

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XL — (Anno CXII)

gennaio - dicembre 1973



NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 322.568
1973

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XL — (Anno CXII)

gennaio - dicembre 1973



NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 · Telef. 322.568
1973

12432



**Modificazioni di alcuni tratti dell'albero arterioso
osservate in ratti alimentati con dieta iperlipidica, ipoprotidica,
castrati e sottoposti ad ESH**

*Nota del prof. Augusto Biondi e dei dott. Mario Cotugno, Luisa Cesaro
e Vera Palmieri, presentata dal socio ordinario Antonietta Orrù*

(Adunanza dell'11 gennaio 1973)

RIASSUNTO. — Gli AA., sottoponendo ratti a castrazione, a shock elettrico e a dieta iperlipidica-ipoprotidica per 520 giorni, hanno ottenuto profonde alterazioni delle pareti arteriose dell'arco aortico dell'aorta toracica discendente e del tratto ileo-cecale della mesenterica superiore. Tali modificazioni sono caratterizzate da aumento dei mucopolisaccaridi acidi, da sconvolgimento nella struttura fibroelastica ed ancora dalla presenza di qualche sacca aneurismatica.

SUMMARY. — The AA., by submitting rats receiving a diet high in lipid but low in protein contents to castration and electric shocks during a period of 520 days, deep alterations of the aorta arch arterial walls, discendent thorax aorta and of the ileum-colon tract of the upper mesenteric have obtained.

Such alterations are characterized by an increase in the level of acid mucopolysaccharides, a disorder in the fibro-elastic structure, and even by the presence of some aneurismal sack.

In numerose ricerche sul metabolismo del colesterolo svolte in diverse condizioni sperimentali, quali diete speciali associate o meno a castrazione od ESH, sono state osservate alterazioni sia a livello ematico sia a quello epatico ed ancora significative modificazioni della parete di alcune arterie.

In una recente nota (4) eseguita su ratti sottoposti a diete iperlipidiche ed ipoprotidiche associate con la castrazione ed al trattamento con ESH per un periodo di 520 giorni, sono state descritte profonde modificazioni del parenchima epatico mostranti, tra l'altro, anche fenomeni di neoproduzione a carattere atipico.

Nel quadro di tali ricerche si inserisce la presente nota che ha lo scopo di allargare il materiale di osservazione mettendo in evidenza eventuali profonde e significative alterazioni delle arterie per effetto delle condizioni sperimentali prolungate per 520 giorni.

MATERIALE E TECNICA.

Sono stati adoperati 60 ratti maschi Wistar di 30 giorni di età dei quali 50 furono castrati ed alimentati per altri 490 con una dieta iperlipidica ed ipoprotidica così costituita: Amido 50%, grassi animali 40%, caseina 10% oltre sali minerali e vitamine; inoltre erano sottoposti ad ESH a giorni alterni praticato secondo le modalità solitamente adoperate. La mortalità, per il gruppo dei ratti trattati fu del 55%.

Gli altri 10 ratti non subirono alcun trattamento e furono adoperati come controlli.

Al termine del trattamento venivano prelevati: l'arco aortico, l'aorta discendente toracica e il ramo ileo-cecale dell'arteria mesenterica superiore che dopo inclusione in Tissuemat, venivano sezionati in fettine dello spessore di 6μ .

Si eseguiva, quindi, la colorazione con Alcian Bleu e con Floxina allo scopo di mettere in evidenza la quantità di mucopolisaccaridi acidi sotto-intimali e le modificazioni strutturali a tutto spessore della parete arteriosa (5). (Tavola A).

I preparati istologici venivano quindi fotografati sia con lampada al tungsteno, che con lampada UV 200 W usando filtri di eccitazione UG 1 2 + 2 mm LERTZ e filtro di sbarramento 510 m μ . (Tavola B).

Con queste due differenti tecniche d'illuminazione che vengono indicate rispettivamente con A e B era possibile osservare nel primo caso l'accumulo di mucopolisaccaridi acidi (Alcian Bleu affini) e nell'altro la disposizione delle fibre elastiche della parete arteriosa floxinofile rese fluorescenti per eccitazione UV.

RISULTATI.

I risultati sono evidenziati nelle fotografie che rappresentano per ogni caso un esempio dei tanti osservati nei preparati.

1. - Arco Aortico di ratto trattato.

Le foto 1 A e 1 B (tecnica A) mettono in evidenza un notevole accumulo di mucopolisaccaridi acidi soprattutto nella zona sotto-intimale. È infatti possibile osservare un progressivo aumento di essi dalla zona sierosa verso quella intimale.

2. - Arco Aortico, ratto trattato (tecnica B).

Le foto 2 A e 2 B mettono in evidenza il profondo sconvolgimento della impalcatura fibroelastica della parete; l'intima appare in molti tratti interrotta, mentre gli spazi tra le fibre elastiche in alcuni punti sono molto



Foto 1A (125 ×) - Arco aortico - Ratto trattato - Luce tungsteno.



Foto 1B (315 ×) - Arco aortico - Ratto trattato - Luce tungsteno.



Foto 3A (125 ×) - Arco aortico - Ratto controllo - Luce tungsteno.



Foto 3B (315 ×) - Arco aortico - Ratto controllo - Luce tungsteno.



Foto 5A (125 ×) - Arco aortico - Ratto trattato - Aneurisma - Luce tungsteno.

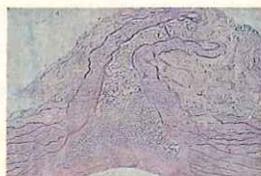


Foto 5B (315 ×) - Arco aortico - Ratto controllo - Aneurisma - Luce tungsteno.



Foto 6A (125 ×) - Aorta - Ratto trattato - Luce tungsteno.



Foto 6B (315 ×) - Aorta - Ratto trattato - Luce tungsteno.



Foto 8A (125 ×) - Aorta - Ratto controllo - Luce tungsteno.



Foto 8B (315 ×) - Aorta - Ratto controllo - Luce tungsteno.

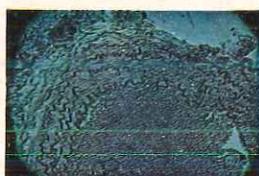


Foto 10A (125 ×) - Mesenterica - Ratto trattato - Luce tungsteno.



Foto 10B (315 ×) - Mesenterica - Ratto trattato - Luce tungsteno.

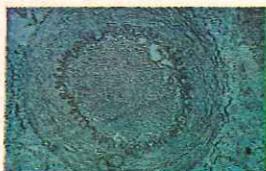


Foto 13 (315 ×) - Mesenterica - Ratto controllo - Luce tungsteno.



Foto 2A (125 ×) - Arco aortico - Ratto trattato - Luce UV.



Foto 2B (315 ×) - Arco aortico - Ratto trattato - Luce UV.

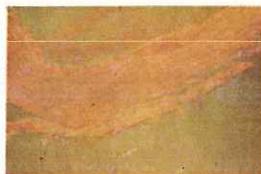


Foto 4A (125 ×) - Arco aortico - Ratto controllo - Luce UV.



Foto 4B (315 ×) - Arco aortico - Ratto controllo - Luce UV.



Foto 5C (125 ×) - Aorta - Ratto trattato - Aneurisma - Luce UV.



Foto 7A (125 ×) - Aorta - Ratto trattato - Luce UV.



Foto 7B (315 ×) - Aorta - Ratto trattato - Luce UV.



Foto 9A (125 ×) - Aorta - Ratto controllo - Luce UV.



Foto 9B (315 ×) - Aorta - Ratto controllo - Luce UV.

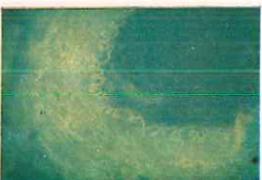


Foto 11A (125 ×) - Mesenterica - Ratto trattato - Luce UV.



Foto 11B (315 ×) - Mesenterica - Ratto trattato - Luce UV.

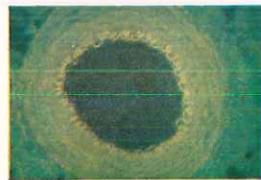
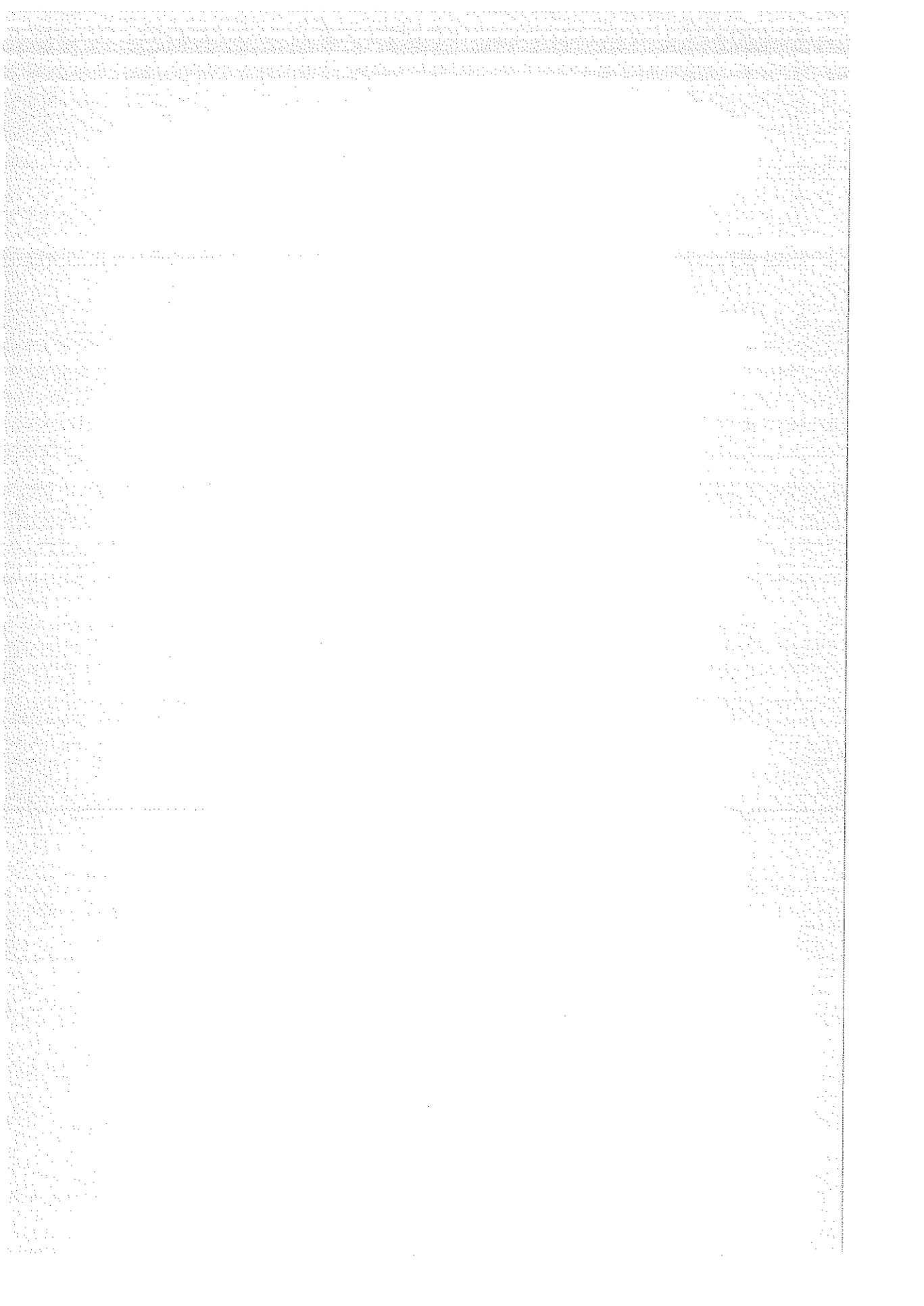


Foto 12 (315 ×) - Mesenterica - Ratto controllo - Luce UV.



ampi. Le fibre elastiche non conservano il parallelismo mostrandosi in molti punti spezzate ed aggrovigliate.

3. - Arco Aortico ratto controllo (tecnica A) foto 3 A e 3 B.

Si osserva una normale distribuzione di modeste quantità di mucopolisaccaridi acidi in una ordinata disposizione delle fibre elastiche e dell'intima come peraltro meglio dimostrato dalle foto (foto 4 A e 4 B) in fluorescenza (tecnica B).

4. - Aorta discendente, tratto toracico ratto trattato (tecnica A).

In questo preparato è possibile osservare una quantità abnorme di mucopolisaccaridi acidi maggiore di quanto osservato per l'arco aortico; inoltre accanto alla disordinata disposizione delle fibre è stata osservata (foto 5 A, 5 B e 5 C) una sacca di tipo aneurismatico rappresentata da un assottigliamento progressivo delle fibre elastiche che si estroflettono verso la parte sierosale lasciando un ampio spazio sottointimale nel quale trovasi materiale non fluorescente nè mostrante particolari affinità tintoriali (foto 6 A e 6 B).

5. - Aorta discendente tratto toracico, ratto trattato (tecnica B).

Queste foto 7 A e 7 B dimostrano l'interruzione frequentissima delle fibre elastiche che si mostrano sinuose e prive di parallelismo; gli strati sottointimali evidenziano le maggiori alterazioni.

6. - Aorta discendente, tratto toracico, ratto controllo (tecnica A).

È osservabile la normale distribuzione dei mucopolisaccaridi e della struttura fibroelastica (foto 8 A e 8 B).

7. - Aorta discendente, tratto toracico, ratto controllo (tecnica B).

Conferma l'osservazione precedente per il buon stato di conservazione della struttura fibroelastica (foto 9 A e 9 B).

8. - Mesenterica superiore, ramo ileo-cecale, ratto trattato (tecnica A).

Anche in questo caso è possibile notare l'addensamento di zolle di mucopolisaccaridi acidi e il profondo sconvolgimento di strutture fibroelastiche come da foto successive (foto 10 A e 10 B) ed in quelle eseguite con la tecnica B (foto 11 A e 11 B). Le foto di preparato di ratto controllo degli ultimi due reperti 12 e 13 mostrano un aspetto normale.

DISCUSSIONE.

I risultati illustrati e descritti mostrano molto chiaramente che le condizioni sperimentali adottate: il profondo squilibrio alimentare, la condizione di stress cronico e l'ablazione dei testicoli, provocano un marcato stato di danno arterioso consistente, tra l'altro, in un cospicuo addensamento dei

mucopolisaccaridi acidi della parte e nella sovversione della struttura fibro-elastica.

Modificazioni di tale tipo furono già osservate da uno di noi in ratti tenuti nelle stesse condizioni sperimentali, ma per periodi di tempo più brevi. Quella osservazione mostrava sì, una infiltrazione di mucopolisaccaridi nell'arco aortico e nell'aorta discendente toracica, ma in minore misura rispetto alla osservazione attuale, e non era apparsa alcuna lesione di tipo aneurismatico. Tale reperto rappresenta un evento del tutto eccezionale nel ratto, animale resistente all'induzione di lesioni ateromasiche. In questo animale è stato possibile, infatti, provocare stati arterio-sclerotici somministrando steroidi aterogenici e colesterolo in eccesso con le diete; nel nostro caso questo risultato è tanto più significativo in quanto ottenuto senza aggiunta nè somministrazione di composti di tal tipo.

Nel quadro delle moderne interpretazioni della genesi del processo aterogenetico, trova sufficiente spiegazione il risultato da noi ottenuto, se si fa riferimento alle speciali condizioni metaboliche ed endocrine realizzate nelle nostre sperimentazioni.

L'alterazione metabolica è provocata certamente dall'eccesso lipidico e dalla deficienza proteica come peraltro dimostrato dagli esami istologici del fegato (4) e dai dosaggi di alcuni composti ematici riportati in altre note (6).

L'alterazione endocrina è provocata sia dalla castrazione, per gli evidenti rapporti esistenti tra le varie ghiandole endocrine, sia dalla stimolazione elettrica ripetuta, la quale, come dimostrato da numerose nostre esperienze precedenti (7), provoca un tipico atteggiamento di ipersurrealismo.

Tutti questi fattori sono stati riconosciuti quali agenti eziologici della malattia vasale ed è di notevole interesse il fatto che si sia riusciti a determinare tale quadro anche nel ratto che, tra gli animali da esperimento, è il più notoriamente resistente a tale tipo di lesione.

È da sottolineare ancora che l'intero processo è stato ottenuto senza la somministrazione di steroidi ipertensivi, di colesterolo (8), al di fuori di quello minimo contenuto nella dieta, nè di sali in eccesso.

L'indagine estesa al ramo ileo-cecale della mesenterica superiore, permette di trarre un nuovo possibile fattore eziologico di una particolare condizione morbosa, tipica dell'età avanzata, consistente in una turba caratterizzata da malassorbimento, determinata da una anormale funzionalità della valvola ileo-cecale; infatti l'alterazione vasale osservata dà giustificazione di un insufficiente trofismo dei tessuti a valle di detto vaso con modificazione funzionale della stessa.

BIBLIOGRAFIA

- 1) BADOLATO F., BIONDI A., CERRA C. *Effetto della castrazione e dello elettroshock sul colesterolo sierico ed epatico in ratti maschi Wistar ad alimentazione normale e a dieta iperlipidica ipoprotidica*. Ric. Sci. (II B), 250-258 (1965).
- 2) BIONDI A., BADOLATO F., PIEROBON P. *Modificazioni indotte dalla dieta e dall'ESH sulle proteine sieriche, sul colesterolo ad esse legato, sulla pressione arteriosa e sull'elettrocardiogramma in ratti maschi Wistar castrati*. Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Serie 4, vol. XXXII (1965).
- 3) RENAUD S., ALLARD C. *Effect of dietary protein levels on cholesterolemia, thrombosis and ipertension in rat*. J. of Nutrition, vol. 63, n. 2, 149 (1964).
- 4) BIONDI A., COLUGNO M. *Effetti di una dieta iperlipidica ed ipoprotidica su alcuni aspetti morfologici del fegato di ratti castrati e sottoposti ad ESH*. Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Serie 4, vol. XXXIX (1972).
- 5) BECCARI-MAZZI. *Manuale di tecnica microscopica*. Edit. Vallardi, Como (1966).
- 6) BIONI A., PIEROBON P., ONESTO E. *Effetti di una dieta iperlipidica ipoprotidica in ratti maschi Wistar castrati e sottoposti ad elettroshock per periodi prolungati*. Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Serie 4, vol. XXXIII (1966).
- 7) BADOLATO F., BIONDI A., CERRA A. *Azione dell'ACTH e dell'elettroshock sui livelli del colesterolo sierico ed epatico in animali ad alimentazione normale e ad alimentazione iperlipidica-ipoprotidica*. Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Serie 4, vol XXXII (1965).
- 8) BADOLATO F., CALABRESE M. *Gli acidi nucleinici nel fegato di ratto. Nota III*. Ric. Sci., 26, 3047 (1956).

Sulle forze derivanti da un potenziale dipendente anche dalla velocità

*Nota del dott. Armando D'Anna (a Napoli) *)
presentata dal socio corrispondente Francesco Stoppelli*

(Adunanza dell'11 gennaio 1973)

RIASSUNTO. — In questa Nota si determinano le condizioni necessarie e sufficienti affinché una sollecitazione derivi da un potenziale dipendente anche dall'atto di moto del sistema materiale a cui è applicata. In essa si perviene alla conclusione che tali condizioni si identificano con quelle di integrabilità di una certa forma differenziale esterna e, in particolare, che una forza agente su un punto libero deriva da un potenziale siffatto se e solo se è una forza di Lorentz.

SUMMARY. — In this work we determine the necessary and sufficient conditions in order that a system of forces derives from a potential depending also on the velocities of the material system which it is applied to. In it we come to the conclusion that these conditions can be identified with those of integrability of a second degree external differential form and, particularly, that a force acting on a free point derives from this kind of potential when and only when it is a Lorentz force.

INTRODUZIONE.

Sia S un sistema ad n gradi di libertà costituito dagli N punti materiali (P_l, m_l) , soggetti ai vincoli olonomi e privi d'attrito definiti dalle equazioni parametriche

$$(I) \quad P_l = P_l(q, t) \quad (l = 1, \dots, N),$$

dove le funzioni a secondo membro delle (I) sono continue con le loro derivate prime e seconde per ogni $t \geq t_0$ e comunque si scelga la n -pla (q_1, \dots, q_n) in un certo dominio $D_l \subset R^n$.

Com'è noto, si dice che una sollecitazione Σ agente su S deriva da

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

un potenziale generalizzato se esiste una funzione $U(q, \dot{q}, t)$ tale che identicamente si abbia

$$(II) \quad Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} \quad (h = 1, \dots, n).$$

È noto inoltre che, tanto la U , quanto le Q_h sono necessariamente funzioni lineari delle \dot{q} , cioè sono del tipo

$$(III) \quad U = a_0(q, t) + \sum_1^n a_k(q, t) \dot{q}_k$$

$$(IV) \quad Q_h = b_{0h}(q, t) + \sum_1^n b_{kh}(q, t) \dot{q}_k.$$

In questa nota mi propongo di determinare le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare le Q_h , e quindi le b_{rs} ($r = 0, \dots, n$; $s = 1, \dots, n$), affinché Σ derivi da un potenziale generalizzato.

Incomincio col considerare (n° 1) il caso, interessante per la forma particolarmente espressiva della conclusione a cui si giunge, che il sistema materiale S si riduca ad un punto libero P soggetto ad una sola forza \mathbf{F} . Introdotto un riferimento cartesiano ortogonale $T_0 \equiv 0x_1x_2x_3$ ed assunte come coordinate lagrangiane di S le coordinate cartesiane di P , in modo che le (IV) diventino

$$F_h = b_{0h}(x, t) + \sum_1^3 b_{kh}(x, t) \dot{x}_k \quad (h = 1, 2, 3),$$

dopo aver preliminarmente osservato che $b_{hh} = -b_{hh}$, dimostro il seguente teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché la forza \mathbf{F} agente sul punto libero P derivi da un potenziale generalizzato è che, detti \mathbf{L} ed \mathbf{M} i vettori aventi in T_0 componenti b_{01} b_{02} b_{03} e b_{32} b_{13} b_{21} rispettivamente, si abbia

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{M} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{L} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = 0. \end{array} \right.$$

Da questo teorema segue che la forza \mathbf{F} deve avere necessariamente la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{M},$$

in cui \mathbf{v} è la velocità di P in T_0 ; ciò ci permette di affermare più semplicemente che *condizione necessaria e sufficiente affinché una forza, agente su un punto libero, derivi da un potenziale generalizzato è che essa sia una forza di Lorentz.*

Successivamente considero il caso di un qualunque sistema olonomo S ad n gradi di libertà e, dopo aver ricordato (n° 2) un noto risultato relativo all'integrabilità delle forme differenziali esterne di grado due ed aver posto $q_0 = t$, osservo (n° 3) che le condizioni affinché valgano le (II) (III) (IV) vengono espresse dall'emisimmetria delle b_{hk} e dall'integrabilità della forma differenziale esterna (di grado due)

$$\sum_{k < h}^{0, \dots, n} b_{hk} \delta_1 q_k \delta_2 q_h = \sum_{k < h}^{0, \dots, n} b_{hk} [\delta q_k \delta q_h].$$

Tenendo conto di ciò si deduce immediatamente la condizione affinché la suddetta sollecitazione derivi da un potenziale generalizzato.

Se si fanno intervenire due opportuni tensori \mathbf{L} ed \mathbf{M} ed il determinante g definiti al n° 5, tale condizione assume una forma analoga a quella trovata nel caso particolare considerato prima:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la sollecitazione Σ agente su S derivi da un potenziale generalizzato è che i tensori \mathbf{L} ed \mathbf{M} soddisfino le condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{M} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{L} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \mathbf{M}) = 0. \end{array} \right.$$

Come applicazione di tali risultati generali considero (n° 4) il caso che T_0 non sia inerziale e che Σ si identifichi con le forze centrifughe composte dovute al moto di T_0 rispetto ad una terna inerziale.

1. - PUNTO LIBERO.

Con riferimento ad una terna cartesiana trirettangola $T_0 \equiv 0x_1 x_2 x_3$, siano $x_1 x_2 x_3$ le coordinate di un punto materiale libero P, $F_1 F_2 F_3$ le componenti di una forza \mathbf{F} agente su P; se \mathbf{F} deriva da un potenziale generalizzato $U(x, \dot{x}, t)$ si ha

$$(1) \quad F_h = - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_h} + \frac{\partial U}{\partial x_h} \quad (h = 1, 2, 3).$$

Ci proponiamo di trovare la condizione a cui deve soddisfare \mathbf{F} affinché esista una funzione $U(x, \dot{x}, t)$, soddisfacente le (1).

Poichè le F_h dipendono soltanto dal tempo, dalla posizione e dalla velocità, affinché sussistano le (1), la dipendenza di U dalle variabili x_1, x_2, x_3, t , e conseguentemente anche quella delle F_h , deve essere necessariamente lineare, cioè del tipo

$$(2) \quad U = a_0 + a_1 \dot{x}_1 + a_2 \dot{x}_2 + a_3 \dot{x}_3$$

$$(3) \quad F_h = b_{0h} + b_{1h} \dot{x}_1 + b_{2h} \dot{x}_2 + b_{3h} \dot{x}_3 \quad (h = 1, 2, 3),$$

con a_k, b_{kh} ($k = 0, 1, 2, 3; h = 1, 2, 3$) funzioni delle sole variabili x_1, x_2, x_3, t .

Evidentemente affinché la forza \mathbf{F} , definita dalle (3), derivi dal potenziale generalizzato U dato dalla (2), occorre e basta che identicamente risulti

$$(4) \quad \frac{\partial a_0}{\partial x_h} - \frac{\partial a_h}{\partial t} + \sum_1^3 \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_h} - \frac{\partial a_h}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k = b_{0h} + \sum_1^3 b_{kh} \dot{x}_k.$$

Dalle (4) segue un'altra condizione sulla forma delle F_h ; queste non solo debbono essere lineari nelle \dot{x} ma debbono avere anche coefficienti emisimmetrici

$$(5) \quad b_{kh} = -b_{hk} \quad (h, k = 1, 2, 3).$$

Amnesso ciò, le (4) saranno soddisfatte se e solo se identicamente risulta

$$(6) \quad \frac{\partial a_0}{\partial x_h} - \frac{\partial a_h}{\partial t} = b_{0h} \quad (h = 1, 2, 3)$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = b_{23} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = b_{31} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = b_{12} \end{array} \right.$$

È immediato, a tal punto, provare che *condizione necessaria e suffi-*

ciente affinché la forza \mathbf{F} di tipo (3) - (5) derivi da un potenziale generalizzato di tipo (2) è che essa soddisfi le seguenti condizioni

$$(8) \quad \frac{\partial b_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x_3} = 0$$

$$(9) \quad \frac{\partial b_{0k}}{\partial x_h} - \frac{\partial b_{0h}}{\partial x_k} + \frac{\partial b_{kh}}{\partial t} = 0.$$

Basta infatti osservare che — indicando con $\mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{M}$, i vettori aventi, rispettivamente, componenti cartesiane $a_1, a_2, a_3, b_{01}, b_{02}, b_{03}, b_{32}, b_{13}, b_{21}$ — le (6) - (7) si scrivono

$$(6') \quad \text{grad } a_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{L}$$

$$(7') \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{M}$$

e ricordare che le condizioni necessarie e sufficienti affinché siano soddisfatte le (6') - (7') sono

$$(8') \quad \text{div } \mathbf{M} = 0$$

$$(9') \quad \text{rot } \mathbf{L} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = 0$$

cioè le (8) - (9).

A questo punto osserviamo che le (3), tenendo conto delle (5) e della definizione dei vettori \mathbf{L} ed \mathbf{M} , si possono scrivere

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{M};$$

cioè le forze derivanti da un potenziale generalizzato si scrivono formalmente come la forza di Lorentz, mentre i vettori di campo \mathbf{L} ed \mathbf{M} soddisfano le equazioni (8') - (9') che si identificano con la seconda e terza equazione di Maxwell. Naturalmente il potenziale generalizzato U , per la (2), ha la forma

$$U = a_0 + \mathbf{A} \times \mathbf{v}$$

2. - FORME DIFFERENZIALI ESTERNE DI GRADO DUE.

Riservo questo numero ad alcuni richiami sulle forme differenziali esterne di grado due (cfr. [1] e [2]).

Detto $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)$ un punto dello spazio euclideo E_m ad m dimensioni, consideriamo la matrice di caratteristica $k \leq m$

$$\begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \dots & \delta_1 x_m \\ \delta_2 x_1 & \delta_2 x_2 & \dots & \delta_2 x_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_k x_1 & \delta_k x_2 & \dots & \delta_k x_m \end{vmatrix}$$

e indichiamo con $[\delta x_{j_1} \delta x_{j_2} \dots \delta x_{j_k}]$ il minore di ordine k costituito con le colonne di indici j_1, j_2, \dots, j_k .

Detta F una funzione delle variabili x_i , continua con le sue derivate prime in un intorno di P , indichiamo con $\delta_j F = \sum_i^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta_j x_i$ il suo differenziale relativo alla scelta $\delta_j x_i$ degli incrementi delle variabili x_i e poniamo

$$[\delta F \delta x_{j_1} \dots \delta x_{j_k}] = \begin{vmatrix} \delta_{j_1} F & \delta_{j_1} x_{j_1} & \dots & \delta_{j_1} x_{j_k} \\ \delta_{j_2} F & \delta_{j_2} x_{j_1} & \dots & \delta_{j_2} x_{j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{j_k} F & \delta_{j_k} x_{j_1} & \dots & \delta_{j_k} x_{j_k} \\ \delta_j F & \delta_j x_{j_1} & \dots & \delta_j x_{j_k} \end{vmatrix}$$

Com'è noto [2] si definisce forma differenziale esterna di grado due l'espressione

$$\Omega = \sum_{j_1 < j_2}^{1 \dots m} C_{j_1 j_2} (x_1, \dots, x_m) [\delta x_{j_1} \delta x_{j_2}]$$

in cui le funzioni $C_{j_1 j_2}$, di classe $C^{(1)}$ in un dominio $D \subset E_m$, sono i coefficienti della forma. Si chiama derivata esterna secondo Cartan della forma Ω , la forma

$$\begin{aligned} \Omega' &= \sum_{j_1 < j_2}^{1 \dots m} [\delta C_{j_1 j_2} \delta x_{j_1} \delta x_{j_2}] = \\ &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3}^{1 \dots m} \left\{ \frac{\partial C_{j_2 j_3}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial C_{j_1 j_3}}{\partial x_{j_2}} + \frac{\partial C_{j_1 j_2}}{\partial x_{j_3}} \right\} [\delta x_{j_1} \delta x_{j_2} \delta x_{j_3}]. \end{aligned}$$

La forma Ω è poi localmente integrabile se esiste in un intorno di ogni punto di D una forma $\pi = \sum_j^m \psi_j \delta x_j$ di grado uno tale che $\Omega = \pi'$.

La condizione necessaria e sufficiente affinché ciò accada è che risulti $\Omega' = 0$ (*); soddisfatta tale condizione ogni primitiva π_0 della forma Ω si ottiene ponendo $\pi_0 = \pi + \Gamma'$ con Γ forma di grado zero.

Ciò equivale a dire che la condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni differenziali

$$(10) \quad \frac{\partial \psi_{j_2}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial \psi_{j_1}}{\partial x_{j_2}} = C_{j_1 j_2} \quad (j_1 < j_2),$$

nelle funzioni incognite ψ_h ($h = 1, \dots, m$), ammetta localmente soluzioni è che siano soddisfatte le condizioni

$$\frac{\partial C_{j_2 j_3}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial C_{j_1 j_3}}{\partial x_{j_2}} + \frac{\partial C_{j_1 j_2}}{\partial x_{j_3}} = 0 \quad (j_1 < j_2 < j_3).$$

Verificate tali condizioni e posto $C_{(i)h,s} = C_{ih}(x_{1s}, \dots, x_{i-1s}, x_i, \dots, x_m)$, si ha che ogni soluzione del sistema di equazioni differenziali (10) si mette nella forma

$$(10') \quad \psi_h = \sum_0^{r-1} \sum_s^h \int_{x_{is}}^{x_{i+1}} C_{(i)h,s} dx_i + \frac{\partial \gamma}{\partial x_h}$$

con la convenzione che $C_{ii} = 0$, $(x_{10}, \dots, x_{m0}), \dots, (x_{1r} = x_1, \dots, x_{mr} = x_m)$ siano i vertici di una opportuna spezzata, mentre γ indica una qualsiasi funzione di classe $C^{(2)}$ in D .

3. - CONDIZIONI DI ESISTENZA DI UN POTENZIALE GENERALIZZATO PER LA SOLLECITAZIONE Σ .

Vediamo ora quali ipotesi bisogna fare sulle componenti lagrangiane $Q_h(q, \dot{q}, t)$ della sollecitazione Σ affinché questa derivi da un potenziale generalizzato, cioè affinché esista una funzione U di tipo (III) soddisfacente le (II). Le (II) e (III) implicano le seguenti espressioni per le Q_h

$$Q_h = \frac{\partial a_0}{\partial t} - \frac{\partial a_h}{\partial t} + \sum_1^n \left(\frac{\partial a_k}{\partial q_h} - \frac{\partial a_h}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \quad (h = 1, \dots, n)$$

(*) Se in più D ha semplice la connessione $(k+1)$ -dimensionale, la condizione $\Omega' = 0$ è anche sufficiente per l'integrabilità in grande di Ω in D ([2], pag. 69).

che devono risultare identiche a quelle fornite dalle (IV); deve cioè essere

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_k}{\partial q_h} - \frac{\partial a_h}{\partial q_k} = b_{kh} \\ \frac{\partial a_0}{\partial q_h} - \frac{\partial a_h}{\partial t} = b_{0h} \end{array} \right. \quad (h, k = 1, \dots, n)$$

Le (11) sono una necessaria conseguenza dell'ipotesi che la sollecitazione Σ , di componenti lagrangiane (IV), derivi dal potenziale generalizzato (III). Viceversa se è assegnata una sollecitazione Σ di componenti lagrangiane Q_h espresse dalle (IV), ed esistono $n + 1$ funzioni $a_h = a_h(q, t)$ ($h = 0, \dots, n$) di classe $C^{(2)}$ tali che le (11) siano soddisfatte, la funzione U definita dalle (III) soddisfa le (II). Possiamo perciò affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la sollecitazione Σ , di componenti lagrangiane Q_h espresse dalle (IV), derivi da un potenziale generalizzato U del tipo (III), è che esista almeno una soluzione $a_h = a_h(q, t)$ di classe $C^{(2)}$ del sistema di equazioni alle derivate parziali (11).

Si noti ora che, se poniamo $q_0 = t$ e $b_{h0} = -b_{0h}$ ($h = 1, \dots, n$), il sistema (11) diventa

$$\frac{\partial a_k}{\partial q_h} - \frac{\partial a_h}{\partial q_k} = b_{kh} \quad (k = 0, \dots, n; h = 1, \dots, n),$$

da cui si possono estrarre le equazioni del tipo (10)

$$(12) \quad \frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h} = -b_{kh} \quad (k < h)$$

che vengono a coincidere con le condizioni necessarie e sufficienti affinché la forma differenziale esterna di grado due

$$- \sum_{k < h}^{0 \dots n} b_{kh} [\delta q_k \delta q_h]$$

sia integrabile. Tenendo conto di quanto abbiamo detto al n° 2, possiamo concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la sollecitazione Σ derivi

da un potenziale generalizzato U è che i coefficienti b_{hk} che la caratterizzano soddisfino le condizioni

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{li} = -b_{il} \quad (l = 0, \dots, n; i = 1, \dots, n) \\ \frac{\partial b_{hj}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_h} + \frac{\partial b_{kh}}{\partial q_j} = 0 \quad (0 \leq k < h < j \leq n). \end{array} \right.$$

Questo teorema risolve il problema posto.

Se sono soddisfatte le (13) basta ovviamente risolvere le (12) per ottenere U . Ricordando le (10') e ponendo, per $h = 0, \dots, n$,

$$a^*_h = \sum_0^{r-1} \sum_s^h \int_{q_{is}}^{q_{is+1}} b_{h[i],s} dq'_i \quad \text{con } q_{ri} = q_i, b_{00} = 0,$$

si ha che ogni funzione potenziale U , relativa alla sollecitazione Σ , è del tipo

$$U = \sum_1^n a^*_k \dot{q}_k + \frac{d\gamma}{dt}$$

con $\gamma = \gamma(q, t)$ funzione arbitraria di classe C^2 .

4. - CASO DELLE FORZE CENTRIFUGHE COMPOSITE.

Consideriamo, a titolo d'esempio, il caso in cui la sollecitazione Σ si identifichi con il sistema delle forze centrifughe composte $\{P_i, -2m_i \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_i\}$ ($i = 1, \dots, N$) relative ad una terna non inerziale $T_0 \equiv 0x_1x_2x_3$. Come si può facilmente controllare, i coefficienti b_{rs} ($r = 0, \dots, n; s = 1, \dots, n$) che caratterizzano Σ sono espressi dalle

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{kh} = -2 \sum_1^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \boldsymbol{\omega} \\ b_{0h} = -2 \sum_1^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial t} \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \boldsymbol{\omega} \end{array} \right. \quad (k = 1, \dots, n; h = 1, \dots, n);$$

conseguentemente mentre tutte le (13)₁ e le sole (13)₂, con $k \neq 0$ sono da questi soddisfatte, le (13)₂ con $k = 0$ impongono che sia

$$(15) \quad \sum_1^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \dot{\omega} = 0.$$

Il fatto che le (13)₁ e le (13)₂ con $k \neq 0$ siano soddisfatte implica che il sistema costituito dalle (11)₁ ammetta sempre soluzioni; infatti, come è facile controllare, esso è sempre soddisfatto per

$$(16) \quad a_h = \sum_1^N m_i (P_i - 0) \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \omega.$$

Per quanto riguarda poi il sistema costituito dalle (11)₂ esso ammette soluzioni se e solo se sono verificate le (15) le quali, ovviamente, esprimono il fatto che esiste una funzione $\Gamma(q, t)$ tale che

$$(17) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial q_h} = \sum_1^N m_i (P_i - 0) \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \times \dot{\omega};$$

pertanto, tenendo conto delle (14)₂, (16) e (17), si ha dalle (11)₂ che è lecito assumere

$$(18) \quad a_o = \sum_1^N m_i (P_i - 0) \wedge \frac{\partial P_i}{\partial t} \times \omega + \Gamma.$$

Ne viene di conseguenza, tenendo conto delle (III), (16), (18), che

$$U = \sum_1^N m_i (P_i - 0) \wedge v_i \times \omega + \Gamma.$$

Indicato con \mathbf{K}_0 il momento delle quantità di moto del sistema di punti materiali (P_i, m_i) ($i = 1, \dots, N$) rispetto al polo 0, si ha che

$$U = \mathbf{K}_0 \times \omega + \Gamma.$$

5. - UN'INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI DEL N° 3.

Indicando con $x^1 x^2 x^3$ le coordinate del punto P_i del sistema olonomo S in un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio ordinario, ponendo

$y^{3l+\lambda-3} = x_l^\lambda \sqrt{m_l}$ ($\lambda = 1, 2, 3$; $l = 1, \dots, N$) e scrivendo q^h al posto di q_h , possiamo sostituire alle equazioni parametriche dei vincoli nella forma (I), le equazioni

$$(19) \quad y^u = y^u(q^1, \dots, q^n, t) \quad (u = 1, \dots, 3N).$$

Introduciamo ora uno spazio euclideo E_{3N} in cui ogni punto Q abbia coordinate $(y^1, y^2, \dots, y^{3N})$ e scriviamo le (19) nella forma

$$Q = Q(q^1, \dots, q^n, t).$$

Fissato un istante t , al variare di (q^1, \dots, q^n) in D_t , il punto Q descrive una varietà $V_n^{(t)} \subset E_{3N}$ nella quale possiamo introdurre la metrica

$$ds^2 = dQ \times dQ = \sum_1^{3N} \sum_1^n_{ij} \frac{\partial y^u}{\partial q^i} \frac{\partial y^u}{\partial q^j} dq^i dq^j$$

che riscriviamo nella forma

$$ds^2 = \sum_1^n_{ij} g_{ij} dq^i dq^j$$

con

$$g_{ij} = \sum_1^{3N} \frac{\partial y^u}{\partial q^i} \frac{\partial y^u}{\partial q^j}.$$

Sia $j_1 j_2 \dots j_n$ una permutazione con eventuali ripetizioni degli indici $1, 2, \dots, n$ e poniamo

$$\eta_{j_1 \dots j_n} = \eta^{j_1 \dots j_n} = \begin{cases} 0 & \text{se in } j_1 \dots j_n \text{ vi sono ripetizioni} \\ (-1)^p & \text{se non ve ne sono e } p \text{ è il numero} \\ & \text{delle inversioni in essa presenti;} \end{cases}$$

indichiamo inoltre con g il determinante delle g_{ij} , con $\varepsilon^{j_1 \dots j_n}$ e $\varepsilon_{j_1 \dots j_n}$ rispettivamente le componenti controvarianti e covarianti del tensore di Ricci.

Consideriamo ora il vettore \mathbf{L} di componenti covarianti b_{0h} ($h = 1, \dots, n$) ed il tensore \mathbf{b} di componenti covarianti b_{kh} ($k, h = 1, \dots, n$); sia poi \mathbf{M} il tensore completamente emisimmetrico di ordine $n-2$ così definito

$$(20) \quad M^{j_1 \dots j_{n-2}} = - \frac{1}{2!} \sum_1^n_{hk} \varepsilon^{hj_1 \dots j_{n-2}} b_{hk}.$$

Evidentemente, essendo $b_{kh} = -b_{hk}$ (cf. (13)₁), \mathbf{b} è l'aggiunto del tensore $-\mathbf{M}$, cioè

$$b_{kh} = - \frac{1}{(n-2)!} \sum_1^n j_1 \dots j_n \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-2} kh} M^{j_1 \dots j_{n-2}}.$$

Con tali notazioni le (IV) assumono la forma

$$(21) \quad Q_h = L_h - \frac{1}{(n-2)!} \sum_1^n j_1 \dots j_{n-2} \varepsilon_{j_1 \dots j_{n-2} kh} M^{j_1 \dots j_{n-2}} \dot{q}^k.$$

Con tali premesse ci proponiamo, a tal punto, di dimostrare che la sollecitazione Σ di tipo (21) deriva dal potenziale generalizzato (III) se e solo se i tensori \mathbf{L} ed \mathbf{M} verificano le seguenti relazioni:

$$(22) \quad \left. \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{M} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{L} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \mathbf{M}) = 0. \end{array} \right\}$$

Infatti se Σ deriva da un potenziale U di tipo (III), necessariamente le condizioni (13)₂ del n° 3 sono soddisfatte. Indicando ora con $\alpha \beta j_1 \dots j_{n-2}$ una permutazione dei numeri $1, \dots, n$, le (20) si riducono alle

$$(20') \quad M^{j_1 \dots j_{n-2}} = - \varepsilon^{\alpha \beta j_1 \dots j_{n-2}} b_{\alpha \beta}.$$

Poichè il tensore \mathbf{M} è completamente emisimmetrico, le sue $n-2$ divergenze differiscono solo per il segno per cui basta calcolarne una, ad esempio

$$\sum_1^n j_1 M^{j_1 \dots j_{n-2}} = D^{j_2 \dots j_{n-2}}.$$

Siano poi $\alpha \beta \gamma$ tre indici tali che $\alpha \beta \gamma j_2 \dots j_{n-2}$ siano una permutazione dei numeri $1, \dots, n$, e tenendo conto delle (20'), si ha

$$\begin{aligned} D^{j_2 \dots j_{n-2}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_1^n j_1 \frac{\partial}{\partial q^{j_1}} (\sqrt{g} M^{j_1 \dots j_{n-2}}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\alpha} (\sqrt{g} M^{\alpha j_2 \dots j_{n-2}}) + \frac{\partial}{\partial q^\beta} (\sqrt{g} M^{\beta j_2 \dots j_{n-2}}) + \frac{\partial}{\partial q^\gamma} (\sqrt{g} M^{\gamma j_2 \dots j_{n-2}}) \right\} = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{g}} \gamma^{\alpha \beta \gamma j_2 \dots j_{n-2}} \left\{ \frac{\partial b_{\beta \gamma}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial b_{\gamma \alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial b_{\alpha \beta}}{\partial q^\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Da ciò segue, quindi, che le equazioni che si estraggono dalle (13)₂, scegliendo $k \neq 0$, equivalgono alla (22)₁.

D'altra parte, ricordando la definizione del vettore \mathbf{L} , possiamo scrivere le rimanenti equazioni del sistema (13)₂ — quelle con $k = 0$ — nella forma

$$\varepsilon^{j_1 \dots j_{n-2} \beta \alpha} L_{\alpha \beta} - \varepsilon^{j_1 \dots j_{n-2} \beta \alpha} L_{\beta \alpha} + \varepsilon^{j_1 \dots j_{n-2} \beta \alpha} \frac{\partial b_{\alpha \beta}}{\partial t} = 0$$

ovvero

$$\sum_1^n \varepsilon^{j_1 \dots j_{n-2} j_{n-1} j_n} L_{j_{n-1} j_n} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} M^{j_1 \dots j_{n-2}}) = 0$$

e cioè la (22)₂.

Viceversa, se sono vere le (22), esistono una funzione scalare a_0 , ed una vettoriale \mathbf{A} soddisfacenti le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{M} \\ \text{grad } a_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{L} \end{array} \right.$$

che, in sostanza, sono equivalenti alle (11). Da ciò si deduce che la sollecitazione Σ , di componenti lagrangiane (21), deriva, per il tramite delle (II), dal potenziale generalizzato

$$(23) \quad U = a_0 + \mathbf{A} \times \mathbf{v}.$$

In base al teorema ora dimostrato si può affermare che tutte e sole le sollecitazioni Σ dipendenti anche dall'atto di moto, e derivanti da un potenziale di tipo (23), hanno componenti lagrangiane Q_n che si ottengono dalle (21) assegnando un vettore \mathbf{L} ed un tensore \mathbf{M} di ordine $n-2$, completamente emisimmetrico, soddisfacenti le condizioni (22).

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARIAN E. *Leçons sur les invariants intégraux*. Hermann & Fils, Paris 1922.
- [2] FICHERA G. *Sull'integrazione in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado*. Rivista Matematica y Física Teorica, vol. 6, n° 1 e 2 1947.
- [3] FINZI B., PASTORI M. *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Zanichelli 1961.
- [4] LICHNEROWICZ A. *Éléments de calcul tensoriel*. Armand Colin, Paris 1962.

Triangoli aritmetici e sviluppi di potenze

*Nota del dott. Salvatore Pignataro
presentata dal socio corrispondente Mario Curzio*

(Adunanza del 3 febbraio 1973)

RIASSUNTO. — Si costruiscono infiniti triangoli aritmetici i cui termini rappresentano i coefficienti di sviluppi di potenze.

SUMMARY. — Are constructed infinite arithmetical triangles whose terms represent the coefficients of developments of powers.

Sia h un intero naturale ≥ 0 e poniamo

$$S_{n,k}^{(h)} = 1 + \sum_{r=2}^{k+1} r^h \sum_{s=0}^{n-k-1} 2^{hs} + \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=2}^2 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^{n-k-2} 2^{hs} + \dots +$$

$$+ \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k-1}^{n-k-1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^1 2^{hs} + \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k}^{n-k} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h}$$

ove per ogni intero $n \geq 0$, si assume $k = 0, 1, 2, \dots, n$, le sommatorie

$\sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=2}^2, \dots, \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k-1}^{n-k-1}, \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k}^{n-k}$ essendo estese a tutte le soluzioni in nu-

meri interi non negativi delle equazioni $\alpha + \beta + \dots + \delta = 2, \dots, \alpha + \beta + \dots + \delta = n - k - 1, \alpha + \beta + \dots + \delta = n - k$ rispettivamente.

Si verifica subito che

$$(1) \quad S_{n,0}^{(h)} = S_{n,n}^{(h)} = 1$$

Costruiamoci ora il triangolo aritmetico, che diremo di esponente h :

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & & & & \\
 1 & 1 & & & & \\
 1 & S_{2,1}^{(h)} & 1 & & & \\
 1 & S_{3,1}^{(h)} & S_{3,2}^{(h)} & 1 & & \\
 1 & S_{4,1}^{(h)} & S_{4,2}^{(h)} & S_{4,3}^{(h)} & 1 & \\
 1 & S_{5,1}^{(h)} & S_{5,2}^{(h)} & S_{5,3}^{(h)} & S_{5,4}^{(h)} & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

I simboli $S_{n,k}^{(h)}$ hanno le seguenti proprietà:

$$(2) \quad S_{n+1,k}^{(h)} = (k+1)^h S_{n,k}^{(h)} + S_{n,k-1}^{(h)}$$

$$(3) \quad S_{n+1,k}^{(h)} = S_{n,k-1}^{(h)} + (k+1)^h S_{n-1,k-1}^{(h)} + (k+1)^{2h} S_{n-2,k-1}^{(h)} + \dots$$

$$+ \dots + (k+1)^{(n-k)h} S_{k,k-1}^{(h)} + (k+1)^{(n-k+1)h}$$

Per dimostrare la prima cominciamo a scrivere

$$\begin{aligned}
 S_{n+1,k}^{(h)} = & 1 + \sum_{r=2}^{k+1} r^h \sum_{s=0}^{n-k} 2^{hs} + \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=2}^2 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^{n-k-1} 2^{hs} + \dots + \\
 & + \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=1}^{n-k} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^1 2^{hs} + \\
 & \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=0}^{n-k+1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{n,k}^{(h)} = & 1 + \sum_{r=2}^k r^h \sum_{s=0}^{n-k} 2^{hs} + \sum_{\alpha+\beta+\dots+\gamma=2}^2 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots k^{\gamma h} \sum_{s=0}^{n-k-1} 2^{hs} + \dots \\
 & + \sum_{\alpha+\beta+\dots+\gamma=1}^{n-k} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots k^{\gamma h} \sum_{s=0}^1 2^{hs} + \\
 & \sum_{\alpha+\beta+\dots+\gamma=0}^{n-k+1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots k^{\gamma h}
 \end{aligned}$$

Sottraendo da ciascun termine di $S_{n+1,k}^{(h)}$ il corrispondente di $S_{n,k-1}^{(h)}$ cominciando dall'ultimo, si trova che

$$(4) \quad \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k+1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} - \sum_{\alpha+\beta+\dots+\gamma=n-k+1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots k^{\gamma h} =$$

$$= (k+1)^h \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h}$$

poichè nella differenza che compare nel primo membro restano ovviamente tutti e soli i termini di grado $(n-k+1)h$ che contengono il fattore $(k+1)^h$, termini la cui somma è espressa appunto dal 2° membro; analogamente si trova successivamente

$$(5) \quad \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^1 2^{hs} - \sum_{\alpha+\beta+\dots+\gamma=n-k} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots k^{\gamma h} \sum_{s=0}^1 2^{hs} =$$

$$= (k+1)^h \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k-1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^1 2^{hs}$$

.

$$\sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k-1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^2 2^{hs} - \sum_{\alpha+\beta+\dots+\gamma=n-k-1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots k^{\gamma h} \sum_{s=0}^2 2^{hs} =$$

$$= (k+1)^h \sum_{\alpha+\beta+\dots+\delta=n-k-1} 3^{\alpha h} 4^{\beta h} \dots (k+1)^{\delta h} \sum_{s=0}^2 2^{hs}$$

e infine

$$(6) \quad \sum_{r=2}^{k+1} r^h \sum_{s=0}^{n-k} 2^{hs} - \sum_{r=2}^k r^h \sum_{s=0}^{n-k} 2^{hs} = (k+1)^h \sum_{s=0}^{n-k} 2^{hs} =$$

$$= (k+1)^h + (k+1)^h \cdot 2^h \sum_{s=0}^{n-k-1} 2^{hs}$$

Sommando membro e membro (4) con le (5) e (6) si ottiene

$$S_{n+1,k}^{(h)} - S_{n,k-1}^{(h)} = (k+1)^h S_{n,k}^{(h)}$$

che è appunto la (2). Si osservi che tenendo conto delle (1) e con la formula

ora stabilita, il triangolo aritmetico di esponente h si costruisce subito.
Ancora dalla (2) seguono ora

$$\begin{aligned} S_{n+1,k}^{(h)} &= (k+1)^h S_{n,k}^{(h)} + S_{n,k-1}^{(h)} \\ S_{n,k}^{(h)} &= (k+1)^h S_{n-1,k}^{(h)} + S_{n-1,k-1}^{(h)} \\ &\dots \\ S_{k+1,k}^{(h)} &= (k+1)^h S_{k,k}^{(h)} + S_{k,k-1}^{(h)} \end{aligned}$$

e sommando membro a membro dopo aver moltiplicato la 2^a per $(k+1)^h$, la 3^a per $(k+1)^{2h}$, ..., l'ultima per $(k+1)^{(n-k)h}$ si ottiene la (3).

I numeri $S_{n,k}^{(h)}$ che compaiono nei triangoli aritmetici, intervengono come coefficienti nel seguente sviluppo

$$(7) \quad x^{hn} = 1 + S_{n,1}^{(h)} D_{x,1}^{(h)} + S_{n,2}^{(h)} D_{x,2}^{(h)} + \dots + S_{n,k}^{(h)} D_{x,k}^{(h)} + \dots + D_{x,n}^{(h)}$$

ove

$$D_{x,k}^{(h)} = (x^h - 1)(x^h - 2^h)(x^h - 3^h) \dots (x^h - k^h)$$

Dimostreremo la (7) per induzione rispetto ad n , osservando che intanto è vera per $n = 0$ ed h assegnato qualsiasi,

Moltiplichiamo ora per x^h il primo e secondo membro della (7), che riterremo vera per n ,

$$x^{h(n+1)} = x^h + S_{n,1}^{(h)} x^h D_{x,1}^{(h)} + \dots + S_{n,k}^{(h)} x^h D_{x,k}^{(h)} + \dots + x^h D_{x,n}^{(h)}$$

ovvero aggiungendo e sottraendo termini opposti

$$\begin{aligned} x^{h(n+1)} &= 1 + D_{x,1}^{(h)} + S_{n,1}^{(h)} x^h D_{x,1}^{(h)} + \dots + S_{n,k}^{(h)} x^h D_{x,k}^{(h)} + \dots + x^h D_{x,n}^{(h)} \\ &\mp S_{n,1}^{(h)} 2^h D_{x,1}^{(h)} \mp \dots \mp S_{n,k}^{(h)} (k+1)^h D_{x,k}^{(h)} \mp \dots \mp (n+1)^h D_{x,n}^{(h)} \end{aligned}$$

ed osservando che

$$S_{n,k}^{(h)} x^h D_{x,k}^{(h)} - S_{n,k}^{(h)} (k+1)^h D_{x,k}^{(h)} = S_{n,k}^{(h)} D_{x,k}^{(h)}$$

possiamo anche scrivere

$$x^{h(n+1)} = 1 + D_{\alpha,1}^{(h)} + S_{n,1}^{(h)} D_{\alpha,2}^{(h)} + \dots + S_{n,k}^{(h)} D_{\alpha,k+1}^{(h)} + \dots + D_{\alpha,n+1}^{(h)} + \\ + 2^h S_{n,1}^{(h)} D_{\alpha,1}^{(h)} + \dots + (k+1)^h S_{n,k}^{(h)} D_{\alpha,k}^{(h)} + \dots + (n+1)^h D_{\alpha,n}^{(h)}$$

e infine per la (2)

$$x^{h(n+1)} = 1 + S_{n+1,1}^{(h)} D_{\alpha,1}^{(h)} + \dots + S_{n+1,k}^{(h)} D_{\alpha,k}^{(h)} + \dots + D_{\alpha,n+1}^{(h)}$$

Quindi la (7) è vera anche per $n+1$. D'altra parte h è stato assegnato arbitrariamente; dunque la (7) è dimostrata per ogni n ed h .

Casi particolari della (7) stabilita si hanno per $h=1$ ed $h=2$ poichè risulta

$$(8) \quad x D_{x,k}^{(1)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-k) = D_{\alpha,k+1}$$

$$(9) \quad x D_{\alpha,k}^{(2)} = x(x^2-1)(x^2-2)\dots(x^2-k^2) \\ = (x+k)(x+k-1)\dots(x-k+1)(x-k) = D_{\alpha+k,2k+1}$$

e queste relazioni riducono i simboli $D_{\alpha,k}^{(1)}$ e $D_{\alpha,k}^{(2)}$ alle ordinarie disposizioni combinatorie.

Allora ponendo nella (7) $h=1$ e moltiplicando ambo i membri per x , tenendo conto della 8 si ha

$$x^{n+1} = D_{x,1} + S_{n,1}^{(1)} D_{x,2} + S_{n,2}^{(1)} D_{x,3} + \dots + D_{x,n+1}$$

Ponendo invece $h=2$ e moltiplicando per x , dalla (7) segue per la (9)

$$x^{2n+1} = D_{\alpha,1} + S_{n,1}^{(2)} D_{\alpha+1,3} + \dots + S_{n,k}^{(2)} D_{\alpha+k,2k+1} + \dots + D_{\alpha+n,2n+1}$$

Osserviamo infine che il triangolo aritmetico di esponente $h=0$ è il triangolo di Tartaglia e quindi $S_{n,k}^{(0)} = \binom{n}{k}$, ma la (7) si riduce in tal caso alla uguaglianza banale $1=1$.

La metossibromurazione del 3-metil- e del 2-metil-5 α -colest-2-ene *

*Nota del dott. Michelangelo Parrilli,
del dott. Gaspare Barone, del prof. Matteo Adinolfi
e del socio corrispondente prof. Lorenzo Mangoni*

(Adunanza del 3 febbraio 1973)

RIASSUNIO. — Si riporta la reazione di metossibromurazione delle olefine (I) e (II).

SUMMARY. — Methoxybromination of (I) and (II) is referred.

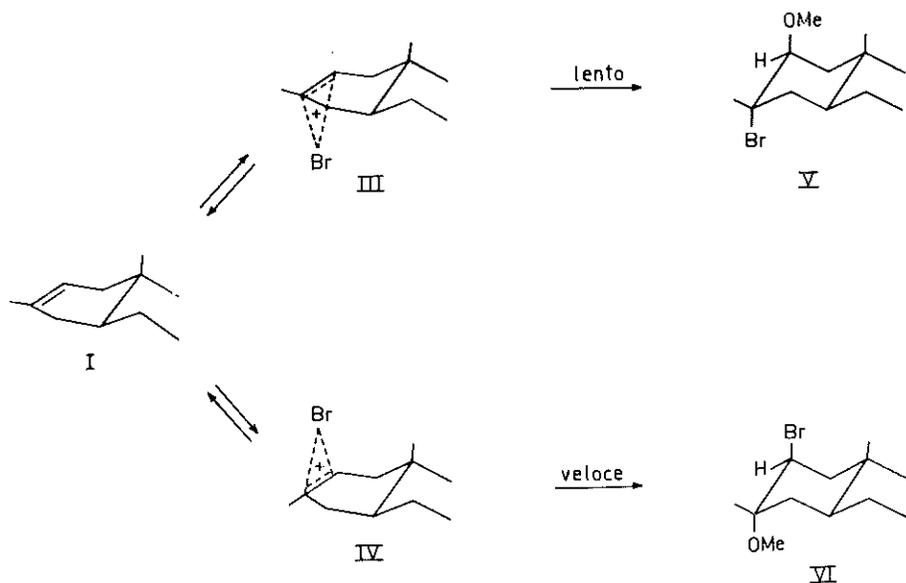
In questa comunicazione riportiamo i risultati della reazione del 3-metil- (I) e del 2-metil-5 α -colest-2-ene (II) col bromo in metanolo. La stessa reazione è stata eseguita recentemente da PASTO e GONTARZ¹ sull'1-metil-4-t-butil-cicloesene ed i risultati sono stati interpretati dagli AA. americani sulla base di un equilibrio, attraverso l'olefina, tra i due ioni bromonio stereoisomeri. La verifica della esistenza di tale equilibrio per le olefine steroidiche (I) e (II) assume un particolare significato per le ricerche del nostro gruppo sulla reazione di tali substrati con J₂/AcOAg in AcOH (reazione di WOODWARD), che pure decorre attraverso la formazione di ioni alogenonio².

Per reazione di (I) con bromo in soluzione metanolica diluita si ottiene, accanto al 16% di 2 β ,3 α -dibromo-3 β -metil-5 α -colestano (VII), già noto³, il 19,2% di 2 β -metossi-3 α -bromo-3 β -metil-5 α -colestano (V), p. f. 83-85° (NMR: δ 1,79 (3H, s, 3 β -Me), 3,27 (3H, s, -OMe), 3,40 (1H, m, W_{1/2} = 6,5 c/s, 2 α -H_{eq})) ed il 54% di 2 β -bromo-3 α -metossi-3 β -metil-5 α -colestano (VI), p. f. 112-114°, (NMR: δ 1,29 (3H, s, 3 β -Me), 3,10 (3H, s, -OMe), 4,17 (1H, m, W_{1/2} = 6 c/s, 2 α -H_{eq})).

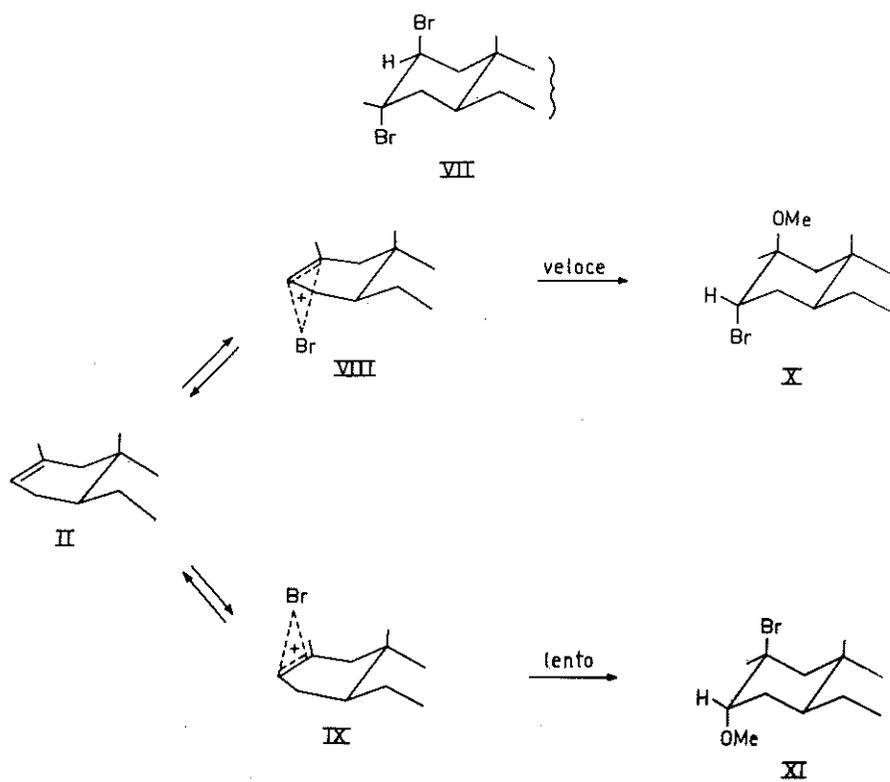
Nelle stesse condizioni, l'olefina (II) fornisce invece esclusivamente il 2 β -metossi-2 α -metil-3 α -bromo-5 α -colestano (X), p. f. 77,5-79°, (NMR: δ 1,25 (3H, s, 2 α -Me), 3,11 (3H, s, -OMe), 4,22 (1H, m, W_{1/2} = 6 c/s, 3 β -H_{eq})).

La metossibromurazione di (II) dà quindi esclusivamente il prodotto

* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.



Schema 1.



Schema 2.

derivante dall'attacco transdiassiale del metanolo all' α -bromonio (VIII), mentre la metossibromurazione di (I) dà i due metossibromuri transdiassiali (V) e (VI) nel rapporto di 1 : 2,8 e cioè il prodotto derivante dall'attacco del metanolo al β -bromonio (IV) predomina su quello derivante dall' α -bromonio (III).

D'altra parte è da ritenersi senz'altro stericamente favorita la formazione degli α -bromoni sia da (I) che da (II), sulla base, ad es., delle reazioni di epossidazione delle due olefine con i peracidi, da cui si ottengono pressochè esclusivamente gli α -eossidi⁴.

Il rapporto (V)/(VI) riscontrato può allora essere spiegato con l'esistenza di un equilibrio tra i cationi (III) e (IV), attraverso l'olefina (I) e con la maggiore reattività del secondo col metanolo a causa del maggiore carattere carbocationico della posizione di attacco del nucleofilo. Infatti questo, perché si abbia l'apertura transdiassale dello ione ciclico, attacca (IV) al C-3 terziario e (III) al C-2 secondario (vedi schema 1).

L'esistenza di un analogo equilibrio nella reazione di (II) è mostrata dall'assoluta assenza nella miscela di reazione del metossibromuro (XI). Infatti in questo caso è l' α -bromonio (VIII), che si forma più rapidamente, a reagire più velocemente col nucleofilo (vedi schema 2).

Napoli, Istituto di Chimica Organica dell'Università.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. J. PASTO e J. A. GONTARZ, *J. Am. Chem. Soc.*, **93**, 6902 (1971).
- [2] L. MANGONI e V. DOVINOLA, *Gazz. Chim. It.*, **100**, 467 (1970).
- [3] CAPUTO, V. DOVINOLA, F. D'ANDOLFO e L. MANGONI, *La Chim. e l'Ind.*, 43 (1970).
- [4] C. DJERASSI et al., *J. Am. Chem. Soc.*, **82**, 5991 (1960); D. BARTON et al., *J. Am. Chem. Soc.*, **78**, 3503 (1956).

La reazione di Woodward sull'1-metilcicloesene e sull'1-metil-4-t-butilcicloesene *)

*Nota del dott. Michelangelo Parrilli, del dott. Vincenzo Dovinola
e del socio corrispondente prof. Lorenzo Mangoni*

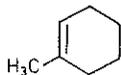
(Adunanza del 3 febbraio 1973)

RIASSUNTO. — Si riporta la reazione dell'1-metilcicloesene e dell'1-metil-4-t-butilcicloesene con I_2 e $AcOAg$ in $AcOH$ umido.

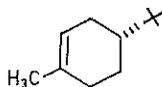
SUMMARY. — Reaction of 1-methyl-cyclohexene and of 1-methyl-4-t-butyl-cyclohexene with I_2 and $AcOAg$ in wet $AcOH$ is referred.

Nel corso di precedenti ricerche sul comportamento di olefine steroidiche trisostituite con iodio e sali di argento (reazione di Prevost-Woodward) è stato messo in evidenza che tale reazione conduce agli attesi dioli con rese scarse o addirittura trascurabili, i principali prodotti di reazione essendo, invece, alcoli allilici e chetoni (1a-e).

Alla luce di tali risultati ci è sembrato non privo di interesse un riesame della reazione con iodio e acetato di argento in acido acetico umido di due olefine trisostituite monocicliche, l'1-metilcicloesene (I) e l'1-metil-4-t-butilcicloesene (II), le quali, secondo le indicazioni delle letterature, forniscono: la prima (2) il diolo (III) (60%) e la seconda (3) i tre dioli (VII) (31.7%) (VIII) (8.3%) e (IX) (4%).



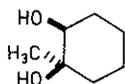
I



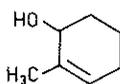
II

In realtà, nelle condizioni sopra indicate, partendo dalla olefina (I) siamo riusciti a mettere in evidenza la formazione, accanto al diolo (III) (48%)⁵, gli alcoli allilici (IV) (10%) e (V) (2.5%) ed il chetone (VI) (1.5%).

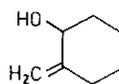
* Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.



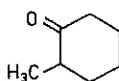
III



IV

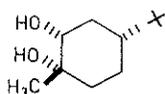


V

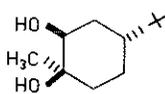


VI

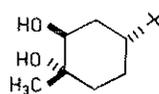
Analogamente dalla olefina (II), oltre ai dioli (VII) (43%), (VIII) (8%) e (IX) (3%), sono stati ottenuti gli alcoli allylici (X) (16%) e (XI) (8%), il chetone (XII) (6%) ed il chetone insaturo (XIII) (2%). Tranne quest'ultimo, tutti i prodotti ottenuti rientrano agevolmente nel quadro del meccanismo proposto in un lavoro precedente (1d).



