{matrix}\right\} = r \mp \frac{s}{2}$$

i raggi interno ed esterno della sezione generica il cui momento di inerzia

$$I = \frac{\pi}{4}(r_e^4 - r_i^4) = \pi r^3 s + \frac{\pi}{4} r s^3$$

una volta introdotta l'ascissa adimensionalizzata

$$\xi = \frac{z}{R}$$

evidentemente varrà

$$I = \frac{I_i}{1 + \rho^2} (1 - \psi \xi) [\rho^2 + (1 - \psi \xi)^2] \tag{1}$$

in funzione di quello d'incastro

$$I_i = \pi R^3 s (1 + \rho^2)$$

in cui compare l'altro rapporto adimensionale

$$\rho = \frac{s}{2 R}$$

Supponendo agente il carico concentrato P di fig. 1 e quindi il momento

$$M = - P (l - z) \tag{2}$$

l'equazione della linea elastica della trave potrà scriversi in base alle (1) e (2)

$$\frac{d^2 y}{d \xi^2} = - \frac{P l^3}{E I_i} \frac{(1 - \xi)(1 + \rho^2)}{(1 - \psi \xi) [\rho^2 + (1 - \psi \xi)^2]}$$

onde pel rapporto

$$\eta = y \Big/ \frac{P l^3}{3 E I_i}$$

tra la deformata laterale e quella che si ha quando $\alpha = 0$, risulterà

$$\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = \frac{3 (1 - \xi)(1 + \rho^2)}{(1 - \psi \xi) [\rho^2 + (1 - \psi \xi)^2]} \tag{3}$$

Ponendo quindi

$$\frac{1-\xi}{(1-\psi\xi)[\rho^2+(1-\psi\xi)^2]} = \frac{A}{\rho^2+(1-\psi\xi)^2} + \frac{B}{1-\psi\xi} - \frac{B(1-\psi\xi)}{\rho^2+(1-\psi\xi)^2}$$

risulta subito

$$A = \frac{1}{\psi} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{\psi-1}{\psi\rho^2}$$

sicché la (3) diviene

$$\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} = 3(1+\rho^2)\left\{\frac{1-\psi}{\rho^2}\left[\frac{1-\psi\xi}{\rho^2+(1-\psi\xi)^2} - \frac{1}{1-\psi\xi}\right] + \frac{1/\psi}{\rho^2+(1-\psi\xi)^2}\right\}$$

ed a seguito d'una prima quadratura

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = 3\frac{1+\rho^2}{\psi^2}\left\{\frac{1-\psi}{\rho^2}[ln(1-\psi\xi)] - \frac{1}{2}ln[\rho^2+(1-\psi\xi)^2] - \frac{1}{\rho}\text{arctag}\frac{1-\psi\xi}{\rho}\right\} + C.$$

Imponendo che $\frac{d\eta_1}{d\xi} = 0$ per $\xi = 0$

si ha

$$C = 3\frac{1+\rho^2}{\psi^2}\left[\frac{1}{\rho}\text{arctag}\frac{1}{\rho} - \frac{1-\psi}{2\rho^2}ln(1+\rho^2)\right]$$

onde a seguito d'ulteriore integrazione, ed essendo $\eta_i = 0$ per $\xi = 0$, si ha in definitiva l'espressione

$$\eta_i = 3 \frac{1+\rho^2}{\psi^3} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho^2}{\rho^2 + (1-\psi\xi)^2} - \right.$$

$$- \frac{1-\psi}{2\rho^2} (1-\psi\xi) \ln \frac{(1+\rho^2)(1-\psi\xi)^2}{\rho^2 + (1-\psi\xi)^2} -$$

$$\left. - \frac{2-\psi(1+\xi)}{\rho} \operatorname{arctag} \frac{\rho\psi\xi_x}{\rho^2 + (1-\psi\xi_x)} \right\} \tag{4}$$

dipendente da due soli parametri ψ e ρ variabili entro limiti determinabili in base a condizioni geometriche. Infatti per un'assegnata sezione d'incastro ed una certa inclinazione α della generatrice del tronco di cono, le altezze possibili per quest'ultimo sono ovviamente quelle che non danno luogo a compenetrazione di spessore nella sezione di estremità ($r_m \geqslant s/2$) onde per la (4) deve essere

$$\psi + \rho \leqslant 1 \tag{5}$$

Per scopi che tra breve emergeranno osserviamo che

$$\lim_{\rho \to 0} \eta_i = \eta_{i0} = \frac{3}{\psi^3} \left[\frac{(\psi^3 + \psi^2)\xi^2 - 2\psi\xi}{2(1-\psi\xi)} - \ln(1-\psi\xi) \right]$$

e che per casi come quello in esame il più importante parametro di deformazione è lo spostamento trasversale dell'estremo libero, subito calcolabile ponendo nella (4) $\xi = 1$.
In tal modo resta definita la grandezza

$$\chi = \eta_{i\xi=1} = 3 \frac{1+\rho^2}{\psi^3} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho^2}{\rho^2 + (1-\psi)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\psi)^2}{2\rho^2} \ln \frac{(1+\rho^2)(1-\psi)^2}{\rho^2 + (1-\psi^2)} - 2 \frac{1-\psi}{\rho} \operatorname{arctag} \frac{\rho\psi}{\rho^2 + (1-\psi)^2} \right] \tag{7}$$

per la cui rapida determinazione abbiamo rappresentato la (7) in funzione di ψ e per diversi valori di ρ ottenendo il diagramma di

fig. 2 sul quale compaiono le due curve limiti I e II alla prima delle quali si perviene facendo tendere il parametro ρ al valore 0.

Essendo d'altronde facile trarre dalla stessa (7)

$$\lim_{\rho \to 0} \chi = \chi_0 = -\left[\frac{\psi + 2}{2\psi^2} + \frac{ln\,(1 - \psi)}{\psi^3} \right] \tag{8}$$

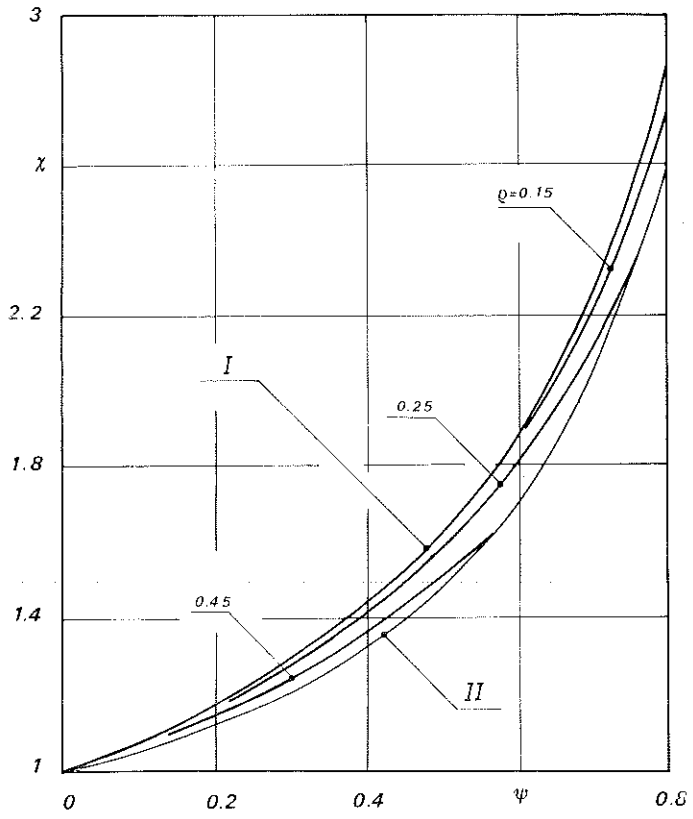


FIG. 2

è immediato verificare che la (8) coincide con la (6) quando si ponga $\xi = 1$. Per quanto invece riguarda la curva II essa è stata ottenuta considerando nella (5) il segno di eguaglianza e quindi sostituendo $\rho = 1 - \psi$ nella (7) in modo da trarne l'equazione

$$\bar{\chi} = -\frac{1 + (1 - \psi)^2}{\psi^3}\left[ln\,(1 - \psi) + 2\,\text{arctag}\,\frac{\psi}{2 - \psi} \right]$$

È a questo punto il caso di far notare che la fascia utile del

campo definito dalla (7) è quella compresa tra le curve I e II che pertanto vengono a delimitare un'area la cui piccolezza ci ha suggerito di approssimare la (7) medesima con la più semplice (8).

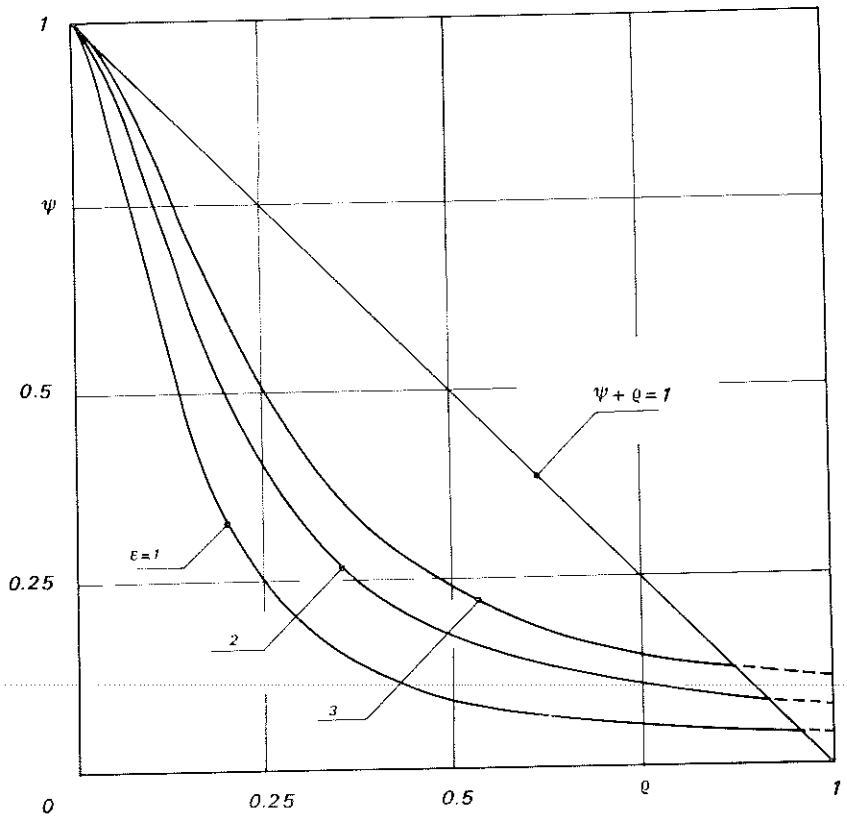


FIG. 3

Ovviamente per un fissato valore di ρ questa sostituzione è tanto meno valida quanto più alto è il valore di ψ, laddove per un'ascissa generica, preferendo la (6) alla (4) si commettono errori in ogni caso minori di quelli che si hanno per $\xi = 1$.

Al fine di passare a considerazioni quantitative abbiamo cercato quei valori di ψ e ρ che, congiuntamente, permettono di approssimare la (7) con la (8) senza superare un prefissato errore relativo. Se questo è ε, i valori di ψ e ρ che lo inducono sono ovviamente dati da

$$\varepsilon = \frac{\chi_0 - \chi}{\chi_0} \cdot 100$$

ovvero sono le radici della funzione implicita

$$F(\psi, \rho) = 0 \tag{9}$$

ove

$$F(\psi, \rho) = (1 - \varepsilon)\, \chi_0 - \chi\,.$$

Data la complessità della (9) abbiamo fatto ricorso a metodi numerici ritenendo variabile, con passo $\Delta\rho = 0{,}0025$, il parametro ρ per ogni cui valore abbiamo cercato quello di ψ che annulla la (9) tramite l'uso di un sottoprogramma che sfrutta il noto metodo della bisezione. In tal modo siamo stati in grado di rappresentare sulla fig. 3 una terna di funzioni che con la loro ascissa forniscono il massimo valore di ψ per il quale congiuntamente al valore di ρ fornito dall'ordinata, l'errore relativo nell'uso della (8) è pari rispettivamente all'1, al 2 e al 3 %.

Istituto di Costruzione di Macchine della Facoltà d'Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli. Giugno 1974.

BIBLIOGRAFIA

[1] TIMOSHENKO S. P., *Strength of materials*, D. Van Nostrand (1956).
[2] SHANLEY F. R., *Strength of materials*, McGraw Hill (1960).
[3] LEE G. C., MORELL M. L. e KETTER R. L., *Design of tapered Members*, W. R. C. Bull. n. 173, p. 1 (1972).

Influenza di un extra-flusso d'energia sulla termodinamica di un dielettrico elastico dispersivo *

Nota di ANTONIO ROMANO
presentata dal socio ordinario CARLO TOLOTTI

(Adunanza dell'1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Si deducono le conseguenze per la termodinamica di un dielettrico derivanti dalla presenza di un extra-flusso di energia nella relativa equazione del bilancio e si prova che tale presenza è necessaria per spiegare alcuni risultati sperimentali.

SUMMARY. — The consequences for the thermodynamics of a dielectric are deduced starting with an energy extra-flux in the relative equation of balance and it is proved that such an extra-flux is essential to explain some experimental results.

1. - In un mio precedente lavoro [1], ho proposto una teoria per l'elettrotermodinamica di un dielettrico elastico dispersivo S utilizzando, tra l'altro, un'equazione di bilancio per l'energia in cui per il flusso d'energia $\mathbf{H}$ sussiste la consueta decomposizione:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} + \mathbf{h}, \tag{I}$$

dove $\mathbf{S}$ è il vettore di Poynting ed $\mathbf{h}$ è il vettore corrente di calore.

Nel presente lavoro mi propongo di determinare le conseguenze per la termodinamica di S derivanti dal sostituire la (I) con la seguente altra decomposizione generale:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} + \mathbf{h} - \mathbf{s}, \tag{II}$$

* Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C. N. R.

dove figura un extra-flusso d'energia $-\mathbf{s}$ prodotto dall'interazione tra dielettrico e campo [1].

A tale scopo nel n. 2 comincio con lo scrivere le equazioni del bilancio dell'impulso e dell'energia corrispondenti alla decomposizione (II) assumendo come variabili fondamentali, anziché quelle adottate in [1], il gradiente di deformazione $\mathbf{F}$, la polarizzazione specifica $\mathbf{p}$ e l'entropia specifica η allo scopo di facilitare il confronto con i risultati di altri Autori che utilizzano appunto $\mathbf{F}$, $\mathbf{p}$ ed η come variabili fondamentali.

Nel n. 3 esplicito poi le restrizioni imposte alle equazioni costitutive dal principio di dissipazione utilizzando gli sviluppi di [2] ove ho pure considerato la decomposizione (II) con riferimento però a sostanze magnetizzabili. In particolare, chiamando dispersivo elettricamente e meccanicamente ogni dielettrico nelle cui equazioni costitutive, inerenti rispettivamente il campo elettrico $\mathbf{E}$ ed il tensore meccanico degli sforzi $\mathbf{t}$, figurino le derivate grad $\mathbf{p}$ e $\dot{\mathbf{p}}$, provo che:

a) *il dielettrico S, se* $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, *non può essere dispersivo meccanicamente;*

b) *il dielettrico S, se* $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, *può essere dispersivo sia elettricamente che meccanicamente.*

Per riconoscere l'interesse dei risultati a) e b) si ricordi che MINDLIN in [3], [4] mostra che, per interpretare alcuni effetti capacitivi sperimentalmente evidenziati da MEAD [5], è necessaria l'ipotesi della dispersione meccanica di *S*, onde *soltanto una termodinamica dei dielettrici che faccia intervenire nella decomposizione* (II) *un extra-flusso di energia* $-\mathbf{s}$ *è atta a render conto di detti effetti.*

Nel n. 4 infine eseguo il confronto dei risultati qui determinati con quelli di altri Autori [6], [7], [8], [9]. Precisamente provo che le teorie proposte in [6], [7], [8] relative a dielettrici non dispersivi si ottengono dalla presente teoria per $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, il che avevo già riconosciuto in [1] (sebbene per via indiretta a causa della diversa scelta delle variabili fondamentali). Per quanto riguarda invece la teoria esposta in [9] in cui è adottato un bilancio d'energia con $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ e si postulano delle equazioni costitutive senza analizzarne la compatibilità col principio di dissipazione, rilevo che, stante a), detta teoria non può assolutamente rendere conto degli effetti di dispersione meccanica, cosicché è superflua la presenza di grad $\mathbf{p}$ nell'equazione costitutiva, inerente il tensore meccanico degli sforzi $\mathbf{t}$, assunta in [9].

[1] Le conseguenze della sostituzione della (I) con la (II) per le sostanze magnetizzabili sono state da me già analizzate in [2] dove ho provato che si perviene ad equazioni costitutive analoghe a quelle che altri Autori ottengono a partire da un modello strutturale.

2. - In [1] ho provato che, in corrispondenza della decomposizione (I), l'equazione del bilancio locale di energia interna (specifica) ε ha la forma:

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho\dot{\varepsilon} = [\mathbf{T} + (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{I} - \mathbf{E}\otimes\mathbf{D}] : \operatorname{grad}\dot{\mathbf{x}} \\ \quad + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} - \operatorname{div}\mathbf{h} + \rho q, \end{cases}$$

dove $\mathbf{D}$ è il vettore d'induzione elettrica, $\mathbf{T}$ il tensore totale degli sforzi, $\mathbf{h}$ il vettore corrente di calore e q il « supply » di energia interna.

In maniera analoga, se in luogo della decomposizione (I) si adotta la (II), si perviene alla seguente altra equazione del bilancio per l'energia:

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho\dot{\varepsilon} = [\mathbf{T} + (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{I} - \mathbf{E}\otimes\mathbf{D}] : \operatorname{grad}\dot{\mathbf{x}} \\ \quad + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} - \operatorname{div}(\mathbf{h} - \mathbf{s}) + \rho q. \end{cases}$$

Si osservi ora che si ha:

$$\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{E}\cdot\frac{d}{dt}(\varepsilon_0\,\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{d\mathrm{E}^2}{dt} + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{P}},$$

dove $\mathbf{P}$ è la polarizzazione elettrica ed ε_0 la permeabilità elettrica del vuoto. Pertanto, tenuto conto dell'equazione di continuità per la densità ρ di massa, risulta:

$$(3)\qquad \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{d\mathrm{E}^2}{dt} + \rho\mathbf{E}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{P}}{\rho}\right) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}};$$

inoltre è anche:

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{d\mathrm{E}^2}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{E}^2}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\mathrm{E}^2\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}}.$$

Le relazioni (3) e (4) consentono di dare alla (2) la seguente altra forma

$$(5)\qquad \rho\,\dot{\varepsilon}_{(m)} = \mathbf{t} : \operatorname{grad}\dot{\mathbf{x}} + \rho\,\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{p}} - \operatorname{div}(\mathbf{h} - \mathbf{s}) + \rho\,q,$$

dove $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho$ è la polarizzazione specifica e dove si è posto:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{(m)} = \varepsilon - \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_o \dfrac{E^2}{\rho}, \\ \mathbf{t} = \mathbf{T} + \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_o\, E^2\, \mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D}. \end{cases}$$

Si consideri ora l'equazione, determinata in [1], del bilancio locale di impulso:

$$\rho\, \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho\, \mathbf{b},$$

essendo

$$\mathbf{T}_{(e)} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_o\, E^2\, \mathbf{I} + \mathbf{E} \otimes \mathbf{D}.$$

Pertanto si ha

$$f_{(e)i} = (\operatorname{div} \mathbf{T}_{(e)})_i = -\varepsilon_o\, E_j\, \partial_i\, E^j + \varepsilon_o\, E^j\, \partial_j\, E^j + \varepsilon_o\, E^j\, \partial_j\, E_i + E_i\, \partial_j\, P^j + P^j\, \partial_j E_i$$

e risultando per le equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, & (\partial_i\, E_j = \partial_j\, E_i) \\ \varepsilon_o \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{P} = \rho_{(e)} \end{cases}$$

si può concludere che l'equazione del bilancio d'impulso assume la seguente altra forma equivalente:

$$(7)\qquad \rho\, \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{t} + \mathbf{f}_{(e)} + \rho\, \mathbf{b},$$

dove

$$(8)\qquad \mathbf{f}_{(e)} = \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{E} + \rho_{(e)}\, \mathbf{E} \qquad (f_{(e)i} = P^j\, \partial_j\, E_i + \rho_{(e)}\, E_i).$$

Infine, dalla simmetria di $\mathbf{T}$, stante $(5)_2$ si ha ancora:

$$(9)\qquad t_{[ij]} = P_{[i}\, E_{j]}.$$

Le (8) e (9) corrispondono ad una prefissata interazione tra il dielettrico ed il campo elettrico tra le infinite interazioni equivalenti che si ottengono decomponendo **T** in una parte « meccanica » ed in una « elettrica » (cfr. [10]).

3. - Dalla diseguaglianza di Clausius-Duhem

$$\theta \rho \dot{\eta} \geq - \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}}{\theta} + \rho q \cdot (\mathbf{g} = \operatorname{grad} \theta)$$

e dal bilancio locale di energia nella forma (5), consegue la seguente *diseguaglianza di dissipazione ridotta*:

$$(10) \quad - \rho [\dot{\varepsilon}_{(m)} - \dot{\eta} \theta] + \mathbf{t} : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \operatorname{div} \mathbf{s} + \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}}{\theta} \geq 0.$$

Fissando equazioni costitutive del tipo:

$$(11) \quad \left| \begin{array}{lll} \varepsilon_{(m)} = \hat{\varepsilon}_{(m)} & (\mathbf{F}, \eta\, \mathbf{p}, \mathbf{g}, \operatorname{grad} \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}), \\ \mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}} & (\quad » \quad » \quad » \quad), \\ \mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}} & (\quad » \quad » \quad » \quad), \\ \theta = \hat{\theta} & (\quad » \quad » \quad » \quad), \\ \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}} & (\quad » \quad » \quad » \quad), \\ \mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} & (\quad » \quad » \quad » \quad), \end{array} \right.$$

con una procedura analoga [2] a quella da me già adottata in [2], si deduce che, affinché le (11) rendano soddisfatta la diseguaglianza (10)

[2] La (10) è ottenibile dalla (22) di [2] con le sostituzioni:

$$\psi \to \varepsilon_{(m)}, \ \theta \to \eta, \ \mathbf{H} \to \mathbf{E}, \ \mathbf{m} \to \mathbf{p}, \ \mathbf{k} = \mathbf{J} = \mathbf{0}, \ - \mathbf{T} + \mathbf{n} - \mathrm{L} \to \mathbf{t}.$$

in ogni processo termoelettrocinetico $\{ \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \eta_l(\mathbf{X}, t), \mathbf{p}(\mathbf{X}, t) \}$ [3] (principio di dissipazione) occorre e basta che si abbia:

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varepsilon_{(m)} = \bar{\varepsilon}_{(m)}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}), \qquad \operatorname{Grad}\mathbf{p} \equiv \left(\frac{\partial p_i}{\partial X^L}\right)\\
&\theta \;\; = -\partial_{\eta_l}\bar{\varepsilon}_{(m)} = \bar{\theta}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}),\\
&\mathbf{t} \;\; = \rho\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\partial_{\mathbf{F}}\,\bar{\varepsilon}_{(m)} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}),\\
&\mathbf{E}^{(e)} = \partial_p\,\bar{\varepsilon}_{(m)} = \bar{\mathbf{E}}^{(e)}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}),\\
&\mathbf{s} \;\; = \rho\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial\,\bar{\varepsilon}_{(m)}}{\partial\,(\overline{\operatorname{Grad}\mathbf{p}})} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}, \mathbf{g}),\\
&\rho\,\mathbf{E}^{(d)} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \partial_p\,\mathbf{s} : \operatorname{grad}\mathbf{p} + \left[\frac{\mathbf{h}}{\theta} - \partial_\theta\,\mathbf{s}\right] \cdot \mathbf{g} \geq 0
\end{aligned}
\right.
$$

dove $\mathbf{E}^{(d)}$ è definito dalla relazione:

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}, \mathbf{g}, \dot{\mathbf{p}}) =$$

$$\bar{\mathbf{E}}^{(e)}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}), + \bar{\mathbf{E}}^{(d)}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \mathbf{g}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$$

sicché

$$\bar{\mathbf{E}}^{(d)}(\mathbf{F}, \eta_l, \mathbf{p}, \operatorname{Grad}\mathbf{p}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0.$$

Inoltre, poiché è

$$\frac{\partial\,\bar{\varepsilon}_{(m)}}{\partial\left(\dfrac{\partial\,p^i}{\partial\,X^L}\right)} = \frac{\partial\,\hat{\varepsilon}_{(m)}}{\partial\left(\dfrac{\partial\,p^i}{\partial\,x_k}\right)}\,(\mathrm{F}^{-1})^{\mathrm{L}}{}_k,$$

la $(12)_5$ comporta:

$$
(13)\qquad \frac{\partial\,s^i}{\partial\,p^i} = \rho\,\frac{\partial\,\hat{\varepsilon}_{(m)}}{\partial\left(\dfrac{\partial\,p^i}{\partial\,x^i}\right)}
$$

che, stante $(12)_{3,4}$, prova i risultati a) e b) del n. 1.

[3] $\mathbf{X}$ indica il vettore di posizione in una configurazione di riferimento.

In particolare, per $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ le equazioni costitutive (12) coincidono, a parte il cambiamento di variabili, con quelle da me determinate in [1] e si scrivono:

$$
(14)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{(m)} = \bar{\varepsilon}_{(m)}(\mathbf{F}, \gamma_l, \mathbf{p}), \\ \theta \;\; = -\,\partial_{\gamma_l}\bar{\varepsilon}_{(m)}(\mathbf{F}, \gamma_l, \mathbf{p}), \\ \mathbf{t} \;\; = \rho\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\partial_{\mathrm{F}}\bar{\varepsilon}_{(m)} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}, \gamma_l, \mathbf{p}), \\ \mathbf{E}^{(e)} = \partial_p\varepsilon_{(m)} = \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{F}, \gamma_l, \mathbf{p}), \\ \rho\mathbf{E}^{(d)}\cdot\dot{\mathbf{p}} + \dfrac{\mathbf{h}\cdot\mathbf{g}}{\theta} \geq 0. \end{cases}
$$

4. - Per confrontare i risultati precedenti con quelli proposti nei lavori [6], [7], [8], [9], si cominci con l'osservare che se $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, l'equazioni del bilancio di impulso ed energia (7) e (5) coincidono con quelle utilizzate in tutti detti lavori. Inoltre, se il materiale non è dispersivo, le equazioni costitutive del dielettrico sono le (14) purché alla $(14)_5$ si sostituisca l'altra

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{g} \geq 0,$$

risultando $\mathbf{E}^{(d)} = \mathbf{0}$. Se, ancora più in particolare, si considera un fenomeno isotermico e si suppone che la $(14)_2$ possa invertirsi, le (14) si scrivono:

$$
\begin{cases} \varepsilon_{(m)} = \overset{\frown}{\varepsilon}_{(m)}(\mathbf{F}, \mathbf{p}), \\ \mathbf{t} \;\; = \rho\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\partial_{\mathrm{F}}\overset{\frown}{\varepsilon}_{(m)} = \overset{\frown}{\mathbf{t}}(\mathbf{F}, \mathbf{p}), \\ \mathbf{E} \;\; = \partial_p\overset{\frown}{\varepsilon}_{(m)} = \overset{\frown}{\mathbf{E}}(\mathbf{F}, \mathbf{p}), \end{cases}
$$

e coincidono con quelle proposte in [6], [7], [8]. Infine, per questo tipo di materiali dalla (9) si ha:

$$
\rho\,\frac{\partial\,\overset{\frown}{\varepsilon}_{(m)}}{\partial\,\mathrm{F}_{\mathrm{L}}{}^{Ii}}\,\mathrm{F}_{L}{}^{jI} = \mathrm{P}_{Ii}\,\frac{\partial\,\overset{\frown}{\varepsilon}_{(m)}}{\partial\,p_{jI}}
$$

che è la (10.39) di [8].

Per quanto riguarda invece il lavoro [9], va osservato che in esso, accanto alle equazioni (7) e (5) (la seconda scritta per $\mathbf{s} = \mathbf{0}$), si postulano le equazioni costitutive $(12)_{1,3}$ in luogo delle $(14)_{1,3}$ che abbiamo provato essere compatibili col principio di dissipazione. La presenza di Grad $\mathbf{p}$ in queste ultime equazioni non è pertanto consentita dalla termodinamica, cosicché in effetti la teoria [9] non è applicabile ai fenomeni di dispersione meccanica.

BIBLIOGRAFIA

[1] ROMANO A., *Sulla termodinamica di un dielettrico elastico e dispersivo*, Ricerche di Mat. (Napoli), **22**, pp. 283-297 (1973).

[2] ROMANO A., *On the deformable and magnetizable, continua*, in corso di stampa su Ricerche di Mat. (Napoli); relazione n. 34 dell'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli.

[3] MINDLIN R. D., *Polarization gradient in elastic dielectries*, Int. J. solids and structures, **4**, pp. 637-642 (1968).

[4] MINDLIN R. D., *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films*, Int. J. solids and structures, **5**, pp. 1197-1208 (1969).

[5] MEAD C. A., Phys. Rev. Lett., **6**, p. 545 (1961).

[6] TOUPIN R. A., *The elastic dielectrics*, J. Rat. Mech. Anal., **5**, pp. 849-915 (1956).

[7] TOUPIN R. A., *A dynamical theory of elastic dielectris*, J. Eng. Sc., **I**, pp. 101-126 (1963).

[8] ERINGEN A. C., *Non-linear theories of continuous media*, Mc Graw-Hill (1962).

[9] MAUGIN G. A., ERINGEN A. C., *Polarized elastic materials with electronic spin- A relativistic approach*, J. Math. Phys., **13**, n. 11, pp. 1777-1787 (1972).

[10] ROMANO A., *Su un'assiomatica per l'elettrotermodinamica relativistica di un sistema continuo*, Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. (Naopli), serie IV, **40** (1973).

Riferimenti fisici e relative connessioni spaziali in un modello matematico generale di spazio-tempo *

Nota di RENATO GRASSINI
presentata dal socio ordinario CARLO TOLOTTI

(Adunanza dell' 1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Si introducono, a fondamento della formulazione differenziale relativa di una qualunque teoria fisica in un modello matematico generale di spazio-tempo, le nozioni di connessione spaziale e connessione spaziale principale in un riferimento e se ne studiano le proprietà.

SUMMARY. — At the base of the relative differential formulation, in a general mathematical space-time model, of any physical theory, the notions of spatial connection and principal spatial connection in a system of reference are set, and their properties are examined.

INTRODUZIONE.

Tra le strutture geometriche che in una qualunque teoria fisica vanno associate alla varietà spazio-tempo M ce n'è una — precisamente una connessione lineare ω — che va necessariamente considerata ai fini della formulazione differenziale della teoria [1] [2] [3]. Base comune ad ogni teoria fisica è dunque la considerazione della coppia (M, ω), la quale pertanto rappresenta un modello matematico di spazio-tempo di interesse generale.

Si pensi ora introdotto (n. 1) nel modello (M, ω) un riferimento fisico R, inteso come un continuo alla Cosserat costituito da ∞^3 particelle, munite di orologi, e da ∞^3 triedri ciascuno con origine in una particella. Ai fini della formulazione differenziale *relativa* ad R di una teoria fisica [4], conviene introdurre la nozione di connessione spaziale in R, nozione a cui appunto dedico il § 1.

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo nazionale di ricerca per la Fisica Matematica del C.N.R.

Precisamente nel n. 2 definisco come *connessione spaziale* in R ogni connessione nello spazio fibrato principale delle configurazioni dei triedri di R, rilevando inoltre (n. 3) l'equivalenza di detta nozione con quelle di derivazione covariante e di trasporto parallelo nell'insieme dei *vettori di spazio* relativi ad R.

Osservo poi (n. 4) che nel modello (M, ω) una connessione spaziale è direttamente fornita dalla *connessione fondamentale* ω purché questa determini un trasporto parallelo di vettori di spazio e cioè subordini una connessione spaziale in R. Dirò in tal caso che ω è *riducibile spazialmente* in R e varie forme della condizione di riducibilità spaziale sono indicate al n. 4.

Se la connessione fondamentale ω non verifica detta condizione, essa non può essere direttamente utilizzata ai fini della formulazione differenziale relativa ad R di una teoria fisica ed al suo posto va considerata una delle connessioni spaziali in R il cui criterio di scelta, a priori arbitrario, non deve comunque introdurre strutture geometriche estranee alla teoria.

Nel § 2 per tale scelta mi attengo precisamente al criterio geometrico, suggerito (n. 5) dalla struttura quasi-prodotto determinata da R in M, consistente nell'identificare la suddetta connessione spaziale con la proiezione $\tilde{\omega}_R$ di ω in R. A tale connessione spaziale $\tilde{\omega}_R$ darò il nome di *connessione spaziale principale* in R; essa, se la ω è riducibile spazialmente in R, viene a coincidere con la connessione spaziale subordinata da ω in R.

Notevole è il fatto che la connessione $\tilde{\omega}_R$ determina, come trasporto parallelo dei triedri di R, proprio il *trasporto generalizzato di Fermi*, da me introdotto in un precedente lavoro [5] come estensione fisicamente significativa del trasporto misto di Fermi, [6] [7] [8], al modello (M, ω). Ciò fornisce (n. 6) un'interpretazione cinematica per il criterio geometrico di scelta della connessione principale $\tilde{\omega}_R$ dianzi adottato.

Lo studio della derivazione covariante (n. 5) e della 1-forma (n. 7) caratterizzanti $\tilde{\omega}_R$ chiarisce infine, nel caso relativistico, i collegamenti, già rilevati in [5], della connessione determinante il trasporto misto di Fermi con la derivazione covariante trasversa di C. Cattaneo [9] e A. L. Zelmanov [10] nonché con la connessione relativa canonicamente associata ad ω di I. Cattaneo Gasparini [11], già proposte ai fini della formulazione differenziale relativa di teorie fisiche in Relatività generale [12] [13] [14].

§ 1. - Connessioni spaziali.

1. - *Richiami preliminari sui riferimenti fisici.*

In una varietà spazio-tempo M un riferimento fisico è rappresentato da una coppia [1]

$$R = (\gamma, \tau) \tag{1.1}$$

costituita da un campo vettoriale γ e da una 1-forma reale τ verificanti la condizione

$$\langle \tau, \gamma \rangle = 1 . \tag{1.2}$$

Il campo γ, mediante la congruenza delle sue curve integrali, rappresenta le linee d'universo d'un sistema continuo; la 1-forma τ, non nulla in ciascun punto di M, rappresenta la nozione di intervallo di tempo (locale); la condizione (1.2), infine, è dedotta dalla assunzione generale (corrispondente al principio di causalità) che lungo la traiettoria d'universo di una particella non vi siano eventi simultanei.

La assegnazione di τ, che operativamente dipende dalla particolare teoria fisica in esame, dipende altresì, in generale, dal riferimento in cui si assumono effettuate le misure di tempo, cosicché τ si dirà 1-*forma temporale relativa ad* R; ove, in particolare, si postuli la indipendenza delle misure di tempo dal riferimento in cui si effettuano, tutte le 1-forme temporali relative si assumeranno coincidenti con un'unica forma τ, che si dirà 1-*forma temporale assoluta.*

La 1-forma τ determina in M (di cui TM e T_xM denotano rispettivamente il fibrato tangente e la relativa fibra in $x \in M$) una distribuzione di sottospazi vettoriali tridimensionali

$$\Sigma : x \in M \to \Sigma_x \subset T_xM$$

data dalle fibre Σ_x — dette *piattaforme spaziali* associate ad R — del fibrato vettoriale

$$\text{Kern } \tau = \{u \in TM : \langle \tau, u \rangle = 0\}$$

luogo dei *vettori di spazio* relativi ad R, connettenti (localmente) eventi simultanei in R.

[1] Cfr. [5], n. 2.

Sia ora $\tilde{P}$ l'insieme delle basi delle piattaforme spaziali associate ad R. Dal punto di vista geometrico esso è uno spazio fibrato principale, avente per base M e per gruppo strutturale il gruppo lineare $\tilde{G} = GL(3, \mathcal{R})$ sul corpo $\mathcal{R}$ dei reali. Dal punto di vista cinematico va osservato che ogni elemento di $\tilde{P}$ può riguardarsi come un'arbitraria configurazione istantanea di un triedro con origine in una particella del continuo di riferimento e che quindi il riferimento fisico R, il quale per (1.1) e (1.2) è altresì individuato dalla coppia $(\gamma, \tilde{P})$, rimane caratterizzato come un continuo alla Cosserat, dei cui triedri $\tilde{P}$ rappresenta quindi lo *spazio delle configurazioni.*

2. - *Connessioni spaziali in un riferimento fisico.*

Assegnato un riferimento fisico R in M, siano $\tilde{P}$ lo spazio delle configurazioni dei triedri di R, $\tilde{s} : U \to \tilde{P}$ la generica sezione differenziabile di $\tilde{P}$ su un aperto $U \subset M$ e [2] $a = (a_\beta^\alpha) : U \cap U' \to \tilde{P}$ la funzione di transizione corrispondente ad un cambiamento di sezione $\tilde{s} \to \tilde{s}'$.

DEFINIZIONE I. *Dicesi connessione spaziale in* R *ogni connessione nello spazio* $\tilde{P}$ *delle configurazioni dei triedri di* R.

PROPOSIZIONE I. *Una connessione spaziale è individuata, in un atlante di sezioni di* $\tilde{P}$, *da matrici* $(\tilde{\omega}_\beta^\alpha)$ *di 1-forme reali locali*

$$\tilde{\omega}_\beta^\alpha : TU \to \mathcal{R} \tag{2.1}$$

caratterizzate, in un cambiamento di sezione, dalla legge di trasformazione

$$\tilde{\omega}_{\beta'}^{\alpha'} = a_\rho^{\alpha'}\, \tilde{\omega}_\sigma^\rho\, a_{\beta'}^\sigma + a_\lambda^{\alpha'}\, da_{\beta'}^\lambda \tag{2.2}$$

Infatti dalla teoria delle connessioni [3] segue in particolare che la 1-forma di una connessione spaziale

$$\tilde{\omega} : T\tilde{P} \to \tilde{g},$$

a valori nell'algebra di Lie $\tilde{g}$ del gruppo di Lie $\tilde{G}$, è completamente individuata, in un atlante di sezioni di $\tilde{P}$, dalle sue immagini reci-

[2] Gli indici greci variano da 1 a 3; quelli latini da 0 a 3.
[3] Cfr. [15], p. 66.

proche ovvero (indicato con $T\tilde{s}$ il differenziale di $\tilde{s}$) dalle 1-forme

$$\tilde{s}^*(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} \circ T\tilde{s} : TU \to \tilde{g} \; ; \tag{2.3}$$

queste sono caratterizzate, in un cambiamento di sezione, dalla legge di trasformazione

$$\tilde{s}'^*(\tilde{\omega}) = ad_{a^{-1}}\, \tilde{s}^*(\tilde{\omega}) + a^{-1} \circ Ta \; , \tag{2.4}$$

dove il simbolo *ad* denota la rappresentazione aggiunta di $\tilde{G}$ in $\tilde{g}$.

Poiché inoltre $\tilde{g}$ si identifica con l'algebra $gl(3, \mathcal{R})$ delle matrici reali d'ordine 3, le 1-forme (2.3) risultano costituite da matrici del tipo (2.1), mediante cui la legge (2.4) assume la forma esplicita (2.2), conformemente all'asserto.

Le 1-forme (2.1) si diranno nel seguito *coefficienti* della connessione spaziale $\tilde{\omega}$.

3. - *Derivazione covariante e trasporto parallelo associati ad una connessione spaziale.*

Sia $\mathfrak{F}(M)$ l'algebra delle funzioni differenziabili su M e siano $\chi(M)$ e $\Sigma(M)$ gli $\mathfrak{F}(M)$-moduli delle sezioni differenziabili di TM e Kern τ.

DEFINIZIONE II. *Dicesi derivazione covariante in* Kern τ *ogni applicazione* $\mathfrak{F}(M)$*-lineare*

$$\tilde{\nabla} : X \in \chi(M) \to (\tilde{\nabla}_X : u \in \Sigma(M) \to \tilde{\nabla}_X u \in \Sigma(M)) \tag{3.1}$$

di $\chi(M)$ *nell'* $\mathfrak{F}(M)$*-modulo delle derivazioni di* $\Sigma(M)$.

PROPOSIZIONE II. *Vi è corrispondenza biunivoca tra connessioni spaziali in* R *e derivazioni covarianti in* Kern τ.

Infatti ad ogni connessione spaziale $\tilde{\omega}$ rimane associata una derivazione covariante (3.1) in Kern τ ponendo, nella generica sezione $\tilde{s} = (U, e_\alpha)$ di $\tilde{P}$,

$$(\tilde{\nabla}_X u)^\alpha = \langle \tilde{\nabla} u^\alpha, X \rangle \, , \tag{3.2}$$

dove $(\tilde{\nabla} u^\alpha)$ è una 1-forma tensoriale di tipo $(1_{\tilde{G}}, \mathcal{R}^3)$ su $\tilde{P}$ — detta

differenziale assoluto di $u \in \Sigma(M)$ in $\tilde{\omega}$ — definita [4] in $\tilde{s}$ dalle 1-forme reali

$$\tilde{\nabla} u^{\alpha} = du^{\alpha} + \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} u^{\beta} . \tag{3.3}$$

D'altra parte, assegnata in Kern τ una derivazione covariante (3.1), la posizione (3.2), nella generica sezione $\tilde{s}$ di $\tilde{P}$, definisce una 1-forma tensoriale $(\tilde{\nabla} u^{\alpha})$ di tipo $(1_{\tilde{G}}, \mathcal{R}^3)$ su $\tilde{P}$, tale che le 1-forme reali

$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\nabla} e^{\alpha}_{\beta} , \tag{3.4}$$

trasformandosi nei cambiamenti di sezione in $\tilde{P}$ con la legge (2.2), sono i coefficienti di una connessione spaziale. Poiché inoltre da (3.2) e (3.4) si deduce

$$\langle \tilde{\nabla} u^{\alpha}, X \rangle = (X u^{\beta}) \delta^{\alpha}_{\beta} + (\tilde{\nabla}_X e_{\beta})^{\alpha} u^{\beta} = \langle du^{\alpha}, X \rangle + \langle \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}, X \rangle u^{\beta}$$

ossia, per l'arbitrarietà di $X \in \chi(M)$, la (3.3), si può concludere che la (3.4) è una connessione spaziale (e l'unica) avente (3.1) come derivata covariante associata in Kern τ, restando così provata la proposizione II.

Siano ora $\varphi(t)$ il generico cammino di M e $x_0 = \varphi(t_0)$, $x_1 = \varphi(t_1)$ una qualunque coppia di punti su di esso.

DEFINIZIONE III. *Dicesi trasporto parallelo in* Kern τ *ogni famiglia di isomorfismi tra piattaforme spaziali*

$$\tilde{\varphi}_{x_0, x_1} : \Sigma_{x_0} \to \Sigma_{x_1} \tag{3.5}$$

dipendenti da $\varphi(t)$, x_0 *e* x_1.

PROPOSIZIONE III. *Vi è corrispondenza biunivoca tra connessioni spaziali in* R *e trasporti paralleli in* Kern τ.

Infatti ad ogni connessione spaziale $\tilde{\omega}$ rimane associato un trasporto parallelo (3.5) in Kern τ determinato [5], lungo il generico cam-

[4] Cfr. [16], p. 56.
[5] Cfr. [15], p. 114.

mino $\varphi(t)$ (di cui X denota il campo di vettori tangenti), dalle equazioni

$$\begin{cases} \tilde{\nabla}_X u = 0 \\ X\langle \tau, u \rangle = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

dove $\tilde{\nabla}_X$ denota la derivazione covariante in Kern τ associata ad $\tilde{\omega}$, che risulta espressa in funzione di (3.5) dalla relazione

$$(\tilde{\nabla}_X u)_{x_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(\tilde{\varphi}^{-1}_{x_0, x}(u(t)) - u(t_0) \right) . \tag{3.7}$$

D'altra parte, assegnato in Kern τ un trasporto parallelo (3.5), la posizione (3.7) definisce l'unica derivazione covariante in Kern τ, e quindi l'unica connessione spaziale, cui risulta associato, mediante le equazioni (3.6), proprio il trasporto parallelo (3.5), restando così provata la proposizione III.

4. - *Condizioni di riducibilità spaziale della connessione fondamentale.*

Sia (M, ω) il modello matematico di spazio-tempo definito nell'introduzione. Indicato con ∇ il differenziale assoluto associato alla *connessione fondamentale* ω, questa è individuata, nella generica sezione locale (U, e_i) del fibrato principale $P(M)$ dei riferimenti lineari di M, dalla matrice $(\omega^i{}_j)$ di 1-forme reali [6]

$$\omega^i{}_j = \nabla e^i{}_j : TU \to \mathcal{R} . \tag{4.1}$$

Indicata inoltre con

$$X \in \chi(M) \to (\nabla_X : \chi(M) \to \chi(M)) \tag{4.2}$$

la derivazione covariante associata ad ω in TM, le equazioni

$$\nabla_X u = 0 \tag{4.3}$$

definiscono un trasporto parallelo in TM, cioè, per ogni coppia di

[6] Cfr. [15], p. 143.

punti x_0 e x_1 sul generico cammino $\varphi(t)$ di M, un isomorfismo tra spazi vettoriali

$$\varphi_{x_0, x_1} : T_{x_0} M \to T_{x_1} M . \tag{4.4}$$

DEFINIZIONE IV. *La connessione fondamentale* ω *dicesi riducibile spazialmente in* R *se il trasporto parallelo in* TM *ad essa associato subordina un trasporto parallelo in* Kern τ, *ovvero per il generico isomorfismo* (4.4) *si verifica che la sua restrizione* $\varphi_{x_0, x_1} / \Sigma_{x_0} a \ \Sigma_{x_0}$ *assume valori in* Σ_{x_1} :

$$\varphi_{x_0, x_1} / \Sigma_{x_0} : \Sigma_{x_0} \to \Sigma_{x_1} . \tag{4.5}$$

Varie forme della condizione di riducibilità spaziale (4.5) sono fornite dalle seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE IV. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione fondamentale* ω *sia riducibile spazialmente in* R *è che nella generica sezione* $s = (U, e_i)$ *di* P (M), *subordinante una sezione* $\tilde{s} = (U, e_a)$ *di* $\tilde{P}$, *la matrice* (4.1) *verifichi la condizione*

$$\omega_\alpha{}^\circ = 0 . \tag{4.6}$$

PROPOSIZIONE V. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione fondamentale* ω *sia riducibile spazialmente in* R *è che la restrizione di* ∇_X *a* Σ (M) *assuma valori in* Σ (M) *ossia che*

$$\langle \tau, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle \tau, \nabla_X u \rangle = 0 . \tag{4.7}$$

PROPOSIZIONE VI. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione fondamentale* ω *sia riducibile spazialmente in* R *è che, indicata con* σ *un'arbitraria* 1*-forma reale su* M, *la* 1*-forma temporale relativa* τ *soddisfi la condizione*

$$\nabla \tau = \sigma \otimes \tau . \tag{4.8}$$

La condizione di riducibilità spaziale (4.5) infatti richiede che in corrispondenza a condizioni iniziali del tipo

$$u(t_0) = u_0 \in \Sigma_{x_0}$$

le equazioni (4.3), che nella sezione s si scrivono

$$(4.9) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}\, u^{\alpha} + \langle \omega_i^{\alpha}, \mathrm{X} \rangle u^i = 0 \\ \mathrm{X}\, u^{o} + \langle \omega_i^{o}, \mathrm{X} \rangle u^i = 0\,, \end{cases}$$

ammettano soluzioni $u \in \Sigma(\mathrm{M})$. Ciò equivale a richiedere che l'equazione $(4.9)_2$ ammetta soluzioni con $u^o = 0$, il che è possibile, per l'arbitrarietà di X, se, e solo se, è soddisfatta la condizione (4.6), che risulta perciò equivalente alla (4.5), restando così provata la proposizione IV.

Dal primo membro della $(4.9)_2$ discende poi che la (4.6) è equivalente alla condizione

$$u^o = 0 \Rightarrow (\nabla_{\mathrm{X}} u)^o = 0$$

ovvero, in termini intrinseci, alla (4.7), il che prova la proposizione V.

Poiché infine, per le note proprietà dell'operatore di derivazione covariante ∇_{X} esteso a tutta l'algebra dei campi tensoriali su M, vale la relazione

$$\langle \tau, \nabla_{\mathrm{X}} u \rangle = \mathrm{X} \langle \tau, u \rangle - \langle \nabla_{\mathrm{X}} \tau, u \rangle\,,$$

la condizione (4.7) si può pure scrivere nella forma, anch'essa intrinseca,

$$\langle \tau, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_{\mathrm{X}} \tau, u \rangle = 0$$

che, indicata con σ un'arbitraria 1-forma reale su M, equivale alla condizione

$$\nabla_{\mathrm{X}} \tau = \langle \sigma, \mathrm{X} \rangle \tau$$

ovvero alla (4.8), il che prova la proposizione VI.

DEFINIZIONE V. *Dicesi connessione spaziale subordinata in* R *dalla connessione fondamentale* ω, *supposta riducibile spazialmente in* R, *la connessione spaziale in* R *determinata dal trasporto parallelo* (4.5) *in* Kern τ.

Dalle proposizioni II, III, V segue:

PROPOSIZIONE VII. *La derivazione covariante in* Kern τ *associata alla connessione spaziale subordinata da* ω *in* R *è data da*

$$(4.10) \qquad \mathrm{X} \in \chi(\mathrm{M}) \to (\nabla_{\mathrm{X}} : u \in \Sigma(\mathrm{M}) \to \nabla_{\mathrm{X}} u \in \Sigma(\mathrm{M}))\,.$$

Infatti basta osservare che la derivazione (4.10), subordinata da (4.2) in Kern τ stante la condizione di riducibilità (4.7), determina in Kern τ, mediante le equazioni (4.3) e $(3.6)_2$, il trasporto parallelo (4.5).

Rileverò infine esplicitamente che:

OSSERVAZIONE I. *Se τ è una 1-forma temporale assoluta, le nozioni di riducibilità spaziale della connessione fondamentale e di connessione spaziale subordinata risultano indipendenti dalla scelta del riferimento fisico* R.

§ 2. - CONNESSIONE SPAZIALE PRINCIPALE E SUO SIGNIFICATO CINEMATICO.

5. - *Connessione spaziale principale.*

Un riferimento fisico R determina in M, stante (1.2), una struttura quasi prodotto

$$T_x M = \Theta_x \oplus \Sigma_x \tag{5.1}$$

individuata in ogni punto $x \in M$ dal sottospazio Θ_x generato da γ e dalla piattaforma spaziale Σ_x. A tale struttura rimane associato il *proiettore spaziale*

$$\mathfrak{P}_\Sigma : \chi(M) \to \Sigma(M)$$

definito ponendo, per ogni $X \in \chi(M)$,

$$\mathfrak{P}_\Sigma(X) = X - \langle \tau, X \rangle \gamma .$$

Il proiettore spaziale $\mathfrak{P}_\Sigma$, essendo un operatore $\mathfrak{F}(M)$-lineare, consente di dedurre da (4.2) una derivazione covariante in Kern τ data da

$$D : X \in \chi(M) \to (D_X = \mathfrak{P}_\Sigma(\nabla_X) : u \in \Sigma(M) \to D_X u \in \Sigma(M)) . \tag{5.2}$$

Ne segue che l'azione di detto proiettore si può estendere in maniera naturale alla connessione fondamentale ω, definendo *proiezione spaziale* di ω in R la connessione spaziale $\tilde{\omega}_R$ determinata (n. 2) da (5.2).

DEFINIZIONE VI. *Dicesi connessione spaziale principale in* R, *nel modello matematico* (M, ω) *di spazio-tempo, la proiezione spaziale* $\tilde{\omega}_R$ *di* ω *in* R.

OSSERVAZIONE II. *Se la* ω *è riducibile spazialmente in* R, *la* $\tilde{\omega}_R$ *coincide con la connessione spaziale subordinata da* ω *in* R.

In tal caso infatti risultano coincidenti, stante (4.7), le corrispondenti derivazioni covarianti in Kern τ (5.2) e (4.10).

Le considerazioni geometriche su esposte mostrano come l'operatore di proiezione spaziale relativo ad un riferimento fisico R consenta di derivare in maniera naturale dalla connessione fondamentale ω la connessione spaziale principale $\tilde{\omega}_R$, il che suggerisce di utilizzare proprio la $\tilde{\omega}_R$ ai fini della formulazione differenziale relativa ad R di una teoria fisica in (M, ω).

Ciò infatti non introduce alcuna struttura geometrica estranea al modello (M, ω) ed anzi implica, stante l'osservazione II, nel caso particolare di una connessione fondamentale ω riducibile spazialmente in R, la diretta utilizzazione, com'è del tutto naturale in tal caso, della connessione fondamentale medesima.

6. - *Significato cinematico della connessione spaziale principale.*

PROPOSIZIONE VIII. *Il trasporto parallelo in* Kern τ *associato alla connessione spaziale principale* $\tilde{\omega}_R$ *coincide con il trasporto generalizzato di Fermi.*

Basta infatti osservare che, essendo il trasporto generalizzato di Fermi definito dalle equazioni

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_\Sigma(\nabla_X u) = 0 \\ X\langle \tau, u \rangle = 0 , \end{cases}$$

la (5.2) è, come ho mostrato in [5], la derivazione covariante in Kern τ associata a detto trasporto.

La proposizione VIII testè provata consente di applicare alla $\tilde{\omega}_R$ tutte le considerazioni da me svolte in [5] a proposito del trasporto generalizzato di Fermi. In particolare:

OSSERVAZIONE III. *La connessione spaziale principale* $\tilde{\omega}_R$ *definisce un*

trasporto dei triedri di R *caratterizzato localmente dall'assenza di rotazione.*

La detta assenza locale di rotazione, che va intesa nel senso precisato in [5], fornisce il significato cinematico della connessione spaziale principale $\tilde{\omega}_R$, che al n. 5 era stata introdotta per via puramente geometrica.

OSSERVAZIONE IV. *La restrizione* $D/\Sigma(M)$ *della derivazione covariante in* Kern τ *associata a* $\tilde{\omega}_R$ *coincide, nel modello relativistico di spazio-tempo, con la derivazione covariante trasversa di C. Cattaneo e A. L. Zelmanov* [7].

Ciò segue dalla proposizione VIII, stante un analogo risultato provato in [5] a proposito della derivazione covariante in Kern τ associata al trasporto generalizzato di Fermi.

7. - *Studio della 1-forma caratterizzante la connessione spaziale principale.*

Sia

$$E = \{(e_\alpha, \lambda\gamma)_{x\in M} : (e_\alpha) \in \tilde{P}, \lambda \in \mathcal{R}\}$$

il fibrato principale dei riferimenti lineari di M adattati alla struttura (5.1) — costituente una riduzione del gruppo di Lie $GL(4, \mathcal{R})$ al sottogruppo $H = \tilde{G} \times \mathcal{R}$, la cui algebra di Lie è $h = \tilde{g} \times \mathcal{R}$ — e sia

$$\pi : (e_\alpha, \lambda\gamma) \in E \to (e_\alpha) \in \tilde{P}$$
$$\pi : H = \tilde{G} \times \mathcal{R} \to \tilde{G}$$
$$\pi : h = \tilde{g} \times \mathcal{R} \to \tilde{g}$$

la *proiezione canonica* di E in $\tilde{P}$.

Da noti risultati di teoria delle connessioni [8], si deduce che la restrizione ad E della h-componente di ω,

$$h\omega/E : TE \to h$$

[7] Cfr. [9], [10].
[8] Cfr. [15], p. 83 e p. 79.

è una connessione in E e la proiezione canonica π la trasforma in una (ed una sola) connessione spaziale la cui 1-forma $\tilde{\omega}$ è definita dalla relazione

$$\pi^*(\tilde{\omega}) = \pi \circ h\omega/\mathrm{E}\,.$$

Nella generica sezione locale di $\tilde{\mathrm{P}}$

$$\tilde{s} = \pi \circ s : \mathrm{U} \to \mathrm{E} \to \tilde{\mathrm{P}}\,,$$

la 1-forma $\tilde{\omega}$ così definita ha l'immagine reciproca

$$\begin{aligned}\tilde{s}^*(\tilde{\omega}) &= \pi^*(\tilde{\omega}) \circ \mathrm{T}s \\ &= \pi \circ s^*(h\omega/\mathrm{E})\,,\end{aligned}$$

da cui, posto nella sezione s di E

$$s^*(\omega) = (\omega_j^i)\,,$$

segue

$$s^*(h\omega/\mathrm{E}) = hs^*(\omega) = ((\omega_\beta^\alpha),\ \omega_o^o)$$

e quindi

$$\tilde{s}^*(\tilde{\omega}) = (\omega_\beta^\alpha)\,. \tag{6.1}$$

D'altra parte da (3.4) e (5.2) discende che le 1-forme locali (6.1), tratte dalla matrice (4.1), sono quelle che caratterizzano la connessione spaziale principale relativa ad R. Resta così provato che:

PROPOSIZIONE IX. *La connessione spaziale principale relativa ad* R *è caratterizzata dalla* 1*-forma* $\tilde{\omega}_\mathrm{R}$ *definita dalla relazione*

$$\pi^*(\tilde{\omega}_\mathrm{R}) = \pi \circ h\omega/\mathrm{E}\,.$$

Dalle proposizioni IV e IX e dall'osservazione II segue infine:

OSSERVAZIONE V. *La connessione lineare* $h\omega/\mathrm{E}$, *che nel modello relativistico di spazio-tempo coincide con la connessione relativa canonicamente associata ad* ω *di I. Cattaneo Gasparini, è riducibile spazialmente in* R *e la connessione spaziale da essa subordinata coincide con la* $\tilde{\omega}_\mathrm{R}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] TRAUTMAN A., Usp. fiz. Nauk, **89**, p. 3 (1966).
[2] TRAUTMAN A., « Lectures on General Relativity », in *Brandeis Summer Institute*, p. 103, Prentice-Hall (1965).
[3] FRIEDMAN M., « Relativity principles, absolute objects and symmetry groups », in *Space, Time and Geometry*, p. 296, Reidel Publishing (1973).
[4] CATTANEO C., « Introduzione alla teoria eisteniana della gravitazione », Veschi Roma (1961).
[5] GRASSINI R., Rend. Acc. Naz. dei Lincei (1974).
[6] GRASSINI R., Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli, **38**, p. 188 (1971).
[7] GRASSINI R., Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli, **40**, p. 152 (1973).
[8] GRASSINI R., Ric. di Mat., Napoli, **23**, p. 171 (1974).
[9] CATTANEO C., Ann. di Mat., **48**, p. 361 (1959).
[10] ZEMALOV A. L., Dokl. Akad. Nauk SSSR, **107**, p. 815 (1956).
[11] CATTANEO GASPARINI I., Compets Rendus Ac. Sc., **256**, p. 2089 (1963).
[12] CATTANEO C., Il Nuovo Cimento, **10**, p. 318 (1958).
[13] CATTANEO C., Rend. di Mat., Roma, **21**, p. 373 (1962).
[14] CATTANEO C., Comptes Rendus Acc. Sc., **256**, p. 3974 (1963).
[15] KOBAYASHI S. - NOMIZU K., « Foundation of differential geometry », **1**, Interscience publishers (1963).
[16] TRAUTMAN A., Rep. Math. Phis., **1**, p. 29 (1970).

Studio mediante analisi termica differenziale della devetrificazione di vetri del sistema $CaO-Al_2O_3-SiO_2$ *

Nota di ALBERTO BURI e ALBERTO MAROTTA
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza dell'1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Nell'ambito di una ricerca sistematica rivolta ad ottenere vetroceramici caratterizzati da bassi valori del coefficiente di dilatazione termica e da microstrutture tipiche di prodotti ad alta resistenza meccanica, si è proseguito lo studio di vetri sintetici del sistema $CaO-Al_2O_3-SiO_2$. L'esame dei campioni approntati è stato condotto rilevando le temperature di transizione vetrosa (T_g) e di velocità massima di cristallizzazione (T_M).

I risultati conseguiti hanno consentito di porre in luce la dipendenza delle suddette temperature dalla composizione chimica, dalla granulometria e dalla velocità di riscaldamento dei campioni.

Il calcolo delle energie di attivazione per il processo di devetrificazione dei vari campioni, ha poi permesso la formulazione di alcune ipotesi sul meccanismo di cristallizzazione.

ABSTRACT. — A study of $CaO-Al_2O_3-SiO_2$ glasses suitable for production of glass-ceramics with low thermal expansion and microstructures similar to that of high-strenght materials, has been carried out.

The specimens have been analyzed by DTA, detecting the glass transition and maximum crystallization rate temperatures, T_g and T_m respectively.

The infiuence of chemical composition, granulometry and heating rate on the values of these temperatures has been pointed out. Hypotheses on devetrification mechanism have also been formulated on the basis of calculated devetrification activation energies.

INTRODUZIONE

I materiali ceramici che si ottengono, già da diversi anni, mediante cristallizzazione controllata di vetri, hanno qualità superiori a quelle delle ceramiche tradizionali; in particolare hanno basso coefficiente di dilatazione termica, elevata durezza superficiale, notevole resistenza meccanica.

* Lavoro eseguito con il contributo finanziario del C.N.R.

In recenti pubblicazioni (1, 2) si è dato conto di un'indagine preliminare sul comportamento di una serie di vetri del sistema $CaO-Al_2O_3-SiO_2$ il cui termine iniziale corrisponde alla composizione della *gehlenite*, mentre quelli successivi sono ottenuti per progressiva sostituzione di atomi di calcio e silicio con atomi di alluminio.

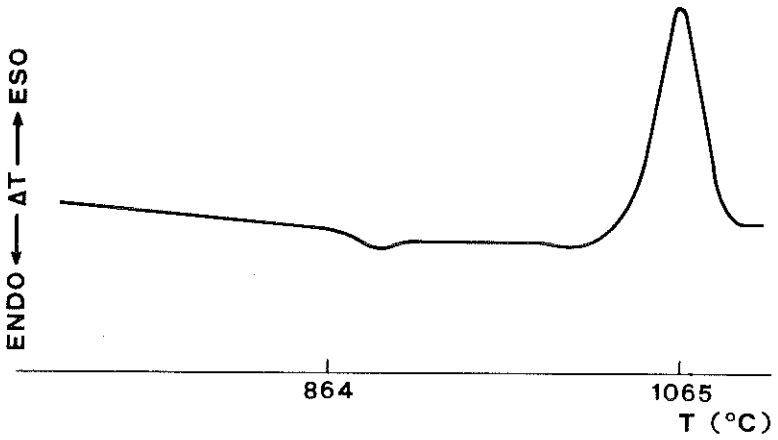


FIG. 1. - Analisi termica differenziale del vetro 0,3.

I risultati conseguiti sono apparsi promettenti perché hanno lasciato intravedere la possibilità di produrre vetro-ceramici a coefficiente di dilatazione molto piccolo od anche negativo, variabile in modo continuo con la composizione chimica del vetro.

Poiché le informazioni circa i trattamenti termici cui sottoporre i vetri di partenza, per conferire ai prodotti ceramizzati le proprietà desiderate possono essere ricavate mediante analisi termica differenziale (3), si è ritenuto opportuno adottare tale tecnica per uno studio sistematico del processo di devetrificazione dei vetri in esame.

Sui risultati ottenuti e sulle relazioni intercorrenti fra i valori sperimentali e le ipotesi formulate sulla struttura dei vetri si riferisce brevemente nella presente Nota.

PARTE SPERIMENTALE

I campioni di vetro, preparati secondo le modalità descritte in precedenti lavori (1, 2), hanno composizione chimica corrispondente alla formula generale $(2-x)\,CaO \cdot (1+x)\,Al_2O_3 \cdot (1-x)\,SiO_2$ per valori di x pari a 0; 0,1; ... 0,5. In quel che segue i vari campioni verranno indicati con il corrispondente valore della x.

Tutti i campioni sono stati macinati e setacciati raccogliendo le seguenti frazioni:

a) polveri grosse — frazione compresa tra 430 μ e 250 μ;

b) polveri fini — frazione compresa tra 92 μ e 55 μ.

L'analisi termica differenziale (DTA) è stata eseguita con l'apparecchio Du Pont 900 su campioni, di 40 mg, di ciascuno dei vetri preparati, sia in polvere grossa che in polvere fine, con velocità di riscaldamento di 7; 10; 15; 20; 30°C/min. Ciascun termogramma mostra un effetto endotermico dovuto a transizione vetrosa ed un effetto esotermico dovuto a cristallizzazione. In fig. 1 è riportato il termogramma relativo al vetro 0,3 che ben rappresenta il comportamento dell'intera serie.

Le temperature di fusione dei prodotti ceramizzati sono state misurate su campioni di polveri fini mediante lo stesso apparecchio per la DTA munito di accessorio per temperature fino a 1600° C.

Discussione dei risultati

a) *Transizione vetrosa*

La conoscenza della temperatura di transizione vetrosa T_g ha una duplice importanza: permette da un lato di individuare il campo di lavorabilità del vetro e dall'altro dà un'idea della temperatura di massima velocità di nucleazione, che da alcuni autori (4) è posta circa 50°C al di sopra di T_g.

Dalla tabella I in cui sono riportate le temperature di transizione vetrosa T_g determinate sia su campioni in polvere fine che in polvere grossa si può dedurre quanto segue:

Tabella I

T_g (° C) e T_M (° C) *in polvere fine* (F) *e grossa* (G).

Vetri	T_g		T_M	
	F	G	F	G
0	842	845	1014	1050
1	848	848	1040	1064
2	858	858	1034	1068
3	864	864	1043	1065
4	870	874	1035	1061
5	875	877	1014	1042

1) La granulometria delle polveri non ha alcuna influenza sul valore di T_g. La transizione vetrosa è infatti un fenomeno che interessa l'intera massa del vetro e non un fenomeno superficiale.

2) I valori di T_g aumentano nella serie al crescere del tenore di alluminio. L'alluminio infatti pur sostituendo un atomo di silicio (formatore) ed uno di calcio (modificatore) funge (1) interamente da formatore, in coordinazione 4, sottraendo per la neutralità della carica nel reticolo altri atomi di calcio alla loro funzione di modificatori secondo lo schema:

$$(Al^{+3})_2\,(O^{-2})_3 + Ca^{+2}\,O^{-2} \rightarrow 2\left[Al^{+3}\left(\frac{O^{-2}}{2}\right)_4^{-4}\left(\frac{Ca^{2+}}{2}\right)^{+}\right]$$

Si ha pertanto un aumento della compattezza della struttura al crescere del tenore di alluminio con conseguente aumento della temperatura di transizione vetrosa T_g.

b) *Cristallizzazione*

L'assenza di qualsiasi agente nucleante rende difficile una cristallizzazione di massa per cui il processo inizia dalla superfiicie delle polveri che rappresenta la zona energeticamente meglio predisposta alla nucleazione ed alla crescita dei cristalli. L'influenza della granulometria delle polveri è posta in luce dalla tabella I dove sono riportate le temperature T_M dei picchi esotermici di cristallizzazione determinati sia su campioni in polvere fine che su campioni in polvere grossa. Si può rilevare che tutti i vetri in polvere fine cristallizzano ad una temperatura di almeno 20°C inferiore a quella dei vetri in polvere grossa.

La tabella II mostra, invece l'influenza della velocità di riscaldamento sulle temperature T_M.

TABELLA II

T_M (° C) *alle diverse velocità di riscaldamento.*

°C/min \ Vetri	0	1	2	3	4	5
7	1043	1053	1058	1056	1053	1036
10	1050	1064	1068	1065	1061	1042
15	1064	1075	1074	1074	1072	1051
20	1071	1081	1081	1081	1077	1058
30	1084	1098	1093	1093	1089	1068

Una relazione fra temperatura del picco esotermico, energia di attivazione del processo di cristallizzazione e velocità di riscaldamento può essere ricavata come segue. Se si ammette che la cristallizzazione segua una legge del I ordine, la velocità di cristallizzazione può essere espressa dalla equazione:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_T = k(1 - y) \qquad (1)$$

dove y rappresenta la frazione di materiale cristallizzato alla temperatura T e k la costante di velocità di reazione legata alla temperatura da un'equazione tipo Arrhenius,

$$k = Ae^{-\frac{E}{RT}} \qquad (2)$$

Kissinger (5) ha ipotizzato che alla temperatura T_M la velocità di reazione è massima per cui la sua derivata rispetto al tempo si annulla. Detta v la velocità di riscaldamento $\frac{dT}{dt}$, che è una costante strumentale ,dalle (1) e (2) si ottiene pertanto:

$$\frac{d\left(\ln \frac{v}{T_M^2}\right)}{d\left(\frac{1}{T_M}\right)} = -\frac{E}{R}$$

in cui E rappresenta la energia di attivazione del processo di cristallizzazione. Il diagramma di $\ln \frac{v}{T_M^2}$ in funzione di $\frac{1}{T_M}$ è dunque una retta dal cui coefficiente angolare è possibile calcolare E.

In tabella III sono riportati i valori dell'energia di attivazione. E, per i vari campioni di vetro, determinati nel modo sopra descritto.

TABELLA III

Energia di attivazione E (kcal/mole) *del processo di devetrificazione e temperatura di fusione* T_F (°C) *per i diversi campioni.*

Vetri	0	1	2	3	4	5
E	118	115	131	138	140	151
T_F	1562	1510	1525	1570	1468	1516

Si può notare un progressivo aumento dell'energia di attivazione al crescere del tenore di alluminio; ciò è dovuto al fatto che le fasi cristalline originatesi a seguito del trattamento termico hanno composizione chimica sempre più lontana da quella del vetro madre di partenza, per cui la loro formazione richiede fenomeni diffusivi sempre più marcati.

c) *Temperature di fusione*

In tabella III sono riportate le temperature di fusione dei prodotti ceramizzati. Non sembra individuabile alcuna relazione tra tali temperature e la composizione dei vetri. È interessante notare però che il campione 0,3 indicato dagli Autori in un recente lavoro (2) come quello dotato di una microstruttura tale da lasciar prevedere una notevole resistenza meccanica, ha la più alta temperatura di fusione nell'ambito della serie.

Conclusioni

L'insieme dei risultati sperimentali sopra riportati permette di concludere che la progressiva sostituzione di Al al posto di Ca ed Si, nei vetri da noi esaminati, determina una maggiore compattezza delle strutture, alla quale si può attribuire sia l'aumento della temperatura di transizione vetrosa, sia l'aumento di energia di attivazione per la cristallizzazione; essa dà conto anche della già sperimentata diminuzione del coefficiente di dilatazione termica.

Ringraziamenti

Si ringrazia la Sig.na Maria Palumbo per la preziosa opera di collaborazione tecnica prestata nell'effettuazione del presente lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] Buri A., Marotta A., Saiello S., *Dilatazione termica di vetri del sistema CaO-Al_2O_3-SiO_2*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., **40**, p. 314 (1973).

[2] Buri A., Marotta A., Saiello S., *Microstructure and properties in glass-ceramics of CaO-Al_2O_3-SiO_2 system*, Da presentare al 2° Simposio Internazionale della Ceramica. Bologna, Ottobre 1974.

[3] Robredo J., *L'analyse thermique différentielle en Verrerie*, Ed. Commission Internationale du Verre, Charleroi, 1967.

[4] Mc Millan P. W., *Glass-ceramics*, Academic Press, London and New York, 1964.

[5] Kissinger H. E., *Variation of peak temperature with heating rate in differential thermal analysis*. J. Res. Nat. Bur. Stand., **57**, p. 217 (1956).

Caratterizzazione della belite in clinkers sintetici

Nota di BERNARDO MARCHESE e GIUSEPPE FRIGIONE
presentata dal socio ordinario RICCARDO SERSALE

(Adunanza dell'1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Gli Autori, nell'ambito di una ricerca sistematica sui costituenti principali del clinker, puntualizzano le caratteristiche morfologiche delle soluzioni solide di silicato bicalcico (beliti).

Dopo breve rassegna bibliografica, riportano i risultati delle osservazioni in microscopia ottica, per riflessione, di alcuni campioni di clinkers sintetici evidenziando i diversi caratteri morfologici delle beliti, premettendo alcune considerazioni anche sulla base delle risultanze di altre tecniche diagnostiche.

SUMMARY. — Within a sistematic study on the principal constituents of the clinker, the morphological characteristics of the solid solutions of bicalcium silicate (belites) by the Authors are evidenced.

After a brief bibliographic review the results of the observations by the reflexion optical microscopy on some specimens of synthetic clinkers are reported. It is emphasized the different morphological aspects of the belitic phase, and some hypotheses on their variations are advanced, also regarding other diagnostic techniques.

INTRODUZIONE.

È ben noto che il silicato bicalcico presente nel clinker esplica, insieme con il silicato tricalcico, un ruolo importante ai fini dell'attività idraulica, ed uno decisivo sul corso della cottura della miscela cruda, a seguito della quale esso origina il silicato tricalcico. Si comprende quindi la necessità di chiarirne la funzione e le successive trasformazioni, nonché gli effetti specifici del processo di tempra. Un simile studio si rivela estremamente complesso, sia per la composizione del sistema in cui risultano contemporaneamente presenti numerose fasi, spesso in soluzione solida, sia per l'esistenza della fase di contatto, liquida alla temperatura di cottura.

Recentemente uno di noi (G.F.) ha mostrato come l'attività idraulica del clinker, anche alle brevi stagionature, sia legata tra l'altro

anche alle forme polimorfe che il silicato bicalcico o meglio le sue soluzioni solide, possono manifestare [1]. Infatti il silicato bicalcico si presenta, in dipendenza della temperatura di cottura, sotto diverse strutture cristalline, alcune delle quali come la α, α' e la β risultano presenti come fasi metastabili a temperatura ordinaria. La stabilizzazione è promossa, tra l'altro, dalla durata del trattamento termico, dall'effetto della tempra e dalla presenza di elementi estranei.

I più recenti studi delle modificazioni polimorfe hanno permesso di delineare la successione indicata nella fig. 1 [2]. Tutte le forme inoltre sono ottenute a seguito di un processo « imperfetto » di cristallizzazione [3].

Lo studio di tali forme cristalline è stato abbondantemente espletato con l'analisi diffrattometrica, la quale però non riesce ad individuare, nel clinker, l'ammontare delle diverse forme. Si è voluto perciò far ricorso ad altre tecniche diagnostiche quali, ad es., la spettrometria I.R., la valutazione della microdurezza ed infine la microscopia. In particolare è stata prescelta la microscopia ottica per riflessione, perché non solo è l'unica atta a caratterizzare grano per grano la belite, ma si presta altresì ad uno studio « topografico » di tale fase nell'interno della massa solida.

Per maggiore completezza e a causa del numero elevato di pubblicazioni esistenti in letteratura, nelle quali sono riportate osservazioni in microscopia ottica per riflessione, se ne premette una breve rassegna.

Tavasci [4, 5], riportando le osservazioni eseguite per riflessione su clinkers di Portland industriali, distinse tre tipi di belite. La belite I, nei granuli di dimensioni medie, la cui superficie presenta, secondo due direzioni, strie larghe, poco numerose e talvolta aghiformi. La belite II, nei grani di più grosse dimensioni, con fitte striature, una delle quali molto fine. La belite III, nei grani di piccole dimensioni, caratterizzata da inclusioni che disegnano una venatura; essa può esistere anche nelle parti più esterne dei grani più grossi. La belite I sarebbe costituita dalla forma α e da una forma instabile intermedia, mentre la II e la III sarebbero costituite dalla forma β, con le inclusioni distribuite in modo diverso.

Insley [6] e poi Insley e Frechette [7] ha individuato la forma β in quei grani tondeggianti che presentano bande di geminazione polisintetiche. Ritengono che tali bande siano dovute alla transizione da una forma polimorfa in un'altra e avanzano l'ipotesi che dette forme derivino da una transizione dalla forma α. Hanno suddiviso poi la forma β della belite in tre tipi. Al tipo I hanno attribuito i grani che mostrano almeno due e qualche volta tre gruppi di striature parallele compenetrate; queste sono dovute alla transizione a circa

1440°C. Un solo grano invece caratterizza il tipo II, ottenibile per riscaldamento a temperature inferiori a 1420°C. Il tipo III infine si presenta sotto forma di grani irregolari non geminati, ma con venature, oppure con fessurazioni, e sarebbe dovuto ad un raffreddamento lento fino a 1275°C e ad una tempra successiva.

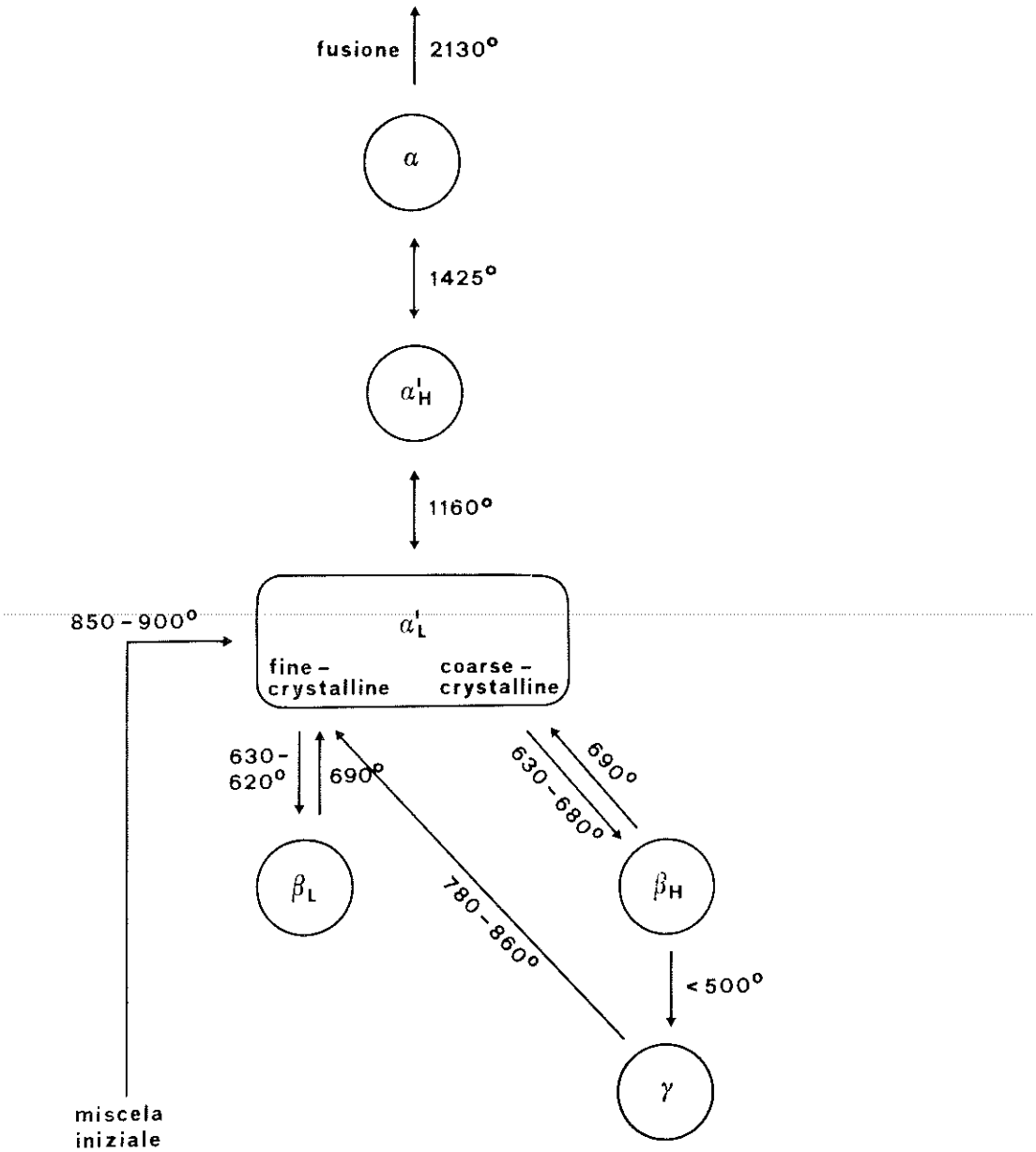


FIG. 1. - Campi di stabilità e transizioni polimorfe del silicato bicalcico puro (2).

Nell'atlante: « Mikroskopie des Zementklinker » [8] sono descritte, con qualche commento, le diverse forme. Una belite con striature parallele mediante le quali si manifestano i geminati polisintetici; talvolta la striatura è confinata alla periferia dei grani, mentre la zona centrale si presenta liscia. Striature invece molto larghe sono riportate per i grani di belite di un clinker ricco di alcali. Viene riportata ancora una belite con riflessi diffusi ed infine, forme tondeggianti lisce, cioè senza figure di attacco, costituite da una fase primaria da cui originerebbe quella striata.

TROJER [9] ha individuato nella massa interstiziale dei cristalli geminati della forma α' ed in uno stesso cristallo, la presenza della forma β.

TERRIER e HORNAIN [10] hanno descritto diversi aspetti della forma β: grani cristallini a forma tondeggiante od anche poligonale con superfici liscie o striate. A volte la striatura appare delineata da costituenti secondari che si separano durante le trasformazioni. A commento di una micrografia si afferma che la forma α' costituisca un grano di piccole dimensioni, con una sola serie di striature; anche una sola serie di lamelle, ma osservata in luce trasmessa, è stata rilevata in un grano costituito dalla fase γ.

REGOURD *et al.* [3], riconoscendo via analisi diffrattometrica in una belite contenente Al_2O_3 la presenza delle strutture cristalline α' e β, stabilizzate a temperature ordinaria dalla tempra, hanno affermato che l'aspetto striato è caratteristico della forma β temprata. Ciò è stato confermato recentemente [11], precisando che la forma α' può andare a costituire la frangia esterna di alcuni grani di alite.

METZGER [12], sostenendo che la forma α' non può distinguersi dalla β sulle superfici lucide ha però mostrato, mediante osservazione in luce trasmessa, alcuni relitti della forma α' inclusi nei cristalli alite.

YAMAGUCHI e TAKAGI [13] hanno individuato, mediante esame per riflessione, grani di tipo I con lamelle in due direzioni, e grani di tipo II con una sola serie di strie, nonché grani del tipo III con l'interno a chiazze. Per la interpretazione hanno rimandato al lavoro di TROJER [14].

ONO, KAWAMURA e SODA [15] tenendo presente la classificazione fatta da INSLEY [6], hanno suddiviso la belite in due tipi in base ad osservazioni condotte per trasparenza. Il tipo I vien fatto risalire ad un riscaldamento fin nel campo di stabilità della fase α e conserva perciò nei suoi grani, a forma tondeggiante, una complessa struttura lamellare, attribuibile alla inversione $\alpha \rightarrow \alpha'$. Presenta inoltre una zona vetrosa che può essere α non trasformata, nonché una struttura molto sottile anch'essa lamellare, ricordo della inversione $\alpha' \rightarrow \beta$. Il tipo II vien ricondotto ad un riscaldamento effettuato a tempera-

tura più bassa nel campo di stabilità della fase α', e perciò può conservare soltanto il ricordo della transizione $\alpha' \rightarrow \beta$. I grani sono irregolari con striature parallele, cioè geminati polisintetici.

Misure di birifrangenza su sezioni sottili hanno permesso a CROMÝ [16] di identificare tre tipi di beliti nei clinker. Il tipo I riconosciuto come geminato polisintetico; il tipo II con tre sistemi di lamelle larghe, mutuamente intersecantisi e contenenti numerose inclusioni. Entrambi i due tipi corrispondono a $\beta - C_2S$ e si differenziano da un tipo III che compare nei clinkers industriali. Il tipo III è caratterizzato al microscopio da una lamellazione complicata e sottile, che scompare per riscaldamento a 1400°C e non riappare per raffreddamento; per un processo di segregazione può separare piccole inclusioni [17]. Il tipo III può derivare da una inversione incompleta di α', per cui ne conserva una certa aliquota accanto a $\beta - C_2S$.

PARTE SPERIMENTALE.

I campioni esaminati sono stati preparati e caratterizzati secondo le modalità descritte in un precedente lavoro [1].

La composizione chimica della miscela cruda è riportata nella tabella seguente:

Ossidi	% in peso
SiO_2	14,60
Fe_2O_3	2,56
Al_2O_3	2,77
CaO	42,81
MgO	1,00
perdita al fuoco	35,00
M. S.	2,74
M. F.	1,08
CaO standard	93,4

Questa è stata tenuta a 1500°C per ½ ora, 1 ora e 4 ore. La CaO libera determinata secondo il metodo Franke sui tre campioni è risultata, rispettivamente, 5,45, 3,73 e 1,34 %.

Le misure di microdurezza sono state ottenute mediante un « Durimet » Leitz, con carichi di 15 g e di 25 g [18].

Gli spettri I.R. sono stati rilevati su pasticche di campioni in KBr da 0,5 mm di spessore, mediante un apparecchio Perkin-Elmer mod. 457, nel campo di lunghezza d'onda 1200 ÷ 400 cm^{-1}.

Risultati e discussione.

La microdurezza Vickers è stata rilevata sui grani di belite appena visibili sulle superfici non attaccate dei clinker. I valori dedotti dalla lettura delle diagonali delle impronte, alcune delle quali sono riportate nelle immagini della Tav. I si aggirano intorno a 800 kg/mm^2 per i campione cotto per ½ ora, per diminuire leggermente a circa 725 Kg/mm^2 per gli altri due. È da notare che tali valori si mostrano sensibilmente più elevati di quelli riportati per i cristalli di alite [19]. Questi valori forniscono una caratterizzazione supplementare della belite, la cui utilità può essere rivolta ai fini tecnologici (macinabilità). Potenzialmente il valore della microdurezza ha il vantaggio di caratterizzare il singolo grano, il che purtroppo non si verifica per i nostri preparati. Ogni singolo grano, come sarà messo in evidenza in seguito, risulta costituito da una miscela di fasi cristalline.

L'analisi eseguita mediante gli spettri I.R., riportati in Fig. 2, ha rivelato:

a) una banda a 800 ÷ 900 cm^{-1} molto allargata per tutti e tre i campioni;

b) un'altra regione di forte assorbimento intorno ai 500 cm^{-1};

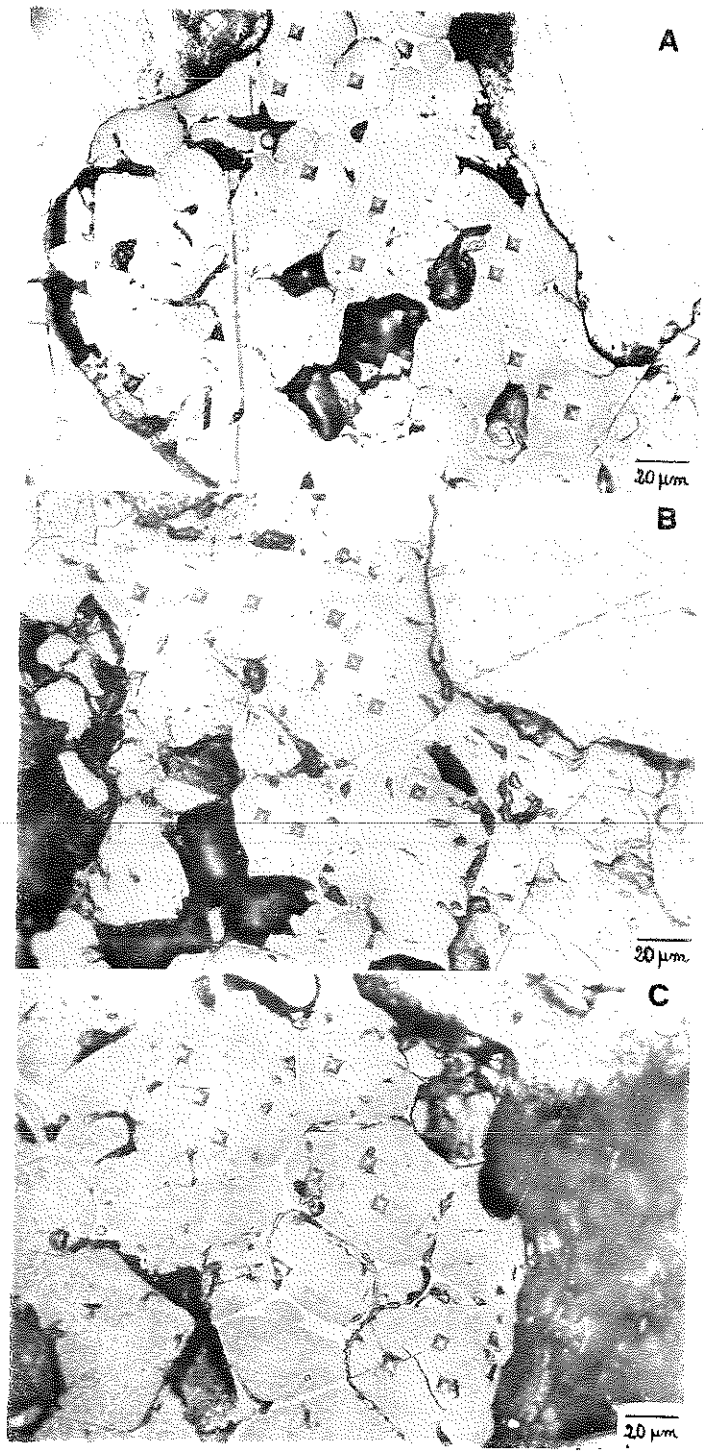
c) una ulteriore banda intorno ai 450 cm^{-1};

d) una banda appena pronunciata ma netta intorno ai 1100 cm^{-1};

e) infine sono da segnalare « spalle » intorno a 750 cm^{-1}.