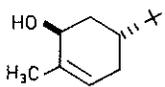
VII



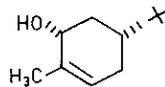
VIII



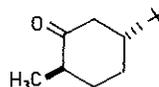
IX



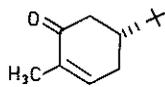
X



XI



XII

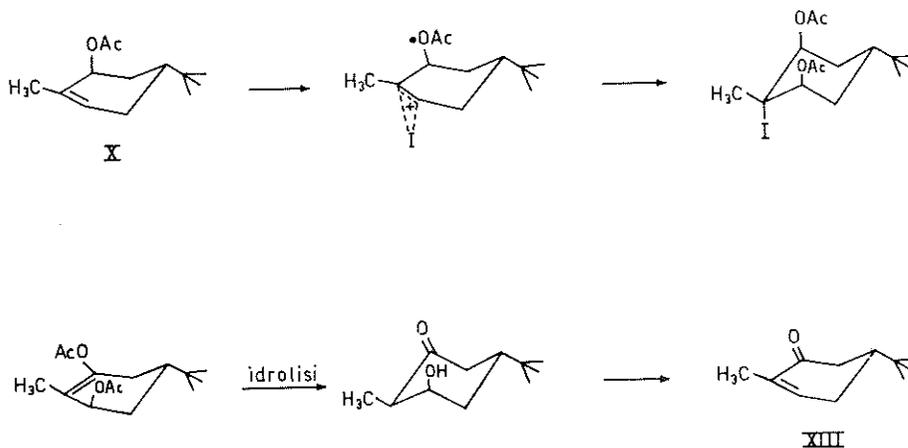


XIII

Per quanto riguarda la genesi di (XIII) una possibile spiegazione è che questo tragga origine dalla ulteriore addizione di CH_3COOI sull'acetato allylico (X), che potrebbe essere presente nella miscela di reazione (vedi appresso) quale prodotto di eliminazione della acetiliodidrina (XV) (Schema 1).

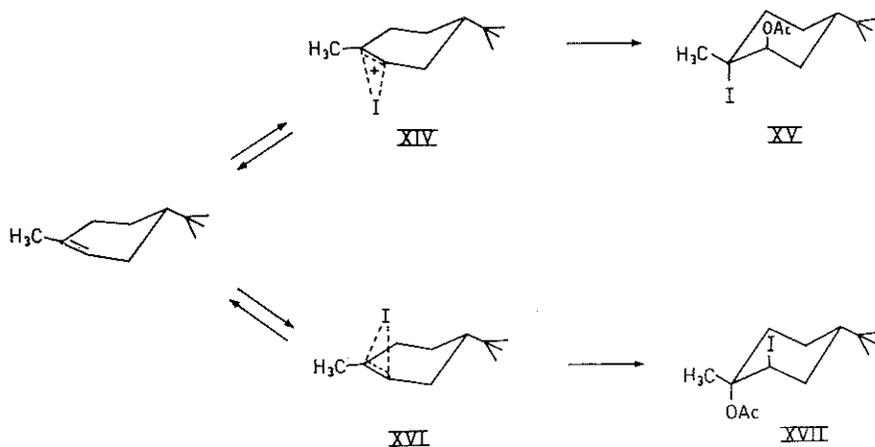
Come già nel caso delle olefine steroidiche, comunque, gli alcoli allilici possono trarre origine o da ioduri allilici, formatisi per perdita di un protone dagli ioni iodonio, o dalle acetiliodidrine con lo iodio assiale terziario [come in (XV)].

SCHEMA I

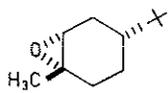


Allo scopo di fare luce su questo punto la olefina (II) è stata trattata con iodio in acido acetico in presenza di KIO_3 e la miscela di reazione, a causa dell'alterabilità delle due acetiliodidrine trans-diassiali (XV) e (XVII), direttamente sottoposta ad idrolisi (schema 2).

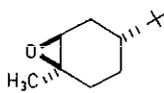
SCHEMA II



Si ottengono così gli epossidi (XVIII) (57.7%) e (XIX) (22.3%)⁷ il diolo (VIII) (11%) e l'alcol allilico (X) (5%).



XVIII



XIX

La presenza del solo epimero (X) mostra, abbastanza inequivocabilmente, che, al contrario di quanto riscontrato per le olefine steroidiche, non si verifica, in questo caso la formazione di ioduri allilici. Mentre è evidente, inoltre, che l'eossido (XVIII) e il diolo (VIII), da una parte, derivano necessariamente dalla acetiliodidrina (XVII) e l'eossido (XIX) e l'alcol allilico (X), dall'altra, derivano dalla acetiliodidrina (XV), non è possibile dire se (VIII) e (X) sono già presenti (come acetati) nella miscela di reazione originaria oppure si generano nel corso del trattamento idrolitico. Il valore del rapporto dei prodotti derivanti dall'attacco in cis (al gruppo t-butilico): eossido (XIX) più alcol allilico (X), e in trans: eossido (XVIII) più diolo (VIII) (1 : 2,5) conferma, infine, l'esistenza dell'equilibrio tra il cis e trans iodonio (XIV) e (XVI)⁸, già suggerito da BARILI e coll.³.

Napoli, Istituto di Chimica Organica dell'Università.

BIBLIOGRAFIA

- [1] a) MANGONI e V. DOVINOLA, *Gazz. Chim. It.*, **99**, 176 (1969);
 b) V. DOVINOLA e L. MANGONI, *ibid.*, **99**, 195 (1969);
 c) V. DOVINOLA e L. MANGONI, *ibid.*, **99**, 205 (1969);
 d) L. MANGONI e V. DOVINOLA, *ibid.*, **100**, 467 (1970);
 e) V. DOVINOLA, M. ADINOLFI e L. MANGONI, *ibid.*, **100**, 483 (1970).
- [2] C. A. BUNTON e M. D. CARR, *J. Chem. Soc.*, 770 (1963).
- [3] P. L. BARILI et al., *Gazz. Chim. It.*, **101**, 300 (1971).
- [4] Le rese indicate sono state da noi desunte.
- [5] Le strutture di tutti i composti descritti sono state assegnate sulla base dei loro spettri NMR, IR e UV e del confronto con campioni noti o appositamente preparati.
- [6] Tale reazione, che costituisce una variante di quella recentemente proposta da CORNFORTH [*J. Chem. Soc. (C)* 846 (1970)] per l'ottenimento di iodidrine, appare un metodo estremamente utile per la preparazione di acetiliodidrine. Sono in corso ricerche intese ad esplorare la potenzialità e la generalizzabilità di tale reazione.
- [7] Le rese dei due epossidi (XVIII) e (XIX), che non sono separabili nè per via cromatografica nè gascromatografica, sono state determinate per integrazione dello spettro NMR⁹.
- [8] Sull'equilibrio tra olefina e ioni bromonio vedi: D. J. PASTO e J. A. GONTARZ *J. Am. Chem. Soc.*, **93**, 6902 (1971).

Fenomeni d'isteresi nei fili ferromagnetici tesi

*Nota del dott. Giovanni Acocella
presentata dal socio ordinario Antonio Carrelli*

(Adunanza del 3 febbraio 1973)

RIASSUNTO. — Sono stati esaminati i cicli d'isteresi di alcuni fili di sostanze ferromagnetiche (\varnothing dei fili = $8 \cdot 10^{-2}$ cm). [Fe, Ni, Lega 52, Invar].

Le curve sono state ricavate mediante l'integrazione grafica dei relativi segnali, ottenuti sullo schermo di un C.R.O. con una tensione alternata sinusoidale di 50 periodi.

Per le sostanze sopra menzionate sono stati ricavati anche i cicli ferromagnetici quando i fili venivano sottoposti a tensioni meccaniche nei limiti di validità della legge di Hooke.

I cicli delle sostanze in stato di tensione sono risultati, come era già noto, molto diversi da quelli delle sostanze senza tensione, ma con uno speciale dispositivo è stato possibile ottenere direttamente e non per differenza, come era stato finora fatto, i cicli dovuti alla tensione, in funzione del campo H.

È stata ancora verificata la validità della relazione di Frölich che dà l'intensità di magnetizzazione in funzione del campo H nella zona di presaturazione.

La relazione di Frölich è risultata valida ed anche in tal modo è stato possibile ricavare l'ordine di grandezza della variazione relativa dell'intensità di magnetizzazione a saturazione di Ni, Fe, Lega 52, Invar quando vengono sottoposte ad una tensione meccanica.

SUMMARY. — Hysteresis loops of some wires of ferromagnetic substances have been examined (\varnothing of wires = $8 \cdot 10^{-2}$ cm). [Fe, Ni, 52-alloy, Invar].

The diagrams have been derived through graphic integration of corresponding signals, which have been obtained over screen of C.R.O. with alternating tension sinusoidal of 50 times.

For the above mentioned substances also the ferromagnetic loops have been derived when the wires were submitted to mechanical tensions within the validity as for the Hooke's law.

The substances loops under tension state have resulted, as it was already known, very different from those of substances without tension, but through special dispositive it as been possible to obtain directly and not for difference, as it had been done till now, the loops due to the tension against H.

The validity of Frölich relation, which gives an intensity of magnetization against H in presaturation zone, has still been verified.

Frölich relation has resulted valid and in such way it as been possible to obtain the order of magnitude of the variation related to the intensity of magnetization under saturation of Ni, Fe, 52-alloy, Invar when they are submitted to a mechanical tension.

Misure statiche di magnetizzazione, eseguite con metodi magnetometrici, su fili di diverse sostanze ferromagnetiche con e senza tensioni longitudinali, hanno mostrato, come è previsto dalla teoria, che lo stato di tensione (stress) del materiale modifica la curva d'isteresi ¹⁾.

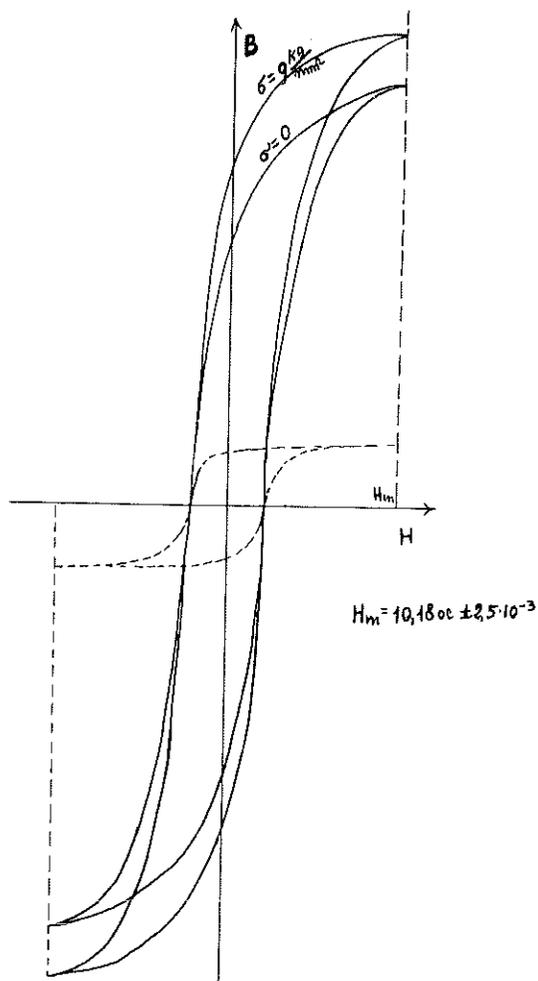


Fig. I. — Ferro.

Per alcune sostanze la magnetizzazione, per l'applicazione di una tensione meccanica σ , aumenta, per altre, invece, diminuisce, e ciò è stato interpretato ricordando che le sostanze ferromagnetiche hanno un coefficiente

¹⁾ Boz., pag. 610.

di magnetostrizione $\lambda = \frac{\Delta l}{l}$ che può essere positivo o negativo a seconda delle varie sostanze ed anche a seconda del valore del campo magnetico.

Di qui si deduce che allungando (mediante l'applicazione di una tensione meccanica) un filo di sostanza ferromagnetica, in un caso ($\lambda > 0$) la magnetizzazione si facilita, nell'altro ($\lambda < 0$) si riduce.

Per esempio in filo di ferro teso ($\lambda > 0$) alcuni domini sono già orientati in un senso ed altri nel senso opposto relativamente alla direzione della

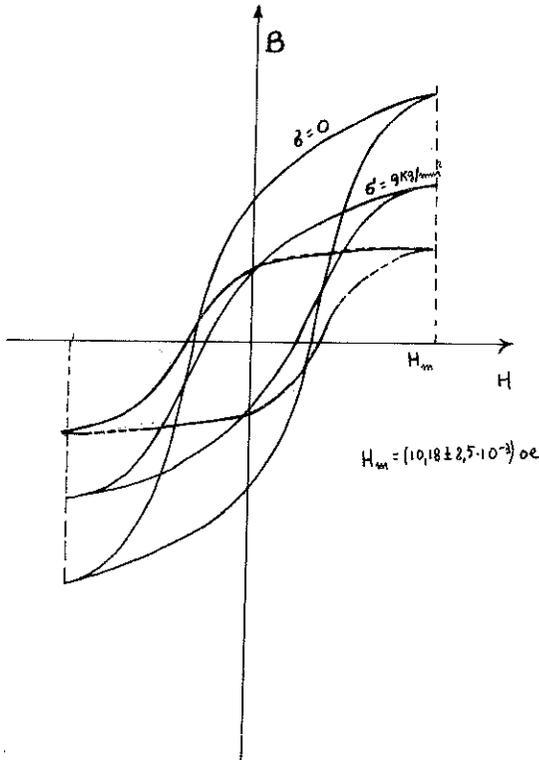


Fig. 2. — Nichel.

tensione, e per il nichel ($\lambda < 0$) si hanno invece orientamenti normali a detta direzione della tensione. Il campo magnetico conseguentemente produce, se $\sigma \neq 0$, una magnetizzazione maggiore nel Ferro e minore nel Nichel

Se ora si fa la differenza dei due cicli d'isteresi, quello relativo alle condizioni normali e quello relativo al filo sotto tensione, si ottiene in tal modo un ciclo d'isteresi che dà l'andamento della magnetizzazione di un

ferromagnete, al variare del campo quando gli spostamenti di parete prodotti dal campo avvengono in presenza di tensioni meccaniche.

In questa nota si riportano i cicli relativi a questi processi, per quattro sostanze, Fe, Ni, Invar e Lega 52. Prima di iniziare le esperienze si sono fatte queste differenze per i cicli riportati nel testo del BOZORTH ²⁾ relativamente al Ferro ed al Nichel, ma, in base ai dati riportati graficamente, l'andamento che si è ottenuto ci ha spinti a compiere esperienze ad hoc.

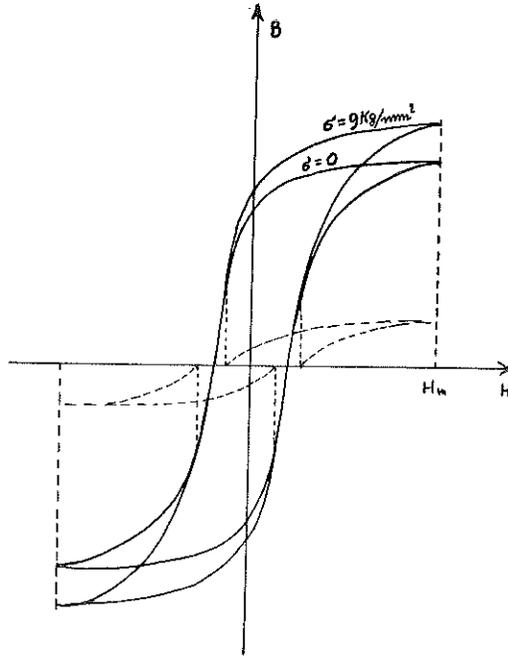


Fig. 3. — Invar.

L'andamento del ciclo differenza dei due (quello con $\sigma = 0$ e quello con $\sigma \neq 0$) è stato da noi ottenuto mediante una determinazione dinamica della magnetizzazione e cioè si è operato con un campo variabile sinusoidalmente col tempo, $H = H_0 \sin 2\pi \nu t$, con $\nu = 50\text{Hz}$.

Il dispositivo sperimentale è il seguente: due solenoidi uguali ma con avvolgimenti in senso opposto sono situati sullo stesso asse; all'estremo di ciascun solenoide v'è un serrafilo, dalla parte opposta una carrucola.

Due bobine identiche, collegate in serie e portate all'entrata di un oscillografo, hanno nel loro interno i due fili, nel tratto che va dal solenoide

²⁾ Boz., pag. 606.

al serrafile. Dato che, come si è detto, gli avvolgimenti dei due solenoidi sono di senso opposto, se si pongono in essi due fili uguali sotto tutti i riguardi, la magnetizzazione prodotta dai due campi magnetici generati dalla stessa corrente nei due solenoidi, è anch'essa di segno opposto. Poichè le bobine sono mobili rispetto agli estremi dei due solenoidi, si può ottenere compenso completo dei due flussi opposti ricevuti dalle bobine.

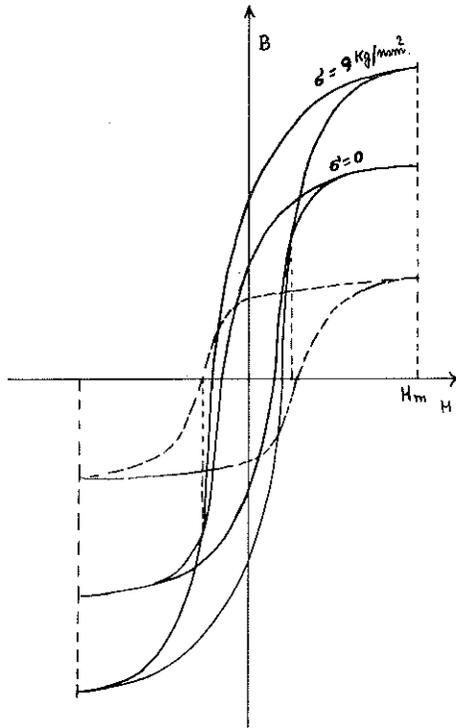


Fig. 4. — Lega 52.

Ora le prime esperienze sono state fatte introducendo il filo in uno solo dei solenoidi: si può così ottenere prima il ciclo di magnetizzazione della sostanza senza tensione, e poi, ponendo pesi all'estremità del medesimo, il ciclo con il filo in tensione.

Procedendo all'integrazione grafica delle curve ottenute all'oscillografo, si ottengono in tal modo i due cicli, uno col filo teso e l'altro con il filo non teso.

I fili di ferro, nichel, invar e lega 52 hanno $r = 4 \times 10^{-2}$ cm; la tensione applicata è di $9,00 \times 10^2$ Kg/cm².

Le figure 1, 2, 3, 4 riportano i due cicli relativi alle singole sostanze, ed il ciclo differenza (nel caso del Ni la differenza fra magnetizzazione con

tensione e quella senza tensione è negativa). Ciò che si osserva in generale nelle curve d'isteresi di « differenza » è che esse, rispetto ai cicli da cui derivano, sono più squadrate e tendono più rapidamente alla saturazione, e cioè la variazione rispetto ai due cicli di partenza è nel senso di presentare cicli rettangolari, dunque può dirsi che l'andamento della magnetizzazione, dipendente dall'aumento di dimensione dei domini o dalla rotazione dei domini quasi completamente orientati (per effetto delle tensioni), tende a realizzarsi con brusca discontinuità, come avviene nei cristalli. Ma una

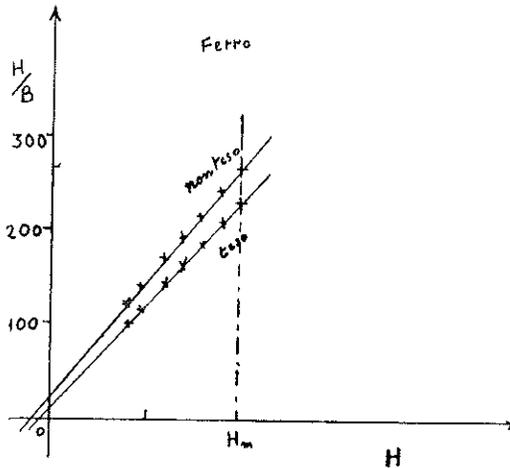


Fig. 5.

particolarità è presentata dall'invar, i cui due cicli (con e senza tensione) non presentano praticamente differenza nel tratto in cui è maggiore l'inclinazione della curva $B(H)$, e cioè nel tratto in cui sono più efficaci i salti di Barkhausen, conseguentemente il ciclo differenza presenta due tratti con $B = 0$.

L'effetto della tensione si manifesta più cospicuo per le sostanze Ni e Lega 52 (il coefficiente di magnetostrizione λ del Ni è notevolmente maggiore di quello del Fe, mentre per le altre due sostanze mancano i dati).

$$\lambda_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_s(\text{Fe}) \sim 5 \cdot 10^{-6} \\ \lambda_s(\text{Ni}) \sim 30 \cdot 10^{-6} \end{array} \right.$$

Un confronto sull'effetto delle tensioni per le varie sostanze può essere fatto con la comparazione fra i valori della magnetizzazione I_s a saturazione nei due stati tesi (I_s') e non tesi (I_s). Per ottenere i valori di I_s nei

due stati si è fatto ricorso ad una relazione empirica proposta da Frölich, che è la seguente:

$$(1) \quad \frac{H}{B} = a + bH$$

In essa indicando con C una costante, che è caratteristica della sostanza, si può porre

$$a = \frac{1}{CI_s}, \quad b = \frac{1}{I_s}$$

TABELLA I

Coefficienti di Frölich
b e a in scala arbitraria.

Sostanza	b		a	
	tesa	non tesa	tesa	non tesa
Nichel	2,90	2,05	$30,1 \cdot 10^{-1}$	$10,1 \cdot 10^{-1}$
Ferro	1,2	1,11	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-1}$
Invar	2,14	2,60	$5 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-1}$
Lega 52	1,66	2,47	$9 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$

Applicando la (1) ai nostri dati sperimentali per i cicli con o senza tensione si vede (fig. 5) che effettivamente i rapporti B/H in funzione di H, anche per valori non molto elevati di H, si dispongono su rette ed è quindi possibile ottenere I_s (almeno in scala arbitraria). Nella tabella I sono riportati i valori di a e b ; dai valori di b si possono ricavare i valori di I_s per i fili nei due stati; i rapporti sono riportati nella tabella II e nella stessa tabella sono riportati i valori della variazione percentuale $\Delta I = (I_s - I'_s)/I_s$ per una tensione di $9,00 \cdot 10^2 \text{Kg/cm}^2$ relativamente alle sostanze studiate.

Come vedesi v'è una variazione molto grande per il Ni e la lega 52. Il confronto con i valori di λ porta alla conclusione che ad un maggior valore di λ corrisponde un maggior valore della variazione percentuale.

È da notare ancora che i rapporti b/a (tab. I), per i fili ad esempio non tesi, danno i valori alla costante C che è introdotta nella formula di Frölich.

TABELLA II

Rapporti I_s/I relativi ai fili non tesi e tesi con una tensione $\sigma = 9 \text{ Kg/mm}^2$.

Sostanze	$\frac{I_s \text{ (teso)}}{I_s \text{ (non teso)}}$	$\frac{\Delta I}{I}$
Ni	0,708	+ 0,29
Fe	1,120	— 0,88
Invar	1,210	— 0,79
Lega 52	1,610	— 0,39

La C è caratteristica delle sostanze, ma i valori che si ottengono non sono molto diversi.

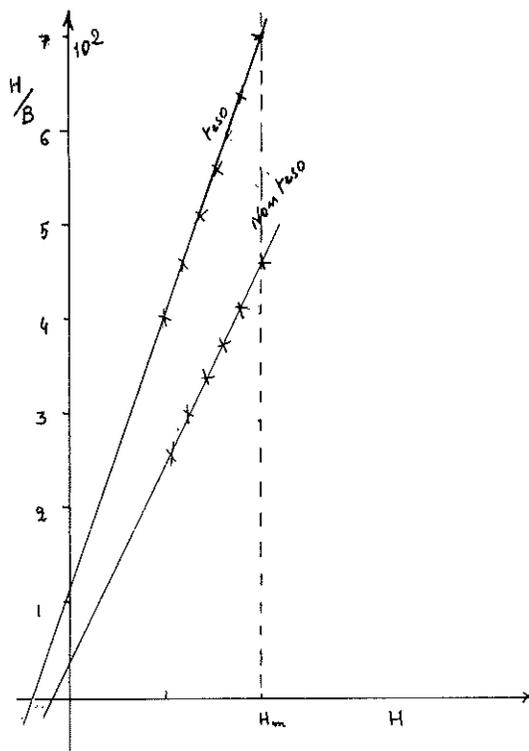


Fig. 6. — Nichel.

In ulteriori esperienze sono stati posti nei due solenoidi due fili della stessa sostanza; se essi sono fisicamente uguali, e cioè con le stesse tensioni interne dipendenti dagli sforzi a cui sono stati sottoposti, danno evidente-

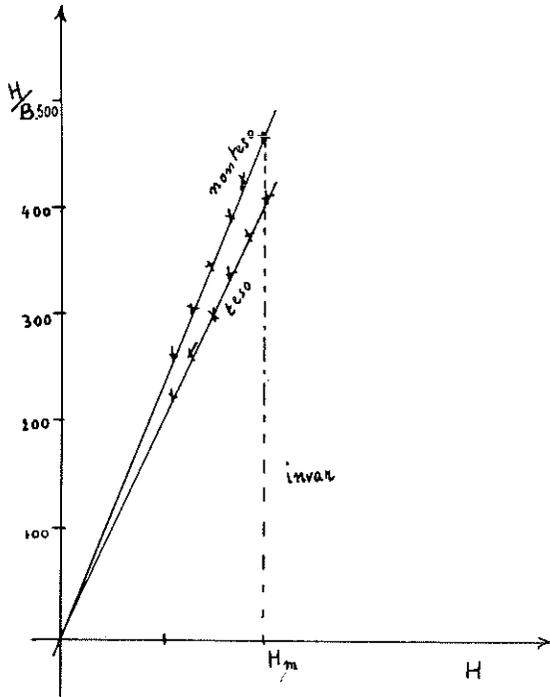


Fig. 7.

mente, per la simmetria del dispositivo, un ciclo nullo; in realtà ponendo nei due solenoidi due fili della stessa matassa, si osserva all'oscilloscopio, con lo stesso campo magnetico, una variazione di flusso, naturalmente con il periodo della corrente alternata, e cioè la presenza di un ciclo. Ciò evidentemente dimostra che la distribuzione delle tensioni non è uguale nei

TABELLA III

Rapporto $\frac{b}{a} = c$ per le varie sostanze.

Sostanze	b/a
Nichel	0.96
Ferro	4.8
Invar	4.2
Lega 52	1.8

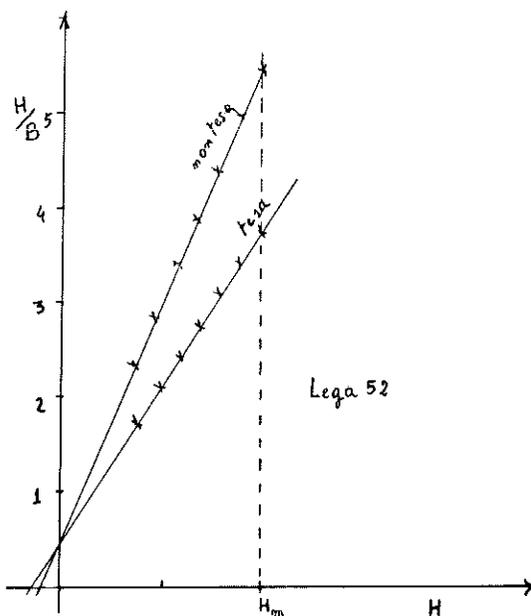


Fig. 8.

due fili. Naturalmente se si applica una tensione man mano crescente ad uno dei fili, in modo che tale tensione possa considerarsi molto vicina o anche superiore alle tensioni interne, il ciclo tende a regolarizzarsi.

Esistono metodi magnetici, e cioè mediante la variazione della rimanenza con la tensione ed i valori della permeabilità iniziale dopo tensione, che danno la possibilità di calcolare le tensioni interne ed i valori risultano di circa qualche Kg/mm^2 . Ora dalle nostre esperienze si può concludere, dall'ampiezza dei cicli che si osservano, che essi sono prodotti da tensioni dello stesso ordine.

In questi cicli si riscontrano delle anomalie, dipendenti appunto dalla diversità di direzione e d'intensità di queste tensioni interne. Particolarmente visibili sono quelle che si riscontrano con l'invar. La fig. 9 riporta i cicli fatti con due fili d'invar della stessa matassa in campi d'intensità diversa con un filo sottoposto ad una tensione di $9,00 \text{ Kg/mm}^2$.

I cicli che si osservano, come si è detto, sono cicli di differenza e si può giustificare l'andamento osservato se uno dei cicli ha nel tratto della

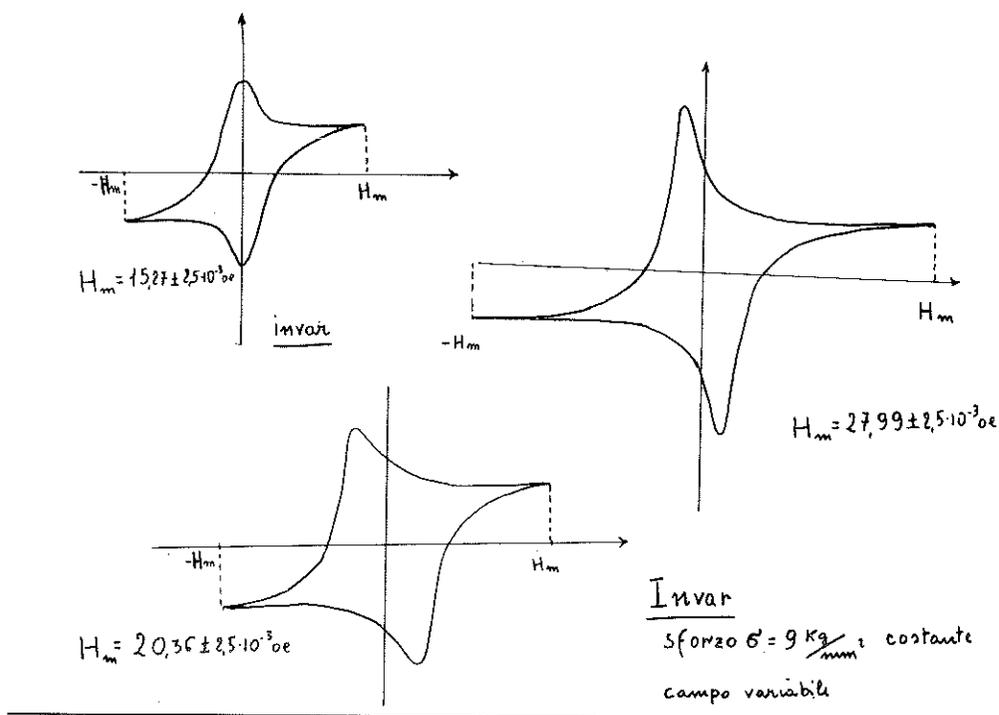


Fig. 9.

maggiore pendenza una pendenza superiore e se nel tratto prossimo alla saturazione l'andamento è praticamente uguale.

BIBLIOGRAFIA

- BOZORTH R. M. *Ferromagnetism*. Van Nostrand, Princeton 1951.
MORRISH A. M. *Physical Principles of Magnetism*. Wiley, N. Y. 1965.
KNELLER. *Ferromagnetismus*. Springer - Verlag - Berlin 1962.

Propagazione radiale di un transiente magnetico in cilindri ferromagnetici

*Nota del socio ordinario Antonio Carrelli
e dei proff. Carlo Luponio e Flavio Porreca*

(Adunanza del 7 aprile 1973)

RIASSUNTO. — Si prosegue lo studio della variazione del flusso di induzione in ferromagnetici cilindrici, dovuta a rapida variazione di campo magnetico.

Per campioni sottili si confrontano gli andamenti delle funzioni $\mu(H)$ e $B(H)$ così ottenuti, con quelli classici ottenuti con campi a bassa frequenza.

Per campioni massicci in diversi stati di magnetizzazione si interpreta fenomenologicamente l'andamento della funzione $\log d\Phi/dt$.

Si conclude che gli strati del campione apportano un contributo alla propagazione della magnetizzazione nell'interno della sostanza non previsto dalla teoria delle correnti indotte.

SUMMARY. — Here the authors develop in more details the experiments on the variations of the flux of magnetic induction in ferromagnetic cylinders due to sudden variations of external magnetic fields.

For thin ferromagnetic samples, the behavior of $\mu(H)$ and $B(H)$ obtained through this kind of experiments are compared with that ones obtained by means of classical experiments performed using low frequency fields.

In the case of massive sample, the experiments performed at many different degree of magnetization allowed us to interpret, in a phenomenological way, the behavior of $\log d\Phi/dt$.

We conclude that the layers of the sample bring a contribute to the propagation of the magnetization inside the substance, which is not foreseen by eddy currents theory.

1. INTRODUZIONE.

In un recente lavoro [1] abbiamo studiato sperimentalmente un processo di magnetizzazione, provocato da campi magnetici impulsivi piuttosto deboli (1,5 oersted) in $4 \cdot 10^{-6}$ sec, in cilindri ferromagnetici disposti lungo la direzione del campo.

Il trattamento teorico del problema è stato fatto da WVEDENSKY, B. [2] e in seguito ripreso da BOZORTH, R. M. [3].

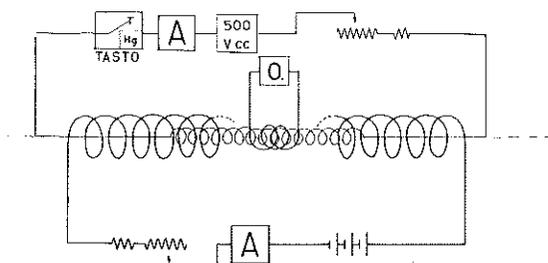
L'esperimento da noi eseguito consiste nell'osservare la propagazione del campo, diretto lungo l'asse del campione, la cui intensità in direzione radiale varia col tempo secondo una certa legge.

L'accordo tra i nostri risultati e quelli previsti dalla teoria basata sulla presenza delle correnti di Foucault è abbastanza soddisfacente; si sono tuttavia notate lievi discrepanze per l'aumento del flusso nei primi istanti del processo ($t < 0.21 \cdot 10^{-3}$ sec per Fe 0,8 mm).

Continuando le esperienze è stata studiata la dipendenza della funzione $f(t) = \lg d\Phi/dt$ dai seguenti parametri:

- 1) stato magnetico dei campioni
- 2) diametro dei campioni

Il dispositivo sperimentale usato (schema 1) è stato modificato rispetto a quello del lavoro [1]; in luogo di due solenoidi avvolti in versi opposti



SCHEMA 1

nei quali si inviava la corrente impulsiva che produceva il campo in $4 \cdot 10^{-6}$ sec., e di una bobina, posta nella zona dove il campo risultante è nullo, si utilizza ora un solo solenoide. Attorno ad esso si pone, nella parte centrale, una bobina che, collegata all'oscillografo segnala la variazione di flusso che ci interessa. Il vantaggio che presenta tale apparato sperimentale, col quale si ottengono gli stessi risultati ottenuti nel lavoro [1], è quello di fornire segnali abbastanza ampi per la cui osservazione all'oscillografo non si richiede una eccessiva amplificazione verticale (sc. vert. $\geq 0,2$ Volt/div. per campioni di Fe).

In questa ricerca ci interessa essenzialmente la variazione nel tempo della funzione $d\Phi/dt$ al variare dello stato magnetico del campione. Tale studio ci permette altresì di ottenere i valori della funzione $\mu(H)$ mediante misure fatte con variazioni ΔH del campo che avvengono in tempi dell'ordine di 10^{-6} sec.

A tal fine il campione durante l'esperimento è stato immerso in un campo magnetico uniforme di intensità variabile da -90 a $+90$ gauss.

Il campo impulsivo si ottiene producendo una extra-corrente di chiusura, mediante un interruttore a mercurio tenuto sotto vuoto spinto, in un circuito costituito da un solenoide, da una resistenza di 9000Ω , molto più grande di quella del solenoide stesso, e da un alimentatore 500 Vcc .

Una variazione di R del 115% (da 9000Ω a 4200Ω) produce lo stesso aumento percentuale del tempo di salita del campo; si osserva che a tale variazione non fa riscontro una variazione della funzione $f(t)$ (fig. 1).

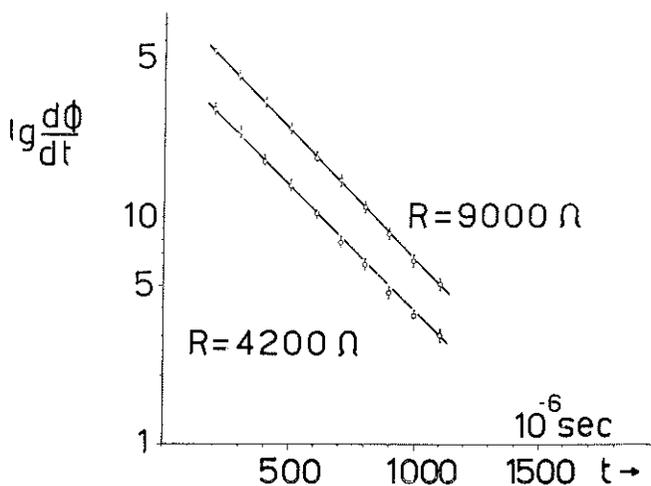


Fig. 1.

Ciò assicura che per una variazione del tempo di salita di H del 100% circa, da $4,0 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$ a $8,6 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$, non si ottiene una modifica nel processo di decadimento.

2. RISULTATI SPERIMENTALI E INTERPRETAZIONE FENOMENOLOGICA.

1) Si è proceduto alla misura del coefficiente angolare delle rette $f(t) = \log d\Phi/dt$ in funzione di t in scala semilogaritmica (fig. 2).

Poiché risulta dalla teoria [1] che tale coefficiente k è:

$$k = \frac{0,46}{\sigma r^2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

(σ = conducibilità elettrica, r = raggio del campione) si può agevolmente da k ottenere $\mu(H)$.

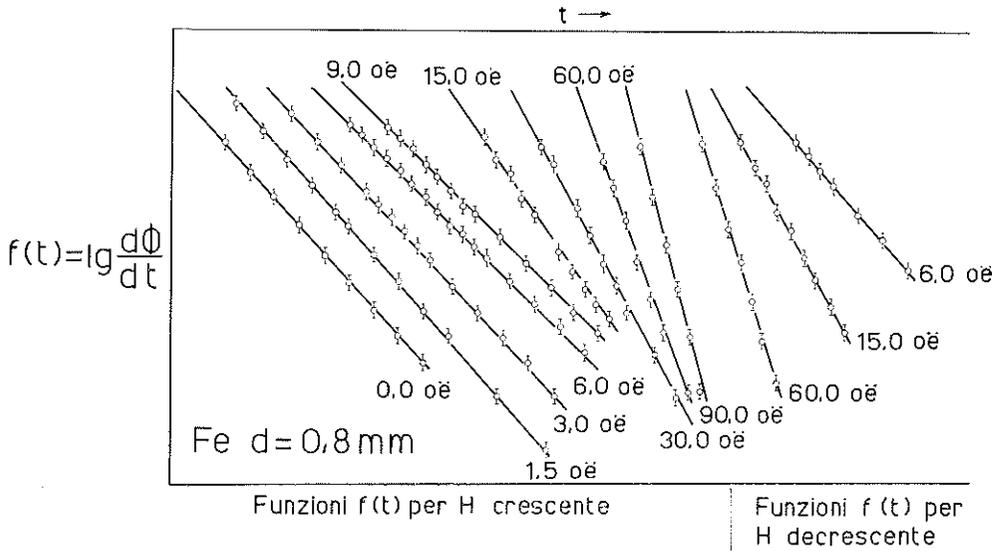


Fig. 2.

Prima di eseguire le misure che ci interessano, i campioni sono stati smagnetizzati partendo da un campo alternato maggiore di 90 oersted e quindi diminuendo la intensità fino a zero.

Le rette di fig. 2 corrispondono alle misure eseguite su campioni di Fe diam. 0,8 mm in campi uniformi. Partendo dallo stato smagnetizzato abbiamo portato il campione in 12 stati di magnetizzazione diversi.

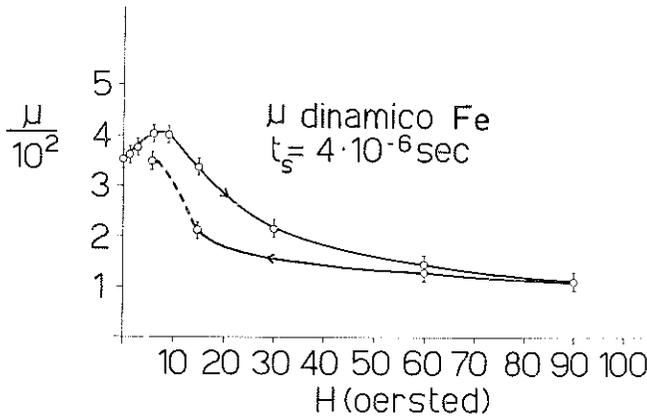


Fig. 3.

Attribuendo a σ il valore 10^{-4} u.e.m. (r ha il valore 0,04 cm) si ottiene il valore di μ corrispondente ad ogni stato e, per interpolazione grafica, $\mu(H)$ in funzione di H (fig. 3).

Integrando numericamente $\mu(H)$ rispetto ad H , si ottengono i valori di B in gauss, e quindi il grafico $B(H)$ riportato in fig. 4; l'esperienza, cioè, ci permette di ottenere quantitativamente il valore dell'induzione magnetica per ogni stato magnetico raggiunto per piccoli incrementi di

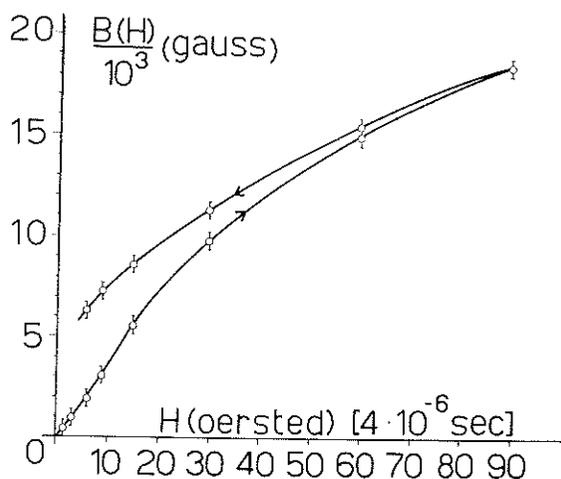


Fig. 4.

H ($\Delta H = 1,5$ gauss) prodotti in tempi di salita dell'ordine di 10^{-6} sec.

Si procede poi al confronto tra i suddetti grafici di $\mu(H)$ e $B(H)$ e quelli che si ottengono con ben noti metodi classici, utilizzando campi magnetici variabili molto più lentamente (frequenza 50 Hz).

A tal fine si è utilizzato un circuito integratore allo scopo di integrare la funzione $d\Phi/dt$ che si ottiene ai capi del secondario di una bobina il cui primario fornisce un campo sinusoidale a 50 Hz che magnetizza il campione introdotto nella bobina stessa.

Tarati gli assi dell'oscillografo direttamente in oersted (asse x) e in gauss (asse y), i cicli di isteresi ottenuti forniscono (quantitativamente) i valori della funzione $B(H)$ per una prefissata intensità massima H_m . Facendo variare H_m da 0 a 90 oersted si ottiene [4] la curva di prima magnetizzazione (fig. 5) e la curva derivata che fornisce $\mu(H)$ (fig. 6).

L'andamento di $B(H)$ ottenuto con campi impulsivi (fig. 4) mostra chiaramente una minore pendenza della seconda zona (zona dei salti di Barkhausen) rispetto alla corrispettiva zona della funzione $B(H)$ statica (fig. 5); si osserva inoltre che il processo di rotazione dei domini (terza zona) avviene con particolarità diverse.

2) Si analizza poi l'effetto del transiente su un campione cilindrico di Fe di diametro 12,5 volte più grande ($2r = 10$ mm).

Il campione è stato portato in 7 diversi stati di magnetizzazione, partendo dallo stato smagnetizzato $H = 0$, per ognuno dei quali si ot-

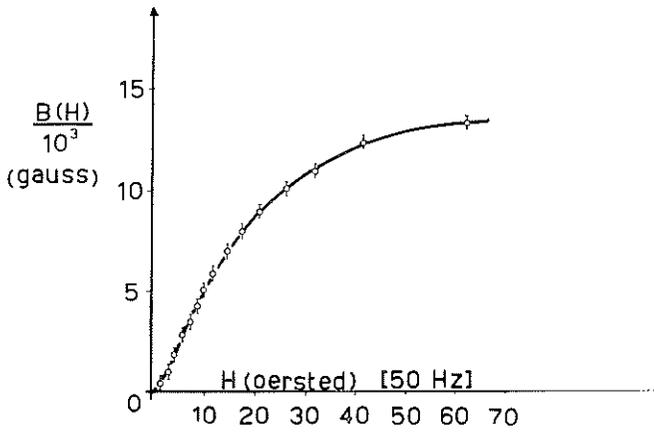


Fig. 5.

tiene un grafico, in scala semilog, che rappresenta l'andamento di $f(t)$ (fig. 7).

Da quest'ultime curve risulta che $f(t)$ non è lineare, il che significa che, per campioni massicci, non si ottiene la curva « universale »

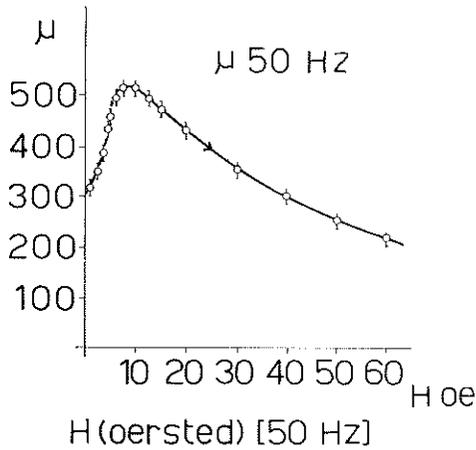


Fig. 6.

$f(\xi) = \log d\psi/d\xi$ in funzione di $\xi = t/4\pi\sigma r^2$. Dalle curve risulta invece che, per ogni stato di magnetizzazione, il coefficiente angolare di $f(t)$ diminuisce al crescere del tempo, ovvero μ aumenta. Ciò significa che

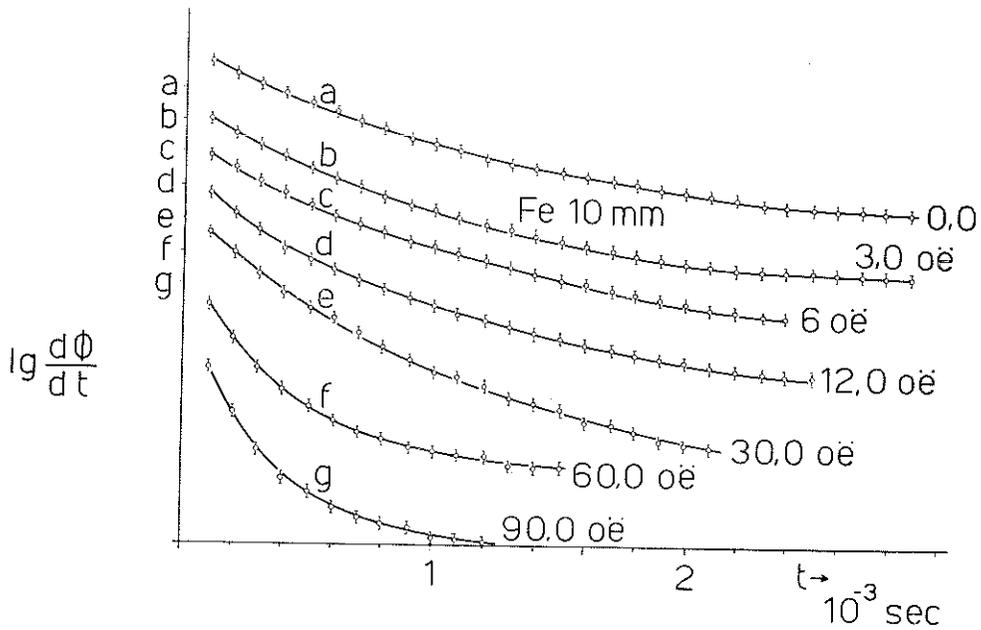


Fig. 7.

il flusso $\Phi(t)$ è maggiore, in ogni istante, di quello previsto dalla teoria [2], per la quale ogni strato cilindrico del campione ferromagnetico non influenza né è influenzato dai rimanenti strati, e, per la quale inoltre, la permeabilità magnetica è costante in tutto il campione.

Il fenomeno da noi osservato per i campioni massicci può interpretarsi fenomenologicamente supponendo che ogni strato del campione si magnetizzi più di quanto previsto in base alle azioni delle correnti di Foucault.

Si osserva cioè un contributo alla magnetizzazione che si sovrappone all'effetto dipendente dalle correnti di Foucault in modo tale che la propagazione del campo nell'interno del campione in direzione radiale si traduce quantitativamente in un aumento del flusso $\Phi(t)$.

Noi interpretiamo la natura di questo contributo come dovuto alla propagazione dello stato di magnetizzazione diretto dagli strati esterni verso gli interni.

Gruppo Nazionale Struttura della Materia del C.N.R. presso Istituto di Fisica Sperimentale dell'Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARRELLI A., LUPONIO C., PORRECA F. *Effetti di magnetizzaz. rapida in fili ferromagnetici*. Rend. Acc. Sc. Fis. Matem., 4, XXXIX, 1972.
- [2] WVEDENSKY B. *Ann. Physik*, (4)-64,609-20 (1921).
- [3] BOZORTH R. M. *Ferromagnetism*. V. Nostrand Comp. Inc., 783-85 (1968).
- [4] OLSEN E. *Applied Magnetism*. Phil. Techn. Libr., (1966).

On the numerical solution of a boundary value problem for a polywave equation of D. Mangeron: I.

Nota del Prof. Kinh Vinh Leung¹⁾, e del Prof. Mehmet Namik Öguztöreli²⁾)*
presentata dal socio ordinario Carlo Miranda

(Adunanza del 7 aprile 1973)

SUMMARY. — In this paper we give a method to construct numerically the solution of a boundary value problem for a « polywave equation » of D. Mangeron.

RIASSUNTO. — In questo lavoro elaboriamo un metodo per giungere ad una soluzione numerica di un problema al contorno di una « equazione polivibrante » di D. Mangeron.

I. - Since the publication of the habilitation thesis of D. Mangeron [1], a considerable number of contributions have been devoted to the boundary value problems for « polywave equations », frequently called « polyvibrating equations » or « Mangeron equations ». A partial list of relevant references is given at the end of the present work.

In this paper we consider the polywave equation

$$(I.1) \quad A(x, y) \partial^2 u + B(x, y) \partial u + C(x, y) u = F(x, y),$$

for $0 < x < a$, $0 < y < b$, subject to the boundary conditions

$$(1.2) \quad \begin{cases} u(0, y) = Y_0(y), & u(x, 0) = X_0(x), \\ u(a, y) = Y_a(y), & u(x, b) = X_b(x), \end{cases}$$

where a and b are certain positive numbers; $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$,

¹⁾ Department of Computer Science, University of Alberta, Edmonton, Alberta - Canada.

²⁾ Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta - Canada.

*) This work was partly supported by the National Research Council of Canada under Grant NRC - A4345 through the University of Alberta.

$C = C(x, y)$ and $F = F(x, y)$ are given functions which are sufficiently smooth in the closure of the rectangle $R : 0 < x < a, 0 < y < b$ and $A(x, y) > 0$ in R ; $X_o = X_o(x), X_b = X_b(x), Y_o = Y_o(y)$ and $Y_a = Y_a(y)$ are given functions which are sufficiently smooth in the intervals $0 < x < a$ or in $0 < y < b$; $u = u(x, y)$ is the unknown function and ∂ is the « total derivative operator » of M. Picone [2]:

$$(I.3) \quad \partial = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$

We assume that the following continuity conditions are satisfied:

$$(I.4) \quad X_o(0) = Y_o(0), X_o(a) = Y_o(0), X_b(0) = Y_o(b), X_b(a) = Y_o(b).$$

The existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem (I.1) - (I.3) has been investigated in the literature. In the present work we deal with the numerical solution of the above problem. The relevant program listings in the FORTRAN language will be presented somewhere else.

II. - Let N be an arbitrary positive integer. Put

$$(II.1) \quad h = \frac{a}{N}, k = \frac{b}{N}.$$

Let $P_{r,s}$ be the point whose coordinates are $x = rh, y = sk, r, s = 0, 1, \dots, N$. Further, we put

$$(II.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \partial u, w = \partial^2 u \\ \Phi(x, y) \equiv A(x, y)w(x, y) + B(x, y)v(x, y) + C(x, y)u(x, y) - F(x, y). \end{array} \right.$$

Clearly $\Phi(x, y) \equiv 0$ for $(x, y) \in R$ if $u = u(x, y)$ is a solution of Eq (I.1). To simplify our presentation, we shall denote by $z_{r,s}$ the value of a function $z = z(x, y)$ at $P_{r,s}$. Hence, if $u = u(x, y)$ is a solution of Eq (I.1), we have the equations

$$(II.3) \quad \Phi_{r,s} = A_{r,s} w_{r,s} + B_{r,s} v_{r,s} + C_{r,s} u_{r,s} - F_{r,s} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Further, we have the relationships

$$(II.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{o,s} = Y_o(sk), u_{N,s} = Y_a(sk) \\ v_{r,b} = X_o(rh), v_{r,N} = X_b(rh) \end{array} \right. \quad (r, s = 0, 1, \dots, N)$$

by virtue of Eqs (I.2). We now put

$$(II.5) \quad \bar{V}_{r,s} = u_{r+1,s+1} - u_{r+1,s-1} - u_{r-1,s+1} + u_{r-1,s-1}$$

$$(II.6) \quad \bar{W}_{r,s} = (u_{r+1,s+1} + u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s+1} + u_{r-1,s-1}) - \\ - 2(u_{r+1,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s+1} + u_{r,s-1}) + 4u_{r,s}$$

Using Taylor's expansion we can easily show that

$$(II.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{r,s} = \frac{1}{4hk} \bar{V}_{r,s} - \frac{1}{6} \left[h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]_{r,s}, \\ w_{r,s} = \frac{1}{h^2 k^2} \bar{W}_{r,s} - \frac{1}{12} \left[h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{r,s}. \end{array} \right.$$

Accordingly, Eqs (II.3) can be rewritten as

$$(II.8) \quad 4A_{r,s} W_{r,s} + hkB_{r,s} V_{r,s} + 4h^2 k^2 [C_{r,s} u_{r,s} - F_{r,s}] = R_{r,s}(h,k) \\ (r,s = 1, \dots, N-1),$$

where

$$(II.9) \quad R_{r,s}(h,k) = \frac{h^2 k^2}{3} A_{r,s} \left[h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{r,s} + \\ + \frac{2h^2 k^2}{3} B_{r,s} \left[h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]_{r,s}.$$

Note that, if $h = k$ (i.e., $a = b$), we have $R_{r,s} = 0(h^6)$.

The values $u_{r,s}$ of the solution $u(x,y)$ at the $(N-1)^2$ nodes $P_{r,s}$ ($r,s = 1, \dots, N-1$) can be found by solving $(N-1)^2$ equations (II.8) using the relationships (II.4)-(II.6) and (I.4). In the next section we shall present an iterative scheme to solve Eqs (II.8).

III. - Clearly the functions $R_{r,s}(h,k)$'s in (II.9) are small for sufficiently small h and k . Hence, consider Eqs (II.8) neglecting $R_{r,s}(h,k)$'s. In this way, after rearranging the terms, we obtain the equations

$$(III.1) \quad (4A_{r,s} + hkB_{r,s})(u_{r+1,s+1} + u_{r-1,s-1}) + \\ (4A_{r,s} - hkB_{r,s})(u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s+1}) - 8A_{r,s}(u_{r+1,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s+1} + u_{r,s-1}) + \\ + 4(4A_{r,s} + h^2 k^2 C_{r,s})u_{r,s} - 4h^2 k^2 F_{r,s} = 0,$$

for $r,s = 1, \dots, N-1$. The solution of Eqs (III.1) will be the first approximate

solution of our boundary value problem (I.1) - (I.3). To establish the second approximation we shall proceed the following steps:

Step 1: Solve the system (III.1).

Step 2: By extrapolation find the $4(N+2)$ values of $u(x, y)$ on the lines $x = -h, x = (N+1)h, y = -k, y = (N+1)k$. This way we find on the lines $u_{-1,s}, u_{N+1,s}, u_{r,-1}, u_{r,N+1}, r = s = -1, 0, 1, \dots, N, N+1$.

Step 3: Compute the values of $v_{r,s}$ and $w_{r,s}$ for $r, s = 0, 1, \dots, N$ by the formulas

$$(III.2) \quad v_{r,s} = \frac{1}{4hk} \bar{V}_{r,s}, \quad w_{r,s} = \frac{1}{h^2 k^2} \bar{V}_{r,s}.$$

Step 4: Compute the derivatives $\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{r,s}, \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{r,s}, \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{r,s}$ and $\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]_{r,s}$ using the formulas

$$(III.3) \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{r,s} = \frac{1}{h^2} (z_{r+1,s} - 2z_{r,s} + z_{r-1,s}), \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{r,s} = \frac{1}{k^2} (z_{r,s+1} - 2z_{r,s} + z_{r,s-1})$$

with $z = v$ and $z = w$.

Step 5: Solve the following equations for the new values of $u_{r,s}$:

$$(III.4) \quad \begin{aligned} & (4A_{r,s} + hkB_{r,s}) (u_{r+1,s+1} + u_{r-1,s-1}) + \\ & + (4A_{r,s} - hkB_{r,s}) (u_{r+1,s-1} + u_{r-1,s+1}) - 8A_{r,s} (u_{r+1,s} + u_{r-1,s} + u_{r,s+1} + u_{r,s-1}) + \\ & + 4(4A_{r,s} + h^2 k^2 C_{r,s}) u_{r,s} - 4h^2 k^2 F_{r,s} \\ & = \frac{A_{r,s}}{12} [w_{r+1,s} + w_{r-1,s} + w_{r,s+1} + w_{r,s-1} - 4w_{r,s}] + \\ & + \frac{B_{r,s}}{6} [v_{r+1,s} + v_{r-1,s} + v_{r,s+1} + v_{r,s-1} - 4v_{r,s}]. \end{aligned}$$

If

$$(III.5) \quad |u_{r,s}(\text{previous approximation}) - u_{r,s}(\text{present approximation})| > \varepsilon,$$

where ε is an arbitrarily given positive number, we proceed *Step 2*, otherwise the iteration process is ended.

It remains to determine the values $u_{-1,s}, u_{N+1,s}, v_{r,-1}$ and $v_{r,N+1}$ in *Step 2*.

For this purpose we shall use Taylor expansion of the functions $X_0(x)$, $X_b(x)$, $Y_0(y)$ and $Y_a(y)$. Consider the expansions

$$(III.6) \left\{ \begin{aligned} u_{-1,0} &= u_{0,0} - hX'_0(0) + \frac{h^2}{2!} X''_0(0) - \frac{h^3}{3!} X'''_0(0) + \dots, \\ u_{0,-1} &= u_{0,0} - kY'_0(0) + \frac{k^2}{2!} Y''_0(0) - \frac{k^3}{3!} Y'''_0(0) + \dots, \end{aligned} \right.$$

$$(III.7) \left\{ \begin{aligned} u_{N+1,0} &= u_{N,0} + hX'_0(Nh) + \frac{h^2}{2!} X''_0(Nh) + \frac{h^3}{3!} X'''_0(Nh) + \dots, \\ u_{N,-1} &= u_{N,0} - kY'_a(0) + \frac{k^2}{2!} Y''_b(0) - \frac{k^3}{3!} Y'''_a(0) + \dots, \end{aligned} \right.$$

$$(III.8) \left\{ \begin{aligned} u_{-1,N} &= u_{0,N} - hX'_b(0) + \frac{h^2}{2!} X''_b(0) - \frac{h^3}{3!} X'''_b(0) + \dots, \\ u_{0,N+1} &= u_{0,N} + kY'_a(Nk) + \frac{k^2}{2!} Y''_0(Nk) + \frac{k^3}{3!} Y'''_0(Nk) + \dots, \end{aligned} \right.$$

and

$$(III.9) \left\{ \begin{aligned} u_{N+1,N} &= u_{N,N} + hX'_b(Nh) + \frac{h^2}{2!} X''_b(Nh) + \frac{h^3}{3!} X'''_b(Nh) + \dots, \\ u_{N,N+1} &= u_{N,N} + kY'_a(Nk) + \frac{k^2}{2!} Y''_a(Nk) + \frac{k^3}{3!} Y'''_a(Nk) + \dots \end{aligned} \right.$$

The remaining $4(n+2) - 8 = 4n$ unknown $u_{r,s}$ are obtained by solving Eqs (III.1) using $4n$ nodes as central nodes $P_{r,0}$, $P_{r,N}$ and $P_{0,s}$ and $P_{N,s}$, $r,s = 0,1, \dots, N$.

Now we put

$$(III.10) \quad i = i(r,s) = (s-1)(N-1) + r$$

and label the nodes $P_{r,s}$ by $P^{(i)} = P(rh, sk)$. Consider now the $(N-1)^2$ -dimensional column vector

$$(III.11) \quad u = [u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N-1)^2}],$$

where $u^{(i)} = u(P^{(i)}) = u_{r,s}$. Then Eq (III.1) can be written as

$$(III.12) \quad Tu = y,$$

where T is a banded matrix of order $(N-1)^2$ with maximum bandwidth $[(i+1) + (N-1)] - [(i-1) - (N-1)] + 1 = 2N + 1$ and y is a well defined $(N-1)^2$ -dimensional column vector.

Taking $P^{(i)}$ as the central node for Eqs (III.1), we find the following as the (i) -th equation of (III.1):

$$\begin{aligned}
 \text{(III.13)} \quad & (4A_{r,s} + hkB_{r,s}) [u^{(i+N)} + u^{(i-N)}] + \\
 & + (4A_{r,s} - hkB_{r,s}) [u^{(i-N+2)} + u^{(i+N-2)}] - \\
 & - 8A_{r,s} [u^{(i+1)} + u^{(i-1)} + u^{(i-N+1)} + u^{(i+N-1)}] + \\
 & + 4(4A_{r,s} + h^2k^2C_{r,s}) u^{(i)} = 4h^2k^2F_{r,s}.
 \end{aligned}$$

The bandwidth of Eq (III.13) is $2N + 1$.

In a forthcoming paper we shall present a computer simulation for the above described numerical solution of the boundary value problem (I.1) - (I.3) with examples.

REFERENCES

- [1] MANGERON D., *Problemi al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*. Giorn. di Mat. **71** (1933), 89-139.
- [2] PICONE M., *Appunti di Analisi Superiore*. Napoli, Roinella, 1940.
- [3] MANGERON D., *Problèmes à la frontière concernant les équations polyvibrantes*. C. r. Acad. Sci., Paris, 204 (1937), 94-96, 544-546, 1022-1024; 266A (1968), 870-873, 976-979; 1050-1052, 1103-1106, 1121-1124; J. Math. Anal. and Appl., **9** (1964), 141-146.
- [4] OGUZTÖRELI M. N., *Boundary value problems for Mangeron's equations*. Torino, Accad. Sci., **105**(1970-71), 759-764.
- [5] EASWARAN S. *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron*. Dissertation. Dept. of Math., The University of Alberta, 1972.
- [6] FOX L., *Numerical Solutions of Ordinary and Partial Differential Equations*. Oxford, Pergamon Press, 1962.

Il polo d'inerzia iniziale (1900.0 - 1907.0)

*Nota del Prof. Elio Fichera
presentata dal socio ordinario Tito Nicolini*

(Adunanza del 5 maggio 1973)

RIASSUNTO. — In un intervallo di 7 anni si ha un ciclo completo di combinazioni delle due componenti fondamentali del moto polare, annua e chandleriana.

Con una discussione accurata dei cataloghi di declinazioni stellari, si vengono a determinare nel modo più conveniente le due dette componenti; ed il rispettivo polo d'inerzia terrestre, origine propria del sistema di coordinate connesso a queste ricerche.

SUMMARY. — In 7 years of observations of latitude variations, there is a complete cycle of combinations of the 2 main components of the polar motion, annual and Chandler's. With an accurate discussion of the declination Catalogues to be adopted, we can determine the 2 above components, and the corresponding pole of inertia, which is the most convenient origin of the coordinates connected to this problem. A comparison with the origin I.C.O. also results from the discussion.

1. - Alla XIII^a assemblea generale dell'Unione Astronomica Internazionale, tenutasi a Praga nell'agosto del 1967, venne approvata l'adozione di un'origine convenzionale (ICO), alla quale riferire le riduzioni del moto polare.

L'origine del sistema di coordinate polari si può stabilire solo mediante la determinazione delle latitudini medie delle Stazioni internazionali per un dato intervallo di tempo; ma questa determinazione è uno dei problemi più complessi di Meccanica Celeste, in quanto questi valori medi dipendono dal Sistema di declinazioni adottato e viceversa.

Infatti nelle Stazioni internazionali viene determinata la latitudine col metodo di HORREBOW-TALCOTT, misurando la differenza di distanze zenitali di determinate coppie di stelle, facenti parte di un Catalogo stabilito a priori dall'Ufficio Centrale:

$$(1) \quad \varphi_i = \frac{1}{2} (\delta_S + \delta_N)_i + dz_i = \bar{\delta}_i + dz_i$$

dove δ_S e δ_N sono le declinazioni delle due stelle della i^a coppia culminanti rispettivamente a sud e a nord dello zenit dell'osservatore, $\bar{\delta}_i$ la loro media,

e dz_i , una somma di quattro termini dovuti alle misure strumentali e alla rifrazione atmosferica; la esplicitazione di questi termini può vedersi nei volumi dei risultati del Servizio Internazionale delle Latitudini, p. es. nell'ultimo pubblicato (X°).

Ora ogni posizione stellare contenuta in un Catalogo fondamentale (cioè dedotto da altri Cataloghi stabiliti mediante osservazioni dirette al Cerchio Meridiano) è affetta da due tipi di errori.

Il primo tipo d'errore dipende dall'omogeneità imposta al Sistema, cioè dall'equinozio medio e dalla giacitura dell'equatore medio assunti come sistema di riferimento: quest'errore può essere considerato, almeno per vaste zone di α e δ , come sistematico e lo indicheremo genericamente con $d\delta$.

Il secondo tipo d'errore comprende tutti gli errori residui d'osservazione e strumentali su ogni singola posizione stellare che non si è riusciti ad eliminare durante le analisi condotte sui vari cataloghi attraverso i quali si è costruito il Catalogo fondamentale. Questo tipo d'errore, che indicheremo genericamente con dp , è proprio di ogni stella, diverso da stella a stella e nel complesso *totale* del sistema può essere considerato della stessa natura di un errore accidentale.

Ma bisogna notare una questione molto importante: statisticamente l'errore dp può essere considerato accidentale solo nel complesso totale del Sistema, cioè per un Catalogo — come l'FK4, il GC, l'N30 — che contenga posizioni stellari che vanno da 0^h a 24^h e con declinazioni da $+90^\circ$ a -90° .

Quando invece ci si limita a considerare un Catalogo limitato ad una stretta fascia di declinazioni, come quello adoperato nelle osservazioni di latitudine, anche dp presenterà una parte sistematica dp_1 (dovuta ad errori sulla rifrazione, ad errori di cerchio o di giacitura strumentale in genere che non si è riusciti a compensare perfettamente nella stesura del Catalogo fondamentale) assieme ad una parte accidentale dp_2 dovuta ad altri errori d'osservazione.

Quindi in ultima analisi, ogni posizione stellare di un Catalogo del Servizio internazionale delle latitudini deve considerarsi affetta da due errori sistematici $d\delta$ e dp_1 , di natura diversa e da un errore accidentale dp_2 .

Gli errori sistematici possono determinarsi solo col confronto con altri Cataloghi fondamentali, quindi è impossibile dedurli dalle osservazioni di latitudini del Servizio internazionale: *essi si riverseranno interamente sui valori calcolati delle latitudini φ_i .*

Ora sia quando si esegue la riduzione alla media del gruppo, sia quando si opera la ripartizione dell'errore di chiusura, s'impone la condizione che la somma delle correzioni apportate alle φ_i deve essere uguale a zero, cioè queste correzioni non devono alterare il valore medio della latitudine di ogni Stazione internazionale. Ciò significa numericamente da una parte determinare il valore medio $\overline{dp_2}$ di tutte le $(dp_2)_i$ relative ad ogni coppia

e dall'altra determinare delle quantità, che indicheremo con ε_i , che rappresentano per ogni coppia lo scarto dal valore medio dp_s .

In altre parole, mediante la riduzione alla media del gruppo o con la ripartizione dell'errore di chiusura si eseguono delle trasformazioni numeriche tali che:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m \varepsilon_i = 0.$$

Se si considerano i valori medi φ_i relativi ad ogni mese d'osservazione (riduzione alle epoche standard), $n = 12$ e la (2) individuerà una funzione periodica, con periodo annuo.

Quindi, dopo le riduzioni coi metodi abituali adoperati sin'oggi dai vari Uffici Centrali, ogni gruppo di latitudini fornirà un valore φ_g dato da:

$$(3) \quad \varphi_g = [\delta_g + \Delta\delta] + \varepsilon_g + dz_g$$

dove in $\Delta\delta$ si è conglobata tutta la parte di errori sistematici non determinabili dalle osservazioni di latitudine e in dz_g si deve considerare introdotta la correzione ΔR ai valori dei passi micrometrici assunti inizialmente.

Il valore medio della latitudine di una data Stazione per un determinato intervallo k di tempo (k multiplo di 12), è quindi — per la condizione (2) — dato da

$$(4) \quad \Phi = \left[\frac{1}{k} \sum_{g=1}^k \bar{\delta}_g + \Delta\delta \right] + \frac{1}{k} \sum_{g=1}^k dz_g.$$

In questa relazione evidentemente il termine scritto in parentesi rappresenta il Sistema di declinazioni (e moti propri in δ) assunto *numericamente* per la riduzione definitiva.

Pertanto si può concludere che la determinazione di un valore della latitudine media di una Stazione comporta lo stabilire automaticamente un dato Sistema di declinazioni (e moti propri in δ) per il Catalogo d'osservazione adoperato.

Inoltre si vuol far notare ancora che quando si procede al calcolo delle coordinate x, y della polodia si adoperano le differenze:

$$d\varphi_g = \varphi_g - \Phi$$

e in esse — come si vede dalle relazioni (3) e (4) — sono presenti sia i valori numerici (senza alcun significato fisico) ε_g , sia i residui sui dz_g dovuti

sia agli errori d'osservazione (in special modo gli errori nella lettura delle livelle di Talcott, durante l'osservazione), sia all'imperfetta determinazione dei valori delle costanti strumentali, sia alla dissimetria zenitale provocata sul programma stellare del Catalogo d'osservazione dall'effetto di processione.

Tutte queste quantità le ritroveremo logicamente sul termine z , la cui natura quindi non può rigorosamente attribuirsi agli errori sulle declinazioni e sui moti propri in δ del Catalogo d'osservazione.

2. - Tenendo conto delle principali componenti del moto polare, se queste latitudini medie delle Stazioni del Servizio internazionale si riferiscono ad un intervallo di tempo comprendente sette oscillazioni annue e sei oscillazioni chandleriane, esse individueranno un polo medio con un preciso significato geofisico, cioè un polo d'inerzia all'epoca media t .

Ora poiché la scelta di una serie di valori di latitudini medie individua contemporaneamente un dato Sistema di declinazioni, e viceversa; noi pensiamo che sarebbe più conveniente, per l'aspetto meccanico del problema polodico, scegliere quest'origine convenzionale riferendosi ad un polo d'inerzia, ad una data epoca, individuato da una serie di latitudini che poggiano su un Sistema di declinazioni ben preciso e omogeneo e *principalmente determinato con procedimenti del tutto estranei alle osservazioni di latitudine*.

In altra ricerca (Bibl. 1) è stato provato che il Sistema MD di declinazioni (Bibl. 2) è quanto di più omogeneo si ha oggi a disposizione per l'IPMS (International Polar Motion Service), e noi abbiamo voluto determinare il polo d'inerzia per il periodo iniziale (1900.0 - 1907.0) del Servizio internazionale nel suddetto Sistema.

Il procedimento da noi seguito è stato il seguente:

(a). - mediante un programma per computer, preparato dal Prof. Giuseppe Caprioli dell'Osservatorio Astronomico di Roma, sono state calcolate nel Sistema MD tutte le posizioni stellari, per il periodo che va dal 1900 al 1912, relative ai Cataloghi ILS₁, ILS₂, che differiscono fra loro per pochissime stelle. Così, dal confronto con i Sistemi di declinazioni conclusi dall'Albrecht e dal Wanach, si sono determinate le correzioni d'apportare alle latitudini, riportate nei volumi III e V dei Resultate des Internationalen Breitendienstes, per tener conto degli errori nelle declinazioni e nei moti propri in δ .

(b). - si è proceduto quindi alla determinazione nel modo più rigoroso possibile di un polo d'inerzia per una data epoca. Siccome dal 1935 al 1947 l'Ufficio Centrale delle latitudini aveva sede a Napoli (Direttore Prof. Luigi Camera), presso questo Osservatorio esisteva la collezione completa di tutti

i libretti d'osservazione delle stazioni di Mizusawa, Kibat, Carloforte, Gaithersburg, Ukiah. Dai dati forniti da questi libretti, seguendo la stessa metodologia adoperata dal Carnera, sono stati ricalcolati tutti i valori di φ_i direttamente nel Sistema MD.

Le latitudini medie per l'equinozio 1938.0 da noi concluse sono:

MIZUSAWA	$\Phi_o = 39^\circ 8' 3''.618$
KITAB	1 .897
CARLOFORTE	9 .077
GAITHERSBURG	13 .492
UKIAH	12 .348

(c) rispetto a questo polo d'inerzia sono state calcolate le coordinate x , y del polo per il periodo 1900.0-1907.0, utilizzando le latitudini φ_i da noi concluse col procedimento detto in (a). Poi dalle relazioni:

$$(5) \quad \Phi_o + x_i \cos \lambda_n + y_i \sin \lambda_n = \varphi_{i,n}$$

sono stati dedotti i valori delle latitudini, indipendenti cioè dal termine z , alle epoche standard (dodicesimi di anno) relativi al periodo 1900.0 - 07.0, per ognuna delle n Stazioni.

Così abbiamo potuto calcolare anche la latitudine media 1900.0 - 07.0 della Stazione di Kitab, mentre le latitudini medie delle due Stazioni di Tschardjui e Cincinnati sono state dedotte solo col primo metodo detto in (a).

I valori conclusivi per il polo d'inerzia Φ iniziale (eq. 1903.0) e le differenze Δ fra il nostro polo d'inerzia nel Sistema MD e l'ICO, sono:

MIZUSAWA	$\Phi = 39^\circ 8' 3''.733$	$\Delta = + 0''.131$
TSCHARDJUI	10 .808	—
CARLOFORTE	9 .078	+ 0 .137
GAITHERSBURG	13 .335	+ 0 .133
CINCINNATI	19 .480	—
UKIAH	12 .229	+ 0 .133
KITAB	2 .032	+ 0 .182

da cui risulta evidente lo scarto subito da Kitab nell'estrapolazione per il calcolo dell'ICO, basata sul sistema di declinazioni Albrecht-Wanach.

Tutte le suddette operazioni sono state eseguite su computer.

3. - Infine abbiamo voluto calcolare le due componenti medie (eq. 1903.0), annua e chandleriana, per il periodo suddetto.

Per questa determinazione abbiamo preferito adoperare il procedimento indicato dal Carnera (Bibl. 3) che permette di utilizzare un metodo di filtraggio numerico che meglio si adatta alle possibilità di calcolo dei computer.

Il metodo viene giustificato dal seguente ragionamento.

È ben noto che lo spostamento del polo istantaneo di rotazione terrestre si può ricondurre a due movimenti indipendenti, che dovuti a cause diverse danno origine ai due periodi che si possono distinguere nel complesso moto dell'asse polare. Uno dovuto essenzialmente a fenomeni stagionali, che si verificano sulla superficie terrestre, ha logicamente il periodo di 12 mesi; il secondo connesso alle deformazioni elastiche che subisce la superficie solida della Terra per gli stessi spostamenti dell'asse di rotazione e per gli spostamenti delle masse interne, dà origine ad un moto con periodo di circa 14 mesi.

Da ciò potremo ammettere che, a meno degli inevitabili errori, ognuna delle due coordinate x, y possa essere concepita come somma algebrica delle due corrispondenti x_a (annua), x_b (chandleriana); y_a, y_b , che per lo stesso istante avrebbe il polo. Se per semplicità di scrittura, ci si serva delle sole lettere a, b per indicare le componenti dei due movimenti, mettendo per indice il numero della fase da 1 a 12 per a ; da 1 a 14 per b) si possono scrivere le due matrici:

$$(I) \left\{ \begin{array}{cccccc} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 & \dots & a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_1 + b_{13} & a_2 + b_{14} & a_3 + b_1 & \dots & a_{11} + b_9 & a_{12} + b_{10} \\ a_1 + b_{11} & a_2 + b_{12} & a_3 + b_{13} & \dots & a_{11} + b_7 & a_{12} + b_8 \\ a_1 + b_9 & a_2 + b_{10} & a_3 + b_{11} & \dots & a_{11} + b_5 & a_{12} + b_6 \\ a_1 + b_7 & a_2 + b_8 & a_3 + b_9 & \dots & a_{11} + b_3 & a_{12} + b_4 \\ a_1 + b_5 & a_2 + b_6 & a_3 + b_7 & \dots & a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 \\ a_1 + b_3 & a_2 + b_4 & a_3 + b_5 & \dots & a_{11} + b_{13} & a_{12} + b_{14} \end{array} \right.$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{cccccc} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 & \dots & a_1 + b_{13} & a_2 + b_{14} \\ a_3 + b_1 & a_4 + b_2 & a_5 + b_3 & \dots & a_3 + b_{13} & a_4 + b_{14} \\ a_5 + b_1 & a_6 + b_2 & a_7 + b_3 & \dots & a_5 + b_{13} & a_6 + b_{14} \\ a_7 + b_1 & a_8 + b_2 & a_9 + b_3 & \dots & a_7 + b_{13} & a_8 + b_{14} \\ a_9 + b_1 & a_{10} + b_2 & a_{11} + b_3 & \dots & a_9 + b_{13} & a_{10} + b_{14} \\ a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 & a_1 + b_3 & \dots & a_{11} + b_{13} & a_{12} + b_{14} \end{array} \right.$$

Dove la (I) è composta da sette righe e dodici colonne, mentre la (II) da sei righe e quattordici colonne. Tutte e due conterranno quindi i valori di x , oppure di y , (in dodicesimi di anno) delle coordinate polari, relativi ad esattamente sette anni consecutivi.

Nella (I) le medie per colonna forniranno:

$$a_{2i} + \frac{1}{7} \sum_{n=1}^7 b_{2n} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

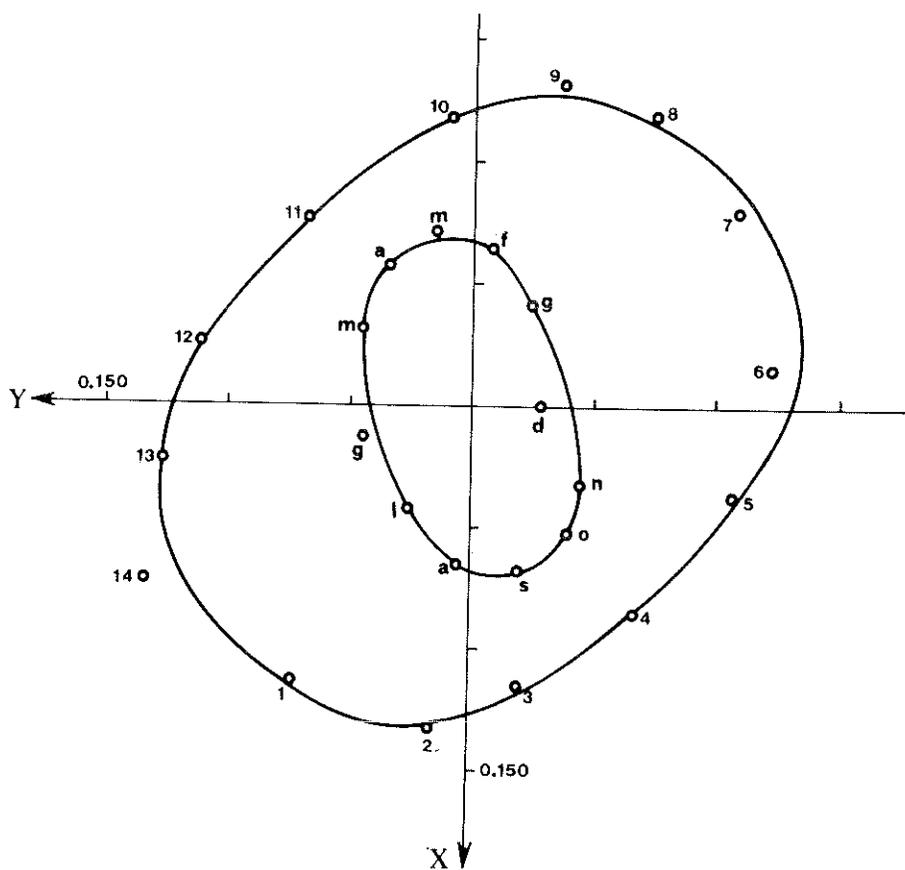


Fig. 1

oppure:

$$a_{2i-1} + \frac{1}{7} \sum_{n=1}^7 b_{2n-1} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Nella (II) le medie per colonna daranno:

$$b_{2i} + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^6 a_{2n} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 6, 7)$$

oppure:

$$b_{2i-1} + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 7)$$

Se la somma delle x e y del periodo di 7 anni è nulla, cioè se queste coordinate sono riferite al loro polo medio d'inerzia, allora le quantità:

$$\sum_{n=1}^7 b_{2n}, \quad \sum_{n=1}^7 b_{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^6 a_{2n}, \quad \sum_{n=1}^6 a_{2n-1}$$

tenderanno a zero, quindi a maggior ragione il loro valore sarà quasi nullo dividendo per 7 la prima e la seconda e per 6 la terza e la quarta sommatoria.

In altre parole la media per colonne delle (I) fornirà — almeno in prima approssimazione — i valori x_a, y_a della componente annua, mentre le medie sulle colonne delle (II) ci darà x_b, y_b della componente chandleriana. Un miglioramento dei risultati si può ottenere applicando gli abituali metodi del periodogramma separatamente sulle x_a, x_b, y_a, y_b così ottenuti.

Dopo aver calcolate le coordinate x, y (in dodicesimi di anno) del polo istantaneo di rotazione 1900.0 - 1907.0, riferite al polo d'inerzia iniziale sud-detto (eq. 1903.0), cioè dopo aver eseguita una traslazione degli assi di riferimento polodico, il metodo (matrici e periodogramma) detto prima ci ha portato alle seguenti conclusioni.

ELLISSE ANNUA (eq. 1903.0)

semiasse maggiore $a_a = 0''.070$

semiasse minore $b_a = 0''.038$

$\lambda_a = -15^\circ$

In questa ellissi gli estremi dell'asse maggiore si trovano agli equinozi, gli estremi dell'asse minore ai solstizi.

Periodo: 0^a.985

ELLISSE CHANDLERIANA (eq. 1903.0)

semiasse maggiore $a_{ch} = 0''.142$

semiasse minore $b_{ch} = 0''.105$

$\lambda_{ch} = +42^\circ$

Periodo: 1^a.188

La fig. 1 dà le posizioni relative delle due ellissi all'epoca 1903.0.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. FICHERA. *Studio del Catalogo SIL di Melchior-Dejaffe dalle osservazioni 1935.0 - 1947.0*. Pubbl. n. 3, « Astronomia Generale e Sferica », Istituto Universitario Navale, Napoli 1971.
- [2] MELCHIOR-DEJAFJE. *An. Obs. Royal Belgique*, s. 3^a t. x, fasc. 3. Uccle 1969.
- [3] L. CARNERA. *Risultati del Servizio Internazionale delle latitudini dal 1935.0 al 1941.0*, vol. IX, 1957.

Su un'equazione di tipo iperbolico dell'aerotermodinamica unidimensionale: calcolo e stabilità delle soluzioni nulle agli estremi (*)

*Nota dei dott. Armando D'Anna e Pasquale Renno
presentata dal socio corrispondente Francesco Stoppelli*

(Adunanza del 5 maggio 1973)

RIASSUNTO. — In questa Nota si prendono in esame le piccole trasformazioni unidimensionali, intorno ad uno stato di equilibrio aerotermodinamico E_0 , di una miscela reagente M contenuta in un cilindro C di lunghezza finita, nell'ipotesi che essa si trovi inizialmente in un prefissato stato prossimo ad E_0 ed abbia velocità costantemente nulla sulle basi di C . Risolvendo un problema al contorno relativo ad un'equazione di tipo iperbolico del terzo ordine, si determinano dapprima le trasformazioni suddette e, successivamente, si studia la stabilità del campo cinetico di M mediante un procedimento dovuto a A. A. Movchan.

ABSTRACT. — In this work we examine the small unidimensional transformations, taking place around an E_0 aerothermochemical state of equilibrium of a M reacting mixture; this mixture is contained in a cylinder C of finite length, supposing that it initially finds in a prefixed state near E_0 and has a speedness steadily null on the bases of C . On solving a boundary-initial-value problem concerning a third-order hyperbolic equation, we determine at first the above mentioned transformations; successively we study the stability of the kinetic field of the mixture by means of a proceeding due to A. A. Movchan.

INTRODUZIONE

Sia M una miscela reagente costituita da due gas perfetti M' ed M'' , non soggetta a forze esterne e nella quale siano assenti fenomeni di diffusione e di conducibilità termica. Con riferimento al punto P e all'istante t indichiamo con p , ρ , η , \mathbf{v} , nell'ordine, la pressione, la densità, l'entropia per unità di massa e la velocità di M ; siano poi Γ la velocità della reazione

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo nazionale di ricerca per la Fisica Matematica del C.N.R.

chimica, γ la concentrazione di massa di M' , e v la componente di \mathbf{v} secondo l'asse x di una terna trirettangola $T_o = Oxyz$.

Com'è noto ¹⁾ — indicando con E_o uno stato di equilibrio aerotermo-chimico che sia anche di quiete per M e con a e b ($0 < b < a$) i valori che assumono in tale stato i quadrati della velocità del suono congelata e della velocità del suono in equilibrio — l'analisi delle piccole trasformazioni di M intorno ad E_o si riduce, nel caso unidimensionale, allo studio dell'equazione indefinita

$$(I) \quad \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

dove ε è una costante positiva che esprime un tempo caratteristico della reazione chimica.

Tale analisi è già stata affrontata in alcuni casi significativi nei lavori citati in bibliografia da [2] a [11]. In questa Nota ci occuperemo delle piccole trasformazioni di M nel caso che detta miscela sia contenuta in un cilindro C di lunghezza unitaria, si trovi inizialmente in un prefissato stato prossimo ad E_o ed abbia sulle basi di C velocità costantemente nulla; ci occuperemo cioè delle soluzioni della (I) soddisfacenti (n. 1) condizioni al contorno del tipo:

$$(II) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^i v}{\partial t^i} \right)_{t=0} = v_i(x) & (0 \leq i \leq 2) & \forall x \in [0, 1] \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 & & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Nella prima parte di essa, dopo aver stabilito (nn. 2, 3) alcune proprietà di regolarità di una particolare soluzione della (I), si perviene (nn. 4, 5) alla formula risolutiva del problema e quindi ad un teorema di esistenza per esso ²⁾. Nella seconda parte, dopo aver richiamato alcuni risultati relativi alla stabilità « rispetto a due metriche » dovuti a Movchan (cfr. [15] e [16]) ed aver premesso alcune opportune diseguaglianze, si perviene alla seguente conclusione:

— « Comunque si fissi un $\sigma > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che se le funzioni assegnate $v_o(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ verificano la disuguaglianza

$$\sup |v_2(x)| + \sup |v_1'(x)| + \sup |v_o''(x)| < \delta,$$

¹⁾ Cfr. la bibliografia da [1] a [10].

²⁾ L'unicità della soluzione segue da un teorema stabilito da S. Rionero [9].

la corrispondente soluzione $v(x,t)$ delle (I) - (II) soddisfa la condizione

$$\sup |v(x,t)| + \sup |v_x(x,t)| + \sup |v_t(x,t)| < \sigma \quad \forall t \geq 0.$$

§ 1. — FORMULAZIONE DEL PROBLEMA E SUA RISOLUZIONE

I. - POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Indichiamo con $\rho_0, \eta_0, \gamma_0, p_0$ quattro costanti e supponiamo che M ammetta uno stato di equilibrio aerotermochimico E_0 in corrispondenza del quale risulti:

$$\rho = \rho_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad p = p_0, \quad \mathbf{v} = 0.$$

Posto

$$\rho_1 = \rho - \rho_0, \quad \eta_1 = \eta - \eta_0, \quad \gamma_1 = \gamma - \gamma_0,$$

le eventuali piccole trasformazioni aerotermochimiche di M intorno ad E_0 sono rette, com'è noto ³⁾, dalle equazioni

$$(1,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \frac{\chi}{\rho_0} \Gamma \\ \eta_1(x, t) = \eta_1(x, 0) \\ \Gamma = \frac{\rho_0}{\varepsilon \chi} (c \rho_1 + c' \eta_1 - \gamma_1) \\ p = p_0 + a \rho_1 + a' \eta_1 + d \gamma_1. \end{array} \right.$$

In [11] P. Renno si è occupato, tra l'altro, del calcolo della soluzione delle (1.1) nell'ipotesi che M , posta nel semispazio $x \geq 0$, si trovi all'istante

³⁾ Cfr. bibl. da [2] a [11]. Per il significato delle costanti che compaiono nelle (1.1) cfr. ad esempio [11].

$t = 0$ nello stato E_0 ed abbia, per ogni $t > 0$, velocità assegnata nei punti del piano $x = 0$.

Assumendo invece che la miscela, posta inizialmente in uno stato diverso da E_0 , sia contenuta nel cilindro $C: \{0 \leq x \leq 1\}$ ed abbia, agli estremi di questo, velocità costantemente nulla, le condizioni al contorno da associare alle (1,1) sono del tipo

$$(1,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1(x, 0) = \rho_*(x) \\ \gamma_1(x, 0) = \gamma_*(x) \\ \eta_1(x, 0) = \eta_*(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right. \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$(1,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(0, t) = 0 \\ v(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \forall t \geq 0.$$

Supponiamo ora che le equazioni (1, 1) ammettano soluzioni di classe $C^{(2)}$ nell'insieme

$$(1,4) \quad S \equiv \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0, \quad 0 < x < 1 \}$$

soddisfacenti le (1, 2). Posto

$$(1,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1(x) = -\frac{1}{\rho_0} [a \rho_*'(x) + a' \eta_*'(x) + d \gamma_*'(x)] \\ v_2(x) = a v_0''(x) - \frac{d}{\varepsilon \rho_0} [c \rho_*'(x) + c' \eta_*'(x) - \gamma_*'(x)], \end{array} \right.$$

con procedimento del tutto analogo a quello seguito in [11], si verifica facilmente che è possibile ridurre l'analisi del sistema (1, 1), con le condizioni (1, 2), allo studio dell'equazione (I) con le condizioni (II). Osservando infine che, posto

$$a + cd = b, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad k = \frac{b}{a} < 1,$$

l'equazione (I) assume la forma

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0,$$

potremo limitare le nostre considerazioni al caso che nella (I) si intenda $a = 1$, $b = k$. Pertanto la formulazione analitica del problema proposto si riduce alla seguente:

— Determinare una funzione $v(x,t)$ continua in \overline{S} che sia soluzione regolare in $\overset{\circ}{S}$ dell'equazione

$$(1,6) \quad L(v) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

e verifichi le condizioni al contorno

$$(1,7) \quad \left(\frac{\partial^i v}{\partial t^i} \right)_{t=0} = v_i(x) \quad (0 \leq i \leq 2) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$(1,8) \quad v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

nelle ipotesi che ⁴⁾

$$(1,9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v_i(x) \in C^{(2-i)} \text{ in } [0, 1] & (0 \leq i \leq 2) \\ v_i(0) = 0, \quad v_i(1) = 0 & (0 \leq i \leq 2) \\ v_0''(0) = v_0''(1) = 0 \\ v_1''(0) = v_1''(1) = 0. \end{array} \right.$$

2. - ALCUNE FORMULE PRELIMINARI

Sia J_n la funzione di Bessel di prima specie di ordine n ($n \in \mathbb{N}$) ed I_n la corrispondente funzione modificata; indichiamo poi con z una variabile complessa e con α, β, γ, h quattro parametri *reali positivi*.

In questo numero, in vista delle considerazioni che dovremo esporre

⁴⁾ Le ipotesi (1, 9) assicurano, come si vedrà ai nn. 4 e 5, l'esistenza di soluzioni della (1, 6) di classe $C^{(2)}(S)$. per la continuità dell'operatore $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$ basta invece supporre che le funzioni $v_i(x)$ ($0 \leq i \leq 2$) siano di classe $C^{(2-i)}$ in $[0,1]$ e verifichino soltanto le (1,9)₂ — (1,9)₃.

nel seguito, ci proponiamo di stabilire alcune proprietà dei seguenti integrali ⁵⁾:

$$(2,1) \quad g_i(y, \alpha, \beta, h) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} (\sqrt{u+h})^i J_i(2y\sqrt{u+h}) I_0(\beta\sqrt{u^2-h^2}) du \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ i = 0, 1 \end{array} \right.$$

$$(2,2) \quad H_n(y, \alpha, \beta, h) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} \left(\frac{y}{\sqrt{u}}\right)^{n+1} J_{n+1}(2y\sqrt{u}) \left(\frac{\sqrt{u^2-2hu}}{\beta}\right)^n I_n(\beta\sqrt{u^2-2hu}) du \quad (\alpha > \beta).$$

Tenendo conto del fatto che y, α, β, h sono positivi e che risulta (cfr. [12] p. 49)

$$(2,3) \quad |J_n(2z)| \leq \frac{|z|^n}{n!} \exp |\operatorname{Im}(z)|,$$

è facile verificare anzitutto che tali integrali convergono per $\alpha > \beta$. Inoltre, com'è noto (cfr. [13] vol. I p. 195; vol. II p. 56),

$$(2,4) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} I_1(\beta u) \frac{du}{u} = \frac{1}{\beta} (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \quad (\alpha > \beta)$$

$$(2,5) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} I_n(\beta u) u^n du = \frac{(2\beta)^n \Gamma(n + 1/2)}{\sqrt{\pi} (\alpha^2 - \beta^2)^{n+1/2}} \quad (\alpha > \beta)$$

$$(2,6) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} J_0(2y\sqrt{u}) I_0(\beta u) du = \frac{e^{-\frac{\alpha y^2}{\alpha^2 - \beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} I_0\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \quad (\alpha > \beta),$$

⁵⁾ Precisiamo qui che di tutti i radicali che intervengono intenderemo sempre la determinazione principale.

mentre dalla (2,6), derivando (com'è lecito) rispetto al parametro y , si ottiene

$$(2,7) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} \sqrt{u} J_1(2y\sqrt{u}) I_0(\beta u) du =$$

$$= y \frac{e^{-\frac{\alpha y^2}{\alpha^2 - \beta^2}}}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}} \left[\alpha I_0\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right) - \beta I_1\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \right] \quad (\alpha > \beta).$$

Premesso ciò, cominciamo con il prendere in esame l'integrale g_0 definito in (2,1) ed applichiamo la formula di Taylor alla funzione di h , che in esso figura,

$$J_0(2y\sqrt{u+h}) I_0(\beta\sqrt{u^2-h^2});$$

posto

$$R_0(y, u, \beta, h) = -y \int_0^h J_1(2y\sqrt{u+q}) I_0(\beta\sqrt{u^2-q^2}) \frac{dq}{\sqrt{u+q}} -$$

$$- \beta \int_0^h J_0(2y\sqrt{u+q}) I_1(\beta\sqrt{u^2-q^2}) \frac{q dq}{\sqrt{u^2-q^2}},$$

risulta

$$(2,8) \quad J_0(2y\sqrt{u+h}) I_0(\beta\sqrt{u^2-h^2}) =$$

$$= J_0(2y\sqrt{u}) I_0(\beta u) + R_0(y, u, \beta, h).$$

D'altra parte, poiché dalla definizione di I_n e dalla (2,3) si ha

$$(2,9) \quad \left| \frac{I_n(\beta\sqrt{u^2-h^2})}{(\sqrt{u^2-h^2})^n} \right| \leq \frac{1}{u^n} I_n(\beta u) \quad \forall u \geq 0,$$

per le (2,3)-(2,9) riesce

$$(2,10) \quad |R_0(y, u, \beta, h)| \leq h y^2 I_0(\beta u) + \frac{\beta h^2}{2u} I_1(\beta u).$$

Di conseguenza, $e^{-au} R_0$ è, quale funzione di u , sommabile in $[0, \infty[$ per cui, ponendo

$$r_0(y, \alpha, \beta, h) = \int_0^\infty e^{-\alpha u} R_0(y, u, \beta, h) du,$$

in virtù delle (2,10) - (2,4) - (2,5) si ricava

$$(2,11) \quad |r_0(y, \alpha, \beta, h)| \leq \frac{h y^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \frac{h^2}{2} (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \quad (\alpha > \beta).$$

Pertanto, applicando a $g_0(y, \alpha, \beta, h)$ le relazioni (2,8) - (2,6), possiamo affermare che

$$(2,12) \quad g_0(y, \alpha, \beta, h) = \frac{e^{-\frac{\alpha y^2}{\alpha^2 - \beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} I_0\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right) + r_0(y, \alpha, \beta, h) \quad (\alpha > \beta)$$

dove per $|r_0|$ vale la limitazione (2,11).

Con lo stesso procedimento e servendosi della (2,7), è facile provare poi che l'integrale $g_1(y, \alpha, \beta, h)$ si può scrivere

$$(2,13) \quad g_1(y, \alpha, \beta, h) = r_1(y, \alpha, \beta, h) + y \frac{e^{-\frac{\alpha y^2}{\alpha^2 - \beta^2}}}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}} \left[\alpha I_0\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right) - \beta I_1\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \right] \quad (\alpha > \beta)$$

con r_1 tale che

$$(2,14) \quad |r_1(y, \alpha, \beta, h)| \leq \frac{h y}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \left[1 + \frac{h}{2} (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \left(1 + \frac{2}{3} h \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right] \quad (\alpha > \beta).$$

Passando ora all'analisi dell'integrale (2,2), al fine di determinare un'op-

portuna maggiorazione per $H_n(y, \alpha, \beta, h)$, cominciamo con l'osservare che, in virtù della (2,3), si ha

$$(2,15) \quad \left| \left(\frac{y}{\sqrt{u}} \right)^{n+1} J_{n+1}(2y\sqrt{u}) \right| \leq \frac{y^{2n+2}}{(n+1)!};$$

d'altra parte risulta

$$(2,16) \quad \left| \left(\frac{\sqrt{u^2 - 2hu}}{\beta} \right)^n I_n(\beta\sqrt{u^2 - 2hu}) \right| \leq \begin{cases} \frac{(hu)^n}{n!} & \forall u \in [0, 2h] \\ \left(\frac{u}{\beta} \right)^n I_n(\beta u) & \forall u > 2h. \end{cases}$$

Da tali relazioni e tenendo presente la (2,5) segue allora facilmente che

$$(2,17) \quad \begin{aligned} |H_n(y, \alpha, \beta, h)| &\leq \\ &\leq \frac{y^{2n+2}}{(n+1)!} \left[\int_0^{2h} e^{-\alpha u} \frac{h^n u^n}{n!} du + \int_{2h}^{\infty} e^{-\alpha u} \left(\frac{u}{\beta} \right)^n I_n(\beta u) du \right] \leq \\ &\leq \frac{y^{2n+2}}{(n+1)!} \left[\frac{(2h^2)^n}{\alpha n!} + \frac{2^n \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} (\alpha^2 - \beta^2)^{n+1/2}} \right] \quad (0 < \beta < \alpha). \end{aligned}$$

3. - SU UNA PARTICOLARE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INDEFINITA.

$$\text{Posto } \lambda = \sqrt{\frac{1-k}{2}},$$

$$\Omega = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t \geq x \} \quad \text{e}$$

$$(3,1) \quad F(x, t) = \lambda x \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon u} J_1(2\lambda x\sqrt{u}) I_0[\sqrt{(t^2-x^2)(\varepsilon^2 u^2 - 2ku)}] \frac{du}{\sqrt{u}},$$

in base a quanto è stato dimostrato in [11], l'integrale a secondo membro

della (3,1) costituisce, in Ω , una soluzione regolare dell'equazione (1,6) ed è tale che

$$(3,2) \quad |F(x, t)| \leq \frac{\lambda^2 x}{\varepsilon} \quad \forall t \geq x$$

$$(3,3) \quad F(x, x) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{\varepsilon} x}$$

$$(3,4) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{t=x} = \frac{\lambda^2}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1 + 3k}{4\varepsilon} x\right) e^{-\frac{\lambda^2}{\varepsilon} x}$$

$$(3,5) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=x} = -\lambda^2 x \frac{1 + 3k}{4\varepsilon^2} e^{-\frac{\lambda^2}{\varepsilon} x}$$

$$(3,6) \quad (F_{tt} - F_{xx})_{t=x} = -\frac{2\lambda^2}{\varepsilon^2} \left(k - \lambda^2 \frac{1 + 3k}{4\varepsilon} x\right) e^{-\frac{\lambda^2}{\varepsilon} x}$$

$$(3,7) \quad [\varepsilon(F_{tt} - F_{xx}) + F_t + kF_x]_{t=x} = -k \frac{d}{dx} F(x, x).$$

Inoltre, per $\lambda x > 0$, sussiste la seguente formula di trasformazione di Laplace

$$(3,8) \quad \int_x^\infty e^{-st} F(x, t) dt = \frac{e^{-xs} - e^{-xs} \sqrt{\frac{\varepsilon s + 1}{\varepsilon s + k}}}{s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0).$$

Osserviamo ora che, essendo per la (3,2)

$$(3,9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x, t) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

la funzione $E(x, t)$ così definita

$$(3,10) \quad E(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \forall (x, t) \in \Omega \\ 0 & x = 0; \forall t \geq 0 \end{cases}$$

è continua in $\overline{\Omega}$. Ai fini della risoluzione del problema in esame, ci proponiamo di dimostrare in questo numero che esistono continue in $\overline{\Omega}$ anche le derivate $E_x, E_t, E_{xx}, E_{tt}, E_{xt}$; occorre quindi provare che $F_x, F_t, F_{xx}, F_{tt}, F_{xt}$ ammettono limite finito per $x \rightarrow 0^+$.

Incominciamo con l'osservare che in ogni punto di Ω , essendo lecita la derivazione sotto il segno di integrale (cfr. [11]), risulta, come si verifica facilmente,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k}{\varepsilon} \right)^{(n)} F(x, t) = \\ & = \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right)^n \int_0^\infty e^{-\varepsilon u} \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{u}} \right)^{n+1} J_{n+1}(2\lambda x \sqrt{u}) \left(\frac{\varepsilon^2 u^2 - 2k u}{t^2 - x^2} \right)^{n/2} \cdot \\ & \quad \cdot I_n \left[\sqrt{(t^2 - x^2)(\varepsilon^2 u^2 - 2k u)} \right] du \end{aligned}$$

e cioè, ponendo $\frac{k}{\varepsilon^2} = h$ e ricordando la (2,2),

$$(3,11) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k}{\varepsilon} \right)^{(n)} F(x, t) = (-\varepsilon)^n H_n(\lambda x, \varepsilon t, \varepsilon \sqrt{t^2 - x^2}, h).$$

D'altra parte dalla (2,17) si ricava

$$(3,12) \quad \left| H_1(\lambda x, \varepsilon t, \varepsilon \sqrt{t^2 - x^2}, h) \right| \leq \frac{\lambda^4}{2\varepsilon^3} x(1 + 2\varepsilon^2 h^2 x^2)$$

per cui assumendo $n = 1$ nella (3,11) e tenendo presente le (3,9) - (3,12), riesce

$$(3,13) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial t} = 0;$$

iterando tale procedimento si ottiene agevolmente

$$(3,14) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^n F}{\partial t^n} = 0.$$

Passando ad esaminare le derivate rispetto ad x , è facile verificare che, posto

$$\begin{aligned} (3,15) \quad & G_i(x, t) = \\ & = x \int_0^\infty e^{-\varepsilon u} (x \sqrt{u})^i J_i(2\lambda x \sqrt{u}) I_0[\sqrt{(t^2 - x^2)(\varepsilon^2 u^2 - 2k u)}] du \\ & \qquad \qquad \qquad (i = 0, 1) \end{aligned}$$

in ogni punto di Ω si ha

$$(3,16) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{x}{t} \frac{\partial F}{\partial t} + 2 \lambda^2 G_0 - \frac{\varepsilon \lambda}{t} G_1.$$

Poiché le funzioni $G_i(x, t)$ si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} G_i(x, t) &= \\ &= x \int_0^h e^{-\varepsilon u} (x \sqrt{u})^i J_i(2 \lambda x \sqrt{u}) J_0[\varepsilon \sqrt{(t^2 - x^2)(2hu - u^2)}] du + \\ &+ x e^{-\varepsilon h} \int_0^\infty e^{-\varepsilon u} (x \sqrt{u+h})^i J_i(2 \lambda x \sqrt{u+h}) I_0[\varepsilon \sqrt{(t^2 - x^2)(u^2 - h^2)}] du, \end{aligned}$$

applicando al primo integrale del secondo membro la maggiorazione (2,3) e ricordando la (2,1), si ricava

$$(3,17) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_i(x, t) = \\ = e^{-\varepsilon h} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^{i+1} g_i(\lambda x, \varepsilon t, \varepsilon \sqrt{t^2 - x^2}, h) \quad (i = 0, 1).$$

A questo punto, dalla (3,16), applicando nell'ordine le (3,13) - (3,17) - (2,12) - (2,11) - (2,13) - (2,14), si ottiene ⁶⁾

$$(3,18) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\lambda^2}{\varepsilon} e^{-\frac{1+k}{2\varepsilon}t} \left[I_0\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon}t\right) + I_1\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon}t\right) \right].$$

Osservando infine che $F(x, t)$ è in Ω una soluzione regolare dell'equazione (1,6), dalle (3,6) - (3,5) - (3,3) con semplici calcoli si ha

$$(3,19) \quad F_u - F_{uv} = \\ = - \frac{2\lambda^2}{\varepsilon} \left[\frac{k}{\varepsilon} e^{-\frac{k}{\varepsilon}(t-x)} + F_t - \frac{k}{\varepsilon} F + \frac{k^2}{\varepsilon^2} \int_x^t e^{-\frac{k}{\varepsilon}(t-\tau)} F(x, \tau) d\tau \right]$$

⁶⁾ Un procedimento euristico per giungere subito alle (3,14) — (3,18) si ricava utilizzando formalmente la formula (3,8) di L trasformazione.

e poiché, in base alla (3,2), risulta

$$k \left| \int_0^t e^{-\frac{k}{\varepsilon}(t-\tau)} F(x, \tau) d\tau \right| < \lambda^2 x \left[1 - e^{-\frac{k}{\varepsilon}(t-\tau)} \right],$$

dalle (3,9) - (3,14) - (3,19) si deduce

$$(3,20) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2 \lambda^2 k}{\varepsilon^2} e^{-\frac{k}{\varepsilon} t}.$$

In maniera analoga, dopo aver derivato ambo i membri della (3,19) rispetto a t , si prova che

$$(3,21) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x^2} = - \frac{2 \lambda^2 k^2}{\varepsilon^3} e^{-\frac{k}{\varepsilon} t}.$$

In definitiva quindi se, per definizione, assumiamo

$$(3,22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^n}{\partial t^n} E(0, t) = 0 \quad (0 \leq n \leq 3) \\ E_x(0, t) = \frac{\lambda^2}{\varepsilon} e^{-\frac{1+k}{\varepsilon} t} \left[I_0\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon} t\right) + I_1\left(\frac{\lambda^2}{\varepsilon} t\right) \right] \\ E_{xx}(0, t) = \frac{2 \lambda^2 k}{\varepsilon^2} e^{-\frac{k}{\varepsilon} t} \\ E_{xxx}(0, t) = - \frac{2 \lambda^2 k^2}{\varepsilon^3} e^{-\frac{k}{\varepsilon} t}, \end{array} \right. \quad \forall t \geq 0$$

possiamo in conclusione affermare che:

— « La funzione $E(x, t)$ definita dalla (3,10) costituisce una soluzione regolare dell'equazione (1,6) in ogni punto di $\bar{\Omega}$ ».

4. - UN LEMMA.

Con riferimento alla funzione $E(x, t)$ che abbiamo studiato al n. precedente, poniamo

$$(4,1) \quad F_1(x, t) = \int_x^t E(x, \tau) d\tau$$

$$(4,2) \quad F_2(x, t) = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-x)} + \frac{\partial}{\partial x} \int_x^t [1 - e^{-\frac{t-\tau}{\varepsilon}}] E(x, \tau) d\tau$$

ed indichiamo con $g_i(x)$ ($0 \leq i \leq 2$) tre funzioni definite in \mathbf{R} .

Posto

$$(4,3) \quad f_0(x, t) = \int_{x-t}^x g_0(u) E(x-u, t) du - \int_x^{x+t} g_0(u) E(u-x, t) du$$

$$(4,4) \quad f_1(x, t) = \int_{x-t}^x g_1(u) F_1(x-u, t) du - \int_x^{x+t} g_1(u) F_1(u-x, t) du$$

$$(4,5) \quad f_2(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} g_2(u) F_2(|x-u|, t) du,$$

facilmente si dimostra il seguente lemma:

— « *Nell'ipotesi che $g_0 \in C^{(2)}(\mathbf{R})$, g_1 e $g_2 \in C^{(1)}(\mathbf{R})$, le funzioni $f_0, f_1, f_2 \in C^{(3)}\{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+\}$ e sono tali che*

$$(4,6) \quad L(f_0) \equiv (k-1) [g_0'(x+t) + g_0'(x-t)]$$

$$(4,7) \quad L(f_1) \equiv (k-1) [g_1(x+t) - g_1(x-t)]$$

$$(4,8) \quad L(f_2) \equiv 0$$

$$(4,9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^i f_0}{\partial t^i} \right)_{t=0} \equiv \left(\frac{\partial^i f_1}{\partial t^i} \right)_{t=0} = 0 \quad (0 \leq i \leq 2) \\ \\ f_2(x, 0) \equiv \frac{\partial}{\partial t} f_2(x, 0) \equiv 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_2(x, 0) \equiv \frac{2}{\varepsilon} g_2(x). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall x \in \mathbf{R} \\ \\ \end{array}$$

DIM.

Sia $A(x, t)$ una soluzione regolare in Ω dell'equazione (1,6) e $\psi(u)$ una qualunque funzione $\in C^{(2)}(\mathbf{R})$. In tali ipotesi l'integrale

$$A^*(x, t) = \int_{\infty-t}^{\infty} \psi(u) A[|u-x|, t] du$$

è una funzione di classe $C^{(2)}$ in $\{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+\}$ ed inoltre, introducendo le notazioni

$$N_0(A) = \varepsilon (A_t + A_x)_{x=t}$$

$$N_1(A) = [\varepsilon (A_{tt} - A_{xx}) + A_t + k A_x]_{x=t}$$

$$N_2 = \varepsilon \frac{d}{dt} + k, \quad A^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} A(t, t),$$

risulta

$$(4,10) \quad L(A^*) = \pm \psi(x \mp t) \left[\frac{d}{dt} N_0(A) + N_1(A) + \varepsilon A^{(2)}(t) + A^{(1)}(t) \right] - \\ - \psi'(x \mp t) [N_0(A) + \varepsilon A^{(1)}(t) + (1-k) A(t, t)] - \\ - \psi'(x) N_2 [A(0, t)] \mp \psi(x) N_2 [A_x(0, t)].$$

Assumendo ora $A(x, t) = E(x, t)$, $\psi = g_0$ ed applicando la (4,10) ai due integrali a secondo membro della (4,3), dalle (3,10) - (3,3) - (3,4) - (3,5) - (3,7) si trae la (4,6).

Osserviamo poi che la funzione

$$\int_x^t A(x, \tau) d\tau$$

verifica la (1,6) se e solo se

$$[\varepsilon (A_{tt} - A_{xx}) + A_t + k A_x]_{t=x} = -k \frac{d}{dx} A(x, x);$$

pertanto in base ai risultati del numero precedente e tenendo presente le

(3,10) - (3,7) - (3,3) - (3,4) - (3,5) - (3,22)₃ è facile verificare che le funzioni F_1, F_2 , definite dalle (4,1) - (4,2), rappresentano due soluzioni regolari in $\bar{\Omega}$ della (1,6) tali che

$$(4,11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F_i(t, t) = 0 & N_0(F_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \\ F_1(0, t) = 0 & N_1(F_1) = 1 - k \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2(0, t) = -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{k}{\varepsilon}t} & \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} \right)_{x=t} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\lambda^2}{\varepsilon}t} \\ N_1(F_2) = 0 & N_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} F_2(0, t) \right] = 0. \end{array} \right.$$

A questo punto basta applicare le formule (4,10) - (4,11) agli integrali che definiscono f_1 ed f_2 per ricavare le relazioni (4,7) - (4,8); facilmente si verificano infine le (4,9).

Notiamo esplicitamente che le funzioni $f_1(x, t), f_2(x, t)$ risultano di classe $C^{(3)}$ nell'insieme $\{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+\}$ nella sola ipotesi che g_1 e $g_2 \in C^{(1)}(\mathbf{R})$; ciò è dovuto al fatto che

$$F_1(0, t) = F_1(t, t) = F_2(t, t) = 0.$$

5. - RISOLUZIONE DEL PROBLEMA

Indichiamo con $\varphi_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \varphi_i(x)$ ($0 \leq i \leq 2$) le funzioni che si ottengono prolungando i dati iniziali $v_i(x)$ in modo che esse risultino dispari e periodiche di periodo due; in base alle ipotesi (1,9) risulta allora $\varphi \in C^{(3-1)}(\mathbf{R})$.

Applicando il lemma del numero precedente è facile convincersi che la funzione

$$(5,1) \quad \begin{aligned} 2 v(x, t) &= \\ &= \varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(u) du - \\ &- \varepsilon \int_{x-t}^{x+t} [\varphi_0''(u) - \varphi_2(u)] F_2(|x-u|, t) du + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{x-t}^x [\varphi_0'(u) E(x-u, t) + \varphi_1'(u) F_1(x-u, t)] du - \\
 & - \int_x^{x+t} [\varphi_0'(u) E(u-x, t) + \varphi_1'(u) F_1(u-x, t)] du
 \end{aligned}$$

costituisce una soluzione regolare dell'equazione (1,8) nell'insieme $\{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+\}$ e verifica le condizioni iniziali

$$(5,2) \quad \left(\frac{\partial^i v}{\partial t^i} \right)_{t=0} = v_i(x) \quad (0 \leq i \leq 2) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Basta infatti osservare che

$$\begin{aligned}
 & L [\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(u) du] = \\
 & = (1-k) [\varphi_0''(x+t) + \varphi_0''(x-t) + \varphi_1'(x+t) - \varphi_1'(x-t)]
 \end{aligned}$$

ed applicare le formule (4,6) - (4,7) - (4,8) agli ultimi tre integrali della (5,1). Le (5,2) seguono poi banalmente dalle (4,9) - (5,1) e dalla definizione delle $\varphi_i(x)$.

Per quanto riguarda infine le condizioni agli estremi si noti che esse risultano automaticamente soddisfatte in virtù delle ipotesi imposte alle funzioni φ_i .

Resta così provato che la funzione $v(x,t)$ definita dalla (5,1) costituisce una soluzione regolare dell'equazione (1,6) con le condizioni al contorno (1,7) - (1,8).

A tale punto, osservando che per soluzioni di questo tipo vale un teorema di unicità stabilito da S. Rionero [9] nel caso delle equazioni tridimensionali, possiamo in conclusione affermare che:

— « Il problema posto (n. 1) ammette, nell'insieme S , una ed una sola soluzione regolare che è definita dalle (5,1) - (3,9) - (4,1) - (4,2) ». ⁷⁾

Naturalmente a questo punto siamo in grado di calcolare le altre incognite $\rho_1(x, t)$, $\gamma_1(x, t)$ che insieme a $v(x,t)$ e $\eta_1(x,t) = \eta_*(x)$ deter-

⁷⁾ L'espressione (5,1) di $v(x,t)$ è stata determinata formalmente applicando il metodo della trasformazione di Laplace ed utilizzando la formula di inversione (3,8).

minano le piccole trasformazioni in esame. Dalle (1,1) - (1,2) tenendo anche conto di quanto si è detto al n. 1, si ricava infatti:

$$(5,3) \quad \rho_1(x, t) = \rho_*(x) - \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t v(x, \tau) d\tau$$

$$(5,4) \quad \gamma_1(x, t) = \gamma_*(x) e^{-\frac{t}{\epsilon}} + (1 - e^{-\frac{t}{\epsilon}}) [c \rho_*(x) + c' \eta_*(x)] - \\ - c \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\epsilon}}) v(x, \tau) d\tau.$$

§ 2 - STABILITÀ DELLA SOLUZIONE

6. - GENERALITÀ

Il problema che ci poniamo ora è quello di studiare la stabilità della soluzione $v(x,t)$ dell'equazione (1,6) verificante le condizioni al contorno (1,7) - (1,8), qualora si introducano delle piccole perturbazioni sui dati iniziali (1,7). Stante la linearità delle (1,6) - (1,7) - (1,8), ciò equivale, naturalmente, ad esaminare la stabilità dell'equilibrio $v(x,t)=0$. A tale scopo, in questo numero, cominciamo con il richiamare alcune definizioni ([15], [16], [18]) e un teorema di stabilità dovuto a Movchan [15]⁸⁾, nella versione di Knops e Wilkes [16].

Sia Θ un insieme di \mathbf{R}^m , T un intervallo di \mathbf{R} (limitato o no), $\zeta : \Theta \times T \rightarrow \mathbf{R}^n$, $(x, t) \rightarrow \zeta(x, t)$; indichiamo poi con Z e ZT gli spazi astratti i cui punti siano rispettivamente z , (z, t) , dove $z : \Theta \rightarrow \mathbf{R}^n$, $x \rightarrow z(x)$, $t \in T$. Quando si considera un sistema materiale S , si può identificare la funzione vettoriale $\zeta(x, t)$ con la n -pla di funzioni le cui determinazioni, all'istante t e nel punto x dello spazio, forniscono i valori assunti da certe grandezze fisiche misurabili di S quali, ad esempio, la velocità, la densità, etc. Per ogni fissato t , la $(n+1)$ -pla (ζ, t) definisce lo « stato » del sistema in esame che rappresentiamo con un punto (ζ, t) dello spazio ZT , mentre all'evoluzione di esso nel tempo possiamo far corrispondere una « traiettoria » o « cammino » nello stesso spazio. Una di tali traiettorie, i cui punti indichiamo con (ζ°, t) , viene detta « imperturbata », e quindi ogni altra si dirà « perturbata ».

⁸⁾ Altre applicazioni di tale teorema trovansi, ad es., in [17] e [19].

Supponiamo ora in più che esistano due funzioni, che denomineremo metriche (cfr. [15], [16]), $d : ZT \rightarrow \mathbf{R}^+$, $(\zeta, t) \rightarrow d(\zeta, t)$ e $d_0 : ZT \rightarrow \mathbf{R}^+$, $(\zeta, t) \rightarrow d_0(\zeta, t)$, tali che per ogni punto (ζ^0, t) del cammino non perturbato risulti $d_0(\zeta^0, t) = d(\zeta^0, t) = 0$. Per una traiettoria che parte dal punto $(\zeta(t_0), t_0)$ ($t_0 \in T$) la metrica $d_0(\zeta(t_0), t_0)$ si può interpretare come misura del disturbo inizialmente introdotto nello stato di S , mentre $d(\zeta(t), t)$ come perturbazione che si presenta di conseguenza nello stato attuale.

Con tali premesse, si dice [15] che il cammino imperturbato che inizia nel punto (ζ^0, t_0) è stabile⁹⁾ rispetto alle metriche d_0 e d se:

- i) la metrica $d(\zeta, t)$ è una funzione continua di t in corrispondenza di ogni traiettoria non degenera¹⁰⁾
- ii) $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1(\varepsilon_1, t_0) > 0 : d_0(\zeta(t_0), t_0) < \delta_1 \implies$
 $\implies d(\zeta(t_0), t_0) < \varepsilon_1$
- iii) $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2(\varepsilon_2, t_0) > 0 : d_0(\zeta(t_0), t_0) < \delta_2 \implies$
 $\implies d(\zeta(t), t) < \varepsilon_2, \quad \forall t \in T.$

La condizione ii) esprime il fatto che la metrica d è continua rispetto a d_0 , per $t_0 \in T_0 \subset T$; essa viene automaticamente soddisfatta se si può assumere $d_0 = d$. Nel caso poi che $\delta_i = \delta_i(\varepsilon_2)$ ($i = 1, 2$) la stabilità vien detta uniforme.

Con riferimento a tali definizioni, sussiste il seguente *teorema di Movchan*:

— « Un cammino non perturbato è stabile rispetto alle metriche d_0 e d se e solo se

- i) $d(\zeta, t)$ è una funzione continua di t in corrispondenza di ogni cammino non degenera;
- ii) $d(\zeta, t)$ è una funzione continua rispetto alla metrica $d_0(\zeta, t)$;
- iii) nel sottospazio dei punti (ζ, t) tali che $d(\zeta, t) < \alpha$ ($\alpha > 0$), esiste un funzionale $V(\zeta, t) : ZT \rightarrow \mathbf{R}$ che verifichi le seguenti proprietà:

⁹⁾ Come è stato osservato in [15] e [16] la stabilità del cammino indisturbato implica la sua unicità.

¹⁰⁾ Cioè che non si riduca ad un sol punto.

- a) $V(\zeta, t) \geq 0$;
- b) $\forall \varepsilon_3 \in]0, \alpha[\exists \delta_3(\varepsilon_3) > 0 : d(\zeta, t) \geq \varepsilon_3 \implies V(\zeta, t) \geq \delta_3$;
- c) $V(\zeta, t)$ è una funzione non crescente di t lungo ogni cammino.

$$\text{jv) } \forall \varepsilon_4 > 0 \quad \exists \delta_4(\varepsilon_4, t_0) : \quad d_0(\zeta(t_0), t_0) < \delta_4 \\ \implies V(\zeta(t_0), t_0) < \varepsilon_4$$

(continuità di $V(\zeta, t)$ rispetto a $d_0(\zeta, t)$).

7. - ALCUNE DISEGUAGLIANZE

Riportiamo in questo numero alcune disequaglianze di cui ci serviremo nel seguito.

$\alpha)$ Se a_1, \dots, a_n sono n numeri positivi ed è $s > 1$, si ha [14]

$$(7,1) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^s \leq n^{s-1} \sum_{i=1}^n a_i^s$$

$\beta)$ Se $f(x) : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^{(1)}$, $f(0) = 0$, allora [16]

$$(7,2) \quad \sup f^2 \leq \int_0^1 f_x^2 dx$$

$\gamma)$ Se $g(x) : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $g \in C^{(2)}$, $g(0) = g(1) = 0$, risulta

$$(7,3) \quad \frac{1}{2} (\sup g^2 + \sup g_x^2) \leq \int_0^1 g_{xx}^2 dx.$$

La (7,3) si verifica facilmente osservando che, per le ipotesi fatte, esiste un punto $\xi \in [0,1]$ tale che

$$g_x = \int_{\xi}^x g_{xz} dz ,$$

per cui dalla diseguaglianza di Schwarz si trae

$$g_x^2 \leq \int_0^1 g_{zz}^2 dz$$

e quindi

$$(7,4) \quad \sup g_x^2 \leq \int_0^1 g_{zz}^2 dz,$$

$$(7,5) \quad \int_0^1 g_x^2 dz \leq \int_0^1 g_{zz}^2 dz.$$

Pertanto le (7,2) - (7,4) - (7,5) implicano la (7,3).

8. - UN TEOREMA SULLA STABILITÀ DELLA SOLUZIONE

Ci serviremo ora dei risultati esposti nei nn. 6 e 7 per giungere a un teorema di stabilità per l'equazione alle derivate parziali (1,6) considerata in questo lavoro. Precisamente dimostreremo che:

— « *Comunque si fissi un $\sigma > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che se le funzioni assegnate $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ verificano la diseguaglianza*

$$\sup |v_2(x)| + \sup |v_1'(x)| + \sup |v_0''(x)| < \delta,$$

la corrispondente soluzione $v(x, t)$ delle (1,6) - (1,8), definita dalla (5,1), soddisfa la condizione

$$\sup |v(x, t)| + \sup |v_x(x, t)| + \sup |v_t(x, t)| < \sigma, \quad \forall t \geq 0.$$

DIM.

Assumendo quali metriche d_0 e d le seguenti

$$d_0(v, t) = \sup |v_{tt}| + \sup |v_{xt}| + \sup |v_{xx}|$$

$$d(v, t) = \sup |v| + \sup |v_x| + \sup |v_t|,$$

e considerando il funzionale

$$V(v, t) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \{ k (v_{tt} - v_{xx})^2 + (1 - k) (v_{tt}^2 + v_{xt}^2) \} dx ,$$

cominciamo con il verificare la proprietà c) di jii).

Lungo le soluzioni della (1,6) risulta

$$\dot{V} = - \int_0^1 k (v_{tt} - v_{xx}) (v_{tt} - kv_{xx}) dx + \varepsilon (1 - k) \int_0^1 [v_{tt} v_{ttt} + v_{xt} v_{xtt}] dx ,$$

per cui, integrando per parti l'ultimo termine del secondo integrale e tenendo conto delle (1,8), si ottiene

$$\dot{V} = - \int_0^1 k (v_{tt} - v_{xx}) (v_{tt} - kv_{xx}) dx + \varepsilon (1 - k) \int_0^1 v_{tt} (v_{ttt} - v_{xxt}) dx .$$

Si ha pertanto

$$\dot{V} = - \int_0^1 (v_{tt} - kv_{xx})^2 dx \leq 0 .$$

Per quanto riguarda la proprietà b) di jii) si osservi che, scrivendo V nella forma

$$V = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \{ (v_{tt} - kv_{xx})^2 + k(1 - k) v_{xx}^2 + (1 - k) v_{xt}^2 \} dx ,$$

risulta

$$V \geq \frac{\varepsilon}{2} k(1 - k) \int_0^1 [v_{xx}^2 + v_{xt}^2] dx$$

e quindi, applicando le (7,2) e (7,3) alle funzioni v_t e v_x rispettivamente, si ha anche

$$V \geq \frac{\varepsilon}{4} k (1 - k) [\sup v^2 + \sup v_x^2 + \sup v_t^2].$$

Ricordando poi la (7,1) e la definizione di d , in definitiva riesce:

$$(7,6) \quad V \geq \frac{\varepsilon}{12} k (1 - k) d^2.$$

Infine, notando che

$$(7,7) \quad V \leq \varepsilon d_0^2,$$

dal confronto delle (7,6) - (7,7) si trae

$$d \leq \text{cost. } d_0;$$

resta così provata anche la continuità dei funzionali V e d rispetto alla metrica d_0 [proprietà jv) e jj)], e ciò completa l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. R. DE GROOT - P. MAZUR, *Non equilibrium thermodynamics*. North Holland Publ. Comp., Amsterdam (1963).
- [2] B. T. CHU, *Wave propagation and the method of characteristics in reacting gas mixtures with applications to hypersonic flow*. Brown University, WADC TN 57-213, (1957).
- [3] W. G. VINCENTI, *Non equilibrium flow over a Wavy wall*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 6 (1959), pp. 481-496.
- [4] J. F. CLARKE, *The linearized flow of a dissociating gas*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 7 (1960), pp. 577-595.
- [5] L. G. NAPOLITANO, *On some mathematical aspects of linearized non equilibrium flow*. I. A. Report n. 39, (1961).
L. G. NAPOLITANO, *On two new methods for the solution of non-equilibrium flows*. Proc. of the AGARD N.A.T.O. Specialists Meeting, Belgium, 3-6 April, 1962.
- [6] J. J. DER, *Linearized supersonic non equilibrium flow past an arbitrary boundary*. NASA TR R-119 (1961).
- [7] F. STOPPELLI, *Sulle equazioni linearizzate dell'aerotermodinamica unidimensionale*. Ricerche di Matematica, Vol. XIV (1965) pp. 169-186.
- [8] W. LICK, *Wave propagation in real gases*, in « Advances in Applied Mechanics ». Vol. 10 (1967), pp. 1-72.
- [9] S. RIONERO, *Su un problema di aerotermodinamica*. Libreria Liguori, Napoli (1968).
- [10] P. A. BLYTHE, *Non linear far-field theories in relaxing gas flows*. Corso C.I.M.E. II - 3-11 settembre 1969, pp. 2-28.
- [11] P. RENNO, *Un problema di aerotermodinamica linearizzata: soluzione e approssimazione asintotica*. Rend. Accad. di Scienze Fis. e Mat. (Napoli) Serie 4 - Vol. XXXIX - 1972.

- [12] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*. First paperback edit. 1966.
- [13] A. ERDELY - W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. G. TRICOMI, *Tables of integral transforms*. Voll. I-II, Mc Graw-Hill Book Comp., (1954).
- [14] C. MIRANDA, *Diseguaglianze*. Lezioni di Matematiche Superiori tenute nell'anno 1962-1963.
- [15] . A. A. MOVCHAN, *Stability of processes with respect to two metrics*. PMM, Vol. 24, n. 6 (1960), pp. 988-1001.
- [16] R. J. KNOPS and E. W. WILKES, *On Movchan theorems for stability of continuous systems*. Int. J. Engng. Sci. Vol. 4 (1966), pp. 303-329.
- [17] P. C. PARKS, *Liapunov functionals for aeroelastic problems*. Journal of the Franklin Institute Vol. 283, n. 1 (1967), pp. 426-429.
- [18] P. C. PARKS - A. J. PRITCHARD, *On the construction and use of Liapunov functionals*. Fourth Congress of the Int. Fed. of Aut. Control-Warszawa 16-21 June 1969.
- [19] P. C. PARKS, *Stability theory for partial differential equations*. Lecture Notes in Mathematics. Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems. Springer 1969, pp. 151-154.

Sulla radioattività globale dei recenti prodotti eruttivi vesuviani

Nota del socio ordinario Giuseppe Imbò

(Adunanza del 5 maggio 1973)

RIASSUNTO. — Nella nota sono esposti i risultati delle serie di osservazioni effettuate nell'estate-autunno 1942 sulla radioattività (γ) globale del suolo principalmente per recenti prodotti eruttivi vesuviani. Le deduzioni emergenti dallo studio sono tre:

- 1) variazione con la natura del prodotto. I valori più alti si hanno per le lave;
- 2) variazione con la struttura delle lave. I valori sono più alti per lave a superficie unita che per lave scoriacee;
- 3) variazione con l'età, che nei primi anni si presenta con carattere diverso dal comportamento già noto per lave di maggiore età. In riferimento alla legge di variazione per lave molto giovani (legge rappresentante un risultato del tutto nuovo) possono distinguersi due tempi: un primo si riferisce ad una accentuata pressochè istantanea riduzione al momento dell'efflusso, ed un secondo ad una progressiva meno decisa riduzione (di tipo esponenziale) proseguita per circa un cinquantennio.

SUMMARY. — In the article the results of a series of observations made during summer and autumn 1942 of the ground total radioactivity (γ) mainly on recent Vesuvian products, are reported.

Three main conclusions may be put forward:

- 1) variation with the kind of the volcanic product: the highest values were found on smooth, compact surface lavas;
- 2) variation with the structure of the product: the highest values were found on lavas;
- 3) variation with the age of the products. Such variation in the first years after the emission of the product show a different trend from that relative to the subsequent years. More precisely a sudden strong decrease of the total radioactivity is noticed as soon as the lava is found out; a further smaller decrease with an exponential trend follows, lasting for about 50 years.

In occasione del 1° convegno di Geologia Nucleare tenuto in Roma il 4 aprile 1955, sentii il dovere di esporre (G. IMBÒ, 1955), sotto forma sintetica e qualitativa, qualche risultato emerso dalle osservazioni, effettuate tra fine estate ed autunno del 1942, in relazione al progettato studio radiometrico del Gran Cono Vesuviano. Mi decisi alla comunicazione affrettata

per la notevole importanza di almeno uno dei risultati ottenuti, in quanto metteva in netta evidenza un fenomeno del tutto sconosciuto. Trascrivo quanto si legge nel testo della comunicazione:

« Per le lave, accanto alla nota variazione con l'età, è stata riscontrata una rapida diminuzione dell'intensità nei primi mesi dopo l'eruzione ». Analogamente a quanto praticato nelle ricerche sulla variazione temporale della radioattività delle lave vesuviane, questa deduzione invero si basava sull'assunzione che la intensità della radioattività in relazione ai singoli componenti e globalmente fosse costante, all'atto dell'efflusso, per tutte le lave, indipendentemente cioè dall'anno dell'emissione.

Non si era proceduto alla pubblicazione dei risultati perchè le osservazioni del 1942 rappresentavano solamente le prime indagini od anche le indagini di orientamento, in quanto lo studio si sarebbe dovuto inquadrare nel piano di ricerche iniziate fin dal 1936 e seguite in varie zone negli anni successivi con il principale obiettivo di contribuire, attraverso lo studio della radioattività, alla soluzione di problemi fisico-geologici. Fanno parte del piano gli studi effettuati alle Grotte di Pertosa [G. IMBÒ 1939 a] ad Ischia negli anni 1937, 1938, 1939, 1942. [G. IMBÒ 1939 b, 1939 c, 1939 d, 1942]. Nei riguardi del Vesuvio lo studio mirava anche ad avere elementi, almeno indicativi, su eventuali subite differenziazioni magmatiche.

Le ricerche radiometriche interrotte a fine novembre 1942 avrebbero dovuto essere riprese nella primavera del 1943; ma lo scatenamento degli eventi bellici ne impedirono la continuazione. Si pensava alla temporaneità della sospensione, ma le mutate condizioni superficiali, in conseguenza del violento parossismo vesuviano del 18-29 marzo 1944 nonché la successiva ostruzione del condotto con inizio del cosiddetto periodo di riposo, rappresentarono i motivi determinanti della cessazione delle intraprese indagini. Si sperava di ricominciare le misure alla ripresa di attività, ma finora (1973) ancora persiste lo stato d'inattività superficiale del vulcano. Si reputa opportuno rilevare che la necessità della ripresa di attività effusiva era rappresentata dal fatto che le misure, per avere significato, si sarebbero dovute effettuare quasi contemporaneamente su lave giovanissime ma di età diverse, comprese tra lo zero ed almeno un decennio.

Nel corso del 1943 avevo già dato inizio alla elaborazione del materiale precedentemente ottenuto, ma il parossismo del marzo 1944 mi distolse, al momento, totalmente dal proseguimento dello studio a causa principalmente delle nuove complesse esigenze ¹⁾.

¹⁾ A scopo di giustificazione debbo rilevare che le mansioni alle quali dovetti di necessità attendere nel corso del parossismo, erano molteplici. E difatti nel critico periodo bellico ero la sola persona, dell'organico, presente in Osservatorio; e l'attività continua diurna e notturna non si limitava a quella già vasta da compiere in sede ed in condizioni del tutto eccezionali, in relazione sia al vulcano che all'estrema ristrettezza dei locali a

Più volte però in seguito ebbi occasione di accennare alle misure radiometriche effettuate. Una prima volta, appena dopo il parossismo, allorchè una missione francese, venuta di proposito a Napoli, volle, in collaborazione, effettuare misure di radioattività su prodotti eruttivi recenti per indagini sulla genesi dei fenomeni parossistici. Tra le altre occasioni in cui ho dato comunicazioni verbali od epistolari dei risultati ottenuti, voglio ricordare quella data, non appena riattivato il servizio postale con la Sicilia, all'amico vulcanologo STELLA-STARRABBA, allora professore di Mineralogia all'Università di Messina. La mia lettera non si limitava, secondo una costumanza reciproca che durava allora da poco meno di un ventennio, alla comunicazione di un risultato ma alla richiesta di un suo parere anche sulle linee direttrici del programma di ricerche radioattive ed il cui svolgimento avrebbe consentito la soluzione di problemi attinenti al campo di ricerche vulcanologiche.