Le bande di assorbimento degli spettri sono in accordo con quelle riportate in letteratura e quindi per esse valgono le assegnazioni già tentate [20]. Anche se non si è in grado di determinare la presenza delle singole diverse forme polimorfe della belite, si può notare che la banda di assorbimento nella regione 800 ÷ 900 cm^{-1} si presenta notevolmente larga, a confronto con le bande presentate da altri campioni [21].

Ciò può addebitarsi ad un notevole quantitativo di soluto, non escluso lo stesso CaO, nelle forme polimorfe delle beliti. È da notare inoltre che dopo una permanenza di 4 hr a 1500°C, si nota sia un



TAV. I - Impronte del microdurimetro Vickers sui campioni cotti: per ½ ora (A), per 1 ora (B), per 4 ore (C).

lieve restringimento, che un discreto aumento di intensità nella regione 800 ÷ 900 cm^{-1}, variazioni che si manifestano anche per la banda a 500 cm^{-1}.

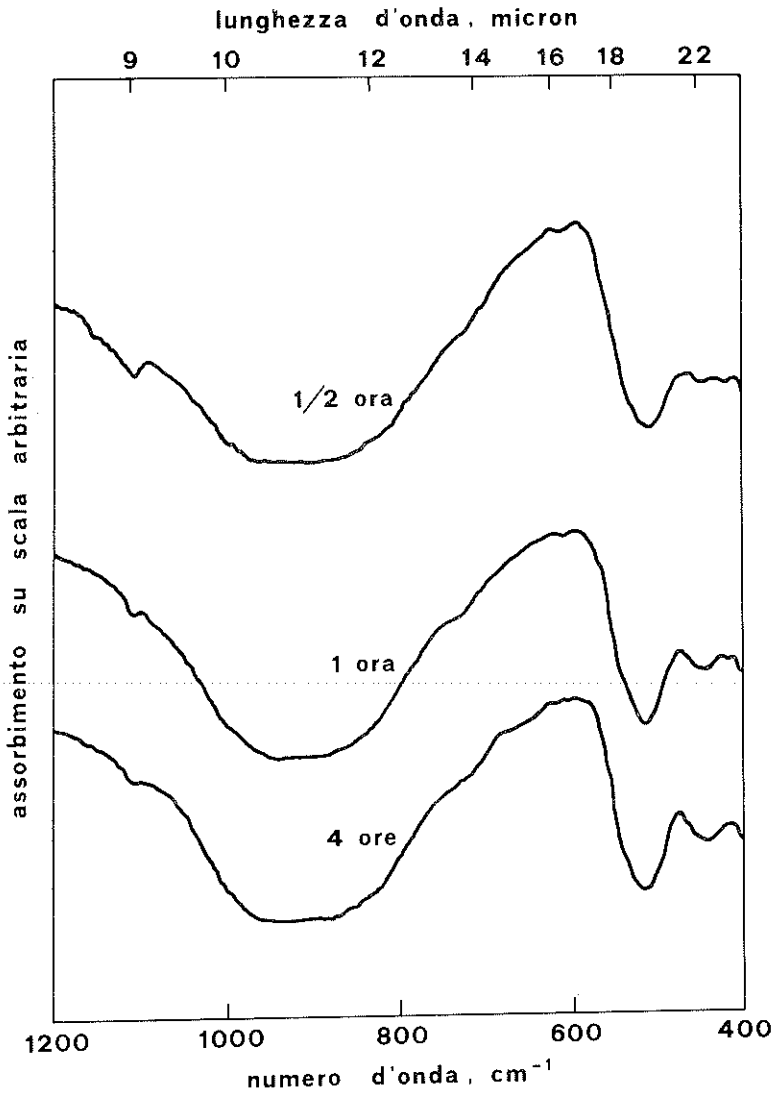
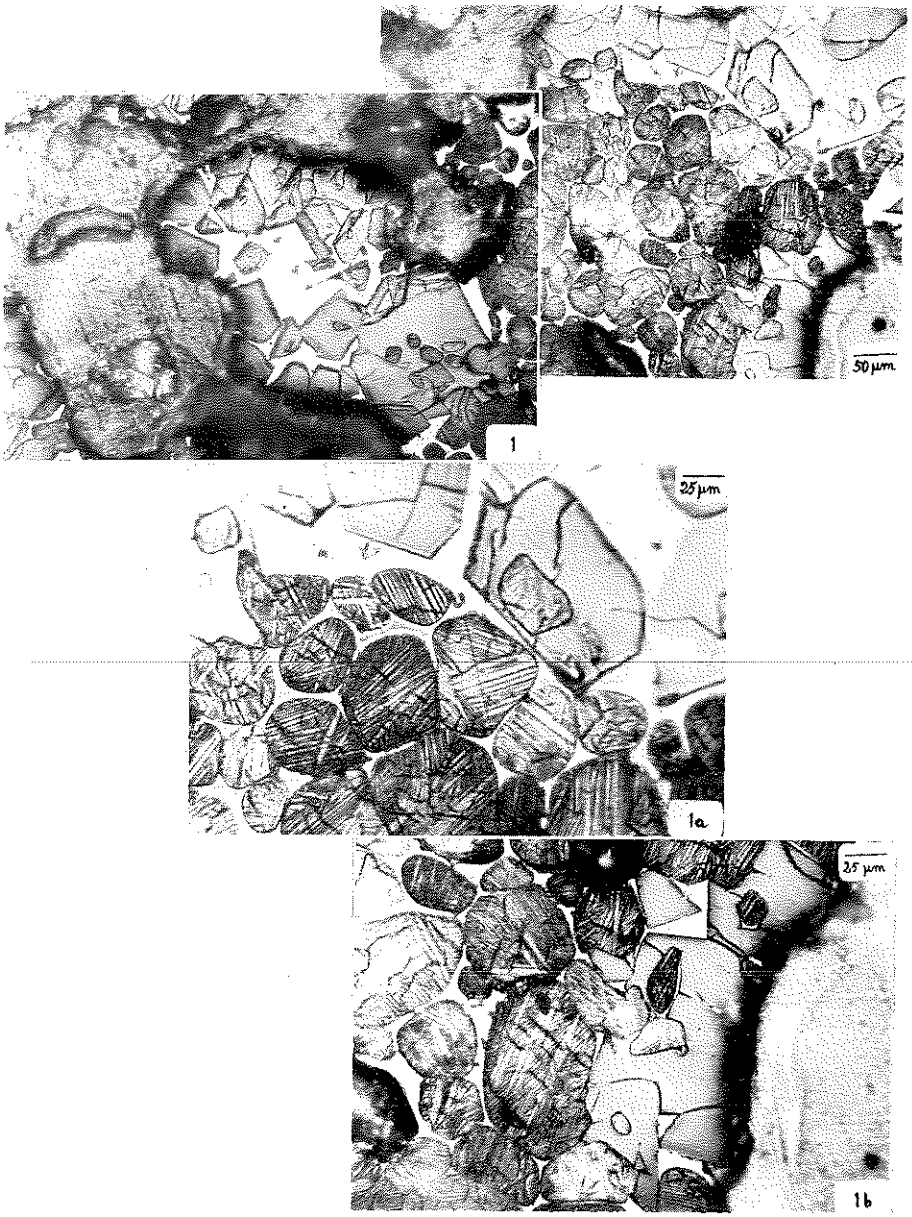


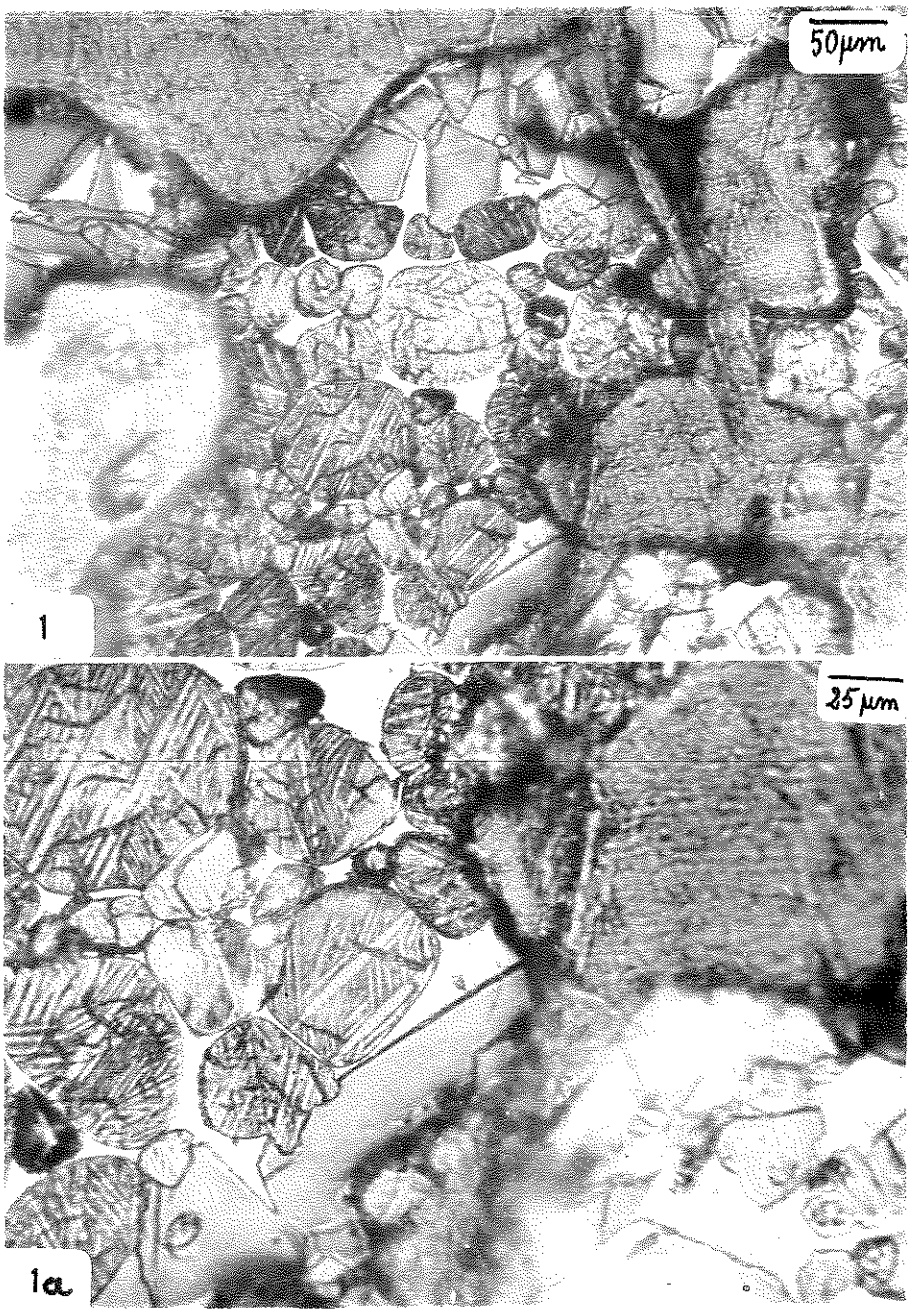
FIG. 2. - Spettri I.R. dei campioni cotti per ½ ora, 1 ora e 4 ore.

L'esame mediante microscopia ottica per riflessione delle superfici lucidate ed attaccate è stato condotto su clinker non macinato, al fine di studiare aree notevolmente estese.

Alcune delle osservazioni sui campioni, cotti per ½ ora, 1 ora e 4 ore, sono riportate nelle immagini presentate rispettivamente nelle tavole II e III, IV e V.



TAV. II - Micrografie per riflessione della superficie del campione cotto per ½ ora. Le micrografie 1*a* e 1*b* sono particolari della micrografia 1.



TAV. III - Micrografie per riflessione di un'altra zona della superficie del campione cotto per ½ ora. La micrografia 1*a* è un particolare della micrografia 1.

La micrografia 1 della Tavola II riassume gli aspetti della cosidetta struttura « a mosaico » [10] dei clinker ottenuti in forni non rotativi. Le aree belitiche infatti si ritrovano concentrate in zone preferenziali, dove il rapporto CaO/SiO_2 era inizialmente basso e non si è manifestamente alterato. Sono ben riconoscibili i cristalli di alite, caratterizzati da lati rettilinei e da strutture a zone e con dimensioni in genere notevoli, favoriti in ciò anche dalla presenza, nelle immediate vicinanze, di una notevole quantità di fase interstiziale. In alcuni cristalli di alite sono evidenti relitti a forma globulare di belite.

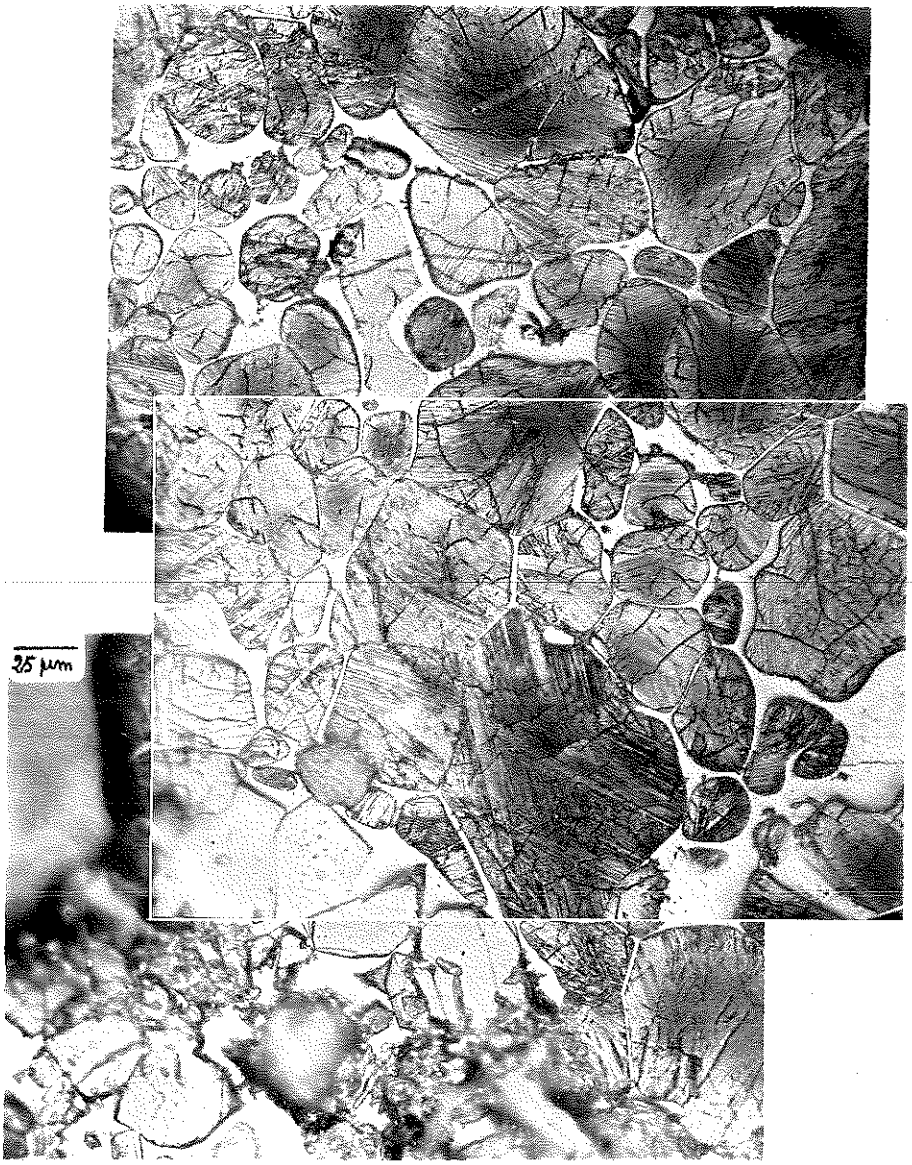
L'aspetto mostrato dalla superficie dei grani tondeggianti di belite, in accordo con quello rilevabile dalla letteratura, è quello caratteristico dei geminati polisintetici. Mentre questi sono presenti nei grani più grandi in diverse direzioni, è frequente il ritrovamento di una sola direzione nei grani più piccoli. In alcuni poi, sia di dimensione grande che piccola, è visibile la sovrapposizione di una o più serie di lamelle di forma lenticolare; a tale scopo si confrontino gli ingrandimenti riportati nelle micrografie 1b della tav. II ed 1a della tav. III. Ciascun grano infine può presentare un insieme di venature che quasi sempre giacciono di traverso sia alle striature che alle lamelle lenticolari.

La Tav. III riproduce aspetti sostanzialmente simili in un'altra zona piuttosto grande dello stesso campione. Si può notare, al centro della micrografia 1, un grano molto grande di belite con striatura appena accennata e solcato da numerose venature. Particolarmente netta, poi, appare la sovrapposizione delle lamelle lenticolari sulle altre lamelle sottostanti, come dall'ingrandimento riportato nella micrografia 1a.

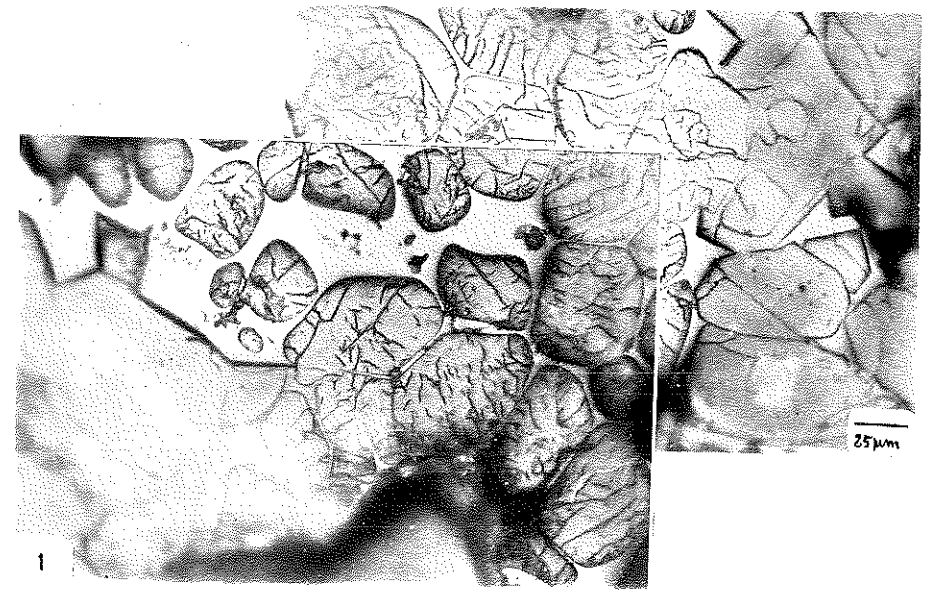
La belite rimasta racchiusa nei grossi cristalli di alite sotto forma di noduli mostra gli stessi caratteri; anche le striature si estendono in più di una direzione, micrografie 1a e 1b della tav. II. Sono ben delineati i confini tra la belite inclusa e la alite, ma non è raro trovare, come nella micrografia 1b, una sottile striscia occupata dalla fase interstiziale più riflettente. Quest'ultima poi appare localizzata preferenzialmente, e cioè in modo più abbondante, tra i grani di alite, come già accennato, oppure nelle zone di trasformazione, o anche tra i grani più piccoli di belite.

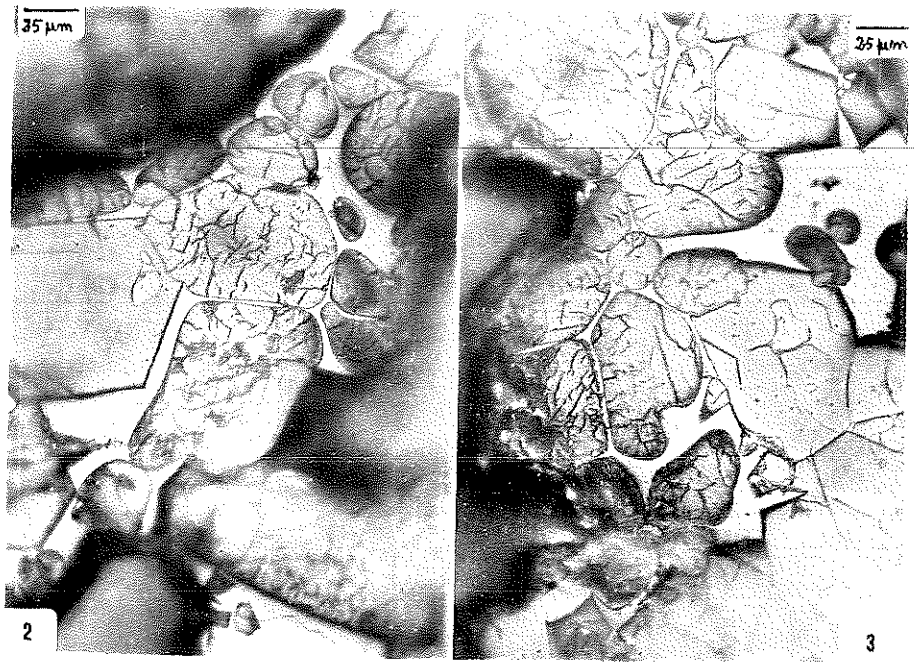
I campioni, tenuti a 1500°C sia per una che per quattro ore, non hanno mostrato variazioni morfologiche notevoli dei grani di belite, mentre si è riscontrata una maggiore percentuale di grani di grosse dimensioni sia di alite che di belite. Ciò risulta visibile, per il campione cotto per un'ora, nella Tav. IV, e, per quello cotto per quattro ore nella Tav. V. Come si può notare, le micrografie sono state raccolte in un « collage » per poter riprodurre una maggiore area di os-

servazione. Sono ben visibili tra l'altro i geminati polisintetici ed in alcuni di essi la presenza di lamelle lenticolari. È ben evidente anche per questo campione la fase interstiziale interposta più abbondantemente tra i grani più piccoli di belite e là dove iniziano i grani di alite. Del campione cotto per quattro ore sono raccolte nella Tav. V



TAV. IV - Micrografia per riflessione della superficie del campione cotto per 1 ora.





TAV. V - Micrografia per riflessione della superficie del campione cotto per 4 ore.

tre micrografie. Come si vede, i grani sia di alite che di belite raggiungono dimensioni notevoli. La striatura dei grani di belite è presente anche se non molto visibile, a causa di un attacco più blando.

Il confine alite-belite si può presentare ben delineato come nella fig. 1 oppure addirittura separato, come nelle figg. 2 e 3, da una zona molto sottile occupata dalla fase interstiziale.

I grani di belite manifestano, a seguito dell'attacco diverse caratteristiche morfologiche che ne permettono una classificazione, pur tuttavia non sufficiente a garantire per ciascuno di essi l'attribuzione alle singole forme polimorfe.

Tra le diverse classificazioni comparse in letteratura sembra più adattabile alle osservazioni qui riportate quella proposta dal TAVASCI [4, 5].

La striatura molto sottile è da attribuirsi all'effetto della transizione dalle forme stabili ad alta temperatura a quella β; essa è da ritenersi presente in tutti i grani.

La striatura a lamelle più larghe e quindi meno numerose è da attribuire a forme polimorfe che non hanno raggiunto la modificazione β; essa è presente nei grani di dimensione medio-piccola ed in alcune parti dei grani grossi. Discutibile invece è l'interpretazione delle lamelle lanceolate e le venature, messe in particolare evidenza nelle nostre osservazioni.

Per le prime si può avanzare l'ipotesi che siano dovute ad una trasformazione di tipo martensitico. Esse costituirebbero una prima generazione di lamelle, caratterizzate non solo dagli angoli acuti tra le direzioni delle lamelle adiacenti ma anche dall'aspetto appuntito delle parti terminali.

Questa ultima caratteristica può nascere quando il materiale è dotato di un certo grado di plasticità. Di conseguenza appare logico supporre che alla costituzione di tali lamelle partecipino le fasi stabili a temperature piuttosto elevate, le stesse cioè che avrebbero originato i grani del tipo I del Tavasci.

Una seconda ed una terza generazione di lamelle possono in verità originarsi, ma solo successivamente e non presentanti parti terminali appuntite. Tali lamelle infatti vanno a riempire la rimanente superficie, assumendo l'aspetto di striature molto sottili.

CONCLUSIONI.

L'insieme delle risultanze sperimentali contribuisce notevolmente alla caratterizzazione della fase belitica, così come essa si trova presente nei clinker. È stato infatti possibile dimostrare che alcune mo-

dificazioni cristalline della belite, già individuate *via* raggi X, si trovano presenti simultaneamente e non singolarmente in ciascun grano.

L'analisi condotta mediante la microscopia ottica per riflessione, pur se approfondita, non è perciò in grado di riconoscere le diverse forme ben distinte l'una dall'altra. Ciò è attribuibile al fatto che a causa della tempra la sequenza delle transizioni $\alpha \rightarrow \alpha' \rightarrow \beta$ non riesce a completarsi, anzi, avvenendo tutta in fase solida, non lascia assumere ad una delle modificazioni polimorfe una configurazione ben distinta.

Si può invece dedurre che le lamelle aghiformi e di grosso spessore intersecantesi si siano generate per prime e siano costituite, così come quelle larghe, parallele, da fasi in via di trasformazione. La striatura parallela, molto sottile, generalmente interessante i geminati polisintetici, si originerebbe, a sua volta, a causa delle transizioni che avvengono a temperature più basse e cioè $\alpha' \rightarrow \beta$.

L'insieme delle venature che vanno a sovrapporsi alla microstruttura preesistente, sarebbero infine da considerarsi fratture dovute all'eccessiva velocità di raffreddamento.

Anche i valori della microdurezza, la cui utilità è notevole ai fini tecnologici, non sono sufficienti a caratterizzare le singole fasi.

Si può invece affermare che una maggiore durata della cottura sembra tradursi in una lieve diminuzione di durezza, parallelamente ad una leggera modificazione dei profili degli spettri I.R.

Gli Autori desiderano ringraziare il prof. R. Sersale per l'incoraggiamento ed il dott. A. Di Lorenzo per la sperimentazione condotta all'I.R.

Istituto di Chimica Applicata della Facoltà d'Ingegneria - Università di Napoli - Piazzale Tecchio - 80125 - Napoli.

Servizio Centrale Controlli e Ricerche della Cementir, Cementerie del Tirreno S.p.A. Napoli.

BIBLIOGRAFIA

[1] FRIGIONE G., *Effetti del tempo di cottura sulle caratteristiche del clinker.* Presentato al VI Symp. Chem. Cem. Mosca, sett. (1974).

[2] NIESEL K., *The Importance of the $\alpha_L'-\alpha_H'$ Transition in the Polymorphism of Dicalcium Silicate.* Silicates Industriels, **37**, p. 136 (1972).

[3] REGOURD M., BIGARÉ M., FOREST J., GUINIER A., *Synthesis and Crystallographic Investigation of some Belites.* Proc. V Int. Symp. Chem. Cement Tokyo, vol. I, p. 44 (1968).

[4] TAVASCI B., *Ricerche sulla costituzione del clinker di cemento Portland.* Giorn. Chim. Ind. Applicata, **16**, p. 538 (1934).

[5] TAVASCI B., *Untersuchungen über die Konstitution des Portlandzementklinkers.* Tonind. Zeit., **61**, p. 487 (1937); ibid., **61**, p. 502 (1937).

[6] INSLEY H., *Structural Characteristics of Some Constituents of Portland Cement Clinker.* J. Res. Natl. Bur. Standards, **17**, p. 353 (1936);
INSLEY H., *Nature of the glass in Portland Cement Clinker*, ibidem, **25**, p. 295 (1940).

[7] INSLEY H., VAN FRECHÉTTE D., *Microscopy of Ceramics and Cements.* Acad. Press, New York (1955).

[8] *Mikroskopie des Zementklinker, Bilderatlas.* Beton-Verlag, Dusseldorf (1965).

[9] TROJER F., *Handbuch der Mikroskopie in der Technik.* Band IV, Teil 3, cap. V, 2. Umschau Verlag, Frankfurt (1965).

[10] TERRIER P., HORNAIN H., *Sur l'application des méthodes minéralogiques à l'industrie des liants hydrauliques.* Rev. Mat. Constr., n. 618 à 621 (1967).

[11] REGOURD M., *Cristallographie des Constituants du Clinker de Ciment Portland.* Colloquio, Torino, aprile 1972.

[12] METZGER A., *Uber das Vorkommen von Bredigit in Portlandzementklinkers.* Zem-Kalk-Gips, **42**, p. 269 (1953).

[13] YAMAGUCHI G., TAKAGI S., *The Analysis of Portland Cement Clinker.* Proc. V Int. Symp. Chem. Cement, Tokyo, vol. I, p. 181 (1968).

[14] TROJER F., Zem-Kalk-Gips, **55**, pp. 207-215 (1966).

[15] ONO Y., KAWAMURA S., SODA Y., *Microscopic Observations of Alite and Belite and Hydraulic Strength of Cement.* Proc. V Int. Symp. Chem. Cement, Tokyo, vol. I, p. 275 (1968).

[16] CHROMÝ S., *Petrography of Portland Cement Clinker.* Silikaty, **9**, p. 279 (1965).

[17] CHROMÝ S., *High-temperature Microscopic Investigation of Tricalcium Silicate and Dicalcium Silicate Phases in Portland cement Clinker.* J. Am. Ceram. Soc., **50**, p. 677 (1967).

[18] SCHWANK L., *Le microduromètre pour microscope métallographique MM5.* Informations Leitz, p. 20, aprile 1970.

[19] HORNAIN H., *Sur la répartition des éléments de transition et leur influence sur quelques propriétés du clinker et du ciment.* Rev. Mat. Constr., n. 671-672, agosto-settembre 1971.

[20] BENSTED J., VARMA S. P., *Some Applications of Infra-red and Raman spectroscopy in Cement Chemistry. Part. I. Examination of Dicalcium Silicate.* Cem. Techn., **5**, p. 256 (1974).

[21] FRIGIONE G., MARCHESE, Dati non ancora pubblicati.

Spazi di Sobolev con peso ed applicazioni ai problemi ellittici

Nota di DONATO FORTUNATO *
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza dell' 1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Il presente lavoro è diviso in due capitoli. Nel primo capitolo si studia una opportuna classe di spazi di Sobolev con peso, che sono la generalizzazione degli spazi introdotti da M. Troisi in [10]. Per tali spazi si stabiliscono teoremi di immersione, di densità e di traccia. Il secondo capitolo è dedicato allo studio, nell'ambito degli spazi di Sobolev con peso introdotti precedentemente, di un problema al contorno per equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico nel semispazio R^n_+.

SUMMARY. — This paper consists of two chapters. In the first chapter we introduce a suitable class of Sobolev weight spaces which generalize the spaces defined by M. Troisi in [10]. Embedding, density and trace theorems have been proved. The second chapter is concerned with a boundary value problem for linear partial differential equations of elliptic type in the half space R^n_+. This problem has been investigated within Sobolev weight spaces introduced in the first chapter.

La teoria degli spazi di Sobolev con peso ha avuto un notevole sviluppo negli ultimi anni, e si è rivelata uno strumento efficace per affrontare e risolvere numerose questioni della teoria dei problemi al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali.

Tra i numerosi Autori che si sono occupati di tali questioni citiamo, ad es., A. Avantaggiati - M. Troisi [2], G. Geymonat - P. Grisvard [3], Kudrijacev [5], J. Necas [8], M. Troisi [10, 11, 12].

In questo lavoro mi propongo di approfondire lo studio di una opportuna classe di spazi di Sobolev con peso, che sono la generalizzazione di altri già noti (cfr., ad es., i citati lavori di M. Troisi), e di applicare alcuni dei risultati ottenuti per stabilire un teorema di regolarizzazione per un particolare problema ellittico.

* Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

Il lavoro è diviso in due capitoli.

Nel primo capitolo vengono studiati i suddetti spazi di Sobolev con peso, denotati con $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ (r, τ reali ≥ 0, s reale, p reale ≥ 1), dove Ω è un insieme aperto (limitato o no) di R^n. Si assume come funzione peso una funzione $\rho(x)$ continua in $\bar{\Omega}$, positiva in Ω e soddisfacente ad opportune condizioni (condizioni che, ad esempio, sono soddisfatte se Ω è dotato della proprietà di cono e $\rho(x) = \frac{1}{2}$ dist $(x, \partial\Omega)$).

Se r è intero e $\tau = 0$, lo spazio $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ si identifica con lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che

$$\sum_{|\alpha| \leq r} \int_{\Omega} \rho^{(s+|\alpha|-r)p}(x) \, |D^\alpha u(x)|^p \, dx < +\infty$$

Per gli spazi $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ si stabiliscono dei teoremi di immersione, di compattezza, di densità e, se Ω è il semispazio positivo R^n_+, si caratterizzano le tracce degli elementi di $W^{r,p}_{s,\tau}(R^n_+)$ sull'iperpiano R^{n-1}.

Nel secondo capitolo si studia il problema

$$(1) \qquad \begin{aligned} A u &= f \qquad \text{su} \quad R^n_+ \\ B_j u &= g_j \qquad \text{su} \quad R^{n-1}, \qquad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

ove A è un operatore differenziale lineare d'ordine $2m$, *propriamente ellittico* in $\bar{R}^n_+$ ed all'infinito e $\{B_j\}_{j=1}^m$ è un sistema di m operatori differenziali lineari di frontiera, soddisfacenti la *condizione complementare* rispetto ad A su R^{n-1} ed all'infinito.

Sotto opportune ipotesi sui coefficienti degli operatori A e B_j ($j = 1, \ldots, m$), si dimostra che se $f \in W^{\ell-2m}_{2m+s}(R^n_+)$ ($\ell \geq 2m$) e $g_j \in W^{\ell-m_j-1/2}_{2m+s,p}(R^{n-1})$ ($j = 1, \ldots, m$) allora ogni soluzione u del problema (1), tale che $u \in W^{\ell}(T) \cap L^2_{2m+s-\ell}(R^n_+)$ per ogni compatto $T \subset \bar{R}^n_+$, è di classe $W^{\ell}_{2m+s}(R^n_+)$.

Nel n. 1 si introducono gli spazi di Sobolev con peso $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ e si richiamano alcuni noti risultati.

Nel n. 2 si trova una caratterizzazione degli spazi $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ che permette d'estendere facilmente a tali spazi teoremi di immersione

già noti per gli spazi di Sobolev usuali. Per quanto riguarda lo studio della compattezza di talune inclusioni ci serviremo di alcuni risultati ottenuti da A. Avantaggiati e M. Troisi [2].

Nel n. 3 si introducono opportuni spazi di moltiplicatori per le distribuzioni di $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ e quindi del n. 4 si dimostra che $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ è ovunque denso in $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Nel n. 5 vengono stabiliti due teoremi che caratterizzano le tracce sull'iperpiano R^{n-1} degli elementi di $W^{r,p}_{s,\tau}(R^n_+)$.

Nel n. 6 viene enunciato il teorema di regolarizzazione per il problema (1), teorema che viene dimostrato nel n. 7.

Capitolo I

1. - Definizioni e risultati preliminari.

Indicheremo con R^n lo spazio reale euclideo a n dimensioni di punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ è una n-pla di interi non negativi ed $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è un punto di R^n, porremo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$$

dove $$D_{x_k} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad k = 1, \ldots, n \qquad i = \sqrt{-1}$$

porremo poi: $x = (x', t)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $t = x_n$ e $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$, $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.

Sia $k \in N_0$[1] e $p \in R$, $p \geq 1$; se Ω è un sottoinsieme aperto di R^n, denoteremo con $W^{k,p}(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega) \qquad \forall\, \alpha \in N_0^n \qquad |\alpha| \leq k$$

[1] Indicheremo con R l'insieme dei reali, con R_+ l'insieme dei reali maggiori di 0, con $\bar{R}_+$ l'insieme dei reali maggiori od uguali a 0, con N l'insieme dei numeri interi maggiori di 0 e con N_0 l'insieme dei numeri interi maggiori od eguali a 0.

munito della norma

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

Se k non è intero denoteremo con $W^{k,p}(\Omega)$ lo spazio delle $u \in W^{[k],p}(\Omega)$ ($[k]$ denota la parte intera di k) tali che sia

$$\sum_{|\alpha|=[k]} \int_\Omega \int_\Omega \frac{| D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+(k-[k])p}} \, dx' \, dx'' < +\infty$$

munito della norma

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\| u \|^p_{W^{[k],p}(\Omega)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=[k]} \int_\Omega \int_\Omega \frac{| D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+(k-[k])p}} \, dx' \, dx'' \right)^{1/p}$$

porremo $W^{k,2}(\Omega) = W^k(\Omega)$.

Tali spazi di distribuzioni sono stati studiati da diversi autori, tra i quali ricordiamo S. L. Slobodetskij [9], L. Hormander [4], L. R. Volevic e B. P. Paneyakh [13]. Assegniamo ora una funzione $\rho(x)$ di classe $C^0(\bar{\Omega})$, positiva in Ω, e poniamo per ogni $x_0 \in \Omega$.

$$I(x_0) = \{ x \in \Omega \mid |x - x_0| < \rho(x_0) \}$$

Su Ω e $\rho(x)$ faremo le seguenti ipotesi:

C_1) Per ogni $x_0 \in \Omega$, $I(x_0)$ è un insieme dotato della proprietà di cono; inoltre l'apertura ed il rapporto tra $\rho(x_0)$ e l'altezza del cono caratteristico di $I(x_0)$ sono indipendenti da x_0.

C_2) Esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che [2]

$$c_1 \rho(x_0) \leq \rho(x) \leq c_2 \rho(x_0) \quad \forall \, x_0 \in \Omega \quad \text{e} \quad \forall \, x \in I(x_0)$$

Per ogni $x_0 \in \Omega$, denoteremo con $\varphi(x, x_0)$ la funzione caratteristica di $I(x_0)$.

[2] Funzioni verificanti tale proprietà sono ad esempio:

$$\rho(x) = \frac{1 + |x|}{2}, \qquad \rho(x) = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, S) \text{ ove } S \subset \partial\Omega.$$

Osserviamo che le condizioni C_1) e C_2) implicano l'esistenza di due costanti positive c_3 e c_4 tali che si ha

$$c_3\,\rho^n(x) \leq \int_\Omega \varphi(x, x_0)\,dx_0 \leq c_4\,\rho^n(x) \qquad \forall\, x \in \Omega \tag{1.1}$$

infatti, posto per ogni $x \in \Omega$

$$\Gamma_x = \{x_0 \in \Omega \mid |x_0 - x| < \rho(x_0)\}$$

$$\Gamma_x' = \{x_0 \in \Omega \mid |x_0 - x| < c_1\,\rho(x)\}$$

$$\Gamma_x'' = \{x_0 \in \Omega \mid |x_0 - x| < \frac{1}{c_1}\,\rho(x)\}$$

si ha $\Gamma_x' \subset \Gamma_x \subset \Gamma_x''$. D'altra parte $\int_\Omega \varphi(x, x_0)\,dx_0 =$ misura di Γ_x da cui la (1.1).

Per ogni sottoinsieme A di Ω, indicheremo con A* l'insieme (dei punti ξ) trasformato di A mediante la sostituzione

$$x - x_0 = \rho(x_0)\,(\xi - x_0)$$

e per ogni funzione $v(x)$ definita in A, porremo

$$v^*(x_0, \xi) = v(x_0 + \rho(x_0)\,(\xi - x_0))\,.$$

Introduciamo ora alcuni spazi di distribuzioni che costituiscono una generalizzazione di quelli già introdotti da M. Troisi (cfr. [10], [11], [12]).

DEFINIZIONE 1.1. *Se* $r \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$ *e* $p \in \mathbb{R}$ $p \geq 1$ *si denoterà con* $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ *lo spazio delle distribuzioni* u *su* Ω *tali che* $\rho^{(s+|\alpha|-r)}(x)\left(\frac{\rho(x)}{1+\rho^2(x)}\right)^\tau D^\alpha u(x) \in L^p(\Omega)$ *per* $|\alpha| \leq r$, *munito della norma*

$$\| u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \| \rho^{(s+|\alpha|-r)}(x) \left(\frac{\rho(x)}{1+\rho^2(x)} \right)^\tau D^\alpha u(x) \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

DEFINIZIONE 1.2. *Se* $r \in \mathrm{R}_+ - \mathrm{N}$, $s \in \mathrm{R}$, $p \in \mathrm{R}$ $p \geq 1$ *e* $\tau \geq 0$, *denoteremo con* $\mathrm{W}^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ *lo spazio delle distribuzioni* $u \in \mathrm{W}^{[r],p}_{s-r+[r],\tau}(\Omega)$ *per cui è finita la quantità*

$$\| u \|^p_{\mathrm{W}^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} = \| u \|^p_{\mathrm{W}^{[r],p}_{s-r+[r],\tau}(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=[r]} \int_\Omega \int_\Omega \rho^{sp-n}(x', x'') \left(\frac{\rho(x', x'')}{1 + \rho^2(x', x'')} \right)^{\tau p} g(x', x'') \cdot$$

$$\cdot \frac{|\mathrm{D}^\alpha u(x') - \mathrm{D}^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}} \, dx' \, dx''$$

ove $\rho(x', x'') = \dfrac{\rho(x') + \rho(x'')}{2}$ e $g(x', x'') =$

$$= \int_\Omega \varphi(x', x_0) \cdot \varphi(x'', x_0) \, dx_0 \quad \text{e} \quad \lambda = r - [r]$$

porremo $\mathrm{W}^{r,2}_{s,\tau}(\Omega) = \mathrm{W}^r_{s,\tau}(\Omega)$ e $\mathrm{W}^{0,p}_{s,\tau}(\Omega) = \mathrm{L}^p_{s,\tau}(\Omega)$ inoltre si porrà $\mathrm{W}^{r,p}_{s,0}(\Omega) = \mathrm{W}^{r,p}_s(\Omega)$. Converremo anche di indicare con $\mathrm{L}^\infty_s(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u(x)$ tali che $\rho(x) u(x) \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ munito della norma:

$$\| u \|_{\mathrm{L}^\infty_s(\Omega)} = \| \rho^s u \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$$

In alcuni casi sarà utile scrivere $\mathrm{W}^{r,p}_{s,\rho}(\Omega)$ anzicché $\mathrm{W}^{r,p}_s(\Omega)$, così pure a volte scriveremo $\mathrm{I}_\rho(x_0)$ anzicché $\mathrm{I}(x_0)$.

Ripetendo i ragionamenti tenuti da A. Avantaggiati e M. Troisi per stabilire il teorema 6.1 di [2] si prova il seguente

TEOREMA 1.1. *Supponiamo* Ω *limitato oppure* Ω *non limitato e* $\rho(x)$ *divergente all'infinito e siano* $r \in \mathrm{N}$ *ed* s, p, λ *numeri reali di cui* $p > 1$, $\lambda \geq 0$. *Per ogni* $k \in \mathrm{N}_0$, $k < r$ *e per ogni numero reale positivo* τ *sussiste l'ingezione compatta*

$$\mathrm{W}^{r,p}_{s,\lambda}(\Omega) \subset\!\!\rightarrow \mathrm{W}^{k,p}_{s+k-r,\tau+\lambda}(\Omega)$$

Sussistono i seguenti due lemmi che estendono i lemmi 1.1 ed 1.2 di M. Troisi [10] agli spazi $\mathrm{L}^p_{s,\tau}(\Omega)$, Ω insieme aperto non neces-

sariamente limitato, e le cui dimostrazioni, che qui per brevità non riportiamo, si ottengono con ragionamenti analoghi a quelli tenuti in [10].

LEMMA 1.1. *Siano p, s, τ tre numeri reali di cui $p > 0$, $\tau \geq 0$. Per ogni funzione $u(x)$ tale che* $\rho^s(x_0) \left(\frac{\rho(x_0)}{1+\rho^2(x_0)} \right)^\tau \| u \|_{L^p(I(x_0))} \in L^p(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \left(\rho^s(x_0) \left(\frac{\rho(x_0)}{1+\rho^2(x_0)} \right)^\tau \| u \|_{L^p(I(x_0))} \right)^p dx_0 \geq c \| u \|^p_{L^p_{s+n/p,\tau}(\Omega)}$$

ove c è una costante positiva indipendente da u.

LEMMA 1.2. *Siano p, s, τ tre numeri reali di cui $p > 0$, $\tau \geq 0$. Per ogni funzione $u \in L^p_{s+n/p,\tau}(\Omega)$ si ha*

$$\int_\Omega \left(\rho^s(x_0) \left(\frac{\rho(x_0)}{1+\rho^2(x_0)} \right)^\tau \| u \|_{L^p(I(x_0))} \right)^p dx_0 \leq c \| u \|^p_{L^p_{s+n/p,\tau}(\Omega)}$$

ove c è una costante indipendente da u.

2. - TEOREMI DI IMMERSIONE.

Si porrà

$$\gamma(x) = \frac{\rho(x)}{1+\rho^2(x)} \qquad \text{e} \qquad \gamma(x', x'') = \frac{\rho(x', x'')}{1+\rho^2(x', x'')}$$

Introduciamo un lemma che fornisce una utile caratterizzazione degli spazi $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

LEMMA 2.1. *Siano r, s, p, τ numeri reali di cui $r \geq 0$, $p \geq 1$, $\tau \geq 0$. Per ogni $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ si ha*

$$c_1 \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0) (\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \, dx_0 \leq$$

$$\leq \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \leq c_2 \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0) (\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \, dx_0$$

ove c_1 e c_2 sono due costanti positive indipendenti da u.

Dimostrazione. È immediato intanto verificare che

$$u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega) \Longrightarrow u^* \in W^{r,p}(I^*(x_0)) \qquad \forall\, x_0 \in \Omega$$

Supponiamo dapprima $r \in N_0$, allora, se $x_0 \in \Omega$, si ha

$$\| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} = \sum_{|\alpha| \leq r} \rho^{|\alpha| p - n}(x_0) \| D^\alpha u \|^p_{L^p(I(x_0))}$$

da cui, in virtù dei lemmi 1.1 ed 1.2 [3]

$$\int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0) (\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))}\, dx_0 \sim \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \tag{2.1}$$

Sia ora $r \in R_+ - N$; se $x_0 \in \Omega$, posto $\lambda = r - [r]$, si ha

$$\| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} = \| u^* \|^p_{W^{[r],p}(I^*(x_0))} +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = [r]} \rho(x_0)^{|\alpha| p - n + \lambda p} \int_{I(x_0)} \int_{I(x_0)} \frac{| D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx''$$

da cui tenendo presente la (2.1), abbiamo

$$\int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0) (\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))}\, dx_0 \sim \| u \|^p_{W^{[r],p}_{s-r+[r],\tau}(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = [r]} \int_\Omega \rho(x_0)^{sp-n} \cdot (\gamma(x_0))^{\tau p}$$

$$\left(\int_{I(x_0)} \int_{I(x_0)} \frac{| D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx'' \right) dx_0 \sim$$

[3] Se H è un insieme arbitrario ed σ_1 e σ_2 sono due applicazioni di H in $\bar{R}_+$ si porrà $\forall\, u \in H\ \sigma_1(u) \sim \sigma_2(u)$ se esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$\forall\, u \in H : c_1\, \sigma_2(u) \leq \sigma_1(u) \leq c_2\, \sigma_2(u).$$

$$\sim \| u \|^p_{W^{[r],p}_{s-r+[r],\tau}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[r]} \int_\Omega dx_0 \int_\Omega \int_\Omega (\rho(x', x''))^{sp-n} (\gamma(x', x''))^{\tau p}$$

$$\varphi(x', x_0)\, \varphi(x'', x_0) \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}} dx'\, dx'' \sim \| u \|^p_{W^{[r],p}_{s-r+[r],\tau}(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=[r]} \int_\Omega \int_\Omega (\rho(x', x''))^{sp-n} (\gamma(x', x''))^{\tau p}\, g(x', x'')$$

$$\frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}} dx'\, dx'' = \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)}$$

Il lemma ora dimostrato ci permette d'estendere agli spazi $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ teoremi di immersione già noti per gli spazi $W^{r,p}(\Omega)$.

TEOREMA 2.1. *Siano r, r', s, p e τ numeri reali di cui $0 \leq r' < r$, $p \geq 1$ e $\tau \geq 0$, allora*

$$\| u \|^p_{W^{r',p}_{s+r'-r,\tau}(\Omega)} \leq c \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)}$$

ove c è una costante indipendente da $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Dimostrazione. In virtù del lemma 2.1 e di un noto teorema di immersione per gli spazi $W^{r,p}(\Omega)$ (cfr. [8]) si ha

$$\| u \|^p_{W^{r',p}_{s+r'-r,\tau}(\Omega)} \sim \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0) (\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} dx_0 \leq$$

$$\leq c \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0) (\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} dx_0 \sim \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)}$$

TEOREMA 2.2. *Sia $\alpha \in N_0^n$ ed r, τ, s, p numeri reali di cui $r, \tau \geq 0$ e $p \geq 1$. Se $u \in W^{r+|\alpha|,p}_{s,\tau}(\Omega)$ allora $D^\alpha u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ e sussiste inoltre la seguente disuguaglianza*

$$\| D^\alpha u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \leq c \| u \|^p_{W^{r+|\alpha|,p}_{s,\tau}(\Omega)}$$

ove c è una costante indipendente da $u \in W^{r+|\alpha|,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Dimostrazione. Procedendo in maniera analoga alla precedente dimostrazione abbiamo:

$$\| D^\alpha u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \sim \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0)(\gamma(x_0))^{\tau p} \| (D^\alpha u)^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} dx_0 =$$

$$= \int_\Omega \rho^{(s-r-|\alpha|)p}(x_0)(\gamma(x_0))^{\tau p} \| D^\alpha u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} dx_0 \leq$$

$$\leq c \int_\Omega \rho^{(s-r-|\alpha|)p}(x_0)(\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r+|\alpha|,p}(I^*(x_0))} dx_0 \sim \| u \|^p_{W^{r+|\alpha|,p}_{s,\tau}(\Omega)}$$

TEOREMA 2.3. *Siano t, k, r, τ, p ed s numeri reali tali che $0 \leq t < k < r$, $\tau \geq 0$ e $p \geq 1$. Per ogni $\varepsilon \in R_+$ esiste una costante $c(\varepsilon)$ tale che*

$$\| u \|_{W^{k,p}_{s+k-r,\tau}(\Omega)} \leq \varepsilon \| u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} +$$

$$+ c(\varepsilon) \| u \|_{W^{t,p}_{s+t-r,\tau}(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega).$$

Dimostrazione. Da noti risultati segue evidentemente che assegnato $\varepsilon \in R_+$ esiste una costante $c(\varepsilon)$ indipendente da x_0 tale che

$$\| u^* \|^p_{W^{k,p}(I^*(x_0))} \leq \varepsilon \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} +$$

$$+ c(\varepsilon) \| u^* \|^p_{W^{t,p}(I^*(x_0))} \qquad \forall u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega).$$

Ne segue:

$$\| u \|^p_{W^{k,p}_{s+k-r,\tau}(\Omega)} \sim \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0)(\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{k,p}(I^*(x_0))} dx_0 \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0)(\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} dx_0 +$$

$$+ \; c(\varepsilon) \cdot \int_{\Omega} \rho^{(s-r)p}(x_0)\,(\gamma(x_0))^{\tau p} \,\|\, u^* \,\|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))}\, dx_0 \sim$$

$$\sim \varepsilon \,\|\, u \,\|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} + c(\varepsilon) \,\|\, u \,\|^p_{W^{t,p}_{s+t-r,\tau}(\Omega)}$$

TEOREMA 2.4. *Siano* Ω *e* $\rho(x)$ *come nel teorema* 1.1. *Se* r, p, s, k, τ *e* γ *sono numeri reali di cui* $r \geq 1$, $p > 1$, $0 \leq k < r$, $\tau > 0$ *e* $\gamma \geq 0$, *l'ingezione*

$$W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega) \subset\!\!\rightarrow W^{k,p}_{s+k-r,\tau+\gamma}(\Omega)$$

è compatta.

Dimostrazione. Posto $r = [r] + \lambda$ in virtù del teorema 2.1, la ingezione

$$W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega) \subset\!\!\rightarrow W^{[r],p}_{s-\lambda,\gamma}(\Omega)$$

è continua. D'altra parte, in virtù del teorema 1.1, l'ingezione

$$W^{[r],p}_{s-\lambda,\gamma}(\Omega) \subset\!\!\rightarrow W^{[r]-1,p}_{s+([r]-1)-r,\tau+\gamma}(\Omega)$$

è compatta, pertanto l'ingezione

$$W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega) \subset\!\!\rightarrow W^{[r]-1,p}_{s+([r]-1)-r,\tau+\gamma}(\Omega) \tag{2.2}$$

è compatta.

Se ε è un arbitrario numero positivo ed $[r] - 1 < k$ [4], in virtù del teorema 2.3, esiste una costante $c(\varepsilon)$ tale che

$$\|\, u \,\|^p_{W^{k,p}_{s+k-r,\tau+\gamma}(\Omega)} \leq \varepsilon \,\|\, u \,\|^p_{W^{r,p}_{s,\tau+\gamma}(\Omega)} + \tag{2.3}$$

[4] Se $[r] - 1 \geq k$ sussiste banalmente la (2.4), infatti per il teorema 2.1

$$\|\, u \,\|^p_{W^{k,p}_{s+k-r,\tau+\gamma}(\Omega)} \leq c \,\|\, u \,\|^p_{W^{[r]-1,p}_{s+([r]-1)-r,\tau+\gamma}(\Omega)} .$$

$$+ c(\varepsilon) \| u \|_{W^{[r]-1,p}_{s+([r]-1)-r,\tau+\gamma}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{r,p}_{s,\tau+\gamma}(\Omega)$$

da cui, essendo ovviamente $\| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau+\gamma}(\Omega)} \leq c \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega)}$

(c costante indipendente da $u \in W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega)$), abbiamo

$$\| u \|^p_{W^{k,p}_{s+k-r,\tau+\gamma}(\Omega)} \leq c \cdot \varepsilon \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega)} + \tag{2.4}$$

$$+ c(\varepsilon) \| u \|_{W^{[r]-1,p}_{s+([r]-1)-r,\tau+\gamma}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega)$$

Sia ora $(u_n)_{n\in N}$ una successione di elementi di $W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega)$ tale che

$$\forall n \in N \qquad \| u_n \|^p_{W^{r,p}_{s,\gamma}(\Omega)} \leq M \qquad M \in R_+ \tag{2.5}$$

da tale successione, in virtù della (2.2), si può estrarre una successione convergente in $W^{[r]-1,p}_{s+([r]-1)-r,\tau+\gamma}(\Omega)$.

Ma dalle (2.4) e (2.5) segue che una limitazione del tipo

$$\| u_j - u_i \|^p_{W^{[r]-1,p}_{s+([r]-1)-r,\tau+\gamma}(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{c(\varepsilon)}$$

implica la limitazione

$$\| u_j - u_i \|^p_{W^{k,p}_{s+k-r,\tau+\gamma}(\Omega)} \leq \varepsilon \cdot (c M + 1)$$

per cui si ha evidentemente la tesi.

3. - Spazi di moltiplicatori per $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Definizione 3.1. *Se* $H(\Omega)$ *è uno spazio normato di distribuzioni su* Ω, *diremo spazio di moltiplicatori per* $H(\Omega)$ *ogni spazio normato* $M(\Omega)$ *di funzioni definite in* Ω *godenti della seguente proprietà*:

$$\forall \varphi \in M(\Omega) \text{ e } \forall u \in H(\Omega): \quad \varphi u \in H(\Omega)$$

ed inoltre

$$\| \varphi u \|_{H(\Omega)} \leq c \| \varphi \|_{M(\Omega)} \cdot \| u \|_{H(\Omega)}$$

ove c è una costante indipendente da φ e da u.

Ricordiamo (cfr. [9]) che spazi di moltiplicatori per $W^{r,p}(\Omega)$ ($r \in \bar{R}_+$, $p \geq 1$) sono gli spazi $A^r(\Omega)$ delle funzioni φ su Ω tali che se

$$r - [r] = 0 : \| \varphi \|_{A^r(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq r} \| D^\alpha \varphi \|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty$$

se

$$r - [r] = \lambda \in]0,1[: \| \varphi \|^p_{A^r(\Omega)} = \| \varphi \|^p_{A^{[r]}(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq [r]} \sup_{x'' \in \Omega} \int_\Omega \frac{| D^\alpha \varphi(x') - D^\alpha \varphi(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}} dx' < +\infty .$$

Vogliamo ora introdurre opportuni spazi di moltiplicatori per $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

DEFINIZIONE 3.2. *Siano $r \in \bar{R}_+$, $p \in R$ $p \geq 1$. Indicheremo con $M^r(\Omega)$ lo spazio delle funzioni u su Ω tali che:*

se
$$r - [r] = 0 : \| \varphi \|_{M^r(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq r} \| D^\alpha \varphi \|_{L^\infty_{|\alpha|}(\Omega)}$$

se
$$r - [r] = \lambda \in]0,1[: \| \varphi \|^p_{M^r(\Omega)} = \| \varphi \|^p_{M^{[r]}(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq [r]} \sup_{x_0 \in \Omega} (\varphi^{(\lambda + |\alpha|)p}(x_0) \sup_{x'' \in I(x_0)} \int_{I(x_0)} \frac{| D^\alpha \varphi(x') - D^\alpha \varphi(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}} dx') < +\infty .$$

LEMMA 3.1. *Se $r \in \bar{R}_+$, $p \in R$ $p \geq 1$*

$$c_1 \sup_{x_0 \in \Omega} \| \varphi^* \|^p_{A^r(I^*(x_0))} \leq \| \varphi \|^p_{M^r(\Omega)} \leq c_2 \sup_{x_0 \in \Omega} \| \varphi^* \|^p_{A^r(I^*(x_0))}$$

ove c_1 e c_2 sono due costanti indipendenti da $\varphi \in M^r(\Omega)$.

Dimostrazione. È immediato intanto verificare che $\forall\, x_0 \in \Omega$ si ha

$$\varphi \in M^r(\Omega) \Longrightarrow \varphi^* \in A^r(I^*(x_0)) .$$

La tesi si ottiene ovviamente se $r \in N_0$, supponiamo pertanto $r \in R_+ - N$, allora $\forall\, \varphi \in M^r(\Omega)$ e $\forall\, x_0 \in \Omega$ si ha:

$$\| \varphi^* \|^p_{A^r(I^*(x_0))} = \sum_{|\alpha| \leq [r]} \left(\sup_{\xi \in I^*(x_0)} |D^\alpha_\xi \varphi^*(x_0, \xi)|^p + \right.$$

$$\left. + \sup_{\xi'' \in I^*(x_0)} \int_{I^*(x_0)} \frac{|D^\alpha_{\xi'} \varphi^*(x_0, \xi') - D^\alpha_{\xi''} \varphi^*(x_0, \xi'')|^p}{|\xi' - \xi''|^{n+\lambda p}} \, d\xi' \right) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq [r]} \left(\sup_{x \in I(x_0)} |\rho^{|\alpha|}(x) D^\alpha \varphi(x)|^p + \right.$$

$$\left. + \rho^{(|\alpha|+\lambda)p}(x_0) \sup_{x'' \in I(x_0)} \int_{I^*(x_0)} \frac{|D^\alpha \varphi(x') - D^\alpha \varphi(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}} \, dx' \right) .$$

Da cui, ricordando la definizione 3.2, si ricava facilmente la tesi.

LEMMA 3.2. *Siano* $r,\ r' \in \bar{R}_+,\ r' < r$ *e* $p \in R,\ p \geq 1$, *allora*

$$\| \varphi \|^p_{M^{r'}(\Omega)} \leq c \| \varphi \|^p_{M^r(\Omega)}$$

ove c *è una costante indipendente da* $\varphi \in M^r(\Omega)$.

Dimostrazione. In virtù del lemma 3.1. e d'un noto teorema di immersione per gli spazi $A^r(\Omega)$ (cfr. [9]) si ha

$$\| \varphi \|^p_{M^r(\Omega)} \sim \sup_{x_0 \in \Omega} \| \varphi^* \|^p_{A^{r'}(I^*(x_0))} \leq$$

$$\leq c \sup_{x_0 \in \Omega} \| \varphi^* \|^p_{A^r(I^*(x_0))} \sim \| \varphi \|^p_{M^r(\Omega)} .$$

TEOREMA 3.1. *Se* r, p, τ, s *sono numeri reali di cui* $r \geq 0$, $p \geq 1$, $\tau \geq 0$, $M^r(\Omega)$ *è uno spazio di moltiplicatori per* $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Dimostrazione. Siano $\varphi \in M^r(\Omega)$ ed $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$, pertanto, come già osservato, si ha

$$\forall\, x_0 \in \Omega \qquad \varphi^* \in A^r(I^*(x_0)) \qquad \text{e} \qquad u^* \in W^{r,p}(I^*(x_0))$$

per cui sarà

$$\| \varphi^* \cdot u^* \|_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \leq c \| \varphi^* \|_{A^r(I^*(x_0))} \cdot \| u^* \|_{W^{r,p}(I^*(x_0))},$$

ove c è una costante indipendente da φ, da u e da x_0. Pertanto in virtù del lemma 2.1 e del lemma 3.1, abbiamo

$$\| \varphi u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \sim \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0)\,(\gamma(x_0))^{\tau p} \| \varphi^* u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))}\, dx_0 \leq$$

$$\leq c \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0)\,(\gamma(x_0))^{\tau p} \| \varphi^* \|^p_{A^r(I^*(x_0))} \cdot \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))}\, dx_0 \leq$$

$$\leq c \sup_{x_0 \in \Omega} \| \varphi^* \|^p_{A^r(I^*(x_0))} \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x_0)\,(\gamma(x_0))^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))}\, dx_0 \sim$$

$$\sim \| \varphi \|^p_{M^r(\Omega)} \cdot \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)}.$$

4. - Il Teorema di densità.

Teorema 4.1. *Siano* $r \in \bar{R}_+$, $s \in R$, $p \in R$ $p \geq 1$, $\tau \geq 0$. *Se* $\forall\, x \in \bar{\Omega}$ $\rho(x) > 0$ $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ *è denso in* $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Se A è un sottoinsieme di R_n, d'ora in avanti porremo $\tilde{A} = \Omega \cap A$.

Lemma 4.1. *Sia* $r \in \bar{R}_+$, $p \in R$ $p \geq 1$. *Se* $u \in W^{r,p}(\Omega)$ *supp* $u = \Sigma$ *compatto* $\subset \bar{\Omega}$, *allora, denotato con* Σ_1 *un insieme aperto e limitato contenente* Σ, *si ha*

$$\| u \|_{W^{r,p}(\Omega)} \leq c \| u \|_{W^{r,p}(\tilde{\Sigma}_1)}$$

ove c *è una costante che dipende solo da* r, p *e dal supporto di* u.

Dimostrazione. Se r è intero la dimostrazione è banale. Sia allora $r \in \mathbf{R}_+ - \mathbf{N} \quad r - [r] = \lambda \in]0,1[$

$$\| u \|^p_{W^{r,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq [r]} \int_{\tilde{\Sigma}_1} | D^\alpha u(x) |^p \, dx + \tag{4.1}$$

$$+ \sum_{|\alpha| = [r]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{| D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}} \, dx' \, dx''$$

ma $$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{| D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'') |^p}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}} \, dx' \, dx'' =$$

$$= \int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\tilde{\Sigma}} + \int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}} + \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}} \int_{\tilde{\Sigma}} + \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}} \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}} \leq \int_{\tilde{\Sigma}_1} \int_{\tilde{\Sigma}_1} + 2 \int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}} \tag{4.2}$$

posto $\delta = \operatorname{dist}(\tilde{\Sigma}, \Omega - \tilde{\Sigma}_1) > 0$ e $c_\delta = \int_{|z| > \delta} \frac{1}{| z |^{n+\lambda p}} \, dz$, si ha

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}} = \int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}_1} + \int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\tilde{\Sigma}_1 - \tilde{\Sigma}} \leq \int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}_1} + \int_{\tilde{\Sigma}_1} \int_{\tilde{\Sigma}_1} =$$

$$= \int_{\tilde{\Sigma}} \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}_1} \frac{| D^\alpha u(x') |^p}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}} \, dx' \, dx'' + \int_{\tilde{\Sigma}_1} \int_{\tilde{\Sigma}_1} =$$

$$= \int_{\tilde{\Sigma}} \left(| D^\alpha u(x') |^p \int_{\Omega - \tilde{\Sigma}_1} \frac{1}{| x' - x'' |^{n+\lambda p}} \, dx'' \right) dx' + \int_{\tilde{\Sigma}_1} \int_{\tilde{\Sigma}_1} \leq$$

$$\leq c_\delta \int_{\tilde{\Sigma}} | D^\alpha u(x') |^p \, dx' + \int_{\tilde{\Sigma}_1} \int_{\tilde{\Sigma}_1} \leq c \left(\int_{\tilde{\Sigma}_1} | D^\alpha u(x') |^p \, dx' + \int_{\tilde{\Sigma}_1} \int_{\tilde{\Sigma}_1} \right) \tag{4.3}$$

da (4.1), (4.2), (4.3) si ottiene la tesi.

LEMMA 4.2. *Siano* $r \in \bar{R}_+$, $p \in R$ $p \geq 1$, $\tau \geq 0$. *Sia* $\rho(x) > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$. *Se* $u \in W^{r,p}(\Omega)$ *supp u compatto* $\subset \bar{\Omega}$, *allora* $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ *ed inoltre*

$$\| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \leq c'' \| u \|^p_{W^{r,p}(\Omega)} \tag{4.4}$$

ove c'' *è una costante che dipende solo da* r, p, $\rho(x)$ *e dal supporto di* u.

Dimostrazione. Se $r \in N_0$ la tesi si ottiene immediatamente ricordando come è stata definita la norma in $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Supponiamo ora $r \in R_+ - N$ e poniamo $\lambda = r - [r]$.

Iniziamo con l'osservare che, in virtù della proprietà C_2) della funzione $\rho(x)$, se $\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix} \in \Omega$ tali che $\rho(x'') > \dfrac{c_2}{c_1} \rho(x')$ allora

$$x' \in I(x_0) \Rightarrow x'' \notin I(x_0) \qquad \forall x_0 \in \Omega$$

allora posto

$$S_1 = \text{supp } u$$

$$S_2 = \left\{ x'' \in \Omega \mid \rho(x'') \leq \frac{c_2}{c_1} \max_{x' \in S_1} \rho(x') \right\}$$

si ha ovviamente $\tilde{S}_1 \subset S_2$ e $g(x', x'') = 0 \ \forall (x', x'') \in \tilde{S}_1 \times (\Omega - S_2)$ pertanto, se $|\alpha| = [r]$:

$$\int_\Omega \int_\Omega \rho^{sp-n}(x', x'')\, g(x', x'')\, (\gamma(x', x''))^{\tau p} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx'' = \tag{4.5}$$

$$= \int_{\Omega - \tilde{S}_1} \int_{\Omega - S_2} + \int_{\tilde{S}_1} \int_{S_2} + \int_{\tilde{S}_1} \int_{\Omega - S_2} + \int_{\Omega - \tilde{S}_1} \int_{S_2} = \int_{\tilde{S}_1} \int_{S_2} + \int_{\Omega - \tilde{S}_1} \int_{S_2}$$

D'altra parte posto

$$S_3 = \left\{ x' \in \Omega \mid \rho(x') \leq \frac{c_2}{c_1} \sup_{x'' \in S_2} \rho(x'') \right\}$$

abbiamo $S_2 \subset S_3$ e $g(x', x'') = 0 \ \forall (x', x'') \in (\Omega - S_3) \times S_2$

per cui $$\int_{\Omega-\bar{S}_1}\int_{S_2} \leq \int_{S_3}\int_{S_2} + \int_{\Omega-S_3}\int_{S_2} = \int_{S_3}\int_{S_2} \tag{4.6}$$

da (4.5) e (4.6) allora

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \leq \int_{\bar{S}_1}\int_{S_2} + \int_{S_3}\int_{S_2} \tag{4.7}$$

In virtù della disuguaglianza di Schwarz e della (1.1)

$$g(x', x'') \leq \left(\int_{\Omega} (\varphi(x'', x_0))^2\, dx_0\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\varphi(x', x_0))^2\, dx_0\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{\Omega} \varphi(x', x_0)\, dx_0\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} \varphi(x'', x_0)\, dx_0\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c\, \rho^{n/2}(x') \cdot \rho^{n/2}(x'')$$

pertanto da (4.7) abbiamo

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \rho^{sp-n}(x', x'')\, g(x', x'')\, (\gamma(x', x''))^{\tau p} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx'' \leq$$

$$\leq c \left[\int_{\bar{S}_1}\int_{S_2} \rho^{sp-n}(x')\ \rho^{n/2}(x')\ \rho^{n/2}(x'')\, (\gamma(x''))^{\tau p} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx'' + \int_{S_3}\int_{S_2}\right] \leq$$

$$\leq c' \left[\int_{\bar{S}_1}\int_{S_2} \rho^{sp-n/2}(x') \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx'' + \int_{S_3}\int_{S_2}\right] \leq$$

$$\leq c'' \left[\int_{\bar{S}_1}\int_{S_2} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx'' + \int_{S_3}\int_{S_2}\right] \leq$$

$$\leq 2c'' \int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x' - x''|^{n+\lambda p}}\, dx'\, dx'' \tag{4.8}$$

da cui ovviamente si ha la (4.4).

LEMMA 4.3. *Siano* $r \in \overline{\mathrm{R}}_+$, $s \in \mathrm{R}$, $p \in \mathrm{R}$, $p \geq 1$, $\tau \geq 0$. *Supponiamo poi che* $\rho(x) > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$.

In tali ipotesi se $u \in \mathrm{W}^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$, *supp* u *compatto* $\subset \bar{\Omega}$ *allora* $u \in \mathrm{W}^{r,p}(\Omega)$ *ed inoltre*

$$\| u \|^p_{\mathrm{W}^{r,p}(\Omega)} \leq c \| u \|^p_{\mathrm{W}^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \tag{4.9}$$

ove c *è una costante che dipende dal supporto di* u.

Dimostrazione. Iniziamo col provare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$c < g(x', x'') \cdot \rho^{-n}(x') \quad \forall \begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix} \in \Omega \mid x' - x'' \mid < \frac{c_1}{2} \rho(x') \tag{4.10}$$

infatti, fissati $\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix} \in \Omega \mid x' - x'' \mid < \frac{c_1}{2} \rho(x')$, pongo

$$\Gamma = \left\{ x_0 \in \Omega \mid \mid x_0 - x' \mid < \frac{c_1}{2} \rho(x') \right\}$$

D'altra parte:

$$x_0 \in \Gamma \Rightarrow \begin{cases} \mid x_0 - x' \mid < \frac{c_1}{2} \rho(x') \leq \rho(x') \Rightarrow c_1 \rho(x') \leq \rho(x_0) \leq \\ \qquad \leq c_2 \rho(x') \Rightarrow \mid x_0 - x' \mid < \rho(x_0) \\ \mid x_0 - x'' \mid \leq \mid x' - x'' \mid + \mid x' - x_0 \mid < \frac{c_1}{2} \rho(x') + \\ \qquad + \frac{c_1}{2} \rho(x') = c_1 \rho(x') \leq \rho(x_0) \end{cases}$$

In definitiva, quindi, $\forall x_0 \in \Gamma \quad \varphi(x', x_0) \cdot \varphi(x'', x_0) = 1$ per cui

$$g(x', x'') = \int_{\Omega} \varphi(x', x_0) \cdot \varphi(x'', x_0) \, dx_0 \geq \int_{\Gamma} dx_0 \geq c \, \rho^n(x')$$

da cui ovviamente la (4.10).

Si adotteranno nel seguito della dimostrazione le notazioni del lemma 4.1.

Posto ora, $\forall\, x' \in \tilde{\Sigma}_1 \quad S_{x'} = \left\{ x'' \in \tilde{\Sigma}_1 \;\middle|\; |x'-x''| < \frac{c_1}{2}\rho(x') \right\}$, in virtù della (4.10) abbiamo

$$\text{se } |\alpha| = [r] \int_{\tilde{\Sigma}_1}\int_{\tilde{\Sigma}_1} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x'-x''|^{n+\lambda p}}\,dx'\,dx'' = \int_{\tilde{\Sigma}_1}\int_{S_{x'}} + \int_{\tilde{\Sigma}_1}\int_{\tilde{\Sigma}_1 - S_{x'}} \leq$$

$$\leq c_3 \left[\int_{\tilde{\Sigma}_1} dx' \int_{S_{x'}} g(x',x'')\,\rho^{-n}(x')\,\gamma(x')^{\tau p} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x'-x''|^{n+\lambda p}}\,dx'' + \right.$$

$$\left. + \int_{\tilde{\Sigma}_1} dx' \int_{\tilde{\Sigma}_1 - S_{x'}} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x'-x''|^{n+\lambda p}}\,dx'' \right] \leq$$

$$\leq c_4 \left[\int_{\tilde{\Sigma}_1} dx' \int_{S_{x'}} g(x',x'')\,\rho^{sp-n}(x')\,\gamma(x')^{\tau p} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x'-x''|^{n+\lambda p}}\,dx'' + \right.$$

$$\left. + \int_{\tilde{\Sigma}_1} dx' \int_{\tilde{\Sigma}_1 - S_{x'}} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{\left(\frac{c_1}{2}\rho(x')\right)^{n+\lambda p}}\,dx'' \right] \leq$$

$$\leq c_4 \left[\int_{\tilde{\Sigma}_1}\int_{\tilde{\Sigma}_1} g(x',x'')\,\rho^{sp-n}(x')\,\gamma(x')^{\tau p} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x'-x''|^{n+\lambda p}}\,dx'\,dx'' + \right.$$

$$\left. + c_5 \int_{\tilde{\Sigma}_1} dx' \int_{\tilde{\Sigma}_1} |D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p\,dx'' \right] \leq$$

$$\leq c_6 \left[\int_{\tilde{\Sigma}_1}\int_{\tilde{\Sigma}_1} g(x',x'')\,\rho^{sp-n}(x')\,\gamma(x')^{\tau p} \frac{|D^\alpha u(x') - D^\alpha u(x'')|^p}{|x'-x''|^{n+\lambda p}}\,dx'\,dx'' + \right.$$

$$\left. + \int_{\tilde{\Sigma}_1} |D^\alpha u(x)|^p\,dx \right] \leq c_7 \,\|u\|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \,. \tag{4.11}$$

D'altra parte

$$\sum_{|\alpha|\leqslant[r]}\int_{\Sigma_l} |\, D^\alpha u(x)\,|^p\, dx \leq c_8 \sum_{|\alpha|\leqslant[r]}\int_{\widetilde{\Sigma}_l} \rho^{(s+|\alpha|-r)p}(x)\,\gamma(x)^{\tau p}\,|\, D^\alpha u(x)\,|^p\, dx \leq$$

$$\leq c_8 \,\|\, u \,\|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \tag{4.12}$$

Da (4.11) e (4.12) si ha

$$\|\, u \,\|^p_{W^{r,p}(\widetilde{\Sigma}_l)} \leq c \,\|\, u \,\|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)}$$

da cui, in virtù del lemma 4.1, si ottiene la tesi.

Per ogni $k \in \mathrm{N}$ consideriamo $\delta_k \in \mathrm{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$ soddisfacente alle seguenti condizioni

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad |x| \leq k \\ 0 & \text{per} \quad |x| > 2k \end{cases} \tag{4.13}$$

$$|\, \rho^{|\alpha|}(x)\, D^\alpha \delta_k(x)\,| \leq c_{|\alpha|} \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{N}_0^n \tag{4.14}$$

con $c_{|\alpha|}$ costante indipendente da $k \in \mathrm{N}$.

Sussiste il seguente

LEMMA 4.4. *Siano* $s \in \mathrm{R}$, $r \in \overline{\mathrm{R}}_+$, p *reale* ≥ 1, $\tau \geq 0$. *Se* $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$ *allora*

$$\forall\, k \in \mathrm{N} \qquad \delta_k u - u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega) \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \|\, \delta_k u - u \,\|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} = 0\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$

$$\forall\, x_0 \in \Omega\,,\ \forall\, k \in \mathrm{N}:\ \|\, (\delta_k^* - 1)\, u^* \,\|^p_{W^{r,p}(\mathrm{I}^*(x_0))} \leq c \,\|\, u^* \,\|^p_{W^{r,p}(\mathrm{I}^*(x_0))} \tag{4.15}$$

con c costante indipendente da k e da u.

Infatti

$$\| (\delta_k^* - 1)\, u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \leq c'' \| \delta_k^* - 1 \|^p_{A^r(I^*(x_0))} \cdot \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \leq$$

$$\leq c'' \| \delta_k^* - 1 \|^p_{A^{[r]+1}(I^*(x_0))} \cdot \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} =$$

$$= c'' \sum_{|\alpha| \leq [r]+1} \sup_{\xi \in I^*(x_0)} | D^\alpha_\xi (\delta_k^* - 1)(\xi) |^p \cdot \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} =$$

$$= c'' \sum_{|\alpha| \leq [r]+1} \sup_{x \in I(x_0)} \varrho^{|\alpha| p}(x_0) | D^\alpha_x (\delta_k - 1)(x) |^p \cdot \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \leq$$

$$\leq c' (1 + \sum_{|\alpha| \leq [r]+1} \sup_{x \in I(x_0)} \varrho^{|\alpha| p}(x) | D^\alpha \delta_k(x) |^p) \cdot \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \leq$$

$$\leq c' (1 + \sum_{|\alpha| \leq [r]+1} c^p_{|\alpha|}) \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \leq c \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} .$$

Dalla (4.15) si ha

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \quad \varrho^{(s-r)p}(x_0)\, \gamma(x_0)^{\tau p} \| (\delta_k^* - 1)\, u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \leq$$

$$\leq c\, \varrho^{(s-r)p}(x_0)\, \gamma(x_0)^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \in L^1(\Omega) \tag{4.16}$$

Perciò

$$(\delta_k - 1)\, u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega) \qquad \forall\, k \in \mathbf{N} \tag{4.17}$$

d'altra parte è facile verificare che

$$\lim_{k \to \infty} \| (\delta_k^* - 1)\, u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} = 0 \tag{4.18}$$

Da (4.18), potendo applicare per la (4.16) il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, ho:

$$\lim_{k \to \infty} \| \delta_k u - u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \varrho^{(s-r)p}(x_0)\, \gamma(x_0)^{\tau p} \| (\delta_k^* - 1)\, u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))}\, dx_0 = 0 .$$

Dimostrazione del teorema 4.1. Sia $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$, allora, per la (4.17)

$$\forall\, k \in \mathbf{N} \qquad \delta_k u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$$

ma, poiché supp $\delta_k u$ è compatto $\subset \overline{\Omega}$, in virtù del lemma 4.3, sarà

$$\delta_k u \in W^{r,p}(\Omega) \qquad \forall\, k \in \mathbf{N}$$

Poiché $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{r,p}(\Omega)$ (cfr. [8]), per ogni $k \in N$ esisterà una successione $(u_n^k)_{n\in N}$ di elementi di $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n^k - \delta_k u \|^p_{W^{r,p}(\Omega)} = 0 \tag{4.19}$$

In virtù ora del lemma 4.2, per ogni $k \in N$ e per ogni $n \in N$

$$\begin{aligned} \| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} &\leq c' \| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|^p_{W^{r,p}(\Omega)} \leq \\ &\leq c \| u_n^k - \delta_k u \|^p_{W^{r,p}(\Omega)} \end{aligned} \tag{4.20}$$

ove c' e c sono due costanti che dipendono unicamente da k.

Da (4.19) e (4.20) allora si ha

$$\forall\, k \in N \qquad \lim_{n\to\infty} \| \delta_k u_n^k - \delta_k^2 u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} = 0$$

perciò

$$\forall\, k \in N \quad \exists\, n_k \in N \quad \exists' \| \delta_k u^k_{n_k} - \delta_k^2 u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} < \frac{1}{k} \tag{4.21}$$

pongo ora

$$\forall\, k \in N \qquad v_k = \delta_k u^k_{n_k}$$

ed osservo che, in virtù della (4.21) e del lemma 3.2, ho:

$$\begin{aligned} \forall\, k \in N \qquad \| v_k - u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} &\leq \| v_k - \delta_k^2 u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} + \\ + \| \delta_k^2 u - \delta_k u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} + \| \delta_k u - u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} &< \frac{1}{k} + \\ + \| \delta_k \|_{M^{(r)(1)}} \cdot \| \delta_k u - u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} + \| \delta_k u - u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} & \end{aligned}$$

da cui, per la (4.14), abbiamo

$$\forall\, k \in N \quad \| v_k - u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} < \frac{1}{k} + c \| \delta_k u - u \|_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \tag{4.22}$$

ove c è una costante indipendente da k.

Dalla (4.22) e dal lemma 4.4 si ha ovviamente la tesi.

5. - Spazi di tracce.

D'ora in avanti si supporrà $\Omega = R^n_+$ e che la funzione $\rho(x)$ soddisfa le seguenti due ulteriori condizioni [5]

$$\forall\ (x'_0, t_0) \in \bar{\Omega}: \quad \ell \leq \rho(x'_0, 0) \leq \rho(x'_0, t_0) \tag{5.1}$$

$$\rho(x_0, t_0) = \rho(x'_0, 0) + k_1 t_0 \tag{5.2}$$

ove ℓ, k_1 sono costanti positive indipendenti da $x_0 = (x'_0, t_0)$.

Porremo $c_0 = \max\{k_1, 1\}$; $\forall\ x'_0 \in R^{n-1}$ porremo poi

$$\bar{\rho}(x'_0) = \rho(x'_0, 0)$$

$$I_{\beta\bar{\rho}}(x'_0) = \{x' \in R^{n-1} \mid |x' - x'_0| < \beta\bar{\rho}(x'_0)\} \qquad \beta \in R_+$$

$$T_{\delta, x'_0} = \{t_0 \in \bar{R}_+ \mid t_0 < \delta \cdot \rho(x'_0, 0)\} \quad \text{ove} \quad \delta \in R_+ .$$

Lemma 5.1. *Sia $k' > 1$ tale che $k = k' \cdot k_1 > 1$. Allora per ogni $x'_0 \in R^{n-1}$ e per ogni $t_0 \in T_{\frac{1}{k}, x'_0}$ la sfera $\Gamma(x'_0, t_0)$ di centro (x'_0, t_0) e raggio $\rho(x'_0, t_0)$ ha intersezione non vuota con l'iperpiano R^{n-1} ed inoltre, posto $\beta = \sqrt{\dfrac{k^2 - 1}{k^2}}$, si ha*

$$I_{\beta\bar{\rho}}(x'_0) \subset \Gamma(x'_0, t_0) \cap R^{n-1} \quad \forall\ x'_0 \in R^{n-1}, \quad \forall\ t_0 \in T_{\frac{1}{k}, x'_0} .$$

Dimostrazione. Si osserva immediatamente che in virtù della (5.1)

$$\Gamma(x'_0, t_0) \cap R^{n-1} = \{x' \in R^{n-1} \mid |x' - x'_0| < \sqrt{\rho(x'_0, t_0)^2 - t_0^2}\} \neq \emptyset$$

$$\forall\ x'_0 \in R^{n-1}, \qquad \forall\ t_0 \in T_{\frac{1}{k}, x'_0}$$

d'altra parte $\forall\ x'_0 \in R^{n-1}$ e $\forall\ t_0 \in T_{\frac{1}{k}, x'_0}$, se $x' \in I_{\beta\bar{\rho}}(x'_0)$ si ha

$$|x' - x'_0| < \beta\rho(x'_0, 0) = \sqrt{\rho(x'_0, 0)^2 - \frac{\rho(x'_0, 0)^2}{k^2}} < \sqrt{\rho(x'_0, 0)^2 - t_0^2}$$

da cui $x' \in \Gamma(x'_0, t_0) \cap R^{n-1}$.

[5] Funzioni $\rho(x', t)$ che verificano la C_2) e le (5.1), (5.2) sono ad esempio

$$\rho(x', t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + |x'| + t}{2}\right) \text{ o } \rho(x', t) = \frac{1 + t}{2} .$$

LEMMA 5.2. *Se r, p, τ, s sono numeri reali di cui $r \geq 0$, $p \geq 1$, $\tau \geq 0$*

$$c_1 \| u \|^p_{W^{r,p}_{s-\tau}(\Omega)} \leq \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \leq c_2 \| u \|^p_{W^{r,p}_{s+\tau}(\Omega)}$$

ove c_1 e c_2 sono due costanti positive indipendenti da $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$; allora, in virtù del lemma 2.1

$$\| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \sim \int_\Omega \rho^{(s-\tau-r)p}(x_0) \left(\frac{\rho^2(x_0)}{1+\rho^2(x_0)} \right)^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \, dx_0 .$$

Inoltre, in virtù della (5.1)

$$\exists\, c_1' \in R_+ \quad \ni' \quad \forall\, x_0 \in \Omega : \left(\frac{\rho^2(x_0)}{1+\rho^2(x_0)} \right)^{\tau p} \geq c_1'$$

per cui

$$\| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \geq c_1 \| u \|^p_{W^{r,p}_{s-\tau}(\Omega)}$$

$c_1 \in R_+$ indipendente da $u \in W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

D'altra parte si ha ovviamente

$$\| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)} \sim \int_\Omega \rho^{(s-\tau-r)p}(x_0) \left(\frac{\rho^2(x_0)}{1+\rho^2(x_0)} \right)^{\tau p} \| u^* \|^p_{W^{r,p}(I^*(x_0))} \, dx_0 \leq$$

$$\leq c_2' \| u \|^p_{W^{r,p}_{s+\tau}(\Omega)}$$

da cui la tesi.

In virtù del lemma 5.2 in quanto segue prenderemo in considerazione solo gli spazi $W^{r,p}_s(\Omega)$; i risultati che si otterranno si possono facilmente estendere agli spazi $W^{r,p}_{s,\tau}(\Omega)$.

Se p reale > 1 ed r reale $> \dfrac{1}{p}$, porremo

$$\ell_r = \text{massimo intero minore di } r - \frac{1}{p}$$

$$\forall\, j \in \{0, 1, \ldots, \ell_r\} \quad \text{e} \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\overline{R^n}_+)$$

porremo

$$\gamma_j u = D^j_{x_n} u(x', 0) .$$

TEOREMA 5.1. *Siano* $s \in \mathrm{R}$, p *reale* > 1 *ed* r *reale* $> \frac{1}{p}$ *e tale che* $r \neq \frac{1}{p} \pmod 1$. *L'applicazione* $\mathcal{F} : u \longrightarrow (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{\ell_r} u)$ *definita su* $\mathrm{C}_0^\infty(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$ *si prolunga per continuità in una applicazione che ancora indichiamo con* $\mathcal{F} : u \longrightarrow (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{\ell_r} u)$, *lineare e continua da* $\mathrm{W}^{r,p}_{s,\rho}(\mathrm{R}^n_+)$ *in* $\prod_{j=0}^{\ell_r} \mathrm{W}^{r-j-1/p,\,p}_{s,\beta_j\bar{\rho}}(\mathrm{R}^{n-1})$, *ove per ogni* $j \in \{0, \ldots, \ell_r\}$

$$\beta_j = \int_0^{1/k} (1+\tau)^{(s-r)p+jp}\, d\tau$$

e k *è un numero positivo come nel lemma 5.1.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, se $\vartheta \in \mathrm{R}$ e $x'_0 \in \mathrm{R}^{n-1}$ $\exists\, \beta > 0$ tale che

$$\int_{\mathrm{T}_{\frac{1}{k},x'_0}} \rho(x'_0, t_0)^\vartheta\, dt_0 \sim \beta\, (\bar{\rho}(x'_0))^{\vartheta+1} \tag{5.3}$$

infatti, posto $\tau = \dfrac{t_0}{\rho(x'_0, 0)}$, in virtù della (5.2) abbiamo:

$$\int_0^{\frac{\rho(x'_0,0)}{k}} \rho(x'_0, t_0)^\vartheta\, dt_0 \sim \int_0^{1/k} (\rho(x'_0, 0) + \rho(x'_0, 0)\cdot\tau)^\vartheta \cdot \rho(x'_0, 0)\, d\tau =$$

$$= \rho(x'_0, 0)^{\vartheta+1} \int_0^{1/k} (1+\tau)^\vartheta\, d\tau = \beta\, (\bar{\rho}(x'_0))^{\vartheta+1} \quad \text{ove} \quad \beta = \int_0^{1/k} (1+\tau)^\vartheta\, d\tau .$$

$$\text{Se } u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n_+) \text{ e } \beta_j = \int_0^{1/k} (1+\tau)^{(s-r)p+jp}\, d\tau \quad (j = 0, 1, \ldots, \ell_r),$$

per la (5.3) allora abbiamo

$$\| \gamma_j u \|^p_{\mathrm{W}^{r-j-1/p,\,p}_{s,\beta_j\bar{\rho}}(\mathrm{R}^{n-1})} \sim \int_{\mathrm{R}^{n-1}} \beta_j\, (\bar{\rho}(x'_0))^{(s-(r-j-1/p))p}$$

$$\| (\gamma_j u)^* \|^p_{\mathrm{W}^{r-j-1/p,\,p}(\mathrm{I}^*_{\beta_j\bar{\rho}}(x'_0))}\, dx'_0 \sim$$

$$\sim \int_{\mathrm{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathrm{T}_{\frac{1}{k},x'_0}} \rho^{(s-r)p+jp}(x'_0, t_0)\, dt_0 \right) \| (\gamma_j u)^* \|^p_{\mathrm{W}^{r-j-1/p,\,p}(\mathrm{I}^*_{\beta_j\bar{\rho}}(x'_0))}\, dx'_0 \tag{5.4}$$

D'altra parte

$$\| (\gamma_j u)^* \|^p_{W^{r-j-1/p,p}(I^*_{\beta_j \bar{\rho}}(x'_0))} =$$

$$= (\beta_j \bar{\rho}(x'_0))^{-jp} \| \gamma_j u^* \|^p_{W^{r-j-1/p,p}(I^*_{\beta_j \bar{\rho}}(x'_0))} \qquad (5.5)$$

ma in virtù della (5.2),

$$(\beta_j \bar{\rho}(x'_0))^{-jp} = (\beta_j \rho(x'_0, 0))^{-jp} \leq (\rho(x'_0, t_0) - k_1 t_0)^{-jp}$$

perciò, se $t_0 \in T_{\frac{1}{k}, x'_0}$, abbiamo

$$(\beta_j \bar{\rho}(x'_0))^{-jp} \leq c_1 \left(\rho(x'_0, t_0) - \frac{\rho(x'_0, 0)}{k'}\right)^{-jp} \leq$$

$$\leq c_1 \left(\rho(x'_0, t_0) - \frac{\rho(x'_0, t_0)}{k'}\right)^{-jp} = c_2 (\rho(x'_0, t_0))^{-jp} \qquad (5.6)$$

ove c_1 e c_2 sono due costanti positive indipendenti da x'_0 e t_0.

Da (5.4), (5.5), (5.6) abbiamo allora

$$\| \gamma_j u \|^p_{W^{r-j-1/p,p}_{s,\beta_j \rho}(R^{n-1})} \leq$$

$$\leq c_3 \int_{R^{n-1}} \left(\int_{T_{\frac{1}{k}, x'_0}} (\rho(x'_0, t_0))^{(s-r)p} dt_0 \right) \| \gamma_j u^* \|^p_{W^{r-j-1/p,p}(I^*_{\beta_j \bar{\rho}}(x'_0))} dx'_0 \qquad (5.7)$$

ove c_3 è una costante positiva indipendente da u.

In virtù del lemma 5.1 [6]

$$\forall\, x'_0 \in R^{n-1}, \qquad \forall\, t_0 \in T_{\frac{1}{k}, x'_0} \qquad I^*_{\beta_j \bar{\rho}}(x'_0) \subset (\Gamma(x'_0, t_0) \cap R^{n-1})^*,$$

perciò, per noti teoremi di tracce, si ha

$$\| \gamma_j u^* \|^p_{W^{r-j-1/p,p}(I^*_{\beta_j \bar{\rho}}(x'_0))} \leq \| \gamma_j u^* \|^p_{W^{r-j-1/p,p}((\Gamma(x'_0, t_0) \cap R^{n-1})^*)} \leq$$

$$\leq c_4 \| u^* \|^p_{W^r(I^*(x'_0, t_0))} \qquad (5.8)$$

$c_4 \in R_+$ indipendente da u.

[6] Si scelga $k > 1$ tale che $\beta_j < \sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}}$.

Da (5.7) e (5.8) allora

$$\| \gamma_j u \|^p_{W^{r-j-1/p,p}_{s,\beta_j\rho}(R^{n-1})} \leq$$

$$\leq c_5 \int_{R^{n-1}} \int_0^{+\infty} (\rho(x'_0, t_0))^{(s-r)p} \| u^* \|^p_{W^r(I^*(x'_0,t_0))} dx'_0 \, dt_0 \sim \| u \|^p_{W^{r,p}_{s,\rho}(R^n_+)}$$

$c_5 \in R_+$ indipendente da u.

Abbiamo pertanto provato che $\mathfrak{T}$ è una applicazione lineare e continua da $C_0^\infty(R^n_+)$, munito della topologia indotta da $W^{r,p}_{s,\rho}(R^n_+)$, in $\prod_{j=0}^{\ell_r} W^{r-j-1/p,p}_{s,\beta_j\rho}(R^{n-1})$; perciò, essendo $C_0^\infty(\bar{R}^n_+)$ denso in $W^{r,p}_{s,\rho}(R^n_+)$, tale applicazione può prolungarsi per continuità in una applicazione lineare e continua da $W^{r,p}_{s,\rho}(R^n_+)$ in $\prod_{j=0}^{\ell_r} W^{r-j-1/p,p}_{s,\beta_j\rho}(R^{n-1})$.

TEOREMA 5.2. *Siano* $s \in R$, $p \in R$ $p > 1$ *e* $k \in N$. *Sia poi*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \in \prod_{\ell=0}^{k-1} W^{k-\ell-1/p,p}_{s,\rho}(R^{n-1}).$$

Allora esiste $U \in W^{k,p}_{s,\rho}(R^n_+)$ *tale che* $\gamma_\ell U = \varphi_\ell \; \forall \ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Alla dimostrazione del teorema 5.2 si perverrà facilmente una volta premessi alcuni lemmi.

LEMMA 5.3. *Sia* $\varepsilon > 0$, *allora, posto* $S_{2\varepsilon} = \{(x', t) \in R^n_+ \mid t \leq 2\varepsilon\}$, *esistono due costanti positive* $a_{1\varepsilon}$, $a_{2\varepsilon}$ *infinitesime con* ε *e tali che*

$$\forall \, x'_0 \in R^{n-1} \quad \text{e} \quad \forall \, t_0 \geq a_{2\varepsilon} \rho(x'_0, 0)$$

si ha

$$\{ (x', t) \in R^n \mid \sqrt{|x' - x'_0|^2 + (t - t_0)^2} < a_{1\varepsilon} \rho(x'_0, t_0) \} \cap S_{2\varepsilon} = \emptyset .$$

Dimostrazione. Se $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 1$, per la (5.1) esisterà $\gamma_\varepsilon > 0$ tale che $\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = +\infty$ e

$$\frac{\rho(x'_0, 0)}{\gamma_\varepsilon} > \lambda(2\varepsilon) \qquad \forall \, x'_0 \in R^{n-1} \tag{5.9}$$

consideriamo $k_\varepsilon' > 0$ tale che $\left(k_\varepsilon' - \frac{k_\varepsilon'}{\lambda} - c_0\right)\frac{1}{c_0} \geq \gamma_\varepsilon$, si avrà allora che

$$\forall\, x'_0 \in \mathrm{R}^{n-1} \text{ e } \forall\, t_0 \geq \frac{\rho(x'_0, 0)}{\gamma_\varepsilon} : t_0\left(k_\varepsilon' - \frac{k_\varepsilon'}{\lambda}\right) \geq c_0(\rho(x'_0, 0) + t_0)$$

da cui, in virtù della (5.2):

$$\left(t_0 - \frac{t_0}{\lambda}\right) \geq \frac{\rho(x'_0, t_0)}{k_\varepsilon'} \tag{5.10}$$

Da (5.9) e (5.10) ho:

$$\forall\, x'_0 \in \mathrm{R}^{n-1} \quad \text{e} \quad \forall\, t_0 \geq \frac{\rho(x'_0, 0)}{\gamma_\varepsilon} : (t_0 - 2\varepsilon) \geq \frac{\rho(x'_0, t_0)}{k_\varepsilon'} \tag{5.11}$$

e perciò:

$$\forall\, x'_0 \in \mathrm{R}^{n-1}, \quad \forall\, t_0 \geq \frac{\rho(x'_0, 0)}{\gamma_\varepsilon}$$

e

$$\forall\, t \in [0, 2\varepsilon] \quad \frac{\rho^2(x'_0, t_0)}{k_\varepsilon'^2} - (t - t_0)^2 \leq 0$$

da cui ovviamente la tesi.

LEMMA 5.4. *Siano a e b due numeri reali positivi. Allora per ogni* $(x'_0, t_0) \in \mathrm{R}^{n-1} \times \mathrm{T}_{a,x'_0}$

$$\mathrm{I}_{b\rho}(x'_0, t_0) \subset \mathrm{I}_{\alpha\rho}(x'_0, 0) \quad \text{ove} \quad \alpha = \sqrt{2(b^2 c_0^2 (1 + a)^2 + a^2)}$$

Dimostrazione. Sia $(x'_0, t_0) \in \mathrm{R}^{n-1} \times \mathrm{T}_{a,x'_0}$ ed $(x', t) \in \mathrm{I}_{b\rho}(x_0', t_0)$ allora

$$|x' - x'_0|^2 + t^2 = |x' - x'_0|^2 + (t - t_0 + t_0)^2 \leq |x' - x'_0|^2 +$$

$$+ 2(t - t_0)^2 + 2t_0^2 \leq 2(b^2 \rho(x'_0, t_0)^2 + t_0^2) \leq 2(b^2 c_0^2 (\rho(x'_0, 0) + t_0)^2 +$$

$$+ t_0^2) \leq 2(b^2 c_0^2 (1 + a)^2 \cdot \rho^2(x'_0, 0) + a^2 \rho^2(x'_0, 0))$$

in definitiva dunque

$$(x', t) \in \mathrm{I}_{\alpha\rho}(x'_0, 0).$$

Sia $R \in C_0^\infty(R^{n-1})$ con supporto contenuto nella sfera di R^{n-1} di raggio unitario e centro nell'origine e tale che $\int_{R^{n-1}} R(x')\,dx' = 1$.

Denoteremo con Π la piramide di R^n

$$\Pi = \{ (x', t) \in R^n \mid 0 < t < 1,\ |x_i'| < 1 - t \quad i = 1, \ldots, n-1 \}$$

e con C la sua base

$$C = \{ x' \in R^{n-1} \mid |x_i'| < 1 \quad i = 1, \ldots, n-1 \}$$

si dimostra il seguente (cfr. J. Necas [8] pp. 100-103).

LEMMA 5.5. *Assegniamo un intero $\ell \geq 0$ ed una funzione $\varphi_\ell \in C_0^\infty(R^{n-1})$ e poniamo*

$$u_\ell(x', t) = t^\ell \int_{|z|<1} R(z) \cdot \varphi_\ell(x' + tz)\,dz$$

si ha allora:

$$\text{a) } u_\ell \in C^\infty(\bar{R}^n_+) \quad e \quad \gamma_\ell u_\ell(x') = \frac{\partial^\ell u_\ell}{\partial t^\ell}(x', 0) =$$

$$= \varphi_\ell(x') \qquad \forall\, x' \in R^{n-1}$$

b) *Esistono $r, \delta > 0$ tali che*

$$u_\ell(x', t) = 0 \quad per \quad |x'| \geq r \quad e \quad t \in [0, \delta]$$

c) *Per ogni intero $k \geq \ell + 1$ e per ogni $p > 1$ esiste una costante c indipendente da φ_ℓ tale che*

$$\| u_\ell \|_{W^{k,p}(\Pi)} \leq c \| \varphi_\ell \|_{W^{k-\ell-1/p,\,p}(C)}$$

LEMMA 5.6. *Siano assegnati $p > 1$, $k \in N$, $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ e $\varphi_\ell \in C_0^\infty(R^{n-1})$.*

Sia $u_\ell(x', t) = t^\ell \int_{|z|<1} R(z)\,\varphi_\ell(x' + tz)\,dz = t^{\ell-n+1} \int_{|x'-y|<t} R\left(\frac{y - x'}{t}\right) \varphi_\ell(y)\,dy$.

Assegniamo inoltre $x'_0 \in R^{n-1}$ *e poniamo*

$$u_\ell^*(\eta, \tau) = u_\ell(x'_0 + \rho(x'_0, 0)(\eta - x'_0), \rho(x'_0, 0)\tau)$$

$$\varphi_\ell^*(\eta) = \varphi_\ell(x'_0 + \rho(x'_0, 0)(\eta - x'_0)).$$

Esistono allora tre numeri positivi δ, α *e* c *indipendenti da* φ_ℓ *e da* x'_0, *tali che*

$$\| u_\ell^* \|_{W^{k,p}(I^*_{\delta\rho}(x'_0,0))} \leq c\, \rho^\ell(x'_0, 0) \| \varphi_\ell^* \|_{W^{k-\ell-1/p,\,p}(I^*_{\alpha\rho}(x'_0,0))} \tag{5.12}$$

infatti si ha evidentemente

$$u_\ell^*(\eta, t) = \rho^\ell(x'_0, 0)\, \tau^{\ell-n+1} \int_{|\xi-\eta|<\tau} R\left(\frac{\xi - \eta}{\tau}\right) \varphi_\ell^*(\xi)\, d\xi$$

in virtù del lemma 5.5 allora

$$\| u_\ell^* \|_{W^{k,p}(\Pi^*)} \leq c\, \rho^\ell(x'_0, 0) \| \varphi_\ell^* \|_{W^{k-\ell-1/p,\,p}(C^*)} \tag{5.13}$$

ove si è posto

$$\Pi^* = \{ (\eta, \tau) \in R^n \mid 0 < \tau < 1,\ |\eta_i - x_{0_i}| < 1 - \tau \quad i = 1, \ldots, n-1 \}$$

$$C^* = \{ \eta \in R^{n-1} \mid |\eta_i - x_{0_i}| < 1 \quad i = 1, \ldots, n-1 \}.$$

D'altra parte esistono senz'altro due costanti α e δ indipendenti da x'_0 tali che

$$I^*_{\delta\rho}(x'_0, 0) \subset \Pi^* \subset I^*_{\alpha\rho}(x'_0, 0)$$

per cui da (5.13) si ha

$$\| u^* \|_{W^{k,p}(I^*_{\delta\rho}(x'_0,0))} \leq c'\, \rho(x'_0, 0)^\ell \| \varphi_\ell^* \|_{W^{k-\ell-1/p,\,p}(I^*_{\alpha\rho}(x'_0))}.$$

Dimostrazione del teorema 5.2. Per ogni $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ sia assegnato

$$\varphi_\ell \in W^{k-\ell-1/p,\,p}_{s,\rho}(R^{n-1})$$

e consideriamo

$$u_\ell(x', t) = t^{\ell-n+1} \int_{|x'-y'|<t} R\left(\frac{y' - x'}{t}\right) \varphi_\ell(y')\, dy'.$$

Assegniamo ora $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\zeta \in M^k(R^n_+)$ tale che

$$\zeta(x', t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t > 2\varepsilon \\ 1 & \text{se} \quad 0 < t < \varepsilon \end{cases}$$

In virtù del lemma 5.6 per ogni $x'_0 \in R^{n-1}$ $\| u^* \|_{W^{k,p}(I^*_{\delta\rho}(x'_0,0))} < +\infty$ e perciò posto $V_\ell = \zeta u_\ell$ si ha, in virtù del lemma 3.1:

$$\forall\, x'_0 \in R^{n-1} \quad \| V_\ell{}^* \|_{W^{k,p}(I^*_{\delta\rho}(x'_0,0))} = \| \zeta^* u^*_\ell \|_{W^{k,p}(I^*_{\delta\rho}(x'_0,0))} \leq$$

$$\leq c \| u_\ell{}^* \|_{W^{k,p}(I^*_{\delta\rho}(x'_0,0))} \tag{5.14}$$

c costante indipendente da x'_0.
In virtù dei precedenti lemmi allora in corrispondenza di ε esistono le costanti positive $a_{1\varepsilon}$, $a_{2\varepsilon}$, $a_{3\varepsilon}$ con $\lim_{\varepsilon \to 0} a_{i\varepsilon} = 0\ (i = 1, 2, 3)$, tali che

$$\int_{R^n_+} (\rho(x'_0, t_0))^{(s-k)p} \| V_\ell{}^* \|^p_{W^{k,p}(I^*_{a_{1\varepsilon}\rho}(x'_0,t_0))}\, dx'_0\, dt_0 \backsim$$

$$\backsim \int_{R^{n-1}} dx'_0 \int_{T_{a_{2\varepsilon}, x'_0}} \rho^{(s-k)p}(x'_0, t_0) \| V_\ell{}^* \|^p_{W^{k,p}(I^*_{a_{1\varepsilon}\rho}(x'_0,t_0))}\, dt_0 \leq$$

$$\leq c_1 \int_{R^{n-1}} dx'_0 \int_{T_{a_{2\varepsilon}, x'_0}} (\rho(x'_0, t_0))^{(s-k)p} \| V_\ell{}^* \|^p_{W^{k,p}(I^*_{a_{3\varepsilon}\rho}(x'_0,0))}\, dt_0 \leq$$

$$\leq c_2 \int_{R^{n-1}} dx'_0 \int_{T_{a_{2\varepsilon}, x'_0}} (\rho(x'_0, t_0))^{(s-k)p} \| u^*_\ell \|^p_{W^{k,p}(I^*_{a_{3\varepsilon}\rho}(x'_0,0))}\, dt_0 \leq$$

[7]

$$\leq c_3 \int_{R^{n-1}} dx'_0 \int_{T_{a_{2\varepsilon}, x'_0}} (\rho(x'_0, t_0))^{(s+\ell-k)p} \| \varphi^*_\ell \|^p_{W^{k-\ell-1/p,\,p}(I^*_{\alpha\rho}(x'_0,0))}\, dt_0 =$$

[7] Si sceglie $\varepsilon > 0$ in modo tale che $a_{3\varepsilon} \leq \delta$ (δ ed α sono le costanti che compaiono nel lemma 5.6).

$$= c_3 \int_{R^{n-1}} \Big(\int_{T_{a_{2\varepsilon}, x'_0}} (\rho(x'_0, t_0))^{(s+\ell-k)p} \, dt_0 \Big) \| \varphi_\ell^* \|^p_{W^{k-\ell-1/p, p}(I^*_{a\rho}(x'_0, 0))} \, dx'_0 \leq$$

$$\leq c_4 \int_{R^{n-1}} (\rho(x'_0, 0))^{(s+\ell+1/p-k)p} \| \varphi_\ell^* \|^p_{W^{k-\ell-1/p, p}(I^*_{a\rho}(x'_0, 0))} \, dx'_0 \leq$$

$$\leq c_5 \| \varphi_\ell \|^p_{W^{k-\ell-1/p, p}_{s, p}(R^{n-1})} .$$

In definitiva per ogni $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ abbiamo costruito $V_\ell \in W^{k,p}_{s,p}$ tale che $\gamma_\ell V_\ell = \varphi_\ell$. Consideriamo ora per ogni $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

$$U_\ell(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} c_{j\ell} V_\ell(x_1, \ldots, x_{n-1}, jx_n) \in W^{k,p}_{s,p} \quad (R^n_+)$$

ove $c_{j\ell}$ sono costanti tali che

$$\sum_{j=1}^{k} j^q c_{j\ell} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q \neq \ell \\ 1 & \text{se} \quad q = \ell \end{cases} \qquad 0 \leq q \leq k-1$$

Evidentemente per ogni $q \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

$$\gamma_q U_\ell = \sum_{j=1}^{k} c_{j\ell} \gamma_q V_\ell(x_1, \ldots, x_{n-1}, jx_n) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q \neq \ell \\ \gamma_q V_q = \varphi_q & \text{se} \quad q = \ell \end{cases} \tag{5.15}$$

Consideriamo ora

$$U = \sum_{\ell=0}^{k-1} U_\ell \in W^{k,p}_{s,p} \quad (R^n_+)$$

allora $\forall\, q \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$: $\gamma_q U = \sum_{\ell=0}^{k-1} \gamma_q U_\ell = \varphi_q$

e così resta provato il teorema 5.2.

Capitolo II

6. - Ipotesi e risultati.

Sia $m \in \mathbf{N}$ ed assegniamo in $\mathbf{R}^n_+$ un operatore differenziale lineare d'ordine $2m$

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}(x, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha \tag{6.1}$$

Assegniamo poi sull'iperpiano $\mathbf{R}^{n-1}$ un sistema $\{\mathrm{B}_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ di m operatori differenziali di frontiera della forma

$$\mathrm{B}_j = \mathrm{B}_j(x', \mathrm{D}) = \sum_{|\mu| \leqslant m_j} b_{j\mu}(x')\, \mathrm{D}^\mu \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, m \\ m_j \leq 2m - 1 \end{matrix} \tag{6.2}$$

Supporremo che la funzione $\rho(x)$, oltre a verificare le proprietà C_2), (5.1), (5.2), sia tale che [8]

$$\lim_{|x| \to \infty} (|x| - \rho(x)) = +\infty .$$

Se $s \geq 0$ indicheremo con $[s]^+$ il più piccolo intero $\geq s$.

Sia ora ℓ un numero positivo tale che $\ell \geq 2m$ e supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

I_1) Le derivate, nel senso delle distribuzioni, $\mathrm{D}^\gamma a_\alpha(x)$ sono di classe $\mathrm{L}^\infty_{2m+|\gamma|-|\alpha|}(\mathbf{R}^n_+)$ per $|\gamma| \leq [\ell]^+ - 2m$ ed $|\alpha| \leq 2m$. Se $|\alpha| = 2m$, i coefficienti $a_\alpha(x)$ sono continui in $\bar{\mathbf{R}}^n_+$ e convergenti all'infinito. Se indichiamo con x_1 il punto all'infinito porremo

$$\lim_{|x| \to +\infty} a_\alpha(x) = a_\alpha(x_1) \, (|\alpha| = 2m)$$

I_2) Le derivate, nel senso delle distribuzioni, $\mathrm{D}^\gamma b_{j\mu}$ sono di classe $\mathrm{L}^\infty_{m_j+|\gamma|-|\mu|}(\mathbf{R}^{n-1})$ per $|\gamma| \leq [\ell - m_j - \tfrac{1}{2}]^+$ e $|\mu| \leq m_j$. Se $|\mu| = m_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ i coefficienti $b_{j\mu}(x')$ sono continui in $\mathbf{R}^{n-1}$ e convergenti all'infinito. Se indichiamo con x'_1 il punto all'infinito dell'iperpiano $\mathbf{R}^{n-1}$, porremo

$$\lim_{|x'| \to +\infty} b_{j\mu}(x') = b_{j\mu}(x'_1) \, (|\mu| = m_j, \quad j = 1, \ldots, m) .$$

[8] Funzioni $\rho(x', t)$ di questo tipo sono ad esempio

$$\rho(x', t) = \frac{1}{2} \left(- \frac{1 + |x'| + t}{2} \right) \quad \text{o} \quad \rho(x', t) = \frac{1 + t}{2} .$$

I_3) $A(x, D)$ è *propriamente ellittico* in $\bar{R}^n_+ \cup \{x_1\}$ cioè, fissato $x \in \bar{R}^n_+ \cup \{x_1\}$, $A'(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0 \quad \forall\, \xi \in R^n - \{0\}$; ed inoltre $\forall\, \xi' \in R^{n-1} - \{0\}$ il polinomio nella variabile complessa $Z \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi'^{\alpha'} Z^{\alpha_n}$ ha m radici con parte immaginaria positiva. Indicheremo con $Z^+_1(x, \xi'), \ldots, Z^+_m(x, \xi')$ tali radici.

I_4) Gli operatori B_j $(j = 1, \ldots, m)$ soddisfano la *condizione complementare* rispetto ad A su $R^{n-1} \cup \{x'_1\}$ cioè, fissato $x' \in R^{n-1} \cup \{x'_1\}$, per ogni $\xi' \in R^{n-1} - \{0\}$ i polinomi nella variabile complessa $Z \sum_{|\mu|=m_j} b_{j\mu}(x')\xi'^{\mu'} Z^{\mu_n}$ $(j = 1, \ldots, m)$ sono linearmente indipendenti modulo il polinomio $\prod_{k=1}^{m} (Z - Z_{k^+}(x, \xi'))$.

In questo capitolo vogliamo dimostrare il seguente teorema di regolarizzazione.

TEOREMA 6.1. *Siano verificate le ipotesi I_1), I_2), I_3), I_4) e sia s un assegnato numero reale. Per ogni funzione $u \in L^2_{2m+s-\ell}(R^n_+)$ e tale che*

$$u \in W^{\ell}(T) \qquad \text{per ogni compatto } T \subset \bar{R}^n_+ \tag{6.3}$$

$$A\,u \in W^{\ell-2m}_{s+2m}(R^n_+) \tag{6.4}$$

$$B_j\,u \Big|_{x_n = 0} = g_j \in W^{\ell-m_j-\frac{1}{2}}_{2m+s,\,\rho}(R^{n-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{6.5}$$

si ha che $u \in W^{\ell}_{2m+s}(R^n_+)$ e sussiste la limitazione

$$\| u \|_{W^{\ell}_{2m+s}(R^n_+)} \leq c \left(\| A\,u \|_{W^{\ell-2m}_{s+2m}(R^n_+)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{W^{\ell-m_j-\frac{1}{2}}_{2m+s,\,\rho}(R^{n-1})} + \right.$$

$$\left. + \| u \|_{L^2_{2m+s-\ell}(R^n_+)} \right)$$

ove c è una costante indipendente da u.

7. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.1.

Alla dimostrazione del Teorema 6.1 si perverrà facilmente una volta premessi alcuni lemmi.

LEMMA 7.1. *Siano r, ℓ ed ε tre numeri positivi di cui ℓ intero, $\ell \leq r$. Posto allora $\lambda = r - [r]$ sussiste la seguente limitazione*

$$\sum_{|\beta| < \ell} \| D^\beta v \|^2_{W^{r-\ell}(R^n)} \leq c \left\{ \sum_{|\gamma| \leq [r]-1} \left(\varepsilon^{-|\gamma|} \| v \|^2_{L^2(R^n)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \varepsilon^{[r]-|\gamma|} \sum_{|\alpha|=[r]} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(R^n)} \right) (1 + \varepsilon^{-\lambda}) \right\}$$

ove c è una costante positiva indipendente da $v \in W^r(R^n)$ e da ε.

Dimostrazione. Distingueremo due casi

I) $r \in N$: in tal caso se $v \in W^r(R^n)$, $\varepsilon \in R_+$, $|\beta| < \ell$, si ha[9] per noti risultati:

$$\| D^\beta v \|^2_{W^{r-\ell}(R^n)} \sim \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{r-\ell} |\widetilde{D^\beta v}|^2 \, d\xi =$$

$$= \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{r-\ell} \xi^{2\beta} |\tilde{v}|^2 \, d\xi \leq c_1 \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{r-\ell+|\beta|} |\tilde{v}|^2 \, d\xi \sim$$

$$\sim \int_{R^n} |\tilde{v}|^2 \, d\xi + \int_{R^n} |\xi|^{2(r-\ell+|\beta|)} |\tilde{v}|^2 \, d\xi = \| v \|^2_{L^2(R^n)} +$$

$$+ \int_{|\xi|^2 < 1/\varepsilon} |\xi|^{2(r-\ell+|\beta|)} |\tilde{v}|^2 \, d\xi + \int_{|\xi|^2 \geq 1/\varepsilon} |\xi|^{2(r-\ell+|\beta|)} |\tilde{v}|^2 \, d\xi \leq$$

$$\leq (1 + \varepsilon^{-(r-\ell+|\beta|)}) \| v \|^2_{L^2(R^n)} + \int_{|\xi|^2 \geq 1/\varepsilon} |\xi|^{2(r-\ell+|\beta|)} |\tilde{v}|^2 \, d\xi . \qquad (7.1)$$

D'altra parte

$$\int_{|\xi|^2 \geq 1/\varepsilon} |\xi|^{2(r-\ell+|\beta|)} |\tilde{v}|^2 \, d\xi = \int_{\frac{1}{|\xi|^2} \leq \varepsilon} |\xi|^{2(|\beta|-\ell)} \cdot |\xi|^{2r} |\tilde{v}|^2 \, d\xi \leq$$

[9] Se f è una distribuzione temperata, denoteremo con $\tilde{f}$ la sua trasformata di Fourier.

$$\leq \varepsilon^{\ell-|\beta|} \int_{R^n} |\xi|^{2r} |\tilde{v}|^2 \, d\xi \leq c_2 \varepsilon^{\ell-|\beta|} \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} \xi^{2\alpha} |\tilde{v}(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$= c_2 \varepsilon^{\ell-|\beta|} \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(R^n)} . \qquad (7.2)$$

Da (7.1) e (7.2) abbiamo allora

$$\sum_{|\beta|<\ell} \| D^\beta v \|^2_{W^{r-\ell}(R^n)} \leq c_4 \sum_{|\gamma|\leq r-1} \left(\varepsilon^{-|\gamma|} \| v \|^2_{L^2(R^n)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{r-|\gamma|} \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(R^n)} \right) \qquad (7.3)$$

da cui ovviamente la tesi.

II) Supponiamo ora r non intero, in tal caso $r-[r] = \lambda \in]0,1[$. Se $v \in W^r(R^n)$ ed $\varepsilon \in R_+$ abbiamo, in virtù della (7.3):

$$\sum_{|\beta|<\ell} \| D^\beta v \|^2_{W^{r-\ell}(R^n)} \leq c_4 \sum_{|\gamma|\leq [r]-1} \left(\varepsilon^{-|\gamma|} \| v \|^2_{L^2(R^n)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{[r]-|\gamma|} \sum_{|\alpha|=[r]} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(R^n)} \right) +$$

$$+ \sum_{|\beta|<\ell} \sum_{|\alpha|=[r]-\ell} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|D^\alpha(D^\beta v(x)) - D^\alpha(D^\beta v(y))|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}} \, dx \, dy . \qquad (7.4)$$

D'altra parte, con noti passaggi (cfr. Volevich-Paneyakh [13] a pag. 25), si deduce che

$$\sum_{|\beta|<\ell} \sum_{|\alpha|=[r]-\ell} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|D^\alpha(D^\beta v(x)) - D^\alpha(D^\beta v(y))|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}} \, dx \, dy \leq$$

$$\leq \sum_{|\gamma|\leq [r]-1} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|D^\gamma v(x) - D^\gamma v(y)|^2}{|x-y|^{n+2\lambda}} \, dx \, dy =$$

$$= c_5 \sum_{|\gamma|\leq [r]-1} \int_{R^n} |\xi|^{2\lambda} |\widetilde{D^\gamma v}|^2 \, d\xi \leq c_6 \sum_{|\gamma|\leq [r]-1} \int_{R^n} |\xi|^{2(\lambda+|\gamma|)} |\tilde{v}|^2 \, d\xi =$$

$$= c_6 \sum_{|\gamma| \leqslant [r]-1} \left(\int_{|\xi|^2 < 1/\varepsilon} + \int_{|\xi|^2 \geqslant 1/\varepsilon} \right) \leq c_6 \sum_{|\gamma| \leqslant [r]-1} (\varepsilon^{-(\lambda+|\gamma|)} \| v \|^2_{L^2(R^n)} +$$

$$+ \varepsilon^{[r]-|\gamma|-\lambda} \int_{R^n} |\xi|^{2[r]} |\tilde{v}|^2 \, d\xi) \leq c_6 \sum_{|\gamma| \leqslant [r]-1} (\varepsilon^{-(\lambda+|\gamma|)} \| v \|^2_{L^2(R^n)} +$$

$$+ \varepsilon^{[r]-|\gamma|-\lambda} \sum_{|\alpha|=[r]} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(R^n)}) . \quad (7.5)$$

Da (7.4) e (7.5) si ottiene ovviamente la tesi.

Se $s > 0$ ed $x_0 \in R^n_+$ porremo

$$\Gamma_s(x_0) = \{x \in R^n \mid |x - x_0| < s\}$$

$$\sigma_s(x_0) = \Gamma_s(x_0) \cap R^{n-1}$$

$$\tilde{\Gamma}_s(x_0) = \Gamma_s(x_0) \cap R^n_+ .$$

Siano assegnati gli operatori differenziali (6.1) e (6.2), $\ell \in R$ $\ell \geq 2m$ ed $r_0 > 0$, supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi

H_1) $a_\alpha(x) \in A^{[\ell]^+ - 2m}(R^n_+)$ per $|\alpha| \leq 2m$, se $|\alpha| = 2m$ i coefficienti $a_\alpha(x)$ sono continui in $\bar{R}^n_+$.

H_2) $b_{j\mu}(x') \in A^{[\ell - m_j - 1/2]^+}(R^{n-1})$ per $|\mu| \leq m_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, se $|\mu| = m_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ i coefficienti $b_{j\mu}(x')$ sono continui in R^{n-1}.

H_3) $A(x, D)$ è *propriamente ellittico* in $\bar{R}^n_+$.

H_4) Gli operatori B_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ soddisfano la *condizione complementare* rispetto ad A su R^{n-1}.

LEMMA 7.2. *Nelle ipotesi poste sopra, per ogni distribuzione u su* R^n_+ *tale che*

$$u \in W^\ell(T) \quad \textit{per ogni compatto} \quad T \subset \bar{R}^n_+$$

sussiste la seguente limitazione:

$$\| u \|_{W^\ell(\tilde{\Gamma}_r(x_0))} \leq c \left(\| A u \|_{W^{\ell-2m}(\tilde{\Gamma}_{r_0}(x_0))} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \| B_j u \|_{W^{\ell-m_j-1/2}(\sigma_{r_0}(x_0))} + \| u \|_{L^2(\tilde{\Gamma}_{r_0}(x_0))} \right) \quad (7.6)$$

dove $r < r_0$ *e* c *è una costante indipendente da* u *e da* x_0.

Dimostrazione. Fissato $r_o > 0$ e $x_o \in R^n_+$, siano r, r', r'' tre numeri positivi tali che

$$r < r' < r'' < r_o \quad \text{con} \quad r' - r = r'' - r' < 1 . \tag{7.7}$$

Consideriamo due funzioni $\zeta(x)$ e $\varphi(x)$ di classe $C_o^\infty(R^n)$, tali che

$$\zeta(x) \begin{cases} = 1 \text{ se } x \in \Gamma_r(x_o) \\ = 0 \text{ se } x \in R^n - \Gamma_{r'}(x_o) \end{cases} \qquad \varphi(x) \begin{cases} = 1 \text{ se } x \in \Gamma_{r'}(x_o) \\ = 0 \text{ se } x \in R^n - \Gamma_{r''}(x_o) \end{cases} \tag{7.8}$$

e tali che inoltre si abbia

$$| D^\alpha \zeta(x) | \leq M_\alpha (r' - r)^{-|\alpha|} , \quad | D^\alpha \varphi(x) | \leq M_\alpha (r'' - r')^{-|\alpha|} \tag{7.9}$$

ove M_α è una costante dipendente solo da α.

Sia ora u una distribuzione su R^n_+ tale che

$$u \in W^{\hat{}}(T) \quad \text{per ogni compatto} \quad T \subset \bar{R}^n_+$$

evidentemente

$$\zeta u \in W^\ell(R^n_+) , \quad \text{supp}(\zeta u) \text{ compatto} .$$

In virtù dell'ipotesi H_1), H_2), H_3), H_4) sussiste la ben nota limitazione (cfr. ad esempio [1], [6]).

$$\| \zeta u \|_{W^\ell(R^n_+)} \leq c_1 \left(\| A \zeta u \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} + \sum_{j=1}^{m} \| B_j \zeta u \|_{W^{\ell-m_j-1/2}(R^{n-1})} + \| \zeta u \|_{L^2(R^n_+)} \right) \tag{7.10}$$

ove c_1 è una costante che dipende unicamente da ℓ ed r_o.

Valutiamo ora $\| A(\zeta \cdot u) \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)}$ [10].

[10] Nel corso della presente dimostrazione indichiamo con c_2, c_3, ..., c_{15}, delle costanti positive che non dipendono da x_o, da u, da r, r', r'' e da $\varepsilon > 0$.

In virtù del lemma 4.1 e dell'ipotesi H_1)

$$\| A\zeta u \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} \leq c_2 \left(\| \zeta A u \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{0<|\alpha|\leq 2m} \sum_{\beta<\alpha} \| a_\alpha D^\beta u D^{\alpha-\beta}\zeta \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} \right) \leq \tag{7.11}$$

$$\leq c_3 \left(\| \zeta A u \|_{W^{\ell-2m}(\tilde{\Gamma}_{r'}(x_0))} + \sum_{0<|\alpha|\leq 2m} \sum_{\beta<\alpha} \| D^\beta u D^{\alpha-\beta}\zeta \|_{W^{\ell-2m}(\tilde{\Gamma}_{r'}(x_0))} \right)$$

D'altra parte in virtù delle (7.9):

$$\| \zeta A u \|_{W^{\ell-2m}(\tilde{\Gamma}_{r'}(x_0))} \leq c_4 (r' - r)^{-[\ell]^+} \| A u \|_{W^{\ell-2m}(\tilde{\Gamma}_{r'}(x_0))} . \tag{7.12}$$

Poniamo ora

$$v'(x) \begin{cases} = \varphi(x)\, u(x) & \text{se} \quad x \in \tilde{\Gamma}_{r_0}(x_0) \\ = 0 & \text{se} \quad x \in R^n_+ - \tilde{\Gamma}_{r_0}(x_0) \end{cases}$$

$$v(x) \begin{cases} = v'(x) & \text{se} \quad x_n > 0 \\ = \sum_{j=1}^{[\ell]^+} \lambda_j v'(x', -jx_n) & \text{se} \quad x_n < 0 \end{cases} \tag{7.13}$$

dove i λ_j sono dei numeri reali tali che

$$\sum_{j=1}^{[\ell]^+} \lambda_j (-j)^k = 1 , \qquad k = 0, \ldots, [\ell]^+ - 1 .$$

Evidentemente si ha che $v' \in W^\ell(R^n_+)$ e $v \in W^\ell(R^n)$.
Perciò, se $0 < |\alpha| \leq 2m$ e $\beta < \alpha$ in virtù delle (7.9) abbiamo:

$$\| D^\beta u D^{\alpha-\beta}\zeta \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} = \| D^\beta v' D^{\alpha-\beta}\zeta \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} \leq$$

$$\leq c_7 (r' - r)^{-[\ell]^+} \| D^\beta v' \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} \leq$$

$$\leq c_8 (r' - r)^{-[\ell]^+} \| D^\beta v \|_{W^{\ell-2m}(R^n)} . \tag{7.14}$$

Da (7.11), (7.12) e (7.14) abbiamo

$$\| A\zeta u \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} \leq c_9 (r' - r)^{-[\ell]^+} \left(\| A u \|_{W^{\ell-2m}(\tilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\beta|<2m} \| D^\beta v \|_{W^{\ell-2m}(R^n)} \right)$$

da cui, se $\varepsilon > 0$, ricaviamo, in virtù del lemma 7.1:

$$\| A\zeta u \|_{W^{\ell-2m}(R^n_+)} \leq c_{10} (r' - r)^{-[\ell]^+} \left\{ \| A u \|_{W^{\ell-2m}(\tilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} + \right.$$

$$+ \sum_{|\gamma|\leq[\ell]-1} \left(\varepsilon^{-|\gamma|/2} \| v \|_{L^2(R^n)} + \right.$$

$$\left. \left. + \varepsilon^{\frac{[\ell]-|\gamma|}{2}} \sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} \right) \cdot (1 + \varepsilon^{-\lambda/2}) \right\} \tag{7.15}$$

ove $\lambda = \ell - [\ell]$.

In maniera perfettamente analoga si prova che sussiste la limitazione:

$$\| B_j \zeta u \|_{W^{\ell-m_j-1/2}(R^{n-1})} \leq c_{11} (r' - r)^{-[\ell]^+} \left\{ \| B_j u \|_{W^{\ell-m_j-1/2}(\sigma_{r''}(x_0))} + \right.$$

$$+ \sum_{|\gamma|\leq[\ell]-1} \left(\varepsilon^{-|\gamma|/2} \| v \|_{L^2(R^n)} + \right.$$

$$\left. \left. + \varepsilon^{\frac{[\ell]-|\gamma|}{2}} \sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} \right) \cdot (1 + \varepsilon^{-\lambda/2}) \right\} j = 1, \ldots, m . \tag{7.16}$$

Poniamo ora

$$A(v, \varepsilon) = \sum_{|\gamma|\leq[\ell]-1} \left(\varepsilon^{-|\gamma|/2} \| v \|_{L^2(R^n)} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{[\ell]-|\gamma|}{2}} \sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} \right) \cdot (1 + \varepsilon^{-\lambda/2}) .$$

Se

$$\sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} \leq \| v \|_{L^2(R^n)}$$

si ha

$$A(v, \varepsilon) \leq c_\varepsilon \| v \|_{L^2(R^n)}$$

da tale relazione e dalle (7.10), (7.15), (7.16) segue evidentemente la (7.6).

Consideriamo il caso

$$\| v \|_{L^2(R^n)} < \sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} .$$

Posto allora

$$\varepsilon = \left(\sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} \right)^{-\frac{2}{[\ell]}} \cdot \| v \|^{\frac{2}{[\ell]}}_{L^2(R^n)}$$

siccome $\varepsilon < 1$ si ha

$$A(v, \varepsilon) \leq c_{12}\, \varepsilon^{-\lambda/2} \left(\varepsilon^{-\frac{[\ell]-1}{2}} \| v \|_{L^2(R^n)} + \varepsilon^{1/2} \sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} \right) =$$

$$= 2\, c_{12} \left(\sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha v \|_{L^2(R^n)} \right)^{1-\frac{1-\lambda}{[\ell]}} \cdot \| v \|^{\frac{1-\lambda}{[\ell]}}_{L^2(R^n)} \qquad (7.17)$$

D'altra parte, ricordando la (7.9) e (7.13), è facile verificare che

$$\forall\, \alpha \in N^n \ |\alpha| \leq [\ell] \ : \| D^\alpha v \|^2_{L^2(R^n)} \leq$$

$$\leq c_{13} \, | r'' - r' |^{-2|\alpha|} \| D^\alpha u \|^2_{L^2(\tilde{\Gamma}_{r''}(x_0))}$$

pertanto, ricordando che $| r'' - r' |^{-[\ell]} \leq | r'' - r' |^{-[\ell]^+}$, da (7.17) abbiamo

$$A(v, \varepsilon) \leq c_{14} \, | r'' - r' |^{-[\ell]^+} \left(\sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^\alpha u \|_{L^2(\tilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} \right)^{1-\frac{1-\lambda}{[\ell]}} \cdot$$

$$\cdot \| u \|^{\frac{1-\lambda}{[\ell]}}_{L^2(\tilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} \qquad (7.18)$$

In definitiva da (7.10), (7.15), (7.16), (7.18) e poiché $r'' - r' = r' - r < 1$, abbiamo:

$$(r'' - r')^{2[\ell]^+} \| u \|_{W^{\ell}(\widetilde{\Gamma}_r(x_0))} \leq c_{15} \left\{ \| A u \|_{W^{\ell-2m}(\widetilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \| B_j u \|_{W^{\ell-m_j-1/2}(\sigma_{r''}(x_0))} + \| u \|_{L^2(\widetilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} +$$

$$\left. + \left(\sum_{|\alpha|=[\ell]} \| D^{\alpha} u \|_{L^2(\widetilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} \right)^{1-\frac{1-\lambda}{[\ell]}} \cdot \| u \|^{\frac{1-\lambda}{[\ell]}}_{L^2(\widetilde{\Gamma}_{r''}(x_0))} \right\}$$

Da quest'ultima relazione e da un lemma di crescenza di C. Miranda (cfr. il lemma 3.1 di [7]) si deduce la tesi.

Dimostrazione del teorema 6.1. Con ragionamenti analoghi a quelli tenuti per dimostrare il lemma 5.3, si prova che esistono due costanti positive a e b tali che

$$\forall\, x_0 = (x_0', t_0) \in R^{n-1} \times \bigsqcup_{R_+} (T_{a,x_0'}) \,:\, \Gamma_{b\rho(x_0)}(x_0) \cap R^{n-1} = \emptyset$$

e per il lemma 5.4 poi esiste $\alpha > 0$ tale che [11]

$$\forall\, (x_0', t_0) \in R^{n-1} \times T_{a,x_0'} \,:\, I_{b\rho}(x_0', t_0) \subset I_{a\rho}(x_0', 0).$$

Se $x_0 = (x_0', t_0) \in R^n_+$ porremo

$$\tilde{A} = A(x_0, \xi, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} \rho^{2m-|\alpha|}(x_0)\, a_{\alpha}^*(x_0, \xi)\, D_{\xi}^{\alpha}$$

$$\tilde{B}_j = \tilde{B}_j(x_0', \xi', D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} \rho^{m_j-|\mu|}(x_0')\, b_{j\mu}^*(x_0', \xi')\, D_{\xi}^{\mu} \quad (j = 1, \ldots, m)$$

$$\tilde{a}_{\alpha}(x_0, \xi) = \rho^{2m-|\alpha|}(x_0)\, a_{\alpha}^*(x_0, \xi) \qquad |\alpha| \leq 2m$$

$$\tilde{b}_{j\mu}(x_0', \xi') = \overline{\rho}^{m_j-|\mu|}(x_0')\, b_{j\mu}^*(x_0, \xi') \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad |\mu| \leq m_j.$$

In virtù delle ipotesi I_1) e I_2)

$$\sup_{x_0 \in R^n_+} \| \tilde{a}_{\alpha}(x_0, \xi) \|_{A^{[\ell]^+-2m}(I^*(x_0))} < +\infty \qquad |\alpha| \leq 2m$$

$$\sup_{x_0' \in R^{n-1}} \| \tilde{b}_{j\mu}(x_0', \xi') \|_{A^{[\ell-m_j-1/2]^+}(I_+^*(x_0'))} < +\infty$$

$$|\mu| \leq m_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

ed inoltre per $|\alpha| = 2m$ $a_{\alpha}^*(x_0, \xi)$ sono continue rispetto a ξ in ogni

[11] Le costanti a, b, α possono scegliersi minori di 1.

$I^*(x_0)$ con modulo di continuità indipendente da x_0, del pari, per $|\mu| = m_j (j = 1, \ldots, m)$, le funzioni $b_{j\mu}(x_0', \xi')$ sono continue rispetto a ξ' in ogni $I^*_{\frac{\rho}{2}}(x_0')$ con modulo di continuità indipendente da x_0'.

In virtù poi dell'ipotesi I_3) ed I_4) $\tilde{A}$ è propriamente ellittico in R^n_+ e la sua costante di ellitticità è limitata inferiormente da una costante positiva indipendente da x_0, e gli operatori $\tilde{B}_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ soddisfano la condizione complementare rispetto ad $\tilde{A}$ su R^{n-1}.

Pertanto possiamo applicare il lemma 7.2; allora se u è una distribuzione soddisfacente alle ipotesi ed $x_0 \in R^n_+$, abbiamo

$$\| u^* \|^2_{W^{\ell}(I^*_{\frac{b\rho}{2}}(x_0))} \leq c_1 \left(\| \tilde{A} u^* \|^2_{W^{\ell-2m}(I_{b\rho}^*(x_0))} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \| \tilde{B}_j u^* \|^2_{W^{\ell-m_j-\frac{1}{2}}(I^*_{a\rho}(x_0'))} + \| u^* \|^2_{L^2(I^*_{b\rho}(x_0))} \right) \qquad (7.19)$$

ove c_1 è una costante indipendente da u e da x_0.

Posto $A u = f$ e $B_j u|_{x_n = 0} = g_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ evidentemente

$$\| \tilde{A} u^* \|^2_{W^{\ell-2m}(I^*_{b\rho}(x_0))} \sim \rho(x_0)^{4m} \| f^* \|^2_{W^{\ell-2m}(I^*_{b\rho}(x_0))}$$

$$\| \tilde{B}_j u^* \|^2_{W^{\ell-m_j-\frac{1}{2}}(I^*_{a\rho}(x_0'))} \sim \rho(x_0', 0)^{2m_j} \| g_j^* \|^2_{W^{\ell-m_j-\frac{1}{2}}(I^*_{a\rho}(x_0'))} \leq$$

$$\leq \rho(x_0)^{2m_j} \| g_j^* \|^2_{W^{\ell-m_j-\frac{1}{2}}(I^*_{a\rho}(x_0'))} \qquad j = 1, \ldots, m .$$

Perciò da (7.19) abbiamo

$$\rho^{2(2m+s-\ell)}(x_0) \| u^* \|^2_{W^{\ell}(I^*_{\frac{b\rho}{2}}(x_0))} \leq$$

$$\leq c_2 \left\{ \rho^{2(2m+s-(\ell-2m))}(x_0) \| f^* \|^2_{W^{\ell-2m}(I^*_{b\rho}(x_0))} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \rho^{2(2m+s-(\ell-m_j))}(x_0) \| g_j^* \|^2_{W^{\ell-m_j-\frac{1}{2}}(I^*_{a\rho}(x_0'))} +$$

$$\left. + \rho^{2(2m+s-\ell)}(x_0) \| u^* \|^2_{L^2(I^*_{b\rho}(x_0))} \right\}$$

da cui integrando rispetto ad x_0 ed operando come nella dimostrazione del teorema 5.2 si ottiene la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARKERYD L., *On the* L^p *estimates for elliptic boundary problems*, Math. Scand. **19** (1966) pp. 59-76.

[2] AVANTAGGIATI A. - TROISI M., *Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo I, II, III*, Ann. di Mat. Pura e appl., **95** (1973) pp. 361-408, **97** (1973) pp. 207-252, in corso di stampa.

[3] GEYMONAT G. - GRISVARD P., *Problemi ai limiti lineari ellittici negli spazi di Sobolev con peso*, Le Matematiche, **22** (1967) pp. 212-249.

[4] HORMANDER L., *Linear partial differential operators* (Springer-Verlag 1963).

[5] KUDRIJACEV L. D., *Imbedding theorems for a class of functions defined on the entire space or on an half space I, II*, American Mat. Society Translations, **74**, pp. 199-260.

[6] PEETRE J., *Another Approach to elliptic Boundary Problems*, Communications on pure and applied Mathematics, **14** (1961) pp. 711-731.

[7] MIRANDA C., *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, Ann. di Mat., **59** (1962).

[8] NECAS J., *Le méthodes directes en theorie des équations elliptiques*, Masson & Cie Editeurs Paris, pp. 100-103.

[9] SLOBODETSKIJ S. L., *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations*, American Mat. Society Translations, **57**, pp. 207-285.

[10] TROISI M., *Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso*, Ric. di Mat., **18** (1969) pp. 49-74.

[11] TROISI M., *Ulteriori contributi allo studio dei problemi ellittici con dati singolari*, Ric. di Mat., **19** (1970) pp. 9-25.

[12] TROISI M., *Problemi ellittici con dati singolari*, Ann. di Mat. pura ed Appl., **83** (1969) pp. 363-407.

[13] VOLEVICH L. R. - PANEYAKH B. P., *Certain spaces of generalized functions and embedding theorems*, Russian Math. Survey, **20** (1965) pp. 1-73.

Rapporti tra i parametri cromatografici di iododerivati organici frazionati mediante le tecniche di assorbimento e di ripartizione *

Nota del socio ordinario MARIO COVELLO
e di ORESTE SCHETTINO, LYDIA FERRARA e PASQUALE FORGIONE

(Adunanza dell'1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Sono state studiate le relazioni tra Rm e composizione chimica di di un gruppo di iododerivati di esteri 2-dietilamminoetilici di acidi fenilcinnamici e alcuni iodocalconi, iodoflavanoni, iodoflavoni e iodoflavonoli, adoperando eluenti con valori di ε° variabili, su diversi strati attivi.

Determinazioni eseguite su strati di gel di silice G, Kieselgur G e cellulosa, usando formammide o undecano come fase stazionaria, oltre a consentirci di trarre utili notizie circa l'influenza esercitata dalla struttura chimica sul meccanismo di interazione strato-sostanza, ci hanno confermato l'esistenza di una relazione, evidenziata da alcuni AA., tra i valori di Rm misurati mediante cromatografia di adsorbimento e partizione, relazione che, però, non risulta essere sempre lineare.

SUMMARY. — Rm vs. composition relationship of a group of iodinated 2-diethylaminoethyl- α-phenylcinnamates and of a number of chalkonic and flavonoid derivatives have been studied, employng eluents with various ε° values, on several active layers.

The linear correlation between the Rm values measured in both adsorption and partition chromatography have been investigated on silica gel G, Kieselgel G and cellulose T.L., using formamide and undecane as the liquid stationary phase.

The results obtained allow to draw useful informations about the influence exerted by the chemical structure on the mechanism of interaction layer-substance, and on the correlation between the Rm values measured in liquid adsorption and partition chromatography which resulted to be not linear in some cases.

Nel corso dello studio sistematico che da tempo andiamo conducendo per la caratterizzazione cromatografica di serie di composti iodorganici di sintesi con potenziale attività farmacologica, ci è sembrato interessante esaminare le relazioni esistenti tra i risultati acqui-

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.

siti ed i diversi fattori che possono influenzarli, nell'ambito delle particolari tecniche cromatografiche adottate.

Oggetto del presente studio sono stati due gruppi di iododerivati, sintetizzati da COVELLO e coll., il primo costituito da esteri 2-dietilamminoetilici di acidi fenilcinnamici iodurati [1], il secondo costituito da iodocalconi, iodoflavoni, iodoflavanoni e iodoflavanoli [2].

Lo studio condotto su questi composti, sia mediante le tecniche cromatografiche di adsorbimento che di ripartizione, ci ha consentito, oltre che di raccogliere una serie di dati utili per la loro caratterizzazione cromatografica, anche di formulare considerazioni sui rapporti esistenti tra variazione dei sostituenti nelle molecole organiche e parametri cromatografici. Particolarmente interessante ci è sembrata una verifica dell'ipotesi dell'applicabilità generale di una relazione lineare tra i valori R*m* ottenibili per cromatografia di adsorbimento ed i corrispondenti valori R_m^c dati dalla cromatografia di partizione. L'esistenza di una relazione di questo tipo fu prospettata da alcuni AA. [3, 4] i quali poterono evidenziare, nello studio di alcune nitroaniline e amminopiridine, come i valori R*m* caratteristici di ciascuna sostanza, smistata su uno strato adsorbente mediante una data fase mobile, fosse una funzione lineare del valore R_m^c ottenibile per la stessa sostanza cromatografata su carta impregnata di una fase stazionaria, con la medesima fase mobile.

Essi, pertanto, proposero la seguente equazione:

$$R_m = a + bR_m^c$$

auspicando, nel contempo, una più vasta sperimentazione atta a confermarne l'applicabilità generale.

Ci è sembrato, perciò, particolarmente interessante saggiare la validità di questa equazione in rapporto ad alcuni dei composti da noi studiati i quali, per la presenza di diversi atomi di alogeni, con prevalenza dello iodio nella molecola, presentano comportamenti cromatografici non sempre facilmente riconducibili a schemi generali per i noti effetti elettronici causati dall'esistenza di una interazione dell'atomo di alogeno con i legami idrogeno intermolecolari, effetti che si sommano al fattore sterico, particolarmente rilevante proprio nel caso dello iodio.

PARTE SPERIMENTALE

La sperimentazione è stata condotta su strati sottili di diversi adsorbenti e su cellulosa.

Per la determinazione dei valori R*f* sono state impiegate sia lastre già pronte all'uso di produzione Merck, sia lastre preparate in laboratorio. In particolare erano del tipo pronto all'uso tutte le lastre con strato uniforme (gel di silice, allumina, Kieselgur, cellulosa).

Le lastre con strato di composizione variabile sono state preparate in laboratorio mediante stratificatore manuale Desaga mod. GM, dotato di miscelatore ad azione meccanica. Questo strumento consente di realizzare strati formati da un sistema binario di adsorbenti variante, in modo praticamente continuo, dal 100 % dell'uno al 100 % dell'altro.

Per la preparazione di serie di 5 lastre del formato di cm 20 × 20 con strato dello spessore di 0,25 cm sono stati impiegati i seguenti rapporti quantitativi (adsorbenti Merck):

a) lastra gel di silice-allumina: g 10 di gel di silice G sospesi in 22 ml di acqua più g 10 di allumina sospesi in 18 ml di acqua;

b) lastre gel di silice-cellulosa: g 10 di gel di silice in 25 ml di acqua, più g 10 di cellulosa in 25 ml di acqua.

Dopo la preparazione le lastre sono state attivate in stufa a 100° C per 30′. Nelle tabelle riassuntive la composizione viene indicata citando per primo l'adsorbente sul quale è stata effettuata la deposizione delle sostanze in esame.

Per la determinazione dei valori R_m^c (cromatografia di partizione) si è operato anziché su carta, come suggerito dai citati autori, su strato sottile di cellulosa, impiegando le lastre pronte Merck già menzionate. L'impregnazione con la fase stazionaria (formammide o undecano) è stata eseguita per imbibizione spontanea, lasciando salire per capillarità l'agente impregnante lungo lo strato immerso, per un lembo, nell'agente stesso. In questo trattamento l'undecano è stato usato tal quale, mentre la formammide è stata usata in soluzione acetonica al 10 %, allontanando poi il diluente (acetone) per evaporazione spontanea all'aria.

Lo sviluppo dei cromatogrammi, eseguito sempre con la tecnica ascendente, è stato compiuto raggiungendo costantemente una corsa del solvente di circa 16 cm. Nel caso della cromatografia a fase invertita, gli eluenti che di volta in volta vengono indicati, si intendono sempre presaturati con la fase stazionaria.

La saturazione della camera di sviluppo è stata, inoltre, sempre assicurata foderandone le pareti con carta da filtro pescante nel solvente di sviluppo.

Per la visualizzazione dei cromatogrammi degli esteri fenilcinnamici ha dato buoni risultati il verde di bromocresolo che, in soluzione idroalcolica, addizionato o meno del 2 % di $AgNO_3$ dava evi-

denti macchie blu su fondo giallo-verde. Una buona rivelazione, su strato di cellulosa, si otteneva anche con la soluzione al 3 % di ninidrina in metanolo, che dava macchie blu su fondo viola con tutti i composti saggiati.

I derivati flavonici, invece, dotati di colorazione propria variante dal giallo all'arancio, sono stati osservati direttamente alla luce visibile o, in casi dubbi, all'UV.

Risultati e discussione

I risultati ottenuti nella sperimentazione condotta sugli esteri 2-dietilamminoetilici di acidi fenilcinnamici iodurati, sono raccolti nelle tabelle I e II. In queste tabelle sono elencati i valori di R*f* sperimentali ed i relativi valori di R*m* calcolati con la ben nota formula:

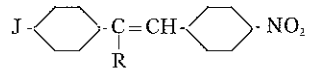
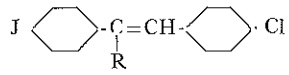
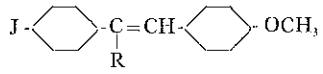
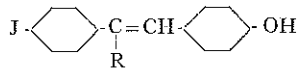
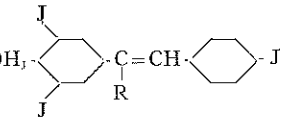
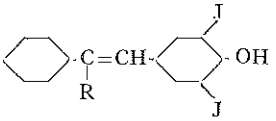
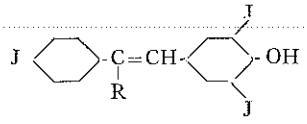
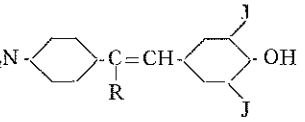
$$Rm = \log (1/Rf - 1) .$$

Tali valori sono riferiti ai vari strati impiegati, ed ai diversi sistemi eluenti che sono disposti consecutivamente in ordine decrescente del rispettivo valore degli « Elution polarity parameters » (ε^0) desunti da quelli indicati da Snyder [6, 7] per gli eluenti puri e mediante il calcolo per le miscele. ammettendo come valido il principio di additività del parametro medesimo.

Appare evidente, dai dati tabellari, che una variazione piuttosto regolare dei valori si riscontra soltanto nei cromatogrammi su gel di silice, mentre l'allumina non differenzia apprezzabilmente le diverse sostanze. I risultati ottenuti su cellulosa, a loro volta, sono difficilmente confrontabili nelle varie serie di cromatogrammi, riscontrandosi, nei diversi casi, oscillazioni spesso discordanti e per senso della variazione e per entità. Ciò è chiaramente in relazione alle diverse caratteristiche chimiche dei sostituenti che si succedono nella molecola, (NO_2, Cl, OCH_3, OH) con o senza incremento del numero di atomi di iodio. Ne consegue, evidentemente, lo stabilirsi di rapporti di diverso tipo con lo strato di cellulosa che vengono, presumibilmente, influenzati in misura diversa dal particolare sistema eluente adottato. Nel caso dello strato di gel di silice, come si è già accennato, il comportamento è più regolare e meglio riconducibile a criteri di carattere generale.

Per i primi quattro prodotti elencati nelle tabelle, ad esempio, si osserva una variazione continua dei valori di R*f* e dei corrispondenti R*m* che può essere chiaramente ricollegata alla variazione del peso molecolare dei sostituenti (NO_2, Cl, OCH_3, OH) e quindi, più o meno indirettamente, a fattori sterici.

TABELL

Sistema eluente		Metanolo							
ε°		0,95							
Strato adsorbente		Gel di silice-		cellulosa		Gel di silice Cellulosa		Gel di silice-allumina	
		Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm
1)		0,45	0,12	0,72	−0,41	0,75	−0,48	0,58	−0,7
2)		0,42	0,14	0,73	−0,43	0,52	−0,04	0,30	0,3
3)		0.40	0,17	0,68	−0,33	0,68	−0,33	0,40	0,1
4)		0,38	0,21	0,67	−0,31	0,42	0,14	0,50	0,0
5)		0,45	0,12	0,73	−0,43	0,60	−0,17	0,35	0,2
6)		0,27	0,43	0,74	−0,45	0,51	−0,02	0,38	0,2
7)		0.28	0,41	0,63	−0,23	0,60	−0,17	0,06	1,1
8)		0,29	0,39	0,68	−0,33	0,57	−0,12	0,35	0,2

(R = − COO−CH_2−CH_2−N−$(C_2H_5)_2$)

La rilevanza dei fattori sterici nel determinare la migrazione cromatografica, risulta particolarmente evidente nel caso dei prodotti isomeri 5 e 7 per i quali la semplice inversione nella posizione dei sostituenti (J e OH) dà luogo ad una netta variazione dell'R*f*. Questo fenomeno è, in genere, più marcato di quanto non lo sia quello provocato dall'aumento di una unità nel numero degli atomi di iodio presenti nella molecola.

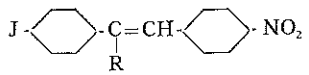
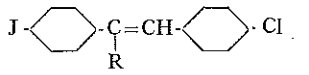
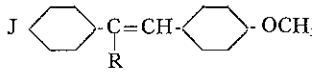
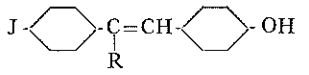
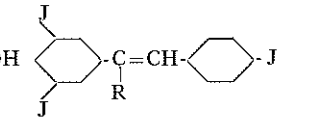
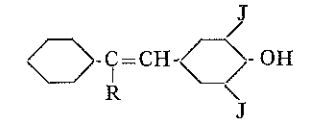
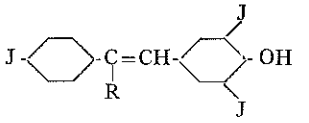
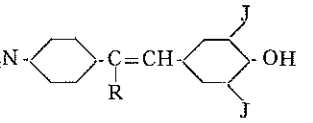
I

Benzene-Metanolo (20:80 v/v)						Metanolo-Cloroformio (1:1 v/v)					
0,82						0,67					
Gel di silice		Cellulosa		Gel di silice-allumina		Gel di silice		Gel di silice-cellulosa		Gel di silice-allumina	
Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm
0,69	−0,34	0,69	−0,34	0,50	0,00	0,63	−0,23	0,90	−0,94	0,73	−0,43
0,62	−0,21	0,68	−0,33	0,45	0,12	0,53	−0,06	0,78	−0,54	0,68	−0,33
0,58	−0,14	0,77	−0,52	0,40	0,11	0,46	0,09	0,73	−0,43	0,58	−0,14
0,51	−0,02	0,70	−0,36	0,38	0,21	0,40	0,11	0,60	−0,17	0,50	0,00
0,50	0,00	0,68	−0,33	—	—	0,46	0,09	0,68	−0,33	0,45	0,12
0,38	0,21	0,70	−0,36	—	—	0,32	0,33	0,73	−0,43	0,60	−0,17
0,32	0,33	0,73	0,43	—	—	0,31	0,35	0,70	−0,36	0,45	0,12
0,54	−0,07	0,72	−0,41	—	—	0,53	−0,06	0,74	−0,45	0,45	0,12

Giova ancora rilevare la mancanza di un incremento del valore di R*f*, per un dato composto, in concordanza con l'incremento del valore ε^o il che conferma il punto di vista di HERMANECK e coll. [8] secondo cui le serie eluotrope non posseggono una validità generale in quanto sensibili deviazioni si manifestano sempre che risultino possibili interazioni soluto-eluente o soluto adsorbente.

Nello studio cromatografico del secondo gruppo di sostanze oggetto del presente lavoro (vedi tab. III) abbiamo voluto utilizzare i

TABELLA

Sistema eluente	Diossano							
ε°	0,63							
Strato adsorbente	Gel di silice		Cellulosa		Gel di silice-cellulosa		Gel di silice-allumina	
	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm
1) 	0,62	−0,21	0,70	−0,36	0,75	−0,48	0,55	−0,09
2) 	0,45	0,12	0,70	−0,36	0,20	0,60	0,25	0,48
3) 	0,41	0,13	0,75	−0,48	0,55	−0,16	0,09	1,10
4) 	0,37	0,23	0,65	−0,26	0,65	−0,26	0,32	0,33
5) 	0,47	0,05	0,71	−0,39	0,65	−0,26	0,20	0,60
6) 	0,23	0,52	0,73	−0,43	0,84	−0,51	0,38	0,21
7) 	0,21	0,57	0,75	−0,48	0,71	−0,39	0,55	−0,09
8) 	0,21	0,57	0,67	−0,31	0,70	−0,36	0,20	0,60

(R = − COO−CH_2−CH_2−N−$(C_2H_5)_2$)

risultati ottenuti per verificare la possibilità di estendere la già citata teoria proposta da OSCIK e altri [3, 4] al confronto tra i valori R*m* ottenibili in cromatografia di adsorbimento e quelli corrispondenti ottenibili in cromatografia di ripartizione su strato sottile di cellulosa (R^c_m).

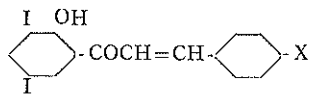
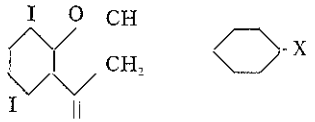
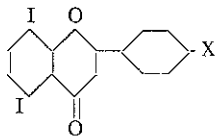
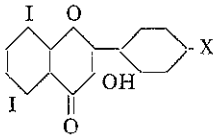
I

Benzene-Diossano (40:80 v/v)						Benzene-Etile acetato (3:7 v/v)		Diossano-Esano (50:50 v/v)			
0,53						0,50		0,32			
Gtl di silice		Cellulosa		Allumina		Gel di silice		Gel di silice		Cellulosa	
Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm	Rf	Rm
0,62	−0,20	0,69	−0,34	0,78	−0,54	0,35	0,27	0,59	−0,16	0,69	−0,34
0,37	0,23	0,68	−0,33	0,81	−0,63	0,18	0,66	0,47	0,05	0,68	−0,32
0,33	−0,31	0,77	−0,52	0,80	−0,60	0,10	0,95	0,39	0,19	0,77	−0,52
0,16	0,72	0,70	−0,36	0,61	−0,19	0,05	1,28	0,21	0,57	0,70	−0,36
0,37	0,23	0,68	−0,33	0,75	−0,48	0,12	0,92	0,47	0,05	0,68	−0,33
0,19	0,63	0,70	−0,36	0,81	−0,63	—	—	0,26	0,45	0,70	−0,36
0,01	1,99	0,73	−0,43	0,83	−0,69	—	—	0,11	0,90	0,73	−0,43
0,08	1,06	0,72	−0,41	0,80	−0,60	—	—	—	—	0,72	−0,41

Tra questi valori, in analogia con quanto ammesso dai suddetti AA. per il caso della carta da filtro, dovrebbe esistere una relazione lineare esprimibile con la funzione $Rm_i = f(R^c_m)$ (in cui $i = \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono le varie fasi mobili). Una tale funzione lineare può essere espressa da una equazione del tipo:

$$Rm_i = a + b\, R^c_{m_i} \quad (i = \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

TABELLA III

Strato sottile		Gel di silice			Gel di silice			Kieselgur			Kieselgur		
Impregnazione		Formammide			Undecano			Formammide			Undecano		
Costanti		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
 Calconi	X=Cl ———	1,00	1,50	—	8,85	6,90	—	0,95	1,70	—	8,00	6,30	—
	X=Br ———	0,65	1,30	—	7,40	6,10	—	0,80	1,60	—	4,45	3,80	—
	X=I — · —	0,39	1,35	0,42	1,70	0,55	−0,69	0,50	1,80	−0,15	1,50	0,57	−0,74
 Flavanoni	X=Cl ———	−0,60	2,60	—	1,50	2,10	—	−0,10	1,00	—	1,45	2,10	—
	X=Br — - —	−1,50	3,80	—	1,05	1,70	—	−0,15	0,90	—	1,35	2,40	—
	X=I ·····	−0,68	1,06	0,78	0,63	1,03	−0,40	−0,30	0,22	0,70	0,71	1,01	−0,44
 Flavoni	X=Cl ———	4,40	3,90	—	4,50	3,80	—	1,90	2,60	—	0,70	1,80	—
	X=Br ———	3,45	3,25	—	3,20	3,55	—	1,40	2,30	—	0,55	1,75	—
	X=I — · —	1,47	0,61	−0,71	1,52	0,55	−0,69	1,45	1,78	−0,18	0,40	1,29	0,45
 Flavonoli	X=Cl ———	1,25	1,65	—	1,05	2,20	—	−0,50	2,30	—	−0,90	3,40	—
	X=Br — - —	1,10	1,80	—	0,85	2,10	—	−0,35	1,85	—	−1,00	2,90	—
	X=I ·····	0,65	0,99	−0,43	0,69	1,05	−0,43	−0,70	1,07	0,81	−0,71	0,99	0,80

I risultati ottenuti in questa fase della sperimentazione sono ordinati nei grafici delle figg. 1 e 2 mentre i valori calcolati per le costanti *a* e *b* dell'equazione surriportata relativamente a ciascun prodotto, sono elencati nella tab. III.

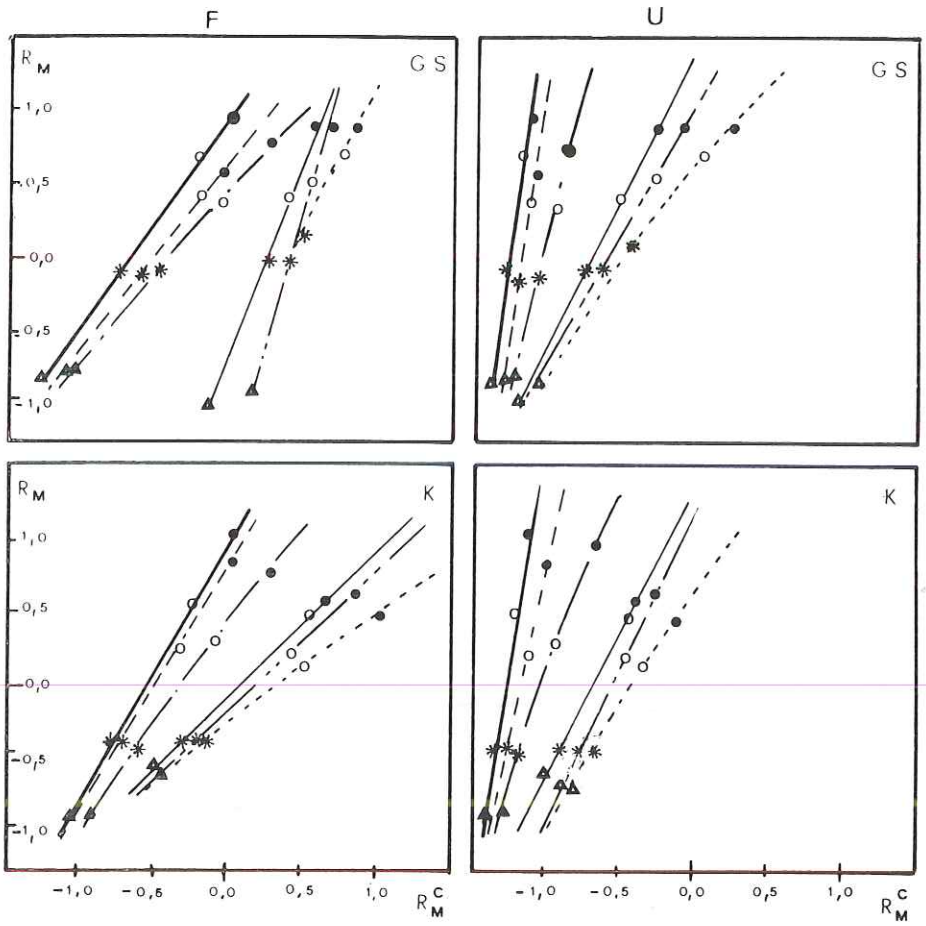


FIG. 1 - *Grafici* Rm = f (R^c_m) dei prodotti riportati in Tab. III (Calconi e flavanoni) contrassegnati con i tratteggi ivi indicati.
Adsorbenti: GS: gel di silice; K: kieselgur.
Fasi liquide stazionarie: F: formammide; U: undecano.
Eluenti: tetracloruro di carbonio, toluene, benzene, cloroformio.

Nei grafici delle figg. 1 e 2 sono riportati in ordinate i valori di R*m* ottenuti su ciascun adsorbente (GS = gel di silice, K = kieselgur) in funzione del valore R^c_m ottenuto su strato di cellulosa (ascissa) per le due fasi fisse sperimentate (F = formammide; U = undecano).

Come si può osservare dai grafici, l'esistenza di una relazione lineare del tipo citato risulta confermata anche per i composti da noi studiati, ancorché, come si può osservare nel caso dei prodotti

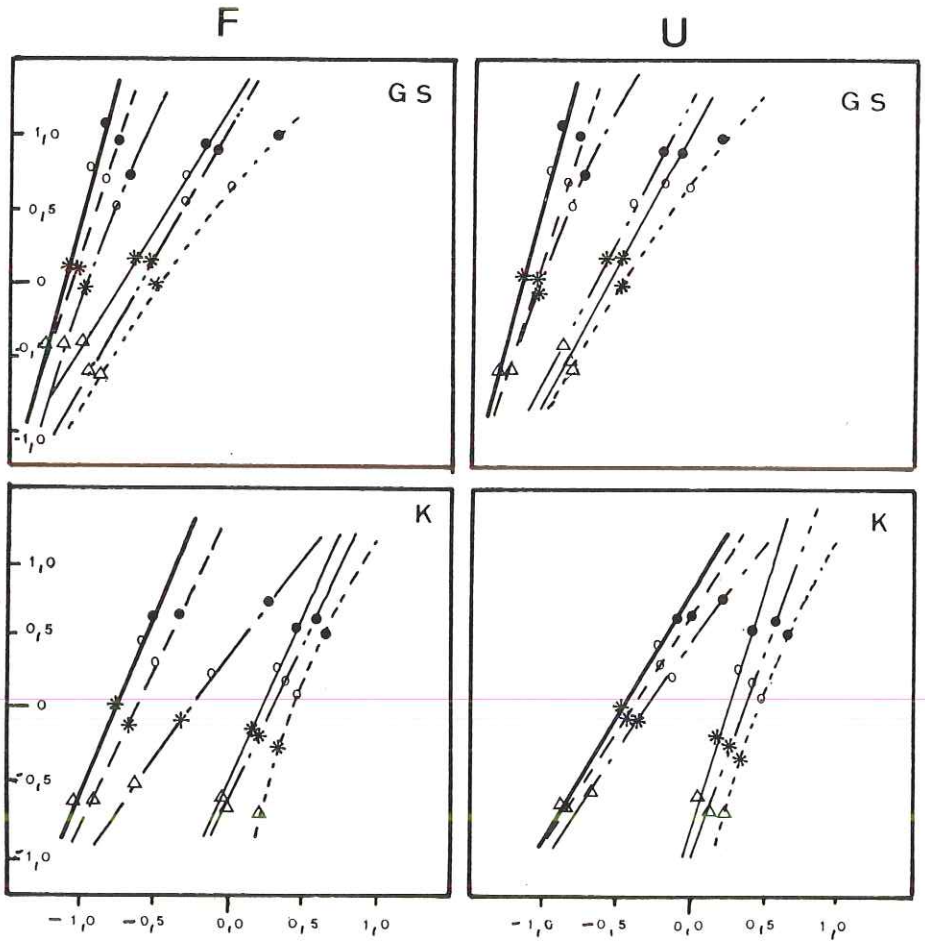


FIG. 2 - Grafici Rm = f (R^c_m) di flavoni e flavonoli riportati in Tab. III, contrassegnati con i tratteggi ivi indicati.
Adsorbenti: GS: gel di silice; K: kieselgur.
Fasi liquide stazionarie: F: formammide; U: undecano.
Eluenti: tetracloruro di carbonio, toluene, benzene, cloroformio.

triiodurati, un più attento esame della disposizione dei punti sperimentali suggerisca piuttosto l'esistenza di una relazione di tipo quadratico. Infatti, applicando il metodo dei minimi quadrati per il cal-

colo dell'equazione relativa ai punti caratteristici dei prodotti triiodurati, si ottiene l'equazione di una curva del tipo:

$$Rm_i = a + b\left[R^c_{m_i}\right] + c\left[R^c_{m_i}\right]^2$$

che consente di realizzare una compensazione con approssimazione molto più spinta rispetto ai valori sperimentali.

D'altra parte la modesta curvatura del tracciato grafico consente di ritenere valide anche in questo caso le considerazioni formulate dai citati AA. in relazione alle interazioni molecolari che possono stabilirsi tra le varie fasi in equilibrio, vale a dire soluto-solvente-adsorbente, nel caso dell'adsorbimento, e soluto-solvente-fase liquida stazionaria nel caso della ripartizione nella quale, inoltre, vanno presi in considerazione i non trascurabili fenomeni che hanno luogo all''interfaccia liquido-liquido.

Si può ammetter, infatti, che il passaggio delle molecole di soluto dalla fase mobile a quella stazionaria, si svolga in due fasi ben distinte, di cui la prima consiste nell'adsorbimento della molecola sull'interfaccia liquido-liquido, adsorbimento regolato dai rapporti molecolari che il composto contrae con le due fasi liquide a contatto. Solo successivamente ha luogo il desorbimento dallo strato interfase con diffusione nella massa della fase stazionaria.

Si ammette, in genere, che quando la distribuzione tra le due fasi viene condotta in condizioni dinamiche, come appunto avviene nella cromatografia di partizione, (nella quale oltre tutto il rapporto delle superfici interfacciali rispetto al volume delle fasi è molto grande) la prima delle due fasi del processo sopra delineato manifesti un'influenza non trascurabile sull'andamento complessivo dello smistamento cromatografico. Tuttavia è probabile che il considerevole appesantimento sterico della molecola, quale quello che si verifica nei composti triiodurati, possa limitare la capacità di adsorbimento delle molecole di soluto con conseguente modificazione dei fenomeni all'interfaccia, e ciò in misura diversa per i vari eluenti. Il risultato potrebbe essere proprio una sia pur lieve deviazione dall'andamento lineare della funzione $Rm = f(R^c_m)$, che peraltro, come si è visto, può ancora essere ricondotta, nei casi esaminati, ad una curva regolare del tipo $y = a + bx + cx^2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] COVELLO M., DE SIMONE F., DINI A., Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. della Soc. Naz. di Scienze, lettere a arti in Napoli, XXXV, 723 (1968).

[2] COVELLO M., DINI A., DE SIMONE F., Ibid., XXXV, 728 (1978).

[3] OSCIK J., Bull. Acad. Polon. Ser. Sci. Chim., **14**, 879 (1966).

[4] OSCIK J., CHOJNACKA G., Chem. Anal., **12**, 1213 (1967).

[5] BARK L. S., GRAHAM R. J. T., Acta intern. Symp. Chromatog. Electrophorese, Bruxelles, sept. 1966, p. 105.

[6] SNYDER L., J. Chromatog., **6**, 22 (1961).

[7] SNYDER L., Ibid., **8**, 178 (1962).

[8] HERMANECK S., SCHWARTZ V., CEKAN Z., Coll. Czec. Chem. communs, **28**, 2031 (1963).

Studi sulle ribonucleasi seminali

Ulteriori ricerche sulla ribonucleasi di vescichette seminali di toro (RNAsi SV-1)

Nota di BENEDETTA FARINA, PIERA QUESADA
e del socio corrispondente ENZO LEONE *

(Adunanza dell'1 giugno 1974)

RIASSUNTO. — Sono state studiate la principali proprietà enzimologiche e strutturali della RNAsi SV-1. Sono state inoltre eseguite mappe peptidiche della proteina ridotta e carbossimetilata, idrolizzata con tripsina, e i peptidi sono stati identificati in base alla loro mobilità elettroforetica, analizzati singolarmente e paragonati con i corrispondenti peptidi della RNAsi BS-1. Lo studio ha portato alla identificazione di tutti i peptidi costituenti la struttura primaria della RNAsi SV-1 ed ha ulteriormente confermato l'assoluta identità fra l'enzima di vescichette e quello del plasma seminale.

SUMMARY. — The main enzymological and structural properties of RNAse SV-1 have been studied. Finger prints have been performed of the reduced, carboxymethylated protein, after trypsin hydrolysis. The petides have been identified on the basis of their electrophoretic mobility, analyzed and compared with the corresponding peptides from RNAse BS-1. The study has led to the identification of all peptides forming the primary structure of RNAse SV-1 and has furthermore confirmed the complete identity between the seminal vesicles' and the seminal plasma enzymes.

Un caratteristico componente dello sperma di toro è costituito dalla ribonucleasi isolata nel nostro laboratorio [1]. Questo enzima (RNAsi BS-1) * è praticamente identico alla ribonucleasi pancreatica della stessa specie (RNAsi A) per quanto riguarda le più salienti caratteristiche enzimologiche quali meccanismo d'azione, specificità di substrato, pH *optimum*, ecc. [2]. Il peso molecolare invece (29.000) è per l'enzima seminale doppio rispetto all'enzima pancreatico; ed è stato dimostrato che in realtà l'enzima è costituito da due subunità, ognuna del peso molecolare di 14.500, unite insieme da due legami disolfuro [3, 4]. La struttura primaria della subunità dell'enzima seminale è

* Stazione Zoologica di Napoli e Istituto di Chimica Organica, Laboratorio di Chimica biologica, della Università di Napoli.

[1] L'enzima è stato così designato per ricordarne l'origine (Bull Semen) e per differenziarlo da un'altra ribonucleasi (RNAsi BS-2), probabilmente presente nel plasma seminale bovino. Analogamente la ribonucleasi delle vescichette seminali è stata indicata come RNAsi SV-1 (da Seminal Vesicles).

stata anche determinata [5] ed è risultata fondamentalmente simile a quella della RNAsi A, come si può vedere dalla Fig. 1, ove sono anche mostrati i quattro legami disolfuro intracatena, che sono risultati eguali a quelli caratteristici della RNAsi A [6]; i due ponti disolfuro che uniscono le due subunità sono formati dai due residui di mezze cistine (nelle posizioni 31 e 32) in soprannumero rispetto a quelle corrispondenti della RNAsi A. Infatti, mentre questo enzima contiene otto residui di mezze cistine per molecola, l'enzima seminale ne contiene dieci per molecola di monomero.

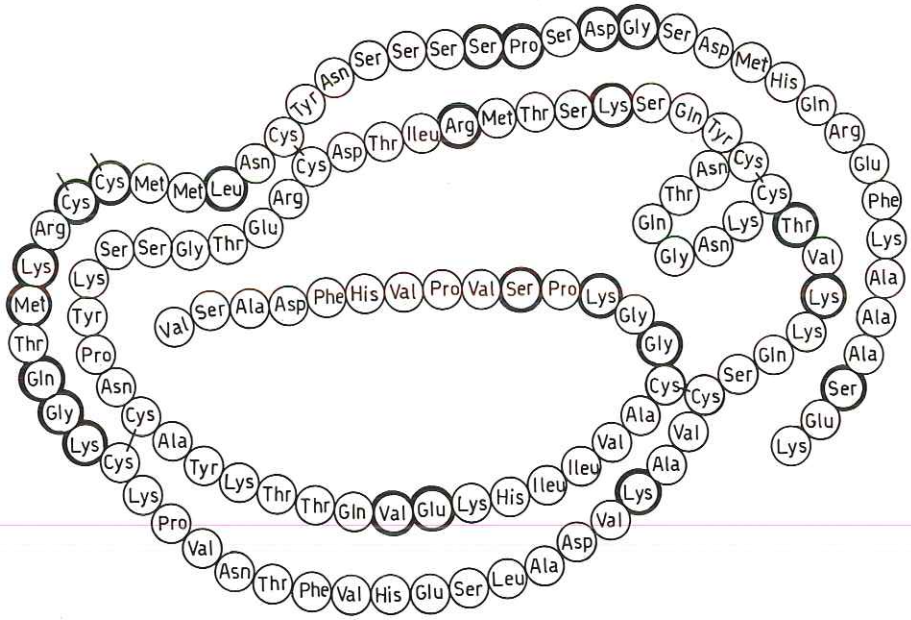


FIG. 1. - Struttura primaria della RNAsi BS-1. I residui con circoli marcati sono differenti nella RNAsi A, tutti gli altri sono uguali.

L'interesse per la ribonucleasi BS-1 è di duplice natura, infatti la ribonucleasi pancreatica rappresenta a tutt'oggi una delle proteine enzimatiche meglio studiate da tutti i punti di vista: oltre al chiarimento della struttura primaria siamo oggi in possesso della sua struttura tridimensionale, grazie agli studi cristallografici di diffrazione ai raggi X [7]; inoltre l'enzima è anche stato sintetizzato chimicamente [8]. Questi grandi progressi non sono tuttavia riusciti a chiarire il problema di fondo, che è quello del meccanismo molecolare d'azione dell'enzima, anche se è stata identificata quella parte della proteina che costituisce il centro attivo catalitico. Si comprenderà quindi come sia apparso promettente a tale riguardo lo studio della ribonucleasi seminale, di una proteina cioè fondamentalmente simile alla ribonu-

cleasi pancreatica, da cui rimane tuttavia distinta da significative differenze di struttura primaria e, soprattutto, quaternaria. Altro motivo per cui è apparso fin dall'inizio degno d'interesse lo studio della ribonucleasi seminale sta nella ricerca della sua funzione biologica. Questa in verità rimane ancora del tutto oscura, e va probabilmente inserita nel quadro generale della sorprendente abbondanza di enzimi nucleolitici messa in evidenza nel plasma seminale di toro.

Subito dopo la dimostrazione della presenza della RNAsi BS-1 nel plasma seminale di toro si è voluto ricercare il sito di formazione di questo enzima, e si è visto che esso si forma originariamente nelle vescichette seminali [9]. Al riguardo dobbiamo ricordare che un altro gruppo di ricercatori ha riferito sull'isolamento e la purificazione di una ribonucleasi dalle vescichette seminali (HOSOKAWA e IRIE [10]). Come sarà meglio chiarito in seguito, i dati ritrovati da tali ricercatori farebbero ritenere che vi sia, nonostante molte proprietà simili, una significativa differenza fra la ribonucleasi di vescichette e quella del plasma seminale. Le ricerche che saranno ora ricordate hanno avuto come scopo di risolvere definitivamente il quesito della completa identità o meno dei due enzimi.

Tale identità era già emersa in effetti da precedenti ricerche [11, 12, 13]. Nella presente comunicazione vengono descritti i risultati più dettagliati sulle proprietà principali della RNAsi SV-1, oltre a un quadro generale sulla localizzazione ed identificazione dei peptidi triptici nella mappa peptidica della proteina carbossimetilata. Come già detto, le principali proprietà chimico-fisiche ed enzimologiche sono già state riscontrate uguali per le due ribonucleasi seminali. Ciò appare dalla Tab. I la quale mostra come i dati essenziali caratteristici di questi due enzimi siano sostanzialmente identici.