Concludevo che in Fisica Terrestre sarebbe stato opportuno ritenere definitivamente chiuso il primo stadio, limitato alla sola generica valutazione della radioattività di prodotti o ambientale; bensì si sarebbe dovuto considerare entrati in un secondo stadio in cui le misure dovevano (e debbono) ritenersi un mezzo per la soluzione di problemi relativi a strutture, età, processi differenziativi ecc.

E questo indirizzo ho voluto inculcare nei miei collaboratori ed in quelli che hanno poi continuato la mia opera, allora ostacolata dall'inadeguatezza dei mezzi, oggi invece facilitata da attrezzature più idonee ed a rapidità operative, allora impensabili.

Ho ritenuto necessario inserire la lunga digressione allo scopo fondamentale di dissolvere eventuali dubbi su miei presunti cambiamenti di opinioni nei riguardi dei risultati ottenuti, e quindi su una silenziosa rinunzia alla relativa pubblicazione che pure era stata annunciata al Simposio di Geologia Nucleare del 1955. In tale occasione precisai infatti che « la nota sarà pubblicata per esteso sugli "Annali dell'Osservatorio Vesuviano" 6ª serie, Vol. II, Napoli ». La promessa non fu mantenuta ed io per evitare ulteriori differimenti, determinati da sempre più numerose e svariate occupazioni, consegnai alcuni anni fa l'ottenuto materiale ad un mio collaboratore, senza

disposizione. Questa situazione, derivante dalla subita quasi totale occupazione dei locali da un reparto militare della V Armata Americana, contrastava con la indispensabile estensione delle ricerche continuative, per l'effettuazione delle quali occorreva l'utilizzazione di vani occupati dai militari stessi, nei quali erano state sistemate particolari apparecchiature (G. IMBÒ, 1960) che si dovettero smontare all'atto dell'occupazione. L'uso, se pure con gravi ovvie difficoltà, venne invero autorizzato appena dopo l'inizio della seconda fase del parossismo. Oltre all'ingente lavoro organizzativo ed esecutivo, bisogna aggiungere: le continue peregrinazioni alla zona craterica ed ai teatri eruttivi, i continui rapporti diretti ed indiretti con le autorità alleate e nazionali nonchè con la stampa. E dopo il parossismo ho dovuto (sempre da solo) procedere alla continua cura delle sistemate apparecchiature nonchè allo studio del vasto e prezioso materiale raccolto.

putroppo giungere alla relativa elaborazione. Devo essere grato al Prof. VITTOZZI, se io ho potuto recuperare il materiale, consentendomi così sebbene con notevole ritardo, di mantenere la promessa.

Per le indagini in campagna fu adoperato il Kolhörster, allora uno (anzi lo) strumento più valido per misure del genere e che ancora oggi, se pazientemente e correttamente adoperato, potrebbe rendere utili servigi, nonostante che sia stato sostituito da apparecchi più semplici, meno ingombranti e più pronti. Non è indispensabile una descrizione dello strumento, anche perchè in altra occasione sono state già date le necessarie generiche indicazioni (G. IMBÒ, 1939 a).

In sintesi però può dirsi che l'apparecchio consiste in una camera di ionizzazione a tenuta stagna, funzionante anche come elettrometro. Il sistema è tenuto in regime di saturazione, in modo che la caduta di potenziale consente di dedurre l'intensità di corrente provocata dall'esistente campo e generata per ionizzazione da parte di radiazioni γ ed ultragamma (come allora erano chiamate). Viene considerata come intensità (q) delle radiazioni il numero di coppie di ioni generate nell'interno della camera in un cm^3 d'aria nelle condizioni normali ed in I^s . La formula da applicare, facilmente dimostrabile, è data da

$$q = K \Delta V - q_r,$$

in cui: ΔV rappresenta la caduta di potenziale (in Volta) per ora;
 q_r rappresenta l'attività residua delle pareti, il cui valore, comunicato dalla casa costruttrice Günther e Tegetmeyer, risulta dato da:

$$q_r = 0.80 ;$$

K è una costante per la quale si ha:

$$K = 0.163 .$$

I valori dedotti di q sono inferiori ai reali a causa dell'assorbimento delle radiazioni da parte dell'involucro (di ferro) dello strumento, il cui spessore (m_1) risulta:

$$m_1 = \text{cm } 0.25 .$$

Per avere il valore dell'intensità reale di una radiazione omogenea basterebbe l'effettuazione di altra osservazione con uno schermo additivo. Lo spessore (m_2) di un tale schermo, sempre di ferro, risulta:

$$m_2 = \text{cm } 5 .$$

Altro problema è quello della necessaria effettuazione di una riduzione a medesime condizioni; a ciò occorre fissare una stazione fondamentale ed eseguire ripetute misure, in modo da aversi almeno una misura in corrispondenza di ciascuna serie. Le misure, analogamente a quelle che vengono eseguite presso le varie stazioni, si ripetono, nel corso approssimativamente di un'ora, in gruppi distanziati di 10 minuti. Il valore del potenziale per ciascun gruppo si ottiene dalla media di tre osservazioni a distanza di un minuto. La caduta oraria viene dedotta (nel caso di cinque gruppi per ora, o mediante formula analoga nel caso di un maggior numero di gruppi) dalla relazione:

$$\Delta V = 0.6 S_1 + 0.3 S_2 + 0.2 S_3 + 0.1 S_4$$

in cui le S rappresentano rispettivamente:

S_1 , la somma delle 4 differenze tra i valori di V distanziati di 10 minuti;

S_2 , la somma delle 3 differenze per valori di V distanziati di 20 minuti;

S_3 , la somma delle 2 differenze, con intervalli di 30 minuti;

S_4 , la differenza tra il valore relativo al 1° e quello relativo all'ultimo gruppo.

La relazione prevede la pura riduzione del valore di S a quello orario e si è inoltre assegnato a S_1 il peso 4, a S_2 il peso 3, a S_3 il peso 2, a S_4 il peso 1. Nella stazione fondamentale (e solo eccezionalmente per difficoltà nel trasporto dello schermo, in altra stazione) sono state eseguite osservazioni anche con apparecchio schermato.

Al Vesuvio, oltre a misure eseguite in particolari siti, per mettere in evidenza eventuali linee di frattura (analogamente a quanto era stato eseguito nell'isola d'Ischia nella zona di Lacco Ameno nel 1939 ed al principio dell'estate 1942 lungo pendii occidentali del Monte Epomeo) (G. IMBÒ: 1939 c, 1942) furono scelte 12 generatrici del Gran Cono, lungo ciascuna delle quali furono eseguite serie di osservazioni in quattro stazioni, pressoché equidistanti, tra cima (orlo del cratere) e base (Fig. I). I valori ottenuti e corretti di q sono riportati al n. 4 del Quadro II. Essi si riferiscono invero all'intensità totale della radiazione nel suo complesso.

Supponendo che possano distinguersi nella radiazione due sole componenti, entrambe considerate omogenee e corrispondenti rispettivamente al gruppo di origine extraterrestre ed a quello invece terrestre, si ha se con p_e si indica la intensità della radiazione corrispondente al 1° gruppo e con $su + ar = s'ú$ quella relativa al 2° gruppo (suolo ed aria), può scriversi:

$$q = p_e e^{-\kappa_1 m_1} + s'ú e^{-\kappa_2 m_1}.$$

Nella relazione, K_1 e K_2 rappresentano i coefficienti di assorbimento nel ferro relativamente alle due, a loro volta complesse, radiazioni ed m_1 indica (come è stato detto) lo spessore dell'involucro dello strumento.

Per avere il valore di K_1 sono state effettuate misure con apparecchio libero e schermato sia, su barca, in mare (lontano all'incirca 2 km dalla costa, dove la profondità si aggirava sui 200 metri) sia su terraferma. Quelle in mare vennero effettuate al largo sia di Cetara che di Sant'Angelo nell'Isola d'Ischia, mentre in terraferma fu scelta una stazione nella zona pianeggiante di Cetara, quasi a livello del mare e ad una distanza di circa 100 metri dalla linea di spiaggia. Nei due casi ed anche nelle tre giornate di osservazione (29 luglio, 9 e 21 agosto) i valori ottenuti sono praticamente concordanti. Sono qui riportati i soli valori riferiti all'ultima data.

Alla stazione base (a terra) sono stati ottenuti i valori medi:

app. libero	app. schermato
$q_T = 14.58$	$q'_T = 4.93$

In relazione alle osservazioni in mare i valori sono:

app. libero	app. schermato
$q_M = 3.30$	$q'_M = 3.19$

In mare si ritengono nulle le azioni da parte delle radiazioni del suolo e dell'aria. Si ha pertanto:

$$q_M = p_e e^{-K_1 m_1}$$

$$q'_M = p_e e^{-K_1 m'}$$

in cui si è posto

$$m' = m_1 + m_2 = \text{cm } 5.25.$$

Dai valori sopraindicati si ha pertanto:

$$K_1 = 6.76 \times 10^{-3} \quad ; \quad p_e \cong 3.30$$

D'altronde, attraverso le relazioni

$$q_T - q_M = s'ú e^{-K_2 m_1}$$

$$q_T - q'_M = s'ú e^{-K_2 m'}$$

riesce possibile ottenere le altre due incognite, date da:

$$K_2 = 3.74 \times 10^{-1} \quad ; \quad s'ú = 12.39.$$

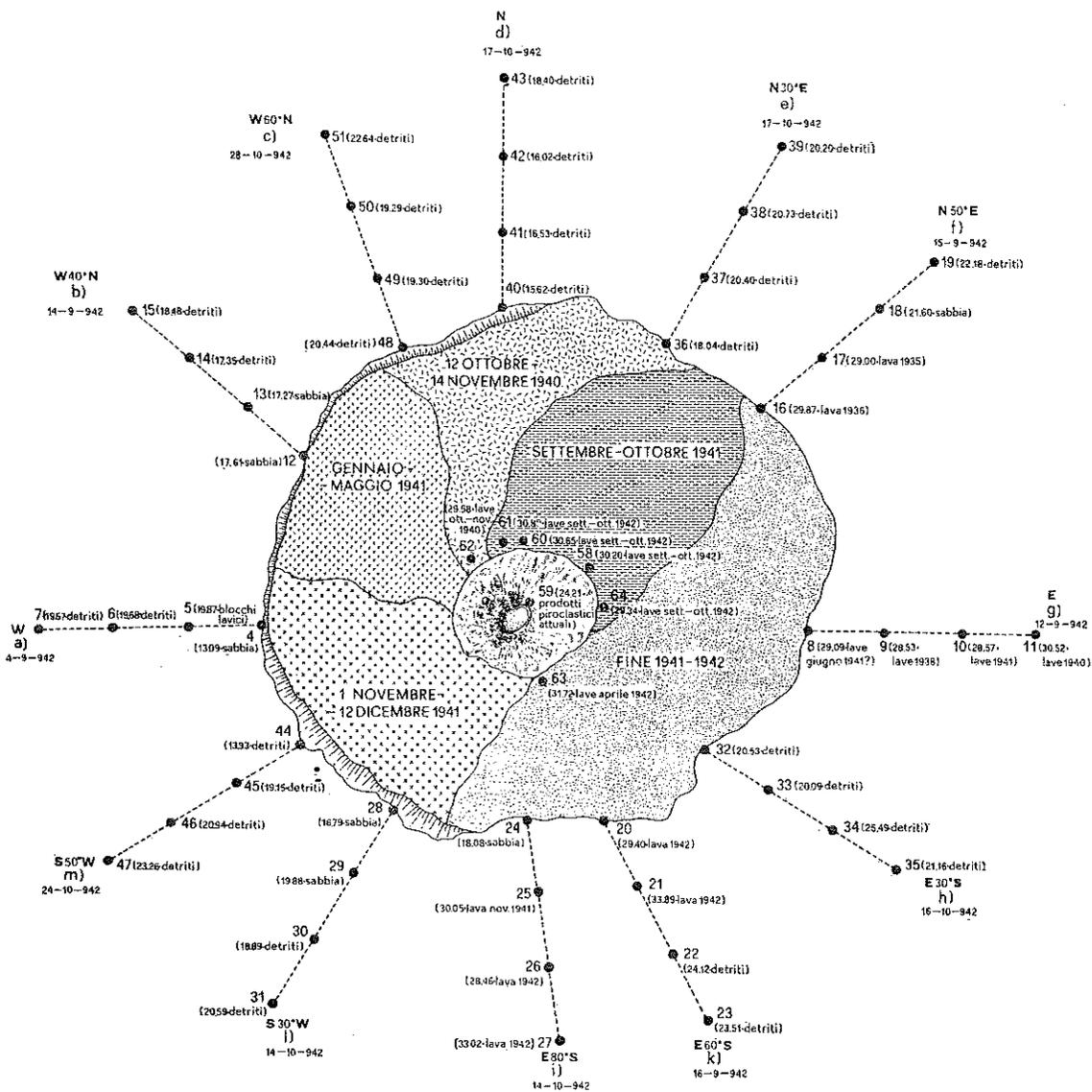


Fig. 1. — Distribuzione delle stazioni situate sulla piattaforma craterica e lungo i fianchi del Gran Cono, coi relativi valori (date, età, natura del suolo).



L'ultimo valore si riferisce all'intensità della locale radiazione prevalentemente del suolo.

Nei riguardi di p_e non deve meravigliare il suo valore relativamente alto, in quanto esso sicuramente comprende una correzione costante da apportare al q_r dato dalla casa. Non è il caso di soffermarsi sull'entità dei valori, in quanto i termini, nei quali appare il p_e devono essere considerati principalmente come correttivi (in senso complessivo) del q_{oss} e non come esclusivamente riferiti a radiazioni extraterrestri. Non è il caso di scindere il valore nella parte correttiva da ritenersi costante ed in quella subente riduzione per assorbimento, in quanto i due fattori: $e^{-\kappa_1 m_1}$, $e^{-\kappa_1 m'}$ assumono rispettivamente i valori 0.999 e 0.965, in modo da comportare nel solo secondo caso una riduzione del 3%, del tutto insignificante, in considerazione del dedotto valore di p_e .

A tale proposito risulta opportuno rilevare che, nel corso del lavoro non farò cenno, almeno in modo esplicito, sugli errori; in quanto i valori di essi deducibili in base ai dati a disposizione risultano di gran lunga inferiori rispetto a quelli reali. Questi invero non risultano valutabili, principalmente perchè la loro entità dipende da una molteplicità di cause, non esclusa, ad esempio, le varie intensità delle radiazioni da parte dell'aria, la cui azione sull'intensità delle radiazioni del suolo (il valore che interessa per la ricerca) viene considerata, ai fini pratici, nulla. Volendo avere un'idea dell'ordine di grandezza dell'errore relativo sulle intensità delle radiazioni del suolo può ritenersi che anche esso risulta inferiore al 3%.

Le osservazioni effettuate in mare sono state ancora utilizzate per la deduzione dei valori del coefficiente di assorbimento K_2 e di $sú$ per la stazione base stabilita per le ricerche effettuate al Vesuvio. La stazione (portante il n. 1) fu sistemata in un largo spiazzo nel giardino dell'Osservatorio, ad una quota di 600 m. La prima osservazione vi fu eseguita il 2 settembre solo con apparecchio libero. Per riferirmi ad un'osservazione completa scelgo la data del 13 settembre. I valori delle intensità che vi furono ottenute con apparecchio libero (q_0) e con apparecchio schermato (q'_0) risultano:

$$q_0 = 18.34 \quad ; \quad q'_0 = 5.73 .$$

Si osserva che il valore di q'_0 risulta più alto di quello relativo alla stazione base di Ischia; e ciò è certamente dovuto ad intensità maggiori sia nei riguardi di p_e che di $sú$. Ho voluto tentare di avere un'idea dell'ordine di grandezza nell'aumento di p_e . A ciò, indicando con p'_e il nuovo valore, viene supposto che i due coefficienti di assorbimento, sia ad Ischia che al Vesuvio, conservino il loro valore. I valori ottenuti di p_e e di $sú$ per la staz. I risultano:

$$p'_e = 3.59 \quad ; \quad sú_0 = 16.21 .$$

Nei riguardi di p'_e si rileva in effetti un lieve aumento con l'altezza. L'andamento potrebbe essere espresso da una legge esponenziale, in modo da poterne avere il valore, almeno entro i limiti in cui si sono effettuate le misure. Si ha pertanto:

$$p_e = p_{e0} e^{\mu h}$$

Dai due valori ottenuti, si ottiene (se h è espresso in metri)

$$\mu = 1.41 \times 10^{-4}.$$

Per un'altezza massima di 1300 m. (superante di qualche decina di metri la cima del conetto) il valore di p_e risulta:

$$(p_e)_{1300} = 3.96.$$

E cioè tra il livello del mare e la quota massima vi sarebbe una differenza:

$$(p_e)_{1300} - (p_e)_0 = 0.66,$$

mentre tra staz. 1 e quota massima la differenza risulta:

$$(p_e)_{1300} - (p_e)_{600} = 0.37.$$

Evidentemente i valori rilevati risultano affetti da errori, anche per la assunzione della costanza di K_1 e K_2 ; ma le eventuali deducibili correzioni nei valori di p_e sarebbero certamente esigue in relazione all'entità dei valori stessi.

In ogni modo, in relazione ad una tale variazione, si terrà conto nelle deduzioni dei $sú$. Se s'indica con q_i l'intensità rilevata per la stazione i.ma, potrà scriversi

$$q_i = (p'_e + \Delta p'_e) e^{-\kappa_1 m_1} + sú_i e^{-\kappa_2 m_1}.$$

Per differenza poi con l'altra relazione, riferita all'osservazione fondamentale del 13 settembre alla stazione base, si ha:

$$sú_i = sú_0 + \frac{q_i - q_0 - \Delta p'_e e^{-\kappa_1 m_1}}{e^{-\kappa_2 m_1}}$$

in cui

$$q_0 = 18.34 \quad , \quad sú_0 = 16.21 ;$$

e, nei riguardi di

$$\Delta q_i = \Delta q'_e e^{-\kappa_i m_i} ,$$

si hanno i seguenti valori:

h (in m.)	Δq_i
600	0.00
775	0.09
950	0.18
1125	0.27
1300	0.37

Oltre ad una correzione, direi, di altezza occorre procedere ad una riduzione a medesime condizioni. A ciò vengono eseguite, specie nei giorni di osservazione, misure anche alla stazione base, le quali misure consentono di avere il valore dell'intensità complessiva dei raggi γ emessi dal suolo. Mentre viene ipotizzata una costanza di $s'ú_0$, i valori dedotti variano invece entro un campo relativamente esteso. Ed è appunto una tale variazione che, nella supposizione che essa dipenda da cause esterne (anche in considerazione della sua relativa ristrettezza) agenti uniformemente su tutta la zona, consente di determinare la voluta riduzione. Scegliendo come distintivo per la stazione base il valore già indicato con $s'ú_0$, (e cioè quello relativo alle osservazioni del 13 settembre), il valore $(s'ú_i)_c$ riferibile alla stazione, se s'indica con $(s'ú_i)_{os}$ quello direttamente dedotto dalle misure, con $(s'ú_0)_t$ quello ottenuto alla stazione base nella giornata di osservazione, e con r il rapporto:

$$r = \frac{(s'ú_0)_t}{s'ú_0} ,$$

si ha:

$$(s'ú_i)_c = r (s'ú_i)_{os}$$

Altre eventuali correzioni possono ritenersi trascurabili.

I valori osservati alla stazione base sono riportati nel seguente quadro.

QUADRO I

Valori osservati e dedotti: delle intensità, dei coefficienti di assorbimento K_2 e di r alla stazione base.

Data	q_0	q'_0	K_2	$(s\acute{u})_t$	r
2 settembre 1942	18.03	—	—	15.91	1.03
4 » »	18.40	—	—	16.32	0.99
12 » »	17.36	—	—	15.17	1.07
13 » »	18.34	5.73	0.375	16.21	1.00
14 » »	18.18	—	—	16.08	1.01
15 » »	17.91	6.01	0.346	15.62	1.04
16 » »	17.10	6.04	0.332	14.69	1.10
19 » »	17.14	5.89	0.345	14.77	1.10
24 » »	16.58	—	—	14.31	1.13
25 » »	18.24	5.69	0.377	16.11	1.01
26 » »	18.28	—	—	16.19	1.00
26 » »	18.92	—	—	16.89	0.96
29 » »	17.95	5.38	0.404	15.89	1.02
30 » »	18.32	5.56	0.391	16.25	0.99
1 ottobre »	18.43	5.66	0.416	16.34	0.99
2 » »	18.54	5.37	0.413	16.59	0.98
14 » »	17.73	—	—	15.58	1.04
15 » »	17.25	5.57	0.375	15.01	1.08
16 » »	17.86	5.72	0.370	15.66	1.03
17 » »	16.54	5.49	0.372	14.22	1.03
24 » »	17.80	—	—	15.66	1.04
28 » »	17.15	—	—	14.94	1.09
29 » »	17.21	5.06	0.430	15.17	1.07
2 novembre »	16.84	5.74	0.353	14.48	1.12
12 » »	16.60	5.17	0.407	14.41	1.12
13 » »	17.48	5.17	0.420	15.44	1.05
14 » »	17.17	5.17	0.416	15.08	1.07
15 » »	17.22	5.43	0.388	15.03	1.08

E pertanto alla stazione base si hanno in media i valori:

$$(K_2)_m = 0.385 (0.332 - 0.420)$$

$$(s\acute{u})_m = 15.38 (14.22 - 16.59)$$

L'ultimo valore, nelle singole giornate, è stato ottenuto dalla relazione:

$$(s\acute{u}_0)_t = (q_{0t} - p'_e e^{-K_1 m_1}) e^{K_2 m_2} ,$$

in cui per K_2 si è assunto il valore direttamente ottenuto nella giornata nel caso in cui sia stata eseguita anche la serie con apparecchio schermato, oppure, in assenza di una tale serie, il valore ottenuto nella giornata del

13 settembre; valore che, a sua volta, risulta presso a poco eguale al medio. Il detto valore è stato assunto anche per la deduzione delle intensità delle radiazioni γ del suolo in riferimento alle altre stazioni. A ciò si è utilizzata la relazione:

$$st_i = (q_i - p'_e e^{-\kappa_1 m_1} - \Delta p'_e e^{-\kappa_1 m_1}) e^{\kappa_2 m_1}$$

Nel quadro II sono riportati, per le singole stazioni, dati ad esse riferentisi. Sono distinti in due gruppi. Il primo si riferisce ai dati ottenuti per le stazioni disposte lungo alcune generatrici del Gran Cono. Nel quadro viene indicata per ciascuna generatrice la relativa direzione. I dati sono indicati in sei linee successive: al n. 1 i numeri corrispondenti alle quattro stazioni disposte lungo le singole generatrici; al n. 2, le relative quote (in metri) delle stazioni; al n. 3 i valori di Δq ; al n. 4, i q_i , al n. 5, i $(st_i)_e$; al n. 6, la natura del suolo.

Nel secondo gruppo, seguendo un medesimo criterio, sono riportati i dati riferiti alle altre stazioni intracrateriche ed esterne.

QUADRO II

Valori corretti delle intensità dei raggi γ emessi dal suolo.

		I Gruppo				
4 settembre 1942	Dir. generatrice a) W	1)	4	5	6	7
		2)	m 1200	m 1050	m 950	m 500
		3)	0.31	0.23	0.18	0.10
		4)	15.93	22.09	21.86	21.77
		5)	13.09	19.87	19.68	19.67
		6)	sabbia	blocchi lavici 1905-1906	detriti con frammenti lavici	detriti
14 settembre 1942	b) W 40° N	1)	12	13	14	15
		2)	m 1150	m 1040	m 920	m 800
		3)	0.28	0.23	0.16	0.10
		4)	19.74	19.38	19.38	20.34
		5)	17.61	17.27	17.35	18.48
		6)	sabbia (al margine occidentale della colata ott. 1940 - febb. 1941)	sabbia	detriti	detriti
28 ottobre 1942	c) W 60° N	1)	48	49	50	51
		2)	m 1160	m 1040	m 920	m 800
		3)	0.28	0.22	0.17	0.10
		4)	20.93	19.93	19.87	22.59
		5)	20.44	19.30	19.29	22.64
		6)	detriti	detriti	detriti	detriti

17 ottobre 1942	d)	N	1)	40	41	42	43
			2)	m 1150	m 1030	m 920	m 800
			3)	0.28	0.22	0.17	0.10
			4)	17.67	18.41	17.91	19.94
			5)	15.62	16.53	16.02	18.40
			6)	detriti	detriti	detriti	coltre detritica sovrapposta a cenere
17 ottobre 1942	e)	N 30° E	1)	36	37	38	39
			2)	m 1110	m 1000	m 900	m 800
			3)	0.26	0.20	0.16	0.10
			4)	19.78	21.82	22.07	21.54
			5)	18.04	20.40	20.73	20.20
			6)	detriti sovrapposti a lave pre-1906		detriti	detriti
15 settembre 1942	f)	N 50° E	1)	16	17	18	19
			2)	m 1100	m 1000	m 900	m 800
			3)	0.26	0.20	0.16	0.10
			4)	29.03	28.23	21.95	22.29
			5)	29.87	29.00	21.60	22.18
			6)	lava a superficie unita del 1936	lava scoriacea del 1935	sabbia	detriti
12 settembre 1942	g)	E	1)	8	9	10	11
			2)	m 1100	m 1000	m 900	m 800
			3)	0.26	0.20	0.16	0.10
			4)	26.90	28.23	28.05	29.65
			5)	27.09	28.53	28.57	30.52
			6)	lave del giugno 1941 (?)	lave del 1938	lave del 1941	lave del 1940
16 ottobre 1942	h)	E 30° S	1)	32	33	34	35
			2)	m 1130	m 1020	m 910	m 800
			3)	0.27	0.22	0.16	0.10
			4)	22.00	21.56	26.28	22.38
			5)	20.53	20.09	25.49	21.16
			6)	detriti e ceneri	coltre detritica soprastante lava 1906	sottile strato detritico. Lateralmente lave recenti strapiom-banti	detriti e ceneri (a monte delle bocche del 1906)
16 settembre 1942	k)	E 60° S	1)	20	21	22	23
			2)	m 1150	m 1040	m 920	m 800
			3)	0.28	0.23	0.16	0.10
			4)	28.20	31.87	23.71	23.14
			5)	29.40	33.89	24.12	23.51
			6)	lava 1942	lave a superficie unita del 1942	detriti	detriti

19 settembre 1942	i) E 80° S	1)	24	25	26	27
		2)	m 1180	m 1050	m 930	m 800
		3)	0.30	0.23	0.17	0.10
		4)	18.85	28.69	27.31	30.19
		5)	18.08	30.05	28.46	32.02
		6)	sabbia	lave no- vembre 1941	lave a super- ficie unita del 1942	lave del 1942
14 ottobre 1942	l) S 30° W	1)	28	29	30	31
		2)	m 1180	m 1050	m 930	m 800
		3)	0.30	0.23	0.17	0.10
		4)	18.58	21.22	20.29	21.71
		5)	16.79	19.88	18.89	20.59
		6)	sabbia	sabbia	detriti sabbiosi	detriti sabbiosi
24 ottobre 1942	m) S 50° W	1)	44	45	46	47
		2)	m 1180	m 1060	m 930	m 800
		3)	0.30	0.23	0.17	0.10
		4)	16.07	20.57	22.08	24.05
		5)	13.93	19.15	20.94	23.26
		6)	detriti	detriti	detriti	detriti ri- coprenti lave ter- minali

II Gruppo

3 settembre 1942		1)	2	3	
		2)	m 620	m 700	
		3)	0.01	0.05	
		4)	18.27	25.49	
		5)	16.60	24.73	
		6)	Tufi Somma	Lava scoriacea del 1895-1899	
29 ottobre 1942		1)	52	53	54
		2)	m 550	m 550	m 550
		3)	— 0.02	— 0.02	— 0.02
		4)	27.37	24.62	25.24
		5)	27.78	24.75	25.48
		6)	Lava 1858 (a sup. unita)	Lava 1858 (cima cupola)	Lava 1858 (a sup. unita)
2 novembre 1942		1)	55	56	57
		2)	m 1200	m 1270	m 1200
		3)	0.08	0.08	0.08
		4)	24.71	25.16	27.39
		5)	25.98	26.54	29.28
		6)	Lave del 1895-1899		

13 novembre 1942 Interno del cratere	1)	58	59	60	61
	2)	m 1200	m 1270	m 1200	m 1200
	3)	0.31	0.36	0.31	0.31
	4)	30.08	24.94	30.47	30.67
	5)	30.20	24.21	30.65	30.88
	6)	Base N 50° E conetto. Massi lavici recenti	Cima del co- netto presso bocca erutti- va in piena attività esplo- siva (lanci in- termittenti di scorie a circa 100 m d'al- tezza). Pro- dotti pirocla- stici recenti (sciolti)	Base N 10° E del conetto. Massi lavici recenti	Base N 10° W del conetto. Massi lavici recenti
14 novembre 1942 Interno del cratere	1)	62	63	64	
	2)	m 1200	m 1200	m 1200	
	3)	0.31	0.31	0.31	
	4)	29.06	30.88	28.86	
	5)	29.58	31.72	29.34	
	6)	Base N 30° W Lave recenti	Base E 50° S Lave recenti	Base N 50° E Lave recenti	
15 novembre 1942	1)	65	66		
	2)	m 750	m 700		
	3)	0.08	0.05		
	4)	27.00	24.87		
	5)	27.68	25.00		
	6)	Lava 1895-1899	Lava 1872		

Per tutte le serie di osservazioni lungo i fianchi del Gran Cono e intracrateriche, i valori ottenuti di $(sú)_c$ sono riportati in figura (fig. 1). Già ad uno sguardo sommario si rileva un apparente disordine nella loro distribuzione: ma dal critico esame di essi emerge la stretta correlazione della relativa entità con la natura del suolo. Qualche eventuale azione da parte di fratturazione, la cui identificazione rappresentava invero il principale movente della ricerca, rimarrebbe mascherata dalle variazioni alquanto pronunciate di $(sú)_c$ anche in relazione a suoli della stessa natura a causa di diversi motivi: aspetto superficiale, particolari conformazioni, altre cause (quale, ad esempio, geometria della stazione). Riunendo i valori per identica natura del suolo si riesce ad avere un'idea della sua variazione.

Nei riguardi dei tufi (tufi del Somma) si ha un solo valore:

n. 2 16.60.

Si osserva però che anche per la stazione base (su tufi) si ha un valore presso a poco concordante con quello indicato. Nella giornata standard si ha: $sú = 16.21$.

Molti valori si riferiscono ad osservazione su suoli detritici (costituiti da un complesso di ceneri, sabbie, esili scorie). I dati ottenuti sono:

n.	4	13.09	n.	22	24.12	n.	34	25.49	n.	43	18.40
	6	19.68		23	23.51		35	21.16		44	13.93
	7	19.67		24	18.08		36	18.04		45	19.15
	12	17.61		28	16.79		37	20.40		46	20.94
	13	17.27		29	19.88		38	20.73		47	23.26
	14.	27.35		30	18.89		39	20.20		48	20.44
	15	18.48		31	20.59		40	15.62		49	19.30
	18	21.60		32	20.53		41	16.53		50	19.39
	19	22.18		33	20.33		42	16.02		51	22.64

Il valore medio è 19.48 che è anche il più frequente (fig. 2). La escursione dei valori risulta alquanto ampia, con estremi dati da 13.09 e 25.49.

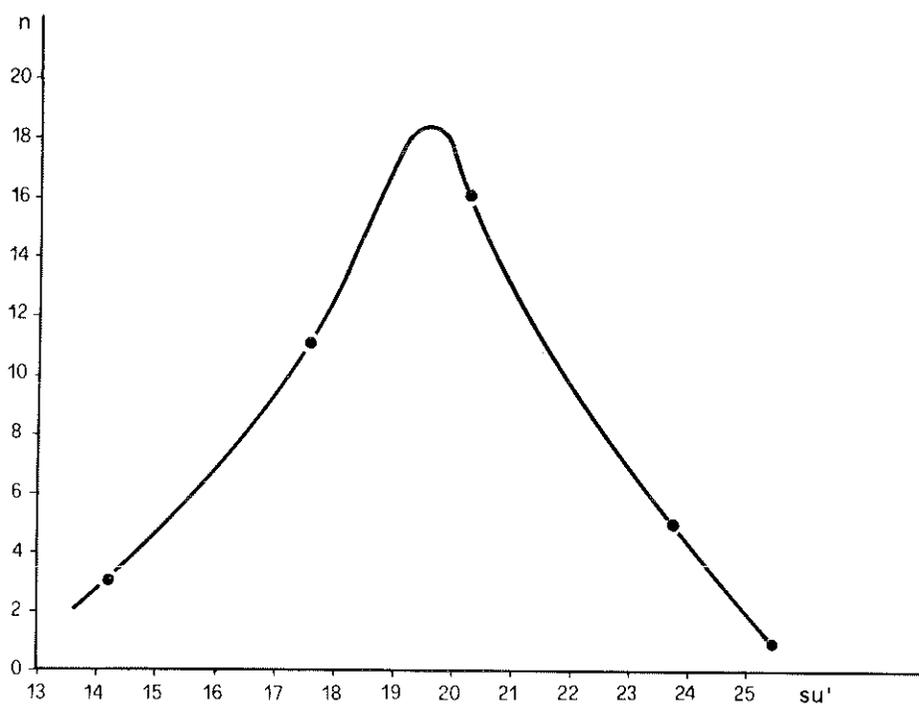


Fig. 2. — Curva di frequenza delle intensità (su') per sabbie.

In prossimità degli estremi il numero dei valori è relativamente scarso, la massima densità si ha tra 18 e 21 con 19 valori e cioè il 53% del totale, mentre si hanno 9 (25%) valori inferiori a 18 e 8 (22%) maggiori di 21. Questa distribuzione (rappresentata anche in figura), giustificabile da parti-

colari condizioni, consentirebbe di ritenere che il valore rappresentativo per suoli costituiti da materiale minuto sia dato da quello medio.

Per blocchi lavici (1905-1906) si ha un solo valore corrispondente alla stazione 5. Esso risulta (19.87) presso a poco eguale a quello precedentemente indicato e valido per suolo detritico.

Prima di riferire sulle lave, ricordo che, nel corso delle misure, fu effettuata una serie di osservazioni alla cima del conetto in prossimità della bocca eruttiva (ad una distanza di circa 10 metri) in piena attività. Il suolo, e pertanto la piattaforma sulla quale fu sistemato lo strumento, era costituito da materiale piroclastico sciolto, nel quale erano intercalati brandelli lavici. Il valore (n. 59 - 24,21), pur essendo superiore a quello dei detriti, risulta invece inferiore a quello delle lave e specie delle lave intracrateriche o recenti.

Riunendo per le lave i valori di $(s\acute{u})_e$, si hanno in relazione alle singole colate i dati appresso riportati.

Lava 1858		Lava 1872		Lava 1895-1899		
n. 52	27.78	n. 65	25.00	n. 3	24.73	
53	24.75			55	25.98	
54	25.48			56	26.54	
				(57)	29.28)	anomalo perchè lo strumento era prossimo ad una parete della stessa lava
				65	27.68	

Lave 1938:

n. 9	(12 settembre)	28.53	lave febbraio
10	(12 settembre)	28.57	lave febbraio

Lave 1940:

n. 11	(12 settembre)	30.52	lave: fine febbraio 1939 - primi mesi 1940
16	(15 settembre)	29.87	lave: primi mesi 1940
17	(15 settembre)	29.00	lave: primi mesi 1940
62	(14 novembre)	29.58	lave: 12 ott. - 14 nov. 1940 (Base N 30° W conetto)

Lave 1941:

n. 8	(12 settembre)	27.09	lave: giugno 1941
58	(13 novembre)	30.20	lave: settembre-ottobre 1941 (Base N 50° E conetto)
60	(13 novembre)	30.65	lave: settembre-ottobre 1941 (Base N 10° E conetto)
61	(13 novembre)	30.88	lave: settembre-ottobre 1941 (Base N 10° W conetto)
64	(14 novembre)	29.34	lave: settembre-ottobre 1941 (Base N 80° E conetto)
25	(19 settembre)	30.05	lave: novembre 1941
26	(19 settembre)	28.46	lave: novembre-dicembre 1941

Lave 1942:

n. 20	(16 settembre)	29.40	lave: gennaio 1942
21	(16 settembre)	33.89	lave: gennaio 1942
63	(14 novembre)	31.72	lave: aprile 1942 (Base S 30° E conetto)
27	(19 settembre)	32.02	lave: giugno 1942

I valori medi, riferentisi a singole o a gruppi di colate coetanee, sono riportati qui di seguito. Per le varie colate sono dati i valori delle età (in anni) e delle intensità $(s\acute{u})_e$.

Lava	età (in anni)		$(s\acute{u})_e$			
1858	84	}	26.00	}		
1872	70		77		25.00	25.50
1897	45		57		26.84	25.92
1938	4,5	}	28.55	}		
1940,1	2,7		2,2		29.80	}
1941,1	1,7				28.33	
1941,7	1,1				30.27	
1942,0	0,8				30.45	
1942,4	0,4		31.87			

Nella nota mi sono limitato a riferire i risultati delle incomplete serie di osservazioni sulla radioattività globale del suolo nella zona alta del Vesuvio.

Dalle indagini emerge anzitutto il risultato della variazione della intensità delle radiazioni γ del suolo con la relativa natura. La deduzione è invero già nota; ma, attraverso le nuove misure, si è riusciti ad avere non numeri indici, bensì valori definiti della intensità. Si è stabilita la seguente scala dei valori delle intensità (numero di coppie di ioni per secondo e per cm^3) della radioattività:

tufi del Somma	16.6
detriti (ceneri, sabbie, esili scorie)	19.5
cima conetto (materiale sottile piroclastico con intercalati brandelli lavici)	24.2
lave (1858-1942)	(26.0 - 31.9)

E' bene osservare che per le lave coetanee (specie se giovani) il valore dell'intensità varia con l'aspetto superficiale, nel senso di valori più alti per lave a superficie unita rispetto a lave a superficie scoriacea. Ma per le lave il risultato più importante è quello dell'andamento temporale delle intensità, come appare dai valori precedenti riportati (fig. 3). In questo possono rilevarsi tre tempi. Il primo si riferisce ad una sensibile quasi istantanea diminuzione al momento dello sgorgo; un secondo ad una diminuzione progressiva meno decisa ma proseguita, presso a poco con legge esponenziale, per una quarantina di anni ed il terzo tempo si riferisce invero alla diminuzione secondo una legge la cui costante di decadimento risulta dello stesso ordine di grandezza di quella del radio, in conseguenza del suo rilevato eccesso rispetto al valore in equilibrio con l'uranio presente. Di questi tre

tempi solo il terzo è noto, mentre gli altri due vengono ora messi in evidenza ed è questa rivelazione che rappresenta la principale conclusione

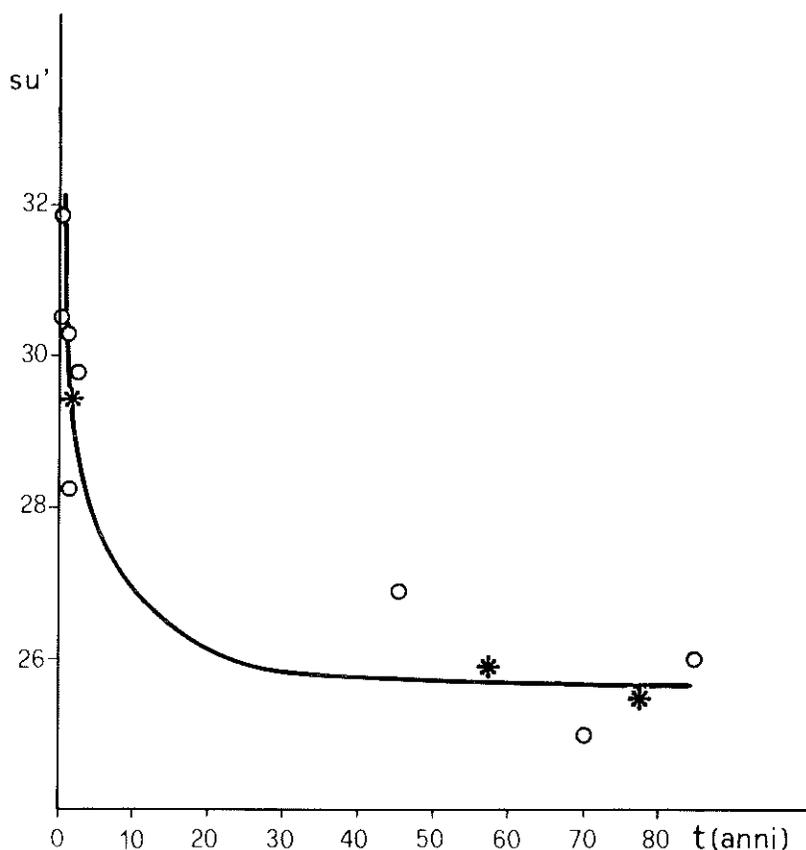


Fig. 3. — Variazione dell'intensità (su') per lave aventi un'età compresa tra 4 e 80 anni.

della nota, alla quale deve assegnarsi un particolare ed importante significato, in quanto certamente essa gioverà alle indagini sulla genesi del disequilibrio nonchè sulla determinazione dei contenuti in isotopi radioattivi da parte del magma vesuviano.

BIBLIOGRAFIA

- IMBÒ G. *Ricerche geofisiche alle Grotte di Pertosa*. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, Ser. 4^a X, Napoli 1939 (G. Imbò, 1939 a).
- IMBÒ G. *Misure di radioattività di alcune acque dell'isola d'Ischia*. Ricerca Scientifica, X, n. 6, Roma 1939 (G. Imbò, 1939 b).

- IMBÒ G. *Saggio radiometrico in Lacco Ameno*. Ricerca Scientifica, X, n. 10, Roma 1939 (G. Imbò, 1939 c).
- IMBÒ G. *Ulteriori misure di radioattività delle acque di Lacco Ameno e di Cetaro*. Ricerca Scientifica, X, n. 11, Roma 1939 (G. Imbò, 1939 d).
- IMBÒ G. *Relazione su indagini radioattive eseguite nel 1942 lungo le pendici occidentali del M. Epomeo in Ischia* (dattiloscritto) (G. Imbò, 1942).
- IMBÒ G. *L'Osservatorio e le sue vicende durante il periodo bellico (1940-45)*. Ann. Oss. Ves. Ser. V, vol. unico, Napoli 1949 (G. Imbò, 1949).
- IMBÒ G. *Studio radiometrico del Gran Cono Vesuviano*. Atti del I Convegno di Geologia Nucleare, tenuto in Roma il 4 aprile 1955 (G. Imbò, 1955).

Dai dati accelerometrici alla valutazione degli spostamenti del suolo

*Nota dell'ing. Sandro Santorelli
presentata dal socio ordinario Elio Giangreco*

(Adunanza del 7 giugno 1973)

SOMMARIO. — Nella presente nota si vuole dare una panoramica sui procedimenti adottati per la valutazione dei fenomeni macrosismici, con particolare riferimento ai metodi di calcolo numerico impiegati con l'ausilio di strumentazioni elettroniche. Si espone di seguito un metodo correttivo degli accelerogrammi che consente una agevole valutazione delle velocità e degli spostamenti del suolo, tenendo conto degli errori e dei limiti di sensibilità degli apparecchi di registrazione.

SUMMARY. — The purpose of this work is to offer a general view of the several types of process followed in order to estimate strong motions, and especially of the numerical calculus methods effected by using electronic instruments.

Then an accelerogram corrective method is presented; it allows an easy estimate of the velocity and the displacements of the ground, even valuing errors and sensitivity limitation of the recording instruments.

VALUTAZIONE DI UN FENOMENO MACROSISMICO.

L'evento « terremoto » ha incominciato a suscitare in modo particolare l'attenzione dei ricercatori allorché si è avuta la possibilità di usufruire di strumentazioni tali da assicurare un'alta fedeltà di registrazione e contemporaneamente di analizzare senza notevoli errori una notevole quantità di dati numerici; tutto ciò è coinciso con l'avvento degli elaboratori elettronici.

Come si sa, un accelerografo consiste essenzialmente in un sistema pendolare, schematizzabile in un oscillatore semplice ad un sol grado di libertà con smorzamento viscoso [1]. Durante un evento sismico, tale sistema accelerometrico è sottoposto ad una serie di sollecitazioni dinamiche, che variano nel tempo con leggi del tutto casuali. È ovvio dunque che per conoscere le reali accelerazioni del suolo è necessario operare una trasformazione funzionale delle accelerazioni del sistema pendolare [2], che, simbolicamente, può essere espressa nel seguente modo:

$$(1) \quad \ddot{x} + 2\omega_n \zeta \dot{x} + \omega_n^2 x = -V_s \ddot{z}(t)$$

dove si sono indicati rispettivamente con:

- a) x, \dot{x}, \ddot{x} : spostamenti, velocità, accelerazioni del sistema pendolare accelerometrico;
- b) ω_n : frequenza naturale d'oscillazione del sistema pendolare;
- c) ζ : percentuale dello smorzamento critico;
- d) V_s : costante di riduzione di scala;
- e) \ddot{z} : accelerazione del suolo.

Se dal punto di vista numerico, tramite la (1), il problema della valutazione delle accelerazioni del suolo sembrerebbe risolto, sorgono invece enormi difficoltà di ordine tecnico.

Infatti, per quanto sensibili possono essere gli strumenti preposti alla registrazione, esiste pur sempre uno sfasamento fra l'inizio del fenomeno sismico e la loro entrata in funzione; ciò non consente di stabilire l'effettiva posizione dell'origine della linea di base dei tempi su di un diagramma accelerometrico nè di conoscere i valori della velocità e dello spostamento del suolo nel momento in cui inizia la registrazione accelerometrica.

A ciò si aggiungono errori di tipo meccanico e di elaborazione da parte dei tecnici di laboratorio, di cui si farà cenno in seguito.

Comunque il tipo di errore che maggiormente può influenzare le successive elaborazioni numeriche dei dati accelerometrici, quali spettri di risposta o valutazioni delle velocità e degli spostamenti del suolo, è senza dubbio un erroneo posizionamento della linea di base.

Infatti durante un terremoto possono verificarsi degli intervalli di tempo in cui le frequenze del fenomeno sismico raggiungono valori molto più bassi della frequenza propria di oscillazione del sistema pendolare; in tali casi, la valutazione delle accelerazioni del suolo risulta non solo poco attendibile ma frequenze tanto basse potrebbero influenzare enormemente la valutazione degli spettri di risposta di strutture ingegneristiche con alti periodi propri di vibrazione, quali ponti sospesi od edifici ad elevato numero di piani [3].

ERRORI DI REGISTRAZIONE.

I dati accelerografici sono registrati su bande di carta fotosensibile e recentemente anche su pellicole in modo da poter ottenere successivamente delle stampe.

Le bande presentano delle « tracce fisse », ottenute mediante un raggio luminoso riflesso da alcuni specchi solidali con la struttura dell'accelerografo; il loro scopo è quello di evidenziare, durante la registrazione, le

deviazioni subite dalla banda di carta per i movimenti trasversali dei meccanismi di guida e consentire in laboratorio l'esatto posizionamento del dato accelerometrico [2].

Inoltre si presentano alterazioni di carattere chimico delle pellicole ed errori di elaborazione durante i procedimenti di stampa delle registrazioni, che, comunque, con i mezzi oggi a disposizione, possono ritenersi trascurabili [4].

Altro tipo di errore, come già precedentemente accennato, è quello dovuto alla presenza di fluttuazioni di lungo periodo, di cui è stato valutato un valore « limite » accettabile [8].

Esaminando circa 100 registrazioni accelerografiche e le relative doppie integrazioni, è stato dimostrato che l'entità degli errori poteva ritenersi trascurabile sino a periodi di circa 16 secondi, mentre aumentava rapidamente per periodi più lunghi [5].

Evidentemente tale valore « limite » è valido per le valutazioni degli spostamenti del suolo, mentre per elaborazioni numeriche più complesse, come ad esempio il calcolo degli spettri di risposta di strutture ingegneristiche, è necessario invece ricorrere a particolari sistemi di correzione per eliminare le fluttuazioni di basse frequenze ed adottare un esatto posizionamento della linea di base.

Si riportano nelle linee generali i due procedimenti più noti: la correzione parabolica [7] ed il procedimento di filtraggio [8].

Il primo consiste nel modificare i dati accelerometrici originali in numero pari a N mediante una espressione di tipo parabolico. Assumendo per il diagramma delle accelerazioni $a(t_i)$ una legge di tipo lineare, le velocità e gli spostamenti risulteranno rispettivamente delle curve di tipo parabolico e di tipo cubico (fig. 1), le cui espressioni analitiche sono:

$$(2) \quad v(t_{i+1}) = v(t_i) + \frac{1}{2} \Delta t_i (a(t_i) + a(t_{i+1}))$$

$$(3) \quad s(t_{i+1}) = s(t_i) + v(t_i) \Delta t_i + \frac{1}{6} \Delta t_i^2 (2 a(t_i) + a(t_{i+1}))$$

dove t_i è il valore del tempo dell' i -esimo dato accelerometrico e $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Per un generico istante t il dato accelerometrico corretto vale:

$$(4) \quad a^*(t) = a(t) - c_0 - c_1 t - c_2 t^2$$

conseguentemente i valori corretti della velocità e dello spostamento valgono:

$$(5) \quad v^*(t) = v(t) - c_0 t - \frac{1}{2} c_1 t^2 - \frac{1}{3} c_2 t^3$$

$$(6) \quad s^*(t) = s(t) - \frac{1}{2} c_0 t^2 - \frac{1}{6} c_1 t^3 - \frac{1}{12} c_2 t^4$$

La determinazione delle costanti c_0 , c_1 , c_2 si esegue adottando il procedimento correttivo dei minimi quadrati, ottenendo dalla (5):

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^T [v^*]^2 dt = 0 \quad ; \quad (i = 0, 1, 2)$$

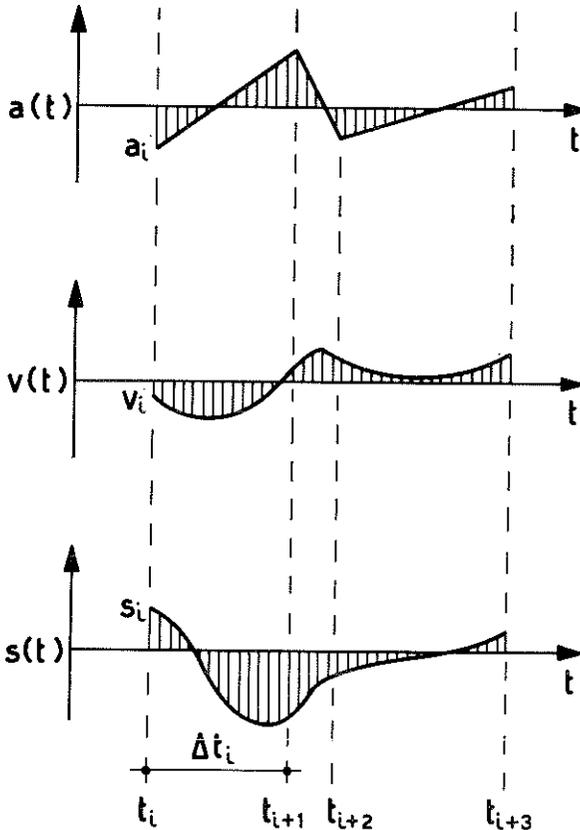


Fig. 1.

ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^T [v(t) - c_0 t - \frac{1}{2} c_1 t^2 - \frac{1}{3} c_2 t^3]^2 dt = 0$$

dove con T si è indicata la durata totale dell'accelerogramma.

Una volta note le costanti c_0, c_1, c_2 , si sostituiscono nelle (4), (5), (6), ottenendo in tal modo i valori corretti delle accelerazioni, delle velocità e degli spostamenti.

Si fa notare che tale procedimento, a carattere puramente matematico, ha l'inconveniente di trattare diversamente i vari accelerogrammi in funzione della loro durata T.

Il procedimento di filtraggio invece, pur essendo più laborioso e tecnicamente complesso, supera tale limitazione, ottenendo lo scopo di conservare la maggior parte dei dati fisicamente reali e di eliminare le fluttuazioni di basse frequenze.

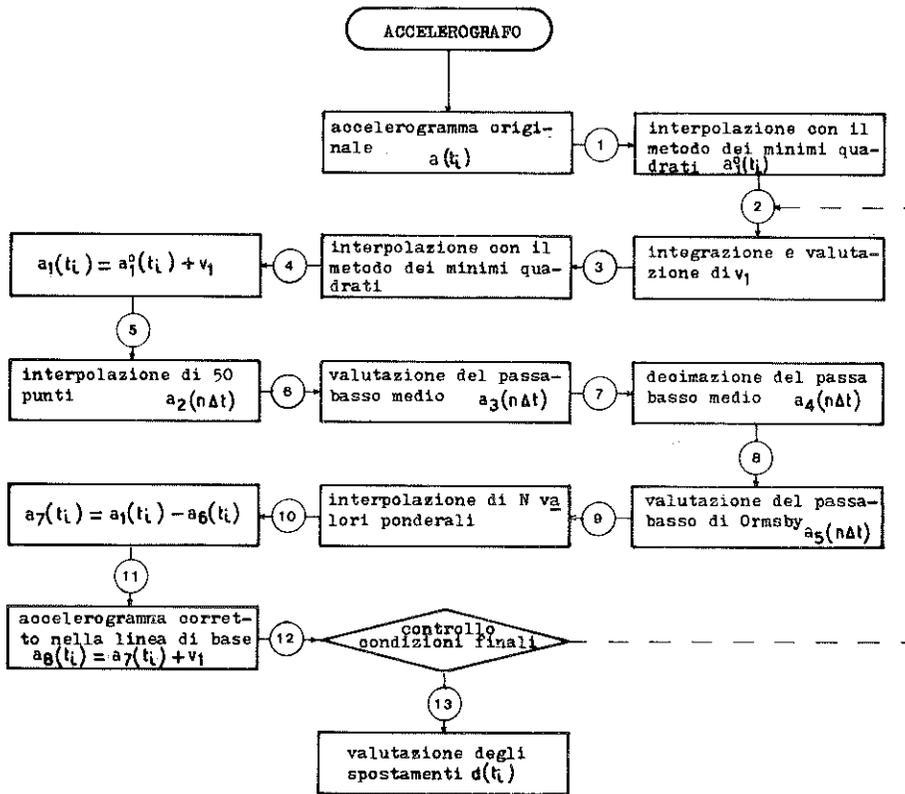


Fig. 2.

Nella fig. 2 è riportato il diagramma di flusso delle operazioni di seguito brevemente descritte. I passi n° 1, 2, 3, 4, 5 sono elaborazioni preliminari, a carattere numerico, il cui scopo è quello di fissare una linea di base di primo tentativo.

Il procedimento ha la sua estrinsecazione dal passo n° 6 in poi. L'ele-

mento fondamentale è il passa-basso, ovvero un filtro frequenziale che, fissata una frequenza bassa f_c , valuta e memorizza tutti i segnali accelerometrici la cui frequenza sia minore di f_c . Operando successivamente con un filtro medio (Halloway, 1958) ed un filtro Ormsby (1961), si ottengono tutti i segnali accelerometrici la cui frequenza è inferiore a quel valore minimo accettabile, richiesto per un'attendibile precisione dell'accelerogramma.

Tali valori rappresentano, nella loro cronologica successione, la linea di base dell'accelerogramma corretto.

Il procedimento a volte va iterato sino a raggiungere nel diagramma tachimetrico un valore della velocità finale pari a zero, condizione questa che sarà ampiamente chiarita dalle considerazioni del paragrafo seguente.

LA VALUTAZIONE DEGLI SPOSTAMENTI DEL SUOLO.

Pervenire alla valutazione degli spostamenti del suolo potrebbe sembrare, dal punto di vista analitico, un problema di non difficile soluzione.

Gli elementi che si hanno a disposizione sono delle serie di coppie di dati numerici, rappresentanti i valori dei tempi e le relative accelerazioni del suolo registrati durante un fenomeno sismico.

In definitiva si tratterebbe di integrare doppiamente queste serie di dati in modo da ottenere successivamente la curva delle velocità e quella degli spostamenti [6].

Si osserva però, da alcune elaborazioni elettroniche eseguite in passato che gli accelerogrammi provenienti dalle stazioni sismiche presentano delle lacune nei dati iniziali e finali: il valore dell'accelerazione a_i al tempo $t = 0$, inizio della registrazione, è diverso da zero; ciò significa che lo strumento registratore, in base alla propria sensibilità, entra in funzione dopo uno dei primi arrivi di onde sismiche, cosicchè una piccolissima parte dell'accelerogramma va persa; conseguentemente non si conosce il valore della velocità iniziale v_i , da imporre come costante nel calcolo del primo integrale; resta infine da notare che il valore v_f della velocità finale, ovvero $v(t = T)$, per la natura fisica dei movimenti macrosismici del suolo, deve tendere a zero per tempi sufficientemente lunghi ma non all'infinito.

Questa ultima particolarità dipende dal fatto che il tempo T , istante in cui termina l'elaborazione, è scelto dall'operatore ed implica un certo numero di giudizi soggettivi: l'elaborazione si estende sino a quando non termina la registrazione accelerografica oppure quando nell'accelerogramma non si riscontrano più segnali visivamente « significativi ».

Qualunque sia il criterio per la scelta del tempo T , gli ultimi segnali accelerometrici registrati sarebbero di frequenza tanto bassa da essere eliminati nei procedimenti di correzione della linea di base; ciò consente

d'imporre un valore dell'accelerazione finale, pari a zero ma non ugualmente un valore nullo della velocità finale.

Per quanto irrilevanti potrebbero sembrare tali fattori nella determinazione degli spostamenti del suolo, si ritiene utile fare a tal riguardo le considerazioni seguenti, relative alla componente Nord-Sud del terremoto di El Centro del 19/5/1940 [9], preso come esempio numerico. Nel caso in esame la durata T del fenomeno sismico è pari a 29,389 sec., l'accelerazione iniziale a_1 è pari a 10,644 cm/sec² e la velocità finale v_f è pari a 9,285 cm/sec.

Ricordando che gli spostamenti massimi del suolo in valore assoluto oscillano durante un terremoto intorno a valori di circa 50 cm., ci si rende conto come, ad esempio, una velocità finale pari a 9,285 cm/sec. influenzi notevolmente lo spostamento finale s_f per ogni secondo che venga considerato in più nella durata T di registrazione del terremoto.

D'altronde, non avendo elementi per valutare effettivamente l'istante in cui il fenomeno sismico termina, per tener conto di questi parametri, ovvero accelerazione iniziale e velocità iniziale e finale, ci si deve basare necessariamente sulla durata T di registrazione del terremoto e sulle peculiarità dello stesso, nonostante sia un fenomeno definibile, con termine anglosassone, di tipo « random ».

Tali difficoltà, unite al numero enorme di dati accelerometrici relativi ad un sisma, lasciano chiaramente intendere che la valutazione della curva delle velocità e successivamente quella degli spostamenti del suolo richiede necessariamente l'impiego di elaboratori elettronici.

Per quanto concerne il valore dell'accelerazione iniziale a_1 si è ritenuto che, potendo assumere come funzione interpolatrice dei dati accelerometrici una funzione lineare, si potesse valutare nel modo seguente la prima parte di accelerogramma perso nella registrazione: l'intervallo di tempo τ (fig. 3), intercorrente tra l'inizio del fenomeno sismico e l'inizio della registrazione accelerometrica, è valutato in modo che la funzione accelerazione sia linearmente crescente (in valore assoluto) con tangente iniziale pari a:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 (N - 1)}{T}$$

ed abbia, per $t = \tau$, valore a_1 ; τ è quindi pari al Δt medio di registrazione:

$$(8) \quad \tau = \frac{T}{N - 1}$$

essendo N il numero dei dati accelerometrici del sisma in esame.

In tal modo, a parità di durata T di registrazione, all'aumentare di N ,

il valore di $tg \varphi$ aumenta; il che significa che, per un dato terremoto, l'accelerografo adottato è maggiormente sensibile e l'influenza del valore iniziale dell'accelerazione sulla valutazione dei diagramma delle velocità e degli spostamenti diminuisce.

Per quanto concerne la velocità iniziale v_1 , da quanto precedentemente detto in relazione al tempo τ , il suo valore risulta ovviamente pari a:

$$(9) \quad v_1 = \frac{a_1 \cdot \tau}{2}$$

L'ultimo parametro da considerare resta la velocità finale v_f , per la quale non può scaturire alcuna relazione con il corrispondente valore dell'accelerazione, similmente a quanto fatto per la valutazione della velocità iniziale v_1 (9); in questo caso l'accelerazione al tempo T risulta di per sè

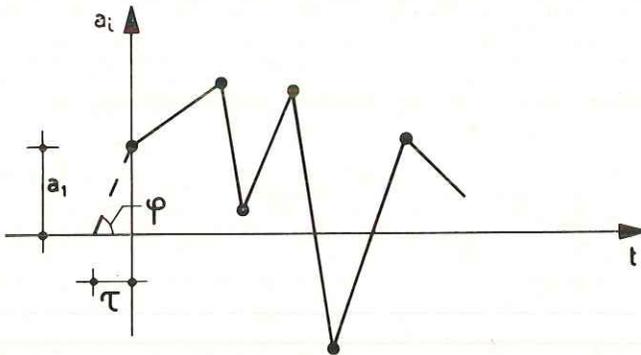


Fig. 3.

nulla e si dovrà quindi adottare una serie di ragionamenti completamente diversi.

Si è già detto che, per le caratteristiche fisiche del fenomeno, la velocità finale dovrebbe avere valore nullo o tendere ad esso in un tempo piuttosto breve.

Per azzerare tale velocità, dovendo giostrare soltanto sulla durata effettiva T dell'accelerogramma, sembra intuitivo adottare una rotazione dell'asse dei tempi, rimanendo però da stabilire in relazione a quale diagramma, ovvero delle accelerazioni, delle velocità e degli spostamenti.

Per quello delle accelerazioni c'è da osservare che il relativo valore finale è nullo e, dal punto di vista del fenomeno sismico, sembrerebbe illogico modificarlo; relativamente alle velocità, ruotare l'asse dei tempi di

una quantità $v_f/(T + \tau)$, azzerando così il valore finale, significherebbe poi, in fase di calcolo degli spostamenti, incrementare il valore finale dello spostamento di una quantità pari a $v_f(T + \tau)/2$; nel caso dell'esempio numerico in esame, tale incremento risulterebbe:

$$\Delta s_f = \frac{v_f(T + \tau)}{2} = \frac{9,285(29,389 + 0,0522)}{2} = 136,68 \text{ cm.}$$

valore questo, che dall'esame di varie elaborazioni di accelerogrammi, appare esorbitante.

Da ciò risulta logico che tale correzione venga eseguita sul diagramma degli spostamenti del suolo per il quale deve risultare, fisicamente indiscutibile, che la velocità del terremoto sia nulla allorquando termina il fenomeno sismico. D'altro canto, una semplice rotazione rigida dell'asse dei tempi intorno all'origine comporterebbe il medesimo trattamento correttivo di tutti i dati accelerometrici originali, indipendentemente dal loro valore e soprattutto dall'intervallo Δt_i di registrazione fra un dato ed il precedente.

Si è ritenuto quindi opportuno ottenere la rotazione operando in tutti i dati accelerometrici delle correzioni medie in base ai valori di Δt_i . Il modo è il seguente:

- a) la rotazione $v_f/(T + \tau)$, ovvero l'azzeramento di v_f nel diagramma degli spostamenti, equivale a ruotare l'asse dei tempi nel diagramma delle velocità e delle accelerazioni rispettivamente di:

$$\frac{2 v_f}{(T + \tau)^2} \qquad \frac{4 v_f}{(T + \tau)^3}$$

- b) rispettivamente tali rotazioni rappresentano in definitiva la correzione media da apportare nei dati tachimetrici ed accelerometrici per unità di tempo di registrazione;

- c) detto Δt_i il passo di registrazione fra l'istante t_{i-1} e t_i per v_i ed s_i , valori della velocità e dell'accelerazione al tempo t_i , le correzioni rispettive valgono quindi:

$$(10) \qquad \Delta v_i = - \frac{2 v_f}{(T + \tau)^2} \Delta t_i$$

$$(11) \qquad \Delta a_i = - \frac{4 v_f}{(T + \tau)^3} \Delta t_i$$

Quindi, riepilogando, il procedimento esposto ed adottato nel programma di calcolo in fig. 4*) è il seguente:

- 1) - calcolo dell'intervallo di tempo τ ;
- 2) - calcolo della velocità iniziale v_1 ;
- 3) - calcolo della velocità finale v_f mediante integrazione del diagramma delle accelerazioni;

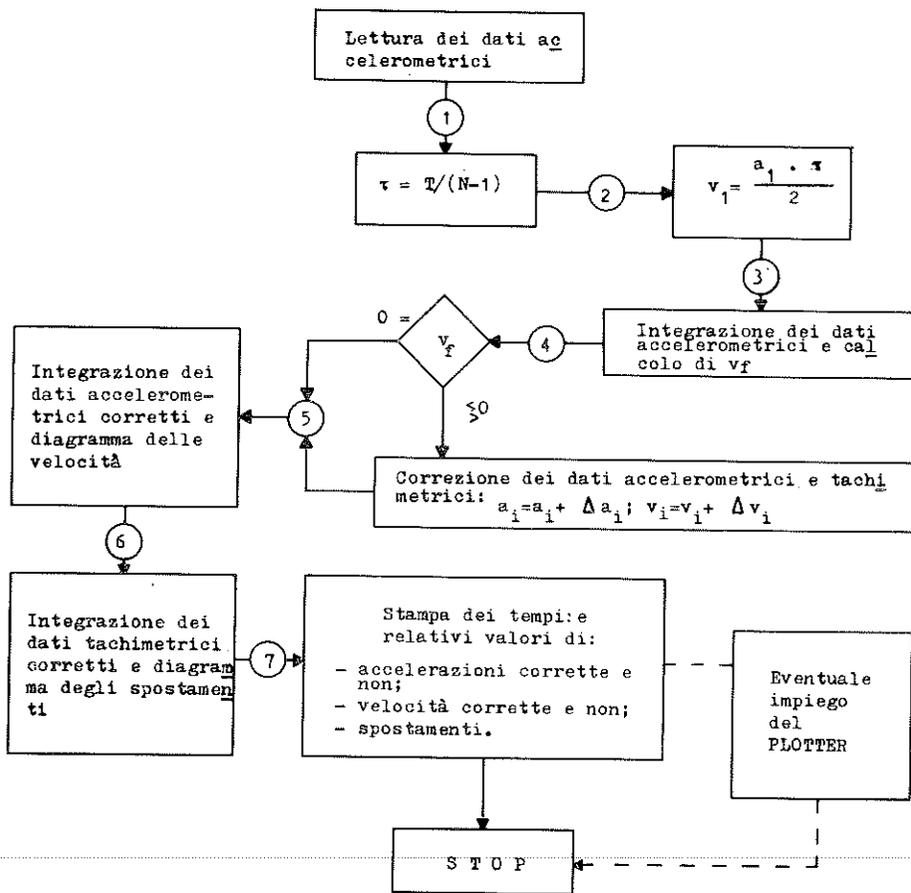


Fig. 4.

- 4) - correzione dei dati accelerometrici tramite la (11);
- 5) - correzione, tramite la (10), dei valori tachimetrici ottenuti nella fase 3;
- 6) - calcolo degli spostamenti del suolo tramite integrazione dei valori tachimetrici corretti nella fase 5.

*) Il programma di calcolo automatico è disponibile presso l'Istituto di Tecnica delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Napoli.

Si riportano di seguito (fig. 5, 6, 7), per il terremoto preso in esame, il diagramma originale accelerometrico, il diagramma tachimetrico ottenuto nella fase 3 ed infine quello degli spostamenti, ottenuti nella fase 6.

BIBLIOGRAFIA

- [1] PERRI. *Ingegneria Antisismica*. UTET 1966.
- [2] TRIFUNAC, HUDSON. *Laboratory evaluations and instrument corrections of strong-motion accelerographs*. Pasadena, California 1970.
- [3] TRIFUNAC. *Response envelope spectrum and interpretation of strong earthquake ground motion*. Pasadena, California 1970.
- [4] HUDSON, BRADY, TRIFUNAC. *Analysis of Strong-Motion Accelerograph Records*. Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Cile 1969.
- [5] HUDSON, BRADY, TRIFUNAC. *Strong-Motion Earthquake Accelerograms, Digitized and Plotted Data*. Pasadena, California 1969.
- [6] CUGIANI. *Metodi dell'Analisi Numerica*. UTET 1967.
- [7] BRADY. *Studies of Response to Earthquake Ground Motion*. Pasadena, California 1966.
- [8] TRIFUNAC. *Low frequency digitization errors and a new method for zero baseline correction of strong-motion accelerograms*. Pasadena, California 1970.
- [9] ALFORD, HOUSNER, MARTEL. *Spectrum analysis of strong-motion earthquakes*. Pasadena, California 1951.