La Fig. 2 riporta i risultati di una determinazione di pesi molecolari effettuata sulla base delle diverse mobilità elettroforetiche su gel di poliacrilamide in presenza di sodio dodecilsolfato secondo WEBER e OSBORN [14]. Tanto la RNAsi BS-1 quanto quella SV-1 mostrano la stessa mobilità elettroforetica, corrispondente a un peso molecolare di circa 29.000. Nella Fig. 3 sono poi riprodotti i risultati di esperienze di elettroforesi su gel di poliacrilamide in presenza di sodio dodecilsolfato, da cui appare chiaro come tanto la RNAsi BS-1 quanto la RNAsi SV-1 esibiscano, in presenza di mercaptoetanolo, un minor peso molecolare; ad analogo risultato porta la carbossimetilazione della proteina. Questa è l'evidenza principale che, insieme ad altre prove sperimentali, ha portato a riconoscere per la RNAsi BS-1 l'esistenza di due subunità [4], caratteristica che si riscontra quindi anche per la RNAsi SV-1, come riportato nella Tab. I.

Abbiamo pensato che per ottenere una definitiva conferma sulla identità delle due ribonucleasi seminali si potesse effettuare un esame comparativo delle mappe peptidiche ottenute con le tecniche convenzionali. Si è pertanto proceduto nel modo seguente.

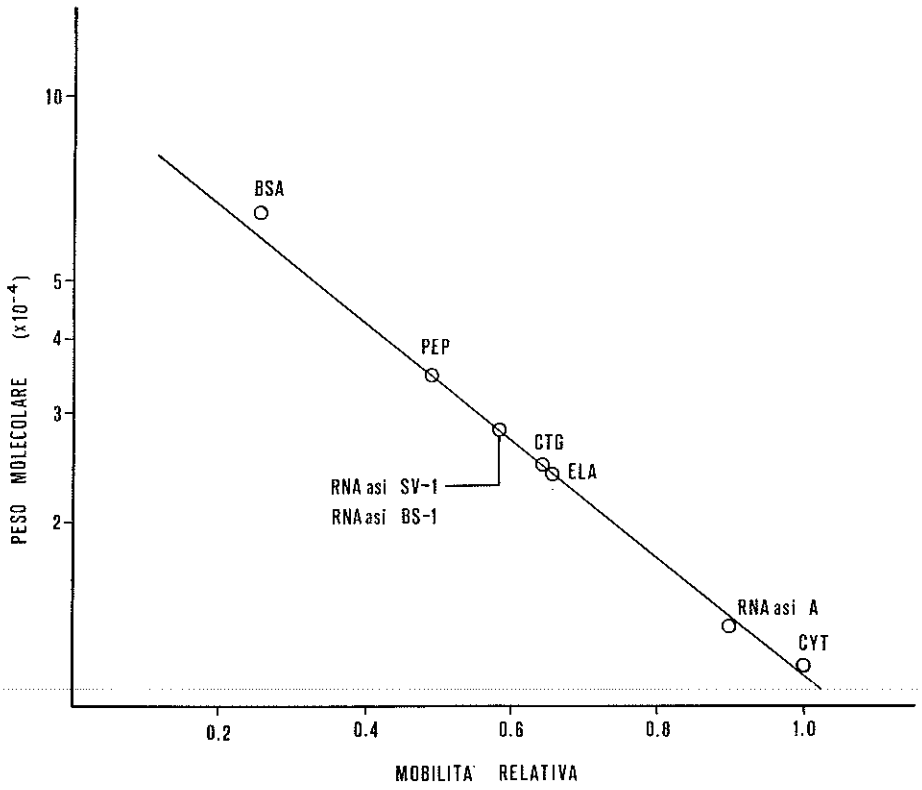


FIG. 2. - Determinazione del peso molecolare della RNAsi SV-1 con elettroforesi su gel di poliacrilamide in presenza di sodio dodecilsolfato.
Proteine standard: BSA: albumina di siero bovino, p.m. 68.000; PEP: pepsina, p.m. 34.000; CTG: chimotripsinogeno, p.m. 25.700; ELA: elastasi, p.m. 25.000; RNAsi A: ribonucleasi pancreatica, p.m. 13.700; CYT: citocromo c, p.m. 11.700.

PARTE SPERIMENTALE.

Riduzione, carbossimetilazione ed idrolisi enzimatica della proteina. — 36 mg di RNAsi SV-1 vengono sciolti in 10 ml di una soluzione di guanidina cloridrato 7 M in Tris 0,1 M pH 9,1. Successivamente la proteina viene ridotta con 21,2 mg di ditiotreitolo e la reazione si fa procedere per 4 ore a 37° C, sotto azoto; la soluzione viene quindi portata a pH 8,0 con HCl N. Segue la carbossimetilazione

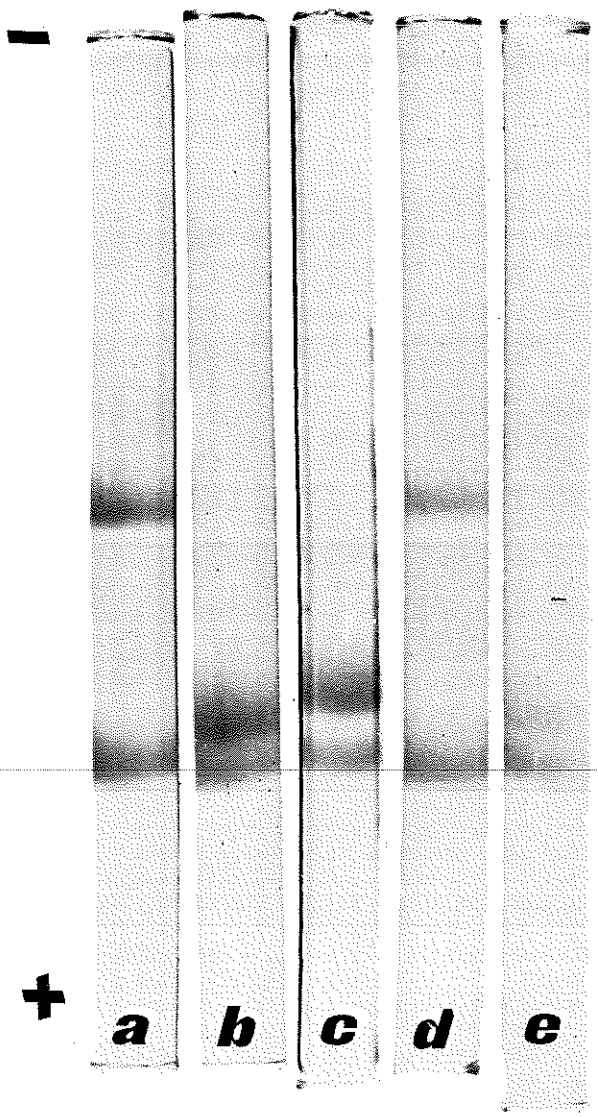


FIG. 3. - Elettroforesi su gel di poliacrilamide, in presenza di sodio dodecilsolfato, delle ribonucleasi seminali BS-1 e SV-1.
a = RNAsi SV-1
b = RNAsi SV-1 più mercaptoetanolo
c = RNAsi SV-1 dopo carbossimetilazione
d = RNAsi BS-1
e = RNAsi BS-1 più mercaptoetanolo
In tutti i campioni è stato aggiunto, come riferimento, citocromo c (l'ultima banda in basso).

con 46 mg di ac. iodoacetico sciolti in ml 0,18 di Tris 2 M con guanidina cloridrato 7 M. Il miscuglio è mantenuto per 20 minuti a un pH costante di 8,0 con l'aggiunta della suddetta soluzione, al pH-Stat, a 37° C e sotto azoto. La reazione viene poi interrotta con l'aggiunta di acido acetico fino a raggiungere un pH di 4,0. Quindi il campione viene dializzato contro H_2O e liofilizzato.

TABELLA I

Principali proprietà della RNAsi SV-1.

Peso molecolare	29,088	29,000
Coefficiente di assorbimento $\left(A^{1\%}_{1\ cm}\right)$ a 278 nm	4,65	4,63
pH optimum su RNA	7,8	7,8
ph optimum su citidina 2′ : 3′–P	6,5	6,5
Attività specifica (Unità Kunitz/mg)	52	60
N.o di subunità	2	2
Aminoacido N-terminale	Lisina	Lisina
Aminoacido C-terminale	Valina	Valina

La proteina ridotta e carbossimetilata viene successivamente idrolizzata con tripsina (tripsina tipo XI della Sigma Chemical Co., trattata con difenil-carbamilcloruro per inibire l'attività chimotriptica). La soluzione proteica viene portata a pH 8,0 con NaOH 0,1 N, al pH-Stat, a 37° C e sotto azoto. Si procede quindi all'aggiunta di un primo quantitativo di tripsina nel rapporto in peso di 1 a 100, seguendo la reazione in base al consumo di NaOH 0,1 N. Quando tale consumo si arresta, si aggiunge un secondo quantitativo di tripsina in eguale rapporto e si lascia reagire fino a reazione completa. La proteina idrolizzata è quindi liofilizzata.

Mappa peptidica. — Una quantità di circa 1 mg di RNAsi SV-1 carbossimetilata e idrolizzata viene sottoposta a cromatografia discendente per 30 ore su carta Whatman 3 MM (cm 46 × 57) usando come solvente un sistema formato da n-butanolo, piridina, ac. acetico, H_2O in rapporto 90 : 60 : 18 : 72. Finita la cromatografia, il foglio, ruotato di 90°, viene sottoposto ad analisi elettroforetica ad alta tensione in tampone piridina-ac. acetico (10 ml di piridina più 100 ml di ac. acetico, diluiti a tre litri con H_2O) a pH 3,6, per un'ora a 3.000 V e a 22° C. Si è utilizzato l'apparecchio High Voltage Electrophorator della Gilson, mod. D. Il cromatogramma è poi spruzzato con una soluzione di ninidrina [15] al fine di evidenziare le zone di localizzazione dei vari peptidi.

Come risultato, si è ottenuta la mappa peptidica riportata nella Fig. 4: la compongono 17 peptidi che si riscontrano uguali sia per numero che per posizione nella mappa peptidica della RNAsi BS-1 carbossimetilata, su cui sono state eseguite prove identiche.

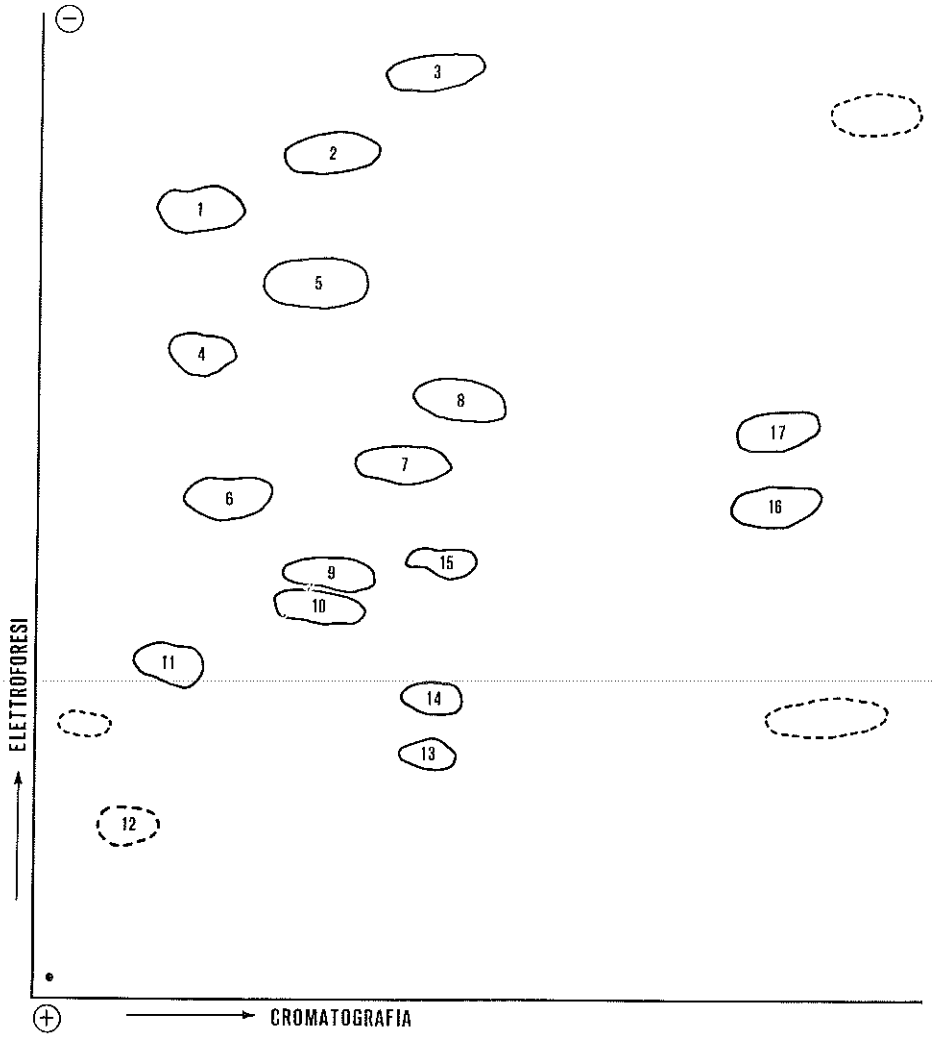


FIG. 4. - Mappa peptidica della RNAsi SV-1 (schematica). Le macchie tratteggiate danno con ninidrina una colorazione debole, tranne quella n. 12 la quale dà invece col reattivo di Pauly una netta reazione positiva per l'istidina.

Successivamente si è proceduto ad una separazione dei peptidi triptici della RNAsi SV-1 carbossimetilata, mediante cromatografia a scambio ionico su colonna di resina Beckman M 83. In tal modo si

sono ottenute 18 frazioni principali, il cui profilo di eluzione appare simile a quello che si ottiene dalla RNAsi BS-1 nelle stesse condizioni; per una più precisa identificazione di ogni peptide separato in tal modo è stato determinato l'aminoacido N-terminale col metodo della dansilazione [16], mentre per qualche peptide più significativo

TABELLA II

Mobilità dei peptidi triptici della RNAsi SV-1 *su carta Whatman n.* 1 *a* 3.000 V, 45 min, pH 3,6.

Peptide	SV-1	Peptide	SV-1
T-1	0,10	T-9	0,53
T-1′ (T-1 + lis)	0,18	T-10	0,66
T-2	0,24	T-11	0,76
T-3 (T-1 – lis)	0,35	T-12	1,00
T-4	0,48	T-13	0,85
T-5	0,28	T-15	0,58
T-6	0,48	T-16	0,62
T-7	0,39	T-17 (T-10 + lis)	0,92
T-8	0,41		

TABELLA III

Identificazione della mappa peptidica della RNAsi SV-1.

Schema mappa peptidica macchia n.	Peptide triptico	Posizione della sequenza
1	T-13	1-7
8	T-16	8-10
12	T-1	11-33
13	T-1′	11-34
2	T-17	34-39
4	T-10	35-39
16	T-6	40-55
10	T-3	56-61
5	T-11	56-62
7	T-9	63-66
14	T-2	67-76
17	T-15	77-80
9	T-7	81-85
15	T-8	86-98
6	T-4	99-104
11	T-5	105-124
3	T-12	34,62

(T-5, T-7, T-11) è stata anche determinata la composizione. Per ciascun peptide poi è stata determinata la mobilità elettroforetica, che è riportata nella Tabella II. Da tali valori di mobilità elettroforetica nonché dalla posizione dei rispettivi picchi di eluzione nella suddetta separazione su resina Beckman M 83 e dai dati analitici sia di composizione in aminoacidi che di sequenza, si è giunti infine alla identificazione di ciascun peptide della RNAsi SV-1, attribuendo loro l'esatta posizione occupata nella sequenza della proteina (v. Tab. III).

Conclusioni.

Si può ritenere dimostrata la completa identità della ribonucleasi delle vescichette seminali di toro (RNAsi SV-1) rispetto a quella del plasma seminale (RNAsi BS-1). Questa identità esclude pertanto di poter attribuire alla ribonucleasi di vescichette talune caratteristiche, quali una differente composizione in aminoacidi e un'unica catena polipeptidica del peso molecolare di 25.500, riportate dai già ricordati ricercatori giapponesi [10].

Ringraziamento. — Ringraziamo il Dott. R. De Prisco per la preparazione della proteina impiegata nel corso di queste ricerche. Esse sono state finanziate in parte dal C.N.R. (contratto n. 73.00421.04).

BIBLIOGRAFIA

[1] D'Alessio G., Floridi A., De Prisco R., Pignero A., e Leone E., Eur. J. Biochem., **26**, 153 (1972).
[2] Floridi A., D'Alessio G. e Leone E., Eur. J. Biochem., **26**, 162 (1972).
[3] D'Alessio G., Parente A., Farina B., Demma G. e Leone E., 7th FEBS Meeting, Varna 1971.
[4] D'Alessio G., Parente A., Guida C. e Leone E., FEBS Letters, **27**, 285 (1972).
[5] Leone E., Suzuki H., Greco L., Parente A., Farina B. e La Montagna R., 8th FEBS Meeting, Amsterdam 1972.
[6] D'Alessio G., Di Donato A., Malorni M. C. e Parente A., Atti IX Congr. Internaz. Biochimica, Stoccolma 1973, abstr. 2q9.
[7] Wyckoff H. W., Tsernoglu D., Hanson A. W., Knox J. R., Lee B. e Richards F. M., J. Biol. Chem., **245**, 305 (1970).
[8] Gutte B. e Merrifield R. B., J. Am. Chem. Soc., **91**, 501 (1969).
[9] Farina B. e Leone E., Boll. Soc. It. Biol. Sper., **44**, 159 (1968).
[10] Hosokawa S. e Irie E., J. Biochem. (Tokyo), **69**, 683 (1971).
[11] De Prisco R., Farina B. e Leone E., Boll. Soc. It. Biol. Sper., **48**, 1111 (1972).
[12] Leone E., Parente A., Farina B. e De Prisco R., Atti IX Congr. Internaz. Biochimica, Stoccolma 1973, abstr. 2p1.
[3] Farina B., Quesada P., Carsana A., Parente A., De Prisco R. e Leone E., Boll. Soc. It. Biol. Sper., **94**, 1445 (1973).
[14] Weber K. e Osborn M., J. Biol. Chem., **244**, 4406 (1969).
[15] Barrolier J. Z., Z. Physiol. Chem., **309**, 219 (1957).
[16] Gros C. e Labouesse B., Eur. J. Biochem., **7**, 463 (1969).

Metabolismo dell'adenina in *Octopus vulgaris*

Nota di BENEDETTA FARINA, MARIA ROSARIA FARAONE MENNELLA
e del socio corrispondente ENZO LEONE *

(Adunanza del 2 giugno 1974)

RIASSUNTO. — È stato studiato il destino metabolico della adenina in vari organi di *Octopus vulgaris*, dopo iniezione nei cuori branchiali del composto radioattivo (adenina-8-C^{14}).

SUMMARY. — The metabolic fate of adenine has been investigated in a number of *Octopus vulgaris* organs, following the injection into the branchial hearts of the radioactive substance (adenine-8-C^{14}).

Precedenti nostre ricerche hanno messo in luce la presenza di notevoli quantità di composti purinici quali adenina, guanina e ipoxantina in alcuni organi di *Octopus vulgaris* [1]. Nel presente studio abbiamo voluto seguire il destino metabolico della adenina, usando il composto radioattivo e ricercandone i prodotti di trasformazione dopo vari intervalli di tempo dalle iniezioni nei cuori branchiali.

MATERIALI E METODI.

Abbiamo impiegato esemplari di *Octopus vulgaris* mantenuti a temperatura ambiente in acqua di mare circolante. L'adenina-8-C^{14} (Calbiochem) aveva un'attività specifica di 7 mC/mmole; prima dell'iniezione essa era sciolta in una soluzione di adenina non radioattiva, 10 mg/ml. Sono stati iniettati, nelle varie esperienze, da 50 a 100 μC di adenina-C^{14} in *Octopus* del peso da gr 300 a 1 Kg. Dopo 8 ore dall'iniezione gli animali erano sacrificati e venivano prelevati gli organi da analizzare. Inoltre durante l'esperienza si provvedeva a raccogliere l'emolinfa mediante incannulazione dell'aorta; l'urina era prelevata al termine dell'esperimento.

Dei vari organi prelevati, nonché dell'emolinfa e dell'urina, erano allestiti estratti perclorici, sospendendo gli organi in 3 volumi di H_2O

* Stazione Zoologica di Napoli e Istituto di Chimica Organica, Laboratorio di Chimica biologica, della Università di Napoli.

e aggiungendo $HClO_4$ 70 % fino a concentrazione finale dell'8 %; il tutto era omogeneizzato e poi centrifugato, scartando poi il precipitato. All'emolinfa e all'urina si aggiungeva solo $HClO_4$ 70 % fino alla concentrazione finale dell'8 %. Il sopranatante, dopo centrifugazione, era poi trattato con KOH 20 % in modo da precipitare l'$HClO_4$.

Gli estrati perclorici erano analizzati per mezzo di cromatografia bidimensionale su carta Whatman n. 1; questa era effettuata nella prima dimensione mediante H_2O a pH 10 [2] e nella seconda dimensione con il sistema isopropanolo-HCl [3]. I composti purinici e pirimidinici e loro derivati venivano localizzati per mezzo d'una lampada a luce u.v. (Mineralight); ai fini della determinazione della radioattività le zone di cromatogramma cui corrispondevano zone con assorbimento u.v. erano ritagliate ed eluite con HCl 0,1 N; l'eluato, essiccato a mezzo di raggi infrarossi, era misurato per la radioattività. Oltre alla localizzazione all'u.v. e alla determinazione della radioattività altre analisi frequentemente realizzate per l'identificazione delle macchie sono consistite nella successiva cromatografia con diversi sistemi di solventi in presenza di composti di riferimento, nella determinazione dello spettro u.v. degli eluati suddetti, nell'esecuzione della reazione di Folin-Ciocalteu [4] sia direttamente sui cromatogrammi sia sui loro eluati, prima e dopo incubazione di essi con xantinossidasi (questa era preparata in Laboratorio essenzialmente secondo il metodo di Morell, [5]). Inoltre, gli estratti perclorici sono anche stati analizzati mediante elettroforesi su carta, e infine si è tentato di ottenere una identificazione migliore effettuando una separazione cromatografica su colona di resina a scambio ionico con eluzione a gradiente di pH secondo Hurlbert e coll. [6].

Per l'analisi degli acidi nucleici, DNA e RNA erano isolati secondo le metodiche convenzionali (Schmidt e Tannhauser, [7]), procedendo prima a lavare con etanolo 95 % per 2 volte, e poi con etanolo-etere (3 : 1 v/v) a 40° C per 3 volte, i precipitati ottenuti per omogeneizzazione dei vari organi con $HClO_4$, alla concentrazione finale 8 %, e lavati una volta con $HClO_4$ 4 % freddo. I vari precipitati, dopo questi lavaggi, erano essiccati e idrolizzati con NaOH N a 34° C per 16 ore. Dopo precipitazione con ac. tricloracetico 65 % e centrifugazione, si separava il precipitato (DNA) dal sopranatante (RNA). I precipitati contenenti il DNA, dopo lavaggio con ac. tricloracetico 5 % ed etanolo, erano sospesi in $Ba(ClO_4)_2$ 0,3 M a bagnomaria bollente per 20 minuti, indi trattati con $HClO_4$ alla concentrazione finale del 2 %, per eliminare eventuali proteine ancora presenti. Infine i sopranatanti dopo centrifugazione erano alcalinizzati fino a pH 8,0 con $Ba(OH)_2$ e vi si aggiungevano 4 volumi di etanolo freddo: i precipitati ottenuti dopo centrifugazione erano idrolizzati con HCl N per 60 minuti a

bagnomaria bollente; i liquidi idrolizzati erano infine trattati con H_2SO_4 75 % per eliminare il Ba, e si aveva così la frazione contenente i prodotti di idrolisi del DNA. Per l'RNA, il sopranatante dopo la precipitazione con ac. tricloracetico dell'idrolizzato con NaOH a 34° C era trattato, dopo essere stato portato a pH 8,0 con $Ba(OH)_2$, con 4 volumi di etanolo freddo. Il precipitato ottenuto dopo centrifugazione, dopo 16 ore a 4° C, era idrolizzato con HCl N a bagnomaria bollente per 60 minuti; gli idrolizzati, trattati con H_2SO_4 per eliminare il Ba, rappresentano la frazione dell'RNA.

Nell'analisi cromatografica su colonna di resina a scambio ionico, si è utilizzata una colonna (cm 1 × 20) di resina Dowex 1 × 8 sulla quale si facevano adsorbire campioni di estratti perclorici di epatopancreas, da cui erano state precipitate le purine e le pirimidine mediante $AgNO_3$ ammoniacale. Questi precipitati erano sciolti e trattati con H_2S; dopo filtrazione ed aereazione erano poi, dopo opportuna concentrazione, portati sulla colonna di resina. L'eluzione era effettuata con ammonio formiato 0,01 M, realizzando un sistema a gradiente di pH; precisamente da valori iniziali di pH 10,2 si passava fino a pH 7,5.

Le singole frazioni erano poi analizzate per il loro assorbimento u.v. nonché per la radioattività.

Risultati.

Nella Tab. I sono riportati i risultati relativi ai valori di radioattività riscontrati negli estratti perclorici dei tessuti e liquidi organici esaminati. Da essi si può notare che la massima radioattività si riscon-

Tabella I

Radioattività (cpm/gr *di tessuto fresco* *) *di organi di* Octopus v. *dopo 8 ore dalla iniezione di 50* μC *di adenina-8-*C^{14}.

Urina *	3.916	Corpo peribranchiale	1.928
Corpi bianchi	3.616	Ghiandole salivari	1.430
Cuori branchiali	3.550	Epatopancreas	590
Gangli ottici	2.850	Emolinfa *	52

* Per emolinfa ed urina le cifre esprimono cpm/ml.

tra per l'urina, seguita molto da vicino dai corpi bianchi e dai cuori branchiali, mentre la minima radioattività è dimostrata dall'emolinfa; l'epatopancreas dimostra una scarsa radioattività.

Qui appresso sono poi riportati i risultati delle cromatografie bidimensionali degli stessi estratti perclorici, con la localizzazione e identificazione dell'adenina e delle altre purine radioattive. Per l'epatopancreas, come già accennato, è stata anche realizzata una separazione delle purine per mezzo di cromatografia su colonna di resina a scambio ionico.

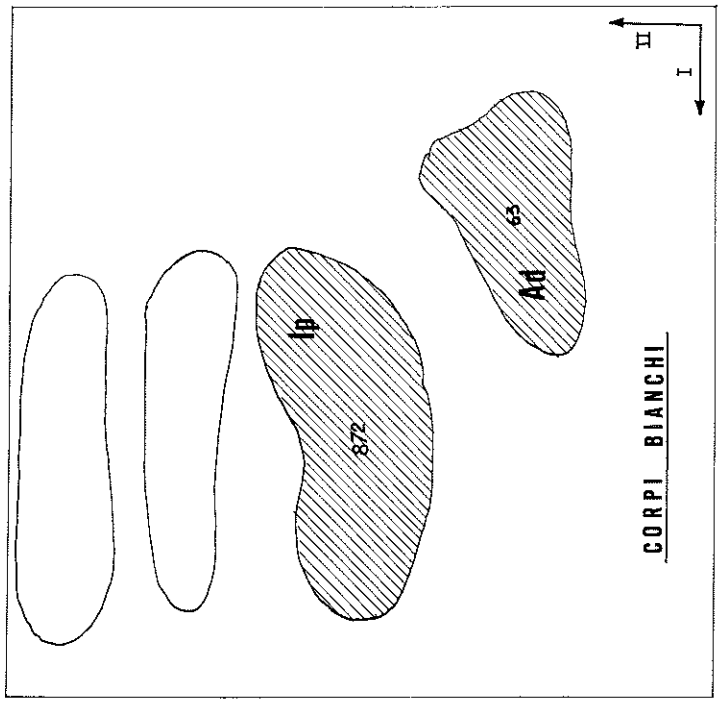
Urina. — Dopo cromatografia bidimensionale si notano quattro macchie con assorbimento u.v.; di queste, una sola presenta notevole radioattività (Fig. 1), peraltro l'analisi del cromatogramma rivela l'esistenza di un'altra zona, anche alquanto radioattiva sebbene in grado inferiore alla precedente, che non presenta alcun assorbimento u.v. Due delle macchie con assorbimento u.v. sono fluorescenti. La determinazione dello spettro di assorbimento dell'eluato della macchia radioattiva principale, caratterizzata da reazione di FOLIN-CIOCALTEU positiva, indica trattarsi di ipoxantina; ciò è confermato dalla dimostrazione di formazione di ac. urico dopo incubazione con xantinossidasi, e dal comportamento cromatografico dell'eluato in presenza delle sostanze pura di riferimento. Rimane incognita la natura della sostanza radioattiva priva di assorbimento u.v.

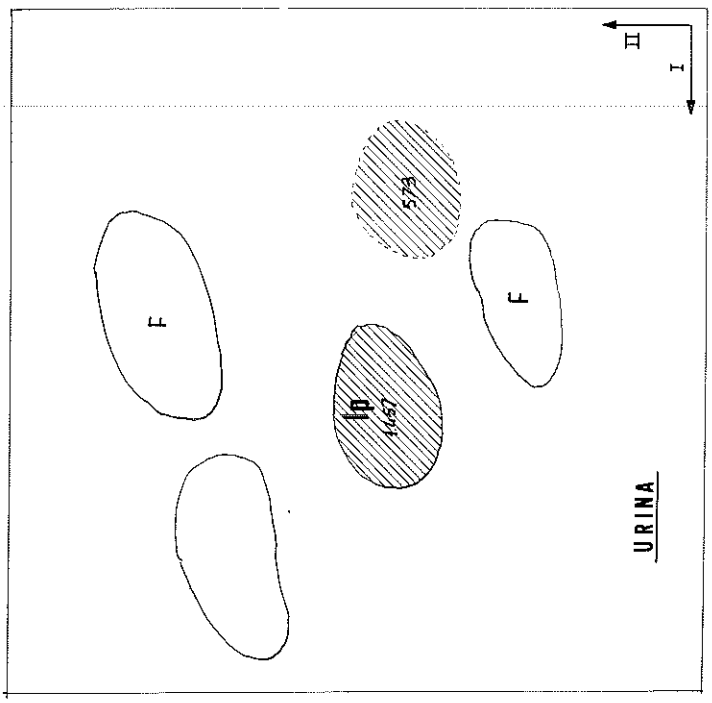
Corpi bianchi. — Si nota la presenza di quattro macchie u.v.; la radioattività è localizzata in due di esse, in maniera però molto differente in quanto la radioattività maggiore si riscontra in una macchia molto simile per posizione a quella della ipoxantina dell'urina, mentre la macchia con radioattività minore va identificata con l'adenina (Fig. 1).

Cuori branchiali. — Vi sono sul cromatogramma dopo lo sviluppo bidimensionale cinque macchie con assorbimento u.v., di esse tre presentano radioattività, in grado diverso. La più radioattiva corrisponde a ipoxantina, seguita da una, che presenta circa la metà di radioattività, e che corrisponde ad adenina; la terza poi, molto meno radioattiva, potrebbe essere guanina (Fig. 1).

Gangli ottici. — Si notano (Fig. 2) quattro macchie u.v. di cui una, l'unica dotata di radioattività in modo significativo, corrisponde ad ipoxantina. Vi è poi un'altra zona radioattiva, priva però di assorbimento u.v., che corrisponde approssimativamente per posizione a quella già notata per l'urina e per i corpi bianchi.

Corpo peribranchiale. — Si hanno cinque macchie u.v., due delle quali radioattive. Una, la più radioattiva, corrisponde ad adenina, mentre l'altra, notevolmente meno radioattiva, è probabilmente dovu-


II
I
63
Ad
Ip
872
CORPI BIANCHI


II
I
573
F
F
Ip
1.657
URINA

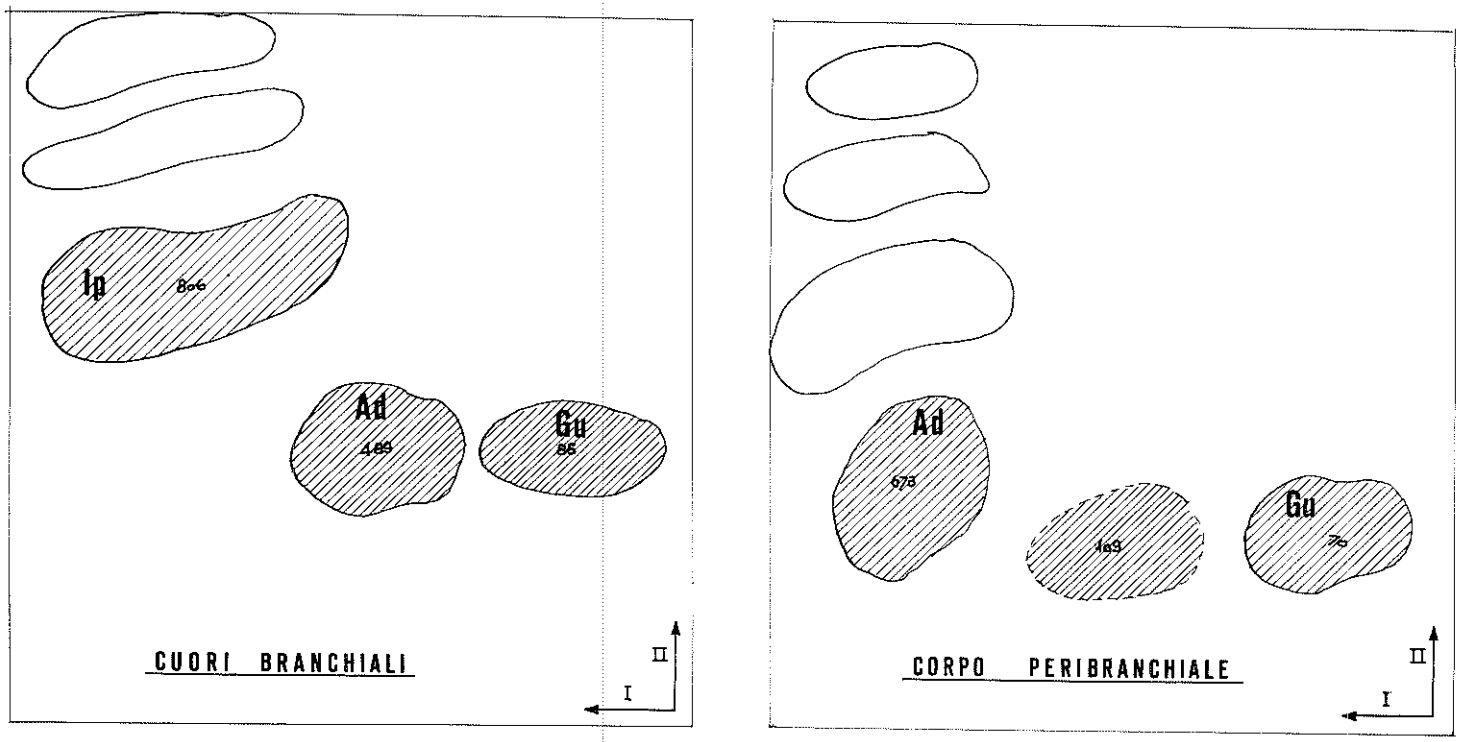
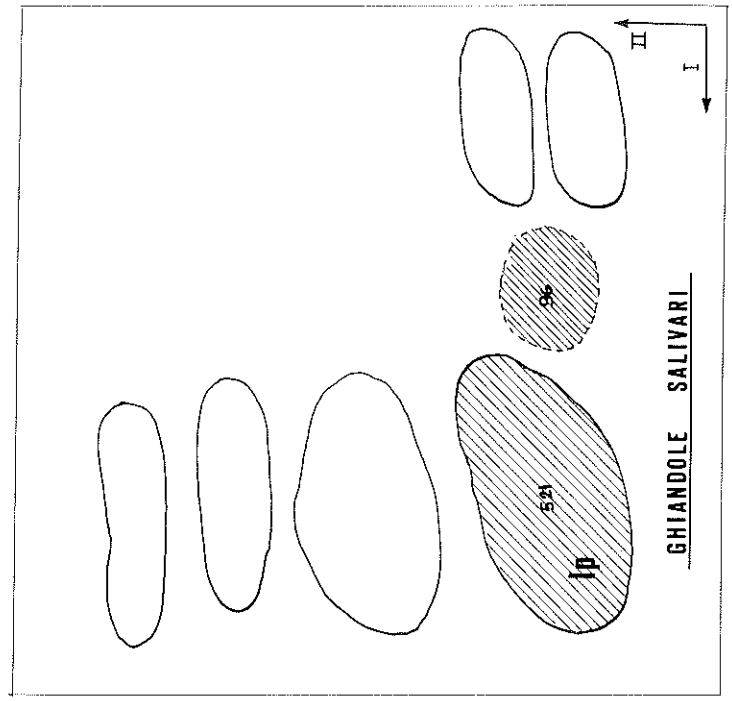
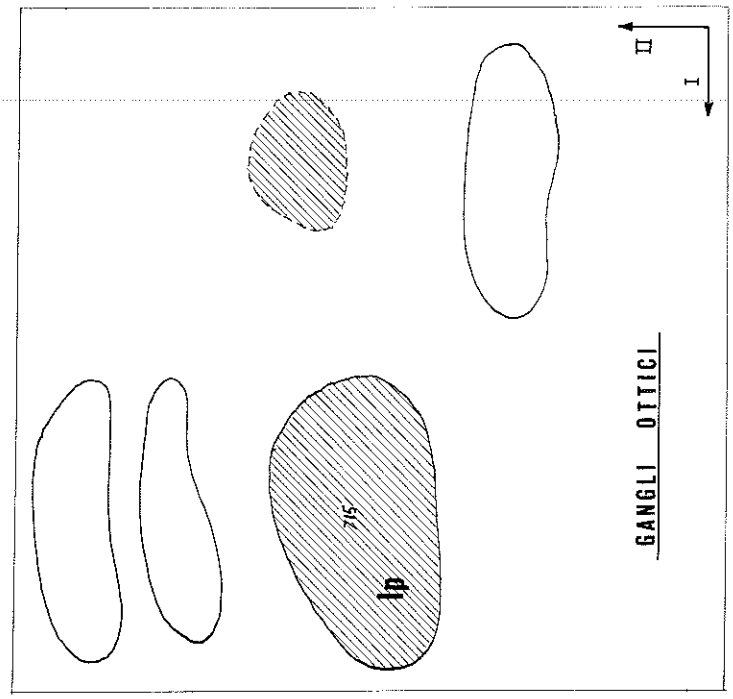


FIG. 1. - Cromatografia bidimensionale di estratti perclorici di organi e urina di *Octopus* v. (schematica, vedi testo). Le macchie tratteggiate all'interno contengono radioattività. Quelle fluorescenti sono marcate con *F*. Le macchie delimitate da contorno continuo assorbono all'u.v., al contrario di quelle a contorno tratteggiato. I numeri riportati all'interno delle macchie tratteggiate indicano la loro radioattività, in cpm.
Ip = ipoxantina; *Ad* = adenina; *Gu* = guanina.


II
I
GHIANDOLE SALIVARI
5.21
Ip


II
I
GANGLI OTTICI
7.5
Ip

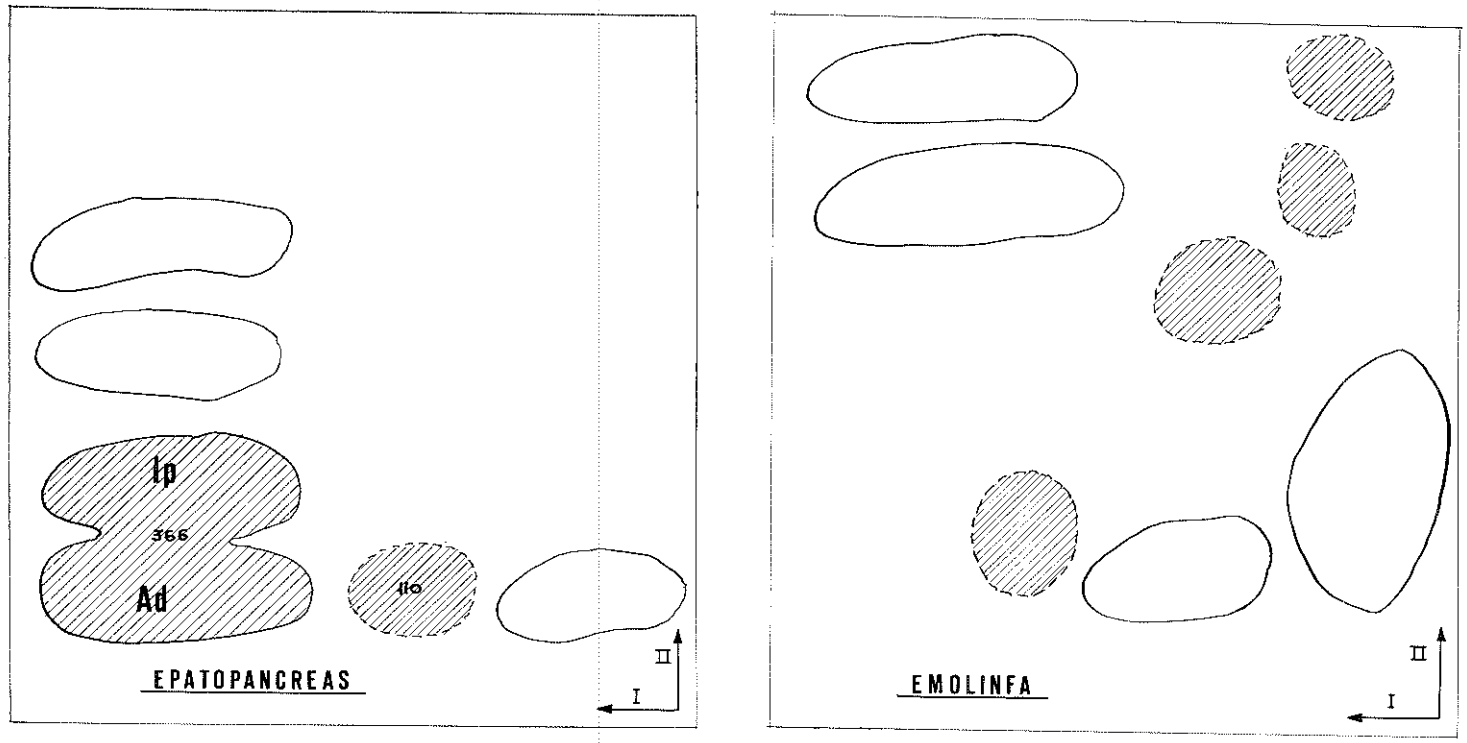


FIG. 2. - Cromatografia bidimensionale di estratti perclorici di organi ed emolinfa di *Octopus v.* (schematica, vedi testo). Le macchie tratteggiate all'interno contengono radioattività. Le macchie delimitate da contorno continuo assorbono all'u.v., al contrario di quelle a contorno tratteggiato. I numeri riportati all'interno delle macchie tratteggiate indicano la loro radioattività, in cpm.
Ip = ipoxantina; *Ad* = adenina; *Gu* = guanina.

ta a guanina. Anche in questo caso vi è poi una zona radioattiva, priva di assorbimento u.v., con la stessa posizione osservata nel caso dell'urina, dei corpi bianchi e dei gangli ottici (Fig. 1).

Ghiandole salivari. — Risultano sul cromatogramma sei macchie u.v., di cui una sola presenta radioattività; la sua posizione corrisponde a quella dell'ipoxantina. Anche in questo caso vi è una zona radioattiva priva di assorbimento u.v., nella stessa posizione osservata nei casi precedenti (Fig. 2).

Epatopancreas. — Vi sono quattro macchie con assorbimento u.v.; una di esse appare la risultante di due macchie singole, parzialmente sovrapposte. Questa macchia presenta radioattività, così come un'altra zona del cromatogramma, che è però priva di assorbimento

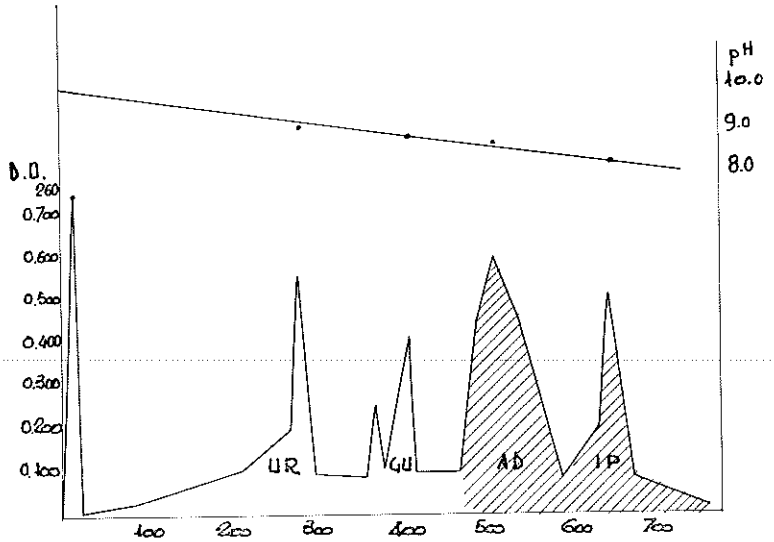


FIG. 3. - Separazione su colonna di resina Dowex 1 x 8, 200-400 mesh (cm 1,0 x 20) delle purine e pirimidine precipitate con $AgNo_3$ ammoniacale da un estratto perclorico di epatopancreas. Eluzione secondo un sistema a gradiente di pH, con NH_4 formiato 0,01 M. Raccolte frazioni da 5 ml con velocità di 0,5 ml/min. I picchi tratteggiati stanno a indicare la presenza di radioattività.
UR = uracile; *GU* = guanina; *AD* = adenina; *IP* = ipoxantina.

u.v. e che occorre in posizione paragonabile a quelle analoghe degli altri cromatogrammi. Per quanto riguarda la macchia u.v. radioattiva, ammettendo, come appare molto probabile data la sua caratteristica forma, che essa sia in realtà composta di due macchie parzialmente confluenti, quella superiore sarebbe da identificare con ipoxantina e quella inferiore con adenina (Fig. 2).

Data la possibilità di disporre di maggiore quantità di organo per l'analisi, e data anche la riconosciuta importanza metabolica dell'epatopancreas, si è ritenuto interessante approfondire l'esame di questo organo per identificare la natura dei composti radioattivi presenti in esso dopo l'iniezione di adenina radioattiva, anche se la radioattività riscontrata è bassa. Dall'analisi cromatografica su resina a scambio ionico d'una frazione di estratto perclorico contenente purine e pirimidine di epatopancreas è risultato (Fig. 3) che adenina e ipoxantina sono le purine radioattive presenti, accanto a uracile e guanina non radioattive. Questi risultati confermano quindi i dati ottenuti dall'esame dei cromatogrammi bidimensionali.

Emolinfa. — Qui si notano nei cromatogrammi quattro macchie con assorbimento u.v., tutte prive di radioattività; questa è invece presente in quattro altre zone, tutte senza assorbimento u.v. e con livelli molto bassi di radioattività. Una di tali zone, quella più in basso nel cromatogramma (Fig. 2) potrebbe corrispondere alla macchia già osservata negli altri cromatogrammi, radioattiva ma senza assorbimento u.v.

Discussione e conclusioni.

Appare una efficiente trasformazione dell'adenina in ipoxantina, e in misura inferiore anche in guanina. Infatti l'ipoxantina è il composto di gran lunga più frequente che si riscontra nei vari organi e liquidi organici esaminati; solo l'emolinfa e il corpo peribranchiale ne appaiono privi, e in alcuni casi, come l'urina, i gangli ottici e le ghiandole salivari, l'unica purina radioattiva è rappresentata dall'ipoxantina, risultando assente anche l'adenina. L'interpretazione che più facilmente rende conto di tali risultati si basa sulla presenza d'un sistema del tipo dell'adenasi che porterebbe alla diretta formazione di ipoxantina. Non è naturalmente da escludere la possibilità di un meccanismo indiretto in cui l'adenina sarebbe prima trasformata in adenosina, questa deaminata ad inosina e quest'ultima scissa a ipoxantina. L'assenza di adenosina e inosina radioattive nei nostri risultati rende più probabile il primo meccanismo.

Per quanto riguarda la guanina, il meccanismo più probabile, sulla base delle nostre conoscenze sul metabolismo purinico, consisterebbe nella formazione, in un primo tempo, di acido adenilico a partire dall'adenina e nella trasformazione di esso in acido guanilico in un secondo tempo, attraverso la formazione intermedia di acido inosinico e xantilico, con la scissione, infine, dell'acido guanilico per

dare guanina libera. Questi meccanismi sono allo stato attuale delle semplici ipotesi e sono necessari altri studi per controllarne la validità.

Altra ipotesi che si può ora avanzare, lasciando ad esperimenti futuri di confermarla o meno, riguarda la funzione dei vari organi esaminati. È possibile che cuori branchiali, corpi bianchi ed epatopancreas siano sede dei meccanismi enzimatici responsabili della formazione dell'ipoxantina, mentre l'ipoxantina riscontrata nei gangli ottici e nelle ghiandole salivari potrebbe non essere endogena, ma provenire dai suddetti organi. La presenza nell'urina di sola ipoxantina, in notevole quantità, depone per una efficiente eliminazione di tale composto.

Un aspetto interessante è rappresentato dalla presenza, nella maggior parte dei casi esaminati, d'una sostanza radioattiva, che non presenta però assorbimento nell'u.v. Essa apre il problema della presenza di enzimi capaci di effettuare una demolizione del nucleo purinico; sarebbe interessante indagare in questa direzione, mettendo in evidenza i meccanismi specificamente interessati.

BIBLIOGRAFIA

[1] FARINA E., FARINA B. e LEONE E., Giorn. Biochimica, **11**, 145 (1962).
[2] CHARGAFF E., DAVIDSON J. N., « The Nucleis Acids », Academic Press. New York 1955, Vol. I, p. 252.
[3] WYATT R., Biochem. J., **48**, 584 (1951).
[4] FOLIN O. e CIOCALTEU V., J. Biol. Chem., **73**, 627 (1927).
[5] MORELL D. B., Biochem. J., **51**, 666 (1952).
[6] HURLBERT R. B., SCHMITZ H., BRUMM A. F. e POTTER V. R., J. Biol. Chem., **209**, 23 (1954).
[7] SCHMIDT G. e THANNHAUSER, J. Biol. Chem., **161**, 83 (1945).

Persistenza di fenomeni sismo-tettonici interessanti il fondo (settore sud-orientale) del cratere vesuviano e successivi alla crisi del maggio 1964

Nota di GIUSEPPE IMBÒ

(Adunanza del 16 novembre 1974)

SOMMARIO. — Vengono descritti fenomeni sismici e tettonici (manifestati da sensibili variazioni morfologiche) entrambi interessanti il settore sud-orientale del fondo craterico. Giovandosi (purtroppo) di sole comunicazioni ed osservazioni visive, è stata ipotizzata una interpretazione di essi, rilevanti invero la presenza, ad una esigua profondità (rispetto ad fondo craterico), di magma attivo.

I fenomeni indicati rientrano nella categoria delle manifestazioni iniziatesi con la crisi del maggio 1964 e caratterizzanti il terzo tempo di un periodo di dinamico riposo vesuviano. Ad essi si attribuisce una notevole importanza, sia per il loro significato dinamico, sia ancora perché un tale comportamento rappresenterebbe la prima osservazione del genere nella storia fenomenologica vesuviana.

SUMMARY. — Seismic and tectonic phenomena — this latter revealed by sensible morphological variations — are here described. Both phenomena are relative to the south-eastern side of the Vesuvian crateric bottom. On the basis of visual observations and verbal communications only an interpretation of such phenomena has been hypotesized. These phenomena show the presence of active magma at shallow depths (relatively to the crateric bottom).

The considered phenomena fall within the group of volcanic manifestations which began with crisis of may 1964 and characterize the third phase of « dynamic rest period » of Vesuvius.

The considered phenomena should be seen as very important ones, both for their dynamic meaning and because they represent the first case of such kind of phenomena observed during the vesuvian hystory.

Con le manifestazioni dell'11 maggio 1964 [1, 2] ebbe inizio il terzo tempo del cosiddetto « periodo di dinamico riposo » del Vesuvio. Questo periodo ha seguito quello eruttivo, incominciato nel 1913 e chiusosi con il parossismo del 1944. Si ritiene opportuno ricor-

dare che il detto *terzo tempo* è caratterizzato da fenomeni denotanti l'avvenuta ascesa di magma attivo sino a relativamente esigua distanza dalla superficie libera e conseguentemente l'eventualità di una non lontana riapertura di una bocca centrale eruttiva.

A principiare da detta data si sono avuti sismi (quasi sempre singolarmente accompagnati da distacchi di frane dalle pareti interne orientali del cratere) e sensibili modificazioni nelle condizioni morfologiche del settore sud-orientale del fondo craterico. I due tipi di fenomeni (isolatamente o contemporaneamente) si sono ripetuti ad intervalli irregolari, e spesso hanno rivelato una tendenza ad una quasi continuità. Nei riguardi della intensità o della entità, essi però hanno raggiunto valori sempre, e presumibilmente di gran lunga, inferiori a quelli assegnabili alle manifestazioni relative alla crisi sismo-tettonica del maggio 1964.

In quanto ad uno studio sui sismi verificatisi in seguito, non mi consta che fino al presente si siano effettuate particolari indagini. Alcune vaghe indicazioni sul fenomeno [3], almeno per gli anni iniziali, sono riportate anche in una relazione del 1969 [5], a proposito dei « sismi per scoscendimenti », tra i quali sono compresi i sismi considerati come prodromi di ripresa di attività eruttiva Vesuviana. Nonostante la mancanza di uno studio a riguardo (che avrebbe permesso non solo di avere notizie dettagliate od anche sintetiche sulla distribuzione temporale e sulla relativa localizzazione dei sismi, nonché idee più concrete sulla causa e sulle caratteristiche di essi; ma anche di poterli eventualmente individuare nella molteplicità dei sismi registrati); risulta certo (e di qualche caso potrei dare notizie precise, in quanto riportate in un personale diario) che essi si siano presentati fino al presente per lo più, nei riguardi dei massimi d'intensità, a gruppi distanziati nel tempo. La registrazione del 14 agosto u.s. a $9^h\,25^m$, avutasi all'Osserv. Vesuviano, rappresenta pertanto uno dei sismi appartenenti alla anzidetta categoria. Essa corrisponde ad una scossa avvertita distintamente da tutte le persone trovantisi sull'orlo craterico o nelle sue prossimità; debolmente alla Stazione inferiore della Seggiovia nonché nello stesso versante (poco più a valle) alle Baracche Forestali. Anche il fondo del cratere è stato interessato dal sismo. In una escursione al cratere effettuata, a 7 giorni di distanza dalla data del sismo, ho avuto occasione di rilevare, precisamente nel settore sud-orientale del fondo (tra l'ammasso caotico di materiale di frane), l'esistenza di un crepaccio di relativamente lieve entità. Si arguisce (anche per avute informazioni) che la sua apertura sia avvenuta all'atto del fenomeno sismico. A parte quest'ultima osservazione che permetterebbe di stabilire con sufficiente certezza l'ubicazione epicentrale; la distribuzione rilevata

delle intensità, oltre a dare la sicurezza che l'epicentro sarebbe situato nell'ambito craterico, consentirebbe anche di avere la indicazione indubbia dell'esiguità della relativa distanza ipocentrale. Per una più sicura valutazione sarebbe stato indispensabile effettuare l'analisi delle registrazioni sismiche ottenute nelle stazioni alla base del Gran Cono (Bunker), ivi sistemate precisamente per lo studio dei fenomeni sismici episuperficiali con epicentri nell'area craterica; ma con mio grande rincrescimento ho appreso che quasi tutti i sismografi in esse collocati, non sono da qualche anno in funzione o sul posto.

L'episodio del 14 agosto e la casuale successiva visita al cratere mi danno l'occasione di dare ancora informazione su di un fenomeno di cui non si è fatto mai cenno nel corso della storia del vulcano, con la speranza che se ne possa trarre vantaggio, ad evoluzione conclusa del fenomeno, per una più accettabile interpretazione della meccanica del 3° tempo ed in generale della dinamica del vulcano, od anche vulcanica.

Il fenomeno consiste in rilevamenti visivi di un medio progressivo abbassamento del bordo rettilineo superiore della conoide meridionale addossata alla parete interna orientale craterica. Esso è stato da me osservato nelle svariate escursioni al cratere effettuate fino al 1970 e di quella successiva del 21 agosto 1974. Dalle mie annotazioni rilevo che la detta conoide aveva subito, a causa dei frequenti franamenti, un progressivo innalzamento sino al 1964. Successivamente, dopo l'accentuato sconvolgimento di essa in conseguenza della crisi del maggio di detto anno, con una sensibile perdita di altezza, raggiunse in tempo piuttosto breve una nuova definitiva conformazione, in modo da poter essere caratterizzata dalla quasi linearità del suo bordo superiore. In seguito, nonostante il prosieguo dei frequenti franamenti, incominciò, fin dallo stesso 1964, a rilevarsi (prima dubbiosamente, poi con quasi certezza ed ancora dopo con certezza) l'indicato abbassamento. Nel diario, in riferimento all'escursione del 19 luglio 1964, scrissi: « ... Ho avuto l'impressione che le masse detritiche di riempimento vadano continuamente inglobandosi, in modo che la conoide subisca un progressivo abbassamento. L'indizio di tale fenomeno sarebbe dato dalla fascia scoperta della parete (craterica) ... Anche il volume della conoide appare ridotto ... ». E notizie di ulteriori abbassamenti si rilevano da quanto è stato scritto per le date: 1964 (23/7); 1965 (18/7); 1966 (25/1, 28/5, 25/9); 1967 (22/5, 7/8, 9/10); 1968 (22/8, 18/10); 1969 (17/5); 1970 (29/5, 21/8). Non ho indicato la data del 9 maggio 1968, in cui venne rilevato invece un « innalzamento dei vertici delle (due) conoidi (addossate alla parete orientale) in modo netto ». Tale osservazione, contrastante

con quelle effettuate alle date precedentemente indicate, oltre ad essere giustificata da una eventuale prevalenza degli effetti dei franamenti, potrebbe essere messa in relazione con una temporanea breve inattività del relativo ramo della colonna magmatica per eventuale vivificazione di altro ramo (ritenuto il principale) già in precedenza supposto attivo. Tale attività dovrebbe invero desumersi da contemporanei fenomeni interessanti sempre la parete orientale e consistenti in fratturazioni ubicate precisamente non molto al di sopra della indicata conoide. Anzi le guide che furono presenti alla loro comparsa, parlarono di contemporanee *proiezioni* del materiale distaccatosi dalla parete.

FIG. 1. - Conoide del settore sud-orientale del fondo craterico (11 ottobre 1967).

Ad eccezione di tale unica notizia di innalzamento della conoide, le altre, numerose e distanziate nel tempo, sono invece concordi nell'affermazione di un progressivo abbassamento. Tutte sono documentate da fotogrammi della zona relativamente alle varie escursioni. Non mi è stato possibile procedere fino al presente a deduzioni di dati concreti. Ai nostri fini attuali, essi non sono invero indispensabili in quanto basta la deduzione qualitativa del sensibile prevalente abbassamento della conoide. Ho potuto invero ottenere un dato appros-

simato, ma sicuro per una valutazione orientativa dell'entità. Esso si riferisce alla variazione dedotta per un intervallo di un settennio, esteso sino a poco oltre l'escursione ultima del 21 agosto u.s. Detta variazione è stata ottenuta in base all'esame di due fotografie (Figg. 1 e 2); delle quali, una fu eseguita l'11 ottobre 1967 in occasione di una mia escursione al cratere col Prof. Minakami e l'altra è stata effettuata nel settembre 1974 dal Prof. Bonasia (che ringrazio moltissimo per la sua gentilezza), mio compagno nella gita dell'agosto. E pertanto per l'intervallo 1967-1974 è stato dedotto un abbassamento all'incirca di 10 metri; ed inoltre, attribuendo un medesimo decremento medio annuo dell'altezza anche per l'intervallo precedente, si avrebbe com-

FIG. 2. - Conoide del settore sud-orientale del fondo craterico (settembre 1974).

plessivamente per l'indicata conoide fino al settembre 1974 (a partire dalla definitiva sistemazione della conoide, raggiunta posteriormente al suo sconvolgimento manifestatosi all'inizio del 3° tempo dell'attuale periodo di dinamico riposo vesuviano, e cioè presso a poco dal giungo 1964) un approssimativo abbassamento di una quindicina di metri.

Nei riguardi della presumibile causa non si può che confermare quanto è stato già detto [1], e cioè che l'abbassamento sarebbe pro-

vocato da un irregolarmente progressivo inghiottimento, da parte del magma, delle masse caotiche di riempimento del cratere vesuviano del 1944. Scaturisce da una tale spiegazione anche la giustificazione del fenomeno sismico; in quanto dall'intima detta unione deriverebbero riduzioni di volume ed eventuali creazioni di cavità con possibilità di crolli delle masse soprastanti. Il ripristino dell'equilibrio può essere istantaneo, traducentesi in un unico fenomeno sismico; oppure a riprese con la presentazione di sismi isolati o a gruppi. Si ha ancora la possibilità di una discesa del tappo rapida ma perdurante per un intervallo di tempo relativamente breve. In tal caso l'abbassamento progressivo delle masse potrebbe determinare l'eccitazione delle pareti, donde la giustificazione dell'agitazione microsismica, come rilevata nei sismogrammi dell'Osserv. Ves. per oltre tre minuti immediatamente avanti il primo sismo della crisi del maggio 1964. Oppure il progressivo inghiottimento, da parte del magma, delle masse di riempimento craterico potrebbe dar luogo ad un continuo adagiamento del tappo e conseguentemente la persistenza del contatto. L'ammissione di una continuità nell'abbassamento della conoide a velocità apparente, ritenuta mediamente costante, con valore prossimo a 1,5 m/anno (data dalla differenza tra velocità dell'abbassamento della conoide per incorporamento e velocità dell'innalzamento a causa dei distacchi di frane) implicitamente verrebbe ad ipotizzare il persistente contatto. Ciò invero non corrisponderebbe alla realtà per una constatata variazione della velocità apparente con raggiungimento anche di valori negativi. Un tale evento significherebbe un innalzamento della conoide con ispessimento del tappo. Come è stato già rilevato in precedenza, un fenomeno del genere si è rilevato almeno nella prima metà del 1968.

L'inversione nel comportamento potrebbe avere una spiegazione nella presenza dell'altro ramo terminale del condotto: ramo che potrebbe essere anche il principale, in quanto sarebbe presumibilmente prossimo al condotto eruttivo pre-1944. Nei due rami l'attività del magma risulterebbe alterna o anche contemporanea. Un'attività attribuibile al ramo detto principale venne infatti rilevata anche avanti il 1964.

La deduzione sicura di quanto esposto consisterebbe nella presenza ad esigua distanza dal fondo craterico di magma attivo, conclusione alla quale si è giunto anche in base alla dettagliata analisi delle registrazioni sismiche relative ai sismografi delle 4 stazioni alla base del Gran Cono ed avutesi in occasione del terremoto del 4 settembre 1968 [6].

Nei riguardi delle altre deduzioni o interpretazioni idee più chiare, anzi concrete, si sarebbero certamente potute avere da un accurato

studio sismico delle registrazioni ottenibili dalle stazioni (se in funzione) alla base del Gran Cono, anche se limitate almeno all'intervallo luglio-agosto in cui sono stati più marcati (come, ad es., i poderosi franamenti dalla parete orientale craterica dei primi di luglio, osservati distintamente da Napoli) i fenomeni collegati con le manifestazioni successive alla crisi del maggio 1964. E maggior vantaggio si sarebbe potuto trarre dalla ripetizione di misure gravimetriche [2] nell'area craterica nonché da altre indagini geofisiche di cui detti superficialmente cenno in occasione della celebrazione del 125° anniversario della fondazione dell'Osservatorio [4] nei riguardi delle osservazioni in stazioni fisse, mentre eventuali vantaggi potrebbero trarsi anche da misure atte a rilevare variazioni nelle condizioni fisiche delle eterogenee masse episuperficiali.

BIBLIOGRAFIA

[1] Imbò G., *Recenti manifestazioni dell'attività vesuviana,* Atti Accademia Pontaniana, vol. XIII, 1964.

[2] Imbò G., Casertano L., Bonasia V., *Considerazioni sismo-gravimetriche sulle manifestazioni vesuviane del maggio 1964,* Annali Osserv. Vesuviano, Ser. VI, vol. VI, 1964.

[3] Imbò G., Casertano L., Napoleone G., *Seismicity of Vesuvius on its present state of activity,* Bull. Volc., vol. XXXII-2, 1968.

[4] Imbò G., *Discorso celebrativo del 125° anniversario della istituzione dell'Osservatorio Vesuviano,* Annali Osserv. Vesuviano, Ser. VI, vol. VIII (Supplemento), 1967.

[5] Imbò G., *Contributi della fenomenologia sismica alle indagini sulla dinamica del vulcanismo,* Atti Assoc. Geof. Ital., XVIII Convegno, 1969.

[6] Imbò G., *Investigations regarding the crustal base of Somma-Vesuvius and the magmatic characteristics of the volcano, together with the earthquakes eruptions, particularly those of the 4th September 1968 and the 5th February 63 A.D.,* Atti Acc. Sc. Fis. e Mat., Ser. III, vol. VIII, Napoli 1974.

Una generalizzazione di alcuni teoremi di stabilità asintotica

Nota di B. D'Onofrio e F. Visentin *
presentata dal socio corrispondente Luigi Salvadori

(Adunanza del 16 novembre 1974)

Sommario. — Vengono forniti due teoremi concernenti il problema della stabilità per le equazioni differenziali ordinarie, come generalizzazione, attraverso l'uso di più funzioni ausiliarie, di alcuni recenti teoremi di stabilità asintotica.

Abstract. — In this paper two theorems related to the problem of stability for differential ordinary equations are given, which generalize, by means of several auxiliar functions, some recent results about asymptotic stability.

1. - Il problema generale della stabilità della soluzione identicamente nulla di un'equazione differenziale del tipo $\dot{x} = f(t, x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(t, 0) \equiv 0$, si riconduce, nell'ambito del metodo diretto di Liapunov, al problema della esistenza di opportune funzioni ausiliarie, le cui derivate lungo le soluzioni abbiano determinate proprietà. Negli ultimi anni è stata elaborata un'estensione del metodo di Liapunov fondata sull'uso di più funzioni ausiliarie (cfr. ad es. [4], [5], [6]) associate ad uno stesso tipo di stabilità. In tal modo, in ogni dato problema di stabilità, è possibile distribuire tra più funzioni il ruolo che nei teoremi di Liapunov viene fatto svolgere da una sola funzione ausiliaria. Cosicché, ognuna delle funzioni dovrà possedere requisiti meno rigidi, ciò che agisce ovviamente in favore di una maggiore flessibilità del metodo.

Nel presente lavoro si perviene a due teoremi, uno di stabilità asintotica e l'altro di stabilità equiasintotica involgenti appunto l'uso di più funzioni ausiliarie. Nel primo teorema si rimuove, rispetto al classico teorema di Liapunov, l'ipotesi di estremo superiore infini-

* Borsiste del C.N.R. presso l'Istituto Matematico dell'Università di Roma.

tesimo tramite l'introduzione di una funzione vettoriale Φ, le cui derivate generalizzate siano limitate superiormente o inferiormente: ciò permette, utilizzando un ampliamento di una tecnica dovuta a Marachkov [2], di mostrare l'attrattività dell'origine. Nel secondo teorema l'uso di una funzione ausiliaria vettoriale Φ, le cui derivate generalizzate siano limitate superiormente, permette di provare la stabilità equiasintotica dell'origine richiedendo alla funzione scalare V, in luogo della definitezza in segno, solo di essere limitata inferiormente. I teoremi ai quali si perviene costituiscono la generalizzazione di alcuni recenti risultati [7], [8], i quali hanno in particolare consentito di porre il classico teorema di Marachkov in una forma applicabile a casi significativi della Meccanica, in cui la funzione f non è limitata. Un caso appunto di f non limitata viene infine esaminato, considerando un sistema olonomo sottoposto a due particolari sollecitazioni dipendenti esplicitamente dal tempo, una delle quali derivante da un potenziale, e l'altra essendo una sollecitazione dissipativa.

2. - Per ogni $\varepsilon > 0$ sia P_ε la sfera $\{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq \varepsilon\}$, ove con $\| \cdot \|$ abbiamo indicato la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con τ un numero reale e con I l'intervallo $]\tau, +\infty[$. Supposto $\gamma > 0$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.1}$$

dove f è un'applicazione continua, definita in $I \times P_\gamma$, a valori in $\mathbb{R}^n$ e tale che $f(t, 0) \equiv 0$. Assumiamo inoltre che per ogni $(t_0, x_0) \in I \times P_\gamma$ esista una sola soluzione $x(t, t_0, x_0)$ tale che $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, definita nell'intervallo di massimalità $J(t_0, x_0)$. Se $V : I \times P_\gamma \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, indichiamo con $D^+ V$ l'applicazione $D^+ V : I \times P_\gamma \to \hat{\mathbb{R}}$ definita per ogni $(t, x) \in I \times P_\gamma$ con la formula

$$D^+ V(t, x) = \lim_{h \to 0^+} \sup \frac{V(t+h, x(t+h, t, x)) - V(t, x)}{h} .$$

Se la funzione V è localmente lipschitziana rispetto ad x la $D^+ V$ può essere calcolata lungo le soluzioni della (2.1) senza conoscere le soluzioni stesse. Diremo infine che una applicazione $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è di classe K, se essa è continua e strettamente crescente, con $c(0) = 0$.

3. - Dimostriamo il seguente

3.1. TEOREMA. Supponiamo che per l'equazione (2.1) esistano due funzioni continue $V : I \times P_\gamma \to \mathbb{R}$, $\Phi : I \times P_\gamma \to \mathbb{R}^k$, tali che in $I \times P_\gamma$:

(i) V sia definita positiva;

(ii) $D^+ V(t, x) \leq -u(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k) \leq -c(\| \Phi(t, x) \|)$, $c \in K$;

(iii) $\| \Phi \|$ sia definita positiva;

(iv) $D^+ \Phi_r$ sia limitata superiormente o inferiormente, $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Allora la soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione (2.1) è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. La soluzione $x \equiv 0$ è stabile, in quanto V è definita positiva e $D^+ V(t, x) \leq 0$. Allora fissato $t_0 \in I$, esiste $\sigma(t_0) \in]0, \gamma[$ tale che per ogni $x_0 \in P_\sigma(t_0)$, la soluzione $x(t, t_0, x_0)$ esiste per ogni $t \in [t_0, +\infty[$ e verifica la condizione $\| x(t, t_0, x_0) \| < \gamma$, $\forall t \in [t_0, +\infty[$. Sia $x_0 \in P_{\sigma(t_0)}$; proviamo che $\lim_{t \to +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$. Osserviamo che per ogni $\eta_i \in]0, \gamma[$ e per ogni $t_0' \geq t_0$ esiste un istante $\bar{t} \geq t_0'$ tale che

$$| \Phi_r(\bar{t}, x(\bar{t}, t_0, x_0)) | < \eta_i , \qquad \forall\, r \in \{1, 2, \ldots, k\} .$$

Infatti se per un istante t_0' e per un indice $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ si avesse $| \Phi_r(t, x(t, t_0, x_0)) | \geq \eta_i \quad \forall\, t \geq t_0'$, risulterebbe per l'ipotesi (ii):

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0', x(t_0', t_0, x_0)) - c(\eta_i)(t - t_0') .$$

Quindi $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to -\infty$, mentre per l'ipotesi (i) la funzione V è definita positiva in $I \times P_\gamma$.

Premesso ciò, dimostriamo che $\lim_{t \to +\infty} \| \Phi(t, x(t, t_0, x_0)) \| = 0$. Supponiamo che ciò non sia vero. Allora esistono $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e $\eta_i' \in]0, \gamma[$ tali che

$$\forall\, t_0^* \geq t_0, \ \exists\ t' \geq t_0^* \text{ per cui } | \Phi_r(t', x(t', t_0, x_0)) | > \eta_i' .$$

Posto $\eta_i = \eta_i'/2$, è possibile allora costruire due successioni divergenti $\{t_n'\}$, $\{t_n''\}$ tali che:

$$t_n' < t_n'' < t'_{n+1} \qquad \forall\, n \in \{1, 2, \ldots\} ,$$

$$| \Phi_r(t_n', x(t_n', t_0, x_0)) | = \eta_i , \qquad | \Phi_r(t_n'', x(t_n'', t_0, x_0)) | > 2\eta_i ,$$

$$| \Phi_r(t, x(t, t_0, x_0)) | > \eta_i , \qquad \forall\, t \in]t_n', t_n''] .$$

Per ogni $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $\Phi_r(t, x(t, t_0, x_0))$ cresce di una quantità maggiore di η_l in uno dei due intervalli $[t_n', t_n'']$, $[t_n'', t'_{n+1}]$ e decresce di una quantità maggiore di η_l nell'altro. Tenendo conto dell'ipotesi (iv), si riconosce che almeno uno, I_n, degli intervalli $[t_n', t_n'']$, $[t_n'', t'_{n+1}]$ ammette, al variare di n, un limite inferiore positivo. In virtù dell'ipotesi (ii), la funzione $V(t, x(t, t_0, x_0))$ decresce in ciascuno degli infiniti intervalli I_n di una quantità superiore ad un numero strettamente positivo indipendente da n. Poiché V è decrescente lungo tutta la soluzione, ne segue $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to -\infty$ per $t \to +\infty$.

Il corollario seguente è un risultato dovuto a L. Salvadori [8]:

3.2. COROLLARIO. Supponiamo che per l'equazione (2.1) esistano due funzioni $V : I \times P_\gamma \to \mathbb{R}$, $\Phi : I \times P_\gamma \to \mathbb{R}^k$, tali che in $I \times P_\gamma$:

(i') V sia definita positiva;

(ii') $D^+ V$ sia definita negativa;

(iii') $\| \Phi \|$ sia definita positiva e dotata di estremo superiore infinitesimo;

(iv') $D^+ \Phi_r$ sia limitata superiormente o inferiormente, $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Allora la soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione (2.1) è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Basta dimostrare che le ipotesi (ii') e (iii') comportano l'ipotesi (ii) del teorema 3.1. Sia $(t, x) \in I \times P_\gamma$. Essendo $\| \Phi(t, x) \| \leq b(\| x \|)$ e $D^+ V(t, x) \leq -a(\| x \|)$, con $a, b \in K$, risulta $\| x \| \geq b^{-1}(\| \Phi(t, x) \|)$ e quindi $D^+ V(t, x) \leq -a(b^{-1}(\| \Phi(t, x) \|)) = -c(\| \Phi(t, x) \|)$.

3.3. OSSERVAZIONE. Il classico teorema di Marachkov [2] segue dal corollario 3.2 assumendo $\Phi(t, x) = x$, $\forall (t, x) \in I \times P_\gamma$. Se invece si assume, nel corollario 3.2, per Φ la funzione scalare V, si ottiene un noto teorema di Massera [3].

4. - Sussiste il seguente altro

4.1. TEOREMA. Supponiamo che per l'equazione (2.1) esistano due funzioni continue $V : I \times P_\gamma \to \mathbb{R}$, $\Phi : I \times P_\gamma \to \mathbb{R}^k$, tali che in $I \times P_\gamma$:

(i) $V(t, x) > -L$, $L > 0$;

(ii) $D^+ V(t, x) \leq -u(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k) \leq -c(\| \Phi(t, x) \|)$, $c \in K$;

(iii) $W(t, x) = \max \{\Phi_1(t, x) \ldots, \Phi_k(t, x)\} \geq a(\| x \|)$, $a \in K$, $\Phi_1(t, 0) = \ldots = \Phi_k(t, 0) = 0$;

(iv) $D^+ \Phi_r(t, x) \leq 0$, $\forall r \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Allora la soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione (2.1) è equiasintoticamente stabile.

Dimostrazione. La soluzione $x \equiv 0$ è stabile in virtù del teorema di Liapunov sulla stabilità semplice. Infatti per le ipotesi (iii) e (iv) la funzione W è definita positiva e decrescente lungo le soluzioni dell'equazione (2.1) (cfr. [1]). Proviamo che l'origine è equiattrattiva. A tale scopo, fissato $t_0 \in I$, assumiamo $\sigma(t_0) \in]0, \gamma[$ in modo che per ogni $x_0 \in P_{\sigma(t_0)}$ la soluzione massimale esista per ogni $t \in [t_0, +\infty[$ e verifichi la condizione $\| x(t, t_0, x_0) \| < \gamma$, $\forall\ t \in [t_0, +\infty[$.

Sia $x_0 \in P_{\sigma(t_0)}$; proviamo che per ogni $\eta \in]0, \gamma[$ esiste $\bar{t} \geq t_0$ tale che $W(\bar{t}, x(\bar{t}, t_0, x_0)) \leq \eta$. In caso contrario infatti risulterebbe, per l'ipotesi (iii), $\| \Phi(t\ x(t, t_0, x_0)) \| > \eta\ \forall\ t \in [t_0, +\infty[$, e per l'ipotesi (ii) $V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - c(\eta)(t - t_0)$. Quindi $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to -\infty$ per $t \to +\infty$, in contrasto con l'ipotesi (i). Allora, poiché W è decrescente lungo le soluzioni dell'equazione (2.1), $W(t, x(t, t_0, x_0)) \to 0$ per $t \to +\infty$. Dall'ipotesi (iii) segue allora che la soluzione $x \equiv 0$ è attrattiva. Per provare l'equiattrattività, assunto t_0' tale che

$$t_0' - t_0 = \frac{V(t_0, x_0) + L}{c(\eta)}, \tag{4.1}$$

osserviamo che, al variare di x_0 nel compatto $P_{\sigma(t_0)}$, le differenze $t_0' - t_0$ si possono tutte maggiorare con uno stesso numero positivo dato da

$$T(t_0, \eta) = \frac{\alpha(t_0) + L}{c(\eta)},$$

dove $\alpha(t_0) = \max \{ V(t_0, x_0) : x_0 \in P_{\sigma(t_0)} \}$.

4.2. OSSERVAZIONE. Il teorema di Massera segue dal teorema 4.1, assumendo per Φ la funzione scalare V. Da ciò si riconosce che esso è in effetti un teorema di stabilità equiasintotica.

5. - Per illustrare in maniera concreta le considerazioni svolte nei lavori [7], [8], e nel presente, esaminiamo il problema della stabilità asintotica in un caso, di interesse meccanico, in cui la funzione f non è limitata.

Sia S un sistema olonomo, a vincoli bilaterali, lisci e indipendenti dal tempo, ad n gradi di libertà, riferito ad una n-pla $q = (q_1,$

$q_2, \ldots, q_n$) di coordinate lagrangiane indipendenti. Supponiamo che sia

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \, \dot{q}_i^2$$

la forza viva del sistema.

Supponiamo inoltre che il sistema S sia soggetto alle seguenti sollecitazioni:

a) una sollecitazione dissipativa $Q : I \times \Psi \to \mathbb{R}$, dove Ψ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente il punto $\dot{q} = 0$, le cui componenti lagrangiane siano combinazioni lineari delle $\dot{q}_i$

$$Q_i = -\alpha \sum_1^n{}_j \, a_{ij}(t) \, \dot{q}_j$$

con α costante positiva e con le funzioni $a_{ij}(t)$ di classe C^1 per $i = j$, di classe C^0 per $i \neq j$, e verificanti le condizioni

$$\alpha \, a_{ij}(t) > 1, \quad i = j; \qquad 0 < \beta_{ij} < a_{ij}(t) < \delta_{ij}, \quad i \neq j;$$

b) una sollecitazione derivante da un potenziale $U : I \times \theta \to \mathbb{R}$ (dove θ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente il punto $q = 0$) espresso con la forma quadratica

$$U(t, q) = -\frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \, b_i(t) \, q_i^2 .$$

Supporremo che i coefficienti siano funzioni non negative, di classe C^1, limitate e verificanti la relazione $b_i(t) > \frac{1}{2}(\alpha \, a_{ii}'(t) + b_i'(t))$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Le equazioni del moto sono

$$\frac{d\,\dot{q}_i}{d\,t} = -b_i(t) \, q_i - \alpha \sum_1^n{}_j \, a_{ij}(t) \, \dot{q}_j , \quad \frac{d\,q_i}{d\,t} = \dot{q}_i , \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(5.1)

Il sistema ammette la soluzione $q \equiv 0$, $\dot{q} \equiv 0$; dimostriamo che per α abbastanza piccolo questa soluzione è asintoticamente stabile.

Effettuando il cambiamento di coordinate $q = x$, $\dot{q} = y$, si vede che il sistema (5.1) è equivalente al sistema

$$\dot{x}_i = y_i\,, \qquad \dot{y}_i = -b_i(t)\,x_i - \alpha \sum_1^n{}_j\, a_{ij}(t)\,y_i\,, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{5.2}$$

Posto

$$V(t, x, y) = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i\, (b_i(t) + \alpha\, a_{ii}(t))\, x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i\, y_i^2 + \sum_1^n{}_i\, x_i\, y_i\,,$$

lungo le soluzioni del sistema risulta:

$$\dot{V}(t, x, y) = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i (b_i(t) - \frac{\alpha}{2}\, a_{ii}'(t) - \frac{1}{2}\, b_i'(t))\, x_i^2 -$$

$$- \sum_1^n{}_i\, (\alpha\, a_{ii}(t) - 1)\, y_i^2 - \alpha \sum_{\substack{1 \\ i \neq j}}^n{}_{ij}\, a_{ij}(t)\, (x_i + y_i)\, y_j\,.$$

Posto inoltre $\Phi = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n})$, con $z_i = x_i$ e $z_{i+n} = y_i^2$ per $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si ha

$$\dot{\Phi}_i = y_i \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$\dot{\Phi}_{i+n} = -2\,\alpha\, a_{ii}(t)\, y_i^2 - 2\, b_i(t)\, x_i\, y_i - 2\,\alpha \sum_{\substack{1 \\ i \neq j}}^n{}_{ij}\, a_{ij}(t)\, y_i\, y_j\,,$$

$$i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Con una scelta opportuna di α, la funzione V verifica per il sistema (5.2) le ipotesi (i) e (ii) del corollario 3.2, e la funzione Φ verifica le ipotesi (iii) e (iv) del medesimo corollario. Ciò appunto prova che la soluzione $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ del sistema (5.2) è asintoticamente stabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] Habets P.-Peiffer K., *Classification of stability - like concepts and their study using vector Liapunov functions*, J. of Math. An. and Appl., **43** (2), 537-570 (1973).

[2] Maracikov M., *Su un teorema di stabilità (in russo)*, Izv. Fiz. Mat. Obs. Kazan Univ., **12** (3), 171-174 (1940).

[3] MASSERA J. L., *Contributions to stability theory*, Ann. of Math., **64**, 182-206 (1956).
[4] MATROSOV V. M., *On the stability of motion*, PMM (J. Appl. Math. and Mech.), **26**, 1337-1353 (1962).
[5] ROUCHE N., *On the stability of motion*, Int. J. Non Lin. Mech., **3**, 295-306 (1968).
[6] SALVADORI L., *Sulla stabilità del movimento*, Le Matematiche, **24** (1), 218-239 (1969).
[7] SALVADORI L., *Sul problema della stabilità asintotica*, Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat., **53**, 35-38 (1973).
[8] SALVADORI L., *Some contributions to asymptotic stability theory*, Ann. Soc. Scient. Bruxelles, **88** (2), 183-194 (1974).

Cineriti riolitiche nei depositi messiniani della Valle del Crati (Calabria settentrionale)

Nota di SILVIO DI NOCERA *,
GIUSEPPE NARDI **, FRANCO ORTOLANI *, MARIO TORRE *
presentata dal socio ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 16 novembre 1974)

RIASSUNTO. — Lungo la valle del Crati nella Calabria settentrionale, affiorano ampiamente successioni sedimentarie riferibili al Miocene superiore e correlabili con quelle presenti nelle zone di Amantea, Diamante, Lungro e Cropalati. Tali depositi appartengono ad un ciclo di sedimentazione iniziato nel Tortoniano superiore, dopo la fase tettonica regionale, e terminato nel Messiniano durante la sedimentazione evaporitica a causa di una nuova fase tettonica. I depositi altomiocenici affioranti ad ovest di Cosenza tra S. Fili e S. Vincenzo la Costa sono, dal punto di vista litostratigrafico, costituiti dal basso verso l'alto da tre intervalli: 1) conglomerati ed arenarie; 2) marne ed argille; 3) arenarie, argille, evaporiti e cineriti. Al di sopra di questa successione miocenica poggiano in discordanza peliti del Pliocene inferiore. Il substrato di questi sedimenti è rappresentato dalla unità dioritico-kinzigitica che costituisce l'unità tettonica cristallina geometricamente più alta della Calabria settentrionale.

Il primo intervallo arenaceo-conglomeratico ha una potenza variabile da trenta a cinquanta metri; i conglomerati prevalgono nella parte bassa mentre le arenarie sono più abbondanti in quella superiore.

L'intervallo marnoso-argilloso, potente circa cinquanta metri, è caratterizzato dall'abbondanza di resti organici quali scaglie e scheletri di pesci e può essere correlato con l'intervallo tripolaceo presente nelle altre parti della Calabria.

Nell'intervallo superiore oltre arenarie, argille, calcari evaporitici e gessi è presente un livello di cinerite vulcanica dello spessore di circa 4 metri. Tale cinerite, in sezione sottile, risulta composta essenzialmente da vetro e subordinatamente da clasti cristallini; contiene inoltre in piccola quantità una frazione argillosa, carbonato di calcio e frammenti di arenarie quarzoso-feldspastiche. Ai fini della interpretazione petrografica del magma che ha dato luogo al vulcanesimo rappresentato dalle cineriti si sono effettuate analisi chimiche della cinerite in toto e della frazione vetrosa e si è presa in considerazione soltanto quest'ultima.

Per la classificazione è stato eseguito il calcolo della composizione normativa in volume secondo il procedimento della Associazione Mineralogica Stabile in facies vulcanica di Rittmann. Tale roccia si classifica come « riolite alcalina » con carattere seriale calcoalcalino.

Istituto di Geologia e Geofisica * e Istituto di Mineralogia ** dell'Università di Napoli. Lavoro eseguito e pubblicato con il contributo del C.N.R.

Cineriti di composizione simile (riolitica-riodacitica) sono già state segnalate nei depositi messiniani delle Marche.

Le cineriti riolitiche-riodacitiche che si trovano su scala regionale intercalate nei depositi messiniani ben si inquadrano con la tettonica compressiva che ha caratterizzato la formazione della catena appenninica durante tutto il Miocene.

ABSTRACT. — Sediments of upper Miocene similar to those which outcrop in the Amantea, Diamante, Lungro and Cropalati areas can be seen in Northern Calabria, along the Valley of Crati. Such sediments belong to a sedimentary cycle which began in the upper Tortonian after the tectonic regional phase and ended in the Messinian period during the evaporitic sedimentation due to a new tectonic phase. The upper sediments which outcrop West of Cosenza, between S. Fili and S. Vincenzo la Costa, from the lithostratigraphic point of view are constituted, from the bottom, of three intervals: 1) conglomerates and sandstones; 2) marls and clays; 3) sandstones, clays, evaporites and volcanic ashes. Above this Miocenic succession pelites of the lower Pliocene lay in unconformity. The substratum of these sediments is represented by the dioritico-kinzigitica unit which is the tectonic crystalline unit geometrically higher in Northern Calabria.

The first arenaceous conglomeratic interval has a thickness which varies between 30 and 50 m; the conglomerates prevail in the lower part whilst the sandstones in the upper part. The marly argillaceous interval, about 50 m thick, is full of organic remains such as scales and fish bones and can be correlated to the tripolaceous interval which can be seen in other part of Calabria.

In the upper interval besides sandstones, clays, evaporitic limestones and gypsum there is a level of volcanic ash about 4 m thick. Such ash, in thin section, is mainly composed of glass and small quantity of crystalline clasts; it also contains small quantity of argillaceous fragments, $CaCO_3$ and fragments of quartzose felspathic sandstones. Chemical analysis of the ash and of the glass fragments have been effected but only the latter have been taken in consideration. For the classification have been carried out the calculus of Normative Composition in volume according to the Rittmann's Stable Mineral Assemblage. The glass can be classified as alkali rhyolitic of calcalkaline serial type.

Ashes of similar composition (rhyolitic rhyodacitic) have been found in the Messinian deposits of Marche.

The rhyolitic rhyodacitic ashes which are interbedded on a regional scale in the Messinian deposits are in agreement with the compressive tectonic which have characterized the formation of the Apennine chain during the Miocene.

1. - PREMESSA.

Un gruppo di ricercatori dell'Istituto di Geologia di Napoli ha intrapreso da alcuni anni lo studio sistematico della copertura sedimentaria altomiocenica delle unità cristalline della Calabria. Le ricerche tuttora in corso tendono alla ricostruzione della evoluzione paleogeografica di questo tratto di bacino ed a stabilire i rapporti tra le unità cristalline calabresi ed il resto della catena appenninica durante il Miocene superiore ed il Pliocene.

Mediante la ricostruzione e la comparazione di numerose successioni stratigrafiche è stata riconosciuta anche nella Calabria set-

tentrionale la presenza di un ciclo sedimentario iniziato nel Tortoniano superiore, dopo una fase tettonica di importanza regionale, e continuato senza alcuna interruzione fino al Messiniano evaporitico (Di Nocera, Ortolani, Russo e Torre, 1974). I prodotti di tale ciclo sono costituiti da depositi clastici alla base (conglomerati ed arenarie tipo « arenarie a clipeastri » auctt.), diatomitici ed evaporitici alla sommità. Il substrato è rappresentato da varie unità cristalline a diverso grado di metamorfismo. Questo ciclo di sedimentazione del

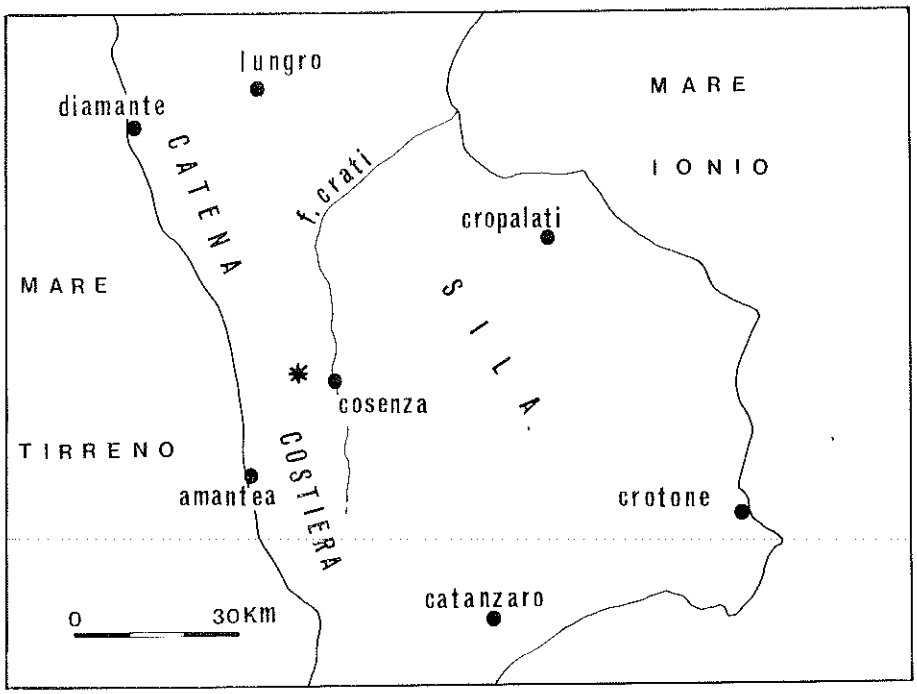


Fig. 1. - L'area studiata è indicata dall'asterisco.

Tortoniano superiore-Messiniano, con caratteristiche evolutive molto simili nelle grandi linee, è presente anche in Sicilia e nell'Appennino campano-lucano: più precisamente i depositi tortoniano-messiniani costituiscono le prime unità sedimentarie comuni tra il cristallino calabro ed il resto della catena appenninica.

Questa uniformità evolutiva post-tortoniana tra la copertura sedimentaria del cristallino calabro e la catena sudappenninica è comprovata anche da altri dati, come ad esempio la presenza di una importante fase tettonica intramessiniana riscontrata oltre che in Calabria anche in Sicilia e Campania.

Non essendo finora stato messo in evidenza nessun elemento geologico pre-tortoniano comune tra il cristallino e l'Appennino campano-lucano si può ipotizzare che in seguito alla fase tettonica tortoniana le unità cristalline, già costituenti una serie di falde accavallate, siano entrate a far parte della catena sud-appenninica.

Anche nella valle del Crati, importante struttura orientata N-S che separa i rilievi della Catena Costiera dal gruppo della Sila, affiorano abbondantemente i depositi alto-miocenici. Essi poggiano sull'unità tettonica superiore (dioritico-kinzigitica) ed affiorano, sia pure con differenti facies, lungo tutta la valle.

Nella presente nota vengono esposti i risultati delle osservazioni effettuate ad W di Cosenza nell'area compresa tra S. Fili, Gesuiti e S. Vincenzo la Costa, F° 229 III SE Montalto Uffugo (Fig. 1).

Nella parte alta della successione presente in questa zona si è riscontrato un livello di cineriti vulcaniche intercalato a depositi arenaceo-argillosi ed evaporitici.

Livelli cineritici del Miocene superiore sono già conosciuti in Italia, in particolare nelle Marche ed in Sicilia; inoltre, dalle prime osservazioni di ricerche ancora in corso, essi sono stati riconosciuti anche nel versante tirrenico della Catena Costiera calabra e nell'Appennino dauno.

L'importanza di queste vulcaniti consiste nella loro possibile funzione di livelli guida nella correlazione di successioni stratigrafiche a scala regionale, nonché nel particolare significato tettonico connesso al chimismo riolitico-riodacitico del magma da cui derivano. Un vulcanismo di tipo riolitico ben si inquadra con la tettonica di tipo compressivo in atto durante il Miocene superiore lungo tutta la catena appenninica.

2. - Stratigrafia dei depositi altomiocenici.

I terreni miocenici studiati affiorano in una stretta fascia orientata N-S delimitata ad occidente dal cristallino della Catena Costiera e ad oriente da depositi pliocenici e quaternari (Fig. 2). La successione miocenica ha una giacitura monoclinalica con immersione verso NW e inclinazione di pochi gradi. La serie comprende dal basso in alto tre intervalli ben distinti poggianti sui terreni cristallini dell'unità dioritico-kinzigitica (Fig. 3):

— conglomerati ed arenarie;
— marne e argille;
— arenarie, argille, evaporiti e cineriti.

2.1. - SUBSTRATO CRISTALLINO.

Il contatto stratigrafico tra i depositi miocenici ed il substrato cristallino è ben esposto nei pressi nell'abitato di S. Fili e lungo il torrente Settimo. Il substrato è costituito dall'unità dioritico-kinzi-

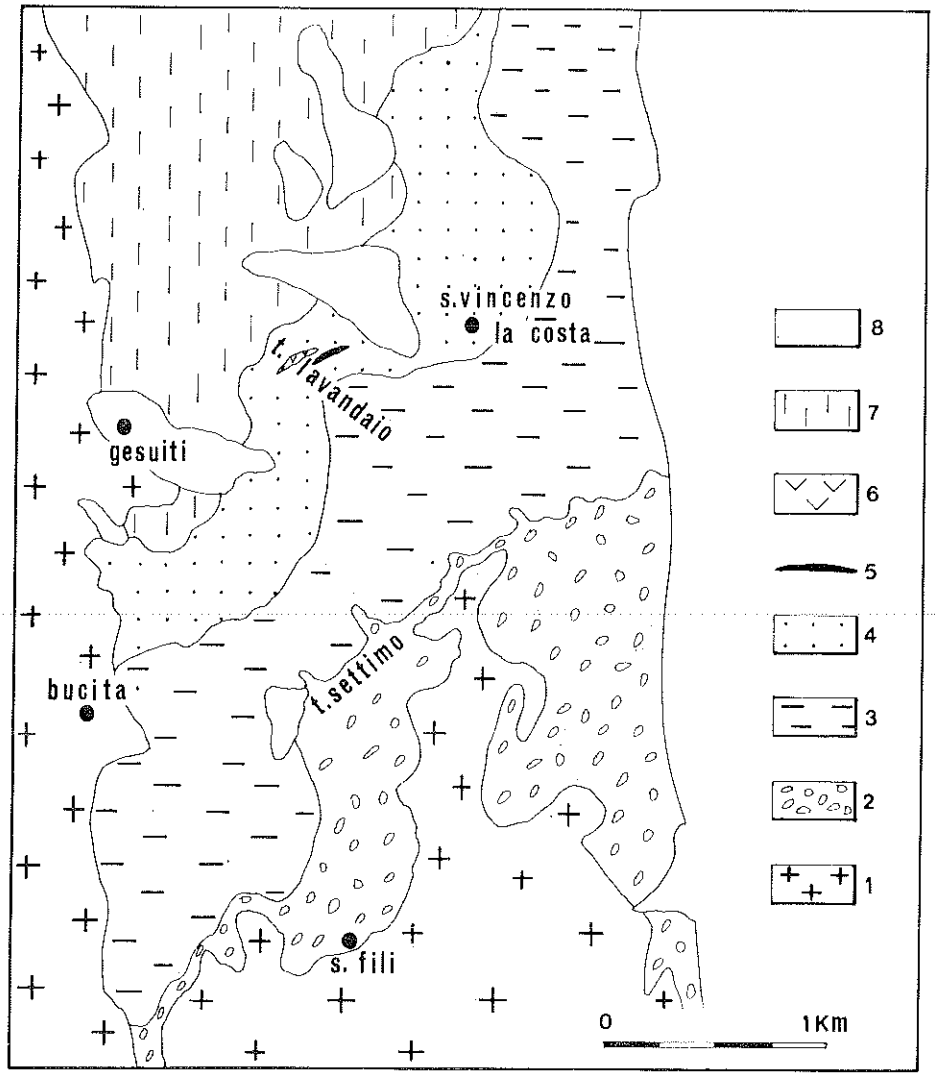


FIG. 2. - Carta geologica schematica dell'area compresa tra S. Fili e S. Vincenzo la Costa. Substrato cristallino. 1) Unità dioritico-kinzigitica; Depositi del ciclo Tortoniano sup. - Messiniano; 2) Conglomerati ed arenarie; 3) Marne ed argille; 4) Arenarie ed argille; 5) Livello cineritico; 6) Evaporiti. Depositi del Pliocene inferiore; 7) Argille. Quaternario; 8) conglomerati, arenarie, argille.

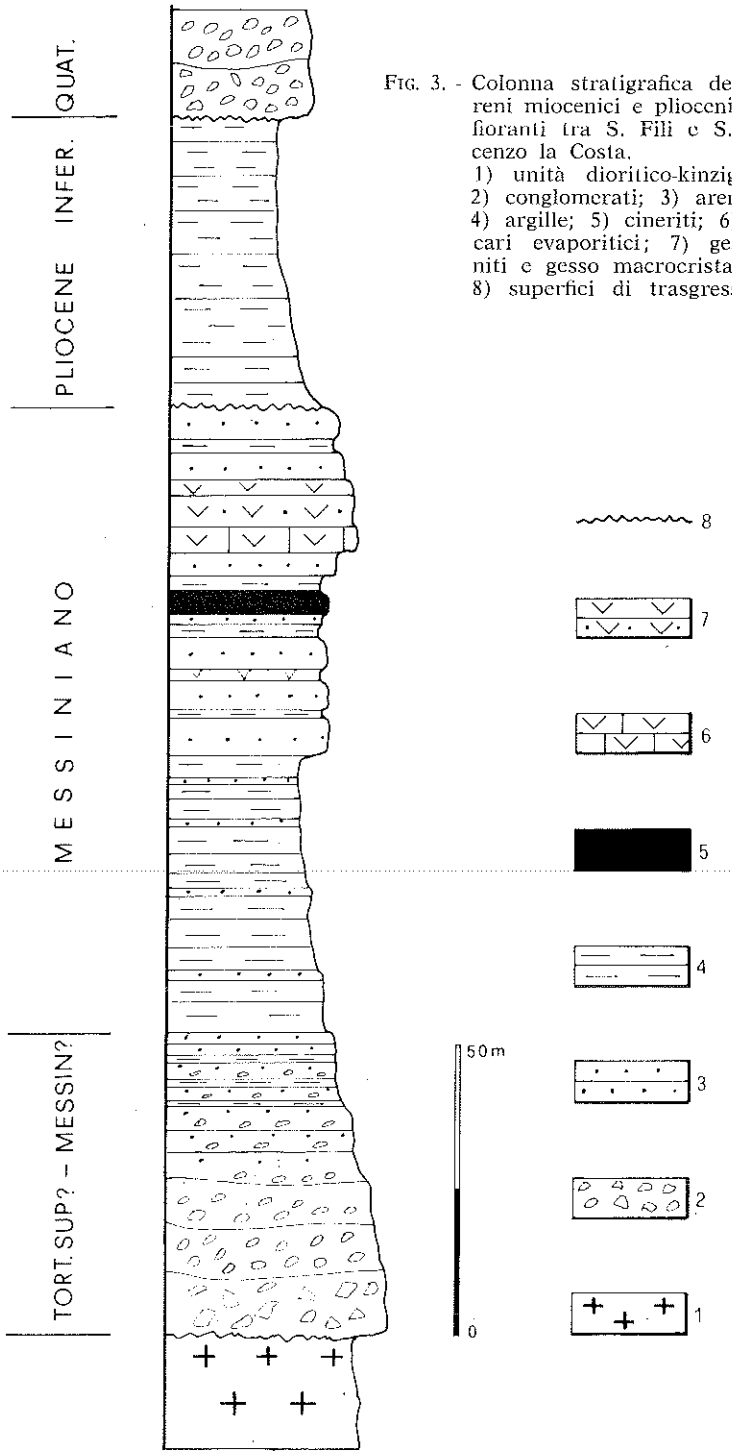


FIG. 3. - Colonna stratigrafica dei terreni miocenici e pliocenici affioranti tra S. Fili e S. Vincenzo la Costa.
1) unità dioritico-kinzigitica; 2) conglomerati; 3) arenarie; 4) argille; 5) cineriti; 6) calcari evaporitici; 7) gessareniti e gesso macrocristallino; 8) superfici di trasgressione.

gitica che è la falda in posizione geometrica più alta tra quelle che compongono la Calabria settentrionale.

2.2. - Conglomerati e arenarie.

La successione miocenica inizia sempre con conglomerati che verso l'alto, più o meno rapidamente, evolvono ad arenarie con intercalazioni di argille. I conglomerati affiorano prevalentemente a NE di S. Fili mentre nell'area dell'abitato omonimo prevalgono le arenarie grossolane. I conglomerati si presentano di colore rosso con clasti di varia dimensione (diametro fino a 70-80 cm.) e costituiti dalle rocce cristalline del substrato (filladi, gneiss, graniti etc.); nella parte bassa i clasti sono poco arrotondati e si trovano inglobati in una matrice sabbioso-ciottolosa. La stratificazione è praticamente assente, localmente accennata da lenti di arenaria con molta mica e clasti a spigoli vivi. Nella parte alta dell'intervallo diminuiscono le dimensioni dei clasti che in genere sono anche piuttosto arrotondati ed aumenta la frazione arenacea finché alla sommità dell'intervallo si nota la comparsa di alcune intercalazioni di argilla di colore grigio scuro. La stratificazione è abbastanza regolare e si possono osservare numerosi strati dello spessore di 2-3 metri costituiti nella porzione inferiore da conglomerati con clasti arrotondati e di dimensioni fino a 2-3 cm., seguiti da arenarie ed infine, nella parte sommitale, da argille di colore grigio scuro.

Lo spessore complessivo di questo intervallo arenaceo-conglomeratico varia da 30 a 50 metri.

Questo intervallo è risultato privo sia di macrofauna che di microfauna; gli unici resti organici riscontrati sono costituiti da frustoli carboniosi che a volte sono particolarmente abbondanti nelle peliti della parte alta.

Per quanto riguarda l'età, in assenza di dati paleontologici, si può solo osservare che tali depositi fanno parte di un ciclo di sedimentazione iniziato dopo la fase tettonica del Tortoniano e continuato fino alla deposizione delle evaporiti messiniane; pertanto tali sedimenti conglomeratico-arenacei potrebbero essere riferiti sia al Tortoniano superiore che già al Messiniano.

2.3. - Marne e argille.

Al di sopra dell'intervallo precedente seguono marne ed argille con intercalazioni arenacee. Buoni affioramenti si possono osservare

lungo il torrente Lavandaio e a NE di S. Vincenzo la Costa in località Crocevia. Il litotipo prevalente è rappresentato da marne in genere di colore marrone, sottilmente laminate, a volte di colore nero, con numerosi resti organici costituiti da scaglie, scheletri, denti di pesci e da frustoli carboniosi; a volte invece si presentano di colore biancastro e piuttosto soffici. Si riscontrano anche numerose intercalazioni di argille di colore grigio scuro. Nelle marne a volte si notano sottili livelli di spessore millimetrico interamente costituiti da foraminiferi e resti di pesci; più di frequente si presentano delle sottili intercalazioni di arenaria a volte manganesifera e a volte ricca di pirite. Lo spessore complessivo dell'intervallo marnoso arenaceo è di circa 50 metri.

Il contenuto organico è sempre piuttosto scarso e mal conservato; esso consiste essenzialmente in foraminiferi, prevalentemente planctonici, spesse volte di dimensioni ridotte (fauna nana) e poco differenziati, comprendenti cioè pochi generi e poche specie. In alcuni campioni i gusci sono riempiti di pirite, presente con una certa frequenza nel residuo inorganico essenzialmente quarzoso-micaceo; in alcuni casi ancora è possibile riconoscere una certa frazione rimaneggiata. Frequenti le spicole di spugna ed i resti di pesci quali scaglie e dentini. Nei livelli più sottilmente stratificati, fissili, costituiti da marne e marne siltose nere, abbondano i resti di pesci (scaglie, vertebre, e a volte pesci interi) ed i frustoli vegetali. Tra i foraminiferi sono stati determinati:

Globorotalia acostaensis BLOW
» *incompta* (CIFELLI)
Globigerina apertura CUSH.
» *ex gr. bulloides* D'ORB.
» *concinna* REUSS
» *falconensis* BLOW
» *globorotaloidea* COLOM
» *pachyderma* EHR.
» *quinqueloba* NAT.
Globigerinoides quadrilobatus (D'ORB.)
» *sacculifer* (BRADY)
» *trilobus* (REUSS)
Praeorbulina transitoria BLOW
Orbulina bilobata (D'ORB.)
» *suturalis* BRÖNN.
» *universa* D'ORB.
Globigerinita incrusta AKERS

Bulimina	*aculeata* D'ORB.
»	*elongata lappa* CUSH. & PARK.
»	*minima* TED. & ZANM.
»	sp.
Cancris	*oblongus* (D'ORB.)
Cassidulina	*oblonga* REUSS
Cibicides	*floridanus* (CUSH.)
Robulus	*cultratus* MONTF.
»	*rotulatus* (LAM.)
Trifarina	*brady* CUSH.

La povertà ed il cattivo stato di conservazione delle microfaune fanno si che anche nei campioni più ricchi siano rare le forme di un certo interesse cronostratigrafico. L'unica forma, quasi sempre presente, è *G. acostaensis* che indica la presenza di zone di associazione più alte della N 15, ed una età non più antica del Tortoniano. Tra le forme bentoniche figurano generi e specie ad habitat più o meno profondo (*Bulimina, Cassidulina*) e sono rare le forme costiere. Questi foraminiferi bentonici sono caratterizzati da una distribuzione stratigrafica abbastanza ampia, con massimi di frequenza nel Miocene superiore-Pliocene.

L'ambiente di sedimentazione doveva essere caratterizzato da acque marine con scarsa ventilazione sul fondo e in generale non molto favorevole allo sviluppo delle microfaune; in qualche caso si verificavano anche condizioni molto critiche che causavano l'accumulo dei resti di organismi sia planctonici che bentonici.

2.4. - ARENARIE, ARGILLE, EVAPORITI E CINERITI.

In questo intervallo, che costituisce il tetto dei terreni messiniani, oltre ad alternanze di arenarie ed argille si trovano intercalazioni di conglomerati; nella parte medio-alta è presente un livello cineritico e nella porzione sommitale depositi evaporitici.

Il litotipo più abbondante è rappresentato da arenarie ben stratificate in strati dello spessore variabile da 40 a 150 cm. per lo più a grana fine, gradate e che sfumano verso l'alto in peliti di colore grigio scuro o nero; lo spessore della porzione pelitica in media corrisponde ad 1/10 della potenza dello strato. A volte nella parte arenacea si nota la presenza di lenti di argilla disposte subparallelamente alla stratificazione; nella frazione siltoso-argillosa è frequente la laminazione parallela e obliqua a piccola scala. Gli strati più po-

tenti sono conglomeratici alla base con clasti di rocce cristalline più o meno arrotondati e di dimensioni fino a 1 cm. Già nella parte media di questo intervallo si riscontrano sottili intercalazioni di calcare evaporitico con piccoli cristalli di gesso che non sembrano mostrare un orientamento preferenziale; tali calcari probabilmente sono di deposizione primaria. Spesso a causa della dissoluzione del gesso la roccia si presenta con numerose piccole cavità lenticolari. Associate a questi livelli calcarei si trovano sottili intercalazioni di argille di colore grigio scuro con lenti di gesso. Sono presenti ancora livelli di argilla potenti fino a 4-5 m.

I livelli a granulometria più fine, argilloso-siltosi contengono a volte una scarsa microfauna a foraminiferi planctonici distrofici e di piccole dimensioni. Il residuo inorganico è dato da mica, poco quarzo, gesso, frammenti limonitizzati e pirite. Nei campioni più ricchi sono state determinate le seguenti specie:

Globorotalia acostaensis BLOW
» *continuosa* BLOW
Globigerina falconensis BLOW
» *pachyderma* EHR.
» *quinqueloba* NAT.
Globigerinoides sicanus DE STEFANI
» *trilobus* (REUSS)

oltre a rari esemplari dei generi *Bolivina* e *Cibicides*.

Tra le forme elencate solo *G. acostaensis*, *G. falconensis* e *G. quinqueloba* sono sempre presenti.

È evidente una povertà di generi e di specie ancor più accentuata rispetto all'intervallo sottostante, povertà dovuta ad un ambiente di sedimentazione a circolazione ristretta, male ossigenato (specialmente al fondo) ed in cui iniziava la deposizione di evaporiti.

Nella parte alta dell'intervallo in esame, poche decine di metri a S del cimitero di S. Vincenzo la Costa sulla sinistra del torrente Lavandaio si trova un livello cineritico intercalato in alternanze sabbioso-argillose (v. Fig. 2). L'affioramento di cineriti, piuttosto limitato a causa delle numerose frane che interessano i versanti, è costituito da alcuni strati della potenza di circa 40 cm. l'uno per lo spessore complessivo di 3-4 m. Le cineriti macroscopicamente si presentano costituite da abbondantissimi frammenti di vetro vulcanico di colore biancastro con frequenti cristalli di biotite; gli strati sono gradati e nella loro porzione superiore, costituita da silt e argilla di colore marrone chiaro, si nota per 3-4 cm. una laminazione parallela ed obliqua a pic-

cola scala. La concentrazione di cenere vulcanica in livelli costituiti quasi esclusivamente da frammenti di vetro e molto subordinatamente da elementi non vulcanici nonché il basso grado di alterazione del vetro stesso permettono di ritenere che la rideposizione del materiale vulcanico sia avvenuta pressoché contemporaneamente ai fenomeni esplosivi, dopo un trasporto acqueo del tutto limitato.

Al di sopra delle cineriti seguono pochi metri di alternanze arenaceo-argillose quindi un livello di depositi evaporitici dello spessore di circa 15 metri, ben esposto lungo l'incisione del torrente Lavandaio a SW del cimitero di S. Vincenzo la Costa. La porzione iniziale delle evaporiti affiora anche poco a NE del paese. I primi 7-8 metri sono costituiti da calcari bianchi in strati sottili, a laminazione parallela, con intercalazioni di arenarie gradate anche grossolane e di alcuni sand-flow. Nella rimanente porzione dell'intervallo evaporitico si notano dapprima alternanze di marne gessose, argille e gesso laminato per circa 150 cm.; seguono 4 m. costituiti da vari livelli di gessareniti gradate con deformazioni da carico alla base, nei quali si notano numerosi clasti di quarzo e rare alternanze di gesso laminato. Il livello evaporitico termina con un banco di gesso in grossi cristalli geminati a ferro di lancia, potente circa 2 metri.

Al di sopra delle evaporiti seguono ancora alternanze di arenarie e argilla per pochi metri fino all'altezza della strada. Lo spessore complessivo dell'intervallo arenaceo-argilloso è di circa 60 metri.

A N della rotabile, in lieve discordanza angolare sui depositi altomiocenici poggia una successione argillosa pliocenica.

3. - Cineriti.

3.1. - Osservazioni mineralogiche.

In sezione sottile la roccia risulta costituita prevalentemente da vetro e subordinatamente da una frazione cristallina; molto subordinate sono la frazione argillosa, il carbonato di calcio unitamente a frammenti di arenarie quarzoso-feldspatiche. Tale roccia, a grana molto fine, può essere definita una cinerite.

Il vetro è costituito prevalentemente da frammenti a forma arcuata spesso con terminazioni a cuspide o a forca e frammenti tricuspidati derivati da frantumazione di pomici; ben rappresentate sono anche le pomici con struttura spesso fluidale. Queste frazioni vetrose, a grado di cristallinità notevolmente basso, includono pochi cristalli di anortoclasio, raro quarzo e biotite; spesso presentano una

birifrangenza interpretabile come processo di idratazione e principio di ricristallizzazione.

Sui frammenti vetrosi con dimensioni comprese fra 80 e 120 mesh è stato determinato, con i liquidi ad indice noto e con il rifrattometro di Abbe, un indice di rifrazione di 1.503 ± 0.002. Il loro peso specifico determinato con il metodo dei liquidi pesanti è risultato 2.28/2.35 di media. I valori più bassi sono dovuti alla bollosità del vetro.

La frazione cristallina è costituita prevalentemente da clasti di anortoclasio ($2V_\alpha = 46°$). Subordinatamente si ha una biotite ($2V_\alpha = 10°$ circa) prevedibilmente piuttosto ricca in titanio con pleocroismo sul bruno; è anche presente una biotite con pleocroismo sul verde-verde bruno; si nota qualche principio di alterazione in clorite. In questa frazione cristallina si osservano inoltre: quarzo, microclino, plagioclasio di tipo oligoclasico, cordierite e poca magnetite e zircone. Dai pochi dati ottici che è stato possibile eseguire sul plagioclasio di tipo oligoclasico sembra che vi siano termini sia tendenti alla alta che alla bassa temperatura (BONATTI & FRANZINI, 1961).

La matrice è rappresentata da argilla e da poco carbonato di calcio. Per l'argilla i dati termici e diffrattometrici preliminari indicano che, probabilmente, il termine prevalente sia di natura smectitica. Non è possibile, alla luce di tali dati, escludere la presenza di altri termini fillosilicatici.

Si può supporre che la gran parte dei minerali appartenga al magma del vetro o a fenomeni vulcanici simili, comunque una parte della frazione cristallina, quali il microclino ed il plagioclasio di bassa temperatura, può derivare da rocce plutoniche-subvulcaniche.

3.2. - DATI PETROCHIMICI.

Sono state eseguite una analisi chimica della cinerite in toto e una della frazione vetrosa (Tab. I). Ai fini delle interpretazioni petrografiche del magma che ha dato luogo al vulcanesimo rappresentato dalla cinerite si è presa in considerazione la sola frazione vetrosa dato il suo maggiore significato rispetto al campione in toto. Per la classificazione è stato eseguito il calcolo della composizione mineralogica normativa in volume secondo il procedimento dell'Associazione Mineralogica Stabile in facies vulcanica di RITTMANN (1973), (Tab. II).

Tale roccia si classifica come « riolite alcalina a muscovite e cordierite »; il diagramma di coesistenza dei feldspati in facies vulcanica indica la presenza di un solo feldspato: anortoclasio.

Pur rappresentando tale calcolo un ottimo mezzo di classificazione non è possibile definirne il grado di esattezza in base al modo dato il bassissimo grado di cristallinità del campione. Comunque dalle sezioni sottili si riscontra, come è detto, essenzialmente un solo feldspato (anortoclasio), subordinati quarzo e biotite. I valori normativi

TABELLA I

Composizione chimica della cinerite di S. Fili e del vetro incluso.

Cinerite S. Fili.		Vetro
SiO_2	59.85	68.28
TiO_2	0.32	0.14
Al_2O_3	12.75	15.48
Fe_2O_3	2.11	1.23
FeO	0.85	0.69
CaO	1.19	0.63
MgO	2.45	0.25
Na_2O	2.10	3.82
K_2O	1.90	2.88
SO_3	0.14	—
Cl_2	0.20	—
H_2O^+	5.82	6.55
H_2O^-	7.50	0.54
$CaCO_3$	1.80	—
	9.58	100.49

di Q, Ne, Ks, inseriti nel relativo diagramma di equilibrio proiettano tale vetro nel campo di stabilità dei feldspati alcalini; tale proiezione giustifica la presenza di fenocristalli di anortoclasio.

Si deve tener presente comunque, un certo grado di alterazione del campione indicato dalla non trascurabile presenza d'acqua (essenzialmente H_2O^+). Dai dati ottici e soprattutto dall'analisi termodifferenziale risulta che la quantità di argilla presente nel campione è piuttosto trascurabile. I dati ottici, come già detto, indicano una birifrangenza del vetro interpretabile come conseguenza dell'idratazione,

i dati termici suggeriscono che l'acqua non è sostanzialmente legata a minerali delle argille: si nota infatti solo un largo effetto endotermico fra i 100 e 300°.

TABELLA II

Norma, coefficienti di Rittmann e Base Molecolare di Niggli del vetro separato dalla Cinerite di S. Fili

Norma di Rittmann		Coeff. di Rittmann		Base Molecolare	
Quarzo	32.8	SiO_2	73.11	Q	56.6
Anortoclasio	47.6 (21 Or, 72 Ab, 7 An)	Al	13.93	kp	10.9
Cordierite	6.8	Alk	9.22	Ne	22.2
Magnetite	0.3	CaO	0.67	Cal	2.0
Ilmenite	0.2	FM	2.67	Sp	1.2
	100.0				
		k	0.33	Hz	1.7
		Ca″	2.16	C	3.9
Feldspato medio	Or 21 %, Ab 72 %, An 7 %	an	0.06	Fs	1.4
		σ	1.70	Ru	0.1
		τ	83		
Q. 40.8				Q.	56.6
A. 59.2		Campo A_2		L.	35.1
x 0				M.	1.5
+ y 40.8				acc.	6.8
Indice di colore 7.3					

Classificazione: Riolite sodica

Ai limiti di una prudenziale interpretazione della composizione mineralogica normativa, se tale acqua si ritiene, almeno in parte, come dovuta ad un processo secondario d'idratazione del vetro si può anche supporre che ci sia stata una certa lisciviazione di elementi alcalini ed alcalino terrosi. Orientativamente i dati nell'alterazione dei vetri femici (HAY & IIJIMA, 1968), indicano che nel corso dell'idratazione si ha notevole perdita di alcali e calcio. In tal modo l'eccesso

di allumina rispetto a soda, potassa e calce (rapporto molecolare 1,00/0,68) oltre che essere un carattere originario del magma per la presenza di eventuali minerali quali cordierite, sillimanite, muscovite, granato, potrebbe essere in parte dovuto ad alterazione. La quantità di sillimanite nella norma satura e la conseguente percentuale di muscovite che si calcola potrebbe, quindi, essere più alta del reale. Probabilmente si è avuto anche un certo dilavamento di

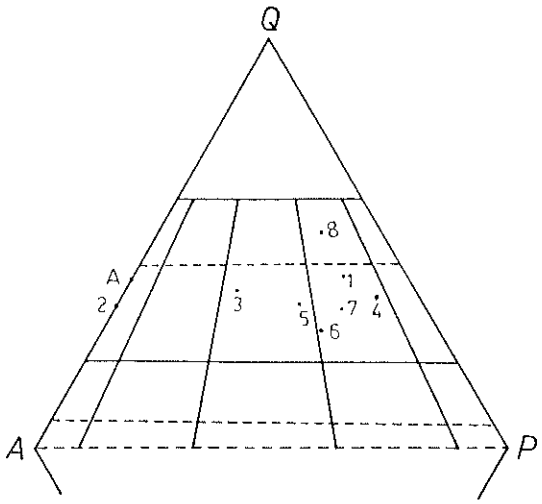


FIG. 4. - Proiezione nel doppio triangolo di Streckeisen del vetro della Cinerite di S. Fili (A) e dei vetri delle Cineriti dell'Appennino Settentrionale in base alla composizione mineralogica normativa A.M.S.

Mg e forse Fe; tale perdita porta al calcolo di muscovite e cordierite e a non calcolare la biotite che è invece presente nella roccia. In definitiva pur non potendo escludere la presenza di cordierite e potenziale muscovite si ritiene opportuno classificare il vetro della cinerite come « Riolite alcalina »; in particolare contenendo il campione abbondante anortoclasio, è da ritenersi una « Riolite sodica ».

In Fig. 4 si riporta la proiezione del vetro nel doppio triangolo di classificazione di STRECKEISEN; l'indice di colore, calcolato con l'esclusione della muscovite, rientra nella media dei valori riportati dall'autore. La classificazione in base chimica di RITTMANN porta allo stesso risultato (Tab. I).

In base al valore di σ il magma del vetro della cinerite appartiene alla serie calcoalcalina (pacifico forte). I valori di τ e σ, notevolmente alto il primo e piuttosto basso il secondo, confermano tale carattere seriale. Questi parametri si ritiene che caratterizzino anche

la posizione tettonica del vulcanesimo e la genesi dei magmi (GOTTINI & RITTMANN, 1967, 1970).

I valori combinati di σ e τ del vetro in oggetto rientrano in quelli dei prodotti dei vulcani situati nelle regioni orogeniche e archi insulari; il magma di tale cinerite, in base a questi parametri, denoterebbe una genesi da anatessi di materiali della crosta sialica.

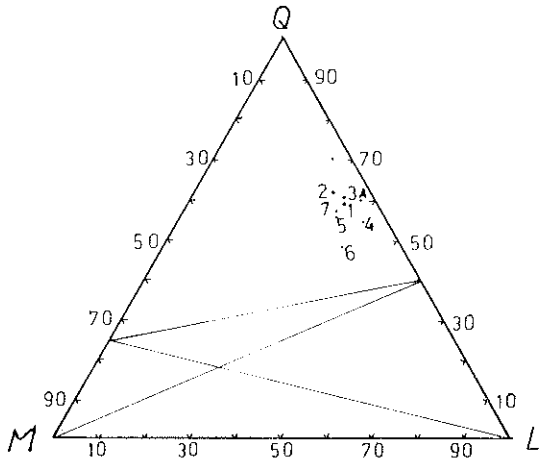


FIG. 5. - Diagramma Q-L-M. Proiezione del vetro della cinerite di S. Fili (A) e dei vetri delle cineriti dell'Appennino Settentrionale in funzione della Base Molecolare.

Come già detto livelli cineritici del Miocene sono già conosciuti in Sicilia, nelle Marche e nell'Appennino settentrionale. Ora per un confronto chimico, puramente indicativo, sono state prese in considerazione le frazioni vetrose di alcune cineriti dell'Appennino settentrionale (GIAMMETTI, MEZZADRI & PAPANI, 1968). Per tali frazioni vetrose si è calcolata la norma RITTMANN (Tab. III). Queste rocce si classificano, nel doppio triangolo di STRECKEISEN (Fig. 4), prevalentemente come daciti e subordinatamente riodaciti e rioliti sodiche. In particolare il campione 2 (vetro cinerite di Contignaco) risulta, in tale confronto mineralogico normativo, il più simile al vetro della cinerite di S. Fili.

Come è già stato rilevato tali calcoli mineralogici, e le conseguenti considerazioni di confronto hanno un valore puramente indicativo data l'età diversa delle cineriti ed il grado di alterazione dei vetri. In particolare pur volendo immaginare un ambiente fisico-chimico di formazione dei feldspati simile, è da prevedere che piccole variazioni secondarie negli alcali e calce possono interessare o meno la lacuna di miscibilità dei feldspati dando paragenesi ad un solo o

TABELLA III

Dati petrochimici dei vetri delle cineriti dell'Appen. Settentrionale

		1	2	3	4	5	6	7	8
Quarzo		35.7	31.2	24.7	34.5	31.3	23.8	27.9	46.3
Anortoclasio			64.6						
Sanidino		11.4		36.6	7.9	23.3	21.1	14.7	9.9
Oligoclasio		38.2		21.6	50.0	34.2		38.7	
Andesina							38.8		30.0
Muscovite		4.5							9.9
Biotite			1.0	4.7		5.0	13.2		
Cordierite		9.7		3.1	6.3	5.5		16.5	3.8
Iperstene			0.1		0.4		0.3	2.2	
Clinopirosseno			2.3				0.3		
Magnetite		0.3	0.7	0.3	0.2	0.4	1.7	0.5	0.1
Ilmenite		0.2	0.1		0.7	0.4	0.5	0.4	
		100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Q		41.8	32.6	37.7	37.3	35.2	28.4	34.3	53.7
A		13.4	67.4	38.7	8.6	26.2	25.2	18.1	11.4
P		44.8	0	23.6	54.1	38.6	46.4	47.6	34.8
x		76.9	0	37.9	0.86	5.7	64.8	72.4	0.75
+ y		41.8	32.6	37.7	37.3	35.2	28.4	34.3	53.7
Feldspato medio	Or	19.5	30.5	34.3	16.1	27.4	26.7	21.7	23.2
	Ab	61.2	66.2	55.6	63.3	52.9	41.0	62.5	42.1
	An	19.3	3.3	10.1	20.6	19.7	32.3	15.8	34.7
Indice di colore		10.2	4.2	8.1	7.6	11.3	16.3	27.7	3.9

1) Vetro cinerite Salsomaggiore (an. Giammetti-Mezzadri);
2) Vetro cinerite Contignaco (an. Mezzetti);
3) Vetro cinerite M.te Cervo (an. Mezzetti);
4) Vetro cinerite Montebello d'Urbino (an. Mezzetti);
5) Vetro cinerite Calderino (an. Mezzetti);
6) Vetro cinerite Mongardino (an. Mezzetti);
7) Vetro cinerite M.te Varano (an. Giammetti);
8) Vetro sabbie vulcaniche Iesolo; sondaggio A.G.I.P. (an. Pirani).

a due feldspati a seconda dei casi. In tal modo la classificazione, per tali eventuali alterazioni secondarie, ed anche per piccole differenze chimiche iniziali, viene fortemente influenzata dal rapporto feldspato alcalino/plagioclasio.

Se si prescinde dalla composizione mineralogica normativa il vetro della cinerite di S. Fili ha una composizione chimica alquanto somigliante non solo a quella della cinerite riolitico-sodica di Contignaco (campione 2) ma anche al vetro della cinerite riodacitica di Monte Cervo (campione 3) e dacitica di Salsomaggiore (campione 1).

Ai fini di un confronto in base chimica i diversi campioni sono stati riportati nel triangolo Q.L.M. (Fig. 5) dove si nota una relativa maggiore omogeneità e, comunque, un inserimento migliore del vetro della cinerite di S. Fili in gran parte dei vetri delle cineriti dell'Appennino settentrionale riportate [1].

4. - Correlazione con le altre successioni mioceniche della Calabria settentrionale.

Le successioni altomioceniche della Calabria settentrionale appartenenti al ciclo Tortoniano superiore-Messiniano (« unità A » in Di Nocera e altri, 1974) mostrano caratteristiche evolutive molto simili sia sul versante tirrenico della Catena Costiera che nella zona di Lungro e sul versante ionico della Sila. Tali caratteristiche comuni possono essere così schematizzate:

— presenza di depositi clastici (conglomerati ed arenarie) alla base delle successioni;

— livelli pelitici con fauna pelagica, nella parte media;

— depositi evaporitici con spesso associati livelli tripolacei, ma senza alcuna intercalazione di materiale detritico grossolano alla sommità delle successioni.

Nella zona di S. Fili la successione descritta è caratterizzata da un'evoluzione in parte differente da quella delle aree suddette, e può essere così riassunta:

— conglomerati ed arenarie basali;

— marne ed argille con scarsa fauna planctonica e numerose intercalazioni di livelli ricchi di resti organici (pesci, vegetali ecc.);

— depositi evaporitici, per lo più secondari, con abbondanti intercalazioni clastiche arenaceo-conglomeratiche alla sommità.

[1] Il calcolo di QLM del vetro della cinerite di S. Fili è stato eseguito in questo caso da una Base molecolare comprendente C, Fa, Fo ai fini di un confronto omogeneo con i dati bibliografici presi in considerazione.

È evidente il carattere trasgressivo delle successioni che debuttano in tutti i casi con sedimenti conglomeratici cui seguono peliti ed evaporiti. La presenza di evaporiti denota una uniformità delle caratteristiche sedimentarie nella parte terminale del ciclo di sedimentazione in tutta la Calabria settentrionale. In particolare è possibile una correlazione diretta tra le evaporiti della zona di S. Fili e quelle delle aree limitrofe comprese tra Cosenza ed Amantea. A S. Fili i termini evaporitici comprendono calcari evaporitici, gessareniti e probabilmente anche gesso primario, intercalati ad abbondante materiale detritico che invece manca nelle evaporiti delle zone limitrofe. Questo abbondante apporto detritico nella zona di S. Fili sarebbe dovuto alla sua posizione più marginale nell'originario bacino rispetto alla zona Cosenza-Amantea.

Maggiori problemi pone il confronto dei termini sottostanti perché mentre nell'area Cosenza-Amantea è presente un caratteristico livello tripolaceo costituito da alcuni metri di diatomiti con abbondanti resti di pesci e frustoli vegetali, a S. Fili si riscontrano marne ed argille con più livelli a resti di pesci e frustoli vegetali ma senza diatomiti. È possibile che parte o tutti questi ultimi livelli pelitici siano corrispondenti alle intercalazioni tripolacee e che l'assenza di accumuli di fitoplancton nella zona di S. Fili sia ancora una volta imputabile a condizioni connesse con la posizione marginale di questa zona nell'ambito del bacino e/o alla morfologia del fondo. Altra possibilità è che le marne ed argille di S. Fili corrispondano a tutta o parte della successione sedimentaria sottostante le evaporiti della zona Cosenza-Amantea.

Infine i conglomerati basali delle due serie non sono strettamente correlabili tra loro a causa del carattere trasgresssivo delle successioni; la trasgressione nell'area qui studiata potrebbe infatti essere cominciata più tardi, quando nell'area di Amantea si andava instaurando già un ambiente pelagico.

5. - La trasgressione del pliocene inferiore.

Come già accennato, sulle alternanze altomioceniche si trovano depositi argillosi in trasgressione discordante. Si può osservare infatti che mentre i sedimenti miocenici immergono verso NW, le peliti sovrastanti immergono verso NNE con una inclinazione di pochi gradi. Queste ultime successioni sono ben esposte in un calanco ad W del cimitero di S. Vincenzo la Costa dove si può osservare una alternanza monotona di argille color grigio chiaro potente circa 50 metri. Le argille si presentano ricchissime di foraminiferi planctonici

e con locali impregnazioni di pirite. La frazione inorganica è generalmente molto ridotta e comprende poco quarzo, mica, rari frammenti piritizzati e limonitizzati. La porzione organica è per contro molto abbondante e comprende gusci ben conservati di foraminiferi, tra i quali le forme planctoniche rappresentano fino al 90-95 % dell'intera associazione, rari frammenti di Lamellibranchi, rari Ostracodi e Pteropodi. Queste caratteristiche generali, che avvicinano per molti aspetti le peliti in oggetto ai « trubi » ben noti in letteratura, rimangono costanti per tutta la successione argillosa dove sono stati prelevati ed analizzati numerosi campioni in cui complessivamente sono state determinate le forme seguenti:

Globorotalia acostaensis BLOW
» » *humerosa* TAKAYANAGI & SAITO
» *margaritae* BOLLI & BERMUDEZ
» » *primitiva* CITA
» *scitula* (BRADY)
Globigerina apertura CUSH.
» *ex gr. bulloides* D'ORB.
» *concinna* REUSS
» *falconensis* BLOW
» *pachyderma* EHR.
» *quinqueloba* NAT.
Globigerinoides obliquus BOLLI
» » *extremus* BOLLI & BERMUDEZ
» *quadrilobatus* (D'ORB.)
» *ruber* (D'ORB.)
» *sacculifer* (BRADY)
» *sicanus* DE STEFANI
» *trilobus* (REUSS)
Praeorbulina circularis (BLOW)
Orbulina bilobata (D'ORB.)
» *suturalis* BRÖNN.
» *universa* D'ORB.
Sphaeroidinellopsis subdehiscens BLOW
Anomalina helicina (COSTA)
Bigenerina nodosaria D'ORB.
Bulimina costata D'ORB.
Discorbis orbicularis (TERQUEM)
Ellipsoidina ellipsoides SEG.
Glandulina laevigata D'ORB.
Gyroidina laevigata D'ORB.
Karreriella bradyi (CUSH.)

Martinottiella communis (D'ORB.)
Nonion padanum PERC.
» *pompilioides* (FICHT. & MOLL)
Plectofrondicularia inequalis (COSTA)
Pleurostomella alternans SCHWAGER
Sigmoilina tenuis (CZJZEK)
Siphonina reticulata (CZJZEK)
Siphonodosaria monilis (SILV.)
» *vertebralis* (BATSCH)
Uvigerina rutila CUSH. & TODD
» *peregrina* CUSH.
Cancris sp.
Planulina sp.
Robulus sp.

Tra le forme elencate *Orbulina, G. acostaensis, G.* ex gr. *bulloides, G. falconensis, G. quinqueloba, G.des ruber e G. sacculifer* risultano presenti fin dalla base della successione ed abbondanti in quasi tutti i campioni.

Sphaeroidinellopsis subdehiscens è talvolta presente con rari individui. Nella maggior parte della successione affiorante (con esclusione cioè dei soli 8-10 metri iniziali coperti da materiale di frana) sono state rinvenute *Globorotalia margaritae* e la varietà *G. margaritae primitiva,* talvolta discretamente abbondanti. È assente invece *G. margaritae evoluta* anche nei livelli più alti affioranti.

Le specie di foraminiferi planctonici rinvenute nelle peliti trasgressive sull'intervallo arenaceo-argilloso con evaporiti dei dintorni di S. Fili indicano la presenza della zona di associazione a *Globorotalia margaritae,* come illustrata da CITA (1972) ed è appunto con questa zona del Pliocene inferiore che correliamo l'intera successione, non avendo riscontrato alcun cambiamento microfaunistico fino alla sommità della serie argillosa. Qualche perplessità può sussistere per la porzione iniziale della sezione, dove non figurano *Sphaeroidinellopsis, Globorotalia margaritae* o altre forme stratigraficamente significative; questi pochi metri potrebbero pertanto appartenere o alla parte basale della zona a *G. margaritae* o ancora alla zona sottostante.

L'età della intera successione pelitica è pertanto Pliocene inferiore.

La ricchezza e la varietà delle associazioni microfaunistiche, la predominanza del plancton sul benthos e le specie di foraminiferi determinate indicano un ambiente di deposizione di mare aperto con normali condizioni di salinità e di ossigenazione.

6. - Considerazioni conclusive.

L'analisi bio- e litostratigrafica della successione altomiocenica affiorante nella zona di S. Fili-S. Vincenzo la Costa permette alcune deduzioni di carattere paleoambientale che differenziano alquanto quest'area dalle altre già studiate in Calabria.

Innanzitutto è già stata sottolineata la costante presenza di materiale clastico grossolano a partire dalla base della serie fino all'intervallo evaporitico sommitale. L'apporto detritico è chiaramente testimoniato infatti anche durante la sedimentazione delle evaporiti, cosa questa che differenzia notevolmente questa successione rispetto a tutte le altre. Il costante apporto di materiale clastico grossolano indica che l'area considerata doveva occupare una posizione marginale nell'ambito del bacino di sedimentazione. I clasti per lo più derivanti da rocce cristalline sono angolosi, poco elaborati e fanno dedurre che abbiano subito un trasporto limitato, spesso avvenuto in massa, e un rapido seppellimento connesso ad una attiva sedimentazione.

Anche le associazioni faunistiche presenti negli intervalli in cui forse meno si risentiva l'apporto detritico, cioè nelle marne ed argille, indicano un ambiente di sedimentazione non molto profondo, cattiva circolazione delle acque e conseguente scarsa ossigenazione al fondo, quali si possono verificare in bacini con particolari condizioni morfologiche. Tali condizioni ambientali però possono anche essere dovute ad una situazione generalizzata di scarsa circolazione interessante tutto il bacino messiniano durante la deposizione dei livelli tripolacei con cui probabilmente si può correlare l'intervallo marnoso-argilloso.

Inoltre è da notare in questa zona e lungo tutta la valle del Crati la presenza di gessi che sembrano mancare invece nelle aree più occidentali: ciò potrebbe essere connesso alla differente ubicazione nell'ambito del bacino originario.

Le successioni stratigrafiche qui studiate sono attribuite, come già detto, al ciclo di sedimentazione Tortoniano-Messiniano (unità A) mentre mancano in quest'area sedimenti messiniani riferibili al ciclo successivo (unità B) che nelle zone in cui sono stati riconosciuti sono discordanti sui terreni dell'unità A.

I terreni dell'unità B possono comprendere, nella loro parte sommitale, anche peliti del Pliocene inferiore (zona di « acme di *Sphaeroidinellopsis* ») in continuità di sedimentazione sui depositi evaporitici messiniani come già osservato ad esempio nella sezione del torrente Fiumicello nei pressi di Lungro (Di Nocera e altri, 1974).

Nell'area di S. Fili, come in tutte le altre zone in cui non è stata osservata la parte basale dell'unità B, dove argille e marne del

Pliocene inferiore sempre appartenenti all'unità B poggiano in discordanza sui terreni del ciclo Tortoniano-Messiniano, questo Pliocene inferiore sembra mancare dei suoi livelli più bassi e iniziare con zone di associazione leggermente più alte (zona a *Globorotalia margaritae margaritae*).

In base a quanto esposto precedentemente si può ipotizzare che dopo la fase tettonica intraevaporitica messiniana la sedimentazione sia ripresa probabilmente solo nelle aree più depresse dando luogo ai terreni dell'unità B ancora di età messiniana (vedi sezione del torrente Fiumicello e zona di Amantea in Di Nocera e altri, 1974); la più ampia diffusione delle peliti della parte alta del ciclo Messiniano-Pliocene inferiore permette di ipotizzare inoltre che solo in seguito a presumibili movimenti eustatici verificatisi all'inizio del Pliocene il bacino si sia ulteriormente ampliato.

La presenza di cineriti vulcaniche intercalate nei sedimenti altomiocenici nell'Appennino marchigiano, in Irpinia e, a più altezze stratigrafiche, nei depositi messiniani della Calabria, si rivela di particolare importanza perché indica l'esistenza di una attività vulcanica non limitata nello spazio e nel tempo ma avvenuta su scala regionale e sempre con caratteristiche di elevata acidità.

Intercalazioni di depositi tufitici o cineritici con composizione variabile da andesitica a riolitica e riodacitica sono note nei sedimenti del Miocene inferiore e medio delle varie unità lungo tutta la catena appenninica.

Anche in Sardegna, in un'area cioè che non è stata interessata direttamente dall'orogenesi appenninica, è ben rappresentata una attività vulcanica andesitica di età oligocenica e miocenica.

D'altro canto è proprio a partire dal Miocene inferiore che le aree esterne dell'Appennino sono state interessate da una tettonica compressiva che ha provocato traslazioni di notevole entità ed in particolare lo scollamento dal loro substrato e l'accavallamento delle unità che in origine occupavano posizioni più interne su unità via via più esterne.

Una attività vulcanica durante gran parte del Miocene, di tipo variabile dall'andesitico al riolitico-riodacitico, ben si inquadra con tali imponenti fenomeni tettonici compressivi che oltre all'area appenninica hanno interessato, fra l'altro, tutto il margine settentrionale dell'Africa.

BIBLIOGRAFIA

BANDY O. L., CASEY R. F. & WRIGHT R. C., *Late Neogene planktonic zonation, magnetic reversals, and radiometric dates, Antarctic to the Tropics.* Ant. Res. Ser., **15**, Antarc. Occanol. I (1971).

BLOW W. H., *Late middle Eocene to Recent planktonic foraminiferal biostratigraphy.* Proc. of the I^st^ int. Conf. on Plank. microf., I, Geneve (1969).

BONATTI S. & FRANZINI M., *Metodo per la determinazione dei plagioclasi di alta e bassa temperatura alla piattaforma di Fedoroff.* Period. di Min., A. XXX, (1961).

CITA M. B., *Studi sul Piocene e sugli strati di passaggio dal Miocene al Pliocene. I. Il significato della trasgressione pliocenica alla luce delle nuove scoperte nel Mediterraneo.* Riv. It. Paleont. e Strat., **78** (3), Milano (1972).

CITA M. B., STRADNER H. & CIARANFI N., *Studi sul Pliocene e sugli strati di passaggio dal Miocene al Pliocene. III. Biostratigraphical investigations of the Messinian stratotype and on the overlying « Trubi » Formation.* Riv. It. Pal. Strat., **79**, 3 (1973).

COLALONGO M. L., *Appunti biostratigrafici sul Messiniano.* Giorn. Geol., s. 2, **37** (2), Bologna (1970).

DECIMA A. & WEZEL F. C., *Osservazioni sulle evaporiti messiniane della Sicilia centro-meridionale.* Riv. Min. Sic., **22**, Palermo (1971).

DESSAU G., *Contributo alla geologia della zona di Ariano Irpino (province di AV e FG).* Boll. Serv. Geol. It., **74** (1958).

DIETRICH D. & SCANDONE P., *The position of the basic and ultrabasic rocks in the tectonic units of the Southern Appennines.* Atti Acc. Pont. Napoli, n.s., **21** (1972).

DI NOCERA S., ORTOLANI F., RUSSO M. & TORRE M., *Successioni sedimentarie messiniane e limite Miocene-Pliocene nella Calabria settentrionale.* Boll. Soc. Geol. It., in corso di stampa (1974).

GIAMMETTI F., MEZZADRI G. & PAPANI G., *Osservazioni stratigrafiche e petrografiche su un livello cineritico dell'anticlinale di Salsomaggiore Terme (Parma).* L'Ateneo Parmese, Acta Naturalia, **4** (1968).

GOTTINI V., *Nuovo metodo di calcolo petrochimico per distinguere i magmi anatettici crostali da quelli provenienti dal mantello superiore.* Boll. Acc. Gioenia, Catania, s. IV, **9** (1969).

HAY R. L. & IIJIMA A., *Petrology of Palagonite Tuffs of Roko Craters, Oahu, Hawaii.* Contr. Mineral. and Petrol., **17** (1968).

MAZZOLA G., *Les foraminiferes planctonique du Mio-Pliocene de l'Algerie Nord-occidentale.* Proc. II, Conf. Plank. Microf., Roma 1970 (1971).

OGNIBEN L., *Relazioni fra Tripoli della serie solfifera siciliana e vulcanismo.* Boll. Serv. Geol. It., **77** (1955).

PERRONE V., TORRE M. & ZUPPETTA A., *Il Miocene della catena costiera calabra. Primo contributo: zona Diamante-Bonifati-S. Agata d'Esaro (Cosenza).* Riv. It. Palcont. e Strat., **79** (1), Milano (1973).

RITTMANN A., *Nomenclature of volcanic rocks.* Bull. Volc. s. II, vol. 12.

—, *Die Bimodalitat des vulkanismes und die Herkumft der Magmen.* Geol. Rundsch., **57** (967).

—, *The Probable Origin of High-alumina Basalts.* Bull Volc., XXXIV (1970).

—, *Stable Mineral Assembleage of Igneous Rocks.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1973).

RYAN W. B. et alii, *Initial reports of Deep Sea Project.* **13**, part 2, Washington (1973).

RODA C., *Distribuzione e facies dei sedimenti neogenici nel Bacino Crotonese.* Geol. Romana, **3**, Roma (1964).

—, *Intercalazione cineritica messiniana nel tripoli di Contrada Calabrese, Berrafranca (Enna).* Atti Acc. Gioenia Sc. Nat. Catania, s. 7, I (suppl. Sc. Geol.) (1979).

SELLI R., *Sulla trasgressione del Miocene nell'Italia meridionale.* Giorn. Geol., ser. 2, **26**, 1954-55, Bologna (1957).

SELLI R., *Messinian.* Giorn. Geol., **37** (2), Bologna (1971).

STURANI C. & SAMPÓ M., *Il Messiniano inferiore in facies diatomitica nel bacino terziario piemontese.* Mem. Soc. Geol. It., **12** (3), Pisa (1971).

VEZZANI L., *I terreni plio-pleistocenici del basso Crati (Cosenza).* Atti Acc. Gioenia Sc. Nat. Catania, ser. 6, **20**, *Catania* (1968).

Analisi matematica. Sistemi differenziali con struttura composita. Problema di valori iniziali generalizzato concernente una nuova classe di equazioni integro-differenziali non lineari a derivate parziali in due variabili indipendenti

Nota * di RAYMOND CHALÉAT [1], LEONIDA E. KRIVOSHEIN [2], DEMETRIO MANGERON [3] e MEHMET N. OGUZTORELI [4]

presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 16 novembre 1974)

A MAURO PICONE

alla soglia del Suo 90° compleanno

SUMMARY. — In the framework of their studies concerned with differential systems on mixed structures [1]-[6], a generalized initial value problem for a new class of nonlinear integro-differential equations with Picone's « total derivatives » [7]-[8] is discussed and some linear problems are subsequently presented.

* This work was partly supported by the National Research Council of Canada under the Grant NRC-A 4345 through the University of Alberta.

[1] Laboratoire de Mécanique de l'Université de Besançon, France.
[2] Université d'Etat de la R.S.S. de Kirgizie, Frunze, U.R.S.S.
[3] Istituto Politecnico di Iasi, Romania. In presente: Visiting Professor, Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
[4] Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

1. - Gli autori, continuando i loro studi concernenti sistemi differenziali con struttura composita [1]-[6], espongono in ciò che segue il problema ai limiti generalizzato

$$(1)\qquad \begin{cases} u(x,\alpha) = \varphi\left[x, \int_a^c \int_\alpha^\delta \mathrm{P}(\xi,\tau,\mathrm{M}[u(\xi,\tau)])\,d\tau\,d\xi\right], \\ u(a,t) = \psi\left[t, \int_a^c \int_\alpha^\delta \mathrm{Q}(\xi,\tau,\mathrm{M}[u(\xi,\tau)])\,d\tau\,d\xi\right], \\ u(x,\alpha)_{x=a} = u(a,t)\,|_{t=\alpha} = g \end{cases}$$

concernente una nuova classe di equazioni integro-differenziali non lineari a derivate parziali in due variabili indipendenti

$$(2)\qquad \mathrm{L}[u] \equiv \mathrm{M}[u(x,t)] - f\left[x, t, u(x,t), \int_a^{b(x)} \mathrm{K}(x,t,\xi,u(\xi,t),u_\xi'(\xi,t))\,d\xi, \int_a^{\gamma(t)} \mathrm{N}(x,t,\tau,u(x,\tau),u_\tau'(x,\tau))\,d\tau\right] = 0,$$

ove $\mathrm{M}[u(x,t)] \equiv \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}$ ed $f(x,t,v_1,v_2,v_3)$, $\mathrm{K}(x,t,\xi,v_4,v_5)$, $\mathrm{N}(x,t,\tau,v_6,v_7)$, $\varphi(x,v_8)$, $\mathrm{P}(\xi,\tau,v_9)$, $\psi(t,v_{10})$, $\mathrm{Q}(\xi,\tau,v_9)$, $b(x)$ e $\gamma(t)$ sono funzioni note e continue rispetto a tutti i loro argomenti nel dominio

$$\mathrm{D} = \{a \le x, \xi, b(x) \le c,\ \alpha \le t, \tau, \gamma(t) \le \delta,\ 0 \le |v_i| \le r_i = \text{const},\ i = 1, 10\}.$$

Si suppone inoltre che le funzioni $\varphi(x,v_8)$ e $\psi(t,v_{10})$ sono, in D, continuamente derivabili, la prima rispetto ad x e la seconda rispetto a t e le funzioni contenenti le variabili v_i soddisfano nel dominio D le condizioni di Lipschitz, essendovi $\mathrm{L}_{if}(x,t)$ $(i = 1,2,3)$, $\mathrm{L}_{i\mathrm{K}}(x,t,\xi)$, $\mathrm{L}_{i\mathrm{N}}(x,t,\tau)$ $(i = 1,2)$, $L_\varphi(x)$, $\mathrm{L}_\mathrm{P}(\xi,\tau)$, $\mathrm{L}_\psi(t)$, $\mathrm{L}_\mathrm{Q}(\xi,\tau)$, $L_{\varphi'}(x)$, $\mathrm{L}_{\psi'}(t)$ i coefficienti rispettivi continui e non negativi.

In virtù di ciò che è stato detto sin'ora, la soluzione ricercata del problema (1), (2) può essere scritta sotto la forma

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \varphi\left[x, \int_a^c \int_\alpha^\delta P(\xi,\tau,w(\xi,\tau))\,d\tau\,d\xi\right] + \\
&+ \psi\left[t, \int_a^c \int_\alpha^\delta Q(\xi,\tau,w(\xi,\tau))\,d\tau\,d\xi\right] - g + \\
&+ \int_a^x \int_\alpha^t w(\eta_1,\theta)\,d\eta_1\,d\theta \equiv r(x,t) + \int_a^x \int_\alpha^t w(\eta_1,\theta)\,d\eta_1\,d\theta\,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Operando sulla (3) con l'operatore $L[\,\cdot\,]$ si ottiene la seguente equazione integrale non lineare con funzione incognita $w(x,t)$

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= f\left[x,t,r(x,t) + \int_a^x \int_\alpha^t w(\eta_1,\theta)\,d\theta\,d\eta_1, \int_a^{b(x)} K\left[x,t,\xi,r(\xi,t) + \right.\right. \\
&+ \int_a^\xi \int_\alpha^t w(\eta_1,\theta)\,d\theta\,d\eta_1,\ \varphi_\xi'\left[\xi, \int_a^c \int_\alpha^\delta P(\xi,\tau,w(\xi,\tau))\,d\tau\,d\xi\right] + \\
&\left.\left. + \int_a^t w(\xi,\theta)\,d\theta\right]d\xi, \int_\alpha^{\gamma(t)} N\left[x,t,\tau,r(x,\tau) + \right.\right. \\
&+ \int_a^x \int_\alpha^\tau w(\eta_1,\theta)\,d\theta\,d\eta_1,\ \psi_\tau'\left[\tau, \int_a^c \int_\alpha^\delta Q(\xi,\tau,w(\xi,\tau))\,d\tau\,d\xi\right] + \\
&\left.\left. + \int_\alpha^x w(\eta_1,\tau)\,d\eta_1\right]d\tau\right] \equiv J[w]\,.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Proponendoci di stabilire condizioni di risolubilità dell'equazione (4) nella classe di funzioni $C[a,b] \times [\alpha,\delta] \subset D$, scegliamo per la definizione di norma $\|\cdot\| = \max_D |\cdot|$ e prendiamo due funzioni arbitrarie

$\bar{w}_1(x,t)$, $\bar{w}_2(x,t) \in D$. Si ottiene per l'operatore non lineare $J[\cdot]$ l'ineguaglianza

$$\| J[\bar{w}_2] - J[\bar{w}_1] \| \leq \| L_{1f}(x,t) [L_\varphi(x) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_P(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi +$$

$$+ L_\psi(t) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_Q(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi + (x-a)(t-\alpha)] + L_{2f}(x,t) \int_\alpha^{b(x)} \{ L_{1K}(x,\ t,\ \xi) \cdot$$

$$\cdot [L_\varphi(\xi) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_P(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi + L_\psi(t) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_Q(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi +$$

$$+ (\xi - a)(t-\alpha)] + L_{2K}(x,\ t,\ \xi) [L_{\varphi'}(\xi) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_P(\xi'\tau) d\tau d\xi + t - \alpha]\} d\xi + \tag{5}$$

$$+ L_{3f}(x,t) \int_a^{\gamma(t)} \{ L_{1N}(x,\ t,\ \tau) \cdot [L_\varphi(x) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_P(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi +$$

$$+ L_\varphi(\tau) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_Q(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi + (x-a)(\tau-\alpha)] +$$

$$+ L_{2N}(x,t,\tau) L_{\psi'}(\tau) [\int_a^c \int_\alpha^\delta L_Q(\xi,\tau)\, d\tau\, d\xi + x - a]\} \ d\tau \ \| \cdot$$

$$\cdot \| \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \| \equiv P_1 \cdot \| \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \| .$$

Donde il seguente

TEOREMA 1. *L'equazione integrale* (4) *possiede, nel dominio* D, *per* $P_1 < 1$, *una soluzione ed una sola continua, mentre il problema* (1), (2) *ha una soluzione ed una sola continua ed ammettente le derivate parziali* u_x', u_t', u_{xt}'', $\forall (x,t) \in D$ *continue.*

2. - Procedendo, per $P_1 < 1$, alla costruzione delle soluzioni approssimanti la soluzione dell'equazione integrale (4) tramite l'applicazione del metodo delle approssimazioni successive

$$w_n = J[w_{n-1}], \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

le soluzioni approssimative del problema (1), (2) si scrivono sotto la forma

$$u_n(x,t) = \varphi\left[x, \int_a^c \int_\alpha^\delta P(\xi, \tau, w_n(\xi, \tau))\, d\tau\, d\xi\right] +$$

$$+ \psi\left[t, \int_a^c \int_\alpha^\delta Q(\xi, \tau, w_n(\xi, \tau))\, d\tau\, d\xi\right] - g + \int_a^x \int_\alpha^t w_n(\eta, \theta)\, d\theta\, d\eta$$

e si ha tuttavia

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x,t) = w(x,t), \qquad \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t).$$

Se ci si ferma al n-mo passo, le valutazioni degli errori commessi sono date, rispettivamente, dall'ineguaglianza

$$(8)\quad \| w - w_n \| \leq P_1^n \cdot \| w - w_0 \| \leq P_1^n \cdot \| r_0(x,t) \| : (1 - P_1) \equiv \sigma_n,$$

ove si è posto $r_0(x,t) \equiv w_0(x,t) - J[w_0]$ e da quest'altra

$$(9)\quad |u(x,t) - u_n(x,t)| \leq \left[L_\varphi(x) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_P(\eta, \theta)\, d\theta\, d\eta + \right.$$

$$\left. + L_\psi(t) \int_a^c \int_\alpha^\delta L_Q(\eta, \theta)\, d\theta\, d\eta + (x - a)(t - \alpha)\right] \cdot \sigma_n, \quad \forall (x,t) \in \mathfrak{D}.$$

3. - Nell'ipotesi che l'equazione (2) e le condizioni generalizzate di Goursat (1) siano lineari e tutte le funzioni note che vi figurino siano continue nel dominio $\mathfrak{D}$, il sistema lineare corrispondente si scrive sotto la forma

$$(10)\quad \begin{aligned} M[u(x,t)] &= f(x,t) + d(x,t)\, u(x,t) + \\ &+ \int_\alpha^{b(x)} [K_1(x,t,\xi)\, u(\xi,t) + K_2(x,t,\xi)\, u_\xi'(\xi,t)]\, d\xi + \\ &+ \int_\alpha^{\gamma(t)} [N_1(x,t,\tau)\, u(x,\tau) + N_2(x,t,\tau)\, u_\tau'(x,\tau)]\, d\tau ; \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} u(a,t) = \varphi_1(x) + \int_a^c \int_\alpha^\delta \mathrm{P}(x,\xi,\tau)\ \mathrm{M}[u(\xi,\tau)]\,d\tau\,d\xi\,, \\ u(x,\alpha) = \psi_1(t) + \int_a^c \int_\alpha^\delta \mathrm{Q}(t,\xi,\tau)\ \mathrm{M}[u(\xi,\tau)]\,d\tau\,d\xi\,, \\ u(a,t)_{t=\alpha} = u(x,\alpha)|_{x=a} = \mathrm{P}\,, \end{cases}$$

essendovi le funzioni $\varphi_1(x)$, $\psi_1(t)$, $\mathrm{P}(x,\xi,\tau)$, e $\mathrm{Q}(t,\xi,\tau)$ continue e continuamente derivabili rispetto alle variabili x e t che vi figurino.

Se si ha inoltre $b(x) \equiv x$ e $\gamma(t) \equiv t$, il problema (10), (11) diviene, in seguito all'utilizzazione della trasformazione (3), il sistema equivalente di equazioni integrali lineari

$$u(x,t) = h(x,t) + \int_a^x \int_\alpha^t w(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi + \int_a^c \int_\alpha^\delta \mathrm{H}(x,t,\xi,\tau)\,w(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi\,,$$

$$(12)\qquad w(x,t) = \mathrm{F}(x,t) + \int_a^x \int_\alpha^t \mathrm{S}_1(x,t,\xi,\tau)\,w(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi +$$

$$(13)\qquad \int_a^c \int_\alpha^\delta \mathrm{S}_2(x,t,\xi,\tau)\,w(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi \equiv \mathrm{F}(x,t) + \int_a^c \int_\alpha^\delta \mathrm{S}(x,t,\xi,\tau)\,w(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi\,.$$

Donde il seguente con struttura oramai classica

TEOREMA 2. *Se l'unità non è un valore caratteristico del nucleo* $\mathrm{S}(x,t,\xi,\tau)$, *l'equazione* (13) *e dunque il problema* (10), (11) *possiedono le soluzioni uniche appartenenti rispettivamente agli spazi funzionali* $\mathrm{C}[a,c] \times [\alpha,\delta]$ *e* $\mathrm{C}^{1,1}[a,c] \times [\alpha,\delta]$. *Se l'unità è un valore caratteristico di rango r del nucleo considerato, l'equazione* (13) *e dunque anche il problema* (10), (11) *o non hanno soluzione alcuna, oppure tali soluzioni esistono ma non si determinano in un modo unico, rispettivamente, nelle classi di funzioni* C *e* $\mathrm{C}^{1,1}$. *Se si suppone inoltre nell'ambito delle condizioni di cui sopra* $\mathrm{P}(x,\xi,\tau) \equiv 0$,

$Q(t, \xi, \tau) \equiv 0$, *il problema* (10), (11) *possiede una soluzione unica continua, dotata di derivate continue* u_x', u_t', u_{xt}'' *nel dominio* $\mathfrak{D}$ *considerato.*

OSSERVAZIONI. 1ª. In una delle nostre note susseguenti si prenderà in esame la capacità di determinazione delle soluzioni di vari problemi integro-differenziali non lineari con *derivate totali* di Picone d'ordine superiore [7]-[8].

2ª. L'esposizione esplicita dei teoremi del punto fisso spettanti al sistema integro-differenziale considerato, come pure la presentazione di vari dettagli algoritmici saranno esposte in uno dei prossimi fascicoli della Sezione I del *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iasi.*

BIBLIOGRAFIA

[1] L. E. KRIVOCHÉINE, D. J. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, *Systèmes mathématiques possédant la structure complexe. Nouveaux problèmes « bien posés » concernant une classe d'équations intégrodifférentielles non linéaires aux arguments retardés.* Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg., (5) **85**, 1972, 743-749.

[2] D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, *Problèmes différentiels possédant la structure complexe. Sur les solutions d'une classe d'équations fonctionnelles à retardement.* Bull. Soc. roy. Sci. Liège, **30**, 1970, 1471-1479.

[3] L. E. KRIVOCHÉINE, K. V. LEUNG, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, *Systèmes mathématiques possédant la structure complexe. I. Existence, unicité, stabilité et approximation des solutions de certains systèmes intégrodifférentiels non linéaires aux opérateurs différentiels ordinaires et hyperboliques.* Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg., (5) **58**, 1972, 1307-1315.

[4] L. E. KRIVOSHEIN, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, *Problemi di correttezza delle soluzioni esatte ed approssimative dei sistemi integro-differenziali non lineari a derivate parziali.* Rend. Accad. Sci. Fis. e Mat., Napoli, (4) **XL**, 1973, 125-133.

[5] L. E. KRIVOCHÉINE, K. V. LEUNG, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, *Sur une nouvelle extension du problème de Cauchy pour certains systèmes intégrodifférentiels non linéaires. I. Problème concernant des systèmes à une seule variable indépendante.* Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg., (5) **60**, 28-35.

[6] L. E. KRIVOCHÉINE, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, GH. SILAS, *Etudes des systèmes mathématiques aux opérateurs non linéaires. I. Problème généralisé de valeurs initiales pour une nouvelle classe d'équations intégrodifférentielles aux opérateurs non linéaires et aux dérivées partielles du premier ordre.* Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg., (5) **60**, 1974, 387-395.

[7] D. MANGERON, L. E. KRIVOSHEIN, *Problemi concernenti equazioni integro-differenziali con operatori ereditari e derivate totali di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **33**, 1963, 226-226; **34**, 1964, 344-368; **35**, 1965, 341-364.

[8] * * *, *Mauro Picone.* Nel volume « Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notitia ». Pontificia Academia Scientiarum, A. D. MCMLXX, 116-147, Città del Vaticano.

Deformazioni plastiche nella meteorite ferrosa Cohauila

Nota di FRANCESCO CENNAMO e di ALBERTO COLASANTI
presentata dal socio corrispondente FRANCESCO CENNAMO *

(Adunanza del 16 novembre 1974)

RIASSUNTO. — Sono state studiate le deformazioni plastiche presenti in un frammento della meteorite Cohauila attraverso l'esame di una superficie che la delimita eseguito con le tecniche della microscopia ottica e della microscopia a diffrazione di raggi X. Dall'esame comparativo dei risultati, malgrado il fatto che il secondo metodo presenta gli svantaggi di richiedere tempi di esposizione elevati e di presentare una risoluzione notevolmente inferiore, risulta che esso è indispensabile per la classificazione di deformazioni plastiche eventualmente presenti in monocristalli. Sono state osservate linee di slittamento, lamine di geminazione ed una « grande dislocazione » di tipo Frank.

SUMMARY. — Plastic deformations present in a fragment of the Cohauila meteorite have been studied through examination of the surface delimiting it by means of microscopy and by X-ray reflection micrography. The analysis of the results obtained by the two methods in spite of the fact that the latter presents the disadvantage of requiring long exposure times and provides a resolution notably inferior, shows that the second technique is indispensable for classification of plastic deformations which might exist in monocrystalline structures. Slip lines, twins and a large Frank type dislocation were observed.

INTRODUZIONE

I difetti, le substrutture, le bande di deformazione e quelle di scorrimento, la distribuzione e l'orientazione di eventuali particelle cristalline incluse nei cristalli in genere e nelle meteoriti in particolare, possono essere messe in evidenza sia con le tecniche della microscopia e della diffrazione elettronica che con la microscopia a diffrazione di raggi X.

In un precedente lavoro sono state determinate le caratteristiche cristallografiche di un campione, frammento della meteorite Cohauila [1].

* Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica dell'Accademia Aeronautica - Pozzuoli (Napoli).

[1] F. CENNAMO e A. COLASANTI, « Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli », 1969, Serie 4, Vol. XXXVI.

Con le due tecniche della microscopia ottica e microscopia a diffrazione di raggi X abbiamo ora studiato alcune deformazioni presenti nel campione.

La meteorite Cohauila è ampiamente descritta nella memoria di di Paolo Giordano Orsini: « Metallografia di leghe meteoritiche » [2]; essa appartiene alla classe delle sideriti ed al gruppo delle esaedriti; è un cristallo unico costituito da una fase metallica, la kamacite, soluzione solida con 5,13 % di Ni e con 0,5 % di Co in Fe a struttura cubica a corpo centrato corrispondente a quello del Fe $-\alpha$ e contenente tabloidi di schreibersite $(Fe, Ni)_3 P$ sottoforma di cristalli tetragonali perfettamente definiti. La determinazione di cui sopra [3], contrariamente ad altri A.A., è stata eseguita sulla sola fase metallica e non sul totale.

Il valore della costante reticolare, da noi determinato con il metodo di estrapolazione di Bradley e Jay [4]:

$$a = 2{,}8682 \pm 0{,}0001 \text{ Å} ,$$

a causa del contenuto di nichel, è superiore a quello della ferrite pura [5]:

$$a = 2{,}8662 \pm 0{,}0002 \text{ Å} .$$

I valori di cui sopra del parametro a (espressi in Ängstrom) concordano con quelli riportati nelle memorie citate di P. G. Orsini, Owen ed altri, dove però sono espressi in unità X o *falso ängstrom.*

Sezioni ultrasottili dello stesso campione ottenute con il metodo di elettropulitura, sono state esaminate per trasparenza al microscopio da A. Buri e R. Caramazza [6]; la superficie del campione da noi esaminata con micrografie a raggi X è stata oggetto di studio da parte di P. G. Orsini e N. Maggi[3] con le ordinarie tecniche della microscopia elettronica.

Tale superficie del cristallo, come già detto [1], forma con la diagonale [110] l'angolo: $\sigma = 6° \pm 0{,}5°$, con il piano (001) l'angolo $\varphi = 40° \pm 2°$ e corrisponde al piano $(5\ \bar{7}\ 10)$, inclinato, rispetto al piano $(1\bar{1}2)$, dell'angolo: $\chi = 7°\ 57'$.

Richiami sulle proprietà plastiche delle meteoriti ferrose

Le sollecitazioni termiche e meccaniche alle quali sono sottoposte le meteoriti nella loro vita si risolvono in sforzi di taglio, di com-

[2] P. Giordano Orsini, « Atti Acc. Lincei-Cl. Sc. Fisiche », Memoria 63, 1967, Vol. VIII, Sez. II.
[3] P. Giordano Orsini e N. Maggi, Gaz. Chim. Ital., 88 (1958), 482.
[4] A. J. Bradley e A. H. Jay, Proc. Phyc. Soc., 44 (1932), 563-579.
[5] E. A. Owen e B. D. Burns, Phil. Mag., 28 (1937), 497.
[6] A. Buri e R. Caramazza, Ric. Sci., 7 (1965), 611-616.

pressione e di trazione i quali, oltre a dar lungo a deformazioni elastiche e quindi reversibili, possono produrre deformazioni anelastiche e quindi irreversibili dipendenti dalle proprietà plastiche delle meteoriti stesse e dalla particolare struttura cristallina del metallo di cui sono formate [7].

Queste proprietà sono estremamente sensibili alle *imperfezioni di struttura* del cristallo e cioè alla presenza, nel cristallo, di regioni estese a qualche distanza atomica e per lo meno in una direzione, nelle quali la regolarità del reticolo è alterata in quanto alcuni atomi non hanno i primi vicini normali. Esempi di imperfezioni di struttura dei cristalli che ne riducono notevolmente la resistenza meccanica sono: le lacune, gli atomi interstiziali, gli atomi d'impurità, i difetti d'impacchettamento nei cristalli compatti, le giunzioni di geminazione, le dislocazioni.

I principali processi, per i quali, in un cristallo che presenti imperfezioni di struttura, si determinano deformazioni plastiche, sono:

a) *slittamento* (slip, glissement);

b) *geminazione* (twinning, maclage).

a) *La deformazione plastica per slittamento* è dovuta al movimento relativo di due piani cristallografici contigui che scivolano l'uno rispetto all'altro in una direzione: in un cristallo singolo i due monoblocchi limitati dai due piani cristallografici presentano inalterate a monte ed a valle del piano di slittamento le caratteristiche cristallografiche.

Il fenomeno può avvenire solo rispetto a quei piani cristallografici che presentano una elevata densità superficiale di atomi, piani quindi a basso indice e che vengono chiamati *piani di slittamento;* esso inoltre è altamente anisotropo per cui la traslazione del piano rispetto al contiguo avviene solo nella direzione (detta *direzione di slittamento*) determinata dal filare [*uvw*] con densità lineare di atomi massima; il vettore di traslazione $\vec{t}$ del piano di slittamento rispetto rispetto al contiguo può variare in modulo da un minimo uguale alla distanza tra i due atomi primi vicini del filare [*uvw*] ad un multiplo intero n di questo.

La parte di cristallo che ha subito lo slittamento sporge rispetto all'altra di un gradino la cui larghezza varia dal valore massimo t se la superficie che limita il cristallo è normale alla direzione di questi e decresce col coseno dell'angolo che $\vec{t}$ forma con la superficie del

[7] C. S. Barrett, *Structures of metals*, Mc Graw-Hill Book Cy, New York 1952; W. T. Read Jr., *Dislocations in cristals*, Mc Graw-Hill Book Cy, New York 1953; L. V. Azaroff, *Introduction to solids*, Mc Graw-Hill Book Cy, New York 1960.

cristallo. Poiché i gradini che per slittamento si generano sulle superfici delimitanti il cristallo hanno una larghezza che al massimo è di qualche distanza atomica, non sono osservabili né al microscopio ottico né per micrografie per riflessione di raggi X; con tali tecniche possono essere messe in evidenza solo le linee rappresentate dalle intersezioni dei piani di slittamento con la superficie del cristallo sempre che quest'ultima non sia parallela alla direzione di slittamento e che non abbia subito una lucidatura o un attacco chimico in data posteriore allo slittamento.

In genere accade che in un monocristallo più piani cristallografici contigui presentino la stessa traslazione per cui, per l'intera estensione del cristallo, tutta una lamina (di spessore variabile da qualche centinaio di Å fino a qualche mm) ha subito, rispetto alla matrice, una traslazione.

L'insieme di un piano di slittamento e della sua direzione di slittamento prende il nome di *sistema di slittamento;* nei cristalli cubici con corpo centrato ai quali appartiene il Fe$-\alpha$ e quindi la meteorite in esame, lo slittamento può interessare tutti i piani cristallografici di famiglie: {110}, {112}, {123} ma la direzione di slittamento è sempre la stessa: $\langle 111 \rangle$.

Nei cristalli cubici a corpo centrato esistono quattro direzioni del tipo [111] attorno a ciascuna delle quali sono disposti 12 piani di slittamento di cui l'asse di zona è la direzione di slittamento; in totale si hanno quindi 48 sistemi di slittamento; altrettante dovrebbero essere le possibili linee di slittamento su di una generica superficie del cristallo però queste si riducono ad un massimo di 42 in quanto ciascuno dei piani della famiglia {110} contiene due possibili direzioni del tipo [111] e pertanto i piani di slittamento relativi a tale famiglia sono soltanto 6.

b) *Geminazione.* Spesso si verifica che due o più cristalli identici siano uniti in maniera simmetrica formando così una singola unità chiamata *cristallo geminato.*

L'elemento di simmetria dei componenti il cristallo può essere un piano di riflessione, un asse di rotazione o un centro di simmetria; qualunque esso sia, però, questo elemento di simmetria non fa parte della struttura dei singoli cristalli componenti il geminato. Il confine di separazione di ciascun cristallo dall'altro o dagli altri componenti il geminato viene chiamato *giunzione di geminazione.*

La formazione dei geminati può aversi nell'accrescimento dei cristalli da vapori o da soluzioni (*geminazione per crescita*); in questo caso però, qualunque superficie del cristallo può diventare giunzione di separazione di un altro cristallo in quanto la possibilità di un ac-

crescimento continuo nel nuovo cristallo richiede, oltre che opportune tensioni del vapore o concentrazioni della soluzione, la presenza di una *dislocazione a vite* sulla superficie stessa, condizione questa che non è legata ad un particolare piano cristallografico.

Oltre che per crescita, però, la geminazione può avvenire per *deformazione meccanica* del cristallo o per *trasformazione* da un tipo di struttura ad un altro in seguito a variazioni da alte a basse temperature; entrambi questi meccanismi, però, possono solo verificarsi in modo tale che la giunzione di geminazione risulti parallela ad alcuni piani energeticamente favoriti del cristallo.

La geminazione per deformazione dei metalli avviene secondo un processo simile a quello dello slittamento descritto innanzi; ma si differenzia da questo in quanto ricorda più da vicino il fenomeno dello scorrimento elastico.

Rispetto ad un piano cristallografico che resta fisso (giunzione di geminazione) e per azione della componente di uno sforzo di taglio parallela a questo piano ed agente in una direzione privilegiata, gli atomi dei piani cristallografici paralleli slittano tutti nella direzione privilegiata di tratti proporzionali alla distanza del piano, al quale appartengono, dal piano fisso.

La forza tangenziale relativa, applicata al cristallo, agisce su tutti i piani atomici paralleli per i quali la resistenza allo sforzo è la più piccola rispetto agli altri; più piani slittano gli uni rispetto agli altri, sicché si genera una sottile lamina limitata da due piani paralleli rappresentanti due giunzioni di geminazione e rispetto a ciascuna di queste la parte geminata è, dal punto di vista cristallografico, l'immagine speculare della matrice indistorta.

Lo spessore della parte geminata è molto limitato e non si estende a quello dell'intero cristallo e ciò, malgrado che lo sforzo di taglio continui, in quanto qualche impurezza costituisce un ostacolo per lo spostamento atomico dei successivi piani cristallografici. Se l'energia richiesta per superare l'ostacolo è maggiore di quella richiesta per produrre la geminazione, altre lamelle di geminazione parallele alle prime si formano in altra parte del cristallo.

Le intersezioni delle lamelle di geminazione con le superfici del cristallo, danno luogo a delle linee (in genere segmenti di rette) che si estendono lungo tutta la superficie del cristallo e che vengono chiamate *bande di* NEUMANN dal nome dello scopritore.

Il piano normale al piano di geminazione e contenente la direzione di spostamento è detto *piano di taglio.*

La giunzione di geminazione nei cristalli cubici a corpo centrato è parallela ad uno dei piani {112} ed in questi piani gli spostamenti atomici avvengono nelle direzioni $\langle 111 \rangle$.

Si hanno in totale 12 sistemi di geminazione che danno luogo su di una generica superficie ad altrettante linee di geminazione o di Neumann; questi sistemi di geminazione coincidono con i sistemi di slittamento interessanti la famiglia di piani cristallografici {112} nella direzione $\langle 111 \rangle$.

Poiché scopo della presente ricerca è quello di individuare tutti gli elementi che permettono di porre in rilievo la struttura cristallo-

TABELLA I

$\langle u\,v\,w \rangle$	{112}	α	r_i		β	γ	δ
	$(1\,1\,\bar{2})$	47° 05′	r_1	$[1\ 5\ 3]$	38° 38′		28° 34′
$[1\,1\,1]$	$(1\,\bar{2}\,1)$	26° 10′	r_2	$[13\ 5\ \bar{3}]$	148° 46′	20° 30′	52° 33′
	$(\bar{2}\,1\,1)$	77° 29′	r_3	$[\bar{17}\ \bar{25}\ \bar{9}]$	13° 33′		21° 01′
	$(1\,\bar{1}\,2)$	7° 58′	r_4	$[\bar{2}\ 0\ 1]$	124° 18′		39° 14′
$[\bar{1}\,1\,1]$	$(1\,2\,\bar{1})$	53° 59′	r_5	$[\bar{13}\ 15\ 17]$	81° 41′	5° 01′	6° 13′
	$(2\,1\,1)$	66° 17′	r_6	$[\bar{17}\ 15\ 19]$	87° 33′		5° 29′
	$(\bar{1}\,1\,2)$	75° 40′	r_7	$[\bar{12}\ \bar{10}\ \bar{1}]$	173° 13′		83° 38′
$[1\,\bar{1}\,1]$	$(1\,2\,1)$	88° 14′	r_8	$[\bar{27}\ 5\ 17]$	113° 47′	74° 21′	74° 27′
	$(2\,1\,\bar{1})$	77° 29′	r_9	$[\bar{3}\ 25\ 19]$	55° 04′		80° 31′
	$(1\,1\,2)$	56° 09′	r_{10}	$[\bar{2}\ 0\ 1]$	124° 18′		39° 14′
$[1\,1\,\bar{1}]$	$(\bar{1}\,2\,1)$	73° 50′	r_{11}	$[\bar{9}\ \bar{5}\ 1]$	159° 04′	31° 41′	33° 01′
	$(2\,\bar{1}\,1)$	33° 19′	r_{12}	$[1\ 5\ 3]$	38° 38′		72° 59′

grafica delle bande di Neumann e quindi anche tutti gli elementi che differenziano queste ultime dalle linee di slittamento, nella Tabella I si riportano i dati interessanti la superficie esaminata del cristallo Cohauila relativi alle famiglie di piani {112} che, come si è detto, possono essere sia piani di slittamento che piani di geminazione.

In corrispondenza di ciascun piano della famiglia sono riportati:

— l'angolo α che questo forma con la superficie $(5\ \bar{7}\ 10)$ del cristallo;

— gli indici che individuano la intersezione r_i del piano in esame con la superficie del cristallo;

— l'angolo β che la retta r_i forma con la retta d avente indici [551] ed intersezione del piano $(1\bar{1}0)$ con la superficie del cristallo;

— l'angolo γ che la direzione $[uvw]$ forma con la superficie del cristallo;

— l'angolo δ che la direzione $[uvw]$ forma con la retta r_i.

Esame al microscopio ottico

È stato adoperato il microscopio fotografico Universale mod. «ZC» Galileo e le fotografie riportate sono state eseguite con filtro verde su lastre fotografiche Kodak 0.250 metallographic.

Nella Fig. 1 è riportata la macroscopia per riflessione (12×) dell'intera superficie esaminata ed a margine è stata disegnata a tratti e punti la direzione della retta di riferimento d.