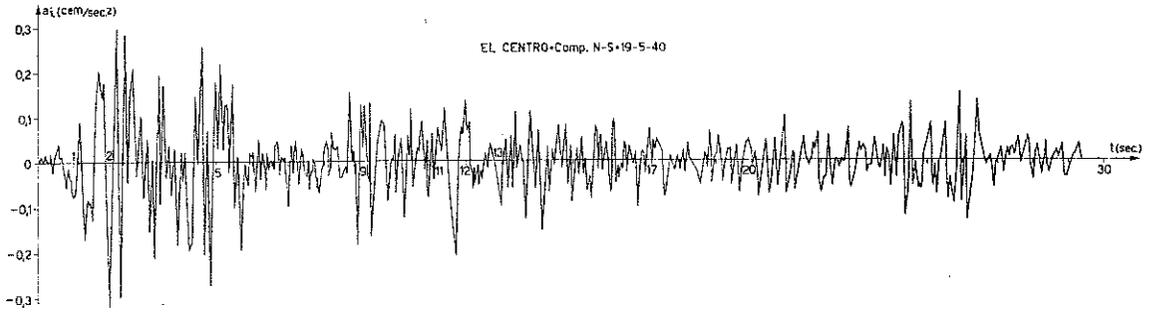


Fig. 5.

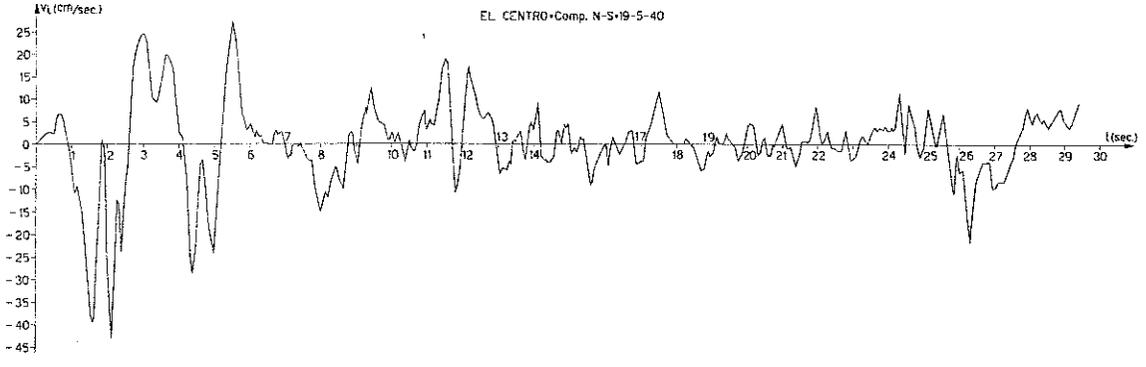


Fig. 1.

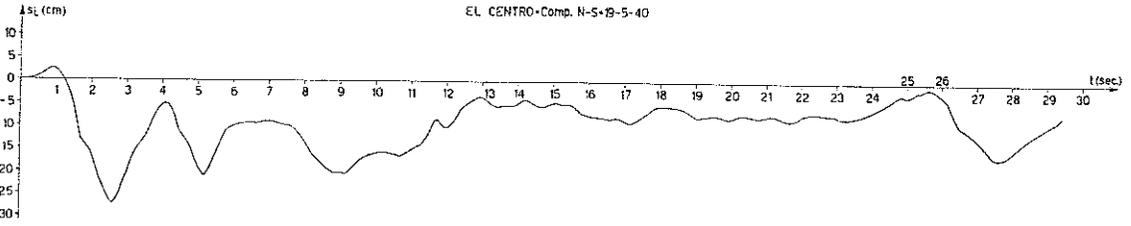


Fig. 7

Sulle relazioni fra temperatura di transizione vetrosa e contenuto di alluminio, in vetri della serie melilitica *

*Nota della dott.ssa S. Saiello e degli ing.ri A. Marotta ed A. Buri
presentata dal socio ordinario Riccardo Sersale*

(Adunanza del dì 7 giugno 1973)

RIASSUNIO. — Per approfondire il comportamento alla devetrificazione dei vetri melilitici, sono state determinate le temperature di transizione vetrosa (T_g) di una serie di campioni, le cui composizioni sono state scelte in modo da coprire l'intera serie continua di soluzioni solide del sistema akermanite-gehlenite.

La variazione di tali temperature al variare della composizione del vetro, è stata messa in relazione con il ruolo dell'alluminio nella struttura vetrosa dei sistemi esaminati, ipotizzando che la funzione dell'alluminio sia sostanzialmente riconducibile a quella di formatore di reticolo.

SUMMARY. — Glass-transition temperatures (T_g) of $\text{SiO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3\text{-CaO-MgO}$ glasses, whose compositions correspond to melilites, the continuous series of solid solutions between akermanite and gehlenite, have been determined in order to deep the knowledge of devetrification mechanism.

The variation of this temperature according to the glass-composition, has been related to the role of aluminum in the structure of the examined glasses. Aluminum has been hypothesized to act on the whole as network-former.

INTRODUZIONE.

In precedenti lavori [1] si è dato conto delle ricerche sperimentali rivolte ad approfondire il meccanismo di devetrificazione di vetri del sistema $\text{SiO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3\text{-CaO-MgO}$ di composizione prossima a quella delle scorie basiche di alto forno. Queste ultime, dopo opportuni trattamenti termici, devetrificano, com'è noto [2], dando origine a materiali di tipo vetroceramico.

Le proprietà del materiale ottenuto dipendono da diversi fattori tra cui: la composizione del vetro, il tipo di legame (covalente od ionico) ed il meccanismo di devetrificazione.

* Lavoro eseguito con il contributo finanziario del C.N.R.

Allo scopo di chiarire il meccanismo di devettrificazione, si è intrapresa una indagine sistematica su vetri di formula generale $2\text{CaO} \cdot (1-x)\text{MgO} \cdot x\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot (2-x)\text{SiO}_2$ con $0 \leq x \leq 1$, i cui termini estremi hanno composizione stechiometrica corrispondente a quella della akermanite ($x=0$) e della gehlenite ($x=1$), rispettivamente, mentre i termini intermedi corrispondono alla serie continua di soluzioni solide detta « melilitica ».

Poichè i termini di tale serie continua manifestano proprietà sensibilmente diverse in funzione della composizione, al fine di appor- tare un contributo allo studio delle relazioni fra composizione e proprietà, in vista della possibile destinazione di tali vetri a processi di deve- trificazione si è impostata una ricerca, limitata in questa prima fase, alla puntualizzazione dell'influenza della composizione del vetro sulla tempe- ratura di transizione vetrosa.

Del complesso della sperimentazione e dei relativi risultati si riferisce brevemente nel corso di questa Nota.

PARTE SPERIMENTALE.

I campioni di vetro sono stati preparati secondo le modalità descritte in precedenti pubblicazioni [3].

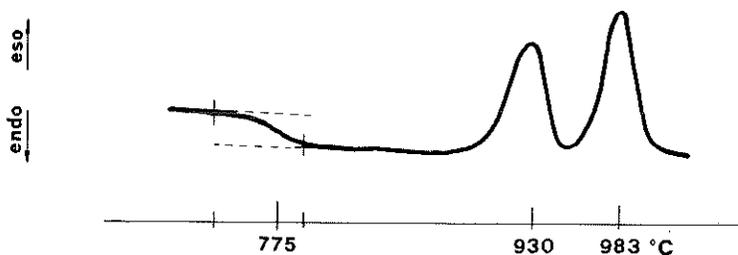


Fig. 1. — Rilevamento delle temperature di transizione vetrosa dai termogrammi.

Le temperature di transizione vetrosa sono state misurate dalle curve di analisi termica differenziale, ottenute adoperando il Differential Thermal Analyzer 900 della Dupont.

I campioni temprati sono stati ridotti in polvere e setacciati, raccogliendo la frazione di polvere le cui dimensioni medie sono comprese tra 92 e 55 μ .

L'analisi termica differenziale è stata eseguita su campioni di 40 mg adoperando Al_2O_3 come riferimento e una velocità di riscaldamento di $10^\circ\text{C}/\text{min}$.

La temperatura di transizione vetrosa è stata rilevata dai termogrammi con il procedimento grafico [4] illustrato in fig. 1 assumendo che la transi-

zione avvenga ai due terzi dell'intervallo tra l'inizio e la fine dell'effetto endotermico mostrato dai termogrammi.

I risultati ottenuti sono riportati in tabella I.

Discussione dei risultati.

Un vetro ottenuto dalla fusione di una miscela di ossidi inorganici è, com'è noto [5], costituito da un reticolo disordinato di atomi di ossigeno tenuti insieme da atomi polivalenti detti « formatori di reticolo », mediante forti legami covalenti.

TABELLA 1

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Tg	764	766	765	775	780	793	800	811	820	836	860

Distribuiti nel reticolo vi sono cationi metallici, detti « modificatori », legati ad atomi di ossigeno con legami ionici. Gli atomi di ossigeno, quindi, possono essere divisi in due categorie: atomi di ossigeno « a ponte » legati a due atomi di formatore con legami covalenti, e atomi di ossigeno « non a ponte » legati ad un atomo di formatore con un legame covalente e ad un atomo modificatore con legame ionico.

Alla temperatura di transizione vetrosa, Tg, alla quale il vetro abbandona il comportamento rigido, il reticolo deve acquistare una certa mobilità. Questo non può avvenire per rottura di legami Si-O, perchè l'energia di attivazione del flusso viscoso nei vetri a base di silice, si aggira intorno a 150 Kcal/mole, mentre l'energia del legame covalente è ben superiore: 192 Kcal/mole.

Una ragionevole alternativa potrebbe esser rappresentata da un trasferimento di legami tra gli atomi di ossigeno secondo il modello proposto da E. A. LACY [6].

Nei silicati vetrosi la mobilità della struttura è assicurata da gruppi SiO₃ che, staccatisi dal quarto atomo di ossigeno si legano al più vicino degli atomi di ossigeno « non a ponte » ricostituendo in quel punto la continuità del reticolo. Si avrebbe, cioè, solo uno scambio di funzioni tra due atomi di ossigeno.

Risulta chiaro, quindi, che all'aumentare del numero di atomi di ossigeno « non a ponte » aumenta la probabilità che avvenga tale scambio e di conseguenza diminuisce la temperatura di transizione vetrosa.

La silice vetrosa, infatti, che è priva di atomi di ossigeno « non a ponte », ha un alto valore di Tg (1200°C) [7]. Invece qualsiasi vetro ottenuto da una miscela di silice ed ossidi modificatori ha una Tg < 1200°, poichè in questi vetri aumenta il numero di atomi di ossigeno « non a ponte » rispetto a quelli della silice vetrosa.

Ad ulteriore prova della validità di questo modello, è stato osservato che gli ossidi modificatori bivalenti (metalli alcalino-terrosi) mantengono la Tg a valori più alti degli ossidi modificatori di metalli monovalenti (metalli alcalini), poichè originano atomi di ossigeno « non a ponte », costretti in coppie.

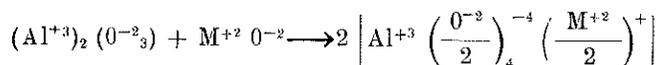
I valori relativamente alti di Tg riportati in tabella 1, sono pertanto giustificati se si considera che il sistema da noi esaminato contiene solo cationi bivalenti la cui presenza rende il reticolo più rigido rispetto ai vetri contenenti cationi monovalenti.

Nella serie dei vetri melilitici, se varia « x », si ha la progressiva sostituzione di atomi di silicio e di magnesio con atomi di alluminio

x = 0 (akermanite)	x = 0,5 (50 % Ak — 50 % Geh)	x = 1 (gehlenite)
Mg 2Si	Mg _{1/2} Al _{1/2} Si _{3/2} Al _{1/2}	Al SiAl

cioè l'alluminio sostituisce uno ione modificatore (Mg) e uno formatore (Si). L'alluminio non conserva la funzione degli ioni che sostituisce, altrimenti il rapporto F/M fra il numero di atomi formatori e quello degli atomi modificatori, resterebbe costante per l'intera serie e con esso il numero di atomi di ossigeno « non a ponte », il che non giustificherebbe l'aumento di Tg osservato lungo la serie al crescere del tenore di alluminio riportato in tabella 1.

Si può invece avanzare l'ipotesi che l'alluminio funga tutto da formatore di reticolo, secondo il seguente schema:



In tal modo la continuità del reticolo aumenterebbe, non soltanto perchè l'alluminio va ad aumentare il numero di atomi formatori di reticolo, ma anche perchè, in coordinazione 4, sottrae, per l'elettroneutralità del sistema, una carica positiva che altrimenti avrebbe formato un altro ossigeno « non a ponte ». E' noto, infatti, che aggiungendo alla silice Na₂O e Al₂O₃ nel rapporto 1:1 non si provoca formazione di atomi di ossigeno « non a ponte »

per cui la struttura e le proprietà di un tale sistema vetroso sono molto prossime a quelle della silice.

Nel sistema vetroso melilitico, secondo l'ipotesi fatta, sono formatori (F) $2-x$ atomi di silicio e $2x$ atomi di alluminio per cui $F = 2+x$.

Per stabilire il numero di atomi modificatori (M), consideriamo i termini estremi della serie.

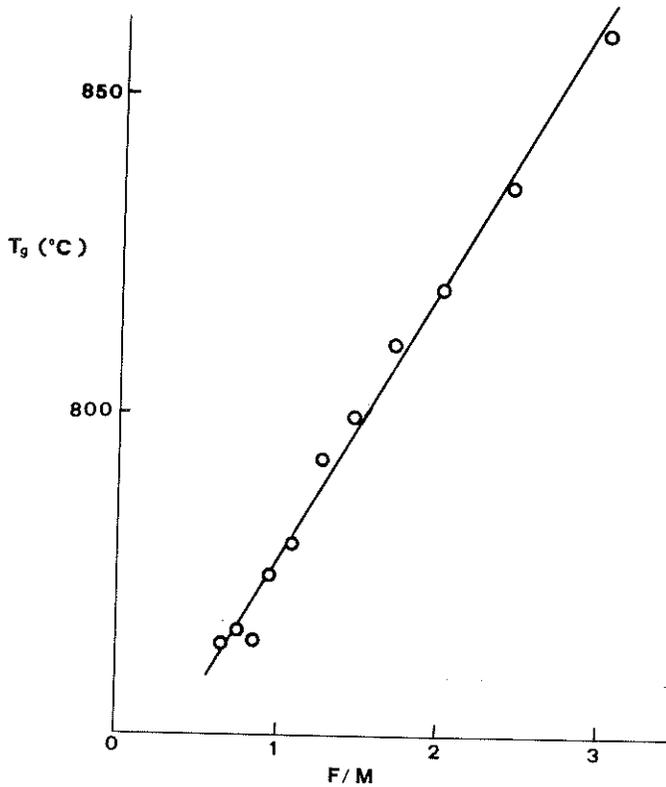


Fig. 2. — Temperatura di transizione vetrosa in funzione del rapporto numero di atomi di formatori (F), numero di atomi di modificatori (M).

Nel vetro akermanitico di composizione stechiometrica $2CaO \cdot MgO \cdot 2SiO_2$ gli atomi modificatori sono tre: due atomi di calcio e uno di magnesio.

Nel vetro gehlenitico di composizione stechiometrica $2CaO \cdot Al_2O_3 \cdot SiO_2$ ha funzione di modificatore un solo atomo di calcio; l'altro non può modificare il reticolo perchè deve neutralizzare le due cariche negative create dalla presenza dei due atomi di alluminio secondo quanto esposto prima. Gli atomi modificatori saranno, quindi, nell'intera serie $M = 3 - 2x$.

In conclusione, sembra opportuno considerare i valori di Tg dei vetri dell'intera serie esaminata, non tanto in funzione delle quantità x di allumina presente, quanto in funzione del rapporto F/M.

Dall'esame della figura 2 si può rilevare che la temperatura di transizione vetrosa aumenta in modo lineare con il rapporto formatori/modificatori, in accordo con l'ipotesi secondo la quale la continuità del reticolo aumenta poichè tutti gli atomi di alluminio si comportano da formatori del reticolo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BURI, A. MAROTTA, P. GIORDANO ORSINI, *Ceramurgia*, **3**, 169, 1971.
- [2] P. GIORDANO ORSINI, *Chimica Industria*, **50**, 297, 1968.
- [3] A. BURI, A. MAROTTA, P. GIORDANO ORSINI, *Ceramurgia*, **2**, 100, 1971.
- [4] J. A. MC MILLAN, *Chem. Phys.*, **42** (10) 3497 (1965).
- [5] H. RAWSON, Inorganic Glass-Forming Systems, *Academic Press* (London) 1967.
- [6] E. A. LACY, *J. Am. Cer. Soc.*, **51** (3) 150 (1968).
- [7] G. M. BERTENEV, The Structure and properties of Inorganic Glasses (1970). *Wolters - Noordhoff Publishing* - Groningen 1970, pag. 65.

Problemi di correttezza delle soluzioni esatte ed approssimative dei sistemi integro-differenziali non lineari a derivate parziali

*Nota dei Proff. Leonida Eugenio Krivoshein*¹⁾, *Demetrio Mangeron*^{2), 3)}
e Mehmet Namik Öguztöreli^{4), 5)}

presentata dal socio ordinario Carlo Miranda

(Adunanza del 7 giugno 1973)

SUMMARY. — In the framework of a large set of the authors' results concerning the existence, the uniqueness, the stability, and the effective construction with a prescribed degree of approximation of solutions of various partial nonlinear integro-differential systems, of importance in applications, deal in what follows with a study concerning the system (1) - (4). The emphasis is given to the problem of the correctness of the exact and approximate solutions of the partial nonlinear integro-differential system (1) - (4).

RIASSUNTO. — Gli AA., proseguendo i loro studi concernenti l'esistenza, l'unicità, la stabilità e la determinazione effettiva con un assegnato errore delle soluzioni di svariati sistemi integro-differenziali non lineari a derivate parziali, di notevole importanza nelle applicazioni, espongono in ciò che segue, pur tenendo dovuto conto del loro recente lavoro inserito nei « Rendiconti Lincei » e dedicato ad una interessante estensione delle equazioni integro-differenziali non lineari di Volterra, lo studio del sistema integro-differenziale (1) - (4), insistendo sul problema della correttezza della soluzione esatta e delle soluzioni approssimative di questo sistema.

¹⁾ Kirgizian State University, Frunze, Kirg SSR, USSR.

²⁾ Polytechnic Institute of Jassy, Romania. At present: Department of Computer Science, Sir George Williams University, Montreal, Quebec, Canada.

³⁾ The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta and to Sir George Williams University for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics and in the Department of Computer Science of these universities, respectively.

⁴⁾ Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

⁵⁾ The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada under Grant NRC-A4345 through the University of Alberta.

1. Si consideri il seguente problema di valori iniziali

$$(1) \quad u(x, \alpha) = \varphi(x),$$

che s'inquadra simultaneamente nella teoria dei controlli [1] e nella teoria concernente certe interessanti estensioni proprie di equazioni integro-differenziali non lineari di Volterra [2], ove $u(x, t)$ soddisfa l'equazione integro-differenziale non lineare a derivate parziali.

$$(2) \quad u'_i(x, t) = f[x, t, u(x, t), \varphi(x), \int_a^{\varphi(x)} M(x, t, \xi; u(\xi, t), \varphi(\xi)) d\xi],$$

mentre la funzione incognita $\varphi(x)$ soddisfa l'equazione integrale non lineare

$$(3) \quad \varphi(x) = F[x, \varphi(x), \int_a^{\infty} K(x, \xi, \varphi(\xi), \varphi(x)) d\xi] = A\varphi,$$

essendovi $K[\cdot]$, $f[\cdot]$, $M[\cdot]$ ed $F[\cdot]$ funzioni note, continue in tutti i loro argomenti nel dominio

$$D = \{a \leq x, \xi \leq b, \alpha \leq t \leq \beta, 0 \leq |z_i| < r_i, i = 1, 2, 3\}.$$

$$r_i = \text{const}, z_1 = \varphi(x),$$

$$z_2 = \int_a^{\varphi(x)} M(x, t, \xi, u(\xi, t), \varphi(\xi)) d\xi, z_3 = \int_a^{\infty} K(x, \xi, \varphi(\xi), \varphi(x)) d\xi.$$

Tali funzioni sono inoltre lipschitziane rispetto alle variabili che contengono $u(\cdot)$ e $\varphi(\cdot)$, essendovi $L_{1k}(x, \xi)$, $L_{2k}(x, \xi)$, $L_{ij}(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$), $L_{iM}(x, t, z)$ ($i = 1, 2$), $L_{iF}(x)$ ($i = 1, 2$) i coefficienti di Lipschitz rispettivi.

2. *L'unicità ed effettiva costruzione della funzione incognita $\varphi(x)$.*
È ben chiaro che l'operatore A che figura nell'equazione (3) trasforma l'insieme delle funzioni $z_1(x)$, $0 \leq |z_1| < r_1$, in una sua parte. Siano $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ due funzioni continue appartenenti all'insieme ora mentovato. Ponendo

$$\|\cdot\| = \max_D |\cdot|,$$

si ha

$$(5) \quad \begin{aligned} & \| \varphi_2 - \varphi_1 \| \leq \\ & \leq \| L_{1F}(x) | \varphi_2 - \varphi_1 | + L_{2F}(x) \int_a^x [L_{1k}(x, \xi) | \varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi) | + \\ & + L_{2k}(x, \xi) | \varphi_2(x) - \varphi_1(x) |] d\xi \| \leq \gamma \| \varphi_2 - \varphi_1 \|, \end{aligned}$$

ove si è posto

$$(6) \quad \gamma = \| L_{1F}(x) + L_{2F}(x) \int_a^x [L_{1k}(x, \xi) + L_{2k}(x, \xi)] d\xi \|.$$

Poiché, per $\gamma < 1$, l'operatore A risulta, nelle condizioni di cui sopra, una contrazione secondo Banach, ha luogo il seguente teorema di unicità e di effettiva costruzione della funzione incognita $\varphi(x)$.

Teorema 1. - *L'equazione (3) possiede, per $\gamma < 1$, una soluzione unica continua nel dominio D e tale soluzione può essere effettivamente costruita tramite il metodo delle approssimazioni successive di Picard mediante la formola di ricorrenza*

$$(7) \quad \varphi_n(x) = A \varphi_{n-1}.$$

2. *Valutazione della deviazione $\varphi(x) - \varphi_n(x)$.* Dalle ineguaglianze

$$(8) \quad \begin{aligned} & \| \varphi - \varphi_n \| \leq \\ & \leq \| L_{1F}(x) | \varphi - \varphi_{n-1} | + L_{2F}(x) \int_a^x [L_{1k}(x, \xi) | \varphi(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi) | + \\ & + L_{2k}(x, \xi) | \varphi(x) - \varphi_{n-1}(x) |] d\xi \| \leq \gamma \| \varphi - \varphi_{n-1} \| \end{aligned}$$

risulta

$$(9) \quad \| \varphi - \varphi_n \| \leq \gamma^{n-1} \| \varphi - \varphi_0 \|,$$

ove $\varphi_0(x)$ è l'approssimazione iniziale (d'ordine zero) della funzione $\varphi(x)$.

La valutazione (9) può essere utilizzata con profitto soltanto nel caso in cui si è valutata prima la differenza $\varphi(x) - \varphi_0(x)$.

Si ponga

$$r(x) \equiv \varphi_0(x) - F[x, \varphi_0(x), \int_a^x K(x, \xi, \varphi_0(\xi), \varphi_0(x)) d\xi].$$

Si ha per conseguenza

$$\|\varphi - \varphi_0\| \leq \|r(x)\| : (1 - \gamma)$$

e pertanto

$$(10) \quad \|\varphi - \varphi_n\| \leq \gamma^{n-1} \|r(x)\| : (1 - \gamma) = R_n,$$

donde si deduce il seguente

Teorema 2. - *Dato un numero positivo ε arbitrariamente piccolo, la realizzazione dell'ineguaglianza*

$$(11) \quad \|\varphi - \varphi_n\| < \varepsilon$$

è assicurata non appena il numero n delle iterazioni soddisfa l'ineguaglianza

$$(12) \quad n > 1 + \left\lceil \ln \frac{\varepsilon (1 - \gamma)}{\|r(x)\|} \right\rceil : \ln \gamma$$

nel dominio considerato.

3. Approssimazioni della soluzione del problema (1) - (4).

a) Si consideri anzitutto il caso in cui il problema della determinazione della funzione incognita $v(x, t)$ figurante nel sistema integro-differenziale non lineare

$$(13) \quad v(x, \alpha) = \varphi_n(x),$$

$$(14) \quad v'_t(x, t) = f[x, t, v(x, t), \varphi_n(x), \int_a^{\varphi_n(x)} M(x, t, \xi, v(\xi, t), \varphi_n(\xi)) d\xi]$$

conduce ad una soluzione *esatta* e sia $w(x, t)$ una tale soluzione.

Tenendo conto del fatto che la valutazione della deviazione tra le funzioni $w(x, t)$ e $u(x, t)$ si esprime mediante le ineguaglianze

$$\begin{aligned}
 |u(x, t) - w(x, t)| &\leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \left| \int_a^t \{ f[x, \tau, u(x, \tau), \varphi(x)], \right. \\
 &\int_a^{\varphi(x)} M(x, \tau, \xi, u(\xi, \tau), \varphi(\xi)) d\xi - f[x, \tau, w(x, \tau), \varphi_n(x)], \\
 &\int_a^{\varphi_n(x)} M(x, \tau, \xi, w(\xi, \tau), \varphi_n(\xi)) d\xi \} d\tau \leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \\
 &\int_a^t \{ L_{1f}(x, \tau) |u(x, \tau) - w(x, \tau)| + L_{2f}(x, \tau) |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \\
 &L_{3f}(x, \tau) \left| \int_a^{\varphi(x)} M(x, \tau, \xi, u(\xi, \tau), \varphi(\xi)) d\xi - \int_a^{\varphi_n(x)} M(x, \tau, \xi, w(\xi, \tau), \varphi_n(\xi)) d\xi \right| \} d\tau
 \end{aligned}$$

si deduce il seguente

Teorema 3. - *La soluzione $w(x, t)$ del problema (13) - (14) tende nel dominio D verso la soluzione esatta $u(x, t)$ del problema (1) - (4) non appena $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ ed è soddisfatta l'ineguaglianza*

$$(15) \quad l = \left\| \int_a^t \{ L_{1f}(x, \tau) + L_{3f}(x, \tau) \left| \int_a^{\varphi(x)} L_{2m}(x, \tau, \xi) d\xi \right| \} d\tau \right\| < 1.$$

La dimostrazione dell'asserto risulta senz'altro dall'ineguaglianza

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \|u - w\| &\leq \| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| [1 + \int_a^t L_{2f}(x, \tau) d\tau] + \\
 &\int_a^t L_{3f}(x, \tau) \left[\int_a^{\varphi(x)} L_{2m}(x, \tau, \xi) |\varphi(\xi) - \varphi_n(\xi)| d\xi + \right. \\
 &\left. \left| \int_a^{\varphi(x)} M(x, \tau, \xi, w(\xi, \tau), \varphi_n(\xi)) d\xi \right| \right] d\tau \| : \\
 &(1 - l).
 \end{aligned}$$

b) Si consideri ora il caso in cui l'integrazione nel dominio D del sistema integro-differenziale non lineare (13) - (14) non si consegue che *approssimativamente*. Sia $w_k(x, t)$ una soluzione approssimativa del problema (13) - (14) costruita in un qualsiasi modo e sia $\rho_k(x, t)$ la deviazione che ne risulta in seguito alla sostituzione della funzione $w_k(x, t)$ nell'equazione (14). Si ottiene per conseguenza

$$(17) \quad w_k(x, t) = \varphi_n(x) + \int_a^t \left\{ \rho_k(x, \tau) + f[x, \tau, w_k(x, \tau), \varphi_n(x), \int_a^{\varphi_n(x)} M(x, \tau, \xi, w_k(\xi, \tau), \varphi_n(\xi)) d\xi] \right\} d\tau.$$

Assumendo $w_k(x, t)$ quale soluzione approssimativa del problema iniziale (1) - (4) e proseguendo similamente con ciò che è stato fatto per ottenere l'ineguaglianza (16), la valutazione della deviazione tra le funzioni $w_k(x, t)$ e $u(x, t)$ per tutte le coppie $(x, t) \in D$ si esprime mediante

$$(18) \quad \|u - w_k\| \leq \left\{ R_n \left[1 + \left\| \int_a^t L_{2f}(x, \tau) d\tau \right\| + \left\| \int_a^t \left[\rho_k(x, \tau) + L_{3f}(x, \tau) \left[\left\| \int_a^{\varphi_n(x)} L_{2m}(x, \tau, \xi) |\varphi(\xi) - \varphi_n(\xi)| d\xi \right\| + \left\| \int_a^{\varphi_n(x)} M(x, \tau, \xi, w_k(\xi, \tau), \varphi_n(\xi)) d\xi \right\| \right] \right\} d\tau \right] \right\} : (1 - l).$$

Rinunciando a soffermarci sull'esposizione dei procedimenti di approssimazione che spettano al problema ora considerato si fa menzione del fatto che alcune Note susseguenti saranno dedicate alla risoluzione di altri problemi che s'inquadrano in questo ordine di idee, mentre i dettagli algoritmici e cenni concernenti alcune applicazioni saranno esposti nel *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iasi*.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems*. University of Alberta, Department of Mathematics Research Studies, I, II, III, 1968.
- [2] KRIVOSHEIN L. E., MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Studi concernenti certe estensioni delle equazioni integro-differenziali di Volterra*. Nota I. *Problemi di valori iniziali*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. nat., (8) LIV (1973).

- [3] KRIVOSHEIN L. E., LEUNG K. V., MANGERON D. J., OGUZTORELI M. N., *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. I. Existence, unicité, stabilité et approximation des solutions de certains systèmes intégral-différentiels non linéaires aux opérateurs différentiels ordinaires et hyperboliques.* Bull. Classe Sci. Acad. Roy. Belgique, (8) LVIII (1972), 1291-1299.
- [4] MANGERON D. J., OGUZTORELI M. N., KRIVOSHEIN L. E., LEUNG K. V., *Nouveaux problèmes concernant les équations intégral-différentielles non linéaires à plusieurs variables indépendantes. I. Recherche des solutions dans le cas des conditions aux limites initiales-intégrales.* Bull. Classe Sci. Acad. Roy. Belgique, (5), LVIII (1972), 1225-1231.
- [5] MANGERON D., OGUZTORELI M. N., *Equazioni matematiche con strutture composite. Sulle soluzioni di alcune classi di equazioni integro-differenziali funzionali lineari e nonlineari.* Rend. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Serie 4, Vol. 37 (1970), pp. 107-113.
- [6] KRIVOSHEIN L. E., *Sur un problème à la frontière pour les équations intégral-différentielles non linéaires de Mangeron.* Bull. Classe Sci. Acad. Roy. Belgique, (5), LIX (1973).
- [7] LEUNG K. V., OGUZTORELI M. N., *Numerical solution of a Mixed Problem for a polycibrating or Polycave Equations of Mangeron.* Bull. Classe Sci. Acad. Roy. Belgique, (5), LIX (1973).

Numerical solutions of boundary value problems.
I. Solution of an ordinary differential system, frequently occurring
in the design of certain electrical networks

Nota dei Proff. Kin Vinh Løung,¹⁾ Demetrio Mangeron^{2),3)}
e Mehmet Namik Ögüztöreli^{4),5)} presentata dal socio ordinario Mauro Picone

(Adunanza del 7 giugno 1973)

SUMMARY. — A set of papers devoted to numerical solutions of polyvibrating or polywave equations, presented by MAURO PICONE, is to appear in the « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei ». In this paper the authors deal with the numerical solution of a boundary value problem for an ordinary differential system with four first order equations frequently occurring in the design of certain electrical networks. In the next Notes will be presented an analytical investigation for an electrical network described by a particular boundary value problem of the form (I.1).

RIASSUNTO. — In una serie di Note presentate dall'Illustre Accademico Linceo MAURO PICONE per l'inserzione nei « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei » sono state esposte soluzioni numeriche di vari problemi concernenti le equazioni polivibranti. In questa Nota, gli AA. presentano invece la soluzione numerica di un problema al contorno concernente un sistema differenziale ordinario costituito da quattro equazioni di primo ordine, che frequentemente occorrono nella modellazione matematica di certe reti elettrici. Le Note susseguenti contengono l'esposizione di un'investigazione analitica del medesimo problema, come pure una simulazione computeriale concernente una rete elettrica descritta da un problema al contorno particolare di forma (I.1).

¹⁾ Department of Computer Science, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

²⁾ Polytechnic Institute of Jassy, Socialist Republic of Romania. At present: Department of Computer Science, Sir George Williams University, Montreal, Quebec, Canada.

³⁾ The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta and to Sir George Williams University for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics and in the Department of Computer Science of these universities, respectively.

⁴⁾ Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

⁵⁾ The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada under the Grant NRC-A4345 through the University of Alberta.

I. Let $A = A(x)$ be a given 4×4 matrix function with elements $A_{ij} = A_{ij}(x)$ defined and sufficiently smooth in the interval $0 \leq x \leq 1$, $\vec{y} = \vec{y}(x)$ be a 4-dimensional column vector function with components $y_i = y_i(x)$, and \vec{a} be a given 4-dimensional constant column vector with components a_j , $i, j = 1, 2, 3, 4$. Consider the boundary value problem

$$(I.1) \quad \begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{a}, \\ y_1(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(0) = y_2(1) = 0. \end{cases}$$

Boundary value problems of this form frequently occur in the design of certain electrical networks. In this paper we deal only with the numerical solution of Eqs (I.1). In the next Notes we shall present an analytical investigation of the same problem, and a computer simulation for an electrical network described by a particular boundary value problem of the form (I.1). Relevant literature is listed at the end of the paper.

II. Assume that Eqs (I.1) admit a solution. Let us denote by u and v the initial values of the functions y_3 and y_4 :

$$(II.1) \quad y_3(0) = u, \quad y_4(0) = v.$$

If the values of u and v are known, the boundary value problem (I.1) can be treated as an initial value problem of the following form:

$$(II.2) \quad \frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{a}, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = u, \quad y_4(0) = v.$$

Because of the linearity of the differential system and the smoothness of the matrix $A(x)$, this initial value problem can be solved uniquely. Obviously, the values $y_1(1)$ and $y_2(1)$ will depend on u and v . Let $y_1(1) = F(u, v)$, $y_2(1) = G(u, v)$. We have to determine u and v such that

$$(II.3) \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 0.$$

In the next sections we shall present a numerical scheme for the solutions of Eqs (II.2) - (II.2). For the solution of Eqs (II.2) we shall use Taylor series expansion with one step method with variable step size and variable order of approximations.

Before we start our analysis, let us subdivide the interval $0 \leq x \leq 1$ into N equal subintervals. Let $h = \frac{1}{N}$. We shall use the following notation:

$$(II.5) \quad \vec{y}_r = \vec{y}(rh), \quad A^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} A, \quad \vec{y}_r^{(n)} = \left. \frac{d^n \vec{y}}{dx^n} \right|_{x=rh}, \quad \vec{y}_r^{(0)} = \vec{y}_r,$$

for $r = 0, 1, \dots, N$ and $n = 0, 1, 2, \dots$.

III. We begin with the computation of the higher order derivatives of $\vec{y}(x)$. Given $\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{A}y + \vec{a}$, we can easily show by mathematical inductions that

$$(III.1) \quad \frac{d^{n+1} \vec{y}}{dx^{n+1}} = A_{(n)} \vec{y} + \vec{a}_{(n)},$$

where $A_{(0)} = A$, $\vec{a}_{(0)} = \vec{a}$ and

$$(III.2) \quad A_{(n)} = A_{(n-1)}^{(1)} + A_{(n-1)} A, \quad \vec{a}_{(n)} = \vec{a}_{(n-1)}^{(1)} + A_{(n-1)} \vec{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

and $\vec{a}_{(n-1)}^{(1)} = \frac{d\vec{a}_{(n-1)}}{dx}$. The matrices $A_{(n)}$ can be expressed in terms of

$A, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$. Indeed, we have

$$(III.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{(1)} = A^{(1)} + AA, \\ A_{(2)} = A^{(2)} + 2A^{(1)}A + AA^{(1)} + AAA, \\ A_{(3)} = A^{(3)} + 3A^{(2)}A + 3A^{(1)}A^{(1)} + AA^{(2)} + 3A^{(1)}AA + 2AA^{(1)}A + \\ \quad + AAA^{(1)} + AAAAA, \\ A_{(4)} = A^{(4)} + 4A^{(3)} + 6A^{(2)}A^{(1)} + 4A^{(1)}A^{(2)} + AA^{(3)} + 6A^{(2)}AA + \\ \quad + 8A^{(1)}A^{(1)}A + 3AA^{(2)}A + 4A^{(1)}AA^{(1)} + 3AA^{(1)}A^{(1)} + AAA^{(1)} \\ \quad + 4A^{(1)}AAA + 3A^{(1)}AA + 2AAAA^{(1)}A + AAAAA^{(1)} + AAAAAA. \\ \dots \end{array} \right.$$

Generally we have

$$(III.4) \quad A_{(k)} = \sum_{k=1}^{k+1} \left(\prod_{r \in U(x,k)} \alpha(\vec{r}, x, k) A^{(r_1)} A^{(r_2)} \dots A^{(r_k)} \right),$$

where

$$(III.5) \quad U(x, k) = \left\{ \vec{r} \mid \sum_{i=1}^k r_i = x - k + 1 \right\}$$

and

$$(III.6) \quad \alpha(\vec{r}, x, k) = \alpha_1(\vec{r}, x, k) + \alpha_2(\vec{r}, x, k),$$

where

$$(III.7) \quad \alpha_1(\vec{r}, x, k) = \begin{cases} 0 & \text{if } r_k \neq 0 \\ \alpha(\vec{r}', x - 1, k') & \text{if } k' = k - 1 \text{ and } r_i = r'_i \text{ (} i = 1, \dots, k - 1 \text{)} \end{cases}$$

and

$$(III.8) \quad \alpha_2(\vec{r}, x, k) = \begin{cases} \sum_{k'} \alpha(\vec{r}', x - 1, k') & \text{if } k' = k \text{ and for all } r \text{ such that} \\ r'_i = r'_i + \delta_{i,r} & \text{for } 1 \leq r \leq k = k', \quad i = 1, \dots, k. \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where \vec{r} is a k -vector whose components are non-negative integers, and $\delta_{i,r}$ is the Kronecker delta.

IV. We now deal with the Taylor expansions. Clearly, we have

$$(IV.1) \quad \vec{y}_{r+1} = \vec{y}_r + h \vec{y}_r^{(1)} + \frac{h^2}{2!} \vec{y}_r^{(2)} + \dots + \frac{h^M}{M!} \vec{y}_r^{(M)}$$

if

$$(IV.2) \quad \left\| \frac{h^{M+1}}{(M+1)!} \vec{y}^{(M+1)} \right\| < \varepsilon,$$

where $\| \cdot \|$ denotes maximum vector norm. Hence

$$(IV.3) \quad \vec{y}_{r+1} = B_{(r)} \vec{y}_r + b_{(r)},$$

where

$$(IV.4) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{(r)} &= \left(1 + hA + \frac{h^2}{2!} A_{(1)} + \dots + \frac{h^M}{M!} A_{(M-1)} \right), \\ b_{(r)} &= \left(ha + \frac{h^2}{2!} a_{(1)} + \frac{h^3}{3!} a_{(2)} + \dots + \frac{h^M}{M!} a_{(M-1)} \right). \end{aligned} \right.$$

Hence

$$(IV.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{y}_1 &= B_{(0)} \vec{y}_0 + \vec{b}_{(0)}, \\ \vec{y}_2 &= B_{(1)} \vec{y}_1 + \vec{b}_{(1)} = B_{(1)} B_{(0)} \vec{y}_0 + B_{(1)} \vec{b}_{(0)} + \vec{b}_{(1)}, \\ \vec{y}_3 &= B_{(2)} \vec{y}_2 + \vec{b}_{(2)} = B_{(2)} B_{(1)} B_{(0)} \vec{y}_0 + B_{(2)} B_{(1)} \vec{b}_{(0)} + B_{(2)} \vec{b}_{(1)} + \vec{b}_{(2)}, \\ &\dots \\ \vec{y}_N &= B_{(N-1)} B_{(N-2)} \dots B_{(3)} B_{(2)} B_{(1)} B_{(0)} \vec{y}_0 \\ &\quad + B_{(N-1)} B_{(N-2)} \dots B_{(3)} B_{(2)} B_{(1)} \vec{b}_{(0)} \\ &\quad + B_{(N-1)} B_{(N-2)} \dots B_{(3)} B_{(2)} \vec{b}_{(1)} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + B_{(N-1)} B_{(N-2)} \vec{b}_{(N-3)} \\ &\quad + B_{(N-1)} \vec{b}_{(N-2)} \\ &\quad + \vec{b}_{(N-1)} \\ &= K \vec{y}_0 + \vec{k}, \end{aligned} \right.$$

where

$$(IV.6) \quad K = B_{(N-1)} B_{(N-2)} B_{(N-3)} \dots B_{(2)} B_{(1)} B_{(0)}$$

and

$$(IV.7) \quad \begin{aligned} \vec{k} &= B_{(N-1)} B_{(N-2)} \dots B_{(1)} \vec{b}_{(0)} \\ &\quad + B_{(N-1)} B_{(N-2)} \dots B_{(2)} \vec{b}_{(1)} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + B_{(N-1)} B_{(N-2)} \vec{b}_{(N-3)} \\ &\quad + B_{(N-1)} \vec{b}_{(N-2)} \\ &\quad + \vec{b}_{(N-1)}. \end{aligned}$$

Let us note that K and \vec{k} do not depend on \vec{y}_0 . We now write the equation $\vec{y}_N = K\vec{y}_0 + \vec{k}$ explicitly.

$$(IV.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} y_{1,N} \\ y_{2,N} \\ y_{3,N} \\ y_{4,N} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \varkappa_{13} & \varkappa_{14} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} & \varkappa_{24} \\ \varkappa_{31} & \varkappa_{32} & \varkappa_{33} & \varkappa_{34} \\ \varkappa_{41} & \varkappa_{42} & \varkappa_{43} & \varkappa_{44} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ y_{3,0} \\ y_{4,0} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{array} \right], \end{array} \right.$$

since $y_{1,0} = y_{2,0} = 0$. Therefore

$$(IV.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{1,N} = \varkappa_{13}y_{3,0} + \varkappa_{14}y_{4,0} + k_1, \\ y_{2,N} = \varkappa_{23}y_{3,0} + \varkappa_{24}y_{4,0} + k_2. \end{array} \right.$$

Since $y_{1,N} = y_{2,N} = 0$ and $y_{3,0} = u$, $y_{4,0} = v$, we have

$$(IV.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varkappa_{13}u + \varkappa_{14}v + k_1 = 0, \\ \varkappa_{23}u + \varkappa_{24}v + k_2 = 0. \end{array} \right.$$

System (IV.10) admits a unique solution if

$$(IV.11) \quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \varkappa_{13} & \varkappa_{14} \\ \varkappa_{23} & \varkappa_{24} \end{vmatrix} \neq 0.$$

In this case

$$(IV.12) \quad u = \frac{\begin{vmatrix} \varkappa_{14} & \varkappa_1 \\ \varkappa_{24} & \varkappa_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad v = \frac{\begin{vmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_{13} \\ \varkappa_2 & \varkappa_{14} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

and the boundary value problem (I.1) is completely solved using these values of u and v in the Eqs (II.2).

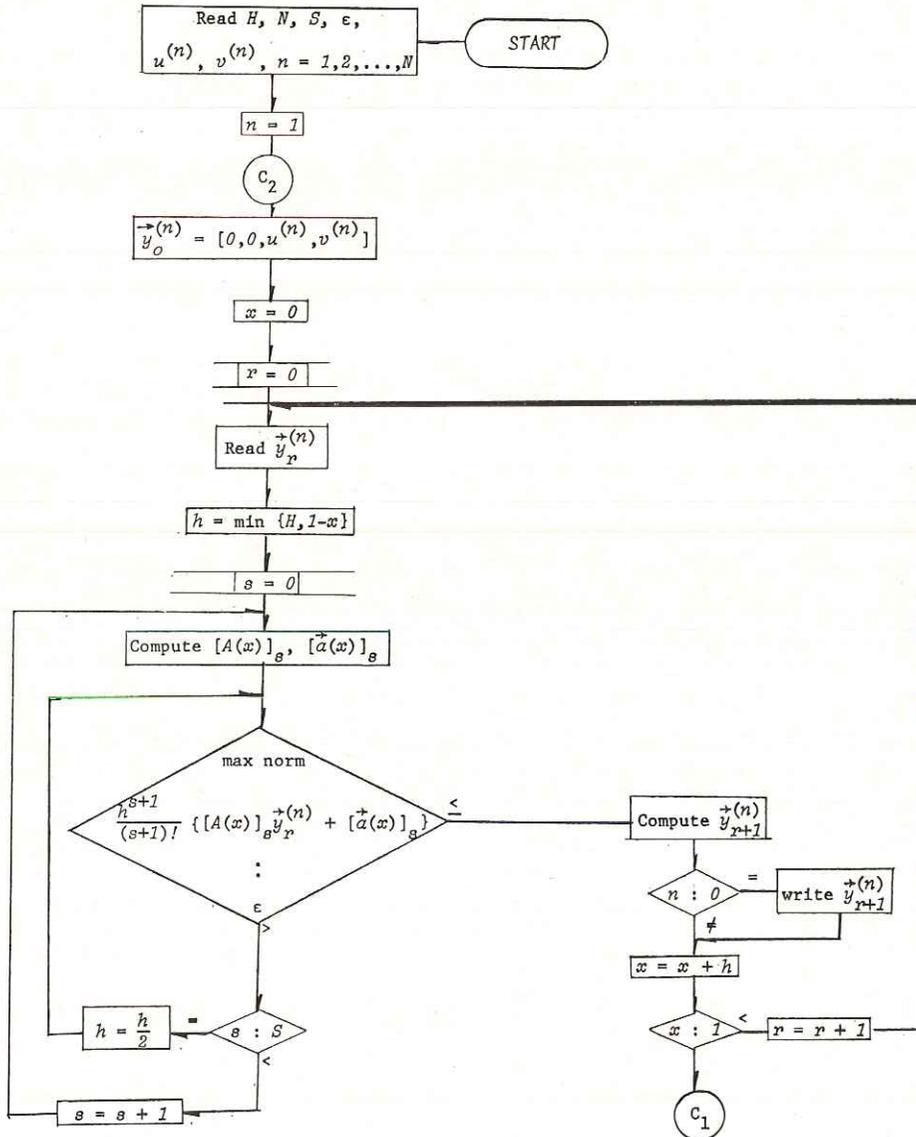
Clearly, if $\Delta = 0$, Eqs (IV.10) admit infinitely many solutions if

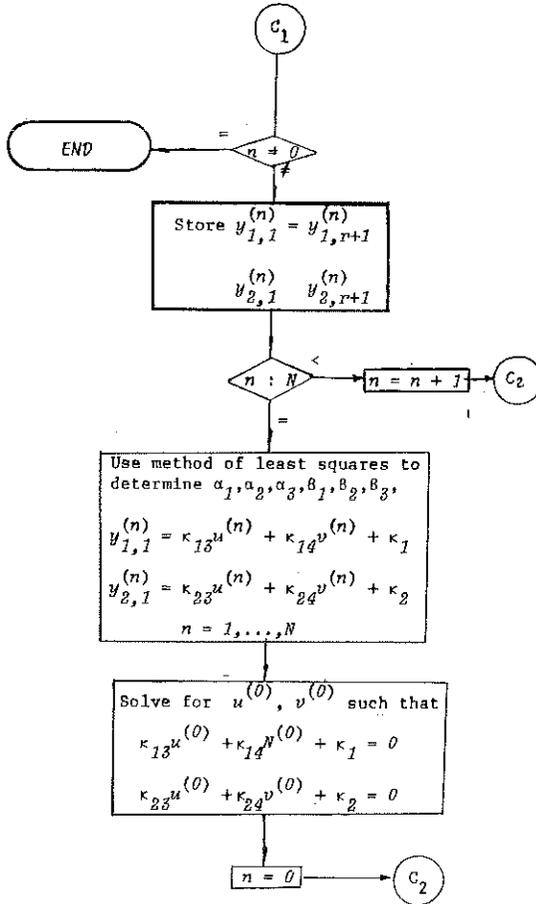
$$(IV.13) \quad \frac{\varkappa_{13}}{\varkappa_{23}} = \frac{\varkappa_{14}}{\varkappa_{24}} = \frac{k_1}{k_2}$$

Further, Eqs (IV.10) are not solvable if $\Delta = 0$ but Eqs (IV.13) do not hold. In this case the boundary value problem (I.1) has no solution.

V. The flowchart of the above described numerical scheme is given below. The program listings in FORTRAN language and computer simulations with illustrative examples based on certain realistic electrical networks will be presented in the next Note of this series.

Clearly, the numerical scheme presented in this paper can be used without any difficulty to the first order differential systems with $2n$ equations when n of the unknown functions are subjected two-point boundary conditions. It is proposed to expose the corresponding details in the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*.





REFERENCES

- [1] BOUNFIZKY E., J. Math., (6) 5 (1909), 65-125.
- [2] BOCHER M., Trans. Amer. Math. Soc., 14 (1913), 403-420.
- [3] BIRKHOFF, LANGER R. E., Proc. Amer. Acad. Sci., 58 (1923), 53-128.
- [4] BLISS G. A., Trans. Amer. Math. Soc., 28 (1926), 561-584.
- [5] CARMAN M. G., Amer. J. Math., 48 (1926), 169-182.
- [6] CLEMENTE O. P., Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. nat., (6) 16 (1932), 925-931.
- [7] DOOLE H. P., Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 439-446.
- [8] DOU A., Ecuaciones diferenciales ordinarias. Problema di Cauchy. Editorial Dossat, S. A., Madrid, 1964, XV, 259 p.
- [9] FOX L., Numerical Solutions of Ordinary and Partial Differential Equations. Oxford, Pergamon Press, 1962.
- [10] HIKOSAKA-NOBURU, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, (3) 11 (1929), 73-83.
- [11] HILB E., J. für Math., 140 (1911), 205-229.
- [12] INCE E. L., Ordinary Differential Equations. Dover Publ., 1944.

- [13] KRIVOSHEIN L. E., (Numerical integration of some ordinary integro-differential equations). In the volumes « *Issledovania po integro-differentsial'nyh uravneniam v Kirgizii* », Frunze, Akad. Nauk KirgSSR, I-IV, 1957-1967.
- [14] LANGER R. E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25** (1923), 155-172; **46** (1939), 151-190, 467.
- [15] MANGERON D., a) *Acad. Roum. Bull. Sect. Sci.*, **28** (1946), 349-350; b) *Gaz. Mat. Bucuresti*, **52** (1947), 207-212.
- [16] PICONE M., *Math. Z.*, **28** (1928), 526 and MAURO PICONE, in the volume « *Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notitia* », Pontificia Academia Scientiarum, Città del Vaticano, A. D. MCMLXX, 117-146.
- [17] PRETE F., *Rend. Ist. Lombardo*, (2) **63** (1930), 1115-1132.
- [18] REID W. I., *Amer. J. Math.*, **53** (1931), 443-459; *Trans. Amer. Math. Soc.*, **32** (1930), 284-318; **44** (1938), 508-521; **45** (1939), 414-419.
- [19] SCHUR A., *Math. Annalen*, **82** (1921), 213-236.
- [20] SNEIDER-LUDOVICI M. A., *Programmazioni di metodi per il Calcolo Numerico*, Editrice Veschi, Roma, 1971.
- [21] STONE M. H., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26** (1924), 335-355.
- [22] TAKAHASHI S., *Tohoku Math. J.*, **24** (1931), 249-256.
- [23] TOYODA K., *Tohoku Math. J.*, **39** (1934) 387-398.
- [24] WHYBURN W. M., *Annales of Math.*, (2) **28** (1927), 291-300.
- [25] ZAWISCHIA K., *Mh. für Math.*, **37** (1930), 103-124.

Numerical solution of a diffusion process with a time-lag concentration dependent diffusion coefficient *)

Nota di Mehmet Namik Oğuztöreli,¹⁾ Demetrio Mangeron²⁾
e Kin Vinh Leung,³⁾ presentata^{**)} dal Socio ordinario Mauro Picone

(Adunanza del 7 giugno 1973)

A MAURO PICONE nel 45° anniversario dei Suoi lavori sul « Calcolo approssimato nei problemi della Fisica Matematica ».

SUMMARY. — In this paper we deal with the numerical solution of a diffusion process with a time-lag concentration dependent diffusion coefficient considered in [1].

RIASSUNTO. — Gli AA. presentano in questa Nota la soluzione numerica del processo di diffusione, in cui il coefficiente di diffusione dipende dalla concentrazione di cui la variabile temporale è sottoposta ad un decalaggio.

I. In the present Note we deal with the numerical solution of a one-dimensional diffusion problem in a semi-infinite medium when the diffusion coefficient depends on the concentration by the equation

$$(1.1) \quad \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(C(x, t - \lambda)) \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right]$$

^{*}) This work was partly supported by the National Research Council of Canada under Grant NRC-A4345 through the University of Alberta.

^{**)} Nella seduta del 7 giugno 1973.

¹⁾ Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

²⁾ Polytechnic Institute of Jassy, Romania. At present: Department of Computer Science, Sir George Williams University, Montreal, Quebec, Canada.

The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta and to Sir George Williams University of Montreal for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics and the Department of Computer Science of these universities, respectively.

³⁾ Department of Computer Science, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

for $x, t > 0$, subject to the conditions

$$(I.2) \quad C(x, t) = F(x, t) \text{ for } 0 \leq x \leq a, \quad -\lambda \leq t \leq 0,$$

$$(I.3) \quad C(x, t) = U(t) \quad \text{for } x = 0, \quad 0 \leq t \leq b,$$

where x and a are the spatial and time variables, λ is a positive number, a and b are arbitrarily large positive numbers, $F(x, t)$ and $U(t)$ are given functions which are sufficiently smooth in their domains of definition, $C(x, t)$ denotes the concentration and $D(C)$ is the diffusion coefficient. We assume that the function $D(C)$ is continuously differentiable in C in a C -interval and $U(0) = F(0, 0)$.

Problem (I.1) - (I.3) with $a = b = \infty$, $F(x, t) \equiv F_0 = \text{const.}$, $U(t) \equiv U_0 = \text{const.}$, $0 \leq F_0 < U_0$ has been considered extensively by a large number of scientists in the case $\lambda = 0$. But only a few formal solutions have been obtained in certain special cases which satisfy the well known assumptions of Boltzmann. For relevant references we refer to [2] - [4].

However, in the case $\lambda > 0$, this problem can be solved at least theoretically without any major difficulty using the so-called successive continuations method in the forward direction in time. By this method the nonlinearity of Eq (I.1) reduces to a piecewise linearity. For details we refer to [1].

In the present work we deal with the numerical solution of (I.1) - (I.3) subject to the following additional condition:

$$(I.4) \quad C(x, t) = V(t) \text{ for } x = a, \quad 0 \leq t \leq b,$$

where $V(t)$ is a given sufficiently smooth function in $0 \leq t \leq b$ such that $V(0) = F(a, 0)$. The existence and uniqueness of the solution to Problem (I.1) - (I.4) can be demonstrated by a number of modifications in [1], the details of which will be presented in a separate paper.

The limitations on the variables x and t , $0 \leq x \leq a$ and $0 \leq t \leq b$ are imposed by the technical limitations of computers. Condition (I.4) provides a higher accuracy in the computations.

The numerical analysis presented in this Note can easily be expressed in the FORTRAN language. The associated flowchart is given at the end of the paper. In a forthcoming Note we shall investigate several important cases by computer simulations.

II. Let N be a sufficiently large positive integer. Put $h = \frac{a}{N}$ and $k = \frac{b}{N}$. We assume that $\lambda = Mk$, where M is a positive integer such that $M \ll N$. This can always be achieved by adjusting the number b conveniently.

We now subdivide the rectangles $R_0 \equiv \{0 \leq x \leq a, -\lambda \leq t \leq 0\}$ and $R_1 \equiv \{0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\}$ by the lines $x = rh, y = ks$ ($r = 1, 2, \dots, N-1$; $k = -M+1, -M+2, \dots, -2, -1$) and $r = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, N-1$, respectively. The node (rh, sk) will be denoted by $P_{r,s}$. The numerical value of a function $\varphi(x, t)$ at the node $P_{r,s}$ will be denoted by $\varphi_{r,s}$. We also write

$$(II.1) \quad \varphi_{r,s}^{(m,n)} = \left(-\frac{\partial^{m+n} \varphi}{\partial x^m \partial t^n} \right)_{r,s}, \quad \varphi_{r,s}^{(0,0)} = \varphi_{r,s}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Accordingly we have

$$(II.2) \quad C_{r,s}^{(0,1)} = D_{r,s-M}^{(1)} C_{r,s-M}^{(1,0)} C_{r,s}^{(1,0)} + D_{r,s-N} C_{r,s}^{(2,0)},$$

by virtue of Eq (I.1), where

$$(II.3) \quad D_{r,s}^{(i)} = \left(\frac{\partial^i D}{\partial C^i} \right)_{r,s}.$$

Combining Eq (II.2) with the following approximate formulas

$$(II.4) \quad \begin{aligned} C_{r,s}^{(0,1)} &\simeq \frac{C_{r,s+1} - C_{r,s-1}}{2k} - \frac{k^2}{6} C_{r,s}^{(0,3)}, \\ C_{r,s}^{(1,0)} &\simeq \frac{C_{r+1,s} - C_{r-1,s}}{2h} - \frac{h^2}{6} C_{r,s}^{(3,0)}, \\ C_{r,s}^{(2,0)} &\simeq \frac{C_{r+1,s} - 2C_{r,s} + C_{r-1,s}}{h^2} - \frac{h^2}{12} C_{r,s}^{(4,0)} \end{aligned}$$

we find the basic recurrence relationship

$$(II.5) \quad \begin{aligned} C_{r,s+1} &= \frac{k}{2h^2} D_{r,s-M}^{(1)} (C_{r+1,s-M} - C_{r-1,s-M}) (C_{r+1,s} - C_{r-1,s}) \\ &+ C_{r,s-1} + \frac{2k}{h^2} D_{r,s-M} (C_{r+1,s} - 2C_{r,s} + C_{r-1,s}) + O(h, k), \end{aligned}$$

where

$$(II.6) \quad O(h, k) = \frac{h^3}{3} C_{r,s}^{(0,3)} - \frac{hk}{6} D_{r,s-M}^{(1)} [C_{r,s}^{(3,0)} (C_{r+1,s-M} - C_{r-1,s-M}) \\ + C_{r,s-M}^{(3,0)} (C_{r+1,s} - C_{r-1,s})] - \frac{h^2 k}{6} D_{r,s-M} C_{r,s}^{(4,0)}.$$

By neglecting $O(h, k)$ we obtain an explicite 4 — level formula:

$$(II.7) \quad C_{r,s+1} = \frac{k}{2h^2} D_{r,s-M}^{(1)} (C_{r+1,r-M} - C_{r-1,s-M}) (C_{r+1,s} - C_{r-1,s}) + C_{r,s-1} \\ + \frac{2k}{h^2} D_{r,s-M} (C_{r+1,s} - 2C_{r,s} + C_{r-1,s}).$$

Applying successively to the levels $s = 0, 1, 2, \dots, N-1$ formula (II.7) varying r over the indices $1, 2, \dots, N-1$ at each level s , we obtain the nodal value $C_{r,s+1}$ at the node $P_{r,s+1}$, from six known or previously computed nodal values at nodes $P_{r,s}$, $P_{r+1,s}$, $P_{r-1,s}$, $P_{r,s-1}$, $P_{r+1,s-M}$ and $P_{r-1,s-M}$.

III. A better approximation can be obtained by an iterative process as described below which requires the computation of certain nodal values outside the domains R_0 and R_1 .

First we compute $C_{-1,s}$ and $C_{N+1,s}$ ($s = -M, -M+1, \dots, -2, -1, 0$) by the Taylor series expansions of the given function $F(x, t)$ in R_0 :

$$(i) \quad C_{-1,s} = F_{0,s} - h F_{0,s}^{(1,0)} + \frac{h^2}{2!} F_{0,s}^{(2,0)} - \frac{h^3}{3!} F_{0,s}^{(3,0)} + \dots,$$

$$(ii) \quad C_{N+1,s} = F_{N,s} + h F_{N,s}^{(1,0)} + \frac{h^2}{2!} F_{N,s}^{(2,0)} + \frac{h^3}{3!} F_{N,s}^{(3,0)} + \dots,$$

for $s = -M, -M+1, \dots, -2, -1, 0$.

Next we compute $C_{0,N+1}$ and $C_{N,N+1}$ by the Taylor series expansions of the given functions $U(t)$ and $V(t)$:

$$(iii) \quad C_{0,N+1} = U_N + h U'_N + \frac{k^2}{2!} U''_N + \frac{k^3}{3!} U'''_N + \dots,$$

and

$$(iv) \quad C_{N,N+1} = V_N + k V'_N + \frac{k^2}{2!} V''_N + \frac{k^3}{3!} V'''_N + \dots,$$

where

$$U_N^{(n)} = \frac{d^n U}{d t^n} \Big|_{t=Nk} \quad \text{and} \quad V_N^{(n)} = \frac{d^n V}{d t^n} \Big|_{t=Nk}$$

Finally we apply six-points formula (II.7) to compute $C_{r,s}$ ($r = 1, 2, \dots, N-1$; $s = N+1, N+2$). Note that

$$(v) \quad C_{-1,s} = \frac{2 h^2}{k} \frac{C_{0,s+1} - C_{0,s-1} - \frac{k}{2 h^2} D_{0,s-M}^{(1)} (C_{1,s-M} - C_{1,s-M}) - \frac{2 k}{h^2} D_{0,s-M} (C_{1,s} - 2 C_{0,s})}{4 D_{0,s-M} - D_{0,s-M}^{(1)} (C_{1,s-M} - C_{1,s-M})}$$

and

$$(vi) \quad C_{N+1,s} = \frac{2 h^2}{k} \cdot \frac{C_{N,s+1} - C_{N,s-1} + \frac{k}{2 h^2} D_{N,s-M}^{(1)} (C_{N-1,s-M} - C_{N-1,s-M}) - \frac{2 k}{h^2} D_{N,s-M} (C_{N+1,s} - 2 C_{N,s})}{4 D_{N,s-M} + D_{N,s-M}^{(1)} (C_{N+1,s-M} - C_{N-1,s-M})}$$

for $s = 1, 2, \dots, N$.

Now, let ε be an arbitrarily given positive number. Then our iterative process starts with a set of nodal values obtained from the first application of (II.7) or from the previous iteration. As the second step we compute $C_{r,s}$, $C_{N+1,s}$ ($s = -M, -M+1, \dots, -2, -1, 0$). Then, as the third step, we compute $C_{r,s}$ ($r = 1, 2, \dots, N-1$; $s = N+1, N+2$). Next we compute $O(h, k)$ from (II.6) in which

$$(vii) \quad \begin{aligned} C_{r,s}^{(0,3)} &\simeq \frac{C_{r,s+2} - 2 C_{r,s+1} + 2 C_{r,s-1} - C_{r,s-2}}{2 h^3}, \\ C_{r,s}^{(3,0)} &\simeq \frac{C_{r+2,s} - 2 C_{r+1,s} + 2 C_{r-1,s} - C_{r-2,s}}{2 h^3}, \\ C_{r,s}^{(4,0)} &\simeq \frac{C_{r+2,s} - 4 C_{r+1,s} + 5 C_{r,s} - 4 C_{r-1,s} + C_{r-2,s}}{h^4}. \end{aligned}$$

Finally, as a sixth step, we compute new set of nodal values $C_{r,s+1}$ from (II.5).

We shall continue the above iterative process until

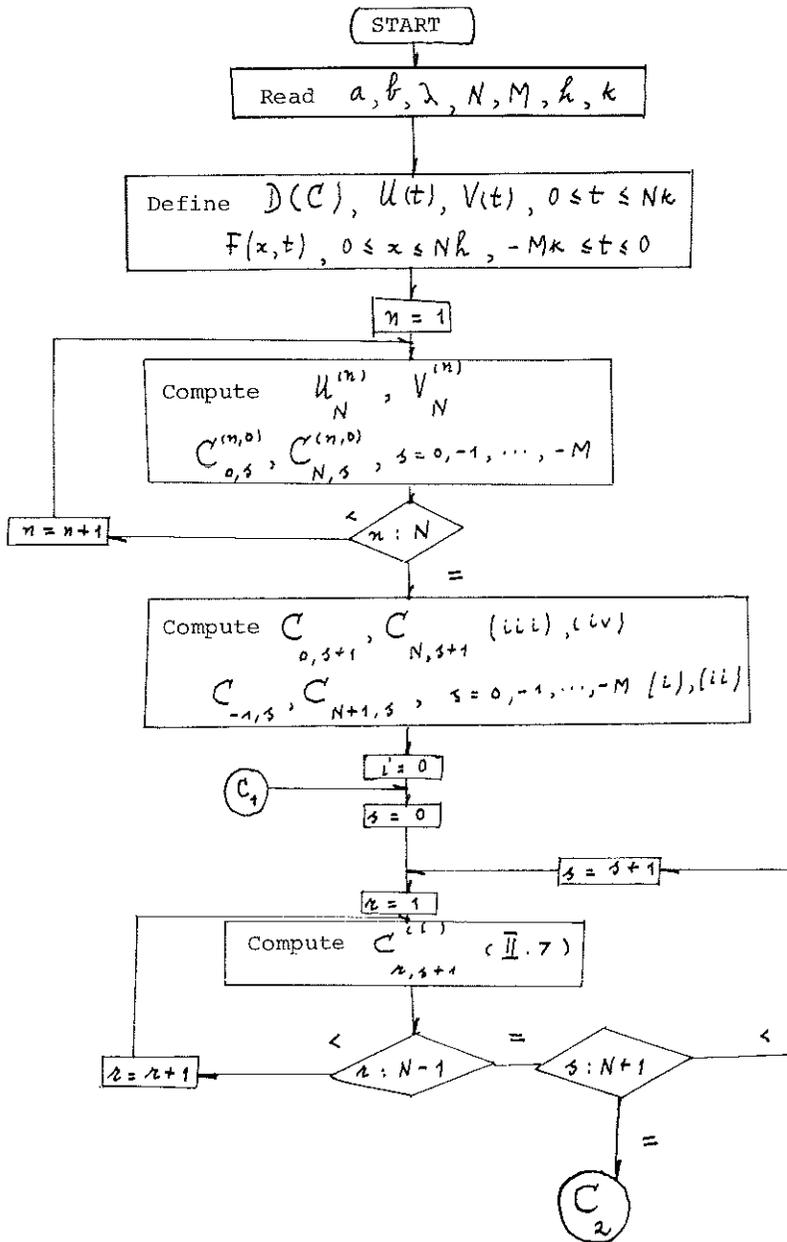
$$(viii) \quad |C_{r,s} \text{ (present iteration)} - C_{r,s} \text{ (previous iteration)}| < \varepsilon.$$

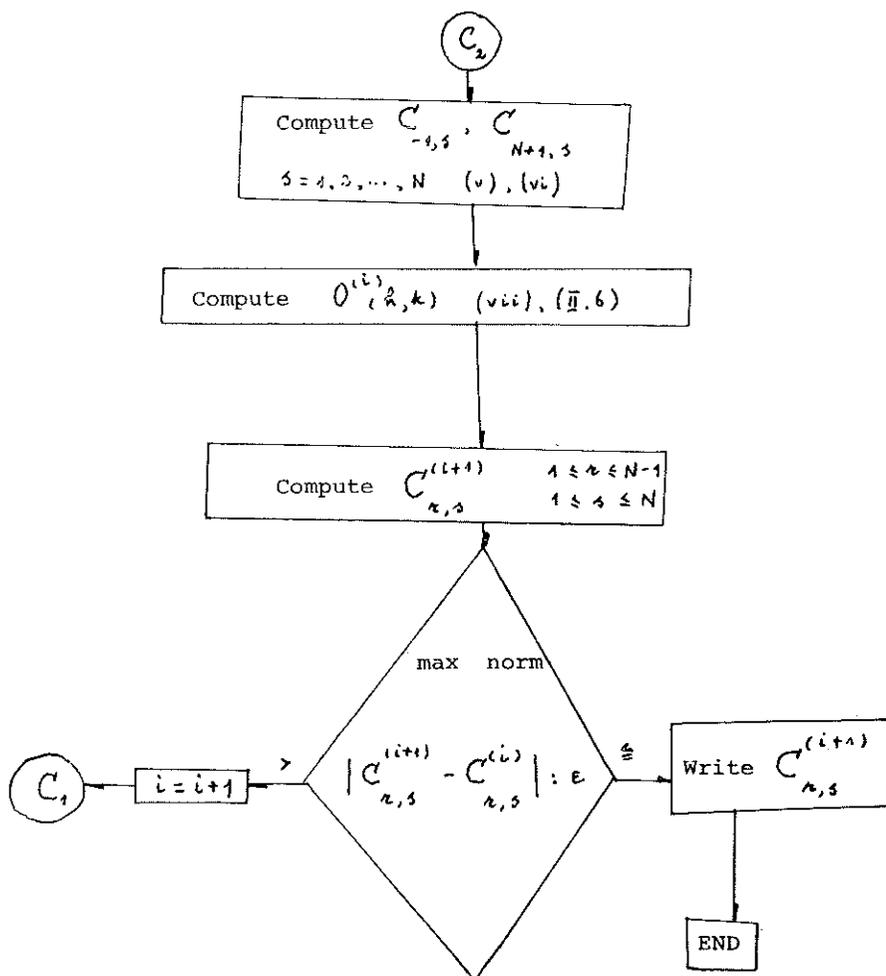
This completes the numerical construction of the solution of Problem (I.1) - (I.4).