Oltre ai punti, numerosissimi, immagini di cristalli di schreibersite, inclusi nella matrice ed affioranti sulla superficie, si osservano tra l'altro, ben nette, le due famiglie di linee r ed r_{12} di cui la seconda, come diremo in seguito, è dovuta all'intersezione del piano $(2\bar{1}1)$ con la $(5\ \bar{7}\ 10)$; la prima, che è riportata senza indice, costituisce la intersezione, con la superficie del cristallo, del piano di sfaldatura (010). Invero la riga classificata con r potrebbe rappresentare sia la intersezione r_{10} che la intersezione r_4; tali eventualità però sono da escludere per motivi che esporremo nelle conclusioni.

Nella Fig. 2 è riportata (77×) l'immagine della zona delimitata nella Fig. 1 dal rettangolo a lati continui ed in essa, oltre alle intersezioni r ed r_{12}, già osservate nella Fig. 1, appaiono delle altre di cui due: r_2 ed r_6, dovute rispettivamente alle intersezioni dei piani $(1\bar{2}1)$ e (211) con la superficie del cristallo, con caratteristiche diverse dalle r ed r_{12} in quanto apparentemente molto più sottili di entrambe e del tutto prive di discontinuità che è invece caratteristica della r_{12}.

Nella successiva Fig. 3, riproducente l'immagine (504×) della zona limitata nella Fig. 2 dal rettangolo a lati continui, appare un tipo di tale discontinuità ed inoltre vengono messi in rilievo sia gli effetti dovuti alla formazione di cristalli di schreibersite lungo la linea r_{12}, che alcune caratteristiche della r.

La famiglia di linee r presenta infatti la caratteristica di estendersi sino alla r_{12} solo da una parte, interrompendosi in genere in corrispondenza del piano $(2\bar{1}1)$ oppure riprendendo qualche volta dall'altra parte dopo una breve interruzione (cfr. anche Fig. 4).

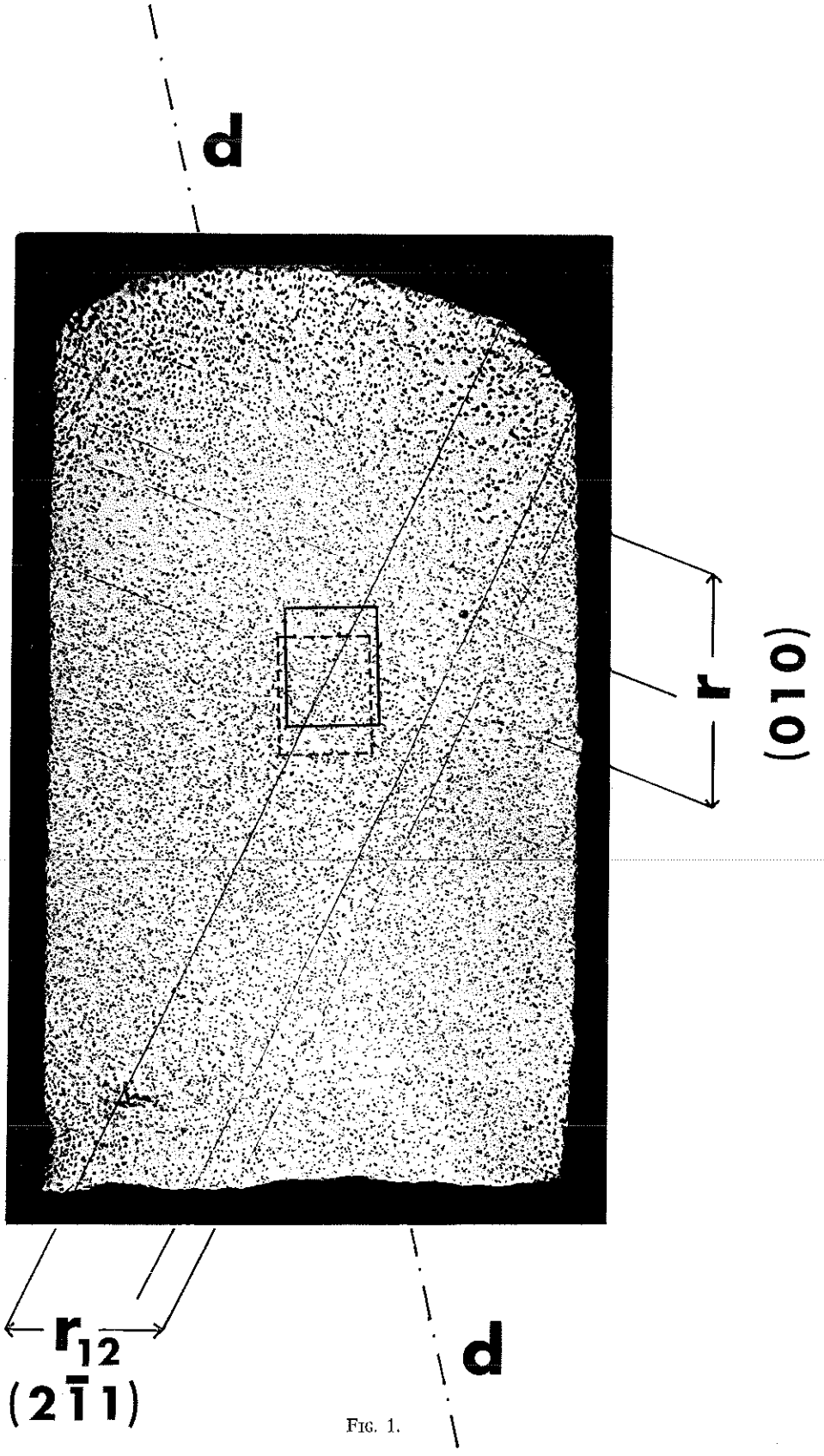


FIG. 1.

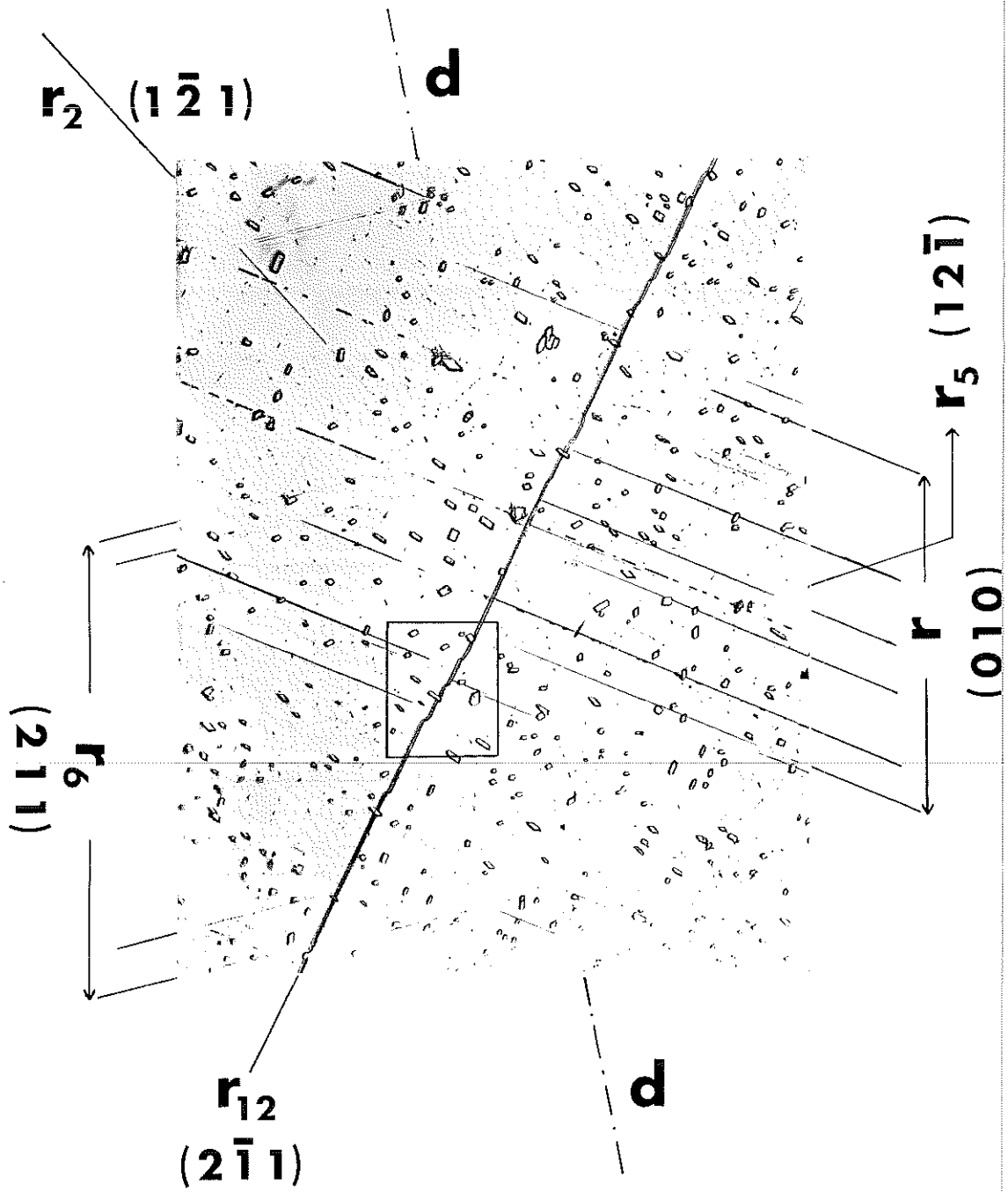


FIG. 2.

FIG. 3.

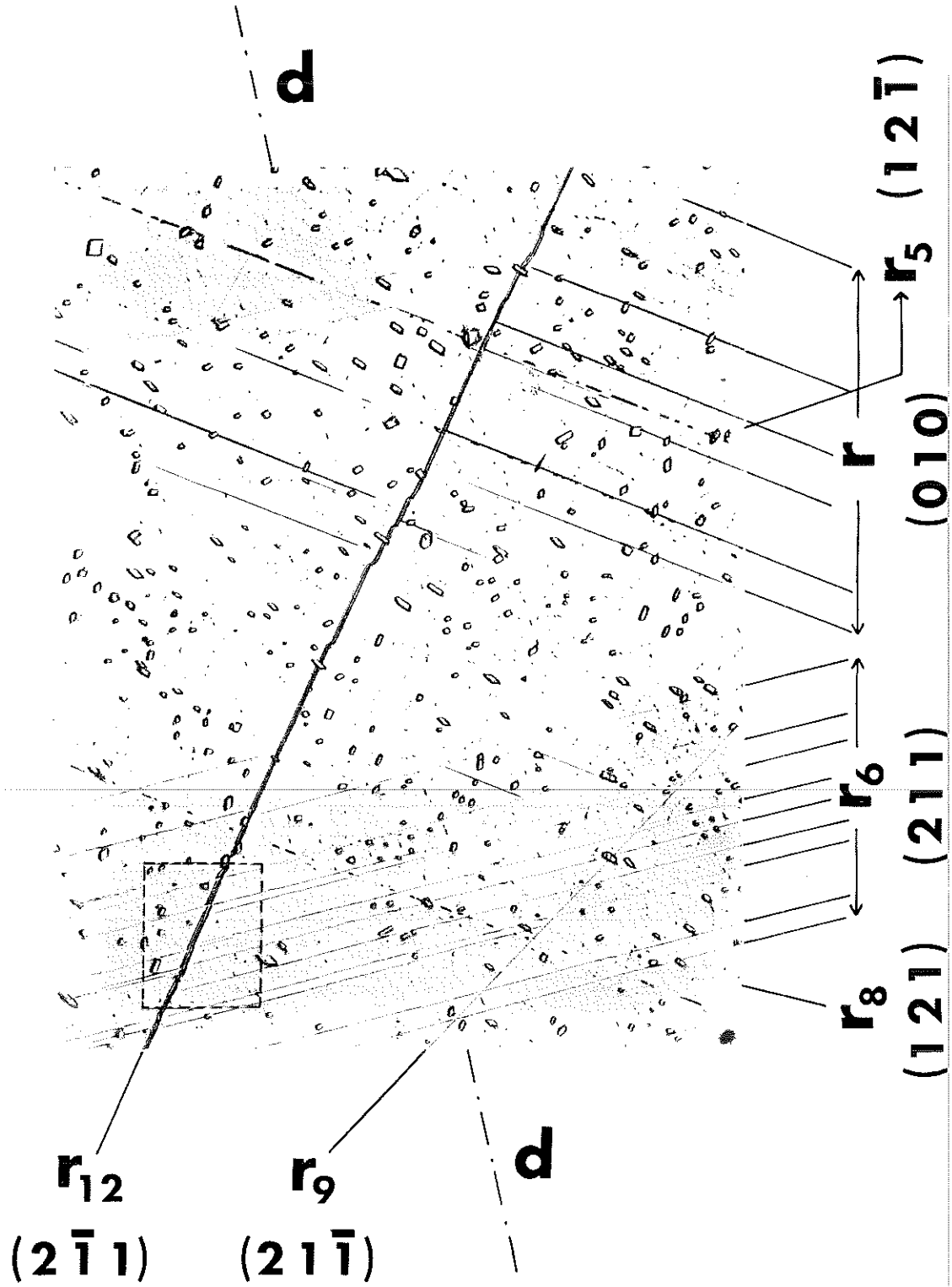


FIG. 4.

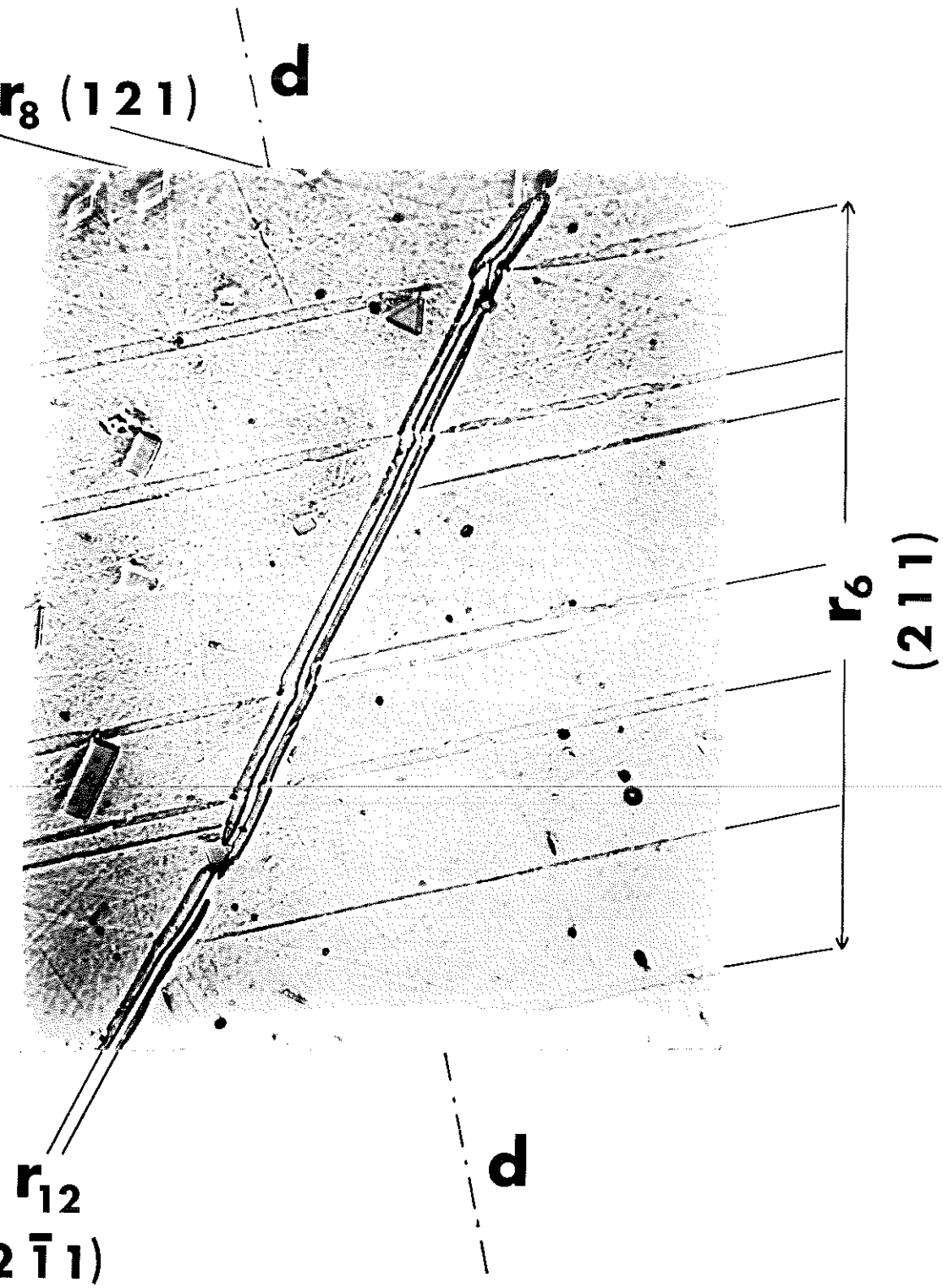


FIG. 5.

Nella Fig. 4 è riportata l'immagine (87×) della zona delimitata nella Fig. 1 dal rettangolo a lati tratteggiati ed in essa, oltre alla riga isolata r_9 appena accennata nella Fig. 2 ed intersezione del piano $(21\bar{1})$ con la superficie del cristallo, compaiono le famiglie di righe già osservate r, r_{12} ed r_6, quest'ultime più addensate nella parte inferiore dove più chiaramente emergono i caratteri che differenziano la famiglia di linee r_6 dalla famiglia di righe r: esse non presentano infatti interruzione nella interazione con le linee della famiglia r_{12}, si estendono sia dall'una che dall'altra parte con carattere di continuità; spesso dall'una o dall'altra parte della r_{12} qualche volta si sdoppiano e, sempre in ogni caso, deformano la r_{12} assottigliandosi in corrispondenza della zona in cui vengono con questa in contatto.

La zona delimitata dal rettangolo con lati tratteggiati nella Fig. 4 viene riportata (504×) nella Fig. 5 ed in questa vengono evidenziati i caratteri sopra descritti della famiglia r_6.

Nelle Figg. 2, 3 e 4 oltre alle linee già citate, appaiono appena visibili righe della famiglia r_5, intersezione del piano $(12\bar{1})$ con la superficie del cristallo ed una di queste interagisce con le righe della famiglia r; nelle Figg. 4 e 5 sono appena visibili linee r_8, intersezione del piano (121) con la superficie $(5\ \bar{7}\ 10)$.

Tutte le intersezioni citate, ad eccezione della r, appartengono alla famiglia di piani {112} che, come si è detto, potrebbero essere sia piani di slittamento che piani di geminazione.

Per ricercare gli elementi sufficienti ad una esatta classificazione, abbiamo proceduto allo studio della superficie con micrografie a raggi X.

Micrografie a raggi X e loro potere risolutivo

Dispositivo sperimentale

È stata usata la camera per microscopia a diffrazione di raggi X della Rigaku-Denki, progettata com'è noto da Zenij Nishiyama, Hirishi Fuijta e Tetsuhiro Hayami dell'Università di Osaka, la quale si basa sul metodo di Berg [8].

Come sorgente è stato adoperato il generatore microfuoco Hilger Y 33-2-61236, fuoco lineare 0,1 × 6 mm, con anodo di Co: 35 KV, 4,5 mA, corrente di filamento 3,5 A; radiazione caratteristica: CoK_α filtrata con lamina di Fe, spessore 0,02 mm.

Lo schema ottico è riportato in Fig. 6: il fascio di raggi X proveniente dal fuoco lineare f e convogliato da un tubo collimatore ci-

[8] W. Berg, *Z. Krist.*, 89 (1934), 286; W. Berg, *Naturwissenschaften*, 19 (1931), 391.

lindrico della lunghezza di 18 cm, veniva limitato all'uscita da una fenditura F regolabile in larghezza e diretta col suo asse longitudinale normalmente al fuoco stesso in modo da ridurre l'altezza del fascio alla ampiezza necessaria ad illuminare tutta la superficie in esame (Fig. 6*a*); mediante rotazione intorno all'asse *mm'* il cristallo *C* poteva essere orientato in modo che l'intersezione *j* della sua superficie con il piano riflettente (*hkl*) prescelto, risultasse parallela all'asse longitudinale della fenditura e quindi ortogonale al fuoco lineare.

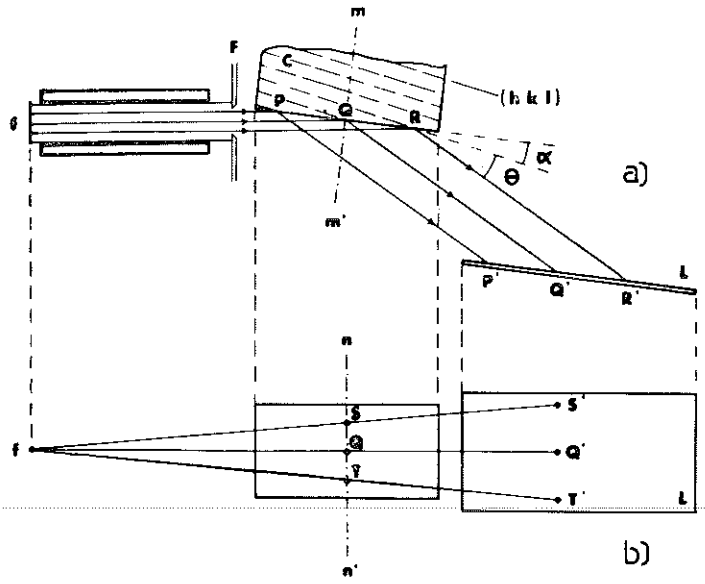


FIG. 6.

La lastra fotografica L, parallela alla superficie del campione C, era solidale con questo ed entrambi potevano ruotare intorno all'asse *nn'*, parallelo all'intersezione *j* innanzi detta (Fig. 6*b*); una regolazione fine permetteva di ricercare la condizione di Bragg con l'approssimazione di 1/500 di grado.

La superficie del campione era posta dall'emulsione della lastra fotografica e dal fuoco lineare del generatore rispettivamente alle distanze di 4 mm e di 43,5 cm.

Un filtro di alluminio dello spessore di 0,15 mm era sovrapposto all'emulsione della lastra per ridurre l'effetto dovuto alla fluorescenza del campione, eccitata dalla radiazione incidente.

Potere risolutivo

La micrografia ottenuta con i raggi X ha dimensioni che sono dello stesso ordine di grandezza del campione; per poter studiare gli eventuali difetti presentati dal piano riflettente (*hkl*) in prossimità della superficie, occorre procedere ad un ingrandimento fotografico che però è limitato sia dal potere risolutivo del film che dalla geometria del dispositivo adoperati.

A causa dei difetti si hanno variazioni di orientazione e della distanza reticolare del piano (*hkl*) prescelto per cui ne varia da punto a punto in prossimità della superficie esaminata il potere riflettente di cui la micrografia costituisce una mappa topografica.

Le posizioni relative dei vari punti, linee e regioni sulla mappa stessa saranno però determinate a meno di una quantità ρ, il cui inverso definisce il *potere risolutivo topografico.*

Dalle variazioni del potere riflettente è inoltre possibile risalire alle variazioni angolari che presentano le diverse regioni tra loro, ma i valori di queste variazioni saranno limitati da una quantità ω il cui inverso definisce il *potere risolutivo angolare.*

Le due grandezze ρ e ω sono state calcolate sia nella direzione *i* dell'intersezione del piano di incidenza con la superficie del cristallo, che nella direzione *j*, normale a tale intersezione.

a) *Il potere risolutivo topografico nella direzione « i » del piano d'incidenza* dipende oltre che dalla dispersione causata dalla differenza tra le lunghezze d'onda k_{α_1} e k_{α_2} anche dalle variazioni angolari tra le diverse regioni della superficie del cristallo.

Consideriamo dapprima una superficie le cui regioni non sono affette da variazioni angolari (Fig. 7).

Un punto P appartenente alla superficie AB del cristallo C darà luogo a due immagini N e M corrispondenti alle intersezioni, sulla lastra L, dei due raggi incidenti $\lambda_{k\alpha_1}$ e $\lambda_{k\alpha_2}$. La posizione di P sul cristallo viene quindi definita sulla lastra con una indeterminazione ρ_i eguale alla distanza $\overline{NM}$.

Detta *a* la distanza del punto P da M, θ e $\theta + \Delta\theta$ gli angoli di Bragg relativi rispettivamente alla radiazioni $\lambda_{k\alpha_1}$ e $\lambda_{k\alpha_2}$ per il piano (*hkl*), α l'angolo che questo forma con la superficie del cristallo, tenuto conto che:

$$a = \frac{r}{\operatorname{sen}(\alpha + \theta)} ,$$

dal triangolo mistilineo SNM, rettangolo in S, si ottiene:

$$\rho_i = \frac{r\,\Delta\theta}{\operatorname{sen}(\alpha + \theta)\operatorname{sen}(\alpha + \theta + \Delta\theta)} .$$

da cui, per $\Delta\theta \ll \alpha + \theta$:

$$\rho_i = \frac{r\,\Delta\theta}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \theta)} \qquad (1)$$

Si supponga ora che il punto P appartenga alla linea di confine tra due regioni W e Z di cui la seconda sia ruotata, intorno all'asse parallelo alla direzione j passante per P e normale al piano della fi-

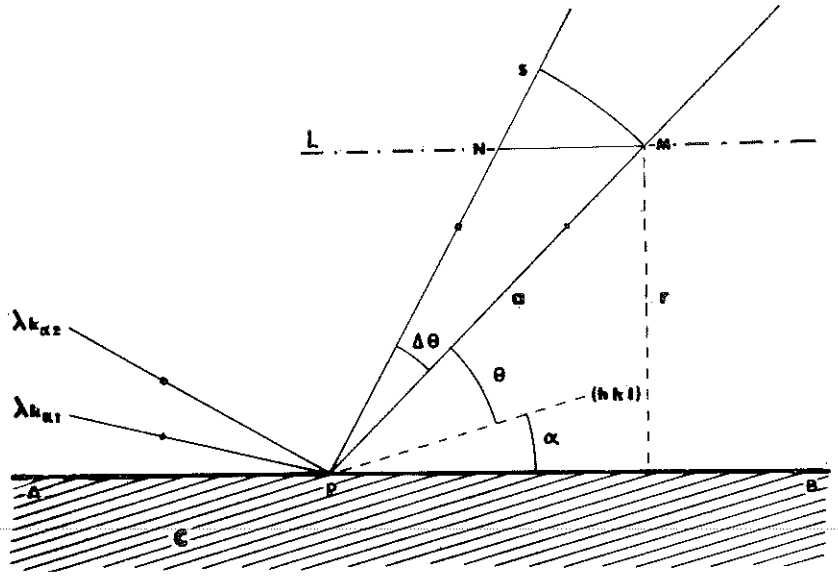


FIG. 7.

gura, di un angolo $\Delta\alpha$, per cui il piano cristallografico (*hkl*) formi in tale regione con la superficie del cristallo l'angolo (Fig. 8):

$$\alpha' = \alpha - \Delta\alpha$$

Il punto P in quanto appartenente al piano (*hkl*) della regione W avrà come corrispondenti sulla lastra L le intersezioni N e M dovute ai raggi diffratti $\lambda_{k\alpha_1}$ e $\lambda_{k\alpha_2}$; in quanto appartenente allo stesso piano (*hkl*) della regione Z avrà invece come corrispondenti sulla lastra i punti T ed R.

La posizione del punto P del cristallo, e quindi di tutti i punti del tratto PB rispetto a quelli del tratto AP, sarà determinata sulla lastra a meno del tratto NR = ρ_i.

Di conseguenza la (1) diventa:

$$\rho_i = -\frac{r(\Delta\theta + \Delta\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha + \theta)} \tag{2}$$

La (2) è valida nell'ipotesi che $\Delta\alpha$ risulti minore dell'angolo ψ sotto cui dai punti della superficie del cristallo viene vista la dimensione longitudinale del filamento nel piano di incidenza, perché, in caso contrario, viene a mancare una delle coppie di punti T, R o N, M.

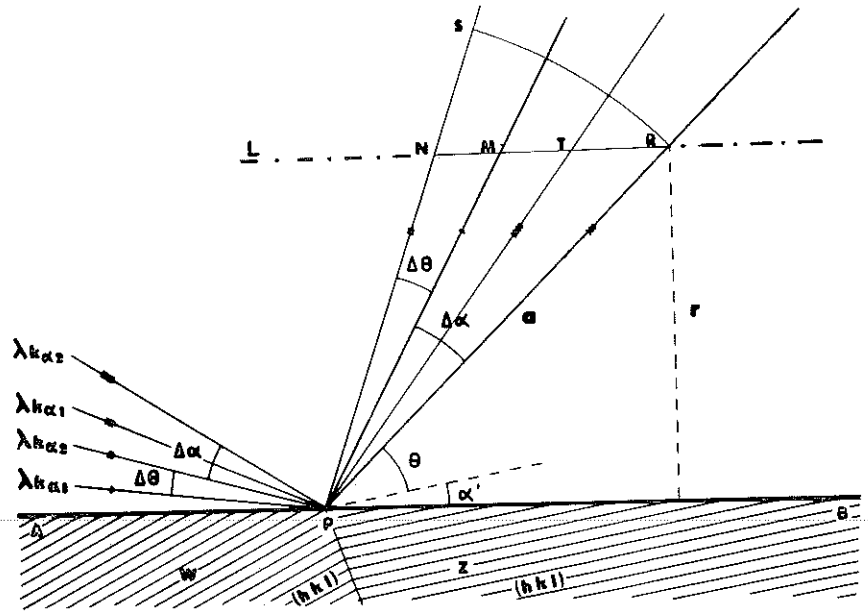


FIG. 8.

Ottenuta quindi l'immagine della superficie del cristallo sulla lastra, le posizioni dei vari punti possono essere determinate a meno del tratto ρ_i dato dalla (2) se si conoscono le variazioni angolari $\Delta\alpha$ delle regioni alle quali appartengono i punti stessi oppure, in mancanza di valori per $\Delta\alpha$, dalla stessa sostituendo a $\Delta\alpha$ il valore massimo ψ per il quale si otterrebbe ancora riflessione della regione distorta. La grandezza ρ_i sarà compresa quindi tra i valori limiti:

$$-\frac{r\,\Delta\theta}{\text{sen}^2(\alpha + \theta)} \leq \rho_i \leq \frac{r(\Delta\theta + \psi)}{\text{sen}^2(\alpha + \theta)} \tag{3}$$

b) *Il potere risolutivo angolare nella direzione « i » del piano d'incidenza* è determinato ancora dalla dispersione causata dalla differenza

tra le lunghezze d'onda $\lambda_{k\alpha_1}$ e $k_{k\alpha_2}$ e dall'angolo ψ di cui sopra; di conseguenza i diversi punti della lastra che presentano lo stesso annerimento non corrispondono necessariamente a punti della superficie del cristallo nel cui intorno il piano riflettente forma con questa sempre lo stesso angolo α. Quelle regioni del campione che presentano variazioni angolari $\Delta\alpha$ per le quali è: $\Delta\alpha + \Delta\theta \leq \psi$ non vengono infatti differenziate tra loro sulla lastra.

Il valore $\Delta\alpha$ letto, sarà determinato quindi a meno dell'angolo ω_i dato da:

$$\omega_i = \psi + \Delta\theta$$

c) *Il potere risolutivo topografico nella direzione « j » normale al piano d'incidenza* è determinato (Fig. 9):

1) dalla dimensione trasversale t della linea focale f in direzione normale al piano d'incidenza;

2) dalla distanza l della superficie del campione C dalla linea focale;

3) dalla distanza r della superficie del campione dalla lastra L.

Si consideri, come nel caso a), dapprima una superficie del cristallo non affetta da variazioni angolari; un punto P del campione sarà colpito, praticamente sotto lo stesso angolo di Bragg, da un fascio di raggi incidenti con apertura ε, angolo sotto cui dal punto P viene vista la dimensione trasversale t della linea focale (Fig. 9*b*).

Al fascio predetto corrisponde un fascio di raggi riflessi con la stessa apertura ε cosicché, sulla lastra, al punto P della superficie del cristallo corrisponderà il segmento $\overline{ST}$.

Posto $\rho_j = \overline{ST}$ e poiché:

$$\varepsilon = \frac{t}{l} \quad \text{e:} \qquad a = \frac{r}{\operatorname{sen}(\theta + \alpha)}$$

risulta:

$$\rho_j = \varepsilon \cdot a = \frac{t \cdot r}{l \cdot \operatorname{sen}(\theta + \alpha)} \tag{4}$$

Se le due sezioni W e Z del campione C sono ruotate l'una rispetto all'altra intorno alla direzione i di un angolo δ, entrambe potranno riflettere se:

$$\delta \leq \varepsilon$$

ed in tal caso il potere risolutivo topografico nella direzione j è ancora dato dall'inverso della (4).

d) *Il potere risolutivo angolare nella direzione « j », normale al piano d'incidenza* dipende ancora dell'angolo ε.

Se le due regioni del cristallo W e Z sono ruotate l'una rispetto all'altra intorno alla direzione *i* dell'angolo δ, nel caso che sia $\delta \leq \varepsilon$, entrambe le regioni rifletteranno contemporaneamente e quindi non

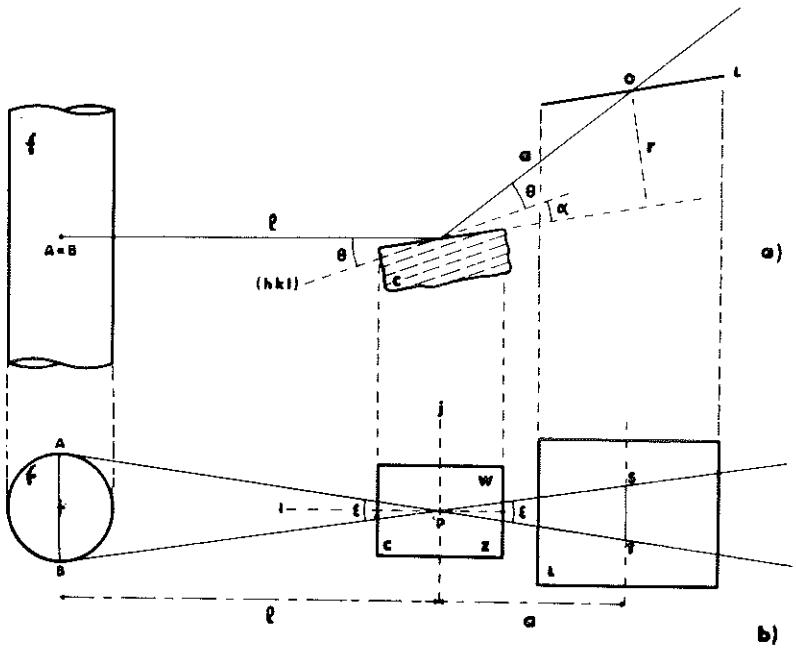


FIG. 9.

saranno differenziate tra di loro. Il valore δ sarà determinato a meno dell'angolo:

$$\omega_j = \varepsilon$$

Nelle Figg. 10, 11 e 12 sono riportate a destra le micrografie a raggi X ottenute rispettivamente per riflessione sui piano $(01\bar{1})$, $(11\bar{2})$ e $(2\bar{1}1)$; alla sinistra sono riprodotte nella stessa scala le macrografie di cui alla Fig. 1 e, per rendere più immediato il confronto topografico, queste ultime, nella stampa, sono ribaltate.

È stata usata pellicola cinematografica « Ferrania » positiva a grana fina 14 din ed i tempi di posa per le micrografie riportate sono rispettivamente: 21, 10, 10 ore; il potere risolvente della pellicola adoperata è risultato dell'ordine di grandezza di 100 tratti per mm. L'uso di lastre fotografiche ad alta risoluzione (Kodak M-R plates) avrebbe comportato, in base a tentativi fatti, tempi di posa per lo meno dieci

volte superiori il che è stato considerato inutile ai fini della presente ricerca.

Sulle macrografie ottiche sono state segnate le intersezioni *i* e *j* rispettivamente del piano di incidenza e del piano normale al piano d'incidenza con la superficie del cristallo; il verso riportato sulla direzione *i* dà la posizione del fascio di raggi X incidenti relativo alla superficie esaminata.

Nella Tab. II che segue sono riportati, in corrispondenza di ciascuna figura, i piani riflettenti ed i valori delle grandezze ρ ed ω misurate sulla lastra.

TABELLA II

Figura	(*hkl*)	ρ_i min.	ρ_i max.	ω_j max.	ρ_i	ω_j
10	$(0\,1\,\bar{1})$	7 μ	100 μ	0,85°	1 μ	0,01°
11	$(1\,1\,\bar{2})$	11 μ	67 μ	0,94°	1 μ	0,01°
12	$(2\,\bar{1}\,1)$	11 μ	67 μ	0,94°	1 μ	0,01°

CONCLUSIONI

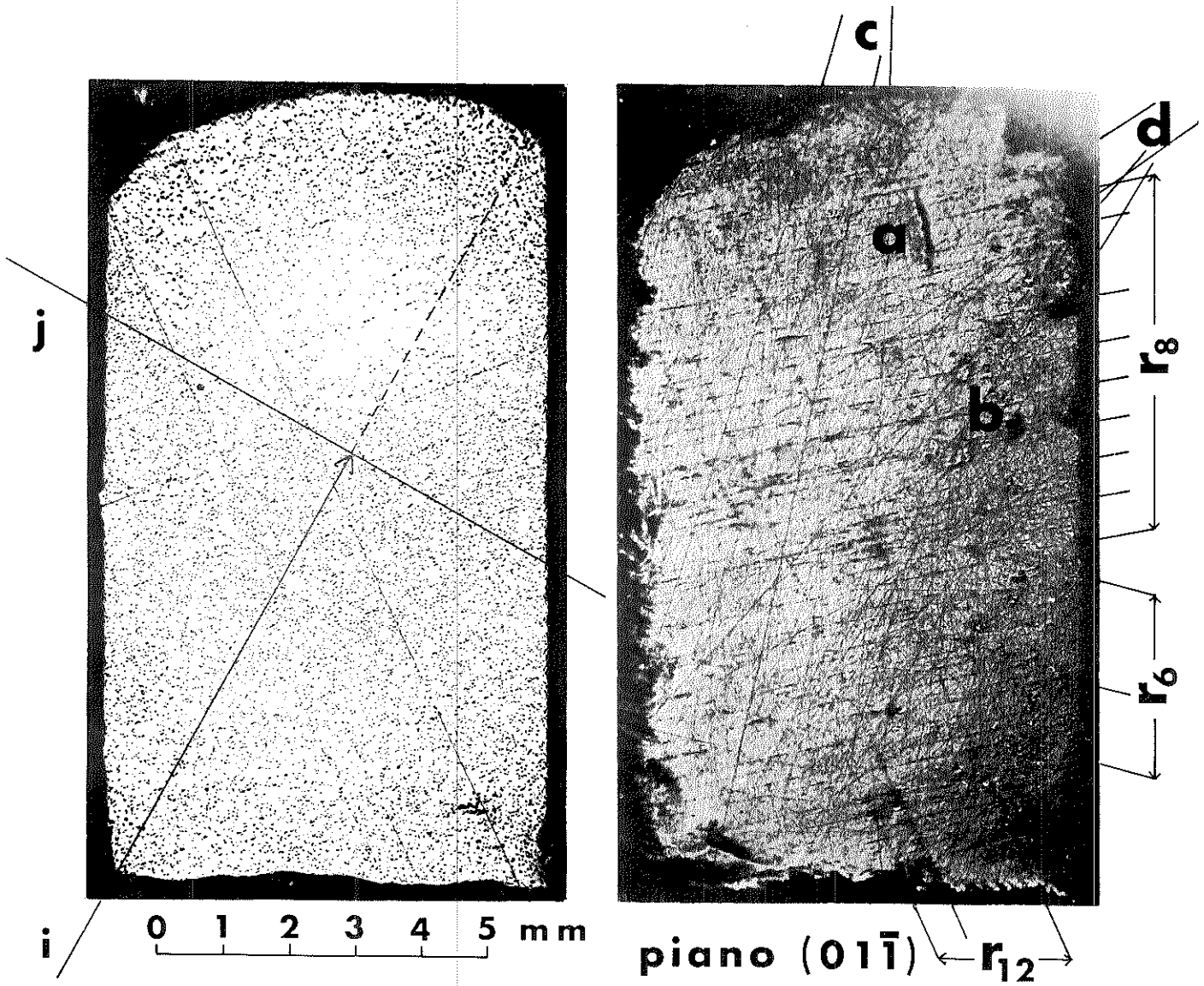
Le micrografie a raggi X presentano, rispetto alle macrografie ottiche, l'inconveniente di un potere risolutivo notevolmente più basso per cui, ad esempio, sulle lastre ottenute con il primo metodo non è possibile localizzare la posizione dei cristallini di schreibersite evidenti, invece, sulle lastre ottenute col secondo metodo a parità di ingrandimento (cfr. Figg. 10, 11 e 12 con Fig. 1).

Ciò malgrado, la micrografia a raggi X costituisce uno strumento indispensabile per una completa ed esatta interpretazione delle lastre ottenute sia con la macrografia ottica che con la microscopia elettronica, infatti solo con la micrografia a raggi X è possibile:

a) classificare le righe osservate al microscopio ottico in righe di slittamento e righe di Neumann;

b) determinare per ciascuna riga di Neumann: gli indici del piano di geminazione, l'angolo che questo forma con la superficie del cristallo, la direzione di spostamento e gli indici del piano di taglio;

c) stabilire la successione, nel tempo, degli eventi che hanno prodotto le diverse deformazioni plastiche e dare indicazioni sullo


c
d
a
b
j
i
0 1 2 3 4 5 mm
piano (01$\bar{1}$)
r_8
r_6
r_{12}

spessore di ciascuna delle lamelle di geminazione appartenente ad uno stesso sistema;

d) determinare, attraverso le variazioni del potere riflettente da punto a punto della superficie del cristallo, le eventuali variazioni angolari tra i diversi elementi del reticolo;

e) determinare la struttura del reticolo nelle bande di geminazione.

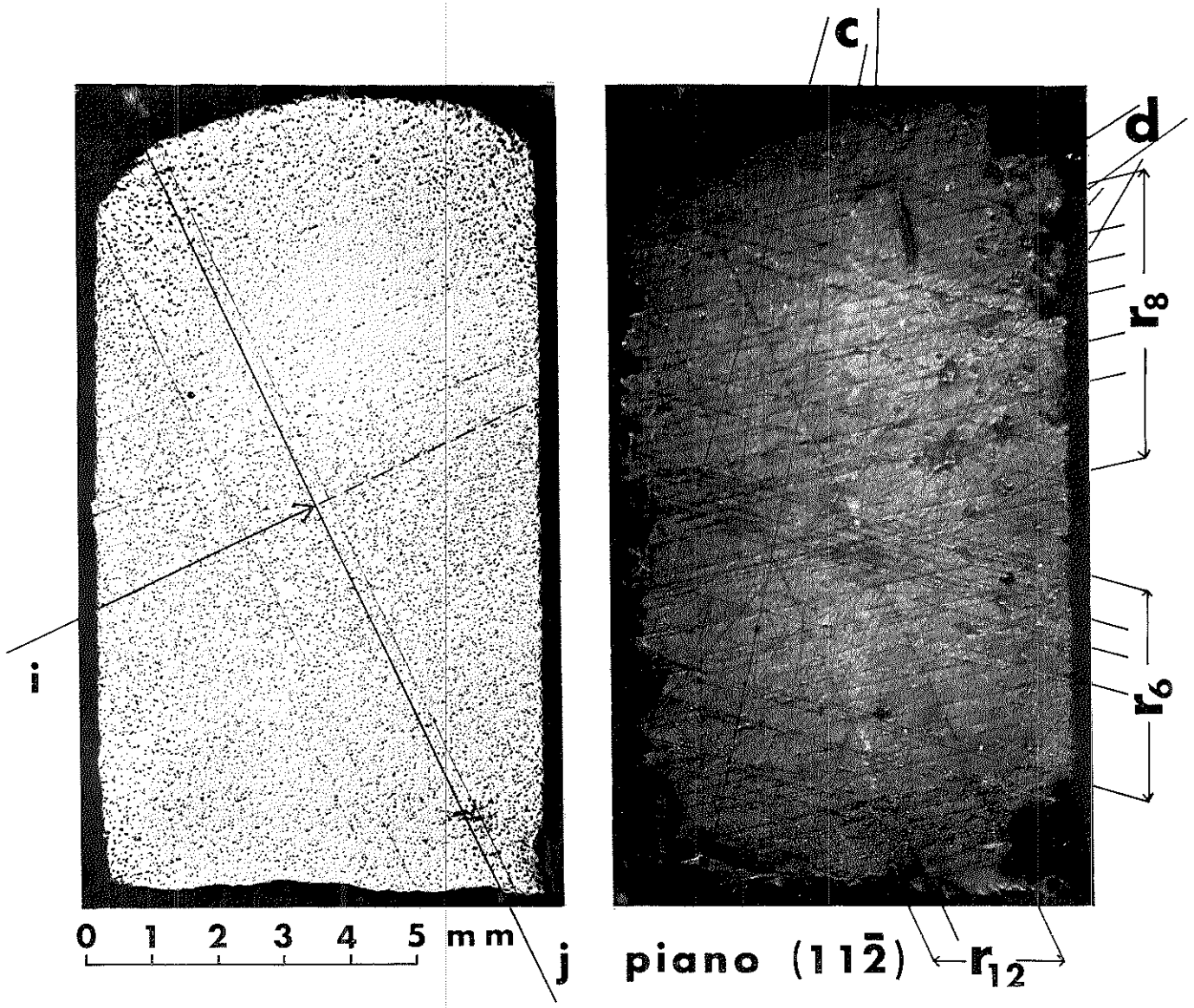
a) Nelle macrografie ottiche (cfr. Figg. da 1 a 5) della superficie del cristallo (12×) e di altre relative a porzioni di essa (77×), (87×) e (504×) compaiono in tutto sette righe classificate come r_2, r_5, r_6, r_8, r_9, r_{12} ed r; di queste le r_2, r_5, r_9 sono righe isolate che compaiono solo in alcune macrografie ottiche (Figg. 2, 3, 4), mentre le altre compaiono in tutte le macrografie ottiche (Figg. 2, 3, 4 e 5) ad eccezione della Fig. 1 (12 ×) nelle quali compaiono solo le r e r_{12}.

Passando all'esame delle micrografie a raggi X riportate nelle Figg. 10, 11 e 12 risulta che appaiono più numerose ed appariscenti tre delle famiglie di righe osservate al microscopio ottico: r_{12}, r_6, r_8 e che i caratteri delle righe stesse dipendono dalla scelta del piano riflettente.

Non compaiono invece le righe classificate r_2, r_5, r_9 qualunque sia il piano riflettente adoperato; non vi è quindi alcun dubbio sulla natura di queste tre righe: esse sono dovute rispettivamente a slittamento dei piani $(1\bar{2}1)$, $(12\bar{1})$, $(21\bar{1})$ nelle direzioni indicate nella Tab. I e sono dovute a cause preesistenti a quelle che hanno generato le altre famiglie di righe. Infatti ad esempio la famiglia r_{12} non mostra al microscopio ottico spostamento alcuno nella direzione di ciascuna di queste righe cosa che si dovrebbe invece registrare qualora la formazione dei tre slittamenti citati fosse successiva.

Sulle micrografie a raggi X vengono evidenziate anche abrasioni accidentali prodotte dalla pulitura meccanica che qualche volta appaiono sotto forma di righe comunque orientate che interessano anche tutta la superficie del campione (gruppo *c* e *d* delle Figg. 10 e 11). Alcune di queste, data la loro posizione, potrebbero essere, in qualche caso, classificate erroneamente con linee di slip o Neumann; la possibilità di tale equivoco è frequente specie quando la superficie esaminata è generica; con una successiva ed accurata lucidatura però esse, se di natura accidentale, scompaiono del tutto o per lo meno si attenuano di molto.

b) Le righe osservate sulla superficie in esame e comuni ai due mezzi di indagine si riducono quindi a quelle classificate come r_6, r_8, r_{12} dovute a bande di geminazione in quanto chiaramente visibili sulle


c
d
i
j
r_8
r_6
r_{12}
0 1 2 3 4 5 mm
piano $(11\bar{2})$

micrografie a raggi X anche su superfici lucidate ed attaccate chimicamente, contrariamente a quello che dovrebbe verificarsi nell'ipotesi di slip.

La famiglia r_{12}, dovuta ad intersezione del piano $(2\bar{1}1)$ con la superficie del cristallo ha direzione comune con la famiglia r_1 generata invece dalla intersezione del piano $(11\bar{2})$ con la superficie stessa (Tab. I)

Le considerazioni che seguono ci hanno condotti alla conclusione che esse appartengono alla prima famiglia; nell'ipotesi infatti che fossero dovute a bande di geminazione, nella riflessione del piano a cui appartengono, devono riflettere e quindi non sono evidenziabili rispetto alla matrice poiché tale piano, in quanto parallelo alla giunzione nella zona geminata, non è ruotato rispetto alla matrice.

I piani riflettenti relativi alle micrografie a raggi X riportate nelle Figg. 11 e 12 sono rispettivamente proprio i piani $(11\bar{2})$ e $(2\bar{1}1)$. Nella Fig. 12 (piano riflettente $(2\bar{1}1)$) le righe in esame sono evidenziate solamente nelle zone in cui interagiscono con quelle delle famiglie r_6 e r_8 e non nelle zone comprese tra due successive di ciascuna delle due famiglie citate e ciò a differenza di quanto accade nella Fig. 11 (piano riflettente $(11\bar{2})$); nella posizione indicata nella Fig. 12 il piano riflettente ha, sia nella matrice che nella parte geminata, la stessa giacitura.

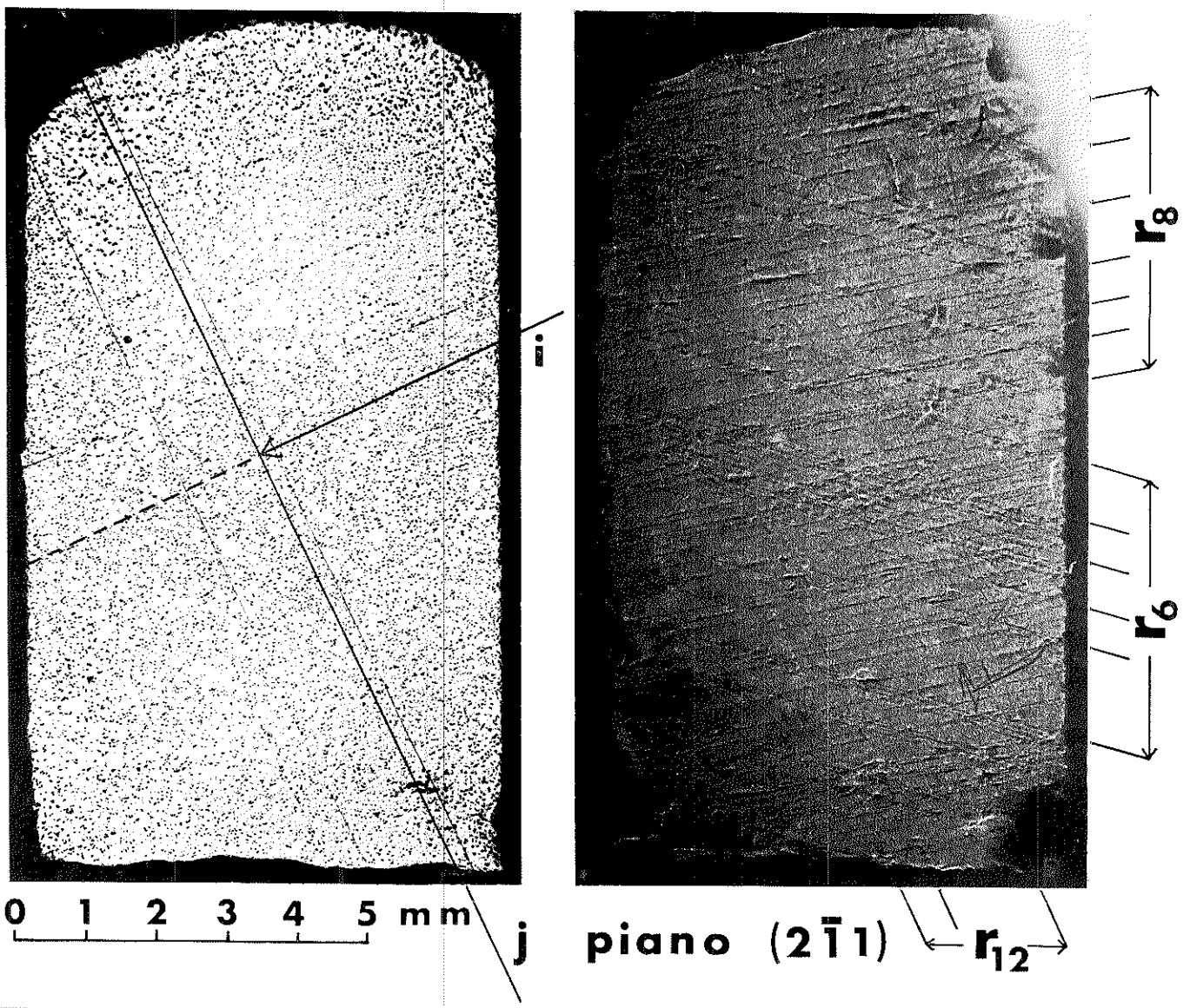
Le famiglie r_6 e r_8 sono rispettivamente dovute, senza alcuna possibilità di equivoci (v. Tab. I), alle intersezioni con la superficie del cristallo dei piani (211) e (121).

c) La formazione delle bande di geminazione che determinano le intersezioni, con la superficie del cristallo, r_6 e r_8 è successiva alla formazione delle bande di geminazione che determinano sulla superficie del cristallo le righe r_{12}.

Appare infatti evidente dalla Fig. 5 che in corrispondenza delle intersezioni delle righe r_6 con le r_{12} si ha una deformazione di queste ultime.

Le deformazioni delle righe r_{12} visibili nella Fig. 3, sono generate in corrispondenza delle intersezioni con le righe r_8; al contrario di quanto accade nella Fig. 5, nella Fig. 3 le righe r_8 non sono ben visibili perché sia la giunzione di geminazione (121) che la direzione di spostamento $[1\bar{1}1]$ risultano quasi normali alla superficie studiata.

Dall'esame degli spostamenti relativi delle linee r_{12}, dovuti alle intersezioni con le linee r_6 e r_8, si può stabilire che gli sforzi che hanno generato tali spostamenti ed agenti rispettivamente nelle direzioni $[\bar{1}11]$ e $[1\bar{1}1]$, hanno il verso indicato in Fig. 13 per cui l'angolo tra i due vettori di Burgers $\vec{t}_1$ e $\vec{t}_2$ è di 109° 28′. L'esistenza ormai accertata dei due piani di geminazione (211) e (121) nelle direzioni e nel


i
j
0 1 2 3 4 5 mm
piano $(2\bar{1}1)$
r_8
r_6
r_{12}

verso indicati nella Fig. 13 lascia supporre che la causa che ha prodotto tali bande di geminazione sia stata comune ed agente nella direzione [001], coincidente con la direzione ed il verso del vettore $\vec{t}$ di Burgers, somma dei due vettori componenti.

In tale ordine di idee, questa causa comune, oltre ad aver generato le geminazioni di cui sopra, avrebbe potuto provocare anche degli

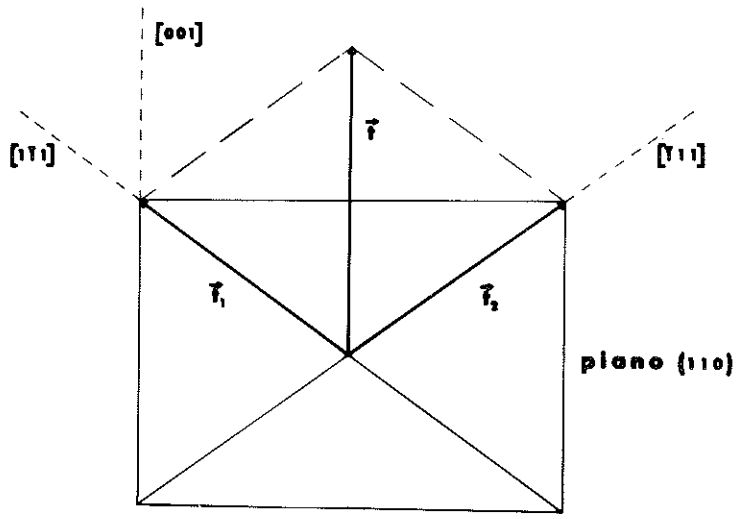


FIG. 13.

slittamenti e quindi delle dislocazioni nelle stesse direzioni; senonché l'energia necessaria per produrre una dislocazione è, com'è noto, all'incirca proporzionale al quadrato del suo vettore di Burgers. Nel nostro caso, detto: a lo spigolo del cubo, è:

$$t_1 = t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

ed inoltre

$$t = a$$

Quindi le corrispondenti energie sono proporzionali a: $\frac{3}{4} a^2$ $\frac{3}{4} a^2$ ed a^2.

Poiché l'energia totale per produrre le due dislocazioni risulta maggiore dell'energia a^2 nella direzione [001] del vettore $\vec{t}$ è ovvio

concludere che la dislocazione [001] deve essere quella stabile e non può dividersi nelle $[\bar{1}11]$ e $[1\bar{1}1]$ dei due vettori di Burgers componenti dando luogo in tali direzioni a degli slittamenti.

È proprio il caso delle cosiddette « *grandi dislocazioni* » stabili, nel cubico centrato, studiate da Frank ed esposte in una sua comunicazione privata [9].

Tra tutti i piani appartenenti alla direzione [001] quelli a più basso indice e quindi con minima energia appartengono alla famiglia {100}, piani di sfaldatura dei cristalli cubici a corpo centrato.

Non si è avuta una formazione di frammenti in quanto gli slittamenti si arrestano a causa di irregolarità o di impurezze formando delle *dislocazioni a cuneo* le cui linee sono normali alle direzioni [001].

È da osservare che cause delle linee di dislocazione sono da imputare sia alle deformazioni plastiche preesistenti, ad esempio piani di scorrimento $(2\bar{1}1)$ e (211), che alla particolare morfologia dei cristallini di schreibersite, messa in evidenza da P. G. Orsini [2], in quanto questi cristallini di fosfuro precipitato si presentano come aghi con l'asse longitudinale disposto proprio secondo una delle tre direzioni ortogonali tra loro, coincidente con uno degli spigoli del cubo della fase kamacite ospite, oppure infine altre irregolarità di natura accidentale.

Le righe *r* sono quindi intersezioni con la superficie del cristallo della superficie di slittamento (010) individuata dal vettore $\vec{t}$ nella direzione [001] di Burgers e dalla linea di dislocazione normale a $\vec{t}$. Esse sono osservabili soltanto al microscopio ottico e, come si è già detto, non alle micrografie a raggi X.

d) Variazioni angolari tra i diversi elementi del reticolo in prossimità della superficie del cristallo non sono evidenziabili con micrografie ottiche a qualunque ingrandimento ed invece appaiono evidenti nelle micrografie a raggi X riportate nelle figure anzidette nelle quali tra punto e punto appaiono in numerose zone notevoli variazioni del potere riflettente.

In particolare: una irregolarità del reticolo cristallino avente la forma di una fenditura orientata quasi parallelamente alle dimensioni maggiori del frammento di meteorite appare in alto a destra (zona *a* Fig. 10) in tutte le micrografie a raggi X riportate ed in altre non riportate; essa però non viene evidenziata al microscopio ottico in nessuna condizione di illuminamento e per qualsiasi valore dell'ingrandimento.

[9] W. T. Read Jr., *Dislocations in crystals*, Mc Graw-Hill Book Cy, New York, 1953.

L'aspetto della irregolarità *a* e di altre (ad es. il gruppo *b* della Fig. 10) cambia con il mutare della scelta del piano riflettente. Come vedremo in una nota successiva, ciò si verifica quando il reticolo cristallino compreso in ciascuna delle zone perturbate è ruotato rispetto al reticolo cristallino della matrice di un angolo minore dell'angolo ψ sotto il quale, dalla zona perturbata, è vista la dimensione longitudinale del filamento.

Anche altre eventuali variazioni angolari tra i diversi elementi della superficie del cristallo e lo studio della struttura del reticolo nelle bande di geminazione attraverso la micrografia a raggi X verranno riportati in una nota successiva.

Sul problema esterno di Dirichlet per i sistemi ellittici

Nota di ANGELO ALVINO
presentata dal socio ordinario CARLO MIRANDA

(Adunanza del 16 novembre 1974)

RIASSUNTO. — In questo lavoro viene dimostrato un teorema di esistenza e un teorema di unicità per il problema di Dirichlet in un dominio non limitato Ω, complementare di un compatto di R^n.

SUMMARY. — In this paper we prove an existence Theorem and an unicity Theorem for the problem in the title.

In questa nota si studia il problema di Dirichlet per un sistema di equazioni ellittico, in forma debole, in un dominio non limitato Ω, complementare di un compatto di R^n. I risultati, che qui si ottengono, estendono al caso dei sistemi, con tecniche simili, analoghi risultati ottenuti da S. MATARASSO, in [6] e [7], per le equazioni ellittiche. Tale estensione è inoltre resa possibile dai risultati ottenuti da A. CANFORA, [4], il quale ha dimostrato per i sistemi il teorema del massimo modulo, che era stato ottenuto per le equazioni da C. MIRANDA [8] e S. AGMON [1].

Tale nota si divide in 5 numeri; nel n. 1 sono elencate le principali notazioni, inoltre viene enunciato il problema e sono indicate le ipotesi sotto cui tale problema verrà risolto; il n. 2 contiene alcuni lemmi preliminari sui sistemi a coefficienti costanti e con sola parte dominante; nel n. 3 viene dimostrato un lemma di regolarità per soluzioni di sistemi in forma debole e a coefficienti variabili, nonché una sua semplice conseguenza; nel n. 4 vengono dimostrate alcune maggiorazioni a priori per le soluzioni del sistema in una famiglia di domini limitati invadenti Ω: le costanti che vi compaiono risultano indipendenti dai diametri di tali domini; tali maggiorazioni permettono, nel n. 5, di giungere ad un teorema di esistenza in Ω; tale numero si conclude con un teorema di unicità la cui dimostrazione è basata su un lemma di crescenza contenuto in [9].

1. - Notazioni e ipotesi [1].

Sia R^n lo spazio euclideo a n dimensioni; con le lettere α, β, ... indicheremo nel seguito vettori numerici di ordine n a componenti interi non negativi: se $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta \equiv (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, poniamo

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \qquad \forall\, i$$

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \quad \text{e} \quad \exists\, i : \alpha_i < \beta_i .$$

Posto $\partial_{x_j} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ sia:

$$\partial \equiv (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}), \qquad D \equiv \frac{1}{i}\,\partial, \qquad \partial^\alpha \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} .$$

Sia T un dominio limitato di R^n e $u(x)$ una funzione reale definita in T; se $u \in C^h(T)$ poniamo:

$$[u]_k^T = \sum_{|\alpha|=k} \max_T |\partial^\alpha u| \qquad 0 \leq k \leq h ;$$

se $u \in C^{h,\lambda}(T)$ con $0 < \lambda \leq 1$

$$[u]_{h,\lambda}^T = \sum_{|\alpha|=h} |\partial^\alpha u|_\lambda^T ,$$

dove il simbolo $|\cdot|_\lambda^T$ indica il coefficiente di Holder relativo all'esponente λ e al dominio T.

Se u appartiene allo spazio di Sobolev $H^h(T)$, poniamo:

$$|u|_k^T = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_T |\partial^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2} \qquad 0 \leq k \leq h ;$$

diremo infine che $u \in H^{(h,\mu)}(T)$ se $u \in H^h(T)$ ed inoltre è

$$|u|_{(h,\mu)}^T = \sup_{\substack{x_0 \in T \\ 0 < \rho < +\infty}} \left(\rho^{-\mu} \sum_{|\alpha|=h} \int_{T \cap \Gamma(x_0,\rho)} |\partial^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2} < +\infty ,$$

dove $\Gamma(x_0, \rho)$ è l'intorno sferico di x_0 di raggio ρ.

[1] Per tutte le notazioni non esplicitamente definite, ci riferiamo a [2] e [10].

Sia $(s_1, \ldots, s_N)$ una N-pla di interi positivi; poniamo

$$s = \max_i s_i \qquad\qquad m = \sum_i s_i .$$

D'ora innanzi con Ω intenderemo un aperto di R^n, di classe $A^{(s+1)}$, complementare di un compatto; supporremo che tale compatto contenga l'origine nel suo interno.

Siano u e τ due vettori di ordine N, le cui componenti siano, rispettivamente, funzioni $u_i \in H^{s_i}_{loc}(\Omega)$ e $\tau_i \in C_0^\infty(\Omega)$; consideriamo la forma bilineare

$$B[\tau, u] = \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \sum_{|\beta|=0}^{s_j} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega a^{ij}_{\alpha\beta}(x)\, \partial^\alpha \tau_i\, \partial^\beta u_j\, dx .$$

Posto

$$F[\tau, f] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (f_i^\alpha + \tilde{f}_i^\alpha)\, \partial^\alpha \tau_i\, dx$$

e assegnate su $\partial\Omega$ le funzioni $\{\varphi_{jb}\}$ $(j = 1, \ldots, N;\ b = 0, \ldots, s_j - 1)$, il problema di Dirichlet in Ω consiste nel trovare un vettore $u \equiv (u_i)$, con $u_j \in H^{s_j}_{loc}(\Omega) \cap C^{s_j-1}(\bar{\Omega})$, il quale soddisfi l'equazione

$$(1.1) \qquad B[\tau, u] = F[\tau, f] \qquad \forall\, \tau \equiv (\tau_i) \in [C_0^\infty(\Omega)]^N$$

e le condizioni al contorno (con $\varphi_{jb} \in C^{s_j-1+b}(\partial\Omega)$)

$$(1.1)' \qquad \frac{d^b u_j}{dn^b} = \varphi_{jb} \qquad\qquad b = 0, \ldots, s_j - 1 ,$$

essendo n la normale esterna a $\partial\Omega$.

La forma $B[\,\cdot\,,\cdot\,]$ è supposta uniformemente fortemente ellittica, volendo significare con ciò che, posto

$$\lambda^{jk}(x;\, D) = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|= \\ =s_j+s_k}} (-i)^{s_j+s_k} a^{jk}_{\alpha\beta}(x)\, D^{\alpha+\beta}$$

deve esistere una costante $c > 0$, tale che, $\forall\, x \in T$, per ogni vettore complesso $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ e per ogni vettore reale ξ, risulti:

$$(1.2) \qquad \mathrm{Re}\Big(\sum_{j,k} \lambda^{jk}(x;\, \xi)\, \eta_j\, \overline{\eta_k}\Big) \geq c \sum_{i=1}^{N} |\xi|^{2s_i} |\eta_i|^2 .$$

Le funzioni $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ sono supposte reali, misurabili e soddisfacenti quasi ovunque alla seguente condizione:

$$a_{\alpha\beta}^{ij}(x) = 0\left(|x|^{\gamma(|\alpha|+|\beta|-s_i-s_j)}\right) \qquad \text{con} \qquad \gamma \leq 1 \; ; \tag{1.3}$$

inoltre, per $|\alpha| = s_i$ e $|\beta| = s_j$, $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ è continua in $\overline{\Omega}$ e convergente all'infinito. Poniamo

$$M = \sum_{i,j} \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \sum_{|\beta|=0}^{s_j} \sup_{\Omega} |a_{\alpha\beta}^{ij}(x)| \, |x|^{\gamma(s_i+s_j-|\alpha|-|\beta|)} .$$

Supponiamo che esistano N numeri reali θ_i, con $\theta_i \leq 1$, e una costante $c' > 0$, tale che, $\forall\, \tau \equiv (\tau_i)$ con $\tau_i \in C_0^\infty(\Omega)$, sia

$$\sum_i \int_\Omega \tau_i^2 \, |x|^{-2s_i\theta_i} \, dx + \sum_j \sum_{|\alpha|=s_j} \int_\Omega (\partial^\alpha \tau_j)^2 \, dx \leq c' \, B[\tau, \tau] \tag{1.4}$$

con c' indipendente dai diametri dei supporti delle τ_j.

Posto $4\,d(x) = \operatorname{dist}(x;\, \partial\Omega)$, sia

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : 4\,d(x) < \delta\}$$

con $\delta > 0$ tanto piccolo da poter rappresentare Ω_δ su di una striscia.

Le funzioni f_i^α e $\tilde{f}_i^\alpha$ sono supposte reali, misurabili e tali che si abbia:

$$\begin{aligned} &f_i^\alpha(x) = 0\left(|x|^{\chi_i^\alpha}\right) \\ &\tilde{f}_i^\alpha(x) = 0\left(d(x)^{-(s_i-|\alpha|+1-\lambda)}\right) \qquad \frac{1}{2} - < \lambda < 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

dove, posto $\mu = \min_j [s_j(\gamma - \theta_j)]$ e indicata con a una costante positiva, è

$$\chi_i^\alpha = \min\left[\gamma\left(|\alpha| - s_i - \frac{n}{2}\right) - \mu\,;\;\; \theta_i(|\alpha| - s_i) - \frac{n}{2} - a\right] ;$$

in più è: supp. $\tilde{f}_i^\alpha \subseteq \Omega_{\delta/4}$.

Posto $C(x_0, r_0) = \Omega \cap \Gamma(x_0, r_0)$ esistono due costanti ζ e h_0, tali che, in $C(x_0, h\,|x_0|^\gamma)$, per $h \leq h_0$, si ha:

$$\zeta^{-1}|x_0| \leq |x| \leq \zeta\,|x_0| . \tag{1.6}$$

Ancora, per le ipotesi fatte sui coefficienti dei termini di grado massimo, fissato comunque $k > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\tilde{\eta}_\varepsilon$ (che possiamo supporre minore di $\varepsilon/2$ e h_0/k) tale che, in $C(x_0, k\eta \,|\, x_0|^\gamma)$ con $0 < \eta_i \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$, l'oscillazione di ogni $a^{ij}_{\alpha\beta}(x)$, con $|\alpha| = s_i$ e $|\beta| = s_j$, è inferiore ad ε.

Infine poniamo:

$$R_{i, x_0, \eta, h} = \sum_{|\alpha|=h} \sup_{\Delta(x_0, \eta)} |f_i^\alpha(x)|$$

$$M_{i, R, h} = \sum_{|\alpha|=h} \sup_{\Theta(R)} |f_i^\alpha(x)|$$

$$M_\delta = \sum_i \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \left(\sup_{\Omega_\delta} |f_i^\alpha(x)| + \sup_{\Omega_\delta} |\tilde{f}_i^\alpha(x)| \; d(x)^{s_i - |\alpha| + 1 - \lambda} \right)$$

$$T_{\sigma, R, \eta} = M_\delta + \sum_i \sum_{h=0}^{s_i} \sup_{x_0 \in \Omega_{\frac{3R}{4}} - \Omega_{\delta/2}} |x_0|^{\gamma(s + s_i - h) + \sigma} R_{i, x_0, \eta, h} +$$

$$+ \sum_i \sum_{h=0}^{s_i} R^{\gamma(s + s_i - h) + \sigma} M_{i, R, h} ,$$

dove si è posto:

$$\Sigma_R = \{x \in R^n : |x| \leq R\}; \quad \Delta(x_0, \eta_i) = C(x_0, k\eta_i \,|\, x_0|^\gamma);$$

$$\Theta(R) = \Sigma_R - \Sigma_{\frac{2R}{3}}; \; \Omega_R = \Omega \cap \Sigma_R; \; \Delta_R(x_0, \eta_i) = \Delta(x_0, \eta) \cap \Omega_R .$$

Avvertiamo che, nel n. 4, spesso, nell'ambito di una stessa dimostrazione, indicheremo con il medesimo simbolo K costanti generalmente differenti, dipendenti, oltre che dalle quantità esplicitamente indicate, da s, λ, c, c', k, ζ, γ, Ω, ma indipendenti da R.

2. - Sistemi a coefficienti costanti.

Detto T un dominio limitato, sia

$$B_0[\tau, u] = \sum_{i,j} \sum_{|\alpha|=s_i} \sum_{|\beta|=s_j} a^{ij}_{\alpha\beta} \int_T \partial^\alpha \tau_i \, \partial^\beta u_j \, dx$$

una forma bilineare fortemente ellittica, a coefficienti costanti, dotata solo dei termini di ordine massimo; consideriamo l'equazione:

$$(2.1) \qquad B_0[\tau, u] = \sum_i \int_T \tau_i \, g_i \, dx = (\tau, g) \qquad \forall \, \tau \equiv (\tau_i) \in [C_0^\infty(T)]^N .$$

Si dimostra, sfruttando la (1.2), che esiste una costante $c_0 > 0$, tale che

$$B_0[u, u] \geq c_0 \left(\sum_{i=1}^{N} |u_i|_{s_i}^{T} \right)^2 \tag{2.2}$$

per ogni $u \equiv (u_i)$ con $u_i \in H_0^{s_i}(T)$.

Inoltre, se si suppone $g_i \in H^{s-s_i}(T)$, per un risultato di L. Nirenberg [12], una soluzione di (2.1) è soluzione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{N} \ell^{ij}(\partial) u_j = g_i \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{2.3}$$

dove

$$\ell^{ij}(\partial) = \sum_{|\alpha|=s_i} \sum_{|\beta|=s_j} a_{\alpha\beta}^{ij} \partial^{\alpha+\beta}.$$

Sussiste il seguente lemma:

LEMMA 2.1. *Siano* Γ_1, Γ_k *e* Γ *tre ipersfere concentriche, rispettivamente di raggi* ρ, $k\rho$, R (*sia* $1 < k < R/\rho$); *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* K *dipendente da* ε, k *e dal massimo modulo dei coefficienti, in modo tale che, per ogni soluzione* $u \equiv (u_j)$, *con* $u_j \in H^{s_j}(\Gamma)$, *di* (2.1) *in* Γ, *è*:

$$\rho^{2s} \sum_j |u_j|_{s+s_j}^{\Gamma_1} \leq \varepsilon \rho^{2s} \sum_j |u_j|_{s+s_j}^{\Gamma_k} + \tag{2.4}$$

$$+ K \left\{ \sum_j \rho^{s-s_j} |u_j|_0^{\Gamma_k} + \rho^{2s} \sum_i |g_i|_{s-s_i}^{\Gamma_k} \right\}.$$

Abbiamo già osservato che u è soluzione del sistema (2.3); in seguito alla trasformazione $x = \rho \bar{x}$, otteniamo:

$$\sum_j \ell^{ij}(\partial) (\rho^{s-s_j} \bar{u}_j) = \rho^{s+s_i} \bar{g}_i \tag{2.5}$$

dove $\bar{u}_j = u_j(\rho\bar{x})$ e $\bar{g}_i = g_i(\rho\bar{x})$. Se $\bar{\Gamma}_1$ e $\bar{\Gamma}_k$ sono le ipersfere, di raggi 1 e k, in cui vengono trasformate le Γ_1 e Γ_k, si ottiene, applicando il lemma 5.2 di [11] alla soluzione $(\rho^{s-s_j} \bar{u}_j)$ di (2.5):

$$\sum_j |\rho^{s-s_j} \bar{u}_j|_{s-s_j}^{\bar{\Gamma}_1} \leq K \left\{ \sum_i |\rho^{s+s_i} \bar{g}_i|_{s-s_i}^{\bar{\Gamma}_k} + \sum_j \sum_{h=0}^{s+s_j-1} |\rho^{s-s_j} \bar{u}_j|_h^{\bar{\Gamma}_k} \right\}.$$

Ritornando alla variabile x e ricordando che (cfr. (1.11) di [8]), se $v \in H^h(A)$ con $A = T \cap \Gamma(x_0, \rho)$, si ha, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$(2.6) \qquad \rho^k \mid v \mid_k^A \leq \varepsilon \rho^h \mid v \mid_h^A + K(\varepsilon) \mid v \mid_0^A \qquad k = 0, \ldots, h-1,$$

si ottiene facilmente la (2.4).

In modo analogo, facendo intervenire il lemma 3.2 di [11], si ha:

LEMMA 2.2. *Siano* C_1, C_k *e* C *le tre porzioni di* Γ_1, Γ_k *e* Γ *che, rispetto ad un iperpiano* ω, *si trovano dalla stessa parte; per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* K, *dipendente da* ε, k, *e dal massimo modulo dei coefficienti, tale che, per ogni soluzione* $u \equiv (u_j)$ *di* (2.1) *in* C, *con* $u_j \in H^{s+s_j}(C)$ *e avente derivate nulle fino a quelle di ordine* $s_j - 1$ *su* ω, *riesce*:

$$(2.7) \qquad \rho^{2s} \sum_j \mid u_j \mid_{s+s_j}^{C_1} \leq \varepsilon \rho^{2s} \sum_j \mid u_j \mid_{s+s_j}^{C_k} + \\ + K \left\{ \sum_j \rho^{s-s_j} \mid u_j \mid_0^{C_k} + \rho^{2s} \sum_j \mid g_i \mid_{s-s_j}^{C_k} \right\}.$$

Consideriamo adesso l'equazione:

$$(2.8) \qquad B_0[\tau, u] = \sum_i \int_T \partial^{\alpha_i} \tau_i \, g_i^{\alpha_i} \, dx$$

dove è $0 \leq |\alpha_i| \leq s_i$. Sussiste il seguente lemma:

LEMMA 2.3. *Siano* C_1, C_k *e* C *le porzioni, rispettivamente, di* Γ_1, Γ_k *e* Γ, *che, rispetto ad una ipersuperficie* γ, *si trovano dalla stessa parte; per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* K, *dipendente da* ε, k *e dal massimo modulo dei coefficienti, tale che, se* $u \equiv (u_j)$ *è soluzione di* (2.8) *per ogni* $\tau \equiv (\tau_i) \in [C_0^\infty(C)]^N$, *con* $u_j \in H^{s_j}(C) \cap C^{s_j-1,\lambda}(C)$ *e nulla su* γ *insieme a tutte le sue derivate fino a quelle di ordine* $s_j - 1$, *e se* $g_i^{\alpha_i} \in L^2(C)$, *si ha*:

$$(2.9) \qquad \sum_j \mid u_j \mid_{s_j}^{C_1} \leq \varepsilon \sum_j \mid u_j \mid_{s_j}^{C_k} + \\ + K \left\{ \sum_i \rho^{s_i - |\alpha_i|} \mid g_i^{\alpha_i} \mid_0^{C_k} + \rho^{\lambda - 1 + n/2} \sum_j [u_j]_{s_j - 1, \lambda}^{C_k} \right\}.$$

Accenneremo solo brevemente alla dimostrazione in quanto essa è simile a quella del lemma 5.5 di [8].

Se x_0 è il centro di Γ, consideriamo la funzione:

$$\zeta(x) \begin{cases} = (k^2\rho^2 - \overline{xx_0}^2)^s & \text{se} \quad \overline{xx_0} \leq k\rho \\ = 0 & \text{se} \quad \overline{xx_0} > k\rho \end{cases};$$

il vettore $v \equiv \zeta u$ è in $H_0^{s_1}(C) \times \ldots \times H_0^{s_N}(C)$.

Si ha, per $|\alpha| = s_i$ e $|\beta| = s_j$:

$$\partial^\alpha(\zeta u_i)\,\partial^\beta(\zeta u_j) = \partial^\alpha(\zeta^2 u_i)\,\partial^\beta u_j + \partial^\alpha u_i \Big(\sum_{\gamma<\beta} A^\gamma\,\partial^\gamma u_j\,\zeta\,\partial^{\beta-\gamma}\zeta\Big) +$$

$$+ \partial^\beta u_j \Big\{\sum_{\delta<\alpha} (B^\delta\,\partial^\delta u_i\,\zeta\,\partial^{\alpha-\delta}\zeta + C^\delta\,\partial^\delta u_i\,\partial^{\alpha-\delta}\zeta^2)\Big\} +$$

$$+ \sum_{\delta<\alpha}\ \sum_{\gamma<\beta} A^{\delta,\gamma}\,\partial^\delta u_i\,\partial^\gamma u_j\,\partial^{\alpha-\delta}\zeta\,\partial^{\beta-\gamma}\zeta$$

A^γ, B^δ, C^δ, $A^{\gamma,\delta}$ essendo costanti opportune; ricordando che $\partial^\alpha\zeta = 0((k\rho)^{2s-|\alpha|})$ si ha:

$$|B[v, v]| \leq |B[\zeta^2 u, u]| +$$

$$+ K\left\{\sum_{i,j}\ \sum_{\substack{p+q< \\ <s_i+s_j}} (\rho^{2s-s_i-s_j+p}\,|u_i|_p^{C_k})\,(\rho^{2s-s_i-s_j+q}\,|u_j|_q^{C_k})\right\}.$$

Essendo:

$$B[\zeta^2 u, u] = \sum_i \int_C \partial^{\alpha_i}(\zeta^2 u_i)\,g_i^{\alpha_i}\,dx,$$

con facili calcoli si ottiene, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$|B[v, v]| \leq \varepsilon^2 \sum_j (\rho^{2s}\,|u_j|_{s_j}^{C_k})^2 + \tag{2.10}$$

$$+ K(\varepsilon)\left\{\sum_i (\rho^{2s-|\alpha_i|+s_i}\,|g_i^{\alpha_i}|_0^{C_k})^2 + \sum_j \sum_{p=0}^{s_j-1} (\rho^{2s-s_j+p}\,|u_j|_p^{C_k})^2\right\}.$$

Poiché in C_1 è $\zeta \geq \rho^{2s}(k^2-1)^s$, si ha:

$$|u_j|_{s_j}^{C_1} \leq \rho^{-2s}(k^2-1)^{-s}\,|v_j|_{s_j}^{C_k} + K\left\{\sum_{p=0}^{s_j-1} \rho^{-2s}\,\rho^{2s+p-s_j}\,|u_j|_p^{C_k}\right\}$$

e quindi, per la (2.10) e la (2.2) scritta per ν, si ottiene:

$$(2.11)\qquad \sum_j |u_j|^{C_1}_{s_j} \leq \varepsilon \sum_j |u_j|^{C_k}_{s_j} + K \left\{ \sum_i \rho^{s_i-|\alpha_i|} |g_i^{\alpha_i}|^{C_k}_{o} + \sum_j \sum_{p=0}^{s_j-1} \rho^{p-s_j} |u_j|^{C_k}_{p} \right\}.$$

Essendo $\rho^{p-s_j} |u_j|^{C_k}_{p} = 0$ $(\rho^{\lambda-1+n/2} [u_j]^{C_k}_{s_j-1,\lambda})$, in quanto u_j ha dati nulli su γ, si ottiene la (2.9).

In modo analogo si dimostra:

LEMMA 2.4. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* K, *dipendente da* ε, k *e dal massimo modulo dei coefficienti, tale che, se* $u \equiv (u_j)$ *è soluzione di* (2.8) *in* Γ, *con* $u_j \in H^{s_j}(\Gamma) \cap C^{s_j-1,\lambda}$, *e se* $g_i^{\alpha_i} \in L^2(\Gamma)$, *è*:

$$(2.12)\qquad \sum_j |u_j|^{\Gamma_1}_{s_j} \leq \varepsilon \sum_j |u_j|^{\Gamma_k}_{s_j} + K \left\{ \sum_i \rho^{s_i-|\alpha_i|} |g_i^{\alpha_i}|^{\Gamma_k}_{o} + \rho^{\lambda-1+n/2} \sum_j [u_j]^{\Gamma_k}_{s_j-1,\lambda} \right\}.$$

Le funzioni $z_j = u_j - P_j$, dove P_j è il polinomio osculatore di u_j di punto iniziale x_o e di grado $s_j - 1$, danno luogo ad una soluzione della (2.8): si ottiene allora la (2.11) con z_j al posto di u_j; z_j è nulla con le sue derivate fino a quelle di ordine $s_j - 1$ in x_o: da ciò con considerazioni analoghe a quelle del lemma precedente, si perviene all'asserto.

OSSERVAZIONE. Se, invece della (2.8), consideriamo la più generale equazione

$$B_o[\tau, u] = F[\tau, g] \qquad \forall \tau$$

dove

$$F[\tau, g] = \sum_i \sum_{|\alpha_i|=0}^{s_i} \int \partial^{\alpha_i} \tau_i \, g_i^{\alpha_i} \, dx ,$$

risultati analoghi ai lemmi 2.3 e 2.4 continuano a sussistere: basta sostituire, nelle (2.9) e (2.12), al termine $\sum_i \rho^{s_i-|\alpha_i|} |g_i^{\alpha_i}|_o$ una somma di termini dello stesso tipo relativi alle diverse $g_i^{\alpha_i}$.

3. - UN LEMMA DI REGOLARITÀ.

Consideriamo l'equazione a coefficienti variabili, nel dominio limitato T:

$$(3.1)\qquad B[\tau, u] = (\tau, g) \qquad \forall \tau \in [C_o^\infty(T)]^N .$$

Sussiste il seguente lemma:

LEMMA 3.1. *Sia* A *un dominio contenuto in* $T \in A^{(2s+r+1)}$, *il quale o sia interno a* T *oppure abbia in comune con* ∂T *una ipersuperficie* γ. *Sia* $u \equiv (u_j)$, *con* $u_j \in H^{s_j}(A)$, *una soluzione della* (3.1) *in* A, *con* $g_i \in H^{s-s_i+r}$; *supponiamo che, nel caso in cui* $\partial A \cap \partial T \neq \emptyset$, u_j *sia approssimabile in* $H^{s_j}(I)$, *essendo* I *un intorno di* γ *su* A, *mediante funzioni di classe* $C_0^\infty(A)$. *Se* $a_{\alpha\beta}^{ij} \in C^{p_i^\alpha + r}$, *essendo* $p_i^\alpha = \max[s - s_i, |\alpha|]$, *allora, per ogni dominio* $B \subset A$ *che abbia distanza positiva d da* $\partial A - \gamma$, *si ha che* $u_j \in H^{s+s_j+r}(B)$ *ed inoltre*

$$(3.2) \qquad \sum_j \sum_{h=0}^{s+s_j+r} |u_j|_h^B \leq K \left\{ \sum_j |u_j|_0^A + \sum_i |g_i|_{s-s_i}^A + \sum_i |g_i|_{s-s_i+r}^A \right\}$$

dove K *è una costante che, una volta fissato un limite inferiore per d, dipende dai massimi moduli delle derivate delle* $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ *fino a quelle di ordine* $|\alpha| + r$.

Diamo solo una traccia della dimostrazione, in quanto simile a quella del lemma 8.1 di [8].

Cominciamo col supporre $r = 0$ e $u_j \in H^{s+s_j}(B_1)$, dove B_1 è tale che

$$B \subset B_1 - (\partial B_1 - \gamma) \subset B_1 \subset A - (\partial A - \gamma)$$

e inoltre la distanza di $\partial B_1 - \gamma$ da B sia maggiore di $d/2$.

Sia $T_{\bar\rho}$ l'insieme di punti di T aventi da ∂T distanza non superiore a $\bar\rho$; se $\bar\rho$ è sufficientemente piccolo, per ogni $x \in T_{\bar\rho}$ è definito in modo univoco il punto di ∂T avente distanza minima da x: dette $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ le coordinate di tale punto in una rappresentazione locale di ∂T e posto $\xi_n = 4\,d(x)$, viene ad essere definita una trasformazione C^{2s+1} — differenziabili $\xi = \xi(x)$, la quale trasforma localmente $T_{\bar\rho}$ in un dominio del semispazio $\xi_n \geq 0$.

Se $x_0 \in T_{\bar\rho} \cap \{B_1 - (\partial B_1 - \gamma)\}$ sia $C_1 = T \cap \Gamma(x_0, \rho)$ e $C_k = T \cap \Gamma(x_0, k\rho)$, con $\rho \leq \bar\rho$ e tale che $C_1 \subset C_k \subset B_1 - (\partial B_1 - \gamma)$. La trasformazione $\xi = \xi(x)$ muta C_1 e C_k in due domini $\bar C_1$ e $\bar C_k$ del semispazio $\xi_n \geq 0$: si può dimostrare (cfr. (8.5) di [8]) che per un opportuno valore di $k \geq 2$, esiste una costante μ tale che, posto, con $\xi_0 = \xi(x_0)$,

$$C_1' = \bar C_k \cap \Gamma(\xi_0, \mu\rho) \qquad C_2' = \bar C_k \cap \Gamma(\xi_0, 2\mu\rho)$$

si abbia:

$$(3.3) \qquad \bar C_1 \subseteq C_1' \subseteq C_2' \subseteq \bar C_k .$$

Si osservi che $u = (u_j)$ è soluzione del sistema

$$(3.4) \qquad \sum_j \ell^{ij}[u_j] = \sum_j \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \sum_{|\beta|=0}^{s_j} \partial^\alpha (a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\, \partial^\beta u_j) = g_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

e che, in seguito alla trasformazione $\xi = \xi(x)$, tale sistema diventa:

$$(3.4)' \qquad \sum_j \bar{\ell}^{ij}[\bar{u}_j] = \sum_j \sum_{|\delta|=0}^{s_i+s_j} \bar{a}_\delta^{ij}\, \bar{\partial}^\delta \bar{u}_j = \bar{g}_i \qquad i = 1, \ldots, N,$$

ove $\bar{\partial}^\delta$ indica derivazione rispetto alla variabile ξ; i coefficienti $\bar{a}_{\alpha\beta}^{ij}$ sono continui: di più, per $|\delta| = s_i + s_j$, $\bar{a}_\delta^{ij}$, che risulta combinazione dei soli $a_{\alpha\beta}^{ij}$ con $|\alpha| = s_i$ e $|\beta| = s_j$, è di classe C^1.

Scriviamo il sistema (3.4)′ sotto la forma:

$$\sum_j \left(\sum_{|\delta|=s_i+s_j} \bar{a}_\delta^{ij}(\xi_0)\, \bar{\partial}^\delta \bar{u}_j \right) = \sum_j \left(\sum_{|\delta|=s_i+s_j} (\bar{a}_\delta^{ij}(\xi_0) - \bar{a}_\delta^{ij}(\xi))\, \bar{\partial}^\delta \bar{u}_j \right) -$$

$$- \sum_j \left(\sum_{|\delta|=0}^{s_i+s_j-1} \bar{a}_\delta^{ij}\, \bar{\partial}^\delta \bar{u}_j \right) + \bar{g}_i .$$

Applicando il lemma 2.2 si ottiene:

$$\rho^{2s} \sum_j |\bar{u}_j|^{C_1'}_{s+s_j} \leq \rho^{2s}(\varepsilon + \bar{k}\rho) \sum_j |\bar{u}_j|^{C_2'}_{s+s_j} +$$

$$+ \bar{k} \left\{ \sum_j |\bar{u}_j|^{C_2'}_0 + \rho^{2s} \sum_{i,j} \sum_{h=0}^{s_i+s_j-1} |\bar{u}_j|^{C_2'}_{s-s_i+h} + \sum_i \rho^{2s} |\bar{g}_i|^{C_2'}_{s-s_i} \right\} .$$

Ritornando alla variabile x e applicando la (2.6), si ha:

$$(3.5) \qquad \rho^{2s} \sum_j |u_j|^{C_1}_{s+s_j} \leq (k_1 \varepsilon + k_2 \rho)\, \rho^{2s} \sum_j |u_j|^{C_k}_{s+s_j} +$$

$$+ k_2 \left\{ \sum_j |u_j|^{A}_0 + \sum_i |g_i|^{A}_{s-s_i} \right\} .$$

Una formula analoga alla (3.5) sussiste, ovviamente, quando $x_0 \notin T_{\bar{\rho}}$: basta infatti applicare il ragionamento precedente, con il lemma 2.1 in luogo del lemma 2.2, direttamente al sistema (3.4). Per ogni $x_0 \in B_1 - (\partial B_1 - \gamma)$, un C_k, di centro x_0, può essere ricoperto

da un numero finito ν, indipendente da x_0, di C_l aventi centro in C_k; si ha allora:

$$\sup_{x_0 \in B_l - (\partial B_l - \gamma)} \left(\rho^{2s} \sum_j | u_j |^{C_k}_{s+s_j} \right) \leq \nu' \sup_{x_0 \in B_l - (\partial B_l - \gamma)} \left(\rho^{2s} \sum_j | u_j |^{C_l}_{s+s_j} \right) ;$$

da quest'ultima formula e dalla (3.5) si ricava

$$\rho^{2s} \sum_j | u_j |^{C_l}_{s+s_j} \leq K \left\{ \sum_j | u_j |^{A}_{0} + \sum_i | g_i |^{A}_{s-s_i} \right\}$$

e quindi la (3.2), essendo B ricopribile mediante un numero finito di C_l.

Bisogna ora far vedere che $u_j \in H^{s+s_j}(B_l)$. Consideriamo una successione di operatori $\ell^{ij}_h[\,\cdot\,]$, i cui coefficienti siano polinomi, $a^{ij}_{\alpha\beta}(x;h)$, convergenti in $C^{|\alpha|}(T)$ ad $a^{ij}_{\alpha\beta}(x)$; sia, inoltre, $\{g_i^h\}$ una successione di polinomi convergente a g_i in $L^2(T)$. Per un risultato di L. Nirenberg [12], se ρ è sufficientemente piccolo, esiste, in ogni C_k, una soluzione (u_i^h) del problema:

$$\sum_j \ell^{ij}_h [u_j^h] = g_i^h \qquad u_j^h - u_j \in H_0^{s_j}(C_k) .$$

Si dimostra che $\{u_i^h\}$ converge ad u_j in $H^{s_j}(C_k)$. D'altra parte, dalla (3.2) scritta per (u_i^h), si ottiene che le norme $| u_i^h |^{C_l}_{s+s_j}$ sono equilimitate al variare di h; $\{u_i^h\}$ è quindi compatta in $H^{s+s_j}(C_l)$ rispetto alla convergenza debole: ciò comporta che $u_j \in H^{s+s_j}(C_l)$ e quindi l'asserto.

Notiamo infine che il caso $r > 0$ può essere dimostrato per induzione su r.

Passiamo ora a dimostrare il seguente lemma.

LEMMA 3.2. *Sussistano le stesse ipotesi del lemma* 3.1 *con* $C_1 = T \cap \Gamma(x_0, \rho)$ *al posto di* B *e* $C_2 = T \cap \Gamma(x_0, 2\rho)$ *al posto di* A. *Detto* p *un intero, con* $p \geq \frac{n}{2} + 1$, *si ha:*

$$(3.6) \qquad \sum_j \sum_{h=0}^{s+s_j+r-p} (\rho^{s-s_j+h} [u_j]^{C_l}_h + \rho^{s-s_j+h+\lambda} [u_j]^{C_l}_{h,\lambda}) \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j \rho^{s-s_j-n/2} | u_j |^{C_2}_{0} + \sum_i \rho^{2s-n/2} | g_i |^{C_2}_{s-s_i} + \sum_i \rho^{2s+r-n/2} | g_i |^{C_2}_{s-s_i+r} \right\}$$

per ogni ρ *con* $0 < \rho \leq \rho_0$; *la costante* K *dipende da* ρ_0 *ma non da* ρ.

Con un cambiamento di variabili $x = \rho\bar{x}$ il dominio T si trasforma in un dominio $\bar{T}$ la cui frontiera, localmente, ha equazioni:

$$\bar{x}\,(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_{n-1}) = \frac{1}{\rho}\, x\,(\rho\bar{\theta}_1, \ldots, \rho\bar{\theta}_{n-1})\ ;$$

le derivate di tali funzioni, e quindi le derivate della trasformazione $\xi = \xi(x)$, introdotta nella dimostrazione del lemma precedente, sono limitate se $0 < \rho \leq \rho_0$. La funzione u_j è, per il lemma 3.1 di classe $H^{s+s_j+r}(C_k)$, quindi è soluzione in C_k del sistema (3.4), il quale, in seguito al cambiamento di variabili $x = \rho\bar{x}$ si trasforma in uno del tipo:

$$(3.7)\quad \sum_j \sum_{|\alpha|=0}^{s_i+s_j} \rho^{s_i+s_j-|\alpha|}\, \bar{a}_\alpha^{ij}\, \bar{\partial}^\alpha\,(\rho^{s-s_j}\,\bar{u}_j) = \rho^{s+s_i}\,\bar{g}_i \qquad i = 1, \ldots, N,$$

i cui coefficienti si mantengono limitati per $0 < \rho \leq \rho_0$.

Applichiamo il lemma 3.1 alla soluzione $(\rho^{s-s_j}\,\bar{u}_j)$ del sistema (3.7):

$$\sum_j \sum_{h=0}^{s+s_j+r} |\,\rho^{s-s_j}\,\bar{u}_j\,|_h^{\bar{C}_1} \leq K \left\{ \sum_j |\,\rho^{s-s_j}\,\bar{u}_j\,|_0^{\bar{C}_2} + \sum_i |\,\rho^{s+s_i}\,\bar{g}_i\,|_{s-s_i}^{\bar{C}_2} + \right.$$

$$\left. + \sum_i |\,\rho^{s+s_i}\,\bar{g}_i\,|_{s-s_i+r}^{\bar{C}_2} \right\}$$

con K indipendente da ρ, almeno per $0 < \rho \leq \rho_0$.

Dalla precedente formula e dal teorema di Sobolev

$$\sum_j \sum_{h=0}^{s+s_j+r-p} ([\rho^{s-s_j}\,\bar{u}_j]_h^{\bar{C}_1} + [\rho^{s-s_j}\,\bar{u}_j]_{h,\lambda}^{\bar{C}_1}) \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j |\,\rho^{s-s_j}\,\bar{u}_j\,|_0^{\bar{C}_2} + \sum_i |\,\rho^{s+s_i}\,\bar{g}_i\,|_{s-s_i}^{\bar{C}_2} + \sum_i |\,\rho^{s+s_i}\,\bar{g}_i\,|_{s-s_i+r}^{\bar{C}_2} \right\}.$$

Ritornando alla variabile x, si ottiene la (3.6).

Notiamo che nel caso in cui tale lemma verrà applicato (cfr. lemma 4.2) la costante K è indipendente da ρ, qualunque valore ρ assuma.

4. - Formule di maggiorazione.

In questo numero dimostreremo alcuni lemmi relativi all'equazione (1.1), definita nel dominio non limitato Ω, per la cui dimostra-

zione utilizzeremo procedimenti analoghi a quelli esposti nel n. 2 di [6] e [7] e relativi al caso di una sola equazione.

LEMMA 4.1. *Per ogni* σ *reale, esiste un* $\varepsilon_0 > 0$, *dipendente da* σ *ed* M, *tale che, se* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *e* $0 < \eta_\varepsilon' \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$, *e se* $u \equiv (u_j)$ *è soluzione del sistema* (1.1) *per ogni* $\tau \equiv (\tau_i) \in [C_0^\infty(\Omega_R)]^N$, *con* $u_j \in H_0^{s_j}(\Omega_R) \cap C^{s_j-1,\lambda}(\Omega_R)$, *si ha*:

$$(4.1)\qquad \sup_{\substack{x_0 \in \Omega_R \\ 0 < \eta_\varepsilon \leq \eta_\varepsilon'}} |x_0|^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \eta_\varepsilon^{-n/2+1-\lambda} \sum_j |u_j|^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_{s_j} \leq$$

$$\leq K \left\{ \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon')}_{s_j-1,\lambda} + \right.$$

$$\left. + \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} |x_0|^{\gamma(s-s_j+h)+\sigma} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon')}_h + T_{\sigma,R,\eta_\varepsilon'} \right\}$$

con K *dipendente da* ε_0, σ, M *ma non da* R.

Sia x_0 un punto di Ω_R; posto:

$$g_i^\alpha(x) = \sum_j \sum_{|\beta|=s_j} (a^{ij}_{\alpha\beta}(x_0) - a^{ij}_{\alpha\beta}(x)) \partial^\beta u_j - \sum_j \sum_{|\beta|=0}^{s_i-1} a^{ij}_{\alpha\beta}(x) \partial^\beta u_j$$

$$(4.2)\qquad \text{se } |\alpha| = s_i$$

$$g_i^\alpha(x) = -\sum_j \sum_{|\beta|=0}^{s_j} a^{ij}_{\alpha\beta}(x) \partial^\beta u_j \qquad \text{se } |\alpha| < s_i$$

mediante l'artificio di Korn, l'equazione (1.1) può scriversi sotto la forma:

$$(4.3)\qquad B_{x_0}[\tau, u] = F[\tau, f + g] \qquad \forall\ \tau \in [C_0^\infty(\Omega_R)]^N$$

essendo

$$B_{x_0}[\tau, u] = \sum_{i,j} \sum_{\substack{|\alpha|=s_i \\ |\beta|=s_j}} (-1)^{s_i} \int_{\Omega_R} a^{ij}_{\alpha\beta}(x_0) \partial^\alpha \tau_i \partial^\beta u_j \, dx .$$

Applichiamo alla (4.3), a seconda dei casi, il lemma 2.3 ovvero il lemma 2.4; ricordando l'espressione (4.2) delle g_i^α, sfruttando le

(1.3) e (1.6), inoltre prendendo ε sufficientemente piccolo, in dipendenza di ε', si ha, per ogni $x_0 \in \Omega_R$ e per ogni η_l con $0 < \eta_l \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$ [2]:

$$(4.4) \qquad | x_0 |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \eta_l^{-n/2+1-\lambda} \sum_j | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0,\eta/k)} \leq$$

$$\leq \varepsilon' | x_0 |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \eta_l^{-n/2+1-\lambda} \sum_j | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0,\eta)} +$$

$$+ K(\varepsilon') \left\{ | x_0 |^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]_{s_j-1,\lambda}^{\Delta_R(x_0,\eta)} + \right.$$

$$\left. + \sum_j \sum_{q=0}^{s_j-1} | x_0 |^{\gamma(q-s_j+s)+\sigma} [u_j]_q^{\Delta_R(x_0,\eta)} + T_{\sigma,R,\eta} \right\} .$$

Poiché, per ogni $x_0 \in \Omega_R$, $\Delta_R(x_0, \eta_l)$ può essere ricoperto da un numero finito $\bar{\nu}$, indipendente da x_0, di $\Delta_R(x_0', \eta_l/k)$ con $x_0' \in \Delta_R(x_0, \eta_l)$, utilizzando la (1.6), si ottiene:

$$| x_0 |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0,\eta)} \leq | x_0 |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \sum_{r=1}^{\bar{\nu}} | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0',\eta/k)} \leq$$

$$\leq K \sum_{r=1}^{\bar{\nu}} | x_0^r |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0',\eta/k)} ,$$

da cui

$$(4.5) \qquad \sup_{x_0 \in \Omega_R} | x_0 |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \sum_j | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0,\eta)} \leq$$

$$\leq K \sup_{x_0 \in \Omega_R} | x_0 |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \sum_j | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0,\eta/k)} .$$

Dalle (4.4) e (4.5), fissato un valore ε_0' di ε' sufficientemente piccolo (e quindi per $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, con ε_0 opportuno dipendente da ε_0') si ha, per ogni η_l con $0 < \eta_l \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$:

$$\sup_{x_0 \in \Omega_R} | x_0 |^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \eta_l^{-n/2+1-\lambda} \sum_j | u_j |_{s_j}^{\Delta_R(x_0,\eta/k)} \leq$$

$$\leq K(\varepsilon_0') \left\{ \sup_{x_0 \in \Omega_R} | x_0 |^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]_{s_j-1,\lambda}^{\Delta_R(x_0,\eta)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{x_0 \in \Omega_R} \sum_j \sum_{q=0}^{s_j-1} | x_0 |^{\gamma(q-s_j+s)+\sigma} [u_j]_q^{\Delta_R(x_0,\eta)} + T_{\sigma,R,\eta} \right\} ;$$

fissato ora $\eta_{l\varepsilon}'$ con $0 < \eta_{l\varepsilon}' \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$, passando al superiore per $0 < \eta_l \leq \eta_{l\varepsilon}'$, si ottiene la (4.1).

[2] Ricordiamo (cfr. n. 1) che in $\Delta_R(x_0, \tilde{\eta}_\varepsilon)$ l'oscillazione dei coefficienti dei termini di grado massimo non supera ε.

Premettiamo alcune considerazioni necessarie per la dimostrazione del lemma successivo.

Posto, con $x_0 \in \Omega_R$:

$$\ell_0^{ij}(\partial) = \sum_{|\alpha|=s_i} \sum_{|\beta|=s_j} a_{\alpha\beta}^{ij}(x_0)\, \partial^{\alpha+\beta},$$

sia $\Gamma(\partial) = \det(\ell_0^{ij}(\partial))$ e $(\Gamma^{ij}(\partial))$ la matrice aggiunta di $(\ell_0^{ij}(\partial))$; $\Gamma(\partial)$ è un operatore ellittico a coefficienti costanti di ordine $2m$, che ha una soluzione fondamentale del tipo (cfr. F. JOHN [5])

$$F_0(x, y) = |x - y|^{2m-n} \psi\left(\frac{x - y}{|x - y|}\right) + P(x - y) \lg |x - y|,$$

dove $P(z)$ è un polinomio omogeneo di grado $2m - n$ se n è pari e $2m \geq n$, nullo negli altri casi; $\psi(z)$ è una funzione analitica su $|z| = 1$.

Sia A un dominio misurabile e limitato con diametro ρ; se $v \in H^{(0,2\nu)}(A)$ con $\nu = \lambda + \frac{n}{2} - 1$ e se

$$\overline{\omega}(x;\ v;\ A) = \int_A F_0(x, y)\, v(y)\, dy - \lg \rho \int_A P(x - y)\, v(y)\, dy$$

si ha (cfr. n. 2 di [7])

$$(4.6) \qquad \sum_{h=0}^{2m-1} (\rho^h [\overline{\omega}]_h^A + \rho^{h+\lambda} [\overline{\omega}]_{h,\lambda}^A) \leq K \rho^{2m-1+\lambda} |v|_{(0,2\nu)}^A$$

con K indipendente da ρ.

Infine, posto $v_i^\alpha = f_i^\alpha + g_i^\alpha$, si dimostra che il vettore $t \equiv (t_j)$ con

$$(4.7) \qquad t_j = \sum_i \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \partial^\alpha \Gamma^{ij} [\overline{\omega}(x;\ v_i^\alpha;\ A)]$$

è soluzione in A dell'equazione (4.3).

Siamo in grado ora di dimostrare il seguente lemma:

LEMMA 4.2. *Supponiamo* $\overline{\Omega} \in A^{(2s+r+1)}$ *con* r *intero non negativo e* $\geq \frac{n}{2} - s$; *per ogni* σ *reale e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\eta_\varepsilon'' \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$, *dipendente da* σ, ε, M, *tale che, fissato* η_1 *con* $0 < \eta_1 \leq \eta_\varepsilon''$, *se* $u \equiv (u_j)$

è soluzione del sistema (1.1) *per ogni* $\tau \equiv (\tau_i) \in [C_0^\infty(\Omega_R)]^N$, *con* $u_j \in H_0^{s_j}(\Omega_R) \cap H^{(s_j, 2\nu)}(\Omega_R)$ *e* $\nu = \lambda + \frac{n}{2} - 1$, *si ha*:

$$(4.8)\qquad \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta)}_{s_j-1,\lambda} \leq$$

$$\leq \varepsilon \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j |u_j|^{\Delta_R(x_0,\eta/2k)}_{(s_j,2\nu)} +$$

$$+ K \left\{ \sup_{x_0 \in \Omega_R} \sum_j \sum_{q=0}^{s_j-1} |x_0|^{\gamma(s-s_j+q)+\sigma} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta)}_q + T_{\sigma,R,\eta} \right\}$$

dove K *dipende da* σ, M *ed* η *ma non da* R.

Supponiamo $x_0 \in \Omega_R - \Sigma_{\frac{3R}{4}}$; sia $\xi = \xi(x)$ la trasformazione C^{s+1} – differenziabile, analoga a quella introdotta nel n. 3, la quale trasforma $\Delta_R(x_0, \eta_i/k)$ e $\Delta_R(x_0, \eta_i)$, rispettivamente, nei domini $\Delta_1(\eta)$ e $\Delta_2(\eta)$ del semispazio $\xi_n \geq 0$.

Applichiamo l'artificio di Korn all'equazione che si ottiene dalla (1.1) in seguito alla trasformazione $\xi = \xi(x)$:

$$(4.9)\qquad \bar{B}_{x_0}[\bar{\tau}, \bar{u}] = \bar{F}[\bar{\tau}, \bar{f} + \bar{g}].$$

Sia $\bar{t} \equiv (\bar{t}_j)$ la soluzione della (4.9) costruita in modo analogo alla (4.7). Poniamo:

$$\bar{u}_j - \bar{t}_j = \bar{y}_j + \bar{z}_j$$

dove

$$\bar{B}_{x_0}[\bar{\tau}, \bar{y}] = 0 \qquad \forall\, \bar{\tau} \in [C_0^\infty(\Delta_2(\eta_i))]^N$$

$$\frac{\partial^b \bar{y}_j}{\partial \xi_n^b} = -\frac{\partial^b \bar{t}_j'}{\partial \xi_n^b} \qquad b = 0, \ldots, s_j - 1$$

con $\bar{t}_j' = \zeta \cdot \bar{t}_j$, ζ essendo una funzione C^∞-differenziabile, la quale (cfr. (3.3)) è uguale a 1 su C_2' e nulla nella parte di semispazio $\xi_n \geq 0$ esterna a $\Delta_2(\eta_i)$, e

$$\bar{B}_{x_0}[\bar{\tau}, \bar{z}] = 0 \qquad \forall\, \bar{\tau} \in [C_0^\infty(\Delta_2(\eta_i))]^N$$

$$\frac{\partial^b \bar{z}_j}{\partial \xi_n^b} = 0 \qquad b = 0, \ldots, s_j - 1 \quad ;$$

$\bar{y} \equiv (\bar{y}_j)$ sia la soluzione in un semispazio data in [3]: tenendo pre-

sente l'espressione delle $\bar{y}_j$ (cfr. (4.22) di [3]) e il teorema 5.1 di [3] è:

$$[\bar{y}_j]^{C_1'}_{s_j-1,\lambda} \leq H \sum_{p=1}^{N} \left(\sum_{q=0}^{s_p-1} [\bar{t}_p]^{\Delta_2(\eta)}_q + [\bar{t}_p]^{\Delta_2(\eta)}_{s_q-1,\lambda} \right)$$

con H dipendente da η_i; con il solito ragionamento, ricorrendo alla omotetia $x = \rho\bar{x}$, si ha:

$$(4.10) \qquad (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-1+\lambda} \sum_j [\bar{y}_j]^{C_1'}_{s_j-1,\lambda} \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j \left(\sum_{h=0}^{s_j-1} (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j+h} [\bar{t}_j]^{\Delta_2(\eta)}_h + (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-1+\lambda} [\bar{t}_j]^{\Delta_2(\eta)}_{s_j-1,\lambda} \right) \right\} .$$

A $\bar{z} \equiv (\bar{z}_j)$ applichiamo il lemma 3.2, ove nel nostro caso r può essere fissato arbitrariamente grande; si ha:

$$(4.11) \qquad (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-1+\lambda} \sum_j [\bar{z}_j]^{C_1'}_{s_j-1,\lambda} \leq K \left\{ \sum_j (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j-n/2} \mid \bar{z}_j \mid^{C_2'}_0 \right\} \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j} [\bar{z}_j]^{C_2'}_0 \right\} .$$

Inoltre è:

$$(4.12) \qquad [\bar{z}_j]^{C_2'}_0 \leq [\bar{t}_j]^{C_2'}_0 + [\bar{u}_j]^{C_2'}_0 + [\bar{y}_j]^{C_2'}_0$$

e, tenendo presente i dati al bordo di $\bar{y}$ nonché la (4.10),

$$(4.13) \qquad \sum_j (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j} [\bar{y}_j]^{C_2'}_0 \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j \left(\sum_{h=0}^{s_j-1} (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j+h} [\bar{t}_j]^{C_2'}_h + (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-1+\lambda} [\bar{y}_j]^{C_2'}_{s_j-1,\lambda} \right) \right\} \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j \left(\sum_{h=0}^{s_j-1} (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j+h} [\bar{t}_j]^{\Delta_2(\eta)}_h + (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-1+\lambda} [\bar{t}_j]^{\Delta_2(\eta)}_{s_j-1,\lambda} \right) \right\} .$$

Da (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13) si ottiene:

$$(4.14) \qquad (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s+\lambda-1} \sum_j [\bar{u}_j]^{C_1'}_{s_j-1,\lambda} \leq K \left\{ \sum_j (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j} [\bar{u}_j]^{C_2'}_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_j \left(\sum_{h=0}^{s_j-1} (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j+h} [\bar{t}_j]^{\Delta_2(\eta)}_h + (\eta_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-1+\lambda} [\bar{t}_j]^{\Delta_2(\eta)}_{s_j-1,\lambda} \right) \right\} .$$

Ricordando l'espressione (4.7) delle $\bar{t}_j$ e utilizzando la (4.6), si ha:

$$(4.15)\qquad \sum_j \left(\sum_{h=0}^{s_j-1} (\gamma_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-s_j+h} \, [\bar{t}_j]_h^{\Delta_2(\eta)} + (\gamma_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s-1+\lambda} \, [\bar{t}_j]_{s_j-1,\lambda}^{\Delta_2(\eta)} \right) \leq$$

$$\leq K \sum_i \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} (\gamma_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{s+s_i-|\alpha|+1-\lambda} \mid \bar{v}_i^\alpha \mid_{(0,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} .$$

Essendo, per le (4.2)

$$\mid \bar{v}_i^\alpha \mid_{(0,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} \leq \varepsilon \sum_j \mid \bar{u}_j \mid_{(s_j,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} +$$

$$+ K \left\{ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} \mid x_0 \mid^{\gamma(h-s_j)} \mid \bar{u}_j \mid_{(h,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} + (\gamma_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{1-\lambda} \, M_{i,R,s_i} \right\} \qquad \text{se} \quad |\alpha| = s_i$$

$$\mid \bar{v}_i^\alpha \mid_{(0,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} \leq K \left\{ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j} \mid x_0 \mid^{\gamma(|\alpha|+h-s_i-s_j)} \mid \bar{u}_j \mid_{(h,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} + \right.$$

$$\left. + (\gamma_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{1-\lambda} \, M_{i,R,|\alpha|} \right\} \qquad \text{se} \quad |\alpha| < s_i$$

e

$$\mid \bar{u}_j \mid_{(h,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} \leq K \left\{ (\gamma_i \mid x_0 \mid^\gamma)^{1-\lambda} \, [\bar{u}_j]_h^{\Delta_2(\eta)} \right\} ,$$

dalle (4.14) e (4.15), per $\gamma_i \leq \gamma_{i\varepsilon}''$ con η_ε'' opportuno e $\gamma_{i\varepsilon}'' \leq \tilde{\eta}_\varepsilon$, si ricava:

$$\mid x_0 \mid^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [\bar{u}_j]_{s_j-1,\lambda}^{C_1'} \leq \varepsilon \mid x_0 \mid^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j \mid \bar{u}_j \mid_{(s_j,2\nu)}^{\Delta_2(\eta)} +$$

$$+ K \left\{ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} \mid x_0 \mid^{\gamma(s-s_j+h)+\sigma} [\bar{u}_j]_h^{\Delta_2(\eta)} + \sum_j \gamma_i^{-(s_j+\lambda-1)} \mid x_0 \mid^{\gamma(s-s_j)+\sigma} [\bar{u}_j]_0^{C_2'} + \right.$$

$$\left. + \sum_i \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \gamma_i^{s_i-|\alpha|+1} \mid x_0 \mid^{\gamma(s+s_i-|\alpha|)+\sigma} M_{i,R,|\alpha|} \right\} .$$

Ritornando alla variabile x e applicando un procedimento analogo per $x_0 \in \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$ e $x_0 \in \Omega_{\frac{3R}{4}} - \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$, si ottiene, fissato un valore di γ_i con $0 < \gamma_i \leq \gamma_{i\varepsilon}''$, per ogni $x_0 \in \Omega_R$:

$$(4.16)\qquad \mid x_0 \mid^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]_{s_j-1,\lambda}^{\Delta_R(x_0,\eta/k)} \leq \varepsilon \mid x_0 \mid^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j \mid u_j \mid_{(s_j,2\nu)}^{\Delta_R(x_0,\eta)} +$$

$$+ K(\gamma_i) \left\{ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} \mid x_0 \mid^{\gamma(s-s_j+h)+\sigma} [u_j]_h^{\Delta_R(x_0,\eta)} + T_{\sigma,R,\eta} \right\} .$$

Poiché

$$[u_j]^{\Delta_R(x_o,\eta)}_{s_j-1,\lambda} \leq \sup_{y\in\Delta_R(x_o,\eta)} [u_j]^{\Delta_R(y,\eta/2k^2)}_{s_j-1,\lambda} + K\eta^{-\lambda} |x_o|^{-\gamma\lambda} [u_j]^{\Delta_R(x_o,\eta)}_{s_j-1},$$

si ha

$$\sup_{x_o\in\Omega_R} |x_o|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_o,\eta)}_{s_j-1,\lambda} \leq$$

$$\leq K \left\{ \sup_{x_o\in\Omega_R} |x_o|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_o,\eta/2k^2)}_{s_j-1,\lambda} + \right.$$

$$\left. + \eta^{-\lambda} \sup_{x_o\in\Omega_R} |x_o|^{\gamma(s-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_o,\eta)}_{s_j-1} \right\};$$

da quest'ultima relazione e dalla (4.16) si ricava l'asserto.

Dimostriamo il seguente lemma:

LEMMA 4.3. *Per ogni* σ *reale esiste un* $\varepsilon_1 (\leq \varepsilon_o)$, *dipendente da* σ *ed* M, *tale che, per* $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ *e se* $u \equiv (u_j)$ *è soluzione del sistema* (1.1) *per ogni* $\tau \equiv (\tau_i) \in [C_o^\infty(\Omega_R)]^N$, *con* $u_j \in H_o^{s_j}(\Omega_R) \cap H^{(s_j,2\nu)}(\Omega_R)$, *si ha*:

$$\sup_{x_o\in\Omega_R} |x_o|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_o,\eta_\varepsilon)}_{s_j-1,\lambda} + \tag{4.17}$$

$$+ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} \sup_{x_o\in\Omega_R} |x_o|^{\gamma(s-s_j+h)+\sigma} [u_j]^{\Delta_R(x_o,\eta_\varepsilon)}_h \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j \sup_{x_o\in\Omega_R} |x_o|^{\gamma(s-s_j)+\sigma-\gamma n/2} |u_j|^{\Delta_R(x_o,\eta_\varepsilon)}_o + T_{\sigma,R,\eta_\varepsilon} \right\}$$

essendo $\eta_\varepsilon = \inf [\eta_\varepsilon', \eta_\varepsilon'']$; K *dipende da* η_ε, σ, M *ma non da* R.

Essendo

$$|u_j|^{\Delta_R(x_o,\eta_\varepsilon/2)}_{(s_j,2\nu)} \leq K \sup_{\substack{0<\eta\leq\eta_\varepsilon \\ z_o\in\Delta_R(x_o,\eta_\varepsilon/2)}} (\eta |z_o|^\gamma)^{-\nu} |u_j|^{\Delta_R(z_o,\eta)}_{s_j}$$

si ha:

$$\sup_{x_o\in\Omega_R} |x_o|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j |u_j|^{\Delta_R(x_o,\eta_\varepsilon/2)}_{(s_j,2\nu)} \leq$$

$$\leq K \left\{ \sup_{\substack{x_o\in\Omega_R \\ 0<\eta\leq\eta_\varepsilon}} \eta^{-\nu} |x_o|^{\gamma(s-n/2)+\sigma} \sum_j |u_j|^{\Delta_R(x_o,\eta)}_{s_j} \right\}.$$

Dalla precedente relazione e dalle (4.1) e (4.8), prendendo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ con ε_1 opportuno e $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, si ottiene:

$$(4.18) \qquad \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_{s_j-1,\lambda} \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s-s_j+h)+\sigma} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_h + T_{\sigma,R,\eta_\varepsilon} \right\}.$$

Osservato che, come è facile verificare

$$[u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_h = 0 \left(\left([u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_{s_j-1,\lambda} \right)^{\frac{h}{s_j-1+\lambda}} \left([u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_0 \right)^{\frac{s_j-h+\lambda-1}{s_j-1+\lambda}} + \right.$$

$$\left. + (\eta_\varepsilon |x_0|^\gamma)^{-h} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_0 \right),$$

si ottiene dalla (4.18):

$$(4.19) \qquad \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_{s_j-1,\lambda} +$$

$$+ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s-s_j+h)+\sigma} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_h \leq$$

$$\leq K \left\{ \sum_j \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s-s_j)+\sigma} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_0 + T_{\sigma,R,\eta_\varepsilon} \right\}.$$

Poiché è (cfr. [7], lemma 2.IV)

$$[u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_0 = 0 \left(\left(|x_0|^{\gamma(s_j-1+\lambda)} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_{s_j-1,\lambda} \right)^{\frac{1}{s_j+\lambda}} \left(\frac{|u_j|^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_0}{|x_0|^{\gamma n/2}} \right)^{\frac{s_j-1+\lambda}{s_j+\lambda}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|u_j|^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_0}{|x_0|^{\gamma n/2}} \right),$$

il primo membro della (4.19) può essere maggiorato con

$$K \left\{ \sum_j \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s-s_j)+\sigma-\gamma n/2} |u_j|^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_0 + T_{\sigma,R,\eta_\varepsilon} \right\}$$

ottenendo così la (4.17).

Dimostriamo il seguente lemma in cui interverrà l'ipotesi (1.4).

LEMMA 4.4. *Nelle stesse ipotesi del lemma* 4.3 *e supponendo* $\sigma \leq \gamma \frac{n}{2} - \gamma s + \mu$, *dove* $\mu = \min_j [s_j(\gamma - \theta_j)]$, *vale la maggiorazione*:

$$(4.20) \qquad \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s+\lambda-1)+\sigma} \sum_j [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_{s_j-1,\lambda} +$$

$$+ \sum_j \sum_{h=0}^{s_j-1} \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{\gamma(s-s_j+h)+\sigma} [u_j]^{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)}_h \leq K \left\{ \sum_i H_{i,\theta_i,R} + T_{\sigma,R,\eta_\varepsilon} \right\}$$

essendo

$$(H_{i,\theta_i,R})^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \int_{\Omega_R} (f_i^\alpha)^2 |x|^{2\theta_i(s_i-|\alpha|)} \, dx \; ;$$

per la costante K *vale quanto detto nell'enunciato del lemma* 4.3.

Posto:

$$\left(|u_j|^{\Omega_R}_{s_j,\theta_j} \right)^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{s_j} \int_{\Omega_R} (\partial^\alpha u_j)^2 |x|^{2\theta_j(|\alpha|-s_j)} \, dx$$

esiste una costante K, indipendente da R (cfr. M. TROISI [13], lemma 1.4), tale che:

$$\left(|u_j|^{\Omega_R}_{s_j,\theta_j} \right)^2 \leq K \left\{ \int_{\Omega_R} u_j^2 |x|^{-2\theta_j s_j} \, dx + \sum_{|\alpha|=s_j} \int_{\Omega_R} (\partial^\alpha u_j)^2 \, dx \right\} .$$

Dalla precedente relazione, per la (1.4), si ha:

$$\sum_j \left(|u_j|^{\Omega_R}_{s_j,\theta_j} \right)^2 \leq K |B[u,u]| \leq K \left(\sum_j |u_j|^{\Omega_R}_{s_j,\theta_j} \right) \left(\sum_i H_{i,\theta_i,R} + M_\delta \right)$$

e quindi

$$\left(\sum_j \int_{\Omega_R} u_j^2 |x|^{-2\theta_j s_j} \, dx \right)^{1/2} \leq K \left(\sum_i H_{i,\theta_i,R} + M_\delta \right);$$

ricordando la (1.6) si ha:

$$\sum_i \sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^{-\theta_j s_j} \left(\int_{\Delta_R(x_0,\eta_\varepsilon)} u_j^2 \, dx \right) \leq K \left(\sum_i H_{i,\theta_i,R} + M_\delta \right);$$

dal lemma 4.3 si ricava allora la (4.20).

5. - Teoremi di esistenza ed unicità.

Enunciamo, innanzitutto, il seguente teorema di esistenza valido in un dominio limitato; ne tralasciamo la dimostrazione, in quanto simile, tranne ovvie modifiche, a quella del teorema I di [8].

Teorema 5.1. *Sia* T *un dominio limitato di classe* $A^{(2s+r+1)}$ *con* r *intero non negativo* $\geq \frac{n}{2} - s$; *consideriamo l'equazione* (1.1) *con* T *al posto di* Ω; *supponiamo:* $a_{\alpha\beta}^{ij}(x) \in C^0(T)$, $f_i^{\alpha}(x) \in L^{\infty}(T)$; $\tilde{f}_i^{\alpha}$ *abbia il comportamento alla frontiera indicato dalla seconda delle* (1.5); *infine* $B[\cdot,\cdot]$ *sia coercitiva su* $H_0^{s_1}(T) \times \ldots \times H_0^{s_N}(T)$. *Allora esiste una ed una sola soluzione* $u \equiv (u_j)$ *di* (1.1), *con* $u_j \in H_0^{s_j}(T) \cap H^{(s_j,2\nu)}(T)$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema di esistenza nel dominio non limitato $\Omega \in A^{(2s+r+1)}$ con r intero non negativo $\geq \frac{n}{2} - s$.

Teorema 5.2. *Consideriamo il problema di Dirichlet* (1.1)-(1.1)', *con* $\varphi_{jb} \in C^{s_j-1+b}(\partial\Omega)$; *i coefficienti* $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ *verifichino la* (1.3), *siano continui in* $\overline{\Omega}$ *se* $|\alpha| = s_i$ *e* $|\beta| = s_j$; *di più supponiamo che* $a_{\alpha\beta}^{ij}(x) \in C^{|\alpha|+1}(\Omega_\delta)$; *sussistano, infine, le* (1.4) *e* (1.5). *Allora il problema di Dirichlet in* Ω *ammette una soluzione* $u \equiv (u_j)$ *con* $u_j \in C^{s_j-1}(\overline{\Omega}) \cap H_{loc}^{s_j}(\Omega)$; *si ha inoltre:*

$$\partial^{\alpha} u_j = 0\left(|x|^{\gamma(s_j-|\alpha|-n/2)-\mu}\right). \tag{5.1}$$

Se $\varphi_{jb} \in C^{s_j-1-b,\lambda}(\partial\Omega)$, *allora* $u_j \in H_{loc}^{(s_j,2\nu)}$ *e inoltre:*

$$[u_j]_{s_j-1,\lambda}^{\Delta_R(x_0,\eta_k)} = 0\left(|x|^{\gamma(1-\lambda-n/2)-\mu}\right); \tag{5.2}$$

infine, indicato con $(E_\theta[u])^2$, *dove* $\theta \equiv (\theta_j)$, *il primo membro della* (1.4), *si ha:*

$$E_\theta[u] = 0\left(\sum_i H_{i,\theta_i} + \Phi + \Phi_{s-1,\lambda}\right) \tag{5.3}$$

dove è

$$(H_{i,\theta_i})^2 = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} (f_i^{\alpha})^2 |x|^{2\theta_i(s_i-|\alpha|)}\, dx$$

e

$$\Phi = \sum_j \sum_{b=0}^{s_j-1} \sum_{p=0}^{s_j-1-b} \max_{\partial\Omega} \left| \frac{d^p \varphi_{jb}}{d t^p} \right|, \qquad \Phi_{s-1,\lambda} = \sum_j \sum_{b=0}^{s_j-1} \left| \frac{d^{s_j-1-b} \varphi_{jb}}{d t^{s_j-1-b}} \right|_\lambda^{\partial\Omega}$$

essendo t un qualsiasi versore tangente a $\partial\Omega$.

In un primo momento supporremo nulli i dati al contorno; dai lemmi 4.1 e 4.4 si ricava:

$$\sup_{x_0 \in \Omega_R} |x_0|^\mu \sum_j |u_j|_{s_j}^{A_R(x_0,\eta_t/k)} \leq K \left\{ \sum_i H_{i,\theta_i,R} + T_{\sigma,R,\eta_t} \right\}. \tag{5.4}$$

Per il teorema 5.1 esiste, $\forall n$, un vettore $u^n \equiv (u_j^n)$, con $u_j^n \in H^{(s_j,2\nu)}(\Omega_n)$ soluzione dell'equazione:

$$B[\tau, u^n] = F[\tau, f] \qquad \forall \tau \in [C_0^\infty(\Omega_n)]^N. \tag{5.5}$$

Per la (4.20), $\forall j$, dalla successione $(u_j^n)_n$ se ne può estrarre una convergente in $C^{s_j-1}(A)$, dove A è un generico compatto contenuto in Ω: sia u_j il suo limite. Dalla (5.4) si ricava che $u_j \in H^{s_j}(A)$; è evidente allora che $u \equiv (u_j)$ è soluzione in Ω del problema di Dirichlet con dati omogenei al contorno. Inoltre, dalla (4.20), scritta con u_j^n al posto di u_j, passando al limite, si ottiene la (5.1).

Nel caso generale, si può costruire (cfr. A. CANFORA [4]) una $z \equiv (z_j)$ con $z_j \in C^{s_j-1}(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, nulla al di fuori di un intorno su Ω di $\partial\Omega$, la quale verifica le condizioni al contorno assegnate ed, in più, ha le seguenti proprietà:

$$\sum_j \sum_{|\alpha|=0}^{s_j-1} |\partial^\alpha z_j| = 0(\Phi)$$

$$|\partial^\alpha z_j| = 0(\Phi\, d(x)^{s_j-1-|\alpha|}) \qquad \text{se} \quad |\alpha| \geq s_j \tag{5.6}$$

$$\left| \sum_j \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \sum_{|\beta|=0}^{s_j} \partial^\alpha (a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\, \partial^\beta z_j) \right| = 0(\Phi\, d(x)^{-s_i}) \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Posto $u_j^n = z_j + v_j^n$, consideriamo l'equazione:

$$B[\tau, v^n] = F[\tau, f] - \sum_i \int_{\Omega_n} \tau_i \left(\sum_j \sum_{|\alpha|=0}^{s_i} \sum_{|\beta|=0}^{s_j} \partial^\alpha (a_{\alpha\beta}^{ij}(x)\, \partial^\beta z_j)\, dx \right) \qquad \forall \tau$$

che è dello stesso tipo della (5.5) in base alle (5.6); ci siamo, così, ricondotti al caso, precedentemente studiato, dei dati omogenei al

contorno; ragionando allo stesso modo si ottiene il risultato. Per quel che riguarda la (5.1), basta tener presente che essa è senz'altro soddisfatta dalla v_j e che z_j è nulla per $x \in \Omega - \Omega_\delta$.

Se $\varphi_{jb} \in C^{s_j-1-b,\lambda}(\partial\Omega)$, si dimostra che $z_j \in C^{s_j-1,\lambda}(\bar{\Omega})$ e che

$$|\partial^\alpha z_j| = 0((\Phi + \Phi_{s-1,\lambda})\, d(x)^{\lambda-1}) \qquad \text{se} \quad |\alpha| = s_j \ ; \tag{5.7}$$

dalla (5.7) si ricava che z_j, e quindi u_j, appartiene a $H_{loc}^{(s_j,2\nu)}(\bar{\Omega})$. La (5.2) è una immediata conseguenza della (4.20). Resta da dimostrare la (5.3). Si ha:

$$B[v^n, v^n] = F[v^n, f] - B[v^n, z] \ ;$$

da (1.4), (5.6), (5.7) e dal lemma già ricordato di M. Troisi (cfr. [13], lemma 1.4) si ottiene:

$$E_\theta[v^n] \leq K\left(\sum_i H_{i,\theta_i} + \Phi + \Phi_{s-1,\lambda}\right)$$

e quindi la (5.3), essendo K indipendente da n.

Concludiamo con il seguente teorema di unicità: la classe cui ci riferiamo è quella dei vettori $u \equiv (u_j)$, con $u_j \in C^{s_j-1}(\bar{\Omega}) \cap H_{loc}^{s_j}(\Omega)$, e con il seguente comportamento all'infinito:

$$u_j(x) = 0(|x|^{\beta_j}) \tag{5.8}$$

ove β_j è un fissato numero reale.

Teorema 5.3. *Consideriamo l'equazione* (1.1) *e supponiamo i coefficienti* $a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$ *misurabili e limitati in* Ω; *sussista poi la* (1.4). *Si ha unicità per il problema di Dirichlet* (1.1)-(1.1)′, *per ogni fissato* β_j *se* $0 \leq \theta_j < \dfrac{1}{2s_j}$; *se invece* $\dfrac{1}{2s_j} \leq \theta_j < \dfrac{1}{2s_j - 1}$, *l'unicità è assicurata per ogni fissato* β_j *tale che*:

$$\beta_j < s_j\,\theta_j - \frac{n}{2} + s_j - 2s_j^2\,\theta_j \ .$$

Basta, ovviamente, dimostrare che, se $u \equiv (u_j)$, con

$$u_j \in C^{s_j-1}(\bar{\Omega}) \cap H_{loc}^{s_j}(\Omega),$$

è soluzione di

$$B[\tau, u] = 0 \qquad \forall\, \tau \in [C_0^\infty(\Omega)]^N$$

con dati di Dirichlet nulli su $\partial\Omega$, allora $u_j \equiv 0$ per ogni j.

Posto:

$$\zeta_R(x) \begin{cases} = (R^2 - |x|^2)^s & \text{se} \quad |x| \leq R \\ = 0 & \text{se} \quad |x| > R \end{cases}$$

si ha:

$$|B[u\zeta_R, u\zeta_R]| \leq |B[u\zeta_R^2, u]| + \tag{5.9}$$

$$+ H \Sigma (R^{2s-p_i+s_i-h_i} |u_i|^{\Omega_R}_{s_i-h_i}) (R^{2s-q_j+s_j-k_j} |u_j|^{\Omega_R}_{s_j-k_j})$$

dove con il simbolo Σ si intende una sommatoria estesa a $i, j = 1, \ldots, N$ e, per ogni (i, j), a tutti i p_i, q_j e h_i, k_j con $0 \leq p_i \leq s_i$, $0 \leq q_j \leq s_j$ e $(s_i - h_i) + (s_j - k_j) < p_i + q_j$; la costante H dipende da n, s, e dal massimo modulo dei coefficienti.

Per $r < R$ è:

$$(R^2 - r^2)^{2s} \sum_j \left\{ \sum_{|\alpha|=s_j} \int_{\Omega_r} (\partial^\alpha u_j)^2 \, dx + \int_{\Omega_r} |x|^{-2\theta_j s_j} u_j^2 \, dx \right\} \leq \tag{5.10}$$

$$\leq K \sum_j \left\{ \sum_{|\alpha|=s_j} \int_{\Omega_R} (\partial^\alpha (u_j \zeta_R))^2 \, dx + \int_{\Omega_R} |x|^{-2\theta_j s_j} (u_j \zeta_R)^2 \, dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{s_j} R^{4s-2h} (|u_j|^{\Omega_R}_{s_j-h})^2 \right\}.$$

Se $\theta \equiv (\theta_j)$, poniamo:

$$\mathfrak{A}_\theta(r) = \sum_j \left\{ \sum_{|\alpha|=s_j} \int_{\Omega_r} (\partial^\alpha u_j)^2 \, dx + \int_{\Omega_r} |x|^{-2\theta_j s_j} u_j^2 \, dx \right\};$$

dalle (5.9) e (5.10), nonché dalla (1.4), ricordando che $B[u\zeta_R^2, u] = 0$, si ottiene:

$$(R^2 - r^2)^{2s} \mathfrak{A}_\theta(r) \leq K \Sigma^* \left(\sum_j R^{2s-p_j+s_j-h} |u_j|^{\Omega_R}_{s_j-h} \right) \left(\sum_j R^{2s-q_j+s_j-k} |u_j|^{\Omega_R}_{s_j-k} \right)$$

dove con il simbolo Σ^* si intende una sommatoria estesa a $h, k = 0, 1, \ldots, s$ e, per ogni (h, k), a tutti i p_i, q_i con $0 \leq p_i, q_i \leq s_i$ e $(s_i - h) + (s_j - k) < p_i + q_j$, $\forall i, j$; è chiaro che si intende $|u|^{\Omega_R}_{s_j-h} = 0$ se $s_j - h < 0$.

Essendo:

$$R^{s_j-h}\,|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{s_j-h} = 0\left((R^{s_j}\,|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{s_j})^{\frac{s_j-h}{s_j}}\,(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0})^{\frac{h}{s_j}} + |\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0}\right),$$

risulta:

$$(R^2 - r^2)^{2s}\,\mathcal{U}_\theta(r) \leq \tag{5.11}$$

$$\leq K\,\Sigma^*\left[\sum_j R^{2s-p_j+s_j-h}\,(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{s_j})^{\frac{s_j-h}{s_j}}\,(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0})^{\frac{h}{s_j}} + \sum_j R^{2s-p_j}\,|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_j R^{2s-q_j+s_j-k}\,(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{s_j})^{\frac{s_j-k}{s_j}}\,(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0})^{\frac{k}{s_j}} + \sum_j R^{2s-q_j}\,|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0}\right];$$

inoltre, se $\theta_j \geq 0$, è:

$$(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0})^2 \leq R^{2s_j\theta_j}\,\mathcal{U}_\theta(R)\,. \tag{5.12}$$

Prendendo $\varepsilon_j \leq \dfrac{1}{2s_j}$, dalle (5.11) e (5.12) si ottiene:

$$(R^2 - r^2)^{2s}\,\mathcal{U}_\theta(r) \leq K\left\{\sum_j [\mathcal{U}_\theta(R)]^{1-\varepsilon_j}\,(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0})^{2\varepsilon_j}\,R^{2s_j\theta_j(1-\varepsilon_j)}\,R^{4s-1}\right\}.$$

In base ad un lemma di crescenza (cfr. lemma 3.2 di [9]) se

$$R^{-1}\,R^{2s_j\theta_j(1-\varepsilon_j)}\,(|\,u_j\,|^{\Omega_R}_{0})^{2\varepsilon_j} \qquad j = 1, \ldots, N \tag{5.13}$$

è infinitesimo al divergere di R, si deduce che $\mathcal{U}_\theta(r) \equiv 0$ e cioè la tesi.

Perché dunque la (5.13) sia verificata, ricordando la (5.8), basta:

$$-1 + 2s_j\theta_j - 2s_j\theta_j\varepsilon_j + n\varepsilon_j + 2\beta_j\varepsilon_j < 0 \quad \text{se} \quad \beta_j > -\frac{n}{2}$$

$$-1 + 2s_j\theta_j - 2s_j\theta_j\varepsilon_j < 0 \quad \text{se} \quad \beta_j \leq -\frac{n}{2}$$

da cui si ricava che, se $0 \leq \theta_j < \dfrac{1}{2s_j}$, β_j può assumere qualsiasi valore; se invece $\dfrac{1}{2s_j} \leq \theta_j < \dfrac{1}{2s_j - 1}$, deve essere

$$\beta_j < s_j\theta_j - \frac{n}{2} + s_j - 2s_j^2\theta_j\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] AGMON S., *Maximum theorems for solutions of higher elliptic equations,* Bulletin American Mathematical Society. **66**, pp. 77-80 (1960).

[2] AGMON S., *Lectures on elliptic boundary value problems,* Van Nostrand Mathematical Studies 1964.

[3] AGMON S., DOUGLIS A., NIRENBERG L., *Estimates near boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II,* Communications on pure and applied mathematics, vol. XVII, pp. 35-92 (1964).

[4] CANFORA A., *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ai sistemi fortemente ellittici,* Ricerche di Matematica, vol. XV, pp. 246-294 (1966).

[5] JOHN F., *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations,* Interscience, New York (1955).

[6] MATARASSO S., *Sul problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche di ordine superiore in due variabili,* Ricerche di Matematica, vol. XX, pp. 66-89 (1971).

[7] MATARASSO S., *Sul problema esterno di Dirichlet per le equazioni ellittiche di ordine superiore in n variabili,* Ricerche di Matematica, vol. XXI. pp. 48-74 (1972).

[8] MIRANDA C., *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili,* Annali di Matematica pura e applicata (IV), vol. XLVI, pp. 265-312 (1958).

[9] MIRANDA C., *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche,* Annali di Matematica pura e applicata (IV), vol. LIX, pp. 189-212 (1962).

[10] MIRANDA C., *Partial differential equations of elliptic type,* Ergebnisse der Mathematik, Springer Verlag, 1970.

[11] MORREY C. B. Jr., NIRENBERG L., *On the analiticity of the solutions of partial differential equations,* Communications on pure and applied Mathematics, vol. X, pp. 271-290 (1957).

[12] NIRENBERG L., *Remarks on strongly elliptic partial differential equations,* Communications on pure and applied Mathematics, vol. VIII, pp. 647-675 (1955).

[13] TROISI M., *Problemi ellittici con dati singolari,* Annali di Matematica pura e applicata (IV), vol. LXXXIII, pp. 363-408 (1969).

Chabazitic tuff deposits of possible economic value in the Campanian region

Nota di ROSARIO AIELLO e CESARE PORCELLI
presentata dal Socio Ordinario ANTONIO SCHERILLO

(Adunanza del 16 novembre 1974)

SUMMARY. — In the field of the researches on the utilisation of natural zeolites, the deposits of « yellow campanian tuff » have been systematically studied, emphasizing their elevated potentiality and chabazite content. Chabazite is normally associated with small amounts of phillipsite, even if sometimes it represents the only zeolitic phase present into the material and reaches, particularly in the most peripheric deposits, percentages higher than 70 %.

The diagenetic origin of zeolitic campanian tuffs has been at last pointed out and the factors which have presumably influenced the zeolitization process discussed.

RIASSUNTO. — Nell'ambito delle ricerche sull'utilizzazione delle zeoliti naturali, vengono studiati in dettaglio i depositi di « tufo giallo campano », ponendone in risalto l'elevata potenzialità e l'alto contenuto di cabasite. Questa risulta normalmente associata a modeste quantità di phillipsite, anche se talvolta rappresenta l'unica fase zeolitica presente nel materiale e raggiunge, particolarmente nei depositi più periferici, percentuali superiori al 70 %.

Viene infine posta in luce l'origine diagenetica dei tufi zeolitici campani discutendo i fattori che hanno presumibilmente influenzato il processo di zeolitizzazione.

*
* *

In the recent years the industrial interest on natural zeolites has been radiply growing and in many countries researches are in progress in order to utilise natural zeolites in place of their synthetic counterparts and to study new applications which take advantage of their low cost [1].

Natural zeolites can be infact profitably employed as water adsorbents in gas drying, as ion exchangers, particularly in pollution abatement processes, in the separation of oxigen and nitrogen from air,

as soil conditioners, as carriers for agricultural chemicals, as caking-proof powders for fertilizers, as fillers in the paper industry, in pozzolanic cements and concretes, as dietary supplements in animal husbandry, etc. [1 – 4].

The discovery and the study of natural zeolites has therefore gained a continuosly increasing importance. While, however, zeolite minerals have been reported in a wide variety of occurrences, the interest of the applied mineralogists is evidently pointed on the large zeolite deposits of possible economic value.

In this regard, zeolitized tuffs of Central and Southern Italy have already attracted the attention of the scientists for their promising properties in the field of the decontamination of radioactive waste waters, because of their good selectivity for Cs^+ and Sr^{++} [5], and in the field of the production of pozzolanic cements, because of their high reactivity with lime [6]. Recently, the utilization of the chabazitic tuff from Mercogliano (AV), beloging to the formation of the « campanian tuffs » as dessiccant and water softener, was proposed [7, 8] and researches are in progress on the utilization of this material as molecular sieve.

We therefore thought it worthwhile, to study systematically the deposits of chabazitic tuff of the whole campanian region, with particular reference to their distribution and potentiality and to their zeolite content. The formation of « neapolitan yellow tuff », in wich phillipsite is largely predominant over chabazite, was not included into the present study because phillipsite, owing to its little open structure, shows limited possibilities of industrial applications.

Experimental.

X-Ray investigations on tuff samples, previously equilibrated on $Ca(NO_3)_2$ saturated solution, were carried out by means of a Guinier-De Wolff Camera.

In order to obtain thin sections for optical microscopy, tuff fragments were previously treated with Tamm reactive to remove hydrated iron oxides; fragments were then impregnated with Canada balsam and successively heated in oven at 50° C.

Scanning electron microscopy on tuff fragments previously shaded by Au-Pd alloy, was performed by emploing a Jeol, mod. JSM-2, microscope. Quantitative determinations of chabazite content in tuff samples practically phillipsite-free, were carried out by evaluating the amount of water adsorbed, after activation at 350° C for two hours, at 20° C and 20 % relative humidity, utilising, as a reference, a sample of chabazite from Dessié (Ethiopia) treated in the same way; chabazite and tuff samples were previously exchanges into Na^+ form [9].

Occurrence.

A map showing the distribution of the main deposits of zeolitic campanian tuffs is reported in Fig. 1. Data for the deposits are given in Table 1; potentialities have been extimated mainly on the ground of the thiknesses detectable in the numerous quarries (Fig. 2), locally utilized for the production of dimension stones.

FIG. 1. - Map showing the distribution of the main deposits of zeolitic campanian tuffs. Data for deposits are given in Table 1.

Zeolitic tuffs normally occupy fluvial-lacustrines basins, the bottom of the valleys and the corresponding conoids; wide natural walls of zeolitic tuff can be easily detected where the rivers have cut the deposits.

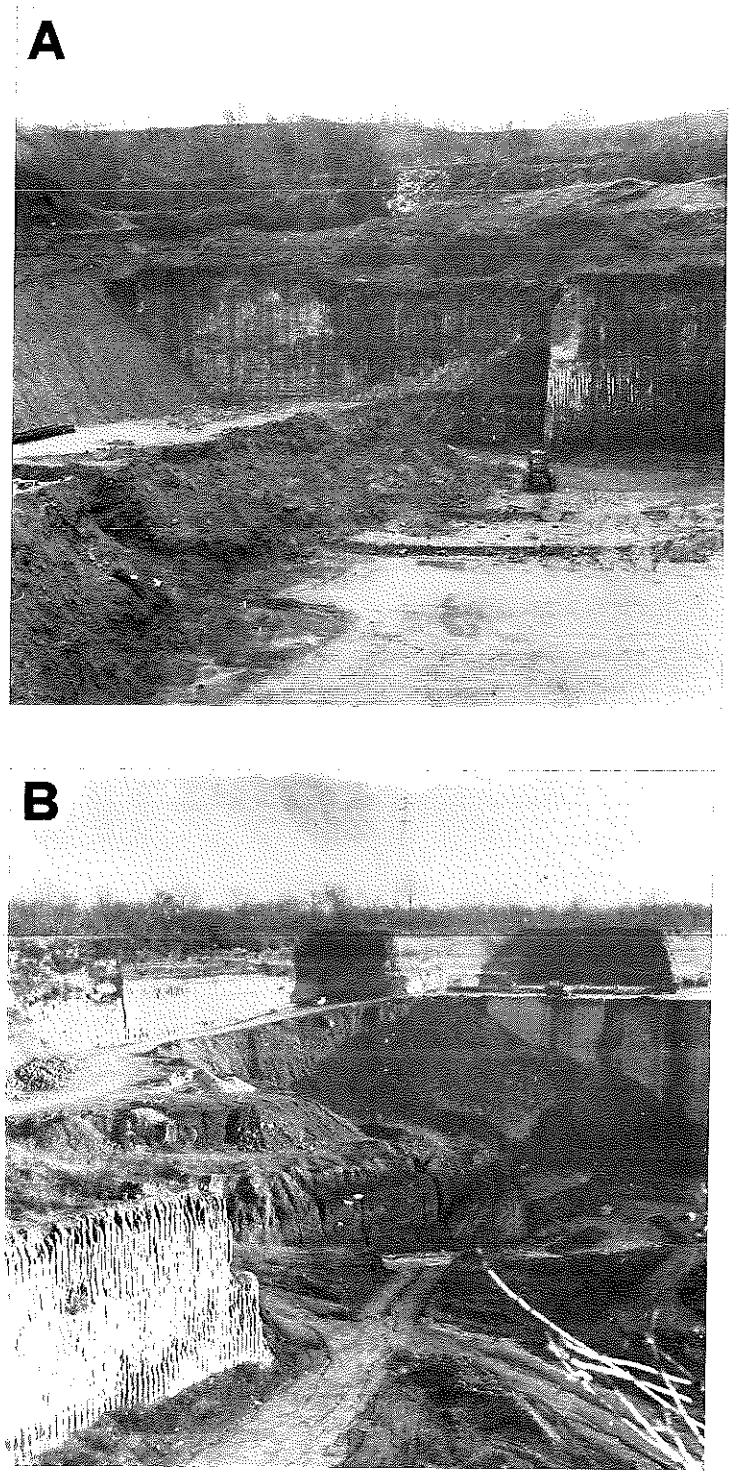


FIG. 2. - Tuff quarries. Localities: A = S. Agata dei Goti (BN), deposits 11, Fig. 1; B = Cicciano (NA), deposit 1, Fig. 1.

In the large majority of the occurrences zeolitic tuffs appear extensively reworked, showing beds of rounded pumices and non volcanic debris coming from the surrounding mountains; evident sedimentary structures can be recognized in many deposits.

TABLE 1

Extimated potentiality of the main zeolitic tuff deposits in the campanian region.

Deposit No., Fig. 1	Locality name	Potentiality (Millions of cubic meters)
1	Pianura campana	1,200
2	Avellino	50
3	Picarelli (AV)	10
4	Prata Principato Ultra (AV)	12
5	Altavilla (AV)	3
6	S. Angelo a Scala (AV)	1
7	S. Mango (AV)	1.2
8	Torre le Nocelle (AV)	1.6
9	Mirabella Eclano (AV)	5
10	Moiano (BN)	8
11	S. Agata dei Goti (BN)	80
12	Puglianello (BN)	3

Chemical and mineralogical composition.

The chemical composition of the zeolitized campanian tuffs appears to be rather constant in the whole region, as it can be noticed from a series of chemical analyses reported in the literature [10, 11]. A chemical analysis of a typical campanian tuff, coming from Mercogliano (AV), deposit n. 2 of Fig. 1, is shown in Table 2.

TABLE 2

Chemical composition of chabazitic tuff from Mercogliano (AV), Deposit 1, Fig. 1 (7).

	%		%
SiO_2	50.62	CaO	4.29
Al_2O_3	16.05	MgO	1.33
Fe_2O_3	3.75	Na_2O	2.55
FeO	0.35	K_2O	7.02
TiO_2	0.46	H_2O	13.60
MnO	0.11		
P_2O_5	0.15		100.28

The microscope examination in thin section showed the tuff to be constituted by a practically isotropic matrix, mainly composed of cryptocrystalline zeolites, surrounding crystalline fragments (sanidine, biotite and, subordinately pyroxene and plagioclase) together with pumices and slags. Zeolite crystals are, on the other hand, easily detectable in the small cavities of the material (Fig. 3).

By means of X-Ray analyses, chabazite was shown to be, in all samples of « yellow campanian tuffs » investigated, largely predominant over phillipsite, the percentage of the latter being, normally, lower than 10 %. Only a limited number of samples, coming from different tuff deposits, turned out to be phillipsite-free. Quantitative zeolite determinations performed on these samples showed variable but always quite elevated chabazite contents. In Table 3 a series of chabazite percentage in tuff samples collected from quarries suitable for exploitation, is reported.

TABLE 3

Chabazite percentages in tuff samples collected from different quarries.

Deposit No., Fig. 1	Quarry location	percentage Chabazite
1	*Monte delle Taglia,* Cicciano (NA)	55
1	*Masseria delle Fosse,* S. Felice a Cancello (CE)	58
1	*Monte Tagliato,* Maddaloni (CE)	62
2	*Tufara,* Mercogliano (AV)	70
3	*S. Caterina,* Picarelli (AV)	62
5	*Starza,* Altavilla Irpina (AV)	64
8	*Felette,* Torre lc Nocelle (AV)	68
9	*Madonna delle Grazie,* Mirabella Eclano (AV)	71
10	*Cannito,* Pastorano (BN)	61
11	*Campo Rosa,* S. Agata dei Goti (BN)	64

About the areal zeolite distribution into the tuffs of the campanian region, it can be noticed that the higher zeolite percentages are detected in the most peripheric deposits. This could be related to the greater initial content of fine-grained volcanic ash in these deposits and, therefore, to the higher reactivity of the material.

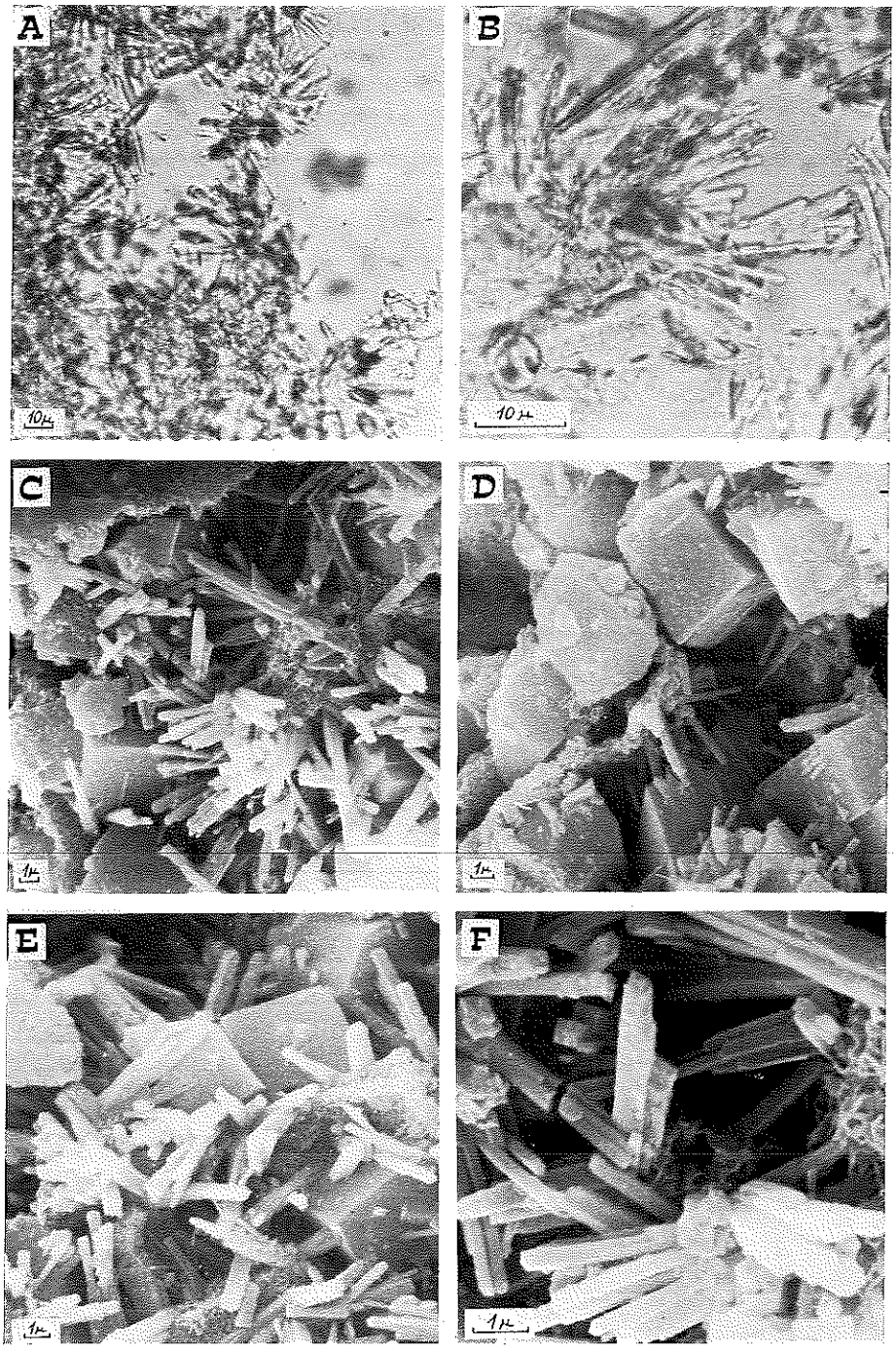


FIG. 3. - Optical and scanning electron micrographs of zeolitic campanian tuff: pseudo cubic crystals of chabazite and prismatic crystals of phillipsite covering the walls of the cavities.

Zeolite formation.

The formation of zeolites into the deposits of campanian tuffs appears to be due to a diagenetic process, through the action of groundwaters on volcanic materials, so that these deposits would fall into the second group of the classification proposed by F. A. MUMPTON [1].

In particular, the zeolitization of the original pyroclastic materials seems to be related to the present or past presence of freatic water into the deposits, while, where groundwaters only percolate volcanic materials, zeolitization does not appear to take place. This would mean, in our opinion, that the concentration of the various species in the pore water, due to the solution in it of the volcanic glass, can reach the limit for the zeolite formation only when water remains for a certain time in contact with the volcanic ash.

About the factors, at last, wich have favoured the formation, into the campanian tuffs, of chabazite in respect of phillipsite, while the latter largely prevails over the former in the « neapolitan yellow tuff », altough the chemical composition of the original pyroclastic materials was quite similar in both cases, we think they could be restricted to temperature and groundwater composition.

About the factor temperature, our experience in laboratory syntheses of zeolites, tells us that also small temperature variations may favour the crystallization of a species over another and, since the quite different age in which the zeolitization process of campanian and neapolitan tuffs took place, differences in the zeolitization temperature could have been significant.

About the second factor, chemical composition of pore water, the results of a very large number of laboratory syntheses showed zeolite crystallization from a given starting material to be strongly affected by the composition of the contact solution, i.e. its cationic population, and, during the zeolitization process of campanian and neapolitan tuffs differences in the chemical composition of pore water could have arisen, as an example, because the deposits of the former occur, unlike those of the latter, at the basis of carbonatic mountains.

Conclusions.

The results reported in the previous paragraphs strongly indicate that chabazitic tuffs of the campanian region may represent a very interesting source for natural zeolites. The enormous potentiality, the rather flot-lyng and often almost monominerallic nature of tuff

deposits, together with the high zeolite content of these tuffs, can infact arouse a considerable commercial interest and suggest their, utilisation not to be limited to the production of dimension stones. The possibilities of utilisation of these tuffs as zeolites could be, on the other hand, markedly enlarged through the enrichment of their zeolite content. This can be easily obtained by means of grinding techniques [7], due to the different hardness of tuff constituents, or by gravitative separation methods, based on the lower specific weight of zeolites in comparison with that of the other tuff constituents. At present, infact, researches are in progress in order to refine zeolite enrichment techniques and to test the variously enriched tuff fractions in different industrial applications.

LITERATURE CITED

[1] MUMPTON F. A., *Worldwide deposits and utilisation of natural zeolites*, Industrial Minerals, **73**, 1 (1973).

[2] SERSALE R., *Applicazioni industriali delle zeoliti sintetiche e naturali*, Rend. Acc. Naz. Lincei. Cl. Sc. Fis. Nat. e Mat. (in press).

[3] TORII K., *Utilisation of sedimentary zeolites in Japan*, Paper read at the U.S.-Japan Seminar on « Occurrence, origin and utilisation of sedimentary zeolites in the circum-pacific region » (Menlow Park and Barstow, California, and Las Vegas, Nevada, 1-7 July 1974).

[4] AIELLO R., *Applications of natural zeolites in Italy*, Paper read at the U.S.-Japan Seminar on « Occurrence, origin and utilisation of sedimentary zeolites in the circum-pacific region » (Menlow Park and Barstow, California, and Las Vegas, Nevada, 1-7 July 1974).

[5] BOENZI D., BRANCA G., *Tuff as cation exchanger for the removal of Cs^{+} and Sr^{++} from acqueous solution. Part. I. Batch tests*, Energia nucleare, **12**, 413 (1965).

[6] SERSALE R., SABATELLI V., *Sull'attività pozzolanica delle zeoliti. Nota I. Reattività della hershelite con soluzione d'idrossido di calcio*, Ric. Sci., **30**, 2121 (1965).

[7] AIELLO R., COLELLA C., *Zeolitic tuff as dessiccant*, Chim. e Ind., **54**, 303 (1972).

[8] COLELLA C., AIELLO R., SERSALE R., *Genesis, occurrence and properties of zeolitic tuffs*, Rend. Soc. Ital. Min. e Petr., **29**, 439 (1973).

[9] BARRER R. M., *Ion-exchange and ion-sieve process in crystalline zeolites*, J. Chem. Soc., 2342 (1950).

[10] SCHERILLO A., *Piroclastiti ed evoluzione vulcanica. Parte II. Piperni, tufi pipernoidi, tufi campani*, Boll. Soc. Natur., Napoli, **72**, 347 (1963).

[11] DI GIROLAMO P., *Petrografia dei tufi campani: il processo di pipernizzazione (tufo → tufo pipernoide → piperno)*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli, **35**, 329 (1968).

Sulla stabilità asintotica in presenza di perturbazioni al contorno per una classe di moti magnetoidrodinamici *

Nota di PASQUALE RENNO

presentata dal socio corrispondente FRANCESCO STOPPELLI

(Adunanza del 7 dicembre 1974)

RIASSUNTO. — Sia S uno dei due semispazi individuati da una lastra piana indefinita $\mathcal{L}$ e sia $\mathcal{J}$ l'insieme dei moti magnetoidrodinamici viscosi, unidimensionali che si svolgono in S e che all'istante iniziale presentano, in ogni punto di S, lo stesso campo magnetico e la stessa velocità. Considerando due elementi qualunque di $\mathcal{J}$ — i quali differiscono tra loro a causa dei valori diversi che, in ogni punto di $\mathcal{L}$ ed istante per istante, vengono assegnati al campo magnetico ed a quello cinetico — si calcola anzitutto il moto differenza e se ne determina il comportamento asintotico. Successivamente, si dimostra la stabilità di ogni moto di $\mathcal{J}$ rispetto a due metriche $\bar{r}$ e $\bar{\rho}$ che esprimono, nella maniera più immediata dal punto di vista fisico, le perturbazioni al contorno e le perturbazioni al moto. Infine, utilizzando alcuni teoremi di tipo tauberiano, si determinano alcune condizioni sufficienti ed altre necessarie affinché la stabilità in $\mathcal{J}$ sia di tipo asintotico.

ABSTRACT. — Let S be one of the two halfspace located by an infinite flat plate $\mathcal{L}$ and $\mathcal{J}$ the set of the viscous unidimensional magnetohydrodynamic motions which take place in S and initially characterized in each point of S by the same magnetic field and the same velocity.

After considering two elements whatever of $\mathcal{J}$ — which differ from one another because of the different values which in each point of $\mathcal{L}$ and in each instant are assigned to the magnetic field and to the kinetic one — we calculate first of all the difference motion and then determine the asymptotic behaviour. Successively we demonstrate the stability of each motion of $\mathcal{J}$ compaired with two metrics $\bar{r}$ and $\bar{\rho}$, which express, in the most immediate way from a physical point of view, the perturbations on the boundary and those on the motion. In the end, applying some tauberian theorems, we determine some sufficient conditions and some other necessary so that the stability may be of asymptotic type.

* Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Ricerca per la Fisica Matematica del C.N.R.

1. - Posizione del problema ed enunciato dei risultati.

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ un fluido viscoso incompressibile, omogeneo, elettricamente conduttore e con S uno dei due semispazi individuati da una lastra piana indefinita $\mathfrak{L}$. Con riferimento ad un terna triretangola levogira $T_o \equiv O\,x'\,y'z'$ — i cui versori siano $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — identifichiamo $\mathfrak{L}$ con il piano x' y' ed S con il semispazio $z' > 0$. Sia poi $\mathfrak{I}$ l'insieme dei moti magnetoidrodinamici unidimensionali di $\mathfrak{F}$ in S, definito dalle seguenti proprietà:

i) All'istante iniziale tutti i moti di $\mathfrak{I}$ presentano — in ogni punto di S — lo stesso campo magnetico e la stessa velocità.

ii) Il campo magnetico ed il campo cinetico di ciascun moto di $\mathfrak{I}$ sono, istante per istante, infinitesimi quando $z' \to \infty$.

Consideriamo due elementi $(\mathbf{H}^*, \mathbf{V}^*)$ e $(\mathbf{H}^* + \mathbf{h}\,,\ \mathbf{V}^* + \mathbf{v})$ di $\mathfrak{I}$, il primo dei quali (*moto imperturbato*) differisca dal secondo (*moto perturbato*) a causa di prefissate perturbazioni che, in ogni punto della lastra $\mathfrak{L}$, vengono introdotte istante per istante sul campo magnetico e su quello cinetico.

Nell'ipotesi che il campo magnetico sia continuo attraverso $\mathfrak{L}$, se ε^2 è il numero di Prandtl magnetico, *il moto differenza* $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ risulta essere, com'è noto (n. 2), la soluzione del problema ai limiti costituito dal seguente sistema di equazioni (adimensionali)

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial z^2} + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} + \dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \forall z > 0 \\ \forall \tau > 0 \end{matrix}$$

con le condizioni iniziali

$$(1.2)\qquad \mathbf{h}(z, 0) = \mathbf{v}(z, 0) = 0 \qquad \forall z > 0$$

e le condizioni al contorno

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \mathbf{h}(0, \tau) = \mathbf{h}_*(\tau)\,, \qquad \mathbf{v}(0, \tau) = \mathbf{v}_*(\tau) \\ \lim\limits_{z \to \infty} \mathbf{h}(z, \tau) = \lim\limits_{z \to \infty} \mathbf{v}(z, \tau) = 0\,. \end{cases} \qquad \forall \tau > 0$$

Le questioni che intendo studiare nel presente lavoro sono di due tipi [1]; precisamente, mi propongo anzitutto di risolvere il problema (1.1)-(1.2)-(1.3) in modo da analizzare — una volta che sia nota l'espressione esplicita del moto differenza — il comportamento asintotico di $\mathbf{h}$ e di $\mathbf{v}$. Successivamente, utilizzando tali risultati ed introducendo le metriche $\bar{r}$ e $\bar{\rho}$ così definite

$$\bar{r} = \sup_{\tau \geqslant 0} r(\tau) \ , \quad \bar{\rho} = \sup_{\tau \geqslant 0} \rho(\tau)$$

con

$$\begin{cases} r(\tau) = |\mathbf{h}_*(\tau)| + |\mathbf{v}_*(\tau)| \\ \rho(\tau) = \sup_{z>0} |\mathbf{h}(z,\tau)| + \sup_{z>0} |\mathbf{v}(z,\tau)| \ , \end{cases}$$

esamino la stabilità di ogni moto di $\mathcal{J}$ rispetto alle metriche $\bar{r}$ e $\bar{\rho}$ per dimostrare poi alcune condizioni sufficienti ed altre necessarie affinché tale stabilità sia di tipo asintotico.

In corrispondenza, i risultati principali ai quali pervengo si possono così riassumere. Posto

$$a(t) * b(t) = \int_0^t a(\tau)\, b(t-\tau)\, d\tau \ ,$$

si ha anzitutto (nn. 3-4-5) che:

I) « *Se le funzioni* $\mathbf{h}_*(\tau)$ *e* $\mathbf{v}_*(\tau)$ *sono continue in* $[0, \infty[$, *il problema* (1.1)-(1.2)-(1.3) *ammette una ed una sola soluzione regolare* [2] $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ *data da*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \mathbf{h}(z,\tau) = \mathbf{h}_*(\tau) * g_1(z,\tau) - \mathbf{v}_*(\tau) * f_1(z,\tau) \\ \mathbf{v}(z,\tau) = \mathbf{v}_*(\tau) * g_2(z,\tau) - \dfrac{1}{\varepsilon}\, \mathbf{h}_*(\tau) * f_1(z,\tau) \ , \end{cases}$$

[1] Com'è noto, già da molti anni le equazioni (1.1) sono oggetto di studio da parte di diversi Autori (cfr. bibliografia da [9] a [13]). Ad esempio in [10] e [11] — con riferimento all'estensione del problema di Rayleigh alla magnetoidrodinamica e nel caso che $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ siano costanti — sono state determinate alcune approssimazioni valide per valori del numero di Prandtl che siano prossimi a zero o ad uno. Per quanto riguarda invece la stabilità delle soluzioni delle (1.1), in [9] e [12] sono dimostrati — nel caso del problema di Couette — alcuni criteri di stabilità in media in presenza di perturbazioni introdotte sulle sole condizioni iniziali mentre in [13] è stato determinato, tra l'altro, un criterio di stabilità asintotica nel caso in cui varino anche i dati del contorno.

[2] Se Q è l'insieme $S \times [0, T]$, con T finito ma del tutto arbitario, diremo che il moto $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ è regolare se $\mathbf{h}$ e $\mathbf{v}$ sono continue in Q mentre risultano di classe C^1 in $Q - \partial Q$ ed ivi dotate di derivate seconde continue rispetto a z.

essendo f_1, g_1, g_2 *tre funzioni le cui espressioni sono riportate al n.* 4 *del* § I [3] ».

Un'analisi opportuna della soluzione (1.4) consente poi di determinare il seguente teorema sul comportamento asintotico del moto differenza (n. 6).

II) « *Se le funzioni continue* $\mathbf{h}_*(\tau)$ *e* $\mathbf{v}_*(\tau)$ *sono convergenti per* $\tau \to \infty$, *per ogni* $z > 0$ *risulta*:

$$(1.5)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\tau\to\infty} \mathbf{h}(z,\tau) = \dfrac{1+\varepsilon\, e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{h}_*(\infty) - \varepsilon\,\dfrac{1-e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{v}_*(\infty) \\ \lim\limits_{\tau\to\infty} \mathbf{v}(z,\tau) = \dfrac{\varepsilon+e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{v}_*(\infty) - \dfrac{1-e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{h}_*(\infty) \text{ ».} \end{cases}$$

D'altra parte, per quanto riguarda la stabilità del moto imperturbato, dimostro (n. 7) che:

III) « *La soluzione nulla* $(\mathbf{h}, \mathbf{v}) \equiv (0, 0)$ *del sistema* (1.1) *è stabile rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$ ».

Da tale teorema e dalle formule (1.5) segue poi che:

IV) « *Se* $\lim\limits_{\tau\to\infty} r(\tau) = 0$, *il moto imperturbato è asintoticamente stabile rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$ ».

Tale criterio di stabilità asintotica che, tra l'altro, comporta l'implicazione

$$(1.6)\quad \begin{aligned} &\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}_*(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}_*(\tau) = 0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}(z,\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}(z,\tau) = 0 \end{aligned} \qquad \forall\, z > 0$$

fornisce la conferma di un'affermazione il cui significato fisico è facilmente prevedibile. Al contrario un risultato che non trova riscontro immediato nell'intuizione fisica è il seguente (n. 8):

[3] Come verrà precisato al n. 5, le ipotesi sulla continuità di $\mathbf{h}_*(\tau)$ e $\mathbf{v}_*(\tau)$ — intese ad assicurare la regolarità del moto $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ definito dalle (1.4) — possono essere attenuate.

V) « *Condizione sufficiente affinché il moto imperturbato sia asintoticamente stabile rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$ *è che esistano e siano finiti i limiti*

$$(1.7) \qquad \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \mathbf{h}_*(u)\,du\ , \qquad \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \mathbf{v}_*(u)\,du\ ».$$

Esistono pertanto moti magnetoidrodinamici che risultano asintoticamente stabili anche quando le perturbazioni al contorno non sono infinitesime per $\tau\to\infty$. Basti pensare — ad esempio — al caso che le componenti i-esime di $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ siano del tipo $\cos(a_i\,\tau^2)$, $\operatorname{sen}(b_i\,\tau^2)$; in tale ipotesi infatti gli integrali (1.7) si riducono agli integrali di Fresnel.

L'implicazione (1.6) non risulta quindi invertibile incondizionatamente; è possibile però caratterizzare alcune classi funzionali C_L tali che — al variare delle perturbazioni al contorno $(\mathbf{h}_*, \mathbf{v}_*)$ in esse — si abbia

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}(z,\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}(z,\tau) = 0 \Longrightarrow \qquad \forall z > 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}_*(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}_*(\tau) = 0\ .$$

Infatti, applicando alcuni teoremi tauberiani alle formule di trasformazione di Laplace precedentemente stabilite per il calcolo del moto differenza, si dimostra che:

VI) « *Al variare delle perturbazioni al contono* $(\mathbf{h}_*, \mathbf{v}_*)$ *in opportune classi funzionali che sono definite al n. 6, la condizione* $\lim_{\tau\to\infty} r(\tau) = 0$ *è non solo sufficiente ma anche necessaria affinché la stabilità del moto imperturbato rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$ *sia di tipo asintotico* ».

Tale teorema risulta ovviamente di notevole interesse per il fatto che consente di individuare molti casi in cui la stabilità del moto imperturbato non può risultare di tipo asintotico (n. 8).

§ I) - DETERMINAZIONE DEL MOTO DIFFERENZA

2. - Richiami sulle equazioni indefinite della magnetoidrodinamica.

Siano **H**, p, **V**, nell'ordine, il campo magnetico, la pressione e la velocità di $\mathfrak{F}$ nel punto P ed all'istante t; indichiamo poi con **F** la

forza di massa di natura non elettromagnetica e con ρ, μ, ν, η quattro costanti che rappresentano, rispettivamente, la densità, la permeabilità magnetica, il coefficiente di viscosità cinematica ed il coefficiente di diffusività magnetica.

Nell'ipotesi che le correnti di spostamento siano trascurabili rispetto a quelle di conduzione, le equazioni indefinite che descrivono i moti magnetoidrodinamici di $\mathfrak{F}$ sono, com'è ben noto [5] [9], le seguenti:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \dfrac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} + \nu\Delta_2\mathbf{V} + \mathbf{F} \\ \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{H}\times\mathbf{V}) = \eta\Delta_2\mathbf{H} \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0\ , \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0\ . \end{cases}$$

Con riferimento alla terna $T_o \equiv O\,x'\,y'\,z'$, diciamo F_i, H_i, V_i ($i = 1, 2, 3$) le componenti di $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{V}$ ed osserviamo che quando si studiano i moti unidimensionali $[\mathbf{H}(z', t), \mathbf{V}(z', t), p(z', t)]$ di $\mathfrak{F}$ in S, le equazioni che si ottengono proiettando le (2.1) sugli assi di T_o sono, com'è noto [9],

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial t} = H_3\dfrac{\partial V_i}{\partial z'} + \eta\dfrac{\partial^2 H_i}{\partial z'^2} & (i = 1, 2) \\ \dfrac{\partial V_i}{\partial t} = \dfrac{\mu}{\rho}H_3\dfrac{\partial H_i}{\partial z'} + \nu\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial z'^2} + F_i & (i = 1, 2) \\ \dfrac{\partial p}{\partial z'} = -\dfrac{\mu}{2}\dfrac{\partial}{\partial z'}(H_1^2 + H_2^2) + F_3 \\ V_3 = 0\ , \quad H_3 = \text{cost.}\,. \end{cases}$$

L'equazione $(2.2)_3$ consente di determinare la pressione una volta che sia stato ricavato il campo magnetico indotto. Pertanto, posto

$$(2.3)\qquad \begin{cases} t = \dfrac{\eta\rho}{\mu H_3^2}\tau\ , \quad z' = \dfrac{\eta}{H_3}\sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}\,z \\ \mathbf{H} = \sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}\,\mathbf{H}^*\ , \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^* \\ \varepsilon^2 = \dfrac{\nu}{\eta}\ \text{(numero di Prandtl magnetico)}\,, \end{cases}$$

l'analisi dei moti unidimensionali di $\mathfrak{F}$ in S si riduce allo studio delle equazioni

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i^*}{\partial \tau} = \dfrac{\partial V_i^*}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 H_i^*}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial V_i^*}{\partial \tau} = \dfrac{\partial H_i^*}{\partial z} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 V_i^*}{\partial z^2} + \dfrac{\eta_i \rho}{\mu H_3^2} F_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

nelle incognite funzioni $H_i^*(z, \tau)$, $V_i^*(z, \tau)$ $(i = 1, 2)$.

Con tali premesse, identifichiamo il moto imperturbato $(\mathbf{H}^*, \mathbf{V}^*)$ con l'elemento di $\mathfrak{F}$ caratterizzato dalle condizioni al contorno

$$\mathbf{H}^*(0, \tau) = \mathbf{H}_L(\tau) \ , \quad \mathbf{V}^*(0, \tau) = \mathbf{V}_L(\tau) \qquad \forall \tau > 0$$

mentre il moto perturbato $(\mathbf{H}^* + \mathbf{h}, \mathbf{V}^* + \mathbf{v})$ sia tale che

$$\mathbf{h}(0, \tau) = \mathbf{h}_*(\tau) \ , \quad \mathbf{v}(0, \tau) = \mathbf{v}_*(\tau) \qquad \forall \tau > 0$$

con $\mathbf{H}_L$, $\mathbf{V}_L$, $\mathbf{h}_*$, $\mathbf{v}_*$ funzioni assegnate.

Infine, assumendo che il campo magnetico sia continuo[4] attraverso $\mathfrak{L}$ in modo da avere

$$H_3^* = \mathbf{H}_L \cdot \mathbf{e}_3 \ , \quad \mathbf{h}_* \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

è facile verificare che il moto differenza $[\mathbf{h}(z, \tau), \mathbf{v}(z, \tau)]$ è del tipo:

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \mathbf{h} = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

e risulta essere la soluzione del problema ai limiti (1.1)-(1.2)-(1.3) che abbiamo anticipato al n. 1.

3. - Considerazioni formali sulla determinazione del moto differenza.

Il calcolo formale della soluzione $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ del problema (1.1)-(1.2)-(1.3) si può effettuare mediante il metodo della trasformazione di

[4] Ciò è sensibilmente vero, com'è noto, quando $\mathfrak{L}$ non è costituita da sostanze ferromagnetiche [5].