Remarks. — 1. Various other interesting approaches concerning numerical solutions of partial differential systems are to be found in a set of very recent papers by M.N. Oguztoreli and K. V. Leung devoted to numerical solutions of different problems related with Mangeron's equations [6] as well as in the authors' paper on a Goursat problem considered by M. Picone [7] - [8].

2. A comparison between the numerical solution concerning a particular case of Eq (I.1) describing the process of gas absorption with a first order chemical reaction and large heat effect and the results obtained after conversion of this partial differential equations into differential difference equations which are solved recursively is to be found in [9], while related topics were worked out under Professor H. Stanley Heaps' scientific advice by D. P. Sullivan in his Thesis submitted to Nova Scotia Technical College [10].

FLOWCHART





REFERENCES

- [1] OGUZTORELI M. N. and LEE C. F., *On a diffusion problem with a time-lag concentration-dependent diffusion coefficient.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », Serie VIII^a, Vol. 50 (1971), pp. 100-103.
- [2] CRANK J., *The Mathematics of Diffusion.* Oxford, 1967.
- [3] CRANK J. and PARK G. S. (Ed.), *Diffusion in Polymers.* Academic Press, London and New York, 1968.
- [4] LEE C. F., *On the Mathematical Solutions of Some Nonlinear Diffusion Problems.* Ph. D. Thesis under Prof. M. N. Oguztoreli's scientific advice. University of Queensland, St. Lucia, Brisbane, Queensland, Australia.
- [5] OGUZTORELI M. N., *Time-Lag Control Systems.* Academic Press, London and New York, 1966.
- [6] LEUNG K. V. and OGUZTORELI M. N., a) *Numerical solution of a mixed problem for a polyvibrating equation of Mangeron* and b) *Numerical solution of a Darboux*

- problem for a polywave equation of Mangeron.* « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », Serie VIII^a, Vol. 54 (1973).
- [7] LEUNG K. V., MANGERON D. and OGUZTORELI M. N., *Numerical solutions of a Goursat problem considered by M. Picone.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », Serie VIII^a, 54 (1973).
- [8] PICONE MAURO, a) *La mia vita.* Ed. Tipografia Dott. Giovanni Bardi, Roma, 1972 and b) MAURO Picone in the volume « *Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notitia* ». Pontificia Academia Scientiarum, Città del Vaticano, A. D. MCMLXX, pp. 117-146.
- [9] COOK A. E. and MOORE E., *Gas absorption with a first order chemical reaction and large heat effect.* Chemical Eng. Science, Vol. 27 (1972), pp. 605-613.
- [10] SULLIVAN D. P., *Thesis.* Nova Scotia Technical College, 1965.

Applicazione della regola di trascrizione alla dinamica relativa di una particella in Relatività generale *)

*Nota del prof. Renato Grassini
presentata dal socio ordinario Carlo Tolotti*

(Adunanza del 7 giugno 1973)

RIASSUNTO. — Si pone a fondamento della formulazione relativa della dinamica di una particella p in Relatività generale una regola di trascrizione (del tutto analoga a quella usata nella formulazione intrinseca) che, inteso il fluido di riferimento R come un continuo alla Cosserat, fornisce per un generico vettore di spazio un criterio geometrico di definizione della derivata temporale relativa utilizzando il trasporto misto di Fermi dei triedri di R lungo la traiettoria d'universo di p . In base a tale criterio si determinano, per la particella p , sia la velocità di evoluzione relativa dell'impulso e sia l'equazione relativa del moto.

SUMMARY. — At the base of the relative formulation, in general Relativity, of the dynamics of a particle p , a rule of transcription is set, quite analogous to the one used in the intrinsic formulation: in fact, considering the fluid of reference R as a Cosserat continuum, it affords for a general space-vector a geometrical criterion for the definition of the relative time derivative, using Fermi's mixed transport of R trihedrons along the world line of p . On this principle it is possible to state both the speed rate of the relative evolution of the momentum of the particle p and the relative equation of its motion.

1. INTRODUZIONE.

Della dinamica relativa di una particella in Relatività generale sono state date varie formulazioni, dovute a CATTANEO [1], [2], [3] e MOLLER [8], [9]. Esse differiscono fra loro essenzialmente per le diverse scelte dell'operatore differenziale di volta in volta adottato per definire la derivata temporale relativa dell'impulso \mathbf{p} della particella; di tali scelte, peraltro, non vengono indicate giustificazioni soddisfacenti. Ciò si può dire, in particolare,

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo nazionale di ricerca per la Fisica Matematica del C.N.R.

anche a proposito della formulazione [3], in cui CATTANEO fa uso di un operatore differenziale definito mediante la *connessione relativa*, introdotta da I. CATTANEO GASPARINI [5] in seguito ad uno studio di LEGRAND [7] sulle varietà a struttura quasi prodotto.

È notevole, tuttavia, la circostanza che per la formulazione [3] è possibile fornire un diverso procedimento deduttivo, basato su un principio guida della Relatività generale (la cosiddetta *regola di trascrizione*), come appunto mostro nel presente lavoro. Precisamente in esso pervengo alla formulazione [3], alquanto generalizzata, facendo uso di un operatore differenziale definito mediante il *trasporto misto di Fermi*, il cui significato cinematico è indicato in una mia precedente Nota [6] e la cui utilizzazione è giustificata dalle seguenti considerazioni.

E anzitutto, a mio parere, naturale porre a fondamento della formulazione relativa della legge del moto di una particella in Relatività generale la seguente *regola di trascrizione* (completamente analoga alla ben nota regola universalmente accolta per la formulazione intrinseca delle leggi fisiche in Relatività generale):

A) *L'equazione del moto di una particella valida in un riferimento inerziale della Relatività ristretta,*

$$\frac{d \mathbf{p}}{d T} = \mathbf{F},$$

si trascrive in un generico riferimento fluido della Relatività generale con la sola sostituzione formale

$$\frac{d}{d T} \longrightarrow \frac{d_{\mathbf{F}}}{d T},$$

dove l'operatore differenziale $\frac{d_{\mathbf{F}}}{d T}$ è definito accogliendo, localmente, in Relatività generale il medesimo criterio geometrico che definisce in Relatività ristretta la derivata ordinaria $\frac{d}{d T}$.

Va in proposito rilevato che:

1) l'operatore di derivazione temporale relativa di un vettore di spazio \mathbf{u} (variabile lungo la traiettoria d'universo, nello spazio-tempo V_4 , d'una particella p) rimane definito non appena si sia assunto un criterio per la descrizione dell'evoluzione relativa di \mathbf{u} ;

2) una corretta posizione del problema dell'evoluzione induce a ritenere, come ho messo in evidenza nella Nota [6], che un fluido di riferimento R debba più propriamente essere inteso come un *continuo alla Cosserat*, ai cui triedri, ortogonali monometrici ed opportunamente orientati, va rapportata l'evoluzione di \mathbf{u} , che pertanto dipende dal criterio di scelta dell'orientamento di tali triedri;

3) nella Relatività ristretta i triedri di un riferimento inerziale vengono scelti in maniera tale che essi appaiano non ruotati l'uno rispetto all'altro;

4) l'accoglimento, in forma locale, in Relatività generale del criterio 3) implica che i triedri del fluido di riferimento R, interessati al moto di p , vengano scelti in maniera tale che i relativi sistemi inerziali propri risultino legati da una successione di trasformazioni infinitesime di Lorentz senza rotazione.

Come ho dimostrato in [6], i triedri di R scelti in conformità a 4) sono rappresentati geometricamente in V_4 da terne ortonormali di vettori di spazio determinanti lungo la traiettoria d'universo di p un trasporto misto di Fermi. Onde il criterio geometrico di definizione dell'operatore $\frac{d_F}{dT}$ derivante dalla regola di trascrizione può esprimersi al seguente modo:

B) *L'operatore di derivazione temporale relativa $\frac{d_F}{dT}$ va valutato intendendo orientati i triedri di R interessati al moto di p in modo che le terne ortonormali di vettori di spazio che li rappresentano in V_4 determinino un trasporto misto di Fermi lungo la traiettoria d'universo di p .*

Da tale criterio nel n. 3, dopo aver premesso al n. 2 alcune precisazioni sulla nozione di vettore di spazio, deduco la definizione di *velocità di evoluzione relativa* $\frac{d_F \mathbf{u}}{dT}$ del *vettore di spazio* \mathbf{u} , mostrando che questa coincide con la *derivata relativa* di \mathbf{u} adoperata da CATTANEO in [3]. In particolare nel n. 4 valuto la velocità di evoluzione relativa $\frac{d_F \mathbf{p}}{dT}$ dell'impulso di una particella, in base alla quale pervengo poi al n. 5 alla formulazione esplicita delle equazioni relative del moto e della energia per una qualunque particella di prova. Nel caso di particelle libere (cioè aventi traiettorie d'universo geodetiche) le suddette equazioni risultano coincidenti con quelle cui perviene CATTANEO in [3].

Rileverò infine che la formulazione [3], di cui ho qui dato una giustificazione basata sulla regola di trascrizione, è altresì da preferirsi alle altre formulazioni proposte in [1], [2], [8], [9], anche per alcuni aspetti delle

conseguenti definizioni di campo gravitazionale relativo che illustrerò in un prossimo lavoro.

2. PRECISAZIONI SULLA NOZIONE DI VETTORE DI SPAZIO.

Un riferimento fisico è da pensarsi costituito da un sistema continuo alla Cosserat R , alle cui particelle sono associati orologi per le misure locali di intervalli elementari di tempo.

Le particelle di R sono rappresentate in V_4 ¹⁾ da una congruenza Γ di curve (del genere tempo), individuata dal campo Υ dei vettori unitari tangenti. Questo induce su V_4 una struttura quasi prodotto ²⁾ mediante la decomposizione $T_x = \Sigma_x \oplus \Theta_x$ (dove T_x è lo spazio vettoriale tangente in $x \in V_4$, Θ_x e Σ_x sono i sottospazi parallelo e ortogonale a Υ) da cui si ricavano i cosiddetti operatori di proiezione temporale ($\mathfrak{S}_\Theta \equiv -\gamma_i \gamma_j$) e spaziale ($\mathfrak{S}_\Sigma \equiv \gamma_{ij} \equiv g_{ij} + \gamma_i \gamma_j$).

I triedri di R sono rappresentati in V_4 da basi ortonormali (\mathbf{e}_a) dei sottospazi Σ_x , interpretati usualmente come piattaforme spaziali relative ad R ³⁾.

A proposito di tale interpretazione, osserverò che, a mio giudizio, è corretto dire *vettore di spazio relativo ad R* ogni vettore $d\mathbf{x}$ di V_4 che connetta eventi simultanei rispetto ad R ; con ciò la rappresentazione in V_4 delle grandezze vettoriali di spazio relative ad un riferimento risulta univocamente determinata dal criterio ivi adoperato per la misura del tempo. Se ne deduce che, affinché i sottospazi Σ_x possano riguardarsi, in relazione ad R , quali piattaforme spaziali, occorre e basta che l'intervallo elementare di tempo sia definito in R in modo tale da annullarsi in corrispondenza di tutte e sole le coppie di eventi connessi da vettori $d\mathbf{x}$ ortogonali a Υ . La definizione più spontanea viene ad essere allora quella, proposta da CARTANEO ⁴⁾, di *intervallo di tempo standard*

$$dT = -\frac{1}{c} \gamma_i dx^i,$$

che, insieme al tensore metrico γ_{ij} indotto sulle piattaforme Σ_x dalla struttura riemanniana di V_4 , equivale ad assumere che le misure locali di tempi e lunghezze effettuate in R coincidano con quelle effettuate dai sistemi inerziali propri delle particelle di R .

¹⁾ Varietà riemanniana ($ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$) di segnatura $(+, +, +, -)$.

²⁾ Cfr. [7], p. 1335.

³⁾ Cfr. [4], p. 363.

⁴⁾ Cfr. [1], p. 330.

È opportuno per il seguito ricordare, infine, che dall'intervallo di tempo standard dT , pur non derivando un tempo pantopico, deriva tuttavia un parametro T lungo la traiettoria d'universo della generica particella.

3. VELOCITÀ DI EVOLUZIONE RELATIVA DI UN VETTORE DI SPAZIO.

Sia $\mathbf{u} = \mathbf{u}(T)$ un campo vettoriale di spazio, definito sulla traiettoria d'universo l di una particella p .

Per descrivere l'evoluzione, in rapporto al tempo standard, del vettore \mathbf{u} rispetto al continuo alla Cosserat R (cioè rispetto ai successivi triedri solidali alle particelle p_0 di R su cui p viene via via a sovrapporsi) occorre innanzitutto prefissare un criterio per l'orientamento di detti triedri.

A tale proposito adottato il criterio B) del n. 1, derivante dalla regola di trascrizione A), il quale utilizza terne ortonormali $(\mathbf{e}_{\alpha'})$ soddisfacenti lungo l le equazioni che definiscono il trasporto misto di Fermi di un vettore di spazio:

$$(3.1) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma} \left(\frac{d\mathbf{e}_{\alpha'}}{dT} \right) = 0$$

(dove $\frac{d\mathbf{e}_{\alpha'}}{dT} \equiv \left(\frac{\nabla e^i_{\alpha'}}{dT} \right)$ denota la derivazione assoluta definita dalla connessione riemanniana di V_4).

Ne segue che il vettore \mathbf{u} è da ritenersi costante rispetto ad R se tale appare ai triedri in V_4 da terne $(\mathbf{e}_{\alpha'})$ del tipo (3.1); posto:

$$(3.2) \quad \mathbf{u} = u^{\alpha'} \mathbf{e}_{\alpha'} \quad ,$$

la suddetta circostanza è espressa dalle equazioni $\frac{du^{\alpha'}}{dT} = 0$; se il vettore \mathbf{u} non si conserva costante, le quantità non tutte nulle $\frac{du^{\alpha'}}{dT}$ descrivono le variazioni subite da \mathbf{u} nell'unità di tempo standard rispetto alle terne $(\mathbf{e}_{\alpha'})$ e quindi rispetto ad R .

Si osservi altresì che da (3.1), (3.2) si ricava

$$(3.3) \quad \mathfrak{S}_{\Sigma} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dT} \right) = \mathfrak{S}_{\Sigma} \left(\frac{du^{\alpha'}}{dT} \mathbf{e}_{\alpha'} + u^{\alpha'} \frac{d\mathbf{e}_{\alpha'}}{dT} \right) = \frac{du^{\alpha'}}{dT} \mathbf{e}_{\alpha'}.$$

Dalle considerazioni su esposte e dalla (3.3) si trae che la derivata

temporale di \mathbf{u} relativa ad R definita mediante il criterio B) è data dal vettore di spazio

$$(3.4) \quad \frac{d_F \mathbf{u}}{d T} \equiv \mathfrak{S}_\Sigma \left(\frac{d \mathbf{u}}{d T} \right);$$

la denoterò nel seguito col nome di *velocità di evoluzione relativa* di \mathbf{u} e l'indice F, che in essa figura, sta a ricordare l'utilizzazione, nella sua definizione, del trasporto misto di Fermi.

In particolare, se il riferimento R si riduce ad un riferimento inerziale della Relatività ristretta, nel qual caso è $d\boldsymbol{\gamma} = 0$, risulta

$$\frac{d_F \mathbf{u}}{d T} = \frac{d \mathbf{u}}{d T}.$$

Per definire una derivata temporale relativa, CATTANEO utilizza in [3] la cosiddetta *connessione relativa al riferimento*, definita nella varietà fibrata principale delle basi ortonormali $(\mathbf{e}_a, \boldsymbol{\gamma})$ adattata alla congruenza T e caratterizzata da una derivata covariante espressa (per campi vettoriali di spazio) da

$$(3.5) \quad \overset{\perp}{\nabla}_j u_i \equiv \mathfrak{S}_{\Sigma\Sigma} (\nabla_j u_i) + \mathfrak{S}_{\Theta\Sigma} (\nabla_j u_i);$$

da (3.5) si deduce la derivata relativa lungo l:

$$(3.6) \quad \frac{\overset{\perp}{d} u_i}{d T} = \frac{d x^j}{d T} \nabla_j u_i.$$

Dell'uso di tale connessione manca tuttavia in [3] una chiara giustificazione, sicchè lo spazio-tempo V_4 è ivi pensato munito di una struttura geometrica (associata a quella riemanniana) di cui però non è data alcuna interpretazione fisica.

In proposito osserverò che da (3.4) si ricava

$$\frac{d_F u_i}{d T} = \frac{d x^j}{d T} \mathfrak{S}_\Sigma (\nabla_j u_i) = \frac{d x^j}{d T} \left(\mathfrak{S}_{\Sigma\Sigma} (\nabla_j u_i) + \mathfrak{S}_{\Theta\Sigma} (\nabla_j u_i) \right)$$

e quindi, per (3.5) e (3.6),

$$(3.7) \quad \frac{d_F \mathbf{u}}{d T} = \frac{\overset{\perp}{d} \mathbf{u}}{d T}$$

La (3.7) mette in evidenza che il trasporto parallelo di un vettore di spazio lungo una curva definito dalla connessione relativa mediante l'equazione $\frac{\overset{\cdot}{d}\mathbf{u}}{d\Gamma} = 0$ coincide con il trasporto misto di Fermi. Onde l'adozione della connessione relativa, a cui si attiene CATTANEO, equivale al criterio B) derivante dalla regola di trascrizione A) da me adottata.

4. VELOCITÀ DI EVOLUZIONE RELATIVA DELL'IMPULSO DI UNA PARTICELLA.

In corrispondenza ad un riferimento fisico R, il 4-impulso \mathbf{P} d'una particella p di massa propria m_0 ,

$$P^i = m_0 \frac{dx^i}{d\tau} \quad ,$$

è suscettibile per la (2.1) della seguente decomposizione:

$$(4.1) \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{E}{c} \boldsymbol{\gamma} \quad ,$$

con

$$(4.2) \quad \mathbf{p} = \mathfrak{S}_\Sigma (\mathbf{P}) = m \mathbf{v}$$

$$(4.3) \quad E = -c \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P} = m c^2 \quad ,$$

dove si è posto

$$(4.4) \quad m = m_0 \frac{d\Gamma}{d\tau}$$

$$(4.5) \quad v^i = \mathfrak{S}_\Sigma \left(\frac{dx^i}{dT} \right) \quad .$$

Il vettore \mathbf{v} ha il significato di velocità relativa di p ; alle grandezze m , E , \mathbf{p} , si danno i nomi di massa, energia ed impulso relativi.

È facile provare che *alla velocità di evoluzione relativa dell'impulso \mathbf{p} compete la seguente espressione:*

$$(4.6) \quad \frac{d_{\mathbf{F}} \mathbf{p}}{dT} = \mathfrak{S}_\Sigma \left(\frac{d\mathbf{P}}{dT} \right) - m c \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dT} \quad .$$

A tale scopo, basta osservare che da (4.1) si deduce

$$(4.7) \quad \frac{d_{\mathbb{F}} p_i}{d T} = \mathfrak{S}_{\Sigma} \left(\frac{\nabla P_i}{d T} \right) - \mathfrak{S}_{\Sigma} \left(\frac{\nabla}{d T} \left(\frac{E}{c} \gamma_i \right) \right);$$

ricordando che è

$$\mathfrak{S}_{\Sigma} (\gamma_i) = 0, \quad \mathfrak{S}_{\Sigma} \left(\frac{\nabla \gamma_i}{d T} \right) = \frac{\nabla \gamma_i}{d T},$$

ed utilizzando (4.3), si ha

$$\mathfrak{S}_{\Sigma} \left(\frac{\nabla}{d T} \left(\frac{E}{c} \gamma_i \right) \right) = \frac{E}{c} \frac{\nabla \gamma_i}{d T} = m c \frac{\nabla \gamma_i}{d T};$$

conseguentemente la (4.7) risulta equivalente alla (4.6), che resta così dimostrata.

Dalla identità (4.6) si deduce la seguente espressione della derivata temporale dell'energia E:

$$(4.8) \quad \frac{dE}{dT} = \frac{d_{\mathbb{F}} \mathbf{p}}{dT} \cdot \mathbf{v}.$$

Infatti, da (4.6) si deduce

$$v^i \frac{d_{\mathbb{F}} p_i}{d T} = v^i \frac{\nabla P_i}{d T} - m c v^i \frac{\nabla \gamma_i}{d T},$$

ovvero, per (4.5),

$$v^i \frac{d_{\mathbb{F}} p_i}{d T} = \left(\frac{d x^i}{d T} - c \gamma^i \right) \frac{\nabla P_i}{d T} - m c v^i \frac{\nabla \gamma_i}{d T};$$

osservando che è

$$\frac{d x^i}{d T} \frac{\nabla P_i}{d T} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \gamma^i \frac{\nabla P_i}{d T} &= \gamma^i \left(\frac{\nabla p_i}{d T} + \frac{1}{c} \frac{d E}{d T} \gamma_i + \frac{E}{c} \frac{\nabla \gamma_i}{d T} \right) = \\ &= - m v^i \frac{\nabla \gamma_i}{d T} - \frac{1}{c} \frac{d E}{d T}, \end{aligned}$$

la (4.9) risulta equivalente alla (4.8), che resta così dimostrata.

5. FORMULAZIONE RELATIVA DELLA LEGGE DEL MOTO DI UNA PARTICELLA IN RELATIVITÀ GENERALE.

In conformità alla regola di trascrizione A) dirò *forza totale agente sulla particella p nel riferimento R* il vettore di spazio \mathbf{F} definito dall'eguaglianza

$$(5.1) \quad \mathbf{F} = \frac{d_{\mathbb{R}}\mathbf{p}}{dT} .$$

L'espressione (4.6) della velocità di evoluzione relativa dell'impulso \mathbf{p} fornisce i termini costituenti \mathbf{F} .

Posto

$$(5.2) \quad \Phi = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau}$$

$$(5.3) \quad \tilde{\mathbf{F}} = \frac{d\tau}{dT} \mathfrak{s}_{\Sigma}(\Phi)$$

$$(5.4) \quad \mathbf{G} = -c \frac{d\Upsilon}{dT} ,$$

si ha:

$$(5.5) \quad \mathbf{F} = m\mathbf{G} + \tilde{\mathbf{F}} .$$

La forza totale appare dunque generalmente costituita di due componenti: una forza $m\mathbf{G}$, espressa in termini delle caratteristiche cinematiche del continuo R (riassunte da tensore $\nabla_i \gamma_j$ che compare in (5.4)); una forza $\tilde{\mathbf{F}}$, espressa in termini di Φ (ovvero del vettore di curvatura della traiettoria d'universo di p).

Esse sono altresì suscettibili di naturali e significative interpretazioni fisiche, le quali, come mostrerò in un prossimo lavoro, inducono a ritenere che $m\mathbf{G}$ denoti il campo delle forze gravitazionali agenti su p in R (dove per \mathbf{G} il nome di *campo gravitazionale relativo*) ed $\tilde{\mathbf{F}}$ denoti il risultante degli altri eventuali campi di forza.

Ove, nel singolo problema dinamico, si consideri assegnata con postulato apposito la legge di forza $\tilde{\mathbf{F}}$ (o, equivalentemente, del campo vetto-

riale Φ), la (5.1) può evidentemente essere riguardata come l'equazione del moto di p in R :

$$(5.6) \quad \frac{d_{\mathbb{F}}\mathbf{p}}{dT} = m \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{F}} \quad .$$

Dall'equazione del moto si deduce, ricordando l'identità (4.8), l'equazione dell'energia:

$$(5.7) \quad \frac{dE}{dT} = (m \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{v} \quad .$$

Una particella di prova la dirò *libera* se la sua traiettoria d'universo è una geodetica (del genere tempo) di V_4 .

Da tale definizione segue che *condizione (necessaria e) sufficiente affinché una particella di prova p sia libera è che essa soddisfi durante il moto in un riferimento R l'equazione*

$$(5.8) \quad \frac{d_{\mathbb{F}}\mathbf{p}}{dT} = m \mathbf{G} \quad .$$

Infatti l'equazione (5.8) e l'equazione dell'energia che ne segue,

$$(5.9) \quad \frac{dE}{dT} = m \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} \quad ,$$

costituiscono rispettivamente le proiezioni spaziale e temporale dell'equazione delle geodetiche

$$(5.10) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dT} = 0 \quad ;$$

la (5.8) è dunque equivalente alla (5.10) e ciò dimostra l'asserto.

Da quanto ho osservato nel n. 4, segue evidentemente che la formulazione relativa (5.8), (5.9), (5.4) della dinamica di una particella libera non differisce dalla formulazione [3].

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. CATTANEO, *Nuovo Cimento*, vol. 10 (1958), p. 318.
- [2] C. CATTANEO, *Nuovo Cimento*, vol. 11 (1959), p. 733.
- [3] C. CATTANEO, *Comptes Rendus, Ac. Sc.*, vol. 256 (1963), p. 3974.
- [4] C. CATTANEO *Ann. di Mat.*, vol. 48 (1959), p. 361.
- [5] I. CATTANEO GASPARINI, *Comptes Rendus Ac. Sc.*, vol. 256 (1963), p. 2089.
- [6] R. GRASSINI, *Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Napoli*, vol. 38 (1971), p. 188.
- [7] G. LEGRAND, *Comptes Rendus Ac. Sc.*, vol. 242 (1956), p. 188.
- [8] C. MOLLER, *The Theory of Relativity*, Oxford (1962).
- [9] C. MOLLER, *The Theory of Relativity*, Oxford (1972).

**The effect of thyroidectomy and « in vivo » administration
of triiodothyronine on the leucine incorporation
into the cell proteins.**

*Nota dei proff. Isabella Trara Genoio e Teodoro De Leo
e dei dott. Maria Antonietta Manginelli e Sergio Di Meo
presentata dal socio ordinario Antonietta Orrù*

(Adunanza del 7 giugno 1973)

SUMMARY. — The Authors have studied the effect either of thyroidectomy or of the « in vivo » administration of triiodothyronine (T_3) on the leucine incorporation into the proteins of the main cytoplasmic fractions, when the labelled aminoacid was administered « in vivo » to male young rats.

The following results were obtained:

1) The time courses of incorporation of labelled leucine into the proteins of the main cytoplasmic fractions showed that such an incorporation goes on at high rate until the 30th minute after the isotope administration. The highest values of specific radioactivity were observed for the microsomal proteins, the lowest ones for the proteins of the cell sap and intermediate values for mitochondrial proteins. Thyroidectomy reduced the labelling to 30% for microsomal proteins and to 50% for cell sap and mitochondrial ones. T_3 administration restored or tended to restore the values of labelling to the normal ones.

2) The amount of radioactivity in the various mitochondrial protein fractions, prepared according to Beattie, was quite different: the structural protein exhibited the lowest values, while the other mitochondrial proteins had a specific radioactivity higher than the cell sap ones. These results suggest that at cytoribosome level the synthesis of proteins goes on at different rates for cell sap proteins and for mitochondrial ones; moreover among the last ones the structural protein is synthesized at the lowest rate. Thyroidectomy and T_3 administration affect the two systems synthesizing mitochondrial proteins differently (less markedly the system localized in mitochondria).

3) A « chase » with cold leucine showed that the labelling of structural protein exhibited the lowest decrease, suggesting that this protein is synthesized on mitochondria partially or totally.

4) The electrophoresis of the structural protein on polyacrylamide gel showed: a) thyroidectomy increased the amount of the migrating protein fractions and changed its percentage composition; b) T_3 administration tended to restore the pattern observed for the normal animals.

RIASSUNTO. — Gli Autori hanno studiato gli effetti della tiroidectomia e della somministrazione « in vivo » della triiodotironina (T_3) sull'incorporazione della leucina

nelle proteine delle principali frazioni citoplasmatiche, allorchè l'aminoacido marcato si somministra « in vivo » a ratti maschi giovani.

Furono ottenuti i seguenti risultati:

1) Le cinetiche di incorporazione della leucina marcata nelle proteine delle principali frazioni citoplasmatiche mostrarono che tale incorporazione procede ad elevata velocità fino al 30^{mo} minuto dalla somministrazione dell'isotopo. I valori più elevati della radioattività specifica furono osservati nel caso delle proteine microsomiali, i più bassi nel caso di quelle citoplasmatiche, mentre valori intermedi si ebbero per le proteine mitocondriali. La tiroidectomia ridusse l'incorporazione al 30% per le proteine microsomiali ed al 50% per quelle citoplasmatiche e mitocondriali. La somministrazione di T_3 ripristinò completamente o quasi i valori normali dell'incorporazione.

2) I livelli di radioattività delle varie frazioni proteiche mitocondriali, preparate secondo Beattie, erano notevolmente differenti: la proteina strutturale appariva sintetizzarsi alla più bassa velocità, mentre le altre esibivano una radioattività specifica più elevata di quella delle proteine citoplasmatiche. Questi risultati suggerivano che a livello dei citoribosomi la sintesi delle proteine procede a velocità differente a seconda che siano citoplasmatiche o mitocondriali e che inoltre, tra queste ultime, la proteina strutturale è sintetizzata a velocità più bassa. La tiroidectomia e la somministrazione di T_3 influenzano differentemente i due sistemi di sintesi delle proteine mitocondriali (meno marcatamente il sistema localizzato nei mitocondri).

3) Un « chase » con leucina non marcata mostrò che la radioattività della proteina strutturale subiva il più basso decremento, suggerendo che questa proteina è sintetizzata parzialmente o totalmente sui mitoribosomi.

4) L'elettroforesi su gel di poliacrilamide della proteina strutturale mostrò che: a) la tiroidectomia incrementava la quantità delle proteine migranti e modificava la loro composizione percentuale; b) la somministrazione di T_3 tendeva a ripristinare la situazione elettroforetica osservata nel caso degli animali normali.

I - INTRODUCTION.

It is well known that hormones regulate the metabolic activity and control normal growth and development in higher animals. Both the effects might be accounted for by a selective regulation of synthesis of cell proteins.

Many workers are singling out protein synthesis for particular attention in elucidating anabolic hormone action at cellular-molecular level [1]. A number of reports are indicating that T_4 and/or T_3 stimulate the incorporation of labelled aminoacids into proteins either *in vivo* or *in vitro* [2-8]. The recent Gordon et al's paper [8] emphasizes the necessity for caution in relating the *in vitro* thyroid hormone effects to physiological processes.

In studying the effects of anabolic hormones on the biogenesis of mitochondria [9-13], we became interested to investigate the influence of thyroidectomy and *in vivo* T_3 - administration on the mitochondrial protein synthesis *in vivo*. Experiments of labelled aminoacid incorporation into microsomal and cell sap proteins were performed by us for a suitable comparison.

Preliminary reports of the results referred to in this paper have been communicated [14-17].

2 - EXPERIMENTAL.

2-1 Chemical determination and methods.

All chemicals were analytical grade (SIGMA, MERK, PROLABO, BOEHRINGER). [^3H] L- Leucine (G) (Amersham), specific activity 440 $\mu\text{Ci}/\mu\text{M}$, purity > 99%, was used. *Proteins* were determined by the method of LOWRY [18], using, as standard, crystalline bovine serum albumin (SIGMA). *Glucose - 6 - phosphatase activity* was determined as reported previously [19]. *Cytochrome oxidase activity* was measured as follows: the suspensions of the different cell fractions (containing the cell fraction isolated from 1 g of wet liver in 100 ml 0.005 M phosphate buffer) were treated with TRITON X 100 (final concentration 0.1% at 0° C and for a suitable time; 0.05 ml of this mixture were added to 2 ml of 1.7×10^{-5} M reduced cytochrome C in 0.03 M phosphate buffer, pH 7.4, and the rate of decrease in extinction at 550 nm was determined according COOPERSTEIN and LAZAROW [20]. Cytochrome c oxidase specific activity was calculated as the decrease of the logarithm of the molar concentration of reduced cytochrome c for minute caused by a cell fraction isolated from 1 g of wet liver and added to one hundred milliliters cytochrome c solution. *Protein radioactivity* was measured according WANNEMACHER [21] in the liquid scintillation counter Mark I (Nuclear Chicago).

2-2 Animals.

Normal, thyroidectomized and thyroidectomized T_3 - treated male rats (Wistar strain) were used.

Thyroidectomy was performed surgically at the weaning (25 days of age); *T_3 treatment* was performed from the 40th to the 60th days of age (death of animals) by subcutaneous injections of 10 μg of T_3 /100 g body weight every second day.

Nutrition, controls and other treatments of animals were reported previously [22]. [^3H] L - Leucine (G) dissolved in 0.01 M pH 7.4 was injected intraperitoneally into the animals at the dose of 20 $\mu\text{Ci}/100$ g body weight, at 8.00 a. m. In all experiments the isotope was injected at this time in order to avoid the changes of incorporation related to the circadian rhythm of protein biosynthesis [23-24].

2-3 Cell fractionation.

Livers were homogenized and nuclei removed as previously indicated [22]. Mitochondria, microsomes and cell sap were isolated from nuclear

supernatant by differential centrifugation; mitochondrial fraction was washed with 0.3 M sucrose - 0.05 M TRIS - HCl, pH 7.4, 0.02 M EDTA - 0.03 M nicotinamide. Mitochondrial water-soluble proteins and structural protein were isolated according BEATTIE e coll. [25].

3 - RESULTS.

3-1 *Dependence on the circulating thyroid hormone levels of the labelled leucine incorporation into proteins of the main cytoplasmic fractions.*

To ascertain the optimal time for studying the dependence on the levels of the circulating thyroid hormones of the labelled leucine incorporation into cytoplasmic proteins, we previously performed the relative time courses.

The incorporation of the labelled leucine into the microsomal proteins (see fig. 1-A for normal animals) went on at a high rate until the 30th minute after the isotope administration, and then at a lower rate for the next thirty minutes. This time course obviously results from the following phenomena: (a) the diffusion of the labelled leucine through the cell membrane; (b) the protein synthesis at cytoplasmatic polysome level; and (c) the release of the complete peptide chains from the polysomes.

The labelling of the cell sap proteins proceeded with the same qualitative time course; but, at each time considered, the amount of the labelling is much lower because the proteins of such a fraction are released from polysomes.

For the peculiar characteristics of our study, we used a mitochondrial fraction as pure as possible. Phase - contrast microscope observations showed the complete absence of nuclei, nuclear fragments and other organelles. The glucose-6-phosphatase activity of the preparation was 0.038 μ moles of Pi/minute/mg of mitochondrial proteins, that is about the 2% of the microsomal one (about 2.0 μ moles of Pi/minute/mg microsomal proteins).

The labelling of mitochondrial proteins went on at a slower rate and its amount is intermediate between the microsomal and the cell sap ones. This suggests that: (a) at cytoribosome level the incorporation of labelled leucine into the proteins synthesized for mitochondria is higher than the one of the cell sap proteins; or (b) at mitoribosome level the incorporation is much higher than the one at cytoribosome level.

Thyroidectomy, performed at the age of 30 days, decreased the incorporation amount strongly (Fig. 1-B); for example at the 30th minute after the isotope administration (i. e. at the optimal time) the labelling amount was reduced to the 36% for microsomal proteins and to the 50% in the other two cases.

The administration of 10 μg of T_3 /100 g body weight/every second day, during the last twenty days before the experiments, tended to restore

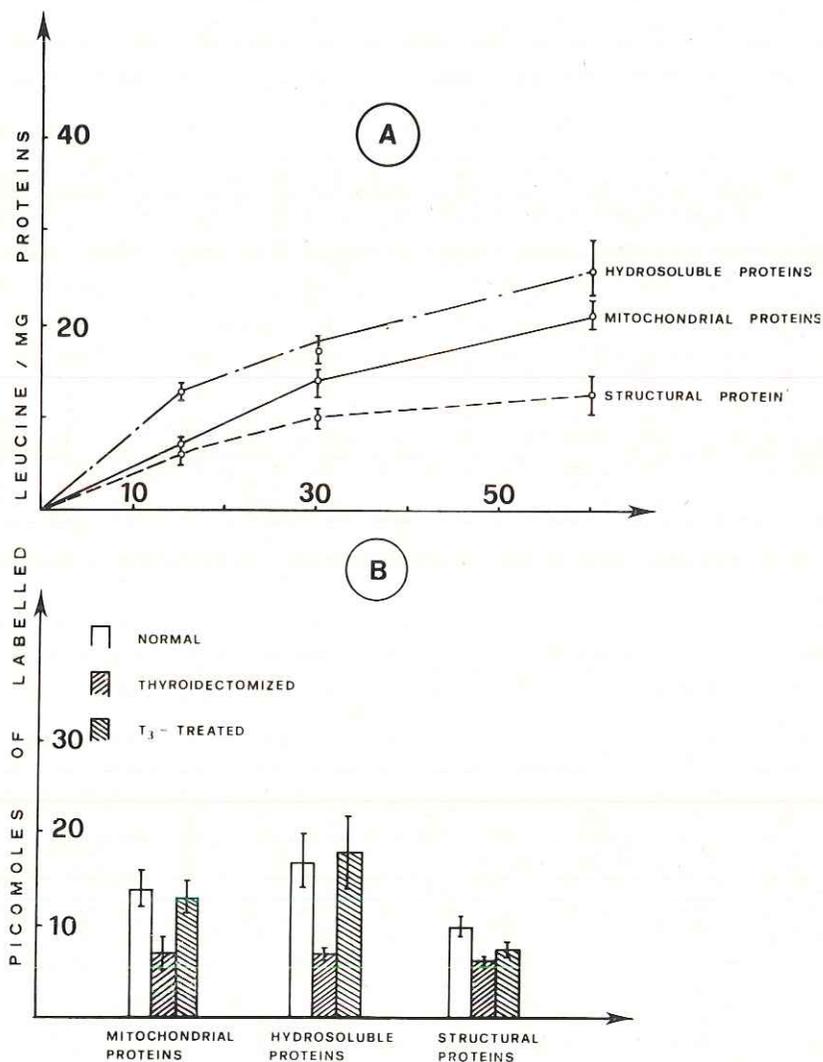


Fig. 1. — Incorporation of labelled leucine into the proteins of liver cell fractions. (A) Time course in normal rats. (B) Amount of incorporation in normal thyroidectomized and thyroidectomized and T_3 treated rats at 30th minute after isotope administration.

the values to the normal ones. In other words thyroidectomy changed the complex equilibrium on which, as we said above, the microsomal protein labelling is derived, affecting one or more factors of this equilibrium. T_3

administration led the equilibrium to the normal conditions. The lower decrease of the labelling of cell sap proteins induced by thyroidectomy and the higher increase induced by T_3 administration might be due to a thyroid hormone stimulation also of proteic catabolism. This hypothesis might be true also in the case of mitochondrial proteins; for the last ones we may also think that thyroid hormones affect differently the labelling either at cytoribosome level.

3-2 *Dependence on circulating thyroid hormone levels of the labelled leucine incorporation into the proteins of the mitochondrial fractions.*

To elucidate furtherly the hormonal dependence of mitochondrial protein synthesis, we fractionated the whole mitochondria proteins according the method of BEATTIE [25].

TABLE

Contribution of single protein radioactivity to whole mitochondria protein radioactivity.

After 30 minute from labelled leucine administration, the normal rats were killed and mitochondria were fractionated according the method of Beattie (25).

Mitochondrial fraction proteins	Specific activity (picomoles of leucine/mg protein (a))	Percentage amount of the fractions (b)	Radioactivity of whole fraction (picomoles of leucine) (a x b)
Whole mitochondria proteins	14 ± 2.5	100	
Hydrosoluble proteins	17.4 ± 2.8	44 ± 2 %	764
Cytocrome C	17.6 ± 2.3	10 ± 10 %	176
Contractile proteins	17.4 ± 2.2	5 ± 0.5 %	87
Structural proteins	9.0 ± 1.0	22 ± 1.0 %	198
		81 %	
Experimental recovery			1.225
Calculated recovery			1.134 (=81 x 14)

The values were the mean of four determinations.

The amount of radioactivity was quite different in the various mitochondrial protein fractions (Table and Figure 2-A). The structural protein, that is the fraction containing the protein synthesized « in situ », showed the lowest values. The other ones showed labelling values higher than those of hole mitochondria and, therefore, of cell sap proteins. These results

agree with the hypothesis that the labelling of whole mitochondria proteins, higher than the one of the cell sap proteins, might be due to a more intensive incorporation at cytoribosome level.

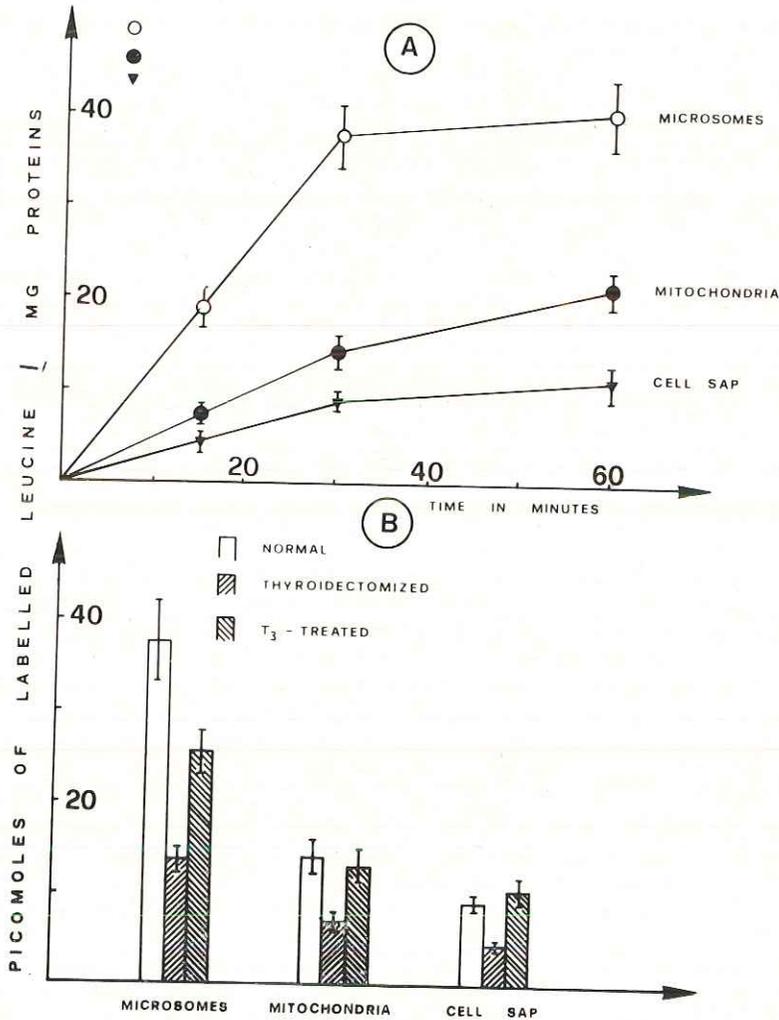


Fig. 2. — Incorporation of labelled leucine into the proteins of liver mitochondrial fractions. (A) Time course in normal rats. (B) Amount of incorporation in normal thyroidectomized and thyroidectomized and T₃ treated rats.

Thyroidectomy reduced the values of the radioactivity (measured at the 30th minute after isotope administration (see fig. 2-B3, at 38% for the hydrosoluble proteins and at 60% for the structural one). The administration of T₃ brought back (hydrosoluble proteins) or tended to bring back

(structural protein) the values of the radioactivity to the ones detectable in normal animals.

3-3 *Effect of the « chase » with unlabelled leucine on the labelling of the main cytoplasmic proteins.*

There is a lot of evidence [26] that mitochondrial DNA codes mainly for the 16 S and 12 S RNAs of mitoribosomes and an uncertain number of transfer RNAs. The remaining mitochondrial genoma should code for a small number of insoluble protein species, which are the essential part of the structure of the inner mitochondrial membrane. Isolated mitochondria incorporate labelled aminoacids exclusively into their insoluble proteins; such incorporation is not due to either microsomal or bacterial contamination [27-28]. Recently Stratman et al. [29] have suggested that the labelling of mitochondria « *in vitro* » may be due to an artifact, i. e. to a specific binding of labelled aminoacids to mitochondrial protein-lipid structure; but IBRAHIM et al. [30] have demonstrated again that mitochondrial protein synthesis « *in vitro* » is not an artifact. WORK [26] has shown that product of this synthesis is constituted at least of ten proteins with a molecular weights ranging from 14.000 to 50.000. More recently TZAGOLOFF and AKAI [31] have reported that the product of mitochondrial protein synthesis « *in vitro* » is soluble in chloroform-methanol and hence is proteolipids. In contrast KADENBACH and HADVARY [32] and BURK and BEATTIE [33] have reported that some but not all of proteins synthesized by rat liver mitochondria are proteolipids, as only the 15-33% of the total labelled protein could be extracted by chloroform-methanol. Furthermore KADENBACH and HADVARY [32] pointed out that two different protein synthesizing systems are located in mitochondria. Many attempts have been made to ascertain if the same mitochondrial synthetic process occurs in the intact cell; the mitochondrial genoma, indeed, might code for only « *in vitro* » or differently « *in vivo* » and « *in vitro* ». Such attempts were made generally by the use of specific inhibitors of cytoribosomal protein synthesis [34]. Unfortunately these inhibitors alter deeply the physiological status of animals, making the study of the hormonal influence difficult. For this reason we preferred to investigate on this problem by using the « chase » with labelled leucine.

The labelling of microsomal proteins was decreased to about 50% either half an hour or after one hour from the isotope administration after 15 minutes « chase » (fig. 3). A similar pattern was observed in the case of cell sap proteins. The labelling of whole mitochondrial proteins, viceversa, was decreased to about 70% and about 50%, after 15 and 45 minutes from the chase respectively. This last result depended on the lower decrease of the labelling detectable in the structural protein after the « chase »

(90% at the 15th minute and 67% at the 45th minute respectively). We explain these results thinking that the dilution of the endogenous mitochondrial « pool » of aminoacids occurred after the hyaloplasmatic « pool » dilution and the structural protein is synthesized partially or totally on mitoribosomes.

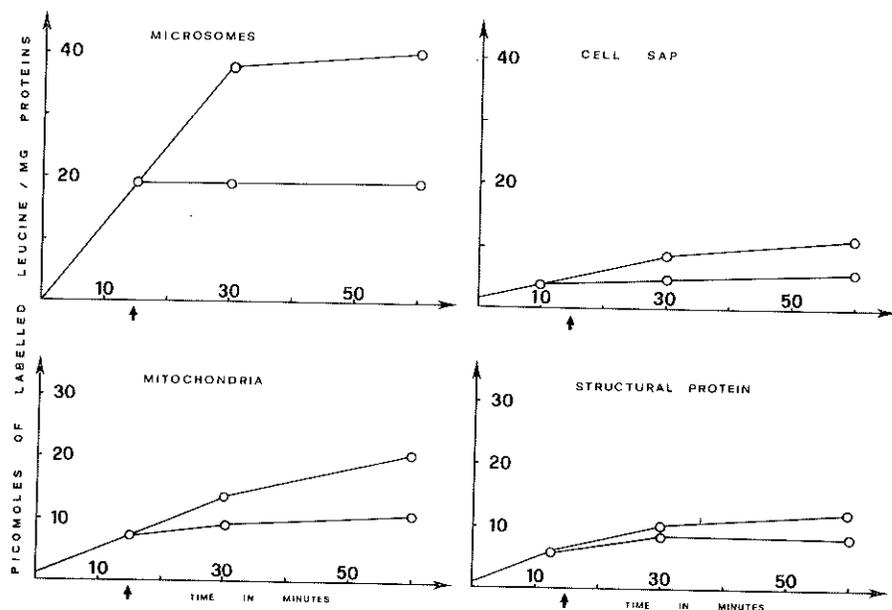


Fig. 3. — Effect of the « chase » on the incorporation of labelled leucine into the proteins of some cellular fractions and into the structural protein.

The arrow represents the time of the unlabelled leucine administration.

3-4 Influence of circulating thyroid hormone levels on the electrophoretic patterns of the structural protein.

When the mitochondrial structural protein from normal rats was electrophoresed on a 5% polyacrilamide gel, we observed (fig. 4) that it was not completely migrating. The migrating fraction was distributed in nine protein bands. We attempted to determine their molecular weights using RNase and DNase as markers (we could not use higher molecular weight markers successfully in our solubilizing medium). Five bands appeared to have molecular weights ranging between these two markers, the other higher values.

Thyroidectomy, while did not modify the number or the mobility of the protein bands, increased the amount of the migrating fraction and changed its percent composition; the percent values of the protein bands of highest molecular weights were enhanced. The T_3 administration tended to restore the pattern observed for the normal animals.

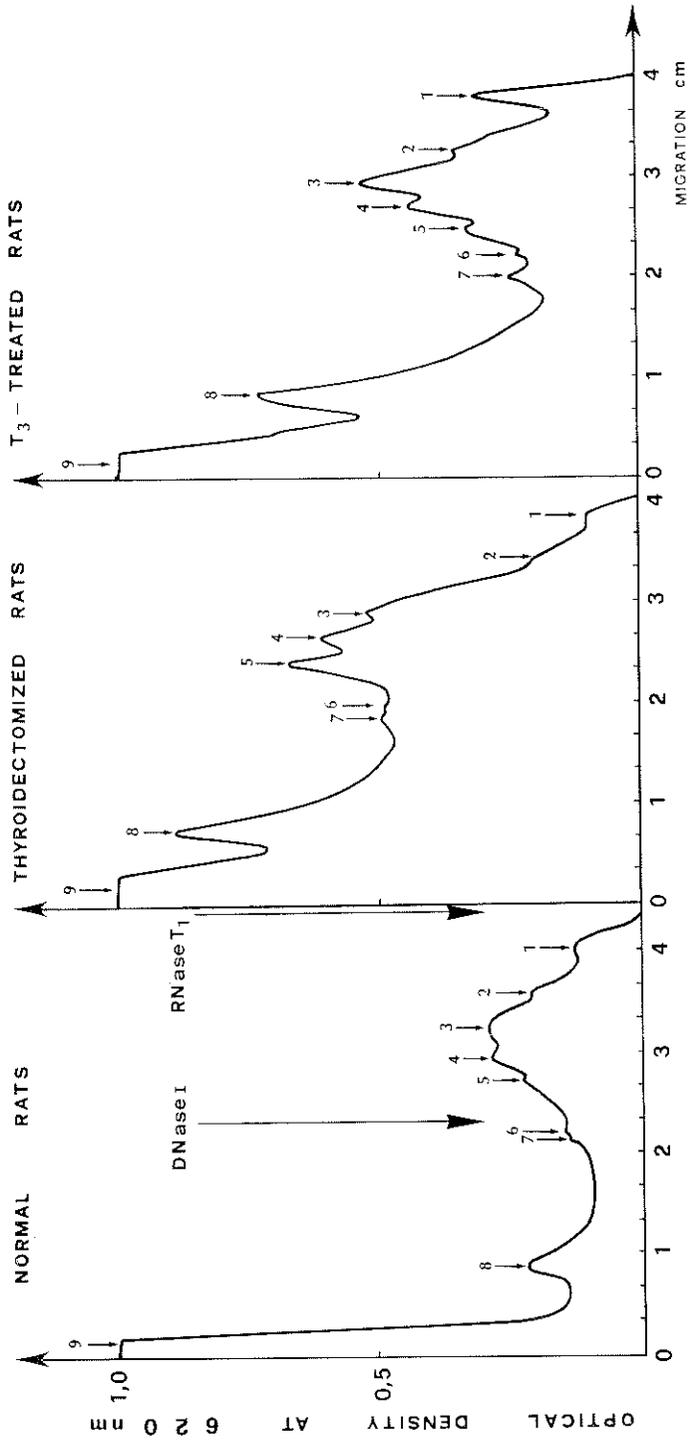


Fig. 4. — Densitometer tracings of fractions of mitochondrial structural protein.

Our interpretation is that thyroidectomy inhibited the synthesis either of the not migrating proteins or of the migrating protein bands of lower molecular weight. It seems also possible that thyroidectomy decreased the stability of higher (not migrating on polyacrylamide gel) molecular weight proteins in the solubilizing medium; these proteins were, therefore, fractionated in the bands of intermediate mobility which appeared in the case of electrophoresis of structural protein from thyroidectomized rats.

4 - DISCUSSION.

In this paper we refer to the effects of thyroidectomy and triiodothyronine administration to thyroidectomized rats on the rate of cytoplasmic protein synthesis.

Thyroidectomy performed on the rats as soon as possible (that is at weaning or a few days later), induces « hypophysectomy-like » conditions (13). The hypophyseal hormone levels become, indeed, very low in the pituitary and in the serum except for TSH which is present at a high concentration in the serum; an atrophy of the target glands also occurs (13). To date there is not a generally accepted explanation of such « hypophysectomy-like » state. However many theories have been postulated (13). T_3 or T_4 administration, at doses far below the ones required to normalize either the basal metabolic rate or the TSH circulating level, prevents or removes such « hypophysectomy-like condition » (13).

Therefore our investigation concerns the effects of the « hypophysectomy-like » state, induced by thyroidectomy, on the rate of the cytoplasmic protein synthesis. We used animals in the second month of life, when body weight gains are the highest possible (13).

Our results concerning the time courses of incorporation of labelled leucine into the cytoplasmic proteins show a very interesting pattern, we retain not yet observed by others: cell proteins are synthesized at quite different rates according either their site of synthesis (cytoribosomes or mitoribosomes) or their final cellular localization or the physiological status of the animals. The rate of incorporation, indeed, went on rapidly until the 30th minute after the isotope injection in all cases and was different for the microsomal proteins and for the mitochondrial structural one; the latter consists essentially of proteins synthesized in mitochondria as shown by our experiments of « pulse and chase ». Conversely the labelling of the cell sap proteins was lower than that of the mitochondrial soluble ones, although both are synthesized on cytoribosomes. Finally thyroidectomy decreased the labelling of proteins in all cases, but in different amounts. We observed, indeed, a reduction to 60% for the mitochondrial structural protein, to 50% for cell sap proteins and to 36-38% for microsomal and

mitochondrial hydrosoluble ones. We suggest that low levels of circulating thyroid hormones affect the synthesis of mitochondrial proteins in different way. The synthesis of the structural protein, which appear to be essential for the mitochondrial assemblage, is slightly affected by thyroidectomy, while the synthesis of the other proteins (hydrosoluble ones), which play an enzymatic role, is much more decreased.

Electrophoresis showed that the mitochondrial structural protein changed either in the amount of the migrating protein fractions or in its percentage composition owing to thyroidectomy. In other words the mitochondria of thyroidectomized rats appear to be poorer in their catalytic components than in their plastic ones; these last components appear to be modified.

We must eventually take into consideration that the modification in the rate of amino acids incorporation into cell proteins, induced by different thyroid hormonal conditions, can be also attributed either to biosynthesis rate modifications and or to changes the amino acid « pool » of the hepatic cells.

BRONK [35] and BUCHANAN *et al.* [5] reported thyroid hormones stimulate aminoacids incorporation into mitochondria of normal rat liver « *in vitro* »; more recently PRIMACK *et al.* [6] have shown that the stimulatory effect of thyroid hormones is due to a direct effect upon metabolism and not to their uncoupling activity. In addition BUCHANAN *et al.* [7] referred that an alteration in the specific activity of the precursor « pool » of leucine does not occur during « *in vitro* » incorporation, and stimulation of leucine incorporation by T_3 and/or T_4 appears to reflect an actual increase in the rate of protein synthesis. These data strongly suggest that thyroid hormones actually effect the structural protein synthesis at least following « *in vitro* » addition of hormones. However we cannot exclude that « *in vivo* » administration of T_3 and/or T_4 may alter the intramitochondrial amino acid pool.

For what concerns the modification of the hyaloplasmatic pool amino acids induced by by thyroid hormones, MOCHIZUKI and YA-PIN LEE [36] showed that thyroidectomy causes biphasic changes in hepatic glutamate concentration, that is an increase in the first ten days followed by a decrease. Normal rats fed on with thyroid or T_3 - treated showed an inverted bifasic change in hepatic glutamate concentration (a decrease followed by an increase). This suggests that variations in the hyaloplasmatic aminoacid « pool » influence to some extent the aminoacid incorporation at cytoribosomes level. On the other hand there is an indirect evidence that thyroidectomy is followed by a tendency of the cells to increase their amino acid intake. LONDON and SEGAL [37] referred to, indeed, that in thyroidectomized rats there is an increased rate of amino acids (and sugar) transport into the intestinal mucosal cells, likely caused by a modification of transport carriers. This effect is counteracted by treating the animals with thyroid hormones.

NESS et al. [38] referred that the plasma amino acid concentration was significantly decreased after thyroidectomy, while T_3 injection reported it near to normal values. Single amino acid analysis showed that the plasma concentration of amino-n-butirric acid, glutamic acid, glycine and alanine is in a good correlation with the thyroid hormone status of the rat.

A. MOCHIZUHI and YA-PIN LEE [39] observed that the glutamate concentration in the liver of thyroidectomized rat increased after T_3 administration and the maximal values were restored within 4 days. Conversely BUCHANAN et al. [7] pointed out an alteration of the mitochondrial precursor pool of leucine did not occur by the *in vitro* addition of T_3 , and stimulation of leucine incorporation into mitochondrial proteins appeared to reflect an actual increase in the rate of protein synthesis.

REFERENCES

- [1] TATA J. R. in *Biochemical Action of Hormones*, G. Litwack, E. Kritchewski editors, Academic Press (1970) N. Y.
- [2] TATA J. R. in *Progress in Nucleic Acid Research and Molecular Biology*, J. N. Davidson and Waldo E. Cohn editors, Academic Press (1966) N. Y. and L.
- [3] WOLFF E. C. and J. WOLFF *The Thyroid Gland*, Pitt-Rivers in R. and Trotter W. R. editors (1964).
- [4] ROODYN D. B., K. B. FREEMAN and J. R. TATA: *Biochem J.* **94** (1965) 628.
- [5] BUCHANAN J. and D. F. TAPLEY: *Endocrinology* **79** (1966) 81.
- [6] PRIMARCK M. P., J. L. BUCHANAN and D. F. TAPLEY: *Endocrinology* **87** (1970) 1355.
- [7] BUCHANAN J., M. P. PRIMARCK and D. F. TAPLEY: *Endocrinology* **87** (1970) 933.
- [8] GORDON A., MARTIN I. SURKS and J. H. OPPENHEIMER: *Acta endocrinologica* **72** (1973) 684.
- [9] DE LEO T., A. BARLETTA and S. DI MEO: *Life Sci.* **8** (1969) 747.
- [10] GADALETA M. N., A. BARLETTA, C. SACCONI and T. DE LEO: *Rass. Med. Sper.* **5-6** (1970) 146.
- [11] GROSS N. I.: *J. Cell. Biol.* **65** (1972) 612.
- [12] SCHIMMELFFENNIG G. K., M. SAUERBERGER and D. NEUBERT: *FEBS Lett.* **10** (1970) 269.
- [13] DE LEO T., G. MARTINO, A. BARLETTA: *Revd. Acc. Sci. Fis. Mat.* **40** (1973).
- [14] TRARA GENOINO I., T. DE LEO, M. A. MANGINELLI, M. R. CASTALDO and M. C. TAFURI: *Boll. Soc. It. Biol. Sper.* **45** (1969) 20 bis.
- [15] DE LEO T., I. TRARA GENOINO, M. R. CASTALDO, M. A. MANGINELLI and M. C. TAFURI: *Boll. Soc. It. Biol. Sper.* **45** (1969).
- [16] TRARA GENOINO I., T. DE LEO, M. R. CASTALDO, M. A. MANGINELLI and M. C. TAFURI: *Boll. Soc. It. Biol. Sper.* **46** (1970) 20 bis.
- [17] MANGINELLI M. A., I. TRARA GENOINO and T. DE LEO: *Boll. Soc. It. Biol. Sper.* **47** (1971) 20 bis.
- [18] LOWRY O. M., J. N. ROSENBOUGH, A. L. FARR and R. I. RANDALL: *J. Biol. Chem.* **193** (1951) 256.
- [19] DE LEO T., I. TRARA GENOINO and A. VISCIONE: *Acc. Sci. Fis. Mat.* **34** (1967) 92.
- [20] COOPERSTEIN S. J. and A. LAZAROW: *J. Biol. Chem.* **189** (1951) 665.

- [21] WANNEMACKER R. W., W. L. BRANKS and W. H. VUNNER: *Biochem* **11** (1956) 320.
- [22] DE LEO T., I. TRARA GENOINO, A. BARLETTA, S. DI MEO and M. C. TAFURI: *Acc. Sci. Fis. Mat.* **36** (1969) 126.
- [23] SCHEVING L. E., S. E. PAULY and TIEN HU TSAI: *Am. J. Physiol.* **215** (1968) 1096.
- [24] FISHMAN B., R. J. WURTMAN and H. N. MUNRO: *Proc. Natl. Acad. Sci. US* **64** (1969) 677.
- [25] BEATTIE D. S., R. E. BASFORD and S. B. KORITZ: *Biochemistry* **6** (1967) 2009.
- [26] COOTE J. L. and T. J. WORK: *Europ. J. Biochem.* **23** (1971) 564.
- [27] BEATTIE D. S., R. S. BASFORD and S. B. KORITZ: *J. Biol. Chem.* **242** (1967), 3366.
- [28] KROONN D. M., C. SACCONI and M. I. BOTMAN: *Biochim. Biophys. Acta* **142** (1967) 552.
- [29] STRATMAN P. W., R. N. ZAHLTEN, A. A. HOCHBERG and H. A. LARDY: *Biochemistry* **11** (1972) 3154.
- [30] IBRAHIM N. G., J. P. BURKE and D. S. BEATTIE, *FEBS Lett.* **29** (1973) 74.
- [31] TZAGOLOFF A. and D. AKAI: *J. Biol. Chem.* **247** (1972) 6517.
- [32] KADENBACH B. and P. HADVARY: *Eur. J. Biochem.* **32** (1973) 343.
- [33] BURKE J. P. and D. S. BEATTIE: *Biochem. Biophys. Res. Com.* **51** (1973) 349.
- [34] BEATTIE D. S.: *FEBS Lett.* **5** (1970) 232.
- [35] BRONK J. R.: *Nat. Acad. Sci. USA* **50** (1963) 254.
- [36] MOCHIZUKI A. and YA-PEEN LEE: *Endocrinology* **87** (1970) 816.
- [37] LONDON D. R. and S. SEGAL: *Endocrinology* **80** (1967) 623.
- [38] NESS G. C., TUNEKAZU TAKAHASHI and Y-PEEN LEE: *Endocrinology* **85** (1969) 1166.
- [39] MOCHIZUKI A. and YA-PEEN LEE: *Endocrinology* **87** (1970) 816

Possibile significato neuroendocrino dei neuroni aminergici dei lumbricidae. Considerazioni filogenetiche

(Adunanza del 7 giugno 1973)

Nota di Stefano Bianchi

presentata dal Socio ordinario Baldassarre de Lerma

RIASSUNIO. — I Neuroni « aminergici » del lombrico hanno probabilmente un ruolo neuroendocrino. Dal punto di vista filogenetico essi possono essere considerati uno stadio nella trasformazione di neuroni ordinari in cellule neurosecretrici.

SUMMARY. — The « aminergic » neurons of the earthworm are probably neurosecretory cells. They may be considered a stage in the transformation of a nerve cell into a neurosecretory one.

Nel sistema nervoso centrale di *Octolasion complanatum* (Lumbricidae) sono presenti neuroni « aminergici » (BIANCHI [1, 2, 3, 4, 5]). Tali neuroni sono così denominati, poichè contengono nel pirenoforo — ma non negli assoni e nelle terminazioni degli stessi — un secreto di tipo aminico, probabilmente 5-idrossitriptamina (cf. SCHARRER e WEITZMAN [6]). Tale secreto, oltre a mostrare una fluorescenza gialla su sezioni di materiale fissato in formalina al 10%, è colorabile con diversi tests istochimici che usualmente vengono adoperati per mettere in evidenza i granuli contenenti enteramina. Di questi tests il più significativo è la diazoreazione alla p-nitroanilina (cf. PEARSE [7]), con il quale il secreto in questione assume una colorazione rosso-arancio. La colorazione dei granuli permette di effettuare uno studio topografico dei neuroni in questione. Essi sono localizzati nel « cervello », nei gangli sottoesofagei e nei gangli della catena ventrale. Hanno dimensioni intermedie fra quella dei neuroni ordinari e quella delle classiche cellule neurosecretrici dei gangli, le cellule « peptidergiche » (cf. GABE [8], SCHARRER e WEITZMAN [6]). La loro forma è piriforme o tondeggiante con nucleo eccentrico e nucleoli ben distinti. I granuli sono diffusi uniformemente nel citoplasma basale o sono limitati alla regione periferica della cellula. Le cellule « aminergiche » sono elementi rari; esse possono trovarsi raggruppate o isolate. L'assone non contiene granuli secretori.

Studi al microscopio elettronico hanno ben identificato le cellule « aminergiche ». Esse si riconoscono per la presenza nel citoplasma di « vescicole neurosecretrici elementari » aventi un diametro di 800-1500 Å (OOSAKI [9]). Tali vescicole hanno un nucleo centrale opaco agli elettroni separato dalla membrana da uno spazio trasparente agli elettroni. Il nucleo centrale ha contorni irregolari ed è approssimativamente sferico. Tali vescicole sono simili alle vescicole descritte nelle cellule cromaffini della midollare del surrene dei Vertebrati.

L'ipotesi di alcuni AA. (cf. EHINGER ed al. [10]) di un ruolo della sostanza aminica presente nei neuroni in questione quale mediatore chimico, non è suffragata da dati di fatto obiettivi. La stessa veduta che le amine biogene siano dei mediatori chimici della trasmissione sinaptica manca di una dimostrazione diretta. Anzi studi endocrinologici indicano che le monoamine biogene sono implicate nella regolazione della ovulazione e di altre funzioni ghiandolari e ricerche farmacologiche, effettuate con l'impiego di droghe, stanno ad indicare che le monoamine biogene sono correlate al comportamento (KIRSHNER [11]). Il cospicuo accumulo di tali amine biogene nei pirenofori — il mediatore chimico è prodotto nel corpo cellulare ma poi si accumula nella parte terminale dell'assone — dei neuroni « aminergici » dei Lumbricidae deporrebbe — tenuto conto del valore funzionale di ormone, oltre che di mediatore chimico, che va riconosciuto alla 5-idrossitriptamina — a favore di un'interpretazione istofisiologica secondo cui potrebbe essere attribuito ai neuroni in questione un ruolo neurosecretorio. Dal punto di vista filogenetico la cellula « aminergica » può essere considerata come una cellula nervosa che ha acquisito secondariamente la capacità di produrre una secrezione in quantità che hanno le proporzioni di un processo neurosecretorio.

Se pensiamo che la produzione di un neuroumore di tipo aminico è una caratteristica di molti neuroni ordinari sia di Vertebrati che di Invertebrati, è facile concepire una derivazione diretta di un neurone « aminergico » da un neurone ordinario che elabora un mediatore chimico di tipo aminico.

Tale trasformazione è solo una questione di quantità, giacchè nel neurone « aminergico » si riscontra un'esaltazione del processo di produzione della secrezione aminica, esaltazione che permette di attribuire a tale neurone il probabile ruolo di cellula neurosecretrice.