Laplace; l'applicazione di tale procedimento, com'è noto, ha valore puramente euristico in quanto comporta, nei confronti delle incognite **h** e **v**, delle restrizioni delle quali a priori non è possibile assicurare la validità. Pertanto si osservi che, ponendo formalmente

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{h}}(z,s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\,\mathbf{h}(z,\tau)\,d\tau = L\,[\mathbf{h}(z,\tau)] \\ \hat{\mathbf{v}}(z,s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}\,\mathbf{v}(z,\tau)\,d\tau = L\,[\mathbf{v}(z,\tau)] \\ \hat{\mathbf{h}}_*(s) = L(\mathbf{h}_*), \qquad \hat{\mathbf{v}}_*(s) = L(\mathbf{v}_*), \end{cases}$$

le equazioni (1.1) ammettono per trasformate, in virtù delle condizioni iniziali (1,2), le equazioni

$$(3.2)\qquad \begin{cases} s\,\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}_{zz} + \hat{\mathbf{v}}_z \\ s\,\hat{\mathbf{v}} = \varepsilon^2\hat{\mathbf{v}}_{zz} + \hat{\mathbf{h}}_z \end{cases}$$

che vanno risolte con le condizioni ai limiti:

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{h}}(0,s) = \hat{\mathbf{h}}_*(s)\,, \quad \hat{\mathbf{v}}(0,s) = \hat{\mathbf{v}}_*(s) \\ \lim_{z\to\infty} \hat{\mathbf{h}}(z,s) = \lim_{z\to\infty} \hat{\mathbf{v}}(z,s) = 0\,. \end{cases}$$

Posto

$$\alpha(s) = \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1 + (1-\varepsilon)^2 s}\,,\quad \beta(s) = \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1 + (1+\varepsilon)^2 s}$$

$$\mathbf{A}(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\hat{\mathbf{h}}_*(s) - \frac{1}{(1+\varepsilon)\,\alpha(s)}\,\hat{\mathbf{v}}_*(s)$$

$$\mathbf{B}(s) = -\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\,\hat{\mathbf{v}}_*(s) - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)\,\alpha(s)}\,\hat{\mathbf{h}}_*(s)\,,$$

la soluzione del problema trasformato (3.2)-(3.3) si scrive

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \mathbf{h}(z,s) = e^{-z\beta}\,[\hat{\mathbf{h}}_*(s)\cos h(z\alpha) + \mathbf{A}(s)\,\text{sen}\,h(z\alpha)] \\ \mathbf{v}(z,s) = e^{-z\beta}\,[\hat{\mathbf{v}}_*(s)\cos h(z\alpha) + \mathbf{B}(s)\,\text{sen}\,h(z\alpha)]\,. \end{cases}$$

Nell'ambito del procedimento formale che stiamo utilizzando, il problema si riduce quindi al calcolo delle antitrasformate f_1, f_2, f_3 delle seguenti funzioni

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \hat{f}_1(z,s) = \dfrac{e^{-z\beta(s)}}{(1+\varepsilon)\,\alpha(s)}\,\text{sen}\,h\,[z\,\alpha(s)] \\ \hat{f}_2(z,s) = \beta(s)\,\hat{f}_1(z,s) \\ \hat{f}_3(z,s) = e^{-z\beta(s)}\cos h\,[z\,\alpha(s)]\,. \end{cases}$$

Cominciando col determinare $f_1(z,\tau)$ si osservi che, se I_0 è la funzione di Bessel modificata di prima specie e p e q sono due parametri, sussiste la formula (cfr. [17] p. 201)

$$(3.6)\qquad \int_0^2 e^{-pu}\,I_0\,[q\,\sqrt{u\,(2-u)}]\,du = 2\,e^{-p}\,\frac{\text{sen}\,h\,(\sqrt{p^2+q^2})}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

con la determinazione principale dei radicali. Se poniamo

$$a = \frac{|1-\varepsilon|}{2\varepsilon}\,,\quad b = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} - a\,,\quad c = a+b\,,$$

$$k = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\,,\quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\,,$$

risulta

$$(3.7)\qquad \begin{cases} \alpha(s) = a\,\sqrt{s + \dfrac{1}{(1+\varepsilon)^2}}\,,\quad \beta(s) = (a+b)\,\sqrt{s+k} \\ \gamma^2 + a^2(s+k) = \alpha^2(s) \end{cases}$$

e quindi, in base alla (3.6), è facile verificare che per $\hat{f}_1(z, s)$ vale la seguente rappresentazione integrale:

$$(3.8) \qquad \hat{f}_1(z, s) = \frac{z}{2(1+\varepsilon)} \int_0^2 e^{-z(au+b)\sqrt{s+k}} I_0[\gamma z \sqrt{u}(2-u)]\, du .$$

D'altra parte, per una nota formula di L trasformazione ([17] p. 245), si ha

$$(3.9) \qquad e^{-z(au+b)\sqrt{s+k}} = L\left[\frac{(au+b)z}{2\tau\sqrt{\pi\tau}} e^{-k\tau - \frac{z^2}{4\tau} - (au+b)^2}\right] \qquad \forall z > 0$$

per cui sostituendo la (3.9) nella (3.8) ed applicando il teorema di Fubini, è facile verificare che

$$(3.10) \qquad f_1(z, \tau) =$$

$$= \frac{z^2 e^{-k\tau}}{4(1+\varepsilon)\tau\sqrt{\pi\tau}} \int_0^2 (au+b) e^{\frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2} I_0[\gamma z \sqrt{u}(2-u)]\, du .$$

Passiamo ora al calcolo di f_2 cominciando con l'osservare che, per la $(3.5)_2$ e la (3.6), risulta

$$(3.11) \qquad \hat{f}_2(z, s) = \beta(s)\hat{f}_1(z, s) =$$

$$= \frac{c z \sqrt{s+k}}{2(1+\varepsilon)} \int_0^2 e^{-z(au+b)\sqrt{s+k}} I_0(\gamma z \sqrt{u}(2-u))\, du ,$$

e poiché (cfr. [17] p. 246)

$$(3.12) \qquad \sqrt{s+k}\, e^{-z(au+b)\sqrt{s+k}} =$$

$$= L\left[\frac{z^2(au+b)^2 - 2\tau}{4\tau^2\sqrt{\pi\tau}} e^{-k\tau - \frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2}\right] ,$$

dalle (3.11)-(3.12), in virtù del teorema di Fubini, si ricava facilmente

$$(3.3) \qquad f_2(z, \tau) =$$

$$= \frac{z e^{-k\tau}}{16\varepsilon\tau^2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^2 [(au+b)^2 z^2 - 2\tau] e^{-\frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2} I_0(\gamma z \sqrt{u}(2-u))\, du .$$

Infine poiché dalla (3.5) si ha

$$\hat{f}_3(z, s) = (1 + \varepsilon)(\hat{f}_{1,z} + \hat{f}_2),$$

assumendo che sia lecito scrivere

$$\hat{f}_{1,z} = L(f_{1,z})$$

si ottiene

$$f_3(z, \tau) = (1 + \varepsilon)(f_{1,z} + f_2). \tag{3.14}$$

In definitiva, se poniamo

$$a(t) * b(t) = \int_0^t a(\tau)\, b(t - \tau)\, d\tau,$$

ed applichiamo alle (3.4) il teorema sul prodotto integrale, possiamo affermare che l'espressione *formale* della soluzione del problema (1.1)-(1.2)-(1.3) è la seguente:

$$\begin{cases} h(z, \tau) = [f_3(z, \tau) + (1 - \varepsilon) f_2(z, \tau)] * \mathbf{h}_*(\tau) - f_1(z, \tau) * \mathbf{v}_*(\tau) \\ \mathbf{v}(z, \tau) = [f_3(z, \tau) - (1 - \varepsilon) f_2(z, \tau)] * \mathbf{v}_*(\tau) - \dfrac{1}{\varepsilon} f_1(z, \tau) * \mathbf{h}_*(\tau) \end{cases} \tag{3.15}$$

con f_1, f_2, f_3 definite rispettivamente dalla (3.10)-(3.13)-(3.14).

In particolare per $\varepsilon = 1$ risulta $a = 0$ ed utilizzando la (3.6) con $p = 0$ è facile verificare che

$$f_1(z, \tau) = \chi(z, \tau) \operatorname{sen} h \frac{z}{2}$$

$$f_3(z, \tau) = \chi(z, \tau) \cos h \frac{z}{2}$$

dove χ è la funzione

$$\chi(z, \tau) = \frac{z\, e^{-\frac{\tau}{4}}}{2\tau \sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{z^2}{4\tau}}$$

Pertanto, *quando il numero di Prandtl magnetico è unitario, le* (3.15) *si riducono alla soluzione nota*

$$(3.16)\qquad \begin{cases} \mathbf{h}(z,\tau) = \chi(z,\tau) * \left[\cos h\left(\frac{z}{2}\right)\mathbf{h}_*(\tau) - \operatorname{sen} h\left(\frac{z}{2}\right)\mathbf{v}_*(\tau)\right] \\ \mathbf{v}(z,\tau) = \chi(z,\tau) * \left[\cos h\left(\frac{z}{2}\right)\mathbf{v}_*(\tau) - \operatorname{sen} h\left(\frac{z}{2}\right)\mathbf{h}_*(\tau)\right]. \end{cases}$$

4. - Alcuni lemmi.

Al fine di superare il carattere formale del procedimento utilizzato al numero precedente per la determinazione del moto differenza, dimostriamo ora quattro lemmi concernenti alcune proprietà dei nuclei f_i che intervengono nelle espressioni integrali (3.15) di **h** e **v**. Osserviamo anzitutto che le funzioni f_i $(i = 1, 2, 3)$ sono analitiche in ogni punto dell'insieme

$$\Omega \equiv \{(z,\tau) : 0 < z \leq Z, \quad 0 < \tau \leq T\}$$

con Z e T finiti ma del resto arbitrari. Si ha poi

Lemma 4.1. *Le funzioni* $f_i(z,\tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ *sono, quali funzioni di* τ *e per ogni* $z > 0$, *assolutamente* L *trasformabili nel semipiano* $\operatorname{Re} s > -k$, *avendosi*

$$(4.1)\qquad \hat{f}_1(z,s) = \frac{e^{-z\beta(s)}}{(1+\varepsilon)\alpha(s)} \operatorname{sen} h\,[z\,\alpha(s)]$$

$$(4.2)\qquad \hat{f}_2(z,s) = \beta(s)\,\hat{f}_1(z,s)$$

$$(4.3)\qquad \hat{f}_3(z,s) = e^{-z\beta(s)} \cos h\,[z\,\alpha(s)].$$

Inoltre gli integrali di Laplace $\hat{f}_i$ *risultano assolutamente convergenti in tutti i punti della retta limite* $\operatorname{Re}(s) = -k$ *e risulta*:

$$(4.4)\qquad \lim_{s\to 0} \hat{f}_1(z,s) = \int_0^\infty f_1(z,\tau)\,d\tau = \varepsilon\frac{1 - e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}$$

$$\lim_{s\to 0} \hat{f}_2(z,s) = \int_0^\infty f_2(z,\tau)\,d\tau = \frac{1 - e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{2(1+\varepsilon)} \tag{4.5}$$

$$\lim_{s\to 0} \hat{f}_3(z,s) = \int_0^\infty f_3(z,\tau)\,d\tau = \frac{1 + e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{2}\,. \tag{4.6}$$

DIM. Con riferimento alla funzione $f_1(z,\tau)$ definita dalla (3.10), si cominci con l'osservare che essa è mai negativa e può essere maggiorata al seguente modo

$$f_1(z,\tau) \le \frac{z^2 e^{-k\tau}}{4(1+\varepsilon)\tau\sqrt{\pi\tau}} I_0(\gamma z)\int_0^2 (a u + b)\, e^{-\frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2} d u \le \tag{4.7}$$

$$\le \frac{e^{-k\tau - \frac{b^2 z^2}{4\tau}}}{2(1+\varepsilon)\sqrt{\pi\tau}} I_0(\gamma z) \qquad \forall z > 0\,.$$

Tale funzione maggiorante è, quale funzione di τ, sommabile in $[0,\infty[$ per cui, a norma del teorema di Tonelli è applicabile il teorema di Fubini e si ha

$$\frac{4(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}}{z^2}\hat{f}_1(z,s) = \tag{4.8}$$

$$= \int_0^2 (au+b)\, I_0(\gamma z\sqrt{u(2-u)})\, du \int_0^\infty e^{-(s+k)\tau - \frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2} \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}}\,.$$

Ma, ricordando che (cfr. [15] p. 102)

$$L\left[\frac{e^{-q^2/4\tau}}{\tau\sqrt{\pi\tau}}\right] = \frac{2}{q} e^{-q\sqrt{s}} \qquad \begin{cases} q > 0 \\ \mathrm{Re}(s) > 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

e che tale integrale di Laplace converge assolutamente in tutti i punti della retta limite $\mathrm{Re}(s) = 0$, dalle (4.8)-(4.9)-(3.6) e tenendo presente che

$$a^2(s+k) + \gamma^2 = \alpha^2(s)\,,$$

si ricava la (4.1) che risulta valida appunto per ogni $z > 0$ e per $\mathrm{Re}(s) \geq -k$. D'altra parte — poiché per $s = 0$ l'integrale di Laplace

$$\int_0^\infty f_1(z, \tau)\, d\tau$$

converge — in forza del criterio di Abel si ha

$$\lim_{s \to 0} \hat{f}_1(z, s) = \hat{f}_1(z, 0) = \varepsilon \frac{1 - e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1 + \varepsilon} \qquad \forall z > 0 .$$

In maniera del tutto analoga si provano le altre relazioni riportate nell'enunciato del lemma.

Indicando con I_1 la funzione modificata di Bessel di prima specie e di ordine uno, dimostriamo ora il seguente

LEMMA 4.2. *In ogni punto dell'insieme* Ω *risulta*:

$$(4.10) \qquad f_2(z, \tau) = r_2(z, \tau) + \frac{z\, e^{-k\tau}}{8 \varepsilon \tau \sqrt{\pi \tau}} \left[b\, e^{-\frac{b^2 z^2}{4\tau}} - (2a + b)\, e^{-(2a+b)^2 \frac{z^2}{4\tau}} \right]$$

$$(4.11) \qquad f_{1,z}(z, \tau) = r_1(z, \tau) -$$

$$- \frac{z\, e^{-k\tau}}{4 a (1 + \varepsilon) \tau \sqrt{\pi \tau}} \left[b^2 e^{-\frac{b^2 z^2}{4\tau}} - (2a + b)^2 e^{-(2a+b)^2 \frac{z^2}{4\tau}} \right]$$

dove le funzioni r_1 *ed* r_2 *verificano le limitazioni*

$$(4.12) \qquad |r_1| \leq \frac{\gamma^2 (2a + 3b) z}{4 a (1 + \varepsilon) \sqrt{\pi \tau}} \cdot I_0(\gamma z)\, e^{-k\tau - \frac{b^2 z^2}{4\tau}}$$

$$(4.13) \qquad |r_2| \leq \frac{\gamma (4a + b) z^2}{16 \varepsilon a \tau \sqrt{\pi \tau}} \cdot I_1(\gamma z)\, e^{-k\tau - \frac{b^2 z^2}{4\tau}} .$$

DIM. Detta y una variabile reale, cominciamo con l'osservare che, posto

$$\sigma(y) = I_0(2y) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n}}{n!^2} ,$$

si ha

$$0 \leq \sigma(y) \leq y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{n!\,(n+1)!} = y\, I_1(2y)\,.$$

D'altra parte, poiché per $u \in [0, 2]$ risulta

$$\sqrt{u(2-u)}\; I_1(\gamma z \sqrt{u(2-u)}) \leq I_1(\gamma z)\,,$$

si ha

$$\sigma[\gamma z \sqrt{u(2-u)}] \leq \gamma \frac{z}{2} I_1(\gamma z)\,. \tag{4.14}$$

Pertanto, posto

$$r_2(z,\tau) = \frac{z\, e^{-k\tau}}{16\,\varepsilon\,\tau^2 \sqrt{\pi\tau}} \int_0^2 e^{-\frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2} \tag{4.15}$$

$$[(au+b)^2 z^2 - 2\tau]\,\sigma[\gamma z \sqrt{u(2-u)}]\,du\,,$$

riesce

$$f_2(z,\tau) = r_2(z,\tau) + \frac{z\, e^{-k\tau}}{16\,\varepsilon\,\tau^2 \sqrt{\pi\tau}} \int_0^2 e^{-\frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2} \tag{4.16}$$

$$[(au+b)^2 z^2 - 2\tau]\,du$$

e quindi — calcolando l'integrale a secondo membro della (4.16) ed applicando la (4.14) alla funzione r_2 definita dalla (4.15) — si ricavano le (4.10)-(4.13). Infine, per determinare le relazioni (4.11)-(4.12), basta osservare che è possibile esprimere, mediante un'integrazione per parti, la derivata di f_1 rispetto a z al seguente modo

$$f_{1,z} = \frac{z\, e^{-k\tau}}{4a(1+\varepsilon)\,\tau \sqrt{\pi\tau}} \left\{ (2a+b)^2 e^{-(2a+b)^2 \frac{z^2}{4\tau}} - b^2 e^{-\frac{b^2 z^2}{4\tau}} + \right. \tag{4.17}$$

$$\left. + \gamma z \int_0^2 e^{-(au+b)^2 \frac{z^2}{4\tau}} (au+b)(cu-b) \frac{I_1(\gamma z \sqrt{u(2-u)})}{\sqrt{u(2-u)}} \right\} du$$

e tener presente che per $u \in [0, 2]$, riesce

$$\frac{I_1(\gamma z \sqrt{u(2-u)})}{\sqrt{u(2-u)}} \leq \frac{\gamma z}{2} I_0(\gamma z) .$$

Mediante considerazioni analoghe alle precedenti si completa così la dimostrazione del lemma.

Ai fini di una maggiore semplicità di calcolo per la verifica delle equazioni (1.1), vogliamo ora porre in evidenza il fatto che le funzioni $f_i(z, \tau)$ sono suscettibili di una rappresentazione integrale di tipo diverso dalle (3.10)-(3.11)-(3.14). Precisamente si ha:

LEMMA 4.3. *In ogni punto dell'insieme* Ω *sussistono per le funzioni* $f_i(z, \tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ *le seguenti rappresentazioni integrali*:

$$(4.18) \quad f_1(z, \tau) = \frac{e^{-k\tau}}{\pi(1+\varepsilon)} \int_0^\infty e^{-\tau u} \operatorname{sen}(cz\sqrt{u}) \frac{\operatorname{sen}(z\sqrt{a^2u-\gamma^2})}{\sqrt{a^2u-\gamma^2}} du$$

$$(4.19) \quad f_2(z, \tau) = -\frac{e^{-k\tau}}{2\pi\varepsilon} \int_0^\infty e^{-\tau u} \cos(cz\sqrt{u}) \frac{\operatorname{sen}(z\sqrt{a^2u-\gamma^2})}{\sqrt{a^2u-\gamma^2}} \sqrt{u}\, du$$

$$(4.20) \quad f_3(z, \tau) = \frac{e^{-k\tau}}{\pi} \int_0^\infty e^{-\tau u} \operatorname{sen}(cz\sqrt{u}) \cos(z\sqrt{a^2u-\gamma^2})\, du .$$

DIM. Ci limiteremo a dimostrare la (4.18) perché le altre relazioni si determinano poi in maniera analoga. Cominciamo con l'osservare che (cfr. [17] p. 245)

$$\frac{e^{-q/p}}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi q}} \int_0^\infty e^{-pv} \operatorname{sen}(2\sqrt{qv})\, dv \qquad \begin{cases} q > 0 \\ \operatorname{Re}(p) > 0 \end{cases}$$

per cui possiamo scrivere (per $\tau > 0$ e $z > 0$)

$$e^{-\frac{z^2}{4\tau}(au+b)^2} = \frac{8\tau\sqrt{\tau}}{z\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-4\tau v} \frac{\operatorname{sen}[2z(au+b)\sqrt{v}]}{au+b} dv$$

e sostituendo nella (3.10) si ottiene

$$(4.21) \qquad f_1(z,\tau) =$$

$$= \frac{2z\,e^{-k\tau}}{\pi(1+\varepsilon)} \int_0^2 I_0(\gamma z \sqrt{u(2-u)})\,du \int_0^\infty e^{-4\tau v} \operatorname{sen}[2z(au+b)\sqrt{v}]\,dv .$$

Ora, poiché

$$\left| \int_0^2 I_0(\gamma z \sqrt{u(2-u)})\,du \int_0^\infty e^{-4\tau v} \operatorname{sen}[2z(au+b)\sqrt{v}]\,dv \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\tau} \int_0^2 I_0(\gamma z \sqrt{u(2-u)})\,du < \infty \quad ,$$

a norma del teorema di Tonelli è applicabile il teorema di Fubini e quindi è possibile invertire l'ordine di integrazione nella (4.21). Ma, applicando la formula (3.6), è facile verificare che

$$(4.22) \qquad \int_0^2 \operatorname{sen}[2z(au+b)\sqrt{v}]\; I_0(\gamma z \sqrt{u(2-u)})\,du =$$

$$= \frac{2}{z} \operatorname{sen}(2cz\sqrt{v})\; \frac{\operatorname{sen}(z\sqrt{4a^2v-\gamma^2})}{\sqrt{4a^2v-\gamma^2}}$$

per cui, ricordando che $a + b = c$, dalle (4.21)-(4.22) si ricava che

$$f_1(z,\tau) = \frac{4\,e^{-k\tau}}{\pi(1+\varepsilon)} \int_0^\infty e^{-4\tau v} \operatorname{sen}(2cz\sqrt{v})\; \frac{\operatorname{sen}(z\sqrt{4a^2v-\gamma^2})}{\sqrt{4a^2v-\gamma^2}}\,dv$$

da cui, posto $u = 4v$, si ottiene la (4.18).

OSSERVAZIONE 4.1. Notiamo esplicitamente che, per ogni $\tau > 0$, le funzioni integrande a secondo membro delle (4.18)-(4.19)-(4.20) sono sommabili. D'altra parte, poiché le funzioni trigonometriche aventi per

argomento $\sqrt{a^2 u - \gamma^2}$ si trasformano in funzioni iperboliche solo nell'intervallo finito $u \in [0, \gamma^2/a^2]$ è possibile applicare — in ogni punto di Ω — il teorema della derivazione sotto il segno di integrale. Pertanto, utilizzando le (4.18)-(4.19)-(4.20) e ponendo per brevità

$$\begin{cases} g_1 = f_3 + (1 - \varepsilon) f_2 \\ g_2 = f_3 - (1 - \varepsilon) f_2 \end{cases} \tag{4.23}$$

si ottengono facilmente le seguenti relazioni

$$g_{1,\tau} = g_{1,zz} - \frac{1}{\varepsilon} f_{1,z} \tag{4.24}$$

$$g_{1,z} = \varepsilon f_{1,zz} - \frac{1}{\varepsilon} f_{1,\tau} \tag{4.25}$$

$$g_{2,\tau} = \varepsilon^2 g_{2,zz} - f_{1,z} \tag{4.26}$$

$$g_{2,z} = f_{1,zz} - f_{1,\tau} \tag{4.27}$$

le quali sussistono, naturalmente, in ogni punto di Ω.

OSSERVAZIONE 4.2. Rileviamo inoltre che, in base alla (4.7) ed ai risultati del lemma 4.2, per ogni $z > 0$ si ha

$$\lim_{\tau \to 0} f_i(z, \tau) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \forall z > 0. \tag{4.28}$$

Infine, in vista di una applicazione alle questioni di stabilità, enunciamo il seguente lemma:

LEMMA 4.4. *Per ogni* $z > 0$, *sussistono le limitazioni*

$$\int_0^\infty | f_1(z, \tau) | \, d\tau \leq k_0 \tag{4.29}$$

$$\int_0^\infty | g_j(z, \tau) | \, d\tau \leq k_j \qquad (j = 1, 2) \tag{4.30}$$

con k_0, k_1, k_2 *costanti.*

5. - Un teorema sul moto differenza.

In base ai risultati del numero precedente, siamo ora in grado di verificare che le funzioni **h** e **v**, determinate formalmente al n. 3, soddisfano tutte le condizioni del problema (1.1)-(1.2)-(1.3) sotto ipotesi più generali di quelle che sono necessarie a rendere rigoroso il procedimento formale. Dimostreremo infatti il seguente teorema.

Teorema 5.1. *Se* $\mathbf{h}_*(\tau)$ *e* $\mathbf{v}_*(\tau)$ *sono continue*[5] *nell'intervallo* $[0, \infty[$, *le funzioni* **h** *e* **v** *definite dalle* (3.15) *costituiscono l'unica soluzione regolare del problema* (1.1)-(1.2)-(1.3).

Dim. Se $\lambda(\tau)$ è continua per ogni $\tau \geq 0$, le funzioni

$$F_i(z, \tau) = \lambda * f_i = \int_0^\tau \lambda(u)\, f_i(z, \tau - u)\, du \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sono di classe C^1 in ogni punto di Ω ed ivi dotate di derivate seconde rispetto a z; inoltre, tenendo anche presente le (4.28), si ha (i = 1, 2, 3)

$$\frac{\partial F_i}{\partial \tau} = \lambda * f_{i,\tau} \qquad \forall (z, \tau) \in \Omega$$

$$\frac{\partial^j}{\partial z_j} F_i = \lambda * \frac{\partial^j}{\partial z_j} f_i \qquad (j = 1, 2)$$

Pertanto, poiché in base alle posizioni (4.23), le funzioni **h** e **v** si scrivono

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \mathbf{h}(z, \tau) = \mathbf{h}_* * g_1 - \mathbf{v}_* * f_1 \\ \mathbf{v}(z, \tau) = \mathbf{v}_* * g_2 - \dfrac{1}{\varepsilon} \mathbf{h}_* * f_1 \end{cases}$$

risulta

$$\mathbf{h}_{zz} + \mathbf{v}_z = \mathbf{h}_* * \left(g_{1,zz} - \frac{1}{\varepsilon} f_{1,z} \right) + \mathbf{v}_* * (g_{2,z} - f_{1,zz})$$

[5] Le ipotesi sulla continuità di $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ possono essere attenuate; invero, affinché il moto (**h**, **v**) definito dalle (3.15) sia una soluzione regolare — nel senso precisato alla nota (2) — del problema (1.1)-(1.2)-(1.3), è sufficiente supporre che le funzioni $\mathbf{h}_*(\tau)$, $\mathbf{v}_*(\tau)$ siano generalmente continue in $[0, \infty[$, sommabili in ogni intervallo limitato $[0, T]$ e limitate in $]0, T]$ (cfr. [14] vol. I).

ed applicando le (4.24)-(4.27) si ha

$$\mathbf{h}_{zz} + \mathbf{v}_z = \mathbf{h}_* * g_{1,\tau} - \mathbf{v}_* * f_{1,\tau} = \mathbf{h}_\tau \ .$$

In maniera analoga, mediante le (4.25)-(4.26) si verifica l'equazione $(1.1)_2$.

Per quanto riguarda le condizioni $(1.3)_2$, si ha ad esempio che, detta $\lambda(\tau)$ una qualunque delle componenti φ_i e ψ_i dei vettori $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ e posto

$$M \equiv \sup_{\tau \geqslant 0} | \lambda(\tau) | \ ,$$

dalla (4.7) segue

$$\left| \int_0^\tau \lambda(\tau - u) f_1(z, u) \, du \right| \leq \frac{M I_0(\gamma z)}{2k(1+\varepsilon)\sqrt{k}} e^{-\frac{b^2 z^2}{4\tau}}$$

e poiché per $z \to \infty$ è [19]

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$$

risulta

$$\lim_{z\to\infty} \int_0^\tau \lambda(\tau - u) f_1(z, u) \, du = 0 \qquad \forall \tau > 0 \ .$$

Procedendo analogamente per gli integrali che contengono le funzioni f_2 ed f_3 ed applicando i risultati del lemma 4.2, si prova facilmente che

$$\lim_{z\to\infty} \mathbf{h}_* * f_i = \lim_{z\to\infty} \mathbf{v}_* * f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \forall \tau > 0 \ .$$

Passando poi alla verifica delle condizioni iniziali (1.2), si noti che per ogni $z > 0$ le funzioni $f_i(z, \tau)$ sono, quali funzioni di τ, sommabili e, d'altra parte, $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ per ipotesi sono limitate in ogni intervallo finito. Si ha quindi:

$$\lim_{\tau\to 0} \mathbf{h}_* * f_i = \lim_{\tau\to 0} \mathbf{v}_* * f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \forall z > 0 \ .$$

Restano quindi da provare le condizioni $(1.3)_1$; a tale scopo osserviamo che in virtù del teorema di Fubini, riesce

$$|\lambda * f_1| = \frac{z^2}{4(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}} \left| \int_0^2 (au+b)\, I_0(\gamma z \sqrt{u(2-u)})\, du \right.$$

$$\left. \int_0^\tau \lambda(\tau - v)\, e^{-kv - \frac{z^2}{4v}(au+b)^2} \frac{dv}{v\sqrt{v}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{M z^2}{2(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}} \int_0^2 (au+b)\, I_0(\gamma z \sqrt{u(2-u)})\, du \int_{\frac{1}{\sqrt{\tau}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{4}(au+b)^2 v^2} dv \leq$$

$$\leq \frac{M z}{2(1+\varepsilon)} \int_0^2 I_0[\gamma z \sqrt{u(2-u)}]\, du$$

per cui

$$\lim_{z\to 0} \lambda * f_1 = 0 \qquad \forall \tau > 0 .$$

Applichiamo ora la relazione (4.10) a $\lambda * f_2$

$$\lambda * f_2 = \lambda * r_2 + \frac{z\, e^{-k\tau}}{8\varepsilon\tau\sqrt{\pi\tau}} \left[b\, e^{-\frac{b^2 z^2}{4\tau}} - (2a+b) e^{-(2a+b)^2 \frac{z^2}{4\tau}} \right] * \lambda \tag{5.2}$$

e quindi, ricordando che (cfr. [14], Vol. III, p. 26)

$$\lim_{y\to 0} \lambda(\tau) * \frac{y}{2\sqrt{\pi\tau}} \frac{e^{-\frac{y^2}{4\tau}}}{\tau} = \lambda(\tau) \qquad \forall \tau > 0 \tag{5.3}$$

dalle (5.2)-(4.13)-(5.3) si ottiene

$$\lim_{z\to 0} \lambda * f_2 = -\frac{1}{4\varepsilon} [\lambda(\tau) - \lambda(\tau)] = 0 \qquad \forall \tau > 0 . \tag{5.4}$$

Infine, poiché

$$f_3 = (1+\varepsilon)(f_{1,z} + f_2) ,$$

per le (4.11)-(4.12)-(4.13) si ha

$$\lim_{z\to 0} \lambda * f_3 = \lim_{z\to 0} \frac{z\, e^{-k\tau}}{4a\tau\sqrt{\pi\tau}} \left[(2a+b)^2 e^{-(2a+b)^2 \frac{z^2}{4\tau}} - b^2 e^{-\frac{b^2 z^2}{4\tau}} \right] * \lambda$$

e cioè per la (5.3)

$$\lim_{z\to 0} \lambda * f_3 = \frac{2a+b-b}{2a} \lambda(\tau) = \lambda(\tau) \qquad \forall \tau > 0 .$$

Applicando tale risultato alle componenti h_i e v_i delle funzioni **h** e **v** definite dalle (3.15), si trae

$$\lim_{z\to 0} \mathbf{h}(z,\tau) = \mathbf{h}_*(\tau) , \quad \lim_{z\to 0} \mathbf{v}(z,\tau) = \mathbf{v}_*(\tau) \qquad \forall \tau > 0$$

e ciò completa la dimostrazione del teorema di esistenza. L'unicità della soluzione è poi assicurata da un noto teorema stabilito da R. NARDINI [7] [8].

§ II) - COMPORTAMENTO ASINTOTICO DEL MOTO DIFFERENZA E TEOREMI DI STABILITÀ

6. - COMPORTAMENTO ASINTOTICO DEL MOTO DIFFERENZA.

In vista della dimostrazione di alcuni teoremi di stabilità asintotica che esporremo nei numeri seguenti, premettiamo ora alcuni risultati concernenti il comportamento asintotico del moto differenza (**h**, **v**). A tale scopo ricordiamo anzitutto (cfr. [18] pag. 66) che, indicando con $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni continue in $[0, \infty[$, sussiste il seguente teorema che riportiamo per comodità di esposizione:

TEOREMA. *Se le funzioni* $f(t)$ *e* $g(t)$ *sono convergenti per* $t \to \infty$ *e se* $g'(t)$ *è sommabile in* $[0, \infty[$, *posto*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) , \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = g(\infty) ,$$

risulta

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(t-\tau)\, g'(\tau)\, d\tau = f(\infty)\,[g(\infty) - g(0)] . \tag{6.1}$$

Premesso ciò si osservi che, in base alle posizioni (4.23), le funzioni **h** e **v** si possono scrivere

$$(6.2)\quad \mathbf{h}(z,\tau) = \mathbf{h}_*(\tau) * \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau g_1(z,u)\,du - \mathbf{v}_*(\tau) * \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau f_1(z,u)\,du$$

$$(6.3)\quad \mathbf{v}(z,\tau) = \mathbf{v}_*(\tau) * \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau g_2(z,u)\,du - \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{h}_*(\tau) * \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau f_1(z,u)\,du\,.$$

D'altra parte, per ogni $z > 0$, le funzioni g_i sono assolutamente L trasformabili anche per $\mathrm{Re}(s) = 0$ (cfr. lemma 4.1) e quindi, applicando le (4.4)-(4.5)-(4.6), risulta

$$(6.4)\quad \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau g_1(z,u)\,du = \frac{1+\varepsilon e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}$$

$$(6.5)\quad \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau f_1(z,u)\,du = \varepsilon\,\frac{1-e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}$$

$$(6.6)\quad \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau g_2(z,u)\,du = \frac{\varepsilon+e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,.$$

Tali relazioni, osservando anche che

$$(6.7)\quad \lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau f_i(z,u)\,du = 0 \qquad (i=1,2,3) \qquad \forall z>0\,,$$

dimostrano il seguente

TEOREMA 6.1. *Se le funzioni* $\mathbf{h}_*(\tau)$ *e* $\mathbf{v}_*(\tau)$ *sono continue in* $[0,\infty[$ *ed ammettono limite finito per* $\tau\to\infty$, *posto*

$$\lim_{\tau\to\infty}\mathbf{h}_*(\tau) = \mathbf{h}_*(\infty)\,, \qquad \lim_{\tau\to\infty}\mathbf{v}_*(\tau) = \mathbf{v}_*(\infty)\,,$$

per ogni $z > 0$ *risulta*

$$(6.8)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\tau\to\infty} \mathbf{h}(z,\tau) = \dfrac{1+\varepsilon e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{h}_*(\infty) - \varepsilon\,\dfrac{1-e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{v}_*(\infty) \\ \lim\limits_{\tau\to\infty} \mathbf{v}(z,\tau) = \dfrac{\varepsilon+e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{v}_*(\infty) - \dfrac{1-e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}\,\mathbf{h}_*(\infty)\,. \end{cases}$$

Da tale teorema segue ovviamente il

COROLLARIO 6.1. *Se le funzioni* $\mathbf{h}_*(\tau)$ *e* $\mathbf{v}_*(\tau)$ *sono infinitesime per* $\tau\to\infty$, *tali risultano, per ogni* $z > 0$, *anche le funzioni* $\mathbf{h}(z,\tau)$ *e* $\mathbf{v}(z,\tau)$.

Inoltre — se indichiamo con C_ℓ la classe delle funzioni $\lambda(t)$ continue in $[0,\infty[$ e convergenti per $t\to\infty$ — il corollario 6.1, ora enunciato, si può invertire al seguente modo:

COROLLARIO 6.2. *Se* $\mathbf{h}_*(\tau)$ *e* $\mathbf{v}_*(\tau)$ *sono elementi di* C_ℓ, *per ogni* $z > 0$ *sussiste l'implicazione*:

$$(6.9)\qquad \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}(z,\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}(z,\tau) = 0 \Longrightarrow \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}_*(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}_*(\tau) = 0\,.$$

Invero, poiché $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ sono di classe C_ℓ, risultano applicabili le relazioni (6.8); d'altra parte, per ipotesi, deve aversi per ogni $z > 0$

$$\mathbf{h}_*(\infty) - \varepsilon\,\mathbf{v}_*(\infty) + \varepsilon\,[\mathbf{h}_*(\infty) + \mathbf{v}_*(\infty)]\,e^{-\frac{z}{\varepsilon}} = 0 \qquad \forall z > 0$$

e ciò implica necessariamente $\mathbf{h}_*(\infty) = \mathbf{v}_*(\infty) = 0$.

OSSERVAZIONE 6.1. In altri termini dunque — nell'ambito di perturbazioni al contorno $(\mathbf{h}_*, \mathbf{v}_*)$ di classe C_ℓ — la differenza tra il moto imperturbato ed il moto perturbato può annullarsi, al crescere di τ, soltanto se è infinitesima la perturbazione al contorno. Il corollario 6.2 esprime quindi una *condizione necessaria* affinché il moto differenza sia infinitesimo, limitatamente però a perturbazioni al contorno che abbiano determinati requisiti. Restrizioni di questo tipo sono, com'è noto, per lo più inevitabili negli enunciati dei teoremi tauberiani mediante i quali dalle proprietà della trasformata $\hat{F}(s)$ si desu-

mono alcune proprietà sul comportamento asintotico della funzione originale $F(t)$, nell'ipotesi però che la $F(t)$ soddisfi a particolari condizioni. Poiché nella teoria della trasformazione di Laplace numerosi sono i teoremi tauberiani, è possibile — in base alle formule di L trasformazione stabilite al n. 4 — ricavare altre condizioni necessarie di tipo analogo a quella enunciata nel corollario 6.2, pur di limitare a priori la variabilità dei dati al contorno $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ in opportune classi funzionali.

A titolo di esempio consideriamo la classe C_L delle funzioni $\lambda(t)$ che siano derivabili in $[0, \infty[$ e tali che:

$$(6.10) \qquad \begin{cases} \text{i) } \lambda'(t) \text{ sia L trasformabile per } Re(s) > 0\,, \\ \text{ii) per ogni } t > 0 \text{ risulti}^6 \end{cases}$$

$$\lambda'(t) = O_L\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \forall t > 0\,.$$

L'applicazione di un noto teorema tauberiano (cfr. [14] vol. I, pag. 516) consente di dimostrare il seguente

TEOREMA 6.2. *Se* $\mathbf{h}_*$ *e* $\mathbf{v}_*$ *sono elementi di* C_L, *condizione necessaria affinché le funzioni* $\mathbf{h}(z, \tau)$ *e* $\mathbf{v}(z, \tau)$ *siano infinitesime per* $\tau \to \infty$ *è che si abbia*

$$(6.11) \qquad \lim_{\tau \to \infty} \mathbf{h}_*(\tau) = \lim_{\tau \to \infty} \mathbf{v}_*(\tau) = 0\,.$$

DIM. Poiché per ipotesi $\mathbf{h}'_*$ e $\mathbf{v}'_*$ sono L trasformabili per $Re(s) > 0$, le funzioni $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ sono assolutamente trasformabili almeno nel semipiano $Re(s) > 0$ (cfr. [15], pag. 120) ed ivi si ha

$$(6.12) \qquad \begin{cases} L(\mathbf{h}'_*) = s\,\hat{\mathbf{h}}_*(s) - \mathbf{h}_*(0) \\ L(\mathbf{v}'_*) = s\,\hat{\mathbf{v}}_*(s) - \mathbf{v}_*(0)\,. \end{cases}$$

[6] La notazione $b(t) = 0_L\left(\frac{1}{t}\right)$ per $t > 0$ stà ad indicare, com'è noto [14], che esiste una costante positiva K' tale che

$$b(t) \geqslant -\frac{K'}{t} \qquad \forall t > 0\,.$$

D'altra parte le funzioni $f_i(z, \tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ sono assolutamente L trasformabili nel semipiano $Re(s) > -k$ (cfr. lemma 4.1) per cui, in base ad un noto teorema (cfr. [15], pag. 115), i prodotti di convoluzione

$$\mathbf{h}_* * f_i \,, \qquad \mathbf{v}_* * f_i \qquad\qquad (i = 1, 2, 3)$$

sono L trasformabili almeno nel semipiano $Re(s) > 0$ e sussistono ivi, come segue dalle (3.15)-(4.23), le seguenti formule di L trasformazione

$$(6.13) \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{h}}(z, s) = \hat{\mathbf{h}}_*(s)\, \hat{g}_1(z, s) - \hat{\mathbf{v}}_*(s)\, \hat{f}_1(z, s) \\ \hat{\mathbf{v}}(z, s) = \hat{\mathbf{v}}_*(s)\, \hat{g}_2(z, s) - \dfrac{1}{\varepsilon}\, \hat{\mathbf{h}}_*(s)\, \hat{f}_1(z, s) \,. \end{cases}$$

Tali relazioni sono risolubili rispetto a $\hat{\mathbf{h}}_*$ e $\hat{\mathbf{v}}_*$ per cui, moltiplicando per s e ponendo per brevità

$$(6.14) \qquad \gamma_j(z, s) = \frac{\varepsilon\, \hat{g}_j}{\varepsilon\, \hat{g}_1\, \hat{g}_2 - \hat{f}_1^{\,2}} \,, \qquad\qquad (j = 1, 2) \,,$$

si ottiene

$$(6.15) \qquad \begin{cases} s\, \hat{\mathbf{h}}_* = \gamma_2 \left(s\, \hat{\mathbf{h}} + s\, \dfrac{\hat{f}_1}{\hat{g}_2}\, \hat{\mathbf{v}} \right) \\ s\, \hat{\mathbf{v}}_* = \gamma_1 \left(s\, \hat{\mathbf{v}} + \dfrac{s}{\varepsilon}\, \dfrac{\hat{f}_1}{\hat{g}_1}\, \hat{\mathbf{h}} \right) . \end{cases}$$

Com'è facile verificare mediante le (4.4)-(4.5)-(4.6), le funzioni γ_j, g_j $(j = 1, 2)$ ammettono limite finito per $s \to 0$ e, precisamente, per ogni $z > 0$ risulta:

$$(6.16) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{s \to 0} \gamma_1(z, s) = \dfrac{\varepsilon + e^{\frac{z}{\varepsilon}}}{1 + \varepsilon} \\ \lim\limits_{s \to 0} \gamma_2(z, s) = \dfrac{1 + \varepsilon\, e^{\frac{z}{\varepsilon}}}{1 + \varepsilon} \end{cases} \qquad \forall z > 0$$

$$(6.17)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{s\to 0} \hat{f}_1/\hat{g}_2 = \varepsilon \dfrac{1 - e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{\varepsilon + e^{-\frac{z}{\varepsilon}}} \\ \lim\limits_{s\to 0} \hat{f}_1/\hat{g}_1 = \varepsilon \dfrac{1 - e^{-\frac{z}{\varepsilon}}}{1 + \varepsilon\, e^{-\frac{z}{\varepsilon}}} \end{cases} \qquad \forall z > 0 \ .$$

Premesso ciò, si osservi che per ipotesi è

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}(z,\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}(z,\tau) = 0$$

e quindi l'esistenza di tali limiti implica, com'è noto (cfr. [14], vol. I, pag. 458), che si abbia

$$(6.18)\qquad \lim_{s\to 0} s\,\hat{\mathbf{v}}(z,s) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{\mathbf{h}}(z,s) = 0 \ .$$

Dalle (6.15)-(6.16)-(6.17)-(6.18) segue pertanto che

$$(6.19)\qquad \lim_{s\to 0} s\,\hat{\mathbf{h}}_*(s) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{\mathbf{v}}_*(s) = 0 \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

per cui, in base alle (6.12)-(6.19), si ha

$$(6.20)\qquad \lim_{s\to 0} L(\mathbf{h}_*') = -\mathbf{h}_*(0) \ , \quad \lim_{s\to 0} L(\mathbf{v}_*') = -\mathbf{v}_*(0).$$

Le funzioni $\mathbf{h}_*'$ e $\mathbf{v}_*'$ soddisfano dunque le condizioni (6.10)-(6.20) e tali condizioni consentono di affermare (cfr. [14], vol. I, pag. 516) che

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \mathbf{h}_*'(u)\,du = -\mathbf{h}_*(0) \ , \quad \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \mathbf{v}_*'(u)\,du = -\mathbf{v}_*(0)$$

e cioè $\mathbf{h}_*(\tau)$ e $\mathbf{v}_*(\tau)$ sono infinitesime per $\tau \to \infty$.

OSSERVAZIONE 6.2. Conformemente all'intuizione fisica è quindi possibile affermare — in base a tale teorema — che il moto differenza $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ non può risultare infinitesimo quando le perturbazioni al contorno $(\mathbf{h}_*, \mathbf{v}_*)$ siano funzioni non decrescenti.

OSSERVAZIONE 6.3. L'intuizione fisica da una parte e le conclusioni analitiche che, dall'altra, si traggono dal corollario 6.2, potrebbero far ritenere che l'implicazione (6.9) deve essere verificata in ogni caso e che le restrizioni imposte alla variabilità dei dati al contorno in opportune classi funzionali, sono dovute unicamente allo strumento analitico che si è adoperato. Al riguardo, precisiamo subito che una tale congettura è senz'altro falsa in quanto — contrariamente all'intuizione fisica — esistono moti differenza $(\mathbf{h}, \mathbf{v})$ che risultano infinitesimi anche quando le perturbazioni al contorno non lo sono. A tale scopo dimostreremo il seguente teorema.

TEOREMA 6.3. *Condizione sufficiente affinché si abbia*

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{h}(z,\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathbf{v}(z,\tau) = 0 \qquad \forall z > 0 \tag{6.21}$$

è che esistano e siano finiti i limiti

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \mathbf{h}_*(u)\,du\,, \qquad \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \mathbf{v}_*(u)\,du$$

con $\mathbf{h}_*$ *e* $\mathbf{v}_*$ *funzioni continue in* $[0,\infty[$.

DIM. Invero, mediante integrazione per parti e tenendo presente le (4.28), le funzioni $\mathbf{h}$ e $\mathbf{v}$ si possono esprimere nella forma

$$\begin{cases} \mathbf{h}(z,\tau) = \dfrac{\partial g_1}{\partial \tau} * \displaystyle\int_0^\tau \mathbf{h}_*(u)\,du - \dfrac{\partial f_1}{\partial \tau} * \int_0^\tau \mathbf{v}_*(u)\,du \\ \mathbf{v}(z,\tau) = \dfrac{\partial g_2}{\partial \tau} * \displaystyle\int_0^\tau \mathbf{v}_*(u)\,du - \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial f_1}{\partial \tau} * \int_0^\tau \mathbf{h}_*(u)\,du \end{cases} \tag{6.22}$$

e poiché — com'è facile verificare — le funzioni

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f_1(z,\tau)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} g_i(z,\tau) \qquad (i = 1, 2)$$

sono, quali funzioni di τ e per ogni $z > 0$, sommabili in $[0, \infty[$, è possibile applicare la relazione (6.1). Essendo per ipotesi

$$\left| \int_0^\infty \mathbf{h}_*(u)\,du \right| < \infty\,, \qquad \left| \int_0^\infty \mathbf{v}_*(u)\,du \right| < \infty$$

ed osservando che per ogni $z > 0$ risulta (n. 4)

$$\lim_{\tau \to \infty} f_i(z, \tau) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad\qquad \forall z > 0$$

dalle (6.1)-6.22) seguono facilmente le (6.21).

Si noti infine che le ipotesi del corollario 6.1 e quelle del teorema ora dimostrato non sono confrontabili e, d'altra parte, queste ultime non implicano che $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ siano infinitesime; basti pensare ad esempio agli integrali di Fresnel.

7. - Stabilità del moto imperturbato.

Poniamo

$$(7.1) \qquad \begin{cases} r(\tau) = |\mathbf{h}_*(\tau)| + |\mathbf{v}_*(\tau)| \\ \rho(\tau) = \sup\limits_{z>0} |\mathbf{h}(z, \tau)| + \sup\limits_{z>0} |\mathbf{v}(z, \tau)| \end{cases}$$

ed introduciamo le metriche

$$(7.2) \qquad \begin{cases} \bar{r} = \sup\limits_{\tau \geqslant 0} r(\tau) \\ \bar{\rho} = \sup\limits_{\tau \geqslant 0} \rho(\tau)\,. \end{cases}$$

In base a definizioni ben note [1] [4], diremo che:

Definizione 7.1. Il moto imperturbato $(\mathbf{H}^*, \mathbf{V}^*)$ è stabile rispetto alle metriche $\bar{r}$ e $\bar{\rho}$ se, in corrispondenza di ogni moto perturbato $(\mathbf{H}^* + \mathbf{h}, \mathbf{V}^* + \mathbf{v})$, risulta

$$(7.3) \qquad \forall \sigma > 0 \qquad \exists\, \delta(\sigma) > 0 : \qquad \bar{r} < \delta(\sigma) \Rightarrow \bar{\rho} < \sigma\,.$$

Nelle ipotesi — più volte precisate — di continuità dei vettori $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ facilmente si dimostra il seguente teorema di stabilità nella classe $\mathfrak{I}$:

TEOREMA 7.1. *La soluzione nulla* $(\mathbf{h}, \mathbf{v}) \equiv (0,0)$ *del sistema* (1.1) *è stabile rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$.

DIM. Indichiamo con φ_i e ψ_i $(i = 1, 2)$, rispettivamente, le componenti di $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$. Tenendo presente le espressioni (3.15) delle componenti $h_i(z, \tau)$ del vettore $\mathbf{h}(z, \tau)$ ed osservando che $(a \pm b)^2 < 2(a^2 + b^2)$, si ha

$$|\mathbf{h}(z,\tau)| = [(\varphi_1 * g_1 - \psi_1 * f_1)^2 + (\varphi_2 * g_1 - \psi_2 * f_1)^2]^{1/2} <$$
$$< \sqrt{2}\,[(\varphi_1 * g_1)^2 + (\varphi_2 * g_1)^2 + (\psi_1 * f_1)^2 + (\psi_2 * f_1)^2]^{1/2}$$

e quindi, a fortiori,

$$(7.4)\quad |\mathbf{h}(z,\tau)| < \sqrt{2}\{[(|\varphi_1| + |\varphi_2|) * |g_1|]^2 + [(|\psi_1| + |\psi_2|) * |f_1|]^2\}^{1/2} \leq$$
$$\leq \sqrt{2}\,[|\varphi_1| + |\varphi_2|] * |g_1| + \sqrt{2}\,[|\psi_1| + |\psi_2|] * |f_1|\,.$$

Se — per ogni fissato punto (z, τ) di Ω — indichiamo con $A(z, \tau)$ la più grande delle determinazioni assunte dalle funzioni $|g_1|$ ed $|f_1|$ ed osserviamo inoltre che $|a| + |b| < \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, dalle (7.4)-(7.1) si ha ovviamente:

$$|\mathbf{h}(z,\tau)| < \sqrt{2}\,A(z,\tau) * [|\varphi_1| + |\varphi_2| + |\psi_1| + |\psi_2|] \leq$$
$$\leq 2\,A(z,\tau) * [\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}] \leq$$
$$\leq 2 \sup_{\tau \geq 0} r(\tau) \int_0^\infty A(z,\tau)\,d\tau$$

e poiché, applicando il lemma 4.4, risulta

$$\int_0^\infty A(z,\tau)\,d\tau < \mu \qquad \forall z > 0$$

con μ costante, si trae

$$(7.5)\qquad |\mathbf{h}(z,\tau)| < 2\mu\bar{r}\,.$$

In maniera analoga si prova che

$$|\mathbf{v}(z,\tau)| < 2\mu'\bar{r} \tag{7.6}$$

per cui, posto $\eta = \max(\mu, \mu')$ e ricordando le (7.1)-(7.2), si ottiene

$$\bar{\rho} = \sup_{\tau \geqslant 0} \rho(\tau) < 4\eta\bar{r}$$

da cui segue la tesi.

8. - Teoremi di stabilità asintotica.

Con riferimento alle definizioni date in [1] diremo che:

Definizione 8.1. Il moto imperturbato $(\mathbf{H}^*, \mathbf{V}^*)$ è asintoticamente stabile rispetto alle metriche $\bar{r}$ e $\bar{\rho}$ se è stabile rispetto a tali metriche e se inoltre esiste un δ positivo tale che — in corrispondenza di ogni moto perturbato che verifichi la condizione $\bar{r} < \delta$ — si abbia

$$\lim_{\tau \to \infty} \rho(\tau) = 0 .$$

Pertanto, in base ai risultati del n. 6 sul comportamento asintotico del moto differenza ed in virtù del teorema di stabilità dimostrato al numero precedente, siamo in grado di enunciare subito alcuni teoremi di stabilità asintotica del moto imperturbato. Così ad esempio dal corollario 6.1 e dal teorema 6.3 derivano, rispettivamente, i seguenti criteri.

Teorema 8.1. « *Se* $\lim_{\tau \to \infty} r(\tau) = 0$, *il moto imperturbato è asintoticamente stabile rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$ ».

Teorema 8.2. « *Condizione sufficiente affinché il moto imperturbato sia asintoticamente stabile rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$ *è che esistano e siano finiti i limiti*

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau \mathbf{h}_*(u)\, du , \qquad \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau \mathbf{v}_*(u)\, du » .$$

OSSERVAZIONE 8.1. Dal punto di vista fisico, il risultato espresso dal teorema 8.1 è facilmente intuibile. Al contrario, l'affermazione del teorema 8.2 non trova riscontro nell'intuizione fisica giacché, a norma di tale teorema, si ha stabilità asintotica anche quando le perturbazioni al contorno $(\mathbf{h}_*, \mathbf{v}_*)$ sono, ad esempio, funzioni del tipo

$$\cos(a\,\tau^2)\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}(b\,\tau^2)\,\mathbf{e}_2$$

con a e b costanti.

Ai fini dell'analisi della stabilità asintotica del moto imperturbato, risultano poi di notevole interesse le applicazioni del corollario 6.2 e del teorema 6.2; essi consentono infatti di invertire — nell'ambito di opportune classi funzionali — l'implicazione del teorema 8.1 circa l'attrattività della soluzione nulla del sistema (1.1). Si vengono in tal modo ad individuare molti casi in cui la stabilità del moto imperturbato non può essere di tipo asintotico. Allo scopo di enunciare siffatti risultati e ricordando la definizione delle classi C_ℓ e C_L date al n. 6, premettiamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 8.2. La funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ è di classe C_ℓ (risp. C_L) in $[0, \infty[$ se ciascuna delle componenti cartesiane di $\mathbf{u}$ è un elemento di C_ℓ (risp. C_L) in $[0, \infty[$.

Dal corollario 6.2 e dal teorema 6.2 e tenendo presente tale definizione, si ricava quindi la seguente condizione necessaria per l'attrattività della soluzione nulla delle equazioni (1.1):

TEOREMA 8.3. « *Per ogni perturbazione al contorno* $(\mathbf{h}_*, \mathbf{v}_*)$ *che sia di classe* C_ℓ *oppure di classe* C_L, *condizione necessaria affinché la stabilità del moto imperturbato* $(\mathbf{H}^*, \mathbf{V}^*)$ *rispetto alle metriche* $\bar{r}$ *e* $\bar{\rho}$ *sia di tipo asintotico, è che si abbia*

$$\lim_{\tau \to \infty} r(\tau) = 0 \text{ » .}$$

OSSERVAZIONE 8.2. I teoremi 8.1 ed 8.3 consentono quindi di affermare — nel caso che le perturbazioni al contorno siano elementi di C_ℓ o di C_L — la validità della doppia implicazione:

$$\lim_{\tau \to \infty} r(\tau) = 0 \iff \lim_{\tau \to \infty} \rho(\tau) = 0 .$$

OSSERVAZIONE 8.3. Numerosi ed immediati sono gli esempi di perturbazioni al contorno $(\mathbf{h}_*, \mathbf{v}_*)$ in corrispondenza delle quali — a norma del teorema 8.3 — *la stabilità della soluzione nulla delle* (1.1) *non può essere di tipo asintotico.* Si osservi infatti che, detta $\lambda(\tau)$ una qualunque delle componeni di $\mathbf{h}_*(\tau)$ e $\mathbf{v}_*(\tau)$, ciò accade ad esempio in ognuno dei seguenti casi:

a) $\lambda(\tau)$ converge per $\tau \to \infty$ ma non è infinitesima.

b) $\lambda(\tau)$ è non decrescente per ogni $\tau > 0$ (ed ha derivata L trasformabile).

c) $\lambda(\tau) = \cos \mu(\tau)$, $\lambda(\tau) = \operatorname{sen} \mu(\tau)$ dove $\mu(\tau)$ è tale che $\tau \mu'(\tau)$ è limitata per ogni $\tau > 0$ (ad esempio $\mu(\tau) = \log \tau$).

d) $\lambda(\tau) = \int_0^\tau \frac{\operatorname{sen} u}{u} \, du$ e così via.

OSSERVAZIONE 8.4. Rileviamo infine che un altro caso in cui la stabilità del moto imperturbato non risulta di tipo asintotico si ha quando almeno una delle componenti φ_i e ψ_i dei vettori $\mathbf{h}_*$ e $\mathbf{v}_*$ è del tipo: $\cos(a_i \tau)$, $\operatorname{sen}(b_i \tau)$. Per dimostrare tale affermazione occorre però utilizzare la formulazione esplicita del moto differenza in quanto le funzioni dette non appartengono ad alcuna delle classi funzionali cui sono applicabili i teoremi di tipo tauberiano.

BIBLIOGRAFIA

[1] KNOPS R. J. and WILKES E. W., *Theory of Elastic Stability*, in Handbuch der Physik, Bd. VI, a/3, pp. 125-302.

[2] SERRIN J., *On the stability of viscous fluid motions*, Arch. Rational Mech. Anal., **3**, pp. 271-288 (1959).

[3] AGOSTINELLI C., *Magnetofluidodinamica*, Monogr. Matemat. del C.N.R., n. 14, Ediz. Cremonese (1966).

[4] RIONERO S., *Sulla stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **76**, pp. 75-92 (1967).

[5] RIONERO S., *Metodi variazionali per la stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **78**, pp. 339-364 (1968).

[6] RIONERO S., *Sulla stabilità magnetoidrodinamica in media con vari tipi di condizioni al contorno*, Ricerche di Mat., **16**, pp. 64-78 (1968).

[7] NARDINI R., *Due teoremi di unicità nella teoria delle onde magnetoidrodinamiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **21**, pp. 303-315 (1952).

[8] NARDINI R., *Soluzione di un problema al contorno della magnetoidrodinamica*, Ann. Mat. Pura e Appl., (4), **35**, pp. 269-290 (1953).

[9] NARDINI R., *Su un caso particolare di stabilità in media della magnetoidrodinamica*, Ann. Mat. Pura e Appl., (4), **84**, pp. 95-100 (1970).
[10] LUDFORD G. S. S., *Rayleigh's Problem in Hydromagnetics: The Impulsive Motion of Pole-piece*, Arch. for Rat. Mech. and Analysis, **3**, pp. 14-27 (1959).
[11] ROSCISZEWSKI J., *Magnetohydrodynamic Rayleigh Problem for Magnetic Prandtl Number Close to one*, Arch. for Rat. Mech. and Analysis, **16**, pp. 230-237 (1964).
[12] MAIELLARO M., *Su due casi particolari di stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **20**, pp. 105-114 (1971).
[13] GALDI G. P., *Su un criterio di stabilità non lineare in presenza di perturbazioni iniziali ed al contorno e sua applicazione a due classi di moti magnetoidrodinamici*, Bollettino U.M.I., (4), **8**, pp. 336-354 (1973).
[14] DOETSCH G., *Handbuch der Laplace Transformation*, Band I, II, III, Verlag Birkkauser Basel (1950).
[15] GHIZZETTI A. e OSSICINI A., *Trasformate di Laplace e Calcolo simbolico*, UTET, (1971).
[16] WIDDER D. V., *The Laplace Transform*, Princeton University Press (1946).
[17] ERDELYI A., MAGNUS W., OBERHETTINGER F., TRICOMI F. G., *Tables of Integral Transform*, Vol. I, Mc Graw-Hill Book Comp. (1967).
[18] BERG L., *Introduction to the Operational Calculus*, North-Holland Publ. Comp. (1967).
[19] WATSON G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge, At the University Press (1966).
[20] WIENER N., *Generalized Harmonic Analysis - Tauberian Theorems*, the M.I.T. Press (1964).
[21] PITT H. R., *Tauberian Theorems*, Oxford University Press (1958).

RELAZIONE SUI LAVORI COMPIUTI DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

durante l'anno 1974, letta nell'adunanza plenaria del 31 gennaio 1975

dal Socio BALDASSARRE DE LERMA

Segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

Anche nell'anno accademico 1974 si sono tenute le consuete otto tornate ordinarie, sotto la Presidenza di classe del Socio Prof. Antonio Scherillo. Nel corso di queste sedute sono stati illustrati dai Soci presentatori ed ampiamente discussi numerosi contributi di ricerca originale di studiosi delle Scuole del nostro collegio accademico. Né è mancata, anche per lo scorso anno accademico, la partecipazione di valenti studiosi stranieri che ci hanno fatto pervenire lavori scientifici, nel campo delle discipline matematiche, dei quali hanno chiesto pubblicazione nei Rendiconti. Siamo per ciò ben lieti di poter constatare che, anche in tempi non dei più felici per la ricerca scientifica, l'attività della nostra Accademia non sia venuta meno alla sua tradizione di promuovere e favorire la ricerca pura. Il bel volume del Rendiconto, il 41° della Serie IV, di imminente pubblicazione per i tipi della Tipografia Giannini in Napoli, contiene una trentina di lavori che si riportano, per i loro contenuti, a tutte le discipline delle due Sezioni di Scienze naturali e di Scienze fisiche e matematiche. Anche la serie degli « Atti » si è arricchita di ben tre poderose Memorie, due del Socio prof. Giuseppe Imbò, una del Socio prof. Mario Galgano, con la collaborazione del prof. B. Moraldo.

I lavori lell'Accademia hanno avuto inizio con la tornata del 5 gennaio, in cui il Socio emerito prof. Mauro Picone presentava uno studio del professore Coreen sui teoremi di Sturm per sistemi di equazioni differenziali ellittiche di secondo ordine e il Socio Mario Curzio illustrava una ricerca del dott. A. Caggeci su una classe di quasicorpi di dimensione infinita sul loro nucleo. Assai densa la tornata successiva del 2 febbraio: il Socio prof. Carrelli riferiva su nuove sue ricerche in collaborazione con Luponio e con Porreca, in campo di ferromagnetismo, il Corrispondente prof. Stampacchia trasmetteva per l'inserimento nei Rendiconti, una nota di M. Martelli e A. Vignoli dal titolo « Some surjectivity results for non compact multivalued maps »,

mentre su ricerche in campo algebrico, con riferimento ad alcune questioni di risolubilità in anelli associativi, Curzio illustrava una ricerca del prof. S. Rao, e Carlo Miranda presentava uno studio di C. Sbordone, in campo di Analisi, sulla caratterizzazione degli operatori differenziali del 2° ordine di tipo ellittico. Nella stessa seduta il Socio Sersale dava comunicazione, a nome degli Autori R. Aiello e C. Colella, di nuove ricerche su alcuni silicoalluminati idrati di sodio sintetici.

Notevole, nel corso delle sedute successive, l'ulteriore contributo a ricerche in Analisi matematica, che hanno portato vari studiosi italiani e stranieri, ricerche che sono state ampiamente illustrate dal Socio presentatore prof. Miranda. La brevità del tempo concessomi mi consente di dare di esse soltanto un fugace cenno: S. Materasso ha condotto uno studio su una classe di equazioni ipoellittiche, D. Fortunato si è occupato di « spazi di Sobolov » con peso ed applicazioni ai problemi ellittici, A. Alvino ha trattato del proplema esterno di Dirichlet per i sistemi ellittici, mentre un gruppo di matematici rumeni (Chaleat, Krivoshein e Mangeron) ha trattato di una nuova classe di equazioni integro-differenziali non lineari a derivate parziali in due variabili indipendenti. E, restando ancora nel campo delle discipline matematiche, dobbiamo ricordare le ricerche di A. Romano sull'influenza di un extra-flusso d'energia sulla termodinamica di un dielettrico elastico dispersivo e quella di R. Grassini, in campo di Meccanica relativistica, che portano ad un modello matematico generale spazio-tempo, due contributi questi presentati dal prof. Carlo Tolotti. Come pure, per conto del prof. Salvadori dell'Università di Roma, il Socio Tolotti ha riferito su uno studio di B. D'Onofrio e F. Visentin riguardante una generalizzazione di alcuni teoremi di stabilità asintotica e su una ricerca di due studiosi americani, i dottori J. R. Graef e P. W. Spikes riguardante « A nonoscillation result for second order ordinary differential equations ».

Il Socio prof. Stoppelli ha portato il contributo della sua Scuola con una ricerca di Renno sulla stabilità asintotica in presenza di perturbazioni al contorno per una classe di moti magneto-idrodinamici, e con altro lavoro delo stesso dott. Renno in collaborazione con A. D'Anna su una classe di fenomeni dissipativi. La geometria figura con un lavoro di D. Sara, del quale è stato relatore il prof. Dalla Volta, sulle faccette olomorfe a curvatura massima dello spazio delle matrici simmetriche.

Un lavoro del Socio prof. Covello in collaborazione con il prof. O. Schettino e con L. Ferrara porta i risultati di un approfondito studio cromatografico della frazione insaponificabile dell'olio di semi di « *Cardiospermum halicacabum* », con l'identificazione e dosaggio dei tocofe-

roli che vi sono contenuti. Altra ricerca della stessa Scuola, alla quale hanno collaborato col socio prof. Covello, il prof. O. Schettino e i dottori L. Ferrara e P. Forgione, è uno studio comparativo su parametri cromatografici di vari iododerivati organici. Della scuola del Socio prof. Enzo Leone figurano ulteriori approfondite ricerche, in collaborazione con i dottori Farina e Quezaba, sulla ribonucleasi seminale in Bovini, nonché quelle d'interesse per la conoscenza del metabolismo dei Cefalopodi, sul metabolismo dell'adenina in *Octopus vulgaris*. A quest'ultima ricerca hanno collaborato col prof. Leone i dottori Farina e Faraone-Mennella.

Un interessante contributo alla conoscenza delle proprietà fisiche di meteoriti ha portato il prof. Francesco Cennamo che ha presentato su tale tema un lavoro al quale ha collaborato il dottor Alberto Colasanti.

Nel campo delle discipline geo-mineralogiche vanno poi ricordate le nuove osservazioni sul bradisismo flegreo che formano oggetto di una nota dei dottori Bonasia e Montagna presentata dal Socio prof. Imbò. Il Socio prof. Scherillo ha riferito su un interessante gruppo di ricerche petrografiche sull'Isola di Capri e sulla presenza di cineriti riolitiche nei depositi messiniani, cioè del più recente miocene, nella valle del Crati in Calabria settentrionale. Queste ricerche sono dovute rispettivamente al dott. G. Nardi e allo stesso Nardi in collaborazione con Di Nocera S. e F. Ortolani. Altri studi in campo mineralogico, dovuti ad Aiello e Porcelli, riguardano i depositi di tufo cabazitico della regione campana. Una delle memorie del Socio prof. Imbò, alle quali si è precedentemente accennato, è un vasto studio della crosta basale del Somma-Vesuvio che completa l'ottavo volume della Serie 3ª degli « Atti ». È in corso il nuovo volume degli « Atti », il nono della stessa serie, in cui figura un'altra importante memoria del prof. Imbò, sulla radioattività naturale delle lave vesuviane; e nello stesso volume è pubblicata la memoria del prof. Mario Galgano e B. Moraldo, adorna di magnifiche tavole, che è un'indagine originale intorno a problemi etnologici e antropologici relativi al Monte Bego nelle Alpi marittime.

Per la Sezione di Scienze Naturali sono stati coperti i due posti di Socio ordinario, di cui si disponeva, con la nomina ad ordinario dei Soci Prof. Lorenzo Mangoni, cattedratico di Chimica organica nella nostra Università, e Prof. Vincenzo Leone, titolare della Cattedra di Chimica biologica.

Per l'anno 1974 sono stati banditi tre Premi accademici di L. 500.000 per le Scienze matematiche, per le Scienze Biologiche e per le Discipline geomineralogiche. I Premi relativi sono stati assegnati ai professori Albino Canfora, Alessandro Morescalchi e Pio Di Girolamo. Si darà lettura a parte delle relazioni .

Per questo nuovo anno accademico il Consiglio di Classe risulta così costituito: Presidente, a norma di statuto, essendo stato Vice Presidente per l'anno precedente, il Prof. Mario Galgano; Vice Presidente il Prof. Mario Curzio; Tesoriere il Prof. Riccardo Sersale; Segretario il Prof. Baldassarre de Lerma.

Il Segretario
BALDASSARRE DE LERMA

RELAZIONE DELLA COMMISSIONE GIUDICATRICE DEL PREMIO PER LE SCIENZE GEOMINERALOGICHE NELLA BRANCA « VULCANOCLASTITI »

La commissione giudicatrice del premio bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche per le scienze geomineralogiche nella branca « vulcanoclastiti » composta dai consoci Imbò, Maccagno, Sersale, Scarsella, Scherillo si è riunita nella sede della Società Nazionale il 4 gennaio e ha nominato presidente il consocio Imbò e segretario/relatore il consocio Scherillo.

Al concorso si è presentato un solo concorrente: il prof. Pio Di Girolamo, stabilizzato di petrografia presso l'Università di Napoli. Il prof. Di Girolamo presenta 10 note, delle quali 4 a suo unico nome e 6 in collaborazione con scienziati italiani e stranieri; tutte trattano di petrografia vulcanologica e la massima parte rientra nel campo di studio delle vulcanoclastiti.

Nell'ambito del vulcano di Roccamonfina il prof. Di Girolamo ha dato il primo studio della manifestazione eccentrica di Sesto Campano. Si tratta di un caso di scorie del quale resta la sezione del condotto e un lembo di piroclastiti lacustri. Nell'ambito del Somma/Vesuvio, oltre a uno studio di lave orvietitiche portate in luce da trivellazioni, che rientra nella petrografia classica, il prof. Di Girolamo, nel rilevamento lungo il margine sud occidentale del Vesuvio ha descritto, insieme colla bocca locale a breccia lavica di Torre Bassano anche le coate di fango a « facies fredda » che sono in evidenza per un buon tratto della costa e che, per la loro corrispondenza colla parte superiore della serie degli scavi di Ercolano, sono da riferirsi alle vulcanoclastiti dell'eruzione del 79 d. C.

Tra le vulcanoclastiti della Campania un'importanza tutta particolare ha quella formazione che fino a pochi anni or sono era chiamata « tufo campano », mentre ora si preferisce chiamarla « ignimbrite campana ». Allo studio di questa vulcanoclastite il prof. Di Girolamo ha apportato contributi molto notevoli. L'ipotesi da lui avanzata che il tufo sia il prodotto di emissioni successive lungo una frattura nel margine settentrionale della zona flegrea, di chimismo gradualmente variante, si fonda sopratutto sulla composizione chimica delle scorie e sulle loro dimensioni e distribuzione aerale e spiega le differenze che

si riscontrano nell'ambito del tufo campano nell'area della pianura Campana e dei rilievi appenninici circostanti e rappresenta un solido punto di partenza per ulteriori ricerche. Dal tufo campano sono state distinte le pomici che si trovano alla base di alcuni banchi del tufo stesso e che sono da attribuirsi ad uno dei più intensi episodi del vulcanismo campano. Il chimismo ne è trachifonolitico potassico.

Problema fondamentale è quello della successione tra i principali centri vulcanici campani e questo può esser risolto collo studio delle serie vulcanoclastiche. Secondo le ricerche del prof. Di Girolamo (e collaboratori) la serie è la seguente: Roccamonfina, tufo campano, Somma trachitico, Somma tefritico/leucitico, tufo giallo napoletano, vulcani flegrei recenti (Agnano, Astroni), Somma/Vesuvio attuale. La determinazione dell'età assoluta di un legno fossile incluso nella parte superiore del complesso del tufo campano di Avellino ha dato 27.000 anni, mentre l'età della grande eruzione esplosiva del tufo di Cetara/Serrara ad Ischia è stata calcolata (da altri studiosi) 24.000 anni.

Il prof. Di Girolamo ha eseguito (in coll. con D. Stazione) il rilevamento geopetrografico dell'Isola di Procida e ne ha costruito la carta geologica. L'isola consta essenzialmente delle vulcanoclastiti di 7 vulcani e complessi vulcanici, dei quali è stata stabilita la successione; due (Vivara e Solchiaro) originariamente sottomarini, hanno dato jaloclastiti che corrispondono perfettamente a quelle classiche degli Iblei. Si tratta della prima segnalazione di jaloclastiti nell'ambito del vulcanismo napoletano, mentre nell'ambito dell'Appennino Campano e precisamente nel flysch del Cilento lo stesso Di Girolamo aveva in precedenza segnalato una breccia jaloclastitica, in relazione con lave a cuscino.

È evidente che il prof. Di Girolamo ha svolto un'attività assai intensa e fruttuosa. Molte delle sue ricerche, e in particolare quelle sulle vulcanoclastiti, si distinguono per l'originalità dei concetti e l'importanza dei risultat e dei contributi alla petrologia campana. Ciò conferma che gli studi sulle vulcanoclastiti quando — come in questo caso — sono condotti con rigore e sistematicità danno importanti contributi alla geologia, alla petrografia e alla mineralogia. Pertanto la Commissione, unanime è ben lieta di giudicare il prof. Di Girolamo vincitore del concorso.

La Commissione

Prof. Giuseppe Imbò, presidente
Prof. Francesco Scarsella
Prof. Riccardo Sersale
Prof. Angela Maccagno
Prof. Antonio Scherillo, segretario/relatore

RELAZIONE SUL CONCORSO AD UN PREMIO ACCADEMICO PER LE SCIENZE MATEMATICHE, BANDITO DALL'ACCADEMIA DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE PER L'ANNO 1974, RIGUARDANTE LA «MATEMATICA PURA» E IN PARTICOLARE LA BRANCA: PROBLEMI PARZIALI AL CONTORNO PER LE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI ELLITTICO-PARABOLICHE

La Commissione, composta dai Soci ordinari Carlo Miranda, Federico Cafiero, Mario Curzio e dai Soci corrispondenti Gianfranco Cimmino e Carlo Ciliberto, si è riunita il giorno 29 Dicembre 1974 alle ore 12 in una sala dell'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli e si è costituita scegliendo a suo presidente il Prof. Cimmino e a segretario il Prof. Miranda.

La commissione dopo un'ampia discussione dei titoli dei candidati

CANFORA ALBINO
VERGARA CAFFARELLI GIORGIO

è stata unanime nel redigere i seguenti giudizi:

CANFORA ALBINO. Presenta una nota lincea e quattro ampie memorie pubblicate fra il 1971 e il 1974. Le memorie 1 e 2 riguardano un'equazione a derivate parziali del quarto ordine che è ellittica in alcune parti di un campo Ω e parabolica, di vari diversi tipi, in altre, la frontiera di Ω nelle zone di parabolicità riducendosi a una porzione di iperpiano. Appaiono qui di grande interesse sia la determinazione del tipo di condizioni al contorno atte a individuare la soluzione, sia i teoremi conclusivi di esistenza e regolarizzazione. La trattazione, basata sul metodo del piccolo parametro, è assai elaborata perché il problema presenta ardue difficoltà. La nota lincea n. 3 riassume questi lavori e contiene un elegante esempio. La memoria n. 4 tratta una questione analoga per un'equazione di ordine $2m$, in ipotesi però più restrittive di quelle relative alle equazioni del quarto ordine, per cui i risultati non assorbono quelli delle memorie precedenti. Questa riduzione della generalità delle ipotesi consente una trattazione in qualche punto più snella. Ma il passaggio dell'ordine da 4 a $2m$ fa sorgere

nuove difficoltà che l'autore supera con vera perizia mediante l'uso di tecniche raffinate.

La memoria n. 5 infine riguarda un problema dello stesso tipo per un'equazione del quarto ordine considerata in uno strato. Qui il metodo adoperato è del tutto diverso perché basato sulla teoria delle trasformazioni a codominio chiuso invece che sul metodo del piccolo parametro. L'equazione considerata è volutamente semplice perché scopo di questa memoria era di saggiare un procedimento diverso da quello delle memorie precedenti atto a dare dei teoremi di regolarizzazione più avanzati, che consentano di associare al teorema di esistenza anche un teorema di unicità. Per l'equazione particolare considerata il tentativo appare pienamente riuscito.

Giudizio collegiale. La produzione scientifica del Canfora, pienamente rispondente al tema del concorso, è di livello elevato e contiene risultati di rilevante interesse. Notevole la capacità del candidato di costruire per gradi una teoria nuova, affrontando con perizia e autonomia di pensiero le difficoltà ad essa inerenti.

VERGARA CAFARELLI GIORGIO. Presenta sette lavori a stampa pubblicati fra il 1970 e il 1974. Nel n. 1 si studia, con il metodo delle disequazioni variazionali un problema ai limiti con vincoli per un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine. Il n. 2 è una breve nota riguardante un problema di disequazione variazionali relativo a una coppia di operatori lineari ellittici. Il n. 4, riassunto nella nota n. 3, considera un problema relativo all'equazione delle superficie minime, analogo a quello studiato nel lavoro n. 3 per le equazioni lineari. Si tratta, qui, di determinare due soluzioni dell'equazione delle superficie minime, di cui sono assegnati i valori al contorno, sotto l'ulteriore vincolo che la prima non sia in alcun punto del campo maggiore della seconda. La trattazione, ambientata nella teoria delle disequazioni variazionali, è pregevole e corredata da alcuni teoremi di regolarità delle soluzioni. Anche notevole il lavoro n. 6, riassunto nel n. 5, in cui il problema precedente è studiato per le superficie di assegnata curvatura media. Questo studio richiede una trattazione preliminare del problema di Dirichlet relativo all'equazione considerata, in condizioni del tutto diverse da quelle precedentemente considerate da J. Serrin Il n. 7, in collaborazione con altro autore, riguarda il problema di evoluzione non lineare associato al problema ellittico, considerato nel lavoro precedente. L'argomento di questo lavoro è pienamente rispondente al tema del concorso.

Giudizio collegiale. La produzione scientifica del Vergara Caffarelli non è molto estesa ma è di livello elevato ed è orientata verso pro-

blemi attuali e interessanti. Essa denota un costante progresso e contiene già alcuni risultati pregevoli.

La Commissione, sulla base dei giudizi espressi, è lieta di constatare che entrambi i candidati sono in senso assoluto meritevoli del premio. Il Canfora prevale però sul Vergara Caffarelli, sia per la maggiore ampiezza della produzione che per la maggiore rispondenza al tema del concorso. La commissione è pertanto unanime nel proclamare Albino Canfora vincitore del concorso.

La Commissione

Prof. GIANFRANCO CIMMINO
Prof. FEDERICO CAFIERO
Prof. CARLO CILIBERTO
Prof. MARIO CURZIO
Prof. CARLO MIRANDA

RELAZIONE DELLA COMMISSIONE GIUDICATRICE DEL CONCORSO AD UN PREMIO ACCADEMICO PER LE SCIENZE BIOLOGICHE BANDITO DALL'ACCADEMIA DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DI NAPOLI PER L'ANNO 1974

La Commissione giudicatrice del Concorso ad un premio accademico per le « Scienze Biologiche », riservato a lavori riguardanti la branca « Cariologia e Sistematica », bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli in data 5 gennaio 1974, si è riunita il giorno 11 Dicembre 1974, alle ore 12 presso l'Istituto di Istologia ed Embriologia dell'Università degli Studi di Napoli.

La Commissione ha proceduto alla nomina del Presidente nella persona del Prof. Mario Galgano e del Segretario nella persona del Prof. Vincenzo Leone.

La Commissione prende atto che è pervenuta una sola domanda di partecipaizone al Concorso in oggetto, presentata dal Prof. ALESSANDRO MORESCALCHI.

Il Candidato presenta otto pubblicazioni, quelle da lui ritenute più significative, agli effetti del Concorso, fra le 18 stampate nell'ultimo quinquennio, come risulta da elenco accluso alla domanda. Tre delle pubblicazioni presentate sono state oggetto di relazioni a simposi internazionali; una forma un capitolo del volume « Cytotaxonomy and Vertebrate Evolution », edito dall'Academic Press; le altre sono pubblicate su riviste qualificate, italiane o straniere; tutte riguardano aspetti dell'argomento messo a concorso; nelle quattro in collaborazione, il MORESCALCHI figura come primo autore.

Un lavoro riguarda essenzialmente la cariosistematica dei Leptodactylidi Australiani, gli Anuri rimasti più simili ai progenitori delle famiglie superiori dell'ordine, qui studiati per la prima volta da questo punto di vista. In due lavori, vengono tratteggiate le linee di evoluzione cromosomica seguite dalle più importanti famiglie di Anuri e di Urodeli, con ipotesi nuove sulle loro relazioni filetiche, suggerite dai reperti cariologici.

In un ampio e limpido lavoro di sintesi, in gran parte originale, il Candidato fa una revisione delle ricerche di cariologia comparata finora svolte su Anfibi dei tre ordini attuali, Apodi, Urodeli e Anuri, apportandovi una gran mole di dati personali. Le conclusioni investono problemi di sistematica di intere famiglie di Anfibi, e sono viste alla luce di dati paleontologici, zoogeografici, tassonomici e biologici, oltre a quelli strettamente cariologici e citogenetici. Interamente nuovi come impostazione e sviluppo sono i capitoli sull'importanza dell'andamento dei fenomeni meiotici per la sistematica degli Anuri e sul ruolo evolutivo delle variazioni del DNA nucleare nella classe.

Nello stesso lavoro, il Candidato affronta anche problemi di biologia molecolare degli Anfibi, inquadrandoli nell'evoluzione generale di questi organismi, che occupano una posizione-chiave fra i Vertebrati. L'Autore si sofferma infine sui parallelismi nel differenziamento cariologico fra i tre ordini di Anfibi e sulle verosimili convergenze, in questo tipo di evoluzione, fra alcune famiglie di Urodeli pedogenetici ed i Dipnoi; queste conclusioni sono interpretate dall'Autore come favorevoli ad un'origine monofiletica degli Anfibi attuali (in contrasto con ipotesi polifiletiche di altri Autori).

In altri due lavori, sono descritti i cariotipi di varie specie di Ambystomatidi, Plethodontidi e Amphiumidi, Urodeli raggruppabili fra gli Ambystomatoidei e quelli dei tre Sirenidi viventi, per i quali ultimi il Candidato prospetta l'eventualità di un'evoluzone per poliploidia (caso unico per un'intera famiglia di Vertebrati).

In un lavoro sulla cinetica di riassociazione del DNA, sviluppando ipotesi sulla utilità dei dati di biologia molecolare a scopo tassonomico, studia questo fenomeno in 8 specie di Urodeli, tre delle quali di famiglie incapaci di metamorfosare, notando interessanti correlazioni fra le varie frazioni di DNA ripetitivo e la posizione filetica delle specie indagate.

In un altro lavoro, ha tentato di affrontare sperimentalmente il problema del differenziamento cariologico degli Anfibi mediante l'azione di agenti chimici e fisici sui cromosomi di *Bombina variegata.*

Le esperienze con il freddo hanno dato in particolare risultati incoraggianti, dimostrando come questo agente modifichi profondamente l'andamento dei normali processi mitotici e meiotici in questi organismi, la cui spermatogenesi è particolarmente termosensibile.

Le ricerche del MORESCALCHI risultano conosciute ed apprezzate in campo internazionale e nazionale (è stato giudicato maturo in concorsi a cattedra per l'Istologia ed Embriologia e per l'Anatomia comparata).

Dall'insieme delle ricerche del Candidato, si rileva che ha fornito molti risultati originali e di notevole interesse nel campo della « Cario-

logia e Sistematica » degli Anfibi e dei Vertebrati in generale, rappresentanti un valido contributo alle conoscenze in questo campo.

La Commissione pertanto delibera di assegnare il premio suddetto, per intero, al Prof. MORESCALCHI.

La Commissione

Prof. MARIO GALGANO
Prof. BALDASSARRE DE LERMA
Prof. GIANFRANCO GHIARA
Prof. ALDO MEROLA
Prof. VINCENZO LEONE

INDICE

A. Caggegi — Una classe di quasicorpi di dimensione infinita sul loro nucleo . pag. 5

A. Carrelli, C. Luponio, F. Porreca — Magnetizzazione latente in ferromagnetici sottoposti a transienti magnetici . . . . . » 11

E. Fichera — Problemi per la costruzione delle effemeridi dei satelliti artificiali . . . . . » 18

C. Sbordone — Sulla caratterizzazione degli operatori differenziali del 2° ordine di tipo ellittico . . . . . » 31

R. Aiello, C. Colella — Sull'isochimia di alcuni silicoalluminati idrati di sodio sintetici . . . . . » 46

M. Martelli, A. Vignoli — Some surjectivity results for non compact multivalued maps . . . . . » 57

S. Rao — Alcune questioni di risolubilità in anelli associativi . . . . » 67

J. R. Graef, P. W. Spikes — A nonoscillation result for second order ordinary differential equations . . . . . » 92

S. Bianchi — Sulle cellule neurosecretrici di *Sipunculus nudus* (Sipunculoidei) . . . . . » 102

V. Bonasia, S. Montagna — Inversione del bradisismo flegreo. Considerazioni gravimetriche e tiltmetriche . . . . . » 106

A. D'Anna, P. Renno — Un criterio di stabilità asintotica per una classe di fenomeni dissipativi . . . . . » 121

S. Dragotti — Sulle faccette olomorfe a curvatura massima dello spazio delle matrici simmetriche . . . . . » 143

M. Covello, O. Schettino, L. Ferrara — Studio cromatografico della composizione della frazione insaponificabile dell'olio dei semi di « Cardiospermum Halicacabum ». Identificazione e dosaggio dei tocoferoli . . . » 153

S. Matarasso — Regolarizzazione delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche . . . . . » 160

G. Rimondi — Sull'inflessione d'un elemento tubolare conico . . . . » 193

A. Romano — Influenza di un extra-flusso d'energia sulla termodinamica di un dielettrico elastico dispersivo . . . . . » 201

R. Grassini — Riferimenti fisici e relative connessioni spaziali in un modello matematico generale di spazio-tempo . . . . . » 209

A. Buri, A. Marotta — Studio mediante analisi termica differenziale della devetrificazione di vetri del sistema $CaO—Al_2O_3—SiO_2$ . . . . . pag. 223

B. Marchiese, G. Frigione — Caratterizzazione della belite in clinkers sintetici. » 229

D. Fortunato — Spazi di Sobolev con peso ed applicazioni ai problemi ellittici . . . . . » 245

M. Covello, O. Schiettino, L. Ferrara, P. Forgione — Rapporti tra i parametri cromatografici di iododerivati organici frazionati mediante le tecniche di assorbimento e di ripartizione . . . . . » 290

B. Farina, P. Quesada, E. Leone — Studi sulle ribonucleasi seminali . . . » 303

B. Farina, M. R. Faraone Mennella, E. Leone — Metabolismo dell'adenina in *Octopus vulgaris* . . . . . » 312

G. Imbò — Persistenza di fenomeni sismo-tettonici interessanti il fondo (settore sud-orientale) del cratere vesuviano e successivi alla crisi del maggio 1964 . . . . . » 323

B. D'Onofrio, F. Visentin — Una generalizzazione di alcuni teoremi di stabilità asintotica . . . . . » 330

S. Di Nocera, G. Nardi, F. Ortolani, M. Torre — Cineriti riolitiche nei depositi messiniani della Valle del Crati (Calabria settentrionale) . . . » 338

R. Chaléat, L. E. Krivoshein, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli — Analisi matematica. Sistemi differenziali con struttura composita. Problema di valori iniziali generalizzato concernente una nuova classe di equazioni integro-differenziali non lineari a derivate parziali in due variabili indipendenti . . . . . » 363

F. Cennamo, A. Colasanti — Deformazioni plastiche nella meteorite ferrosa Cohauila . . . . . » 370

A. Alvino — Sul problema esterno di Dirichlet per i sistemi ellittici . . » 398

R. Aiello, C. Porcelli — Chabazitic tuff deposits of possible economic value in the Campanian region . . . . . » 426

P. Renno — Sulla stabilità asintotica in presenza di perturbazioni al contorno per una classe di moti magnetoidrodinamici . . . . . » 435

B. De Lerma — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1974 . . . . . » 469

Relazione della commissione giudicatrice del premio per le scienze geomineralogiche nella branca « vulcanoclastiti » . . . . . » 473

Relazione sul concorso ad un premio accademico per le scienze matematiche, bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche per l'anno 1974, riguardante la « matematica pura » e in particolare la branca: problemi parziali al contorno per le equazioni a derivate parziali ellittico-paraboliche . . . . . » 475

Relazione della commissione giudicatrice del concorso ad un premio accademico per le scienze biologiche bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1974 . . . . . » 478

TERMINATO DI STAMPARE OGGI
XXIII GIUGNO MCMLXXV NELLE
OFFICINE GRAFICHE NAPOLETANE
« FRANCESCO GIANNINI & FIGLI »

Direttore responsabile: *Prof. MICHELE FUIANO*

Autorizzazione del Tribunale di Napoli, B/2315 del 14 agosto 1954