Un esempio di trasformazione filogenetica di cellula nervosa ordinaria in cellula secretrice si riscontra nei Vertebrati. Tali cellule sono considerate come lo stadio finale nella trasformazione di neuroni ordinari in cellule neurosecretrici (SCHARRER [12]). Nel caso degli elementi cromaffini dei Vertebrati, il processo di trasformazione si è spinto avanti al punto che tali cellule hanno perso ogni caratteristica neuronale. Nei Lumbricidae invece

le caratteristiche neuronali, almeno nel senso morfologico, appaiono evidenti, ma al quadro morfologico se ne sovrappone uno istofisiologico che può far pensare ad un ruolo neuroendocrino del neurone « aminergico ».

Istituto di Zoologia dell'Università di Napoli.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BIANCHI S., *Sur la présence d'un matériel fluorescent dans les cellules nerveuses des ganglions ventraux de quelques Oligochètes. Recherches histochimiques et d'histospectrographie de fluoréscence*, Histochim. Suppl., 5, 8, 1960.
- [2] BIANCHI S., *Sur la présence d'un matériel fluorescent dans les cellules nerveuses des ganglions du système nerveux central de quelques Oligochètes. Recherches histochimiques et d'istospectrographie de fluoréscence*, Ann. Histochim. Suppl., 2, 143-146, 1962.
- [3] BIANCHI S., *Sulle cellule fluorescenti dei gangli nervosi di alcuni lumbricidae*, Riv. Istoch. Norm. Pat., 9, 555-570, 1963.
- [4] BIANCHI S., *Neurosecrezione e sostanze fenoliche nei gangli degli Anellidi. II. Ricerche sugli Oligocheti (Octolasion complanatum Dugès)*, Atti Soc. Peloritana Sc. Fis. Mat. Nat., 10, 327-336, 1964.
- [5] BIANCHI S., *The amine secreting neurons in the central nervous system of the earthworm (Octolasion complanatum) and their possible neurosecretory role*, Gen. Comp. Endocrinol., 9, 343-348, 1967.
- [6] SCHARRER B. e WEITZMAN M., *Current problems in invertebrate neurosecretion*, in *Aspects of neuroendocrinology* (W. Bargman e B. Scharrer, ed.), pp. 1-23, Springer Verlag, Berlin e New York.
- [7] PEARSE A. G. E., *Histochemistry*, III ed., vol. I, Churchill, Ltd, London, 1972.
- [8] GABE M., *Neurosecretion*, Pergamon, Oxford, 1966.
- [9] OOSAKI T., *Observations on the ultrastructure of nerve cells in the brain of the earthworm, Eisenia foetida, with special reference to neurosecretion*, Z. Zellforsch., 72, 534-542, 1966.
- [10] EHINGER B., FAYCK B. e MYHRBERG H. E., *Biogenic monoamines in Hirudo medicinalis*, Histochemie, 15, 140-149, 1968.
- [11] KIRSHNER N., *The function of the catecholamines in the brain*, Second Symposium on Parkinson's Disease, Suppl. to J. Neurosurgery, I, 165-172, 1966.
- [12] SCHARRER B., *Neurosekretion*, Handbuch d. mikroskopischen Anatomie des Menschen, Bd. 6, Tl. 5 (Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg), 1954.

Effects of thyroidectomy and « in vivo » administration of triiodothyronine on DNA synthesis by isolated mitochondria

*Nota dei Professori Teodoro De Leo ed Antonio Barletta
e del Dott. Guglielmo Martino
presentata dal socio Antonietta Orrù*

Adunanza del 7 giugno 1973

SUMMARY. — The authors have studied the variations of the incorporation of labelled deoxyribonucleosides triphosphates (dNTP's) into acid insoluble and acid hydrolyzable material by isolated liver mitochondria, obtained either from thyroidectomized young male rats or from animals of the same age thyroidectomized and then treated with triiodothyronine (T_3).

1) Preliminarily the A.A. chosen the experimental conditions allowing hormonal levels affect only the labelling of acid insoluble and acid hydrolyzable material, catalyzed by mitochondrial DNA polymerase. They demonstrated, successively, that: (a) extramitochondrial DNA, on which extramitochondrial DNA polymerase may act, was absent; (b) the mitochondrial permeability to dNTP's, the thymidine kinase activity, the energy supply and the nuclease activities were unaffected by hormonal conditions; (c) the bacterial contaminations contributes for only 1% to incorporation.

2) The characterization of incorporation product showed that: (a) such product was indeed DNA, as was DNAase degradable for 75%; (b) the labelled DNA was indeed mitochondrial DNA, as a 10 minutes preincubation with acriflavine or ethidium bromide (Eth. Br) inhibited the synthesis for 90%.

3) Studying the incorporation during the T_3 treatment of thyroidectomized rats (10 $\mu\text{g}/100$ g body weight every second day), it was observed firstly a sharp increase of incorporation (one day after the first administration) followed by a decrease (from the first to the third day), successively the incorporation amount was unchanged until the twelfth day.

4) Successively the A.A. demonstrated that T_3 doses used were thyreomimetic and well lower of the thyreotoxic ones.

5) The incorporation amounts decreased in normal animals with the age between the thirtieth and the 210th day.

RIASSUNTO. — Gli autori hanno studiato le variazioni dell'ammontare dell'incorporazione dei deossiribonucleosidi trifosfati (dNTP's) nel materiale acido-insolubile ed acido-idrolizzabile che avvengono nei mitocondri epatici, ottenuti o da ratti maschi giovani tiroidectomizzati o da animali di pari età tiroidectomizzati e poi trattati con triiodotironina (T_3).

1) Preliminarmente gli A.A. hanno scelto le condizioni sperimentali atte a far sì che i livelli ormonali influenzassero solo la marcatura del materiale acido-insolubile ed acido-idrolizzabile catalizzata dalla DNA polimerasi mitocondriale. Successivamente han-

no dimostrato che: (a) il DNA extramitochondriale (sul quale può agire la DNA polimerasi extramitochondriale) era assente; (b) la permeabilità mitocondriale ai dNTP's, l'attività della timidina chinasi, la fonte d'energia e le attività nucleasiche non erano influenzate dalle condizioni ormonali; (c) le contaminazioni batteriche contribuivano solo per l'1% all'incorporazione.

2) La caratterizzazione dei prodotti d'incorporazione ha mostrato che: (a) tale prodotto era davvero DNA, dato che era degradabile per il 75% dalla DNAasi; b) il DNA marcato era sicuramente DNA mitocondriale, dato che una preincubazione di 10 minuti con acriflavina o bromuro di etidio (Eth. Br) inibiva la sintesi per il 90%.

3) Studiando l'incorporazione durante il trattamento dei ratti tiroidectomizzati con T_3 (10 μ g/100 g peso corporeo a giorni alterni), s'è osservato dapprima un netto incremento dell'incorporazione (1 giorno dopo la prima somministrazione) seguita da una diminuzione (dal primo al terzo giorno) e successivamente l'entità dell'incorporazione rimaneva invariata (fino al 12° giorno).

4) Successivamente gli AA. hanno dimostrato che le dosi di T_3 adoperate erano tireomimetiche e ben più basse di quelle tireotossiche.

5) L'incorporazione decresceva negli animali normali con l'età fra il 30° e il 210° giorno.

I. - INTRODUCTION.

A lot of evidence about the dependence of mitochondrial DNA on cell physiological conditions, especially growth of tissues, is accumulating. We [1, 2] and HALDAR and WORK [3] showed (1969) that the administration of T_3 , a typical anabolic hormone, to thyroidectomized rats produced an early enhancement of mitochondrial DNA, followed by an increase of RNA. Successively (1970) we and SACCOE [4, 5, 6] demonstrated that such T_3 administration stimulated mitochondrial RNA-polymerase activity. All these results were confirmed (1970) by GROSS [7] and SCHIMMELPFENNIG et al. [8]. Meanwhile DNA synthesis by isolated mitochondria was showed by several workers: PARSON and SIMPSON [9] and MITRA and BERNSTEIN [10] in rat-liver, TER SCHEGGET, BORSI *et al.* in chicken-liver [11], WINTERSBERGER [12] in yeast.

These results suggested to us the idea of investigating also the effect of T_3 administration to thyroidectomized rats on mitochondrial DNA-polymerase activity. Preliminarily we demonstrated that in our experimental

*3 Symbols and abbreviations: T_3 = triiodothyronine; dNTP's = deoxyribonucleoside triphosphates (dATP, dGTP, dCTP and dTTP); PEP = phosphoenolpyruvate; PK = phosphoenolpyruvate kinase; Eth. Br. = Ethidium bromide; dCDP diglyceride = deoxy-cytidine diphosphate diglyceride; T_4 = tetraiodothyronine; TSH = thyrostimulating h.; GM = Growth h.; ACTH = Adrenocorticotrophic h.; FSH = Follicle stimulating h.; ICSH = Interstitial cells stimulating h.; MIT = monoiodo thyronine; DIT = diiodo thyronine; SDS = Sodium dodecyl sulphate. DEPC = Diethyl pyrocarbonate.

conditions, the amount of DNA synthesized by isolated mitochondria is catalyzed exclusively by mitochondrial DNA-polymerase. Variations of DNA labelling, indeed, might also be due to: (a) nuclear DNA-polymerases contaminating mitochondrial preparations; (b) modifications of mitochondrial membrane permeability to dNTP's; (c) mitochondrial thymidine-kinase; (d) mitochondrial ATP synthetizing systems and (e) mitochondrial and lysosomal nucleases and nucleoside triphosphatases; if these enzymatic activities are modified by circulating thyroid hormone levels, partially or wholly wrong results might be obtained. In this paper, therefore, we report: (a) the demonstration that DNA synthesis by isolated mitochondria in our experimental conditions is catalyzed exclusively by mitochondrial DNA-polymerase; (b) the effects of thyroidectomy or T_3 -treatment on the amount of DNA synthesized by isolated mitochondria and (c) the modification of the amount of DNA synthesized by isolated mitochondria during the growth of a normal animal.

Preliminary reports of these results have been communicated [13, 14].

2. - EXPERIMENTAL.

2-1 *Chemicals.*

All chemicals were analytical grade (Sigma, Merck, BDH, Baker). Pancreatic DNAase (E. C. 3. 1. 4. 5) and RNAase A (E. C. 3. 1. 4. 22), PEP, PK (E. C. 2. 7. 1. 40), dNTP's and yeast RNA were obtained from Boehringer, [$8\text{-}^3\text{H}$] dATP and [metil- ^3H] dTTP from Bio-Schwartz, T_3 and calf-thymus DNA from Sigma and Glucose-6-phosphate from Calbiochem.

2-2 *Animals.*

Male rats, Wistar strain, were used; at weaning they were divided into: (a) normal or control animals (N); (b) thyroidectomized animals (\bar{T}) and (c) thyroidectomized and triiodothyronine-treated animals (T_3).

Thyroidectomy (or better thyroparathyroidectomy) was performed surgically, as previously indicated [1, 2], at 25 days of age.

T_3 was dissolved in the minimum amount of 0.1 N NaOH and diluted to 0.01% (w/v) with 0.15 M NaCl, pH 7.5. Unless otherwise stated the dose was 10 μg of $T_3/100\text{g}$ body weight every second day; in all cases the hormone was injected subcutaneously.

All the animals were killed at 60 days of age (the T_3 - treated rats 24 hours after the hormone or the last hormone administration). In the case of \bar{T} and T_3 - treated rats, serial sections of the tracheal region were

made after necropsy and data about rats showing residues of thyroid tissues were not taken into consideration [16].

All the animals were fed the same standard diet (Mil-ratti, MORINI, S. Polo d'Enza, Reggio Emilia), normal in iodine (1 μg I⁻/g of diet), ad libitum; ambulation in the stabulation cages was considerable, so as to avoid thyroid metabolism modifications due to the restriction of physical activity [69].

The \bar{T} - and T_3 - rats drank a solution containing 1g of vitamine C, 0.625g of CaCO_3 , 300 U. I. of vitamine D and 15mg of vitamine B₆/liter (*) instead of water.

The rats were stabulated in a room kept at the constant temperature of 24 °C: the absence of thermal modification in the environment reduces or avoids activity modifications of the thyroid, due to endocrine system response to cold or warm. Furthermore the rooms were lighted constantly from 8 a.m. to 8 p.m.

2-3 Mitochondrial preparations

The rats, starved overnight, were killed by decapitation between 9 and 10 a.m.; the livers were removed under sterile conditions [1, 2] and chilled in cold sterile Krebs-Ringer solution, pH 7.4.

All subsequent steps were performed at 0÷4°C° using sterile solutions and sterile glass-equipment. Each liver was washed with Krebs-Ringer solution several times, blotted dry, weighed and cut into small pieces in the same liquid, and, finally, homogenized with 0.3 M sucrose, 0.5mM EDTA 20mM TRIS-HCl, pH 7.4 (1g liver/10ml of medium).

The following mitochondrial fractions were prepared:

a) *Mitochondria type I*: after removal of nuclear fraction by centrifugation at 1,000 x g x 10 minutes, mitochondria were obtained by a centrifugation at 5,000 x g x 10 minutes and washed with the homogenization medium twice.

b) *Mitochondria type II*: mitochondria type I were incubated for 40 minutes at 4÷6°C in Sucrose - EDTA - TRIS-HCl, pH 7.4, containing 20 $\mu\text{g}/\text{ml}$ of pancreatic DNase I (mitochondria obtained from 1 g liver/5 ml of medium); the fraction, isolated by a centrifugation at 5,000 x g x 10 minutes, as washed with Sucrose - EDTA - TRIS-HCl once.

c) *Mitochondria type III*: 1 ml of suspension mitochondria type II in 0.25 M Sucrose - EDTA - TRIS - HCl was mixed with 2.25 ml of 2.4 M Sucrose-0.5 mM EDTA-20 mM TRIS-HCl, pH 7.4 (final concentration of Sucrose = 1.76); about 3÷4 ml of homogenization medium were carefully stratified above the 3.25 ml and centrifuged at 83,700 x g x 90 minutes;

*) Calcidon, Roche, Milano.

the pellet located at the 0.25M - 1.76M sucrose interfacie was carefully removed.

d) *Mitochondria type IV*: mitochondria type II were incubated at 30 °C for 15 minutes with 0.1M phosphate buffer, pH 7.4, (1 mg of mitochondrial protein/0.15ml of buffer) and finally isolated by a 6,000 x g x 10 minutes centrifugation.

All mitochondrial preparations were suspended in 0.25M sucrose, 20mM Tris-HCl pH 7.4.

2-4 Determination of DNA-Polimerase activity.

The standard incubation mixture (Wintersberger's mixture, [12] contained in 1 ml: 20 μ moles of Tris-MCl, pH 7.4; 20 μ moles of MgCl₂; 4.8 μ moles of PEP; 100 μ g of PK; 50 nmoles of dATP, dGTP, dTTP and dCTP; 8 μ Ci of [methyl ³H] - dTTP or of [8 - ³H] - dATP (initial specific activity: 17.1 or 17.3 Ci/mole respectively); 1.5 \pm 2 mg of mitochondrial proteins.

The reaction was started by the addition of mitochondrial preparation and the incubation was performed at 37 °C in a Dubnoff thermo-regulated shaker, for 10 minutes unless otherwise stated.

The reaction was stopped by the addition of 10 ml of cold 5% (w/v) TCA - 60 mM sodium pyrophosphate. The acid-insoluble material was washed five times with the precipitating medium and finally suspended in 1.0 ml of 5% (w/v) TCA; the suspension was heated at 100 °C for 30 minutes and the supernatant constituted the acid-insoluble and acid-hydrolyzable material, the radioactivity of which was measured.

2-5 Isolation of mitochondrial nucleic acids.

Mitochondria, isolated from incubation mixture, were dissolved in 0.01 M TRIS-HCl, 5mM Mg Cl₂, SDS. 2% (w/v) pH = 7.5; then DEPC was added to this solution (final concentration 3% v/v) and carefully homogenized. The suspension was, therefore, incubated at 37 °C per 5 minutes; the supernatant, obtained by centrifugation at 5000 x g x 10 minutes, at room temperature, was made 1.8 M with solid NaCl, carefully homogenized and then incubated at 37 °C per 5 minutes. To the supernatant of this mixture, obtained by centrifugation at 10.000 x g x 10 minutes, 2.5 volumes of cold ethanol were added at 0 °C. The nucleic acids, sedimented overnight at -20 °C, were isolated by centrifugation and washed with cold 4% NaCl (w/v) in ethanol-water 75% (v/v), ethanol water 75% (v/v) and finally twice with absolute ethanol.

2-6 General methods.

DNA was determined by the method of BURTON [17], RNA of CERIOTTI [18], protein of LOWRY et coll. [19], using as standard: calf thymus DNA (Sigma), yeast RNA (Boheringer) and crystalline bovine serum albumin (Sigma). Glucose 6 phosphatase activity was measured and expressed as previously indicated [2]. The radioactivity of acid insoluble — and acid hydrolyzable — material and of isolated nucleic acids was determined by Nuclear Chicago Mark I scintillation counter on samples dissolved in TCA [final concentration 5% (w/v)]. The scintillation mixture was: PPO 4 g, POPOP 50 mg, naphthalene 120 g per one liter of diethylendioxide (one ml of TCA solution/15 ml scintillation mixture). Heart rates were obtained performing electrocardiographic traces with a Cardioline apparatus (Castelli, Trento) on the animals which were under the lightest possible ether anaesthesia compatible with the operations. Recording was performed over two minutes and counts were made on the last two 12-15 second periods, when the animals felt the effects of anaesthesia less.

3. - RESULTS.

3-1 *Demonstration that the DNA synthesis by isolated mitochondria was catalyzed exclusively by the mitochondrial DNA-Polymerase.*

Incubating the mitochondrial preparation type III with the Winterberger's incubation mixture [12] we were able to demonstrate that:

1) the labelling of acid-insoluble and acid-hydrolyzable material is unaffected by: (a) nuclear DNA-polymerases contaminating mitochondrial preparation; (b) variations of mitochondrial membrane permeability to dNTP's; (c) mitochondrial thymidine-kinase; (d) mitochondrial ATP synthesizing systems and (e) mitochondrial and lysosomal nucleases.

2) The labelled product was mitochondrial DNA.

3-1a *Characteristics of mitochondrial preparation type III.*

Purity. Phase contrast microscopy performed on mitochondrial preparation Type III revealed the complete absence of nuclei, nuclear fragments and other large organelles in these preparations. The levels of microsomal contaminations were very low: glucose 6-phosphatase activity in the mitochondrial preparations was 3.8 nmoles of Pi released/min/mg mitochondrial proteins, that is about 2% of microsomal activity.

Absence of extramitochondrial DNA. Mitochondrial preparations type III showed nuclear DNA polymerase activities, as the incorporation was enhanced by the addition of calf-thymus DNA to the incubation mixture

(exp. 2, tab. I). In fact these enzymes are soluble and, consequently, easily absorbed by mitochondria. The absence of extramitochondrial DNA in such mitochondrial preparations was, therefore, required to avoid that the mitochondrial DNA polymerase was increased by the nuclear one. Such an absence was demonstrated as the mitochondrial DNA levels were comparable with those observed in other highly purified mitochondrial preparations (compare the value of experiment 1, table I with those referred to in the footnote 4).

High permeability. The permeability of mitochondrial membranes to dNTP's in mitochondria type III was the highest possible: strong swelling with 0.1 M phosphate buffer (experiment 3, table I) did not modify the dNTP's incorporation. These results assured us that the physiological swelling of mitochondria, caused by thyroid hormones (see discussion, paragraph 4-2), cannot modify the incorporation amount by permeability variations to external dNTP's.

The removal of extramitochondrial DNA occurred fundamentally during the treatment of mitochondrial preparations by the DNAase (compare exp. 5 with exp. 4 table I), while the permeability increases of mitochondrial membranes occurred during the flotation (compare the exp. 5 with exp. 1, table I).

Absence of mitochondrial thymidine-kinase activity. When mitochondrial preparations type III were incubated with the standard incubation mixture, in which labelled thymidine ([methyl ^3H] - thymidine, in. spec. act. 21 Ci/mmole) replaced the labelled dNTP's, no radioactivity was detected in acid-insoluble and acid hydrolyzable material (results not reported). It indicated, obviously, not that mitochondria used by us did not contain thymidine-kinase, but that this enzymatic activity is not detectable in our experimental conditions.

Examination of mitochondrial ATP synthesizing systems. The amount of incorporation decreased to about 40% (table II exp. 2 and 10), when PEP and PK were omitted in the incubation mixture, whatever the substrates and the hormonal conditions. These results suggest that the PEP and PK produce a regeneration of dNTP's, as observed by WINTERSBERGER [12], and a regeneration occurs also with endogenous systems which act together with the PEP and PK. Moreover, as the decreases observed were equal in all hormonal conditions, when PEP and PK were omitted, we excluded that the variations of mitochondrial DNA synthesis observed in \bar{T} or T_3 - treated rats were due to activity variations of the dNTP's regenerating systems instead of DNA-polymerase ones. The quantities of PEP and PK used in the standard incubation mixture were the optimal ones, as no stimulation was observed when three times the amount was used (table II, exp. 3 and 11).

TABLE I

Dependence of dTTP incorporation into acid-insoluble and acid-hydrolyzable material by characteristics of mitochondrial preparations.

Mitochondrial preparations of various types (See Experimental) were incubated with the standard mixture (the incubation conditions are referred in Experimental). Animals: Male Wistar rats 60 days old; thyroidectomy performed at 25 days of age and T₃ treatment (at standard dose) from the 50th to 60th days of age.

Experiment N.	Characteristics of mitochondrial preparations	Incorporation amount and DNA levels					
		Rats: Normal (N)		Thyroidectomized (T)		Thyroidectomized and T ₃ treated (10 days of treatment) (T ₃) ₁₀	
		pmoles dTTP/mg protein per 10 minutes ± S. E.	µg DNA/mg protein ± S. E.	pmoles dTTP/mg protein per 10 minutes ± S. E.	µg DNA/mg protein ± S. E.	pmoles dTTP/mg protein per 10 minutes ± S. E.	µg DNA/mg protein ± S. E.
1	Type III: differential centrifugation followed by DNAase incubation and flotation.	1.96 ± 0.10	0.87 ± 0.08	1.26 ± 0.08	0.64 ± 0.06	1.87 ± 0.10	0.89 ± 0.08
2	Type III: in the incubation mixture was added native calf-thymus DNA (50 µg/ml).	2.40 ± 0.15		1.51 ± 0.10		2.25 ± 0.15	
3	Type IV: differential centrifugation followed by DNAase incubation and swelling.	1.99 ± 0.10		1.30 ± 0.08		1.88 ± 0.10	
4	Type I: differential centrifugation.	0.64 ± 0.05	3.67 ± 0.31				
5	Type II: differential centrifugation followed by DNAase incubation.	1.07 ± 0.02	1.10 ± 0.10				

- 1) Each value was the mean of 5 determination.
- 2) 1 pmole = 200 c.p.m.; the amounts of radioactivity were statistically significant in all the samples in comparison with either the background (mean value 20 c.p.m.) or the blank (50 c.p.m.).
- 3) The data reported are the minimal values of the incorporation because the possible dilution of the nucleoside triphosphates by the endogenous pool was not considered.
- 4) DNA levels in mitochondria extensively purified [see ref. (1)] were 0.69 µg DNA/mg mitochondrial protein.

TABLE II

Characteristics of the dNTP's incorporation into acid-insoluble and acid-hydrolyzable material by insolated mitochondria from rat-liver.

Mitochondrial preparations Type III were incubated with the standard mixture (incubation conditions are reported in Experimental). The animals were 60 days old; thyroidectomy performed at 25 days of age and the T_{30} , at the standard dose, was administered either 24 hours before death ($(T_{30})_1$) or from the 50th to 60th day ($(T_{30})_{10}$).

Experiment N.	Animal: N	\bar{T}	$(T_{30})_1$	$(T_{30})_{10}$
	Incorporation amount pmoles dTTP/mg protein per 10 minutes \pm S. E.			
1) Complete system	1.68 \pm 0.12 [100%] (100%)	1.26 \pm 0.08 [70%] (100%)	2.52 \pm 0.20 [200%] (100%)	1.60 \pm 0.10 [95%] (100%)
2) —PEP, —PK	0.61 \pm 0.08 (36%)	0.45 \pm 0.04 (36%)	1.22 \pm 0.16 (36%)	0.60 \pm 0.08 (35%)
3a) +PEP (14 μ moles) +PK (100 μ g)	1.72 \pm 0.12 (102%)			
3b) +PEP (14 μ moles) +PK (300 μ g)	1.66 \pm 0.10 (99%)			
4) —dATP	0.33 \pm 0.05 (20%)			
5) —dGTP	0.24 \pm 0.04 (14%)			
6) —dCTP	0.28 \pm 0.04 (17%)			
7) —dATP, —dGTP, —dCTP	0.26 \pm 0.04 (15%)			
8) —MgCl ₂	0.32 \pm 0.04 (19%)			
Incorporation amount pmoles dATP/mg protein per 10 minutes \pm S. E.				
9) Complete system	1.86 \pm 0.14 [100%] (100%)	1.40 \pm 0.10 [75%] (100%)	2.72 \pm 0.30 [146%] (100%)	1.80 \pm 0.15 [100%] (100%)
10) —PEP, —PK	0.57 \pm 0.08 (31%)	0.45 \pm 0.04 (32%)	1.14 \pm 0.14 (30%)	0.56 \pm 0.08 (30%)
11a) +PEP (14 μ moles) +PK (100 μ g)	1.88 \pm 0.14 (101%)			
11b) +PEP (14 μ moles) +PK (300 μ g)	1.85 \pm 0.10 (100%)			
12) —dTTP	0.30 \pm 0.05 (16%)			
13) —dGTP	0.31 \pm 0.05 (17%)			
14) —dCTP	0.24 \pm 0.04 (13%)			
15) —dTTP, —dGTP, —dCTP	0.21 \pm 0.04 (11%)			
16) —MgCl ₂	0.20 \pm 0.04 (11%)			

1) Each value was the mean of 5 determinations.

2) See footnote 2 table I.

3) See footnote 3 table I.

4) Heart rates in beats/minute: N = 405 \pm 3, \bar{T} = 330 \pm 2, $(T_{30})_1$ = 350 \pm 3, $(T_{30})_{10}$ = 370 \pm 2.

Absence of mitochondrial and lysosomal nucleases and nucleoside triphosphatases in mitochondrial preparations and of bacteria in incubation medium. Incorporation of dTTP into mitochondrial DNA started without lag and increased with time at decreasing rate at least during 1 hour, whatever the hormonal conditions of the animals (fig. 1). Such a time dependence excluded a significant participation of bacteria in the incorporation, according the semisterile conditions used in all operations performed. To confirm this hypothesis, the incorporation was measured either in standard semisterile conditions (total number of viable bacteria/incubation mixture at zero time = $0.5 \div 2 \times 10^3$) or in non-sterile conditions (t. n. of

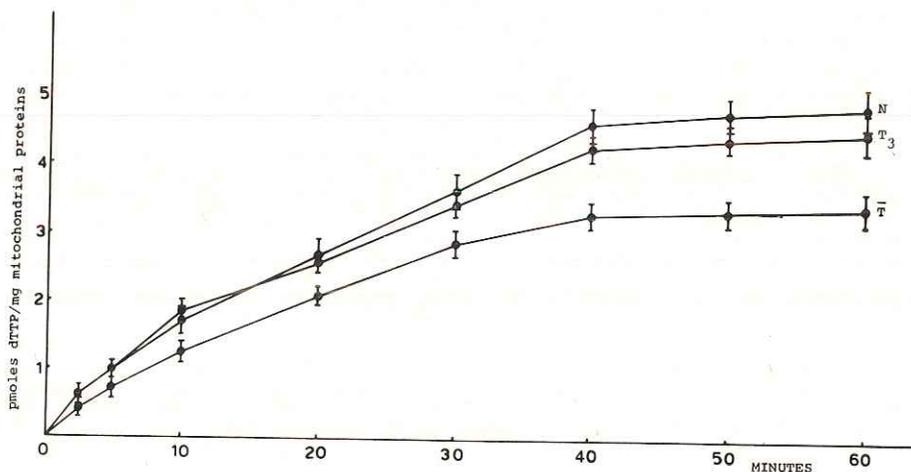


Fig. 1. — Time course of the dTTP incorporation into acid-insoluble and acid-hydrolyzable material by isolated mitochondria from livers of normal (N), thyroidectomized (\bar{T}) and thyroidectomized and treated for 10 days with the standard dose of T_3 (T_3)₁₀ rats. T = Standard error (S.E.). 1) Each value was the mean of 5 determinations. 2) See footnotes 2 and 3, Table I.

viable bacteria/i. m. at zero time = $1-2 \times 10^6$); an increase of 10% was observed (results not reported), that is the bacteria usually contaminating our incubation mixture (10^3), contributed only to 0.01% of incorporation ($= 10\% \times 10^3/10^6$).

The observed decreasing rate of incorporation might be due to: (a) the presence of mitochondrial or lysosomal nucleases in our mitochondria type III; or (b) the exhaustion of some components of the incubation mixture or of the mitochondrial DNA-polymerase activity.

Allowing the labelling of the acid-insoluble and acid-hydrolyzable material with a 10 minutes incubation (fig. 2) and successively stopping such a labelling with a 100 times decrease of the specific activity of radioactive dNTP, no decay of radioactivity of the acid-insoluble and acid-hydrolyzable

material was observed; this indicated the absence of any nuclease in mitochondria type III.

A preincubation, 60 minutes long, either of type III mitochondria or of incubation mixture alone decreased the incorporation values by 20% (results not reported); this decrease is, indeed, much lower (= 50 ÷ 70%) than that which can be reckoned by extrapolating the first minute activities until the 60th minute. We are of the opinion, nevertheless, that the observed decreasing rate of incorporation with time is due fundamentally to partial exhaustion of the reaction mixture, e. g., according with NEUBERT [50], to a partial lack of mitochondrial DNA polymerase, which is a soluble enzyme.

Variation of the amounts of dNTP's incorporation due to the various effects of the hormonal conditions on nucleoside triphosphatases can be

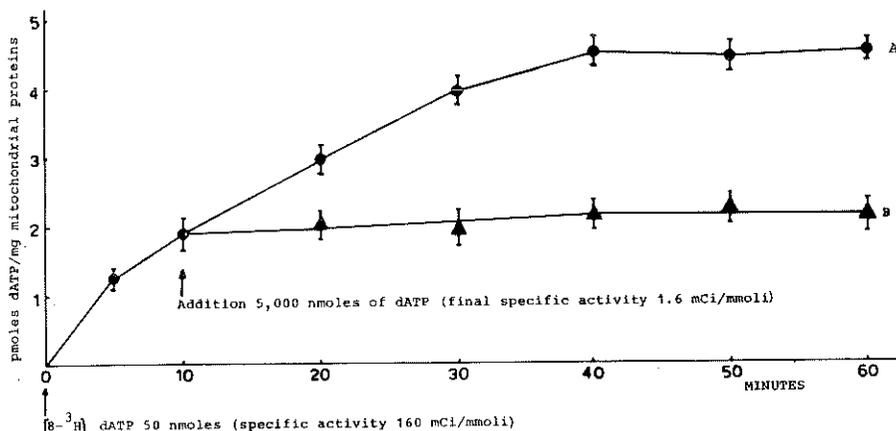


Fig. 2. — Time course of the dATP incorporation into acid-insoluble and acid-hydrolyzable material by isolated mitochondria from normal rat livers without (A) and with (B) 100 times decrease of the specific activity of dATP, 10 minutes after the starting of reaction. T = Standard error. (S. E.). 1) Each values was the mean of 5 determination. 2) See footnotes 2 and 3, Table I.

excluded as the incorporation ratios in the various conditions were not modified when the dNTP's concentration in the incubation mixture were doubled (results were not reported).

Other requirements for the incorporation. The incorporation was dependent on the presence of the other three dNTP's as well as magnesium ions (table II, exp. 4 ÷ 8, 12 ÷ 16); it showed that the modification of membrane permeability in mitochondrial preparation type III caused an almost complete depletion of the endogenous pool of dNTP's as well as of Mg²⁺. Our results were in agreement with those of PARSONS and SIMPSON [9], of WINTERSBERGER [12] and of TER SCHEGGET, BORST et al. [11] for other

dNTP's dependence; TER SCHEGGET, BORST [11] found no dependence on the presence of Mg^{2+} while WINTERSBEBGER [12] found it.

Dependence on the number of mitochondria. The incorporation was found to be directly proportional to the number of mitochondria present in the incubation mixture: the incorporation amount increased linearly with the quantity of mitochondrial proteins up to 4 mg/ml incubation mixture (table II-a). As the quantities of protein routinely used were 1 ÷ 2

TABLE IIa

Dependence of the dTTP incorporation amount into acid-insoluble and acid hydrolyzable material on the isolated mitochondria concentration in normal rats.

The experimental conditions are those used for the experiments referred in Table II, except for the amounts of proteins.

mg proteins/ml incubation mixture	pmoles dTTP incorporated per 10 minutes ± S. E.	pmoles dTTP incorporated/ /mg proteins per 10 minutes ± S. E.
1	1.40 ± 0.07	1.40 ± 0.07
2	2.72 ± 0.14	1.36 ± 0.14
3	4.28 ± 0.10	1.42 ± 0.10
4	5.55 ± 0.12	1.39 ± 0.12

1) Each value was the mean of 5 determinations.

2) See footnotes 2 and 3, Table I.

mg/ml incubation mixture we can exclude an exhaustion of one of the components up to a doubling or a triplication of the normal incorporation amount; that is in the range 1 ÷ 5.5 pmoles of dNTP's.

3-1b Characterization of labelled product.

As it is well known that the incorporation in nucleic acids and proteins by isolated mitochondria gives products with low specific activities, the results of incorporation experiments must be scrutinized critically. We investigated, therefore, whether the labelled product was indeed: (a) DNA and (b) mitochondrial DNA.

Identification of the labelled product as DNA. When mitochondrial nucleic acids were isolated from mitochondrial preparations, type III, a recovery of 75% of radioactivity of acid-insoluble and acid-hydrolyzable material was found in them (table III columns A and B); the remaining 25% was lost during the isolation procedure or localized outside mitochondrial nucleic acids. These results were due to acid hydrolysis of acid-

insoluble material used by us; other authors (e. g.: [11]) measured only the radioactivity of the acid insoluble material and found a lower recovery (15 ÷ 20%) of such a radioactivity in DNA. Only DNA, moreover, showed to be labelled, as the radioactivity of nucleic acids appeared unchanged after RNAase hydrolysis (table III, columns C and D), while it disappeared almost completely after DNAase hydrolysis (table III, columns C and E) or RNAase + DNAase hydrolysis (table III, columns C and F).

TABLE III

Identification of labelled product as DNA.

A massive incubation was set up for 10 minutes with labelled dTTP. Three 1 ml samples were used for radioactivity determinations of acid-insoluble and acid-hydrolyzable material. Mitochondrial nucleic acids were isolated from the remainder as described in Experimental and their radioactivity was measured. Nucleic acids were dissolved in 0.01 M TRIS-HCl, pH 7.0, containing 0.006 M MgCl₂ and incubated for 1 hour at 37°C with either RNAase (100 µg/ml) or DNAase (100 µg/ml) or RNAase + DNAase. The reaction was stopped with 5% ice-cold TCA and albumin was added as a carrier. The acid-insoluble material was hydrolyzed for 30 minutes at 100°C in 5% TCA and radioactivity was measured in the supernatant after centrifugation.

Sample N.	A) Radioactivity of acid-insoluble and acid hydrolyzable product c.p.m./mg protein ± S. E.	B) Radioactivity of nucleic acids c.p.m./mg protein ± S. E.	Radioactivity in the supernatant after enzymatic hydrolysis and acid hydrolysis c.p.m./mg protein ± S. E.			
			C) No enzyme	D) RNAase	E) DNAase	F) RNAase + DNAase
I	412 ± 6	300 ± 4	236 ± 2	228 ± 2	40 ± 2	28 ± 2
II	412 ± 6	300 ± 4	252 ± 2	250 ± 2	32 ± 2	34 ± 2
III	412 ± 6	300 ± 4	240 ± 2	232 ± 2	40 ± 2	36 ± 2

1) Each value was the mean of 5 determinations.

2) See footnotes 2 and 3, Table I.

Identification of labelled product as mitochondrial DNA. The Eth. Br inhibition of DNA synthesis by isolated mitochondria (type III) were very low even at high doses of the dye: starting at the dose of 4 µg/ml of incubation mixture we observed a 19% inhibition (fig. 3) open circles). Other authors [11] reported, viceversa, that the DNA synthesis by isolated and intact mitochondria is severely inhibited by Eth.Br more than 50%. These results indicated to us that the mitochondrial swelling decreased the inhibition effect of the dye and suggested to us the idea of preincubating mitochondrial preparation type III with inhibitor. According this hypothesis a

90% inhibition was observed, starting at the dose of 4 μg of Eth. Br/ml mixture, when mitochondria were preincubated for 10 minutes with dye (fig. 3, closed circles). A similar result was obtained with acriflavine (table IV). As the synthesis of DNA (which constitute at least the 75% of acid-insoluble and acid-hydrolyzable product synthesized by isolated mitochondria) is inhibited by acriflavine and Eth.Br, this means that the synthesis was DNA-dependent; the Eth.Br inhibition showed, therefore, that DNA primer was mitochondrial and this was confirmed by very high inhibition values obtained after the 10 minute preincubation with the dye.

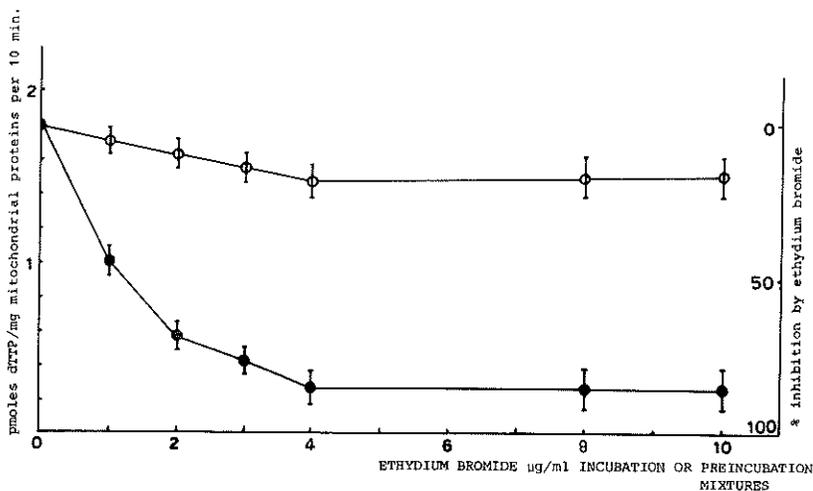


Fig. 3. — Effect of ethidium bromide on the dTTP incorporation into acid-insoluble and acid-hydrolyzable material by isolated mitochondria ○—○—○ Ethidium bromide at the reported amounts, was added directly to standard incubation mixture. ●—●—● Mitochondria were preincubated in 0.32 M sucrose, 0.02 M TRIS-HCl pH = 7.4, containing ethidium bromide at the referred amounts per 10 minutes and then incubated with the standard mixture. (T) = Standard error (S. E.).
 1) Each value was the mean of 5 determination.
 2) See footnotes 2 and 3, Table I.

3-2 Effects of hormonal conditions on the DNA synthesis by isolated mitochondria.

3-2a Incorporation amounts in normal animals.

When isolated liver mitochondria, obtained from normal male rats (Wistar strain), 60 days old (body weight about 260 g) were incubated with the standard mixture, the incorporation amount (table II, exp. 1 and 9) was the following: 1.68 ± 0.12 pmoles dTTP or 1.86 ± 0.14 pmoles dATP/mg mitochondrial proteins per 10 minutes. Labelled dGTP or dCTP incorporation were not investigated as: (a) dCTP is incorporated in high degree in

acid-insoluble material, but this incorporation is attributable almost exclusively to the synthesis of dCDP diglyceride and (b) the study of dGTP incorporation alone is useless.

3-2b Incorporation amounts in thyroidectomized rats.

When the mitochondria (Type III) were obtained from male rats (60 days old) thyroidectomized at 25 days of age, the incorporation amounts decreased to the 70 ÷ 75% of the values observed in the normal animals, whatever the labelled substrates used (table II experiment 1 and 9).

TABLE IV

Effect of acriflavine on the dTTP or dATP incorporation into acid insoluble and acid-hydrolyzable material by isolated mitochondria.

Mitochondria, obtained from livers of normal 60 days old rats, were preincubated at 37°C for 10 minutes with the indicated quantities of acriflavine and then added to the standard incubation mixture.

Final concentration of acriflavine (µg/ml incubation mixture)	pmoles dATP incorporated/mg proteins per 10 minutes ± S. E.	pmoles dATP incorporated/mg proteins per 10 minutes ± S. E.
0	1.89 ± 0.10	1.70 ± 0.10
2.0	0.41 ± 0.40	0.38 ± 0.04
5.0	0.28 ± 0.03	0.22 ± 0.02
10.0	0	0

1) Each value was the mean of 5 determinations.

2) See footnotes 2 and 3, Table I.

3-2c Incorporation amounts in thyroidectomized and T₃ - treated rats.

When the mitochondria (Type III) were obtained from male rats, 60 days old, thyroidectomized (at the 25th day) and treated with a single dose of T₃ (5 µg/100 g body weight) the incorporation amounts, measured 24 hours later, were about 1.5 times the values observed in normal animals, whatever the substrates (table II, exp. 1 and 9). The chronic T₃ treatment at the standard dose, 10 days long, reported the incorporation amount to the levels exhibited by normal animals (Table II exp. 1 and 9).

3-2d Incorporation amounts during the T_3 treatment of thyroidectomized rats.

The reported results (last paragraph) induced us to determine the incorporation during the T_3 -administration to thyroidectomized rats. One day after the first administration of T_3 , at the standard dose, a sharp increase (fig. 4) of incorporation amount of dTTP into mitochondrial DNA was observed: the ratio of incorporation between treated and untreated animals was about 1.90. The administration of the same T_3 doses every second day caused the following events: (a) a decrease of the incorporation amount from the 1st to the 3rd day, with a decrease of the ratio from 1.95 to 1.50,

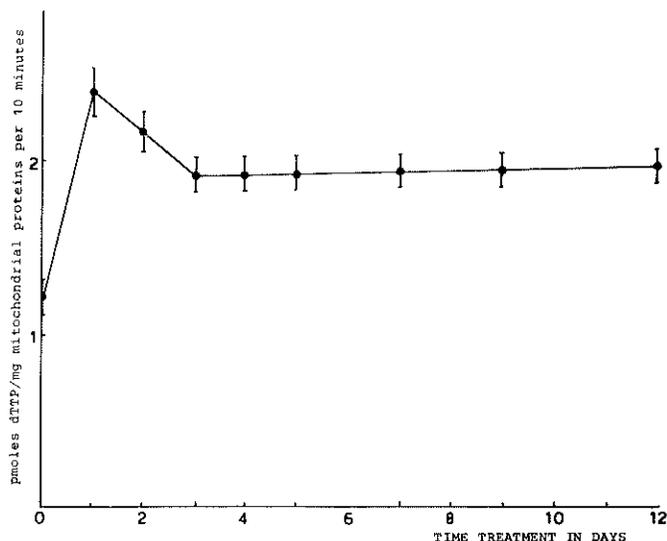


Fig. 4. — Incorporation of dTTP into acid-insoluble and acid-hydrolyzable material during the T_3 administration to \bar{T} -rats. T = Standard error (S. E.).

1) Each value was the mean of 5 determinations.

2) See footnotes 2 and 3, Table I.

that is a return to the values exhibited by normal animals and (b) no variation of incorporation amount after the 3rd day of treatment (the experiments were performed up to the 12th day).

The reported results show the validity of experiments referred to in this paper, in which thyroidectomized rats were used subjected either to one day's treatment (when the stimulation is the highest) or to 10 day's treatment (when the animals showed the same incorporation as the normal ones).

3-2e Incorporation amounts and T_3 - doses.

It is well known that T_3 administration to thyroidectomized rats produces a diphasic effect: while low hormonal doses induce an euthyroid state, high doses induce a hypothyroid state or thyreotoxicosis. This induced us to determine the effect of T_3 -doses on incorporation amounts of dNTP's into mitochondrial DNA by isolated mitochondria. Thyroidectomized rats were treated with two T_3 -injections (T_3 doses ranging from 5.0 to 20 $\mu\text{g}/100$ g

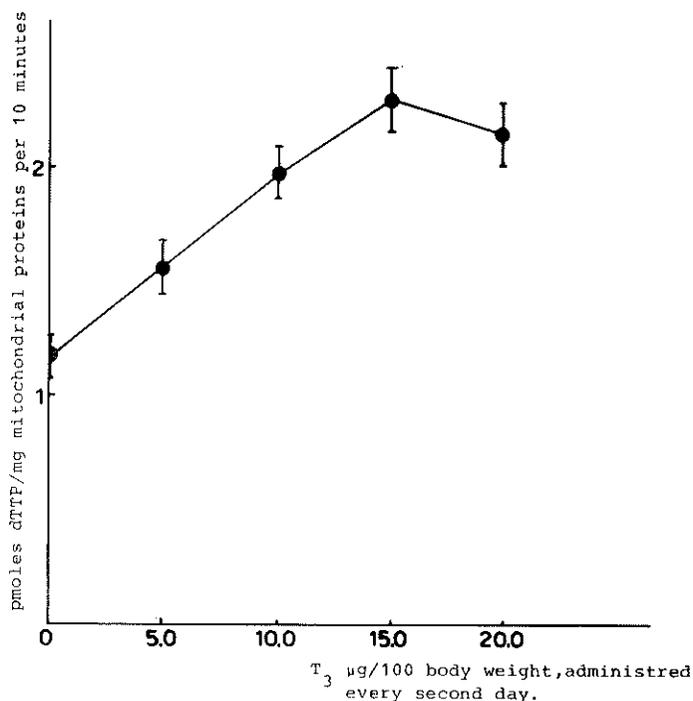


Fig. 5. — Amount of the dTTP incorporation into acid-insoluble and acid-hydrolyzable material plotted against the dose of T_3 administered to thyroidectomized rat (for 3 days). T = Standard error (S.E). 1) Each value was the mean of 5 determination. 2) See footnotes 2 and 3, Table I.

body weight) at zero and 48th hours and killed at 72nd hour. [The T_3 - treatment was performed for three days, because starting by the 3rd day the incorporation of dNTP's into mitochondrial DNA reached a constant level (see fig. 4)]. The obtained results showed (fig. 5) that the incorporation increased linearly until a dose corresponding to 15 μg of $T_3/100$ g body weight every second day and then remained on constant values; these last ones were observed only with a dose corresponding to 20.0 μg , twice as great as the one usually used.

3-3 *Dependence of the DNA synthesis by isolated mitochondria on the growth rate of normal rats.*

The reported results showed indirectly a relation between growth rate and DNA synthesis by isolated mitochondria; this suggested to us the idea of investigating directly on such relations, measuring the incorporation amount in normal rats during growth. The obtained results (fig. 6) showed that the incorporation of dNTP's into DNA by isolated mitochondria is dependent on age in normal animals: the amount of incorporation decreased, with the age, firstly (from 30th at 60th day of age) quickly and then (from

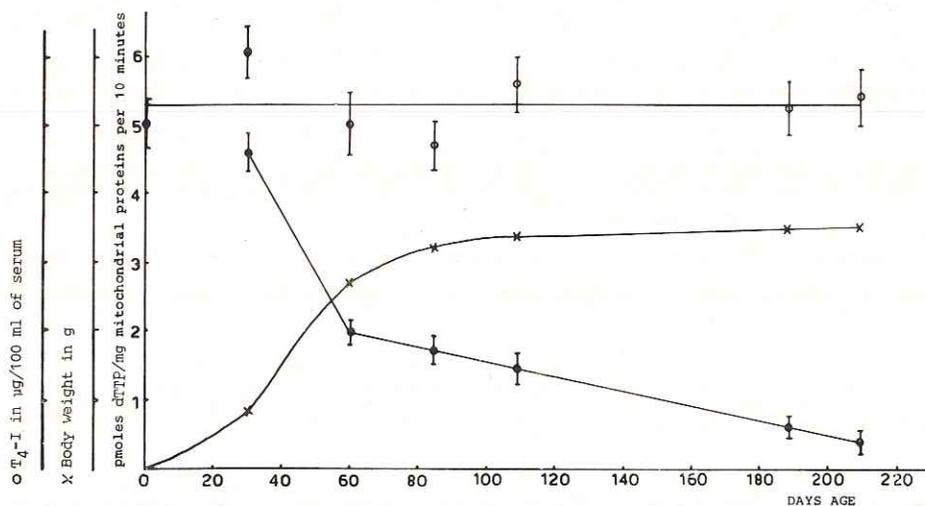


Fig. 6. — *Dependence of dTTP incorporation in mitochondrial DNA on the age of rats.*
 Γ = Standard error (S.E). 1) Each result was the mean of 5 determinations.
 2) See footnotes 2 and 3, Table I.

60th until 210th day of age) more slowly. A similar pattern was obtained by us studying the incorporation of dNTP's into RNA by isolated mitochondria [4, 5, 6]. Both DNA and RNA polymerase activities are, therefore, age-dependent or better inversely proportional to the animal's age.

The serum T₄-iodine levels, measured from the birth to 210th day of age, appeared constant with a mean value of 5.3 µg/100 ml serum (Fig. 6); it showed the absence of a relation between the circulating thyroid hormone levels and growth in normal rats.

4. - DISCUSSION.

Studying the action of hormones, stimulating growth and development, on the biogenesis of mitochondria, we have investigated, in growing male rats, the effects of thyroidectomy and of T_3 -administration to thyroidectomized animals on DNA synthesis by isolated liver-mitochondria.

4-1 *Biological conditions of animals.*

Animals in the second month of life, when they exhibited the greatest rate of body growth, were used in our research. In fact the mean values of body weights of normal animals (male Wistar rats) used by us were: (1) at the birth 2 g; (2) at 30 days of age = 90 g, with a gain of body weight in the first month of life = 3 g/day; (3) at 60 days of age = 260 g, with a gain in the second month of life = 5.7 g/day, (4) at 90 days of age = 400 g, with a gain in the third month of life = 4.7.

Thyroidectomy performed at weaning (or a few days later) produces « hypophysectomy like » effects in the rat [16]. While the TSH levels are very high in serum and very low in pituitary (in response to the low levels of circulating thyroid hormones), a strong decrease in the levels of GH, ACTH, FSH and ICSH in the pituitary and in the serum of young thyroidectomized rats occurs, followed by a tendency to atrophy in the target glands (adrenals and gonades) [20 - 25]. Such an effect might be due to: (1) a decrease of synthesis and release of hypophysial hormones except TSH, attributable to the excessive synthesis of the last one; (2) an enhancement, in thyroidectomized rats, of the feedback action of corticosteroid and sex hormones to the pituitary, and (3) a direct inhibitory action of thyroidectomy on target-glands [26].

Treatment of thyroidectomized rats with thyroid hormones (T_3 or T_4) avoids or removes such « hypophysectomy like » conditions; it occurs with very low hormonal doses, far below the ones required to normalize the levels of serum TSH or the basal metabolic rate [16].

The researches in the present paper show indeed the effect of the « hypophysectomy-like » state, induced by thyroidectomy, and of the removal of such a state, by T_3 administration, on DNA synthesis by isolated mitochondria, obtained from animals in the phase of highest body growth rate.

All rats used by us were fed a diet normal in iodide (1 μ g of I^- /g of diet).

It is well known that in normal rats a deficiency of dietary iodide intake decreases the synthesis of thyroid hormones and produces thyroglobulin with higher MIT/DIT and T_3/T_4 ratios [26] (a shift $T_4 \rightarrow T_3$ is of

physiological significance as the T_3 possesses approximatively four times the potency of T_4 , while contains 3/4 of iodine). The synthesis of thyroid hormones increases progressively as the dietary iodine increases up to a maximum and then declines with larger doses (WOLFF-CHAICOFF effect) [27, 28]; the increasing quantities of iodine produce MIT \rightarrow DIT and $T_3 \rightarrow T_4$ shifts [26]; according PISAREV and ITOIZ [67] iodide impairs thyroid response to TSH, cyclic AMP and cyclic GMP; furthermore it seems that I^- manifestes its inhibitory effect in a site subsequent to the generation of cyclic AMP [29].

If the thyroidectomized rat is given large doses of iodide, growth resumes and several other evidences of thyroid hormones replacement are manifest; such an effect has been attributed to an extrathyroidal synthesis of T_4 [30-32].

All these results have induced several workers to use diets with a low content of iodide, before and after thyroidectomy, and to feed normal animals with the same diets, supplied with suitable amounts of iodide. We observed, however, that the rate of growth of normal animals is much lower with such diets (e. g. REMINGTON [33] also supplied with suitable amounts of iodide; we preferred, therefore, to use a diet that allowed a growth as high as possible.

4-2 Necessity for the DNA synthesis by isolated mitochondria to be catalyzed exclusively by the mitochondrial DNA-polymerase.

The intramitochondrial pool of dNTP's may be modified either by thyroidectomy or by the T_3 -administration to thyroidectomized animals.

The mitochondria appear already swollen « in situ » in the livers of thyrotoxic rats and, when they are isolated from these organs and incubated, swell more readily than do these organelles from normal animals [34, 64, 65, 66]. Thyroid hormones, therefore, produce the « in vitro » swelling of mitochondria from normal rats [35]. An « in situ » swelling of liver mitochondria has been observed, finally, in starved rats [36] (the swelling detected in the thyrotoxicosis may be imputable also to weight losses which take place in thyrotoxic animals [35]). We cannot exclude, consequently, a mild swelling in T_3 -treated rats, (because the T_3 may act also at doses lower than thyrotoxic ones), and in thyroidectomized rats, (caused by a poorer nutritional state). The swelling process appears to result from an increased penetration of the suspending medium, while mitochondrial proteins leak into such a medium [37, 38]. The inner mitochondrial membrane, while is impermeable to nucleoside triphosphates [39], is almost permeable by dNTP's. We believed possible, therefore, that variations of the intramitochondrial pool of dNTP's might occur according the hormonal conditions, and that these variations might modify the amount of incor-

poration of dNTP's into mitochondrial DNA, without variation of DNA polymerase activity. Mitochondria type III used by us, showed the highest permeability to dNTP's: they exhibited, indeed, incorporation values three times the values obtained with no swollen mitochondria by PARSONS and SIMPSON, [40] and us (mitochondria type I, table I) and other workers (see also paragraph 4-3), and such values were not enhanced after a phosphate swelling (mitochondria type IV, table I).

An uncoupling of mitochondrial oxidative phosphorylation with a reduction in P/O rate in the thyrotoxicosis or hyperthyroidism has been observed by many workers [41-44]. According to RACKER [45] the « true » uncoupling results from a decreased phosphorylation (with or without a concomitant increase in oxygen uptake), due to an increase of ATP-ase activity. In the inner mitochondrial membrane are located some units projecting from it into mitochondrial matrix; such units are constituted by a base piece, in which the complexes of the electron transport system appear located, by a stalk, containing an ATP-ase inhibitor, and by a head piece containing a protein, called F_1 , which has the dual properties of coupling phosphorylation and of hydrolyzing the ATP. The protein F_1 expresses both the properties according its structural orientation in respect to its stalk-situated inhibitor [46]. It appears to us likely that the thyroid hormones, producing the mitochondrial swelling in thyrotoxic rats, modify the structural orientation of F_1 , increasing the ATP-ase activity of the projecting units. Recently it has been reported, moreover that a very mild hiperthyroidism (produced with T_3 -doses like ours) decreased firstly (after 15-20 days) the phosphorylation capacity of mitochondria, without an increase in oxygen uptake, and, then, increased markedly such uptake, while the phosphorylation rate returned to normal [44]. Consequently we cannot exclude that the mitochondria isolated from T_3 -treated rats were different in ATP-ase activity when compared with the mitochondria isolated from either normal or thyroidectomized animals; the last ones, therefore, might regenerate the dNTP's and incorporate them at different rates while the DNA-polymerases activity remained unchanged. It is avoided in our experimental conditions because we used an external energy source (PK+PEP) and demonstrated that, in the absence of such a source, the incorporation did not modify according by the hormonal conditions of animals (table II).

The incorporation amounts of dNTP's might be modified also by contaminating nuclear DNA polymerases or by mitochondrial thymidine-kinase or by nucleases or nucleoside triphosphatases.

While the effects of hormones, secreted or controlled by the pituitary on both nuclear RNA polymerases (i. e. acting at low and high ionic strenght) [47] has been established, only recently the effect of GH on

nuclear DNA polymerase activity has been detected [68]. Hormonal influences on the thymidine-kinase, the presence of which in mitochondria was demonstrated by MITRA and BERNSTEIN [48], and on the nucleases, identified by many workers (e. g. see [45] for *Neurospora crassa* and [12] for yeast), have not yet been investigated.

As we believed that any hormonal influence on these enzymes, could not be excluded at all, we took care to demonstrate that the incorporation of dNTP's, in our experimental conditions, was unaffected either by contaminating nuclear DNA-polymerase, by mitochondrial-thymidine-kinase, by nucleases (table II) and by nucleoside triphosphatases (p. 11).

Finally we could exclude a bacterial participation to DNA synthesis by isolated mitochondria.

The identification of the labelled product as mitochondrial DNA (at least for 75%) completed the demonstration that DNA synthesis by isolated mitochondria was catalyzed exclusively by mitochondrial DNA-polymerase (table III and IV, figure 3).

4-3 *Effect of the « hypophysectomy-like » state on the DNA synthesis by isolated mitochondria.*

Incorporation levels of dNTP's into mitochondrial DNA of about 1.8 pmoles of dNTP's (dTTP or dATP)/mg mitochondrial protein per 10 minutes were observed by us in normal animals.

As we used swollen mitochondria, we cannot compare our results with the ones reported by other workers [9-11], who used intact organelles. Our values obtained, viceversa, with normal mitochondria (Type I), that is 0.7 pmoles of dNTP's (table I), agree with the figures reported by such authors, which are 0.20-0.25 pmoles for rat-liver (PARSONS and SIMPSON [9] and 0.5 pmoles for chick-liver (TER SCHEGGET, BORST et al [11, 15]; $33 \div 54$ pmoles were obtained by WINTERSBERGER [12] for yeast-mitochondria (all figures are pmoles of dNTP's/mg mitochondrial protein per 10 minutes).

Our incorporation values obtained with no-swollen mitochondria correspond to a specific activity of 7 pmoles of dTTP or dATP/ μ g mitochondrial DNA/hour ($0.7 \times 6/0.6$, as the levels of rat-liver mitochondrial DNA are 0.6 μ g/mg protein). Rat liver mitochondrial DNA has a content of dTMP and dAMP of 30% (molar ratios) = 0.3 μ g (or 300,000 pg) of dTMP and dAMP/ μ g DNA; according to our results, the net synthesis of mitochondrial DNA is equal, therefore, to 0.7%/hour ($7/960$) or 17%/day. As TER SCHEGGET, BORST et al. [11], we can consider the obtained values not unreasonable in relation to the half-life values observed for DNA of rat-liver mitochondria « in vivo » [between 8 days [50, 51] and $9.1 \div 9.4$ days [52, 53]].

A decrease of incorporation of dNTP's into mitochondrial DNA of

25% followed the « hypophysectomy-like » state, produced by thyroidectomy. Young thyroidectomized rats showed, therefore, a DNA net synthesis of 5.3%/hour or 12.7%/day, values not unreasonable in relation to the results of GROSS and RABINOWITZ [52], who observed that liver mitochondrial DNA of young (70 → 84 days of age) thyroidectomized rat turns over more slowly than that of normal adult animals (half-lives: 14 and 9.1 days respectively).

The T₃-treatment of thyroidectomized rats, which removes the « hypophysectomy-like » state, reported, after three days, the incorporation amount of dNTP's into mitochondrial DNA to values exhibited by normal animals.

Results obtained by us with the standard dose of T₃ (10 µg of T₃/100 g body weight/every second day), scrutinized critically, assured us that our hormonal treatment produced neither a strongly hyperthyroid state nor thyrotoxicosis.

It is well known, indeed, that thyroid hormone administration to thyroidectomized animals is today generally performed to produce « euthyroid state »; T₄ or T₃ are used, therefore, at « substitution doses », that is at doses which restore the hormonal state altered by thyroidectomy, especially the circulating TSH and T₄ and T₃ levels, respectively enhanced and strongly lowered in the hypothyroid state. In rats, thyroid-hormone substitution doses are judged equal to 1.8 µg of T₄/100 g body weight/day [54, 55], or to 0.5 µg of T₃/100 g b. w./day [55] or, better, to 1 µg of T₄ and 0.1 µg of T₃/100 g b. w./day (these last doses are considered equal, either in quantity or in T₄/T₃ ratios, to the daily secretion of thyroid [56]). Such low doses of thyroid hormones restore growth in young thyroidectomized rats only slowly [57, 58]; in experiments such as ours, in which we need to restore such a growth as soon as possible, it is convenient to use higher doses, carefully avoiding, nevertheless, the establishment of strongly hyperthyroid or thyrotoxic states in the animals. The standard dose used by us (10 µg T₃/100 g body weight/every second day) was, indeed suitable, because it:

1) restored the normal growth rate in thyroidectomized rats: the body weight gains (g/100 g/day) were the following between the 50th and the 60th days of age: N 3.3 g, \bar{T} 0.7 g and T₃-treated 3.3 g.

2) Assured a survival rate of 98-100%.

3) Did not establish a hypermetabolic state as the heart rate (beats/minute) in T₃-treated rats (Table II) are lower than the normal ones: N = 450 ± 6; T = 330 ± 2; T₃-treated (24 hours later a single T₃ standard dose administration) = 350 ± 3 (increase = 20); T₃-treated (after a 10 days treatment) = 370 ± 2 (increase = 40). It appears interesting to compare our results with those of BARKER et al. [59], who obtained the following figures administrating T₄ or T₃ to adult T rats: T₄: 1.61 x 10⁻⁸

moles/kg/day ($= 1.25 \mu\text{g}/100 \text{ g/day}$), increase of heart rate = 46.2 beats/minute; 3.22×10^{-8} moles/kg/day ($= 2.50 \mu\text{g}/100 \text{ g/day}$) increase 97.8 beats/minute; T_3 : 0.32×10^{-8} moles/kg/day ($= 0.21 \mu\text{g}/100 \text{ g/day}$ increase 40.7 beats/minute); 0.64×10^{-8} moles/kg/day ($= 0.42 \mu\text{g}/100 \text{ g/day}$), increase 85.8. In other words the administration of our standard dose to young \bar{T} rats produced the same effects on the metabolic state of animals as a very much lower dose (about 1/10) administered to adult \bar{T} rats.

4) Increased the DNA synthesis by isolated mitochondria, decreased by thyroidectomy.

5) Was half the dose ($20 \mu\text{g } T_3/100 \text{ g body weight/every second day}$), at which the incorporation amounts reached the maximal values, because an equilibrium between the anabolic and catabolic effect of T_3 might be established.

6) Was equivalent to ones considered able to produce an euthyroid or slightly hyperthyroid state by others [52].

4-4 *Effect of the growth rate on the DNA synthesis by isolated mitochondria from normal animals.*

An inverse relation between growth rate of normal animals and mitochondrial DNA synthesis amounts was observed by us.

We cannot explain such an inverse relation retaining the opinion that in normal rats there also exists an inverse relation between growth rate and circulating thyroid hormone levels. The T_4 -iodine levels were constant from the birth to the 7th month of age (fig. 6). The following hypothesis may explain our results:

(1) *The secretion rate of thyroid really decreases as the age increases;* according YOUSEF and JOHNSON [60] the plasma T_4 may be considered not to be a sensitive index for thyroid activity, because it may be affected by any change in the extracellular fluid volume. YOUSEF and JOHNSON [60] found, indeed, that the thyroxine secretion rate per 100 g body weight decreased from 60 to 110 days of age, while the plasma T_4 level remained constant.

(2) *While the T_4 secretion remains constant, the T_3 secretion increases with age even if slightly (T_3 has four times the potency of T_4).*

(3) *The secretion of thyroid hormones remains constant and the effects on DNA synthesis are due to hormones different from T_3 and T_4 .* For example LEVEY [61] found that the adeno-hypophyseal TSH levels increased progressively about ten times in the first two month of age; the increasing synthesis of TSH may produce a decrease in the synthesis of other adeno-hypophyseal hormones related to growth.

CONCLUSIVING REMARKS.

The results presently and previously [1, 3] reported permit us to draw the following picture of the events that follow the removal of the « hypophysectomy-like » state by T_3 administration:

(a) *The mitochondrial DNA-polymerase activity is considerably and very precociously stimulated* by an enhancement either of the enzymatic specific activity or of the synthesis rate of enzyme molecules. It is very interesting to observe that experimental evidence indicates that the enzyme is synthesized outside the mitochondrion: this was demonstrated in rat liver [62] by comparing the incorporation of labelled amino acids into the enzyme « in vivo » and « in vitro » and by the use of specific inhibitors of mitochondrial and extramitochondrial protein synthesis. If the enzyme synthesis is stimulated, the over-all stimulation process, induced by T_3 administration, starts on the outside of the mitochondrion.

(b) *The net synthesis of mitochondrial DNA is succesively enhanced*; this agrees with the knowledge that the mitochondrial DNA-polymerase from rat liver (and from other sources) is involved in the mitochondrial DNA replication rather than in repair [63]. We may think, therefore, that after T_3 administration the synthesis of new mitochondrial population starts on with an enhancement of duplication of mitochondrial DNA.

(c) *The mitochondrial RNA-polymerase activity is then increased, followed by an enhancement of the net synthesis of mitochondrial RNA.*

GROSS [7] has demonstrated the existence of two populations of mitochondria, the first one synthetized at lower levels of thyroid hormones, the second one at higher levels. When the thyroid hormones are administered to hypothyroid or euthiroid rats, the second mitochondrial population is synthetized and retained in the cell in preference to the first one.

ACKNOWLEDGEMENTS.

We are grateful to Drs G. LIVERINI, P. ROCCO, G. BOVE and L. VETERE for their expert assistance and to Mr. R. AURIEMMA and G. BASILEO for their skilfull assistance in performing thyroidectomies.

REFERENCES

- [1] DE LEO T., A. BARLETTA and S. DI MEO: *Life Sci.* **8** (1969) 747.
- [2] DE LEO T., I. TRARA GENOINO, A. BARLETTA, S. DI MEO and M. C. TAFURI: *Acc. Sci. Fis. Mat.* **36** (1969) 126.

- [3] ASHWELL M., T. S. WORK: «The Biogenesis of Mitochondria» **36** (1967) 722. *Annual Review of Biochemistry* - Annual Review INC. Palo Alto, California.
- [4] GADALETA M. N., A. BARLETTA, C. SACCONI and T. DE LEO: *Rass. Med. Sper.* **5-6** (1970) 146.
- [5] SACCONI C., M. N. GADALETA, T. DE LEO and A. BARLETTA: *Abstr. 1st Eur. Biophys. Congr.* (1971) 455.
- [6] GADALETA M. N., A. BARLETTA, M. CALDARAPZO, T. DE LEO and C. SACCONI: *Eur. J. Biochem.* **30** (1972) 376.
- [7] GROSS N. I.: *J. Cell. Biol.*: **65** (1972) 612.
- [8] SCHIMMELPFENNIG C.K., M. SAUERBERG and D. NEUBERT: *FEBS Lett.* **10** (1970) 269.
- [9] PARSONS P. and M. V. SIMPSON: *Science* **155** (1967) 91.
- [10] MITRA R. S. and I. A. BERNSTEIN: *J. Biol. Chem.* **245** (1970) 1255.
- [11] TER SCHEGGET J., M. VAN DER BOSCH, M. A. VAN BOEK, K. Y. MOSTETLER and P. BORST: *Biochim. Biophys. Acta* **239** (1971) 234.
- [12] WINIERSBERGER E.: *Biochem. Biophys. Res. Commun.* **25** (1966) 1.
- [13] DE LEO T., A. BARLETTA, G. MARTINO and P. ROCCO: *XXIV Congr. Naz. Soc. It. Fisiol.* 1972.
- [14] DE LEO T., G. MARTINO and A. BARLETTA: *XI Dias Boquim. Lat.* (1973) 122 d.
- [15] TER SCHEGGET J. and P. BORST: *Biochim. Biophys. Acta* **246** (1971) 236.
- [16] ESCOBAR DEL REY F., G. MORREALE DE ESCOBAR, T. JOLIN and C. LOPEZ-QUIJADA: *Endocrinology* **83** (1968) 41.
- [17] BURTON K.: *Bioch. J.* **62** (1956) 315.
- [18] CERIOTTI G. *J. Biol. Chem.* **214** (1955) 59.
- [19] LOWRY O. M., N. J. ROSENBOUGH, A. L. FARR and R. J. RADNALL: *J. Biol. Chem.* **193** (1951) 265.
- [20] GRIESBACH W. E. and D. H. PURVES: *Brit. J. Exp. Path.* **26** (1945) 13.
- [21] CONTOPOULOS A. N. and A. A. KONEFF: *Acta Endocr. (Kobenhavn)* **42** (1963) 275.
- [22] EVANS E. S., L. L. ROSENBERG, A. B. EVANS and A. A. KONEFF: *Endocrinology* **74** (1963) 770.
- [23] LAZO-WASEN E. A.: *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.* **103** (1960) 300.
- [24] SCHOOLEY R. A., S. FRIEDKIN and E. S. EVANS: *Endocrinology* **79** (1966) 1053.
- [25] STEINETS B. G. and V. L. BEACH: *Endocrinology* **72** (1963) 45.
- [26] GREER M. A., Y. GRIM and H. STUDER: *Endocrinology* **83** (1968) 1193.
- [27] WOLFF J. and J. L. CHAIKOFF: *J. Biol. Chem.* **174** (1948) 555.
- [28] RABEN M. S.: *Endocrinology* **45** (1949) 296.
- [29] YAMAMOTO KUNIHRO, TOSHIMASA ONAYA, TAKASHI YAMADA and MASANOBU KOTANI: *Endocrinology* **90** (1972) 986.
- [30] EVANS E. S., A. TAUROG, A. A. KONEFF, G. D. POTIER, M. E. SIMPSON: *Endocrinology* **67** (1960) 619.
- [31] EVANS E. S., R. W. SCHOOLEY, A. B. EVANS, C. A. JENKINS and A. TAUROG: *Endocrinology* **78** (1966) 983.
- [32] TAUROG A., E. S. EVANS: *Endocrinology* **80** (1967) 915.
- [33] REMINGTON R. E.: *J. of Nutrition* **13** (1937) 223.
- [34] PAGET G. E., J. M. THORPE: *Nature* **119** (1963) 1307.
- [35] LEE D., PEACHEY S. and ROGER L. GREIF.: *Endocrinology* **77** (1965) 61.
- [36] WILSON J. W. and E. H. LEDUC: *J. Cell. Biol.* **16** (1963) 281.
- [37] LEHNINGER A. L. and M. SCHNEIDER: *J. Biophys. Bioch. Cytol.* **5** (1959) 109.
- [38] GREIF R. L.: *Endocrinology* **70** (1962) 511.
- [39] SACCONI C., M. N. GADALETA, E. QUAGLIARIELLO: *Biochim. Biophys. Acta* **138** (1967) 474.
- [40] PARSONS P. and M. V. SIMPSON: *J. Biol. Chem.* **248** (1973) 602.

- [41] HOCH F. L.: *New. Eng. J. Med.* **266** (1962) 446.
- [42] MARTIUS C., B. HESS: *Arch. Biochem.* **33** (1951) 386.
- [43] MALEY C.F., M. A. LORDY: *J. Biol. Chem.* **215** (1955) 377.
- [44] PLATNEK LEUNISSEN D.A. and R. L. A. LEUNISSEN: *Endocrinology* **84** (1969) 456.
- [45] RACKER E.: *Mechanisms in Bioenergetics*, Academic Press, N. Y. (1965) 145.
- [46] PULLMAN M. E., H. S. PENEFSKY and E. RACKER, in T. W. GOODWIN, O. LINDBERG (eds): *Biological Structure and Function*, Academic Press, N. Y. (1961) 241.
- [47] TATA J. R. in « Biochemical Action of Hormones », G. Litwack, E. Kritchevski editors, Academic Press (1970) N. Y.
- [48] MITRA R. S. and I. A. BERNSTEIN: *J. Biol. Chem.* **245** (1970) 1255.
- [49] STUART LINN, I. R. LEHMAN: *J. Biol. Chem.* **241** (1966) 2694.
- [50] NEUBERT D., E. OBERDISSE, R. BASS. in E. C. SLATER, J. M. TAGER, S. PAPA, E. QUAGLIARIELLO: *Biochemical aspects of the biogenesis of mitochondria*, Adriatica Editrice, Bari, Italy, 1968, p. 103.
- [51] MYERS D. K., E. C. SLATER: *Biochem. J.* **67** (1957) 558.
- [52] GROSS J., R. L. RABINOWITZ: *J. Cell. Biol.* **48** (1971) 20.
- [53] GROSS NICHOLAS J., S. GEIZ, M. RABINOWITZ: *J. Biol. Chem.* **244** (1969) 1552.
- [54] REICHLIN SEYMOUR, J. B. MARTIN, R. L. BOSHSANS, DON S. SCHALCH, J. G. PIERCE and JUDY BOLLINGER: *Endocrinology* **87** (1970) 1022.
- [55] ESCOBAR DEL REY F., M. D. GARCIA, G. MORREALE DE ESCOBAR: *XI Dias Bioquim. Lat.* (1973) d 118.
- [56] YAMADA TAKASHI and ALAN E. LEVVIS: *Endocrinology* **82** (1968) 91.
- [57] ASLING C. W., E. S. EVANS: *Endocrinology* **72** (1963) 283.
- [58] EVANS E. S., L. L. ROSEMBERG, A. B. EVANS, A. A. KONEFF: *Endocrinology* **74** (1964) 770.
- [59] BARKER S. B., M. SHIMADA, M. MAKIOCHI: *Endocrinology* **76** (1965) 115.
- [60] YOUSEF M. K., M. D. JOHNSON: *Endocrinology* **82** (1968) 353.
- [61] LEVEY H. A.: *Endocrinology* **71** (1962) 763.
- [62] CH'IH J. J., G. F. KALF: *Arch. Bioch. Biophys.* **133** (1969) 38.
- [63] KAROL M. M., M. V. SIMPSON: *Science* **162** (1968) 470.
- [64] DOUGLAS J. E.: *Bull. Hopkins Hosp.* **114** (1964) 253.
- [65] TAPLEY D. F.: *J. Biol. Chem.* **222** (1956) 325.
- [66] GREIF R. L. and J. A. ALFANO: *Endocrinology* **75** (1964) 770.
- [67] PISAREV M. A. and M. E. ITOIZ: *Endocrinology* **90** (1972) 1409.
- [68] JASPER M. G. and J. A. BRASEL: *Endocrinology* **92** (1973) 194.
- [69] BALSAM A.: *Endocrinology* **91** (1972) 355.

Sui sistemi lineari di forme a jacobiana indeterminata

*Nota del Dott. Alessandro Di Sante
presentata dal socio ordinario Alfredo Franchetta*

(Adunanza del 7 giugno 1973)

RIASSUNTO. — Si stabilisce una proposizione sui sistemi lineari irriducibili di forme di S_r composti con una congruenza di varietà di dimensione positiva e la si utilizza per ritrovare taluni risultati noti e per classificare i sistemi lineari di superfici cubiche di S_3 a jacobiana indeterminata.

SUMMARY. — The A. establishes a proposition concerning the irreducible linear systems of forms in S_r composed of an congruence of varieties of positive dimension.

The result is used to find again known results, and to characterize the linear systems of cubic surfaces in S_3 , whose Jacobian vanishes identically.

In questa Nota mi occupo dei sistemi lineari irriducibili di forme di un S_r complesso di dimensione $\delta \geq r$ a jacobiana indeterminata, tali cioè che se

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_\delta f_\delta = 0$$

è l'equazione del sistema, la matrice

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (i = 0, \dots, \delta ; j = 0, \dots, r)$$

ha rango $p \leq r$.

Se $p = r - h + 1$, essi, come è noto, [1], sono tutti e soli i sistemi lineari composti con una congruenza di varietà di dimensione h (involuzione di specie h). Il problema della classificazione di tali sistemi è stato finora affrontato soltanto per le quadriche e limitatamente ai primi valori di r . Qui si stabilisce, nel n. 1, una proposizione riguardante un qualunque sistema del tipo anzidetto ed essa viene utilizzata, nel n. 2, per ritrovare, in modo assai semplice, la classificazione dei sistemi di quadriche di S_3 , [3],

nel n. 3 un interessante risultato di DECOLI, [4], sui sistemi di quadriche di S_r e nel n. 4 per classificare i sistemi lineari di superfici cubiche di S_3 .

N. 1. - Supponiamo che il sistema lineare irriducibile $|F|$ di forme di S_r considerato, di dimensione $\delta \geq r$, sia composto con una congruenza $\{V_h\}$ di varietà di dimensione h .

Le varietà V_h che appartengono ad una forma F irriducibile del sistema costituiscono una congruenza $\{V_h\}_F$ di varietà su F .

In particolare se $|F|$ è un sistema di forme di S_{h+2} , $\{V_h\}$ è un fascio di ipersuperficie di F e si ha che le altre forme del sistema segano su F un sistema (caratteristico) di dimensione $\delta - 1$ di ipersuperficie la cui parte variabile è composta con $\delta - 1$ ipersuperficie del fascio.

Più in generale (se $r > h + 2$) detta Φ_{h+1} la varietà intersezione di $r - h$ forme di $|F|$ si ha che le varietà di $\{V_h\}$ che appartengono a Φ_{h+1} costituiscono un fascio $\{V_h\}_\Phi$ e le forme $|F|$ segano su Φ_{h+1} un sistema di dimensione $\delta - r + h$ di ipersuperficie la cui parte variabile è spezzata in varietà di $\{V_h\}$.

Dimostriamo ora il teorema:

« Se il sistema $|F|$ è composto con una congruenza $\{V_h\}$, detta V_h^0 la generica varietà di $\{V_h\}$ e detto P_0 un punto generico di V_h^0 si ha che ogni forma del sistema che abbia un punto doppio in P_0 passa doppiamente per V_h^0 ».

Consideriamo prima il caso $r = h + 2$.

Indichiamo con F' una forma irriducibile di $|F|$ che passi semplicemente per V_h^0 . Se F_0 è una forma del sistema che ha un punto doppio in P_0 , la sua sezione con F' ha un punto multiplo in P_0 .

Ciò comporta che V_h^0 è componente multipla della ipersuperficie sezione, ossia che F_0 è tangente ad F' lungo V_h^0 .

Considerando ora un'altra forma F'' irriducibile, passante semplicemente per V_h^0 e non tangente ad F' lungo V_h^0 , si ha che F_0 risulta tangente anche ad F'' lungo V_h^0 . Ne segue che F_0 contiene doppiamente V_h^0 .

Passiamo ora al caso $r > h + 2$.

Indichiamo con F' una forma del sistema irriducibile che passi semplicemente per V_h^0 e con Φ_{h+1} la generica sezione di F' con altre $r - h - 1$ forme del sistema passanti per V_h^0 .

Sia ora F_0 una forma del sistema che ha un punto doppio in P_0 . Con un'argomentazione analoga a quella usata nel caso precedente si vede che F_0 è tangente a Φ_{h+1} lungo V_h^0 .

Siccome questo avviene per tutte le varietà Φ_{h+1} ottenute nel modo anzidetto ne segue che F_0 è tangente ad F' lungo V_h^0 .

Se ora si considera un'altra forma F'' passante per V_h^0 e non tangente ad F' lungo V_h^0 , si ha che F_0 è tangente anche ad F'' lungo V_h^0 e si conclude che F_0 passa doppiamente per V_h^0 .

N. 2. - Supponiamo ora che $|F|$ sia un sistema di dimensione δ di quadriche di S_r ($\delta \geq r$), composto con la congruenza $\{V_h\}$.

Una quadrica \bar{F} del sistema che abbia un punto doppio in un punto generico di S_r , passa, per il teorema dimostrato nel n. 1, doppiamente per la varietà \bar{V}_h della congruenza passante per quel punto.

Siccome i punti doppi di una quadrica costituiscono uno spazio lineare ne segue che \bar{F} possiede come spazio doppio lo spazio di appartenenza di \bar{V}_h .

Si ha pertanto che « lo spazio di appartenenza di una V_h ha dimensione $k < r$ e che tale spazio è doppio per qualche quadrica del sistema ».

Di qui segue che gli spazi S_k di appartenenza della varietà V_h formano una congruenza.

Consideriamo infatti un sistema lineare di dimensione r subordinato al sistema $|F|$ che risulterà anch'esso composto con la congruenza $\{V_h\}$.

Siccome esiste una sola quadrica di tale sistema che ha un punto doppio in un generico punto P di S_r , esisterà uno solo degli S_k di appartenenza delle varietà V_h che passa per P .

Ciò comporta che le quadriche del sistema che passano per un punto di un S_k passano per una stessa V_h appartenente allo S_k .

Sicchè in S_k c'è una congruenza di varietà V_h e il sistema sezione del sistema dato coll' S_k è composto con questa congruenza.

Se la dimensione del sistema segato fosse $\geq k$, per una proprietà già vista le varietà della congruenza dovrebbero appartenere ad uno spazio di dimensione $< k$, contro l'ipotesi.

Ne segue che lo S_k si stacca dal sistema con k condizioni al più. Si ha quindi:

« Nel sistema lineare delle quadriche di $|F|$ passanti per un punto P esiste, per k opportuno, un sistema subordinato di dimensione $\delta - k$, le cui quadriche contengono un S_k per P » ($0 < k < r$).

Questa proprietà è stata rilevata da L. DEGOLI in [4]. Qui oltre che assegnarne una dimostrazione che ci sembra più soddisfacente, si è dato un significato geometrico all'intero k che interviene nell'enunciato in quanto esso risulta la dimensione dello spazio di appartenenza di una varietà della congruenza $\{V_h\}$ con cui è composto il sistema.

N. 3. - Applichiamo quanto detto finora alla determinazione dei sistemi lineari di quadriche di S_3 di dimensione $\delta \geq 3$, a jacobiana indeterminata.

Vale in proposito il teorema seguente di BONFERRONI, [3]: « i sistemi di quadriche a jacobiana indeterminata di dimensione $\delta \geq 3$ che non sono costituiti da coni concentrici sono: 1) il sistema ∞^3 di quadriche contenenti un sistema ∞^2 di quadriche spezzate in due piani di un fascio; 2) il sistema ∞^3 delle quadriche passanti per due rette sghembe (distinte o infinitamente vicine) ».

Osserviamo anzitutto che, per quanto si sa al n. 1, il sistema considerato è composto con una congruenza di curve che indicheremo con $\{\Gamma\}$.

Per quanto si è detto al n. 2 le curve Γ se non sono rette sono comunque curve piane e quindi coniche, i piani di tali coniche costituendo un fascio Σ .

In quest'ultimo caso detto α un piano di Σ e P un suo punto generico, si ha che esiste un sistema lineare di dimensione $\delta - 2$ di quadriche passanti per P e contenenti α .

Ciascuna di queste quadriche è costituita da α e da un piano β che appartiene anch'esso a Σ .

Infatti detto P' un punto di β e γ la conica di $\{\Gamma\}$ passante per P' , si ha che il piano β deve contenere la conica γ , pertanto deve stare nel fascio Σ .

Se ne deduce che $\delta - 2 = 1$ e quindi $\delta = 3$. È immediata la verifica che un sistema siffatto è a jacobiana indeterminata.

Supponiamo ora che $\{\Gamma\}$ sia un sistema ∞^2 di rette. Se nel sistema dato esiste una quadrica Q non degenera si ha che le curve caratteristiche del sistema su Q hanno le parti variabili spezzate in $\delta - 1$ rette, ovviamente appartenenti alla stessa schiera.

D'altra parte l'intersezione di 2 quadriche non può contenere più di 2 rette della stessa schiera, si ha dunque $\delta - 1 = 2$, cioè $\delta = 3$.

La parte fissa del sistema caratteristico deve essere formata da 2 rette dell'altra schiera.

Consideriamo infine il caso in cui le quadriche del sistema sono tutte degeneri (ma non tutte riducibili).

Detta Q una quadrica irriducibile del sistema la parte variabile delle curve caratteristiche su Q deve essere formata da generatrici di coni e questo comporta che tutte le quadriche hanno il vertice nel vertice di Q .

N. 4. - Svolgeremo adesso un'ulteriore applicazione delle proprietà esposte nel n. 1 determinando i sistemi lineari di dimensione $\delta \geq 3$ di superfici cubiche a jacobiana indeterminata.

Detto $|F|$ il sistema delle superfici cubiche considerato e detta $\{\Gamma\}$ la congruenza delle curve con cui $|F|$ è composto si ha, in primo luogo, che le curve Γ non sono sghembe. Infatti per il teorema del n. 1 esiste una superficie del sistema per cui una curva Γ è doppia.

Si ha pertanto che *le curve Γ possono essere cubiche piane, coniche oppure rette.*

1) *Supponiamo che le curve Γ siano cubiche piane.*

Si ha allora che i piani delle curve Γ costituiscono un fascio. Sia infatti π uno di tali piani e sia $\bar{\Gamma}$ una curva di $\{\Gamma\}$ appartenente a π . Esiste allora un sistema lineare di dimensione $\delta - 1$ di superfici di $|F|$ contenenti $\bar{\Gamma}$ e quindi un sistema $|F|^*$ di dimensione $\delta - 2$ di superfici di $|F|$ contenenti π .

Tali superfici saranno spezzate in π e in una quadrica residua.

Consideriamo ora un punto P di π non appartenente a $\bar{\Gamma}$ e indichiamo

con Γ' la curva di $\{\Gamma\}$ passante per P. Tutte le superfici di $|\mathbb{F}|$ e quindi anche di $|\mathbb{F}|^*$ passano per Γ' e ne segue ovviamente che Γ' appartiene a π .

Sicchè π contiene un fascio di curve di $\{\Gamma\}$, onde i piani delle curve Γ costituiscono un sistema algebrico Σ di dimensione 1.

Per provare la proprietà enunciata resta da vedere che Σ è di indice 1.

Consideriamo infatti un punto P generico e supponiamo per assurdo che per esso passino due piani π e π' di Σ .

Siccome tanto in π che in π' è contenuto un fascio di curve di $\{\Gamma\}$ si avrebbe che per P passerebbero due curve di Γ e questo è assurdo.

Consideriamo ora una superficie di $|\mathbb{F}|^*$ che risulterà spezzata in π e in una quadrica Q.

Si vede subito che Q è spezzata in due piani di Σ . Infatti se Q non si riduce al piano π contato due volte, detto X un punto di Q non appartenente a π , si ha che Q deve contenere la cubica piana di $\{\Gamma\}$ passante per X e quindi il piano di tale cubica. Si è così provato che esiste in $|\mathbb{F}|$ un sistema lineare di dimensione $\delta - 2$ di superfici spezzate in un piano comunque assegnato π di Σ e in altri 2 piani di Σ . Ne segue che « esiste in $|\mathbb{F}|$ un sistema lineare di dimensione $\delta - 1$ di superfici spezzate in tre piani di Σ , i tre piani di una superficie variando in una $g_3^{\delta-1}$ di Σ ».

Di qui si deduce che $\delta - 1 \leq 3$ e quindi $\delta \leq 4$.

Concludiamo che « i sistemi del tipo considerato possono avere dimensione $\delta = 3, 4$ e sono caratterizzati dalla proprietà di contenere un sistema lineare $\infty^{\delta-1}$ di terne di piani di un fascio ».

2) Supponiamo che le curve Γ siano coniche.

Dimostriamo che i piani di tali coniche appartengono ad un fascio φ .

Indichiamo con π uno dei piani, con Γ una conica di $\{\Gamma\}$ appartenente a π .

Esiste una superficie di $|\mathbb{F}|$ che contiene doppiamente $\bar{\Gamma}$. Essa è spezzata in π e in una quadrica. Detto P un punto generico di π non appartenente a $\bar{\Gamma}$, si ha che tutte le superfici di $|\mathbb{F}|$, e quindi anche quella dianzi considerata, devono passare per la conica di $\{\Gamma\}$ passante per P.

Si conclude che tale conica appartiene a π e che π contiene un fascio di coniche di $\{\Gamma\}$.

La dimostrazione procede poi come nel caso precedente.

Un piano π di φ si stacca da $|\mathbb{F}|$ con due condizioni. Indichiamo con ψ_π il sistema lineare di dimensione $\delta - 2$ residuo di π rispetto a $|\mathbb{F}|$.

Il sistema ψ_π è ovviamente anch'esso composto con $\{\Gamma\}$, di più si ha che è composto con $\{\Gamma\}$ anche il sistema lineare Ψ congiungente.

Si ha infatti che l'insieme delle quadriche composte con $\{\Gamma\}$ è un sistema lineare, poichè se Q e Q' sono due quadriche composte con $\{\Gamma\}$, ogni quadrica del fascio determinato da Q e Q', segnando sopra un piano π una

conica appartenente al fascio individuato dalle coniche secondo cui Q e Q' intersecano π , è composta con $\{\Gamma\}$.

Il sistema Ψ ha dimensione 1 se ϕ_π è un fascio indipendente da π .

Questa circostanza può verificarsi se $\delta = 3$. In proposito si può precisare che, assegnati comunque i fasci irriducibili di quadriche ϕ_π e il fascio di piani φ , esiste un sistema $[F]$ di dimensione 3 per cui φ e ϕ_π abbiano i significati anzidetti. Tale è infatti il sistema delle superfici luogo delle intersezioni di piani e quadriche di φ e ϕ_π corrispondenti in una proiettività.

Se Ψ è di dimensione > 1 un piano π di φ appartiene ad una quadrica di Ψ che risulterà formata da π e da un piano π' il quale, essendo anche esso composto con $\{\Gamma\}$, apparterrà a φ .

Ne segue che Ψ è subordinato a un sistema del tipo indicato nel n. 2 e quindi ha dimensione non superiore a 3.

Ne segue ancora che il sistema $[F]$ è in ogni caso subordinato a un sistema $[\bar{F}]$ di dimensione uguale a 5, per cui ϕ_π ha dimensione 3, nel quale caso ϕ_π è indipendente da π . L'esistenza di sistemi siffatti è ovvia in quanto basta, per costruirli, combinare linearmente le superfici cubiche spezzate nelle quadriche di $\phi_\pi = \Psi$ e in un piano di φ .

Nel caso che le superfici cubiche siano rigate dimostriamo il seguente teorema:

« Se un sistema lineare ∞ di superfici cubiche rigate è composto con una congruenza di curve tali curve sono rette ».

Infatti le superfici del sistema hanno in comune la retta doppia a ; detto P un punto qualunque, le superfici del sistema che passano per P segano il piano α di P e di a secondo la retta a contata due volte e una retta per P , quindi un sistema di curve che ha al più dimensione 1. Ne segue che il piano α si stacca dalle superfici del sistema con due condizioni al più e quindi anche che fra le superfici del sistema lineare dato che passano per P ve ne sono di quelle che contengono il piano α , nelle nostre ipotesi.

Siccome anche tali superfici spezzate devono contenere la curva della congruenza passante per P si ha che questa curva appartiene al piano α e quindi deve essere una retta. Ora è ben noto che una congruenza di rette di ordine 1 di S_3 è di uno dei tipi seguenti:

- a) stella di rette;
- b) insieme delle corde di una cubica gobba;
- c) insieme delle rette che si appoggiano ad una curva razionale C d'ordine n e a una retta r ($n - 1$) — secante, [6].

È ovvio che nel caso *a*) le superfici del sistema sono coni col vertice in un punto.

Il caso *b*) non può presentarsi.

Supponiamo infatti che esista un sistema $[F]$ di superfici cubiche rigate

composto con una congruenza del tipo b) e indichiamo con C la cubica gobba base della congruenza.

Le superfici di $|F|$ hanno una retta doppia a in comune alla quale dovrebbero appoggiarsi tutte le rette della congruenza, e questo è assurdo.

Nel caso c) le superfici di $|F|$ devono avere come retta doppia la r e passare per C ; ne segue ovviamente $n \leq 3$. Esistono effettivamente sistemi lineari di dimensione ≥ 3 per ognuno dei valori di $n = 1, 2, 3$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERTINI E. « Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi » Pisa, Spoerri, 1907 (2° edizione, Messina, Principato 1923).
- [2] BONERA P. « Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente » Nota I Boll. U.M.I. Settembre 1966; Serie III, Anno XXI, N. 3.
— « Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente » Nota II Boll. U.M.I. Dicembre 1966; Serie III, Anno XXI, N. 4.
— « Un teorema sui sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente e alcune sue applicazioni ». Boll. U.M.I. Giugno 1967; Serie III, Anno XXII, n. 2.
— « Una proprietà caratteristica della superficie di Veronese ». Boll. U.M.I. Aprile 1969; Serie IV, Anno II, n. 2.
- [3] BONFERRONI C. « Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare ». « R. Acc. Sc. Torino » Vol. 50, 1914 - 15.
- [4] DEGOLI L. « Sui sistemi lineari di quadriche a jacobiana identicamente nulla di caratteristica $\leq r$ ». « Acc. Sc. Bologna, Rend ». Serie XI, Tomo X, 1963.
- [5] MURACCHINI L. « La varietà V_3 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria ». Riv. Univ. Parma. Parte I, 2, 435-462 (1951). Parte II, 3, 75-89 (1952).
- [6] PASCAL E. « Repertorio di Matematiche Superiori ». Parte II; Geometria.
- [7] TERRACINI A. « Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà ». « Atti R. Accad. Sci. Torino », (a) XLIX. Nota I, 215-247 (1913-14); (b) LI Nota II, 695-714. (1916-17); (c) LV, Nota III, 480-500 (1919-20). (Selecta, IV, pag. 24).
— TERRACINI A. « Una osservazione sulla superficie cubica di S_3 che è generata dalle corde di una superficie di Veronese ». *Prospectives in Geometry and Relativity* Indiana Univ. Press. (40), 1966.

Spazio fibrato vettoriale delle derivazioni su una varietà differenziabile

*Nota del Dr. Innocente Candela (Bari)
presentata dal socio ordinario Alfredo Franchetta*

(Adunanza del 7 giugno 1973)

RIASSUNTO. — Si costruisce l'algebra $\tilde{\mathfrak{A}}(p)$ dei germi dei campi tensoriali differenziabili in un punto p di una varietà V , C^∞ -differenziabile. Si introduce la nozione di derivazione in $\tilde{\mathfrak{A}}(p)$ e si perviene ad uno spazio fibrato vettoriale di base V il cui modulo delle sezioni è isomorfo al modulo delle derivazioni nell'algebra tensoriale su V .

SUMMARY. — In this paper the algebra $\tilde{\mathfrak{A}}(p)$ of the germs of tensor differentiable fields at a point p of a C^∞ -differentiable manifold V has been constructed. The notion of derivation in $\tilde{\mathfrak{A}}(p)$ has been introduced and it has been found a vector bundle over V whose module of the cross-sections is isomorphic to the derivations in the tensor algebra on V .

Introduzione. — Sia V una varietà differenziabile di classe C^∞ e dimensione n e siano, per ogni aperto U di V , $\mathfrak{F}(U)$ l'algebra delle funzioni differenziabili su U , $\mathfrak{J}(U)$ l'algebra dei campi tensoriali differenziabili su U e $\mathfrak{D}(U)$ l'algebra di Lie ($\mathfrak{F}(U)$ -modulo) delle derivazioni di $\mathfrak{J}(U)$.

In questo lavoro, che ha un carattere prevalentemente metodologico, si costruisce uno spazio fibrato vettoriale E sulla base V , con fibra tipo \mathbb{R}^{n+n^2} e gruppo strutturale $GL(n+n^2, \mathbb{R})$ tale che l' $\mathfrak{F}(V)$ -modulo delle sezioni differenziabili di E sia canonicamente isomorfo a $\mathfrak{D}(V)$.

1. GERMI DI CAMPI TENSORIALI DIFFERENZIABILI.

Siano V una varietà differenziabile di classe C^∞ e dimensione n e p un punto di V . Si indichino con \mathfrak{a}_p l'insieme degli intorno aperti di p e con $\mathfrak{J}(U)$, per ogni $U \in \mathfrak{a}_p$, l'algebra dei campi tensoriali differenziabili su U . Si ponga:

$$\mathfrak{J}(p) = \bigcup_{U \in \mathfrak{a}_p} \mathfrak{J}(U).$$

In $\mathfrak{J}(p)$ si consideri la relazione di equivalenza \mathfrak{R} così definita:

$$T, T' \in \mathfrak{J}(p), T \mathfrak{R} T' \iff \exists U \in \mathfrak{A}_p \ni T/U = T'/U$$

e, posto $\tilde{\mathfrak{J}}(p) = \mathfrak{J}(p)/\mathfrak{R}$, sia $\sigma: \mathfrak{J}(p) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{J}}(p)$ la surgezione canonica.

DEFINIZIONE 1.1. — Per ogni $T \in \mathfrak{J}(p)$, $\sigma(T)$ si chiama il *germe* di T in p e si indica con \tilde{T} ; $\tilde{\mathfrak{J}}(p)$ si chiama *insieme dei germi di campi tensoriali differenziabili in p* .

I campi tensoriali appartenenti a $\mathfrak{J}(p)$ aventi lo stesso germe in p , \tilde{T} , assumono in p lo stesso valore, che prende il nome di valore di \tilde{T} in p e si denota con \tilde{T}_p .

Si definiscono in $\mathfrak{J}(p)$ tre leggi di composizione al modo seguente

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $T \in \mathfrak{J}(p)$, con $T \in \mathfrak{J}(U)$, αT è il prodotto di α per T in $\mathfrak{J}(U)$;

per ogni $(T, T') \in (\mathfrak{J}(p))^2$, con $T \in \mathfrak{J}(U)$ e $T' \in \mathfrak{J}(U')$, si pone:

$$T + T' = T/U \cap U' + T'/U \cap U',$$

$$T \otimes T' = T/U \cap U' \otimes T'/U \cap U'.$$

Le tre leggi di composizione anzidette sono compatibili con \mathfrak{R} e, per passaggio al quoziente, viene definita in $\tilde{\mathfrak{J}}(p)$ una struttura di algebra associativa.

Per ogni $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ si indichi con $\mathfrak{J}_s^r(p)$ ($\mathfrak{J}_0^0(p) = \mathfrak{F}(p)$) l'insieme dei campi tensoriali differenziabili in p di specie (r, s) e si ponga

$$\sigma(\mathfrak{J}_s^r(p)) = \tilde{\mathfrak{J}}_s^r(p) \quad (\tilde{\mathfrak{J}}_0^0(p) = \tilde{\mathfrak{F}}(p)).$$

La struttura di $\tilde{\mathfrak{J}}(p)$ induce su $\tilde{\mathfrak{F}}(p)$ una struttura di algebra (algebra dei germi di funzioni differenziabili in p) e su $\tilde{\mathfrak{J}}_s^r(p)$, per ogni $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, una struttura di $\tilde{\mathfrak{F}}(p)$ -modulo ed una struttura di spazio vettoriale reale.

Si ha infine che:

PROPOSIZIONE 1.1. — Siano (r, s) e (h, k) due coppie di interi naturali tali che $1 \leq h \leq r$ e $1 \leq k \leq s$, si indichi con C_k^h l'applicazione di $\mathfrak{J}_s^r(p)$

in $\mathfrak{F}_{s-1}^{r-1}(p)$ la quale associa ad ogni $T \in \mathfrak{F}_s^r(p)$ il campo tensoriale contratto di T ottenuto saturando l' h -esimo indice di controvarianza con il k -esimo indice di covarianza. Esiste allora un'unica applicazione $\tilde{C}_k^h \tilde{\mathfrak{F}}(p)$ -lineare di $\tilde{\mathfrak{F}}_s^r(p)$ in $\tilde{\mathfrak{F}}_{s-1}^{r-1}(p)$ tale che

$$\tilde{C}_k^h(\sigma(T)) = \sigma(C_k^h(T)), \quad \forall T \in \mathfrak{F}_s^r(p).$$

\tilde{C}_k^h si chiama *contrazione rispetto all' h -esimo indice di controvarianza ed al k -esimo indice di covarianza*.

2. COMPONENTI DI UNA DERIVAZIONE.

E' opportuno ricordare (cfr. [1], pag. 30) che, se $\mathfrak{J}(V)$ è l'algebra dei campi tensoriali differenziabili su V , una derivazione D di $\mathfrak{J}(V)$ è un'applicazione R -lineare di $\mathfrak{J}(V)$ in sè soddisfacente le seguenti condizioni:

- a) $\forall K, K' \in \mathfrak{J}(V) : D(K \otimes K') = (DK) \otimes K + K \otimes DK'$;
- b) $\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2 : D(\mathfrak{F}_s^r(U)) \subset \mathfrak{F}_s^r(V)$, ossia D conserva la specie;
- c) D è permutabile con ogni contrazione.

Se D è una derivazione di $\mathfrak{J}(V)$ e (U, φ) è una carta di V , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, D induce, in modo naturale, una derivazione dell'algebra dei campi tensoriali differenziabili su U $\mathfrak{J}(U)$, che si indica con D_U .

DEFINIZIONE 2.1. — Posto $e_i = \partial/\partial x^i$, sia

$$(2.1) \quad D_U x^i = X^i, \quad \text{con } i = 1, \dots, n,$$

$$(2.2) \quad D_U e^i = D_i^j e_j \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n;$$

le funzioni X^i, D_i^j , definite su U , sono ivi differenziabili e si chiamano *le componenti di D rispetto alla carta (U, φ)* .

Sussistono le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 2.1. — Siano $(U, \varphi), (U', \varphi')$, con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\varphi' = (x^{1'}, \dots, x^{n'})$, due carte di V tali che $U \cap U' \neq \emptyset$ e siano X^i, D_i^j le componenti di D rispetto a (U, φ) e $X^{i'}, D_{i'}^{j'}$ quelle di D rispetto

a (U', φ') ; su $U \cap U'$ si hanno le seguenti relazioni:

$$(2.3) \quad X^{i'} = \theta_{i'}^{i'} X^i;$$

$$(2.4) \quad D_{i'}^{j'} = D_i^j \theta_{i'}^i \theta_j^{j'} - X^k \theta_{ik}^{j'} \theta_{i'}^k,$$

ove $\theta_{i'}^i = \partial x^i / \partial x^{i'}$, $\theta_i^{i'} = \partial x^{i'} / \partial x^i$, $\theta_{ik}^{j'} = \partial^2 x^{j'} / \partial x^i \partial x^k$.

PROPOSIZIONE 2.2. — Assegnate, per ogni carta (U, φ) di V , le funzioni X^i, D_i^j differenziabili su U e soddisfacenti le relazioni (2.3) e (2.4) esiste un'unica derivazione di $\mathfrak{F}(V)$ avente X^i e D_i^j come componenti rispetto a (U, φ) .

3. DERIVAZIONI IN UN PUNTO.

Sia $\tilde{\mathfrak{F}}(p)$ l'algebra dei campi tensoriali differenziabili in un punto p di V e, indicato con $T_s^r(p)$, per ogni $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, lo spazio dei tensori di specie (r, s) in p , sia $T(p) = \bigoplus_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} T_s^r(p)$ l'algebra dei tensori in p .

DEFINIZIONE 3.1. — Si chiama *derivazione in p* ogni applicazione R -lineare $D_p: \tilde{\mathfrak{F}}(p) \rightarrow T(p)$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$a) \quad \forall \tilde{H}, \tilde{K} \in \tilde{\mathfrak{F}}(p) : D_p(\tilde{H} \otimes \tilde{K}) = \tilde{H}_p \otimes D_p \tilde{K} + (D_p \tilde{H}) \otimes \tilde{K}_p;$$

$$b) \quad \forall (r, s) \in \mathbb{N}^2 : D_p(\tilde{\mathfrak{F}}_s^r(p)) \subset T_s^r(p);$$

$$c) \quad \forall (r, s), (h, k) \in \mathbb{N}^2 \ni 1 \leq h \leq r, 1 \leq k \leq s, \forall \tilde{T} \in \tilde{\mathfrak{F}}_s^r(p) :$$

$$D_p(\tilde{C}_k^h(\tilde{T})) = C_k^h(D_p(\tilde{T})),$$

ove \tilde{C}_k^h è la contrazione definita nella Prop. 1.2 e C_k^h è l'analoga contrazione definita in $T_s^r(p)$.

Si indichi con \mathfrak{D}_p l'insieme delle derivazioni in p .

Si può munire \mathfrak{D}_p , in modo naturale, di una struttura di spazio vettoriale reale e di una struttura di $\tilde{\mathfrak{F}}(p)$ -modulo.

DEFINIZIONE 3.2. — Siano D_p una derivazione in p e (U, φ) una carta di V tale che $p \in V$.

Posto:

$$(3.1) \quad D_p \tilde{x}^i = X^i, \quad \text{con } i = 1, \dots, n;$$

$$(3.2) \quad D_p \tilde{e}_i = D_i^j (e_j)_p, \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n,$$

i numeri reali X^i, D_i^j si chiamano *componenti di D_p rispetto alla carta (U, φ)* .

Comunque si considerino $n + n^2$ numeri reali X^i, D_i^j , esiste un'unica derivazione in p le cui componenti rispetto alla carta (U, φ) sono i numeri X^i, D_i^j prefissati.

Ne consegue che lo spazio vettoriale \mathfrak{D}_p ha dimensione $n + n^2$.

Se (U, φ) è una carta di V tale che $p \in U$, posto $J = \{1, \dots, n + n^2\}$, per ogni $\alpha \in J$, con $(d_\alpha)_p$ si indica la derivazione in p così definita:

per $1 \leq \alpha \leq n$, $(d_\alpha)_p$ ha componenti rispetto a (U, φ) X^i, D_i^j tali che $X^i = \delta_\alpha^i$ (ove i δ_α^i sono i simboli di Kronecker) e $D_i^j = 0$, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$; per $n + 1 \leq \alpha \leq n + n^2$, se h e k sono gli unici naturali tali che $1 \leq h \leq n$, $1 \leq k \leq n$ e $\alpha = n + k + n(h - 1)$, $(d_\alpha)_p$ ha componenti X^i, D_i^j tali che $X^i = 0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $D_j^i = 0$, per ogni $(i, j) \neq (h, k)$, e $D_k^h = 1$.

La famiglia $((d_\alpha)_p)_{\alpha \in J}$ è una base di \mathfrak{D}_p detta *base naturale di \mathfrak{D}_p associata alla carta (U, φ)* .

Si può osservare che, se D_p è una derivazione in p avente componenti X^i, D_i^j rispetto a (U, φ) e se $D_p = \Gamma^\alpha (d_\alpha)_p$, risulta:

$$(3.3) \quad \Gamma^\alpha = X^\alpha, \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, n;$$

$$(3.4) \quad \Gamma^\alpha = D_i^j, \quad \text{con } \alpha = n + 1, \dots, n + 1 \text{ e } \alpha = n + j + n(i - 1);$$

pertanto si dirà che Γ^α sono le componenti di D_p rispetto a (U, φ) .

Se (U, φ) e (U', φ') sono carte di V tali che $p \in U \cap U'$ e se $((d_\alpha)_p)_{\alpha \in J}$ e $((d'_{\alpha'})_{p})_{\alpha' \in J'}$ sono le basi naturali ad esse associate rispettivamente, deve risultare:

$$(d'_{\alpha'})_p = a_{\alpha'}^\alpha (d_\alpha)_p,$$

con $a = (a_{\alpha'}^\alpha)$ matrice quadrata non singolare di ordine $n + n^2$. Dalle relazioni (3.3) e (3.4), tenendo conto delle (2.3) e (2.4), si ha:

$$a_{\alpha'}^\alpha = \theta_{\alpha'}^\alpha(p), \quad \text{con } \alpha, \alpha' = 1, \dots, n;$$

$$a_{\alpha'}^\alpha = 0, \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, n \text{ e } \alpha' = n + 1, \dots, n + n^2;$$

$$a_{\alpha'}^\alpha = -\theta_{i', \alpha'}^j(p) \theta_i^{i'}(p), \quad \text{con } \alpha = n + 1, \dots, n + n^2$$

e $\alpha = n + j + n(i - 1)$ e con $\alpha' = 1, \dots, n$;

$$a_{\alpha'}^{\alpha} = \theta_i^{i'}(p) \theta_j^j(p), \text{ con } \alpha = n + j + n(i - 1)$$

e $\alpha' = n + j' + n(i' - 1)$.

DEFINIZIONE 3.3. — Considerato lo spazio vettoriale $\mathfrak{D} = \pi_{p \in V} \mathfrak{D}_p$, siano $D = (D_p)_{p \in V} \in \mathfrak{D}$ e (U, φ) una carta di V ; per ogni $p \in U$, siano Γ_p^{α} le componenti di D_p rispetto a (U, φ) . Le funzioni reali definite su $U: \Gamma^{\alpha}: p \rightarrow \Gamma_p^{\alpha}$, con $\alpha \in J$, prendono il nome di *componenti di D rispetto a (U, φ)* .

Sia $\bar{\mathfrak{D}}$ l'insieme degli elementi di \mathfrak{D} aventi le componenti rispetto a ciascuna carta di V differenziabili. $\bar{\mathfrak{D}}$ è un sottospazio vettoriale di \mathfrak{D} , inoltre su esso si ha una struttura di $\mathfrak{F}(V)$ -modulo, definendo la legge di composizione esterna nel modo seguente:

$$\forall f \in \mathfrak{F}(V), \forall D \in \bar{\mathfrak{D}}: fD \in \bar{\mathfrak{D}} \ni \forall p \in V: (fD)_p = f(p)D_p.$$

Sia \mathfrak{D}' l' $\mathfrak{F}(V)$ -modulo delle derivazioni di $\mathfrak{J}(V)$ (cfr. n. 2) e sia $D \in \mathfrak{D}'$. Per ogni punto $p \in V$, considerata una carta (U, φ) di V tale che $p \in U$ e indicate con X^i e D_i^j le componenti di D rispetto a (U, φ) , sia D'_p la derivazione in p avente per componenti rispetto alla stessa carta $X^i(p)$ e $D_i^j(p)$. Ha senso pertanto considerare $D' = (D'_p)_{p \in V} \in \mathfrak{D}$, che si dice associato alla derivazione D .

PROPOSIZIONE 3.1. — a) L'elemento $D' \in \mathfrak{D}$ associato ad una derivazione $D \in \mathfrak{D}'$ appartiene a $\bar{\mathfrak{D}}$.

b) L'applicazione $\psi: \mathfrak{D}' \rightarrow \bar{\mathfrak{D}}$ che ad ogni derivazione D di $\mathfrak{J}(V)$ fa corrispondere l'elemento associato di $\bar{\mathfrak{D}}$ è un isomorfismo, detto canonico, per le strutture di $\mathfrak{F}(V)$ -modulo.

4. FIBRATO PRINCIPALE DEI D-RIFERIMENTI.

DEFINIZIONE 4.1. — Siano $p \in V$ e \mathfrak{D}_p lo spazio delle derivazioni in p . Ogni base di \mathfrak{D}_p si chiama *d-riferimento* in p ; un *d-riferimento* in p si dice *naturale* se è una base naturale di \mathfrak{D}_p associata ad una carta (U, φ) di V tale che $p \in U$.

Indicato con L_p l'insieme dei *d-riferimenti* in p e posto:

$$P = \bigcup_{p \in V} L_p,$$

si consideri l'applicazione $\pi : P \longrightarrow V$ che ad ogni d -riferimento in un punto p associa il punto p stesso. L'applicazione π è ovviamente surgettiva e, per ogni $p \in V$, si ha: $\pi^{-1}(p) = L_p$.

Sia $(U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ l'atlante universale di V e, per ogni $\lambda \in \Lambda$ e per ogni $p \in U_\lambda$, sia $(\delta_\lambda)_p = ((d_{\lambda\alpha})_p)_{\alpha \in \epsilon}$ il d -riferimento naturale in p associato alla carta $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$. Posto: $G = GL(n + n^2, \mathbb{R})$, si consideri l'applicazione $\psi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times G$ definita nel modo seguente:

$$\forall u = (D_\alpha)_{\alpha \in \epsilon} \in \pi^{-1}(U_\lambda) : \psi_\lambda(u) = (p, \alpha),$$

ove $p = \pi(u)$ e la matrice $\alpha = (\alpha_\alpha^{\alpha'})$ è tale che $D_\alpha = \alpha_\alpha^{\alpha'} (d_{\lambda\alpha'})_p$.

L'applicazione ψ_λ è bigettiva e sia τ_λ l'unica topologia su $\pi^{-1}(U_\lambda)$ per cui ψ_λ sia un omeomorfismo.

Esiste allora, come si può provare facilmente, un'unica topologia τ su P tale che, per ogni $\lambda \in \Lambda$, $\pi^{-1}(U_\lambda)$ sia un insieme aperto e la topologia indotta da τ su $\pi^{-1}(U_\lambda)$ coincida con τ_λ . Si ha anche che lo spazio topologico P è separato.

Indicata con i_G la bigezione identica di G (*), la famiglia $(\pi^{-1}(U), (\varphi_\lambda \times i_G) \circ \psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è un atlante differenziabile su P e munisce P di una struttura di varietà differenziabile.

Si consideri ora l'applicazione $\Phi : P \times G \longrightarrow P$ così definita:

$$\forall u = (D_\alpha)_{\alpha \in \epsilon} \in P, \quad \forall \alpha = (\alpha_\alpha^{\alpha'}) \in G : \Phi(u, \alpha) = (\alpha_\alpha^{\alpha'}, D_\alpha)_{\alpha' \in \epsilon}.$$

Si verifica che:

a) Il gruppo G opera differenziabilmente e liberamente a destra su P mediante Φ ;

b) V si può identificare, in modo naturale, con lo spazio topologico quoziente di P rispetto alla relazione di equivalenza indotta da G ; π è la proiezione canonica di P su V ed è differenziabile;

c) Per ogni $\lambda \in \Lambda$, posto $\psi_{1\lambda} = \text{pr}_1 \circ \psi_\lambda$ e $\psi_{2\lambda} = \text{pr}_2 \circ \psi_\lambda$, risulta:

$$\forall u \in \pi^{-1}(U_\lambda) : \psi_{1\lambda}(u) = \pi(u);$$

$$\forall (u, \alpha) \in \pi^{-1}(U_\lambda) \times G : \psi_{2\lambda}(\Phi(u, \alpha)) = \psi_{2\lambda}(u) \alpha.$$

Si conclude che:

PROPOSIZIONE 4.1. — $P(\Phi, G, \pi, V)$ è uno spazio fibrato principale differenziabile, che si dirà fibrato dei d -riferimenti di V .

*) G si suppone identificato canonicamente con un insieme aperto di $\mathbb{R}^{(n+n^2)^2}$.

5. IL FIBRATO VETTORIALE DELLE DERIVAZIONI.

E' ben noto che G opera differenziabilmente a sinistra su R^{n+n^2} ; se $a = (a_\alpha) \in G$ e $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n+n^2}) \in R^{n+n^2}$, allora $a\xi = (a_\alpha^1 \xi^\alpha, \dots, a_\alpha^{n+n^2} \xi^\alpha)$.

Sia E , o più precisamente $E(V, R^{n+n^2}, G, P)$, lo spazio fibrato sulla base V , con fibra tipo R^{n+n^2} e gruppo strutturale G , che è associato al fibrato principale P (cfr. [1], pag. 54). E è uno spazio fibrato vettoriale reale.

Si proverà che:

PROPOSIZIONE 5.1. — *Per ogni $p \in V$, la fibra di E su p si può identificare, in modo naturale, con lo spazio vettoriale \mathfrak{D}_p delle derivazioni in p . Pertanto E prende il nome di fibrato vettoriale delle derivazioni su V .*

DIM. — Sia s la surgezione canonica di $P \times R^{n+n^2}$ su $P \times_G R^{n+n^2}$. Detta π_E la proiezione di E su V , si consideri la fibra $\pi_E^{-1}(p)$ sul punto $p \in V$ e sia $s(u, \xi) \in \pi_E^{-1}(p)$, con $u = (D_\alpha)_{\alpha \in I}$ e $\xi = (\xi^\alpha)$; allora l'elemento $\xi^\alpha D_\alpha$ è una derivazione in p e si verifica facilmente che l'applicazione $s(u, \xi) \longrightarrow \xi^\alpha D_\alpha$ di $\pi_E^{-1}(p)$ in \mathfrak{D}_p è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Dalla precedente proposizione e dalle conclusioni del n. 3, fatte le ovvie identificazioni, consegue che:

PROPOSIZIONE 5.2. — *Le sezioni differenziabili di E sono le derivazioni di $\mathfrak{J}(V)$.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU. *Foundations of differential geometry*. Interscience Publisher, 1963.
- [2] PHAM MAU QUAN. *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*. Dunod, Paris, 1969.

Alcune osservazioni sugli ultrafiltri di un anello booleano

*Nota della dott.ssa Anna Bruna de Lucia d'Andrea *)
presentata dal socio ordinario Mario Curzio*

(Adunanza del 3 novembre 1973)

RIASSUNTO. — In questa nota si studiano alcune proprietà degli ultrafiltri di un anello booleano infinito. Il risultato principale è il seguente:

Sia B un anello booleano infinito e sia Ω l'insieme degli ultrafiltri in B . Esiste $X \subseteq \Omega$ tale che $\bigcap_{F \in X} F - \bigcup_{F \notin X} F = \emptyset$.

SUMMARY. — In this paper some properties of the ultrafilters in an infinite boolean ring are studied. The main result is the following:

Let B be an infinite boolean ring and let Ω be the set of the ultrafilters in B . There is $X \subseteq \Omega$ such that $\bigcap_{F \in X} F - \bigcup_{F \notin X} F = \emptyset$.

Sia G un gruppo, ed $n(G)$ il reticolo dei suoi sottogruppi normali.

Se si suppone che ogni sottogruppo normale proprio di G contenga un sottogruppo normale minimale, ed inoltre che $n(G)$ sia dotato di un filtro F non banale tale da essere $\bigcap_{H \in F} H = \{1\}$, si osserva che, detto U un ultrafiltro contenente F , ogni elemento di U appartiene ad almeno un ultrafiltro diverso da U ¹⁾.

In particolare, se $n(G)$ costituisce un'algebra di Boole ²⁾ infinita (cioè

^{*)} Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca del C.N.R.: « Strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni ».

¹⁾ Sia $X \in U$ ed Y un sottogruppo normale minimale contenuto in X . Detto M_Y l'ultrafiltro costituito dai sottogruppi normali di G che contengono Y , si ha $X \in M_Y$ ed è evidentemente $M_Y \neq U$, altrimenti sarebbe

$$Y \leq \bigcap_{H \in F} H = \{1\}.$$

²⁾ Per la nomenclatura concernente le algebre di Boole e gli anelli booleani si veda [2] e [3].

se è $G = \prod_{i \in I} H_i$, con gli H_i sottogruppi semplici tali da aversi $i = j$ se H_i ed H_j sono abeliani ed isomorfi, ed I infinito; cfr. N. 2), un filtro F non banale che soddisfi alla condizione $\bigcap_{H \in F} H = \{1\}$ è quello costituito dagli $H \in \mathfrak{n}(G)$ tali che G/H sia prodotto diretto di un numero finito di gruppi semplici.

Pertanto è naturale chiedersi se in un generico anello di Boole infinito si può individuare un ultrafiltro contenuto nell'unione dei rimanenti ultrafiltri dell'anello.

Il problema è risolto nel N. 1, dove, tra l'altro, si stabilisce il seguente teorema:

Sia B un anello booleano infinito e sia Ω l'insieme degli ultrafiltri di B . Esiste $X \subset \Omega$ tale che sia

$$\bigcap_{F \in X} F - \bigcup_{F \notin X} F = \emptyset.$$

Inoltre si vede che, se l'anello booleano B considerato è unitario, un ultrafiltro contenuto nell'unione dei rimanenti ultrafiltri di B è privo di atomi.

Nel N. 3 poi si trova il seguente teorema:

Sia S un insieme infinito. Detto A l'anello di Boole delle parti di S , esiste un anello booleano \bar{A} , di cardinalità $|A|$ e privo di atomi tale che gli ultrafiltri di A privi di atomi sono noti se (e solo se) sono noti gli ultrafiltri di \bar{A} .

Una conseguenza di questo risultato è che un ultrafiltro contenuto nell'unione dei rimanenti ultrafiltri di un anello booleano, infinito ed unitario non sembra caratterizzabile costruttivamente.

N. 1. Sia B un anello booleano. Si ha la seguente proposizione:

(1.1). *Sia M un ultrafiltro di B ed esista l'estremo inferiore a di M . Se è $a \neq 0$, a è un atomo ed appartiene ad M .*

dim.: Sia $x \in B - \{0\}$ un minorante di M . Ne segue $x = xm$, per ogni $m \in M$, così $M \cup \{x\}$ è una parte moltiplicativamente chiusa di $B - \{0\}$ e pertanto inclusa in un ultrafiltro, onde $M \cup \{x\} = M$, cioè x appartiene ad M . Allora, se $a \neq 0$ è l'estremo inferiore di M , si ha $a \in M$. Inoltre, poiché un elemento di $B - \{0\}$ minore di a è un minorante di M , a è un atomo.

(1.2). *Sia B un anello booleano infinito ed unitario. Non può essere l somma di atomi.*

dim.: Negando la tesi, sia $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ con a_1, a_2, \dots, a_n atomi. Per ogni $x \in B - \{0\}$, si ha $x = x1 = \sum_{i=1}^n xa_i$ e risulta $xa_i = 0$ oppure $xa_i = a_i$. Ne segue che B è finito, contro l'ipotesi.

(1.3). Sia B un anello booleano infinito ed unitario. Esiste un ultrafiltro di B privo di atomi.

dim.: Sia $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la famiglia degli atomi di B . Se l'ideale da esso generato è B , si ha $1 = \sum_1^n a_i$, contro la (1.2). Esiste quindi un ideale primo di B a cui appartiene ogni atomo di B ; il suo complemento è un ultrafiltro di B privo di atomi.

(1.4). Sia B un anello booleano infinito, ed Ω l'insieme degli ultrafiltri di B . Se $F \in \Omega$ è privo di atomi, si ha

$$F \subseteq \bigcup_{G \in \Omega - \{F\}} G.$$

dim.: Sia $x \in F$. Posto $H = B - F$, si ha $(H, x) = B$ e

$$B/H \cong (x)/H \cap (x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Risulta $H \cap (x) \neq \{0\}$ perchè x non è atomo. Sia $bx \neq 0$ un elemento di $H \cap (x)$. Detto F' un ultrafiltro a cui bx appartiene, è evidentemente $F \neq F'$, ed x appartiene ad F' perchè bx vi appartiene.

(1.5). Sia B un anello booleano infinito. Un elemento di B è un atomo se e solo se appartiene ad un unico ultrafiltro di B .

dim.: Un atomo è il minimo di un ultrafiltro a cui appartiene, ed è evidente che ultrafiltri aventi lo stesso minimo coincidono. Operando come nella (1.4), si trova poi che un elemento di B , che non sia un atomo, appartiene ad almeno due ultrafiltri.

(1.6). Sia B un anello booleano infinito e sia Ω l'insieme degli ultrafiltri di B . L'anello B è unitario se e solo se è $\bigcap_{F \in \Omega} F \neq \emptyset$.

dim.: L'applicazione canonica $B \xrightarrow{\varphi} P(\Omega)$ che ad $x \in B$ associa l'insieme degli ultrafiltri di B a cui x appartiene, è iniettiva. Pertanto, se è $\bigcap_{F \in \Omega} F \neq \emptyset$, esiste un unico x appartenente ad ogni ultrafiltro. In questa ipotesi, per ogni $y \in B$, si ha $\sup \{x, y\} \geq x$, e pertanto $\sup \{x, y\}$ appartiene a tutti gli ultrafiltri; allora è $\sup \{x, y\} = x$, cioè $xy = y$, ed x è l'unità di B .

(1.7). Sia B un anello booleano infinito e sia Ω l'insieme degli ultrafiltri di B . Esiste $X \subseteq \Omega$ tale che sia

$$\bigcap_{F \in X} F - \bigcup_{F \notin X} F = \emptyset \quad ^3).$$

³⁾ Da questa proposizione segue che l'applicazione canonica $B \xrightarrow{\varphi} P(\Omega)$, di cui alla (1.6), non è suriettiva. Cfr. anche F. BERTOLINI, *Le funzioni additive nella teoria algebrica della misura*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (III), XII (1958) 155-162.

dim. Segue dalle proposizioni (1.3) e (1.4) nel caso che B sia unitario, dalla proposizione (1.6) nel caso che B non sia unitario.

N. 2. Sia G un gruppo, e sia $sn(G)$ l'insieme dei suoi sottogruppi subnormali, $n(G)$ il reticolo dei suoi sottogruppi normali. Si ha il risultato seguente:

(2.1). Per un gruppo G sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1) $sn(G)$ è un'algebra di Boole.

2) $n(G)$ è un'algebra di Boole.

3) $G = \times_{i \in I} H_i$, con gli H_i sottogruppi semplici tali che se con $(i, j) \in$

$I \times I$, H_i ed H_j sono abeliani, è $i = j$ oppure $|H_i| \neq |H_j|$.

dim.: 1) \implies 2). Sia $sn(G)$ un'algebra di Boole. Ogni $X \in sn(G)$ è dotato di un unico complemento Y e, avendosi anche $\langle X^c, Y \rangle = G$ e $X^c \cap Y = \{1\}$ per ogni $y \in Y$, ne segue $X^c = X$ e X risulta normale in G. Per l'arbitrarietà di X si ha $sn(G) = n(G)$.

2) \implies 3). Discende dal Teorema 3 di [1] e dalla distributività di $n(G)$.

3) \implies 1). Valida la 3), si constata subito che il reticolo $n(G) = sn(G)$ è isomorfo all'algebra booleana delle parti di un insieme avente cardinalità $|I|$.

Osservazione. Dalla (1.3) segue che se $n(G)$ è un'algebra di Boole infinita, si ottiene un ultrafiltro di $n(G)$ privo di atomi considerando un qualunque ultrafiltro che contenga il filtro F costituito dagli $H \in n(G)$ tali che G/H sia prodotto diretto di un numero finito di gruppi semplici.

N. 3. Sia S un insieme infinito, A l'anello di Boole delle parti di S, F l'ideale di A costituito dalle parti finite di S. Valgono le seguenti proposizioni.

(3.1) L'anello A/F è privo di atomi.

dim.: Sia $X + F$ un elemento non nullo di A/F . Si ha $X = X_1 \cup X_2$ con X_1 ed X_2 parti infinite disgiunte di S. Risulta quindi:

$$(X + F)(X_1 + F) = X X_1 + F = X_1 + F$$

ed è $X_1 + F \neq F$ perchè X_1 è infinito. Inoltre è $X_1 + F \neq X + F$; infatti si ha:

$$X + X_1 = (X \cap [X_1]) \cup ([X \cap X_1]) = X_2$$

ed X_2 non appartiene ad F perchè è infinito. Da ciò segue che $X + F$ non è un atomo.

(3.2). Gli anelli di Boole A ed A/F hanno la stessa cardinalità.

dim.: Il gruppo additivo di A ha esponente 2 e pertanto si ha

$A = F \oplus H$, con H opportuno sottogruppo di A . Una base di A ha quindi cardinalità $|A| = \alpha + \beta$ con α e β cardinalità di F e di A/F rispettivamente. Ma è $\alpha = |F| = |S|$ e, tenuto conto che $|A| > |F|$ risulta $|A/F| = |A|$.

(3.3). *Esiste un anello booleano \bar{A} , di cardinalità $|A|$ e privo di atomi, tale che gli ultrafiltri di A privi di atomi sono noti se (e solo se) sono noti gli ultrafiltri di \bar{A} .*

dim.: Sia M un ultrafiltro di A privo di atomi; $B = A - M$ è un ideale massimale di A a cui appartengono tutti gli atomi di A . Pertanto B include F ⁴⁾ e B/F è un ideale massimale di A/F , e quindi $A/F - B/F$ è un ultrafiltro di A/F .

In modo analogo si constata che ogni ultrafiltro di A/F dà luogo ad un ultrafiltro di A privo di atomi. Per le (3.1) e (3.2) si può concludere che A/F è il richiesto anello booleano \bar{A} .

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. B. D'ANDREA. *Sul reticolo $S_N(G)$* . Ric. di Mat., XVIII (1969) 128-140.
- [2] P. R. HALMOS. *Lectures on boolean algebras*. Van Nostrand, New York 1963.
- [3] R. SIKORSKI. *Boolean algebras*. Springer Verlag, Berlin 1960.

⁴⁾ Con X_1, X_2, \dots, X_n atomi di A , si ha $\{X_1, \dots, X_n\} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Studio cromatografico della composizione della frazione insaponificabile dell'olio dei semi di « *Cardiospermum Halicacabum* »

*Nota del socio ordinario Mario Covello,
del prof. Oreste Schettino e del dott. Pasquale Forgione*

(Adunanza del 3 novembre 1973)

RIASSUNTO. — È stata studiata la composizione della frazione insaponificabile dell'olio estratto dai semi di « *Cardiospermum Halicacabum* ». Dopo aver separato, in via preliminare, le varie classi di costituenti mediante cromatografia su strato sottile, si è proceduto allo studio delle singole frazioni (idrocarburi, steroli ed alcoli terpenici) per via gascromatografica.

Vengono esposti e discussi i risultati ottenuti.

SUMMARY. — The unsaponifiable fractions of « *Cardiospermum Halicacabum* » seeds oil has been studied. After preliminar separation of the various components by thin-layer chromatography, subsequent study of the single fractions (hydrocarbons, sterols and terpenes) by gas-chromatography has been performed.

The main results so far attained are described.

Lo studio della composizione dei semi e della frazione gliceridica dell'olio di « *Cardiospermum Halicacabum* », la cui coltivazione in Napoli ebbe inizio nel 1948 (1) presso la Stazione Sperimentale per le piante officinali annessa all'Orto Botanico dell'Università, è stato condotto, da un punto di vista generale, da uno di noi che ne riferì in una precedente nota (2). In tale nota, alla quale si rinvia anche per quanto riguarda le notizie botaniche sui semi in oggetto, vennero precisate le caratteristiche fisiche dell'olio nonché i principali costituenti del pannello.

La frazione acidica dell'olio di semi di *Cardiospermum* è stata oggetto, in epoca successiva, di un lavoro di CHISHOLM e HOPKINS (3) i quali hanno caratterizzato tale frazione per via gascromatografica, ponendo in risalto la particolare ricchezza di acido 11-eicosenoico che costituisce il 42% degli acidi grassi totali.

Non si sono reperite, invece, in letteratura notizie particolareggiate circa la composizione della frazione insaponificabile di quest'olio: ci è sembrato, perciò, opportuno affrontare lo studio di tale frazione anche in considerazione del notevole significato ai fini della caratterizzazione dei grassi che oggi si tende ad attribuire ai costituenti, specie sterolici e terpenici, della frazione medesima.

Le difficoltà intrinseche nel frazionamento e riconoscimento di questi costituenti minori degli oli, presenti spesso in quantità limitatissima come parte di miscele molto complesse, hanno trovato un'elettiva soluzione nelle tecniche cromatografiche, specie se associate tra loro.

In genere, infatti, per indagini di questo genere, si ricorre all'accoppiamento della cromatografia su strato sottile e di quella in fase gassosa. Alla prima è demandato, di solito, il compito di frazionare, per gruppi di composizione chimica analoga, i diversi costituenti. Si riesce così a separare gli steroli, gli alcoli alifatici, quelli terpenici, tocoferoli e caroteni, idrocarburi.

Queste frazioni, ottenute su lastre preparative, possono essere raccolte separatamente per eluizione con solventi organici ed ulteriormente frazionate sia mediante tecniche più specifiche su strato sottile che mediante la cromatografia in fase gassosa.

Quest'ultima tecnica è indicata, in modo speciale, per l'analisi sia qualitativa che quantitativa, degli steroli, degli alcoli terpenici e degli idrocarburi. Lo studio gascromatografico di queste sostanze non pone particolari problemi tecnici, potendosi usare sia colonne di acciaio inossidabile che di vetro, di tipo classico ovvero capillari. Sussiste, tuttavia, la difficoltà rappresentata dal gran numero di composti di ciascuna categoria presenti solitamente negli oli, composti che spesso presentano volumi di ritenzione molto vicini, il ché rende problematica la loro distinzione specie quando a ciò si aggiunge la presenza di diversi isomeri, come nel caso degli alcoli triterpenici.

Per quanto riguarda il campione di olio da noi impiegato nella sperimentazione che segue, è opportuno precisare che esso è stato ottenuto per estrazione dai semi macinati, in apparecchio Soxhlet, con etere di petrolio (p. eb. 40-70°), con una resa del 31,86% rispetto al secco.

L'olio così ottenuto presentava i caratteri chimico-fisici generali raccolti nella tabella che segue (Tab. I).

TABELLA I

Densità a 15°	0,8918
Grado retrattometrico Zeiss (a 25°)	64
Indice di rifrazione (a 25°)	1,4678
$[\alpha]_D^{20}$	— 1°,20
Solidificazione	+ 12°/+9°
Indice di acidità	0,575
Acidità (in ac. oleico)	0,291
Indice di saponificazione	189
Indice degli eteri	190,00
Indice di Reichert-Meissl	5,75
Indice di acetile	25,12
Indice di acetilacidità	17,12
Indice di acetilsaponificazione	41,20
Indice di iodio relativo	77
Indice di iodio assoluto	108
Indice di Hener	88,05
Indice di Crismer	135°,5

PARTE SPERIMENTALE

Preparazione dell'insaponificabile. — Si sono pesati, in palloncino per saponificazione, 20 g dell'olio, preparato come sopra indicato, e si sono addizionati di 200 ml di soluzione 2 N di potassa alcolica facendo poi bollire a ricadere per due ore. Si è lasciata, quindi, raffreddare la miscela di reazione e la si è trasportata in imbuto separatore, lavando accuratamente con acqua distillata il palloncino ed aggiungendo nell'imbuto le acque di lavaggio, fino a portare il volume totale a 400 ml circa. Si è quindi eseguita l'estrazione dell'insaponificabile con etere etilico distillato di fresco, in tre riprese, impiegando ogni volta 100 ml di solvente.

Gli estratti eterici, riuniti, sono stati lavati accuratamente con acqua distillata fino a neutralità, indi le tracce di acqua nel solvente organico sono state asportate su solfato sodico anidro.

Onde garantirci il completo allontanamento di ogni traccia di acidi grassi liberi, secondo quanto consigliato in letteratura (4), il residuo ottenuto, ripreso con etere, è stato filtrato attraverso colonna di allumina Brokmann attivata di recente. Infine si è scacciato il solvente per evaporazione sotto vuoto a temperatura ambiente.

Si è, quindi, proceduto al frazionamento dei costituenti dell'insaponificabile adattando opportunamente le tecniche che prevedono l'impiego associato della cromatografia su strato sottile preparativa e della cromatografia in fase gassosa (4, 5, 6).

Cromatografia su strato sottile. — Si sono impiegate lastre preparative su supporto di vetro, delle dimensioni di cm 20×20 , allestite in laboratorio con stratificatore Desaga, con strato di gel di silice G di mm 0,5. Dette lastre sono state impregnate con acido fosforico mediante immersione in una soluzione al 2% di acido fosforico e successivo essiccamento.

Ai fini del frazionamento l'insaponificabile, purificato ed essiccato come detto sopra, è stato disciolto in etere di petrolio e deposto, sotto forma di sottile striscia continua, a circa 2 cm dal margine delle lastre, in modo da caricare su ciascuna lastra 40-45 mg di sostanza secca.

Per l'eluizione si è impiegato il sistema solvente esano-etere etilico (2:1 v/v). La visualizzazione, infine, è stata eseguita mediante spruzzamento della piastra con soluzione etanolica (alcol al 55%) di 2,7-dicloro-fluoresceina e successiva osservazione in luce UV.

Dopo sviluppo e visualizzazione delle bande costituenti le diverse frazioni cromatografiche, che venivano opportunamente delimitate con un punteruolo, si sono asportate le zone di adsorbente relative che sono state sottoposte ad eluizione mediante estrazione con etere di petrolio. I singoli estratti, dopo filtrazione, sono stati evaporati fino a secchezza sotto azoto e così conservati per le successive indagini.

In fig. 1 si riporta la riproduzione schematica del cromatogramma ottenuto a partire dall'insaponificabile in esame, con l'indicazione della natura delle diverse frazioni individuate in base ai dati caratteristici della letteratura. Si può rilevare l'abbondanza relativa delle frazioni costituite dagli idrocarburi (sul fronte del solvente) e dagli alcoli terpenici.

Cromatografia in fase gassosa. — Si è impiegato un Gascromatografo Perkin-Elmer mod. F 11 con rivelatore a ionizzazione di fiamma, munito di programmatore della temperatura. Si sono adottate, inoltre, colonne di acciaio inossidabile della lunghezza di 2 m e del diametro di $1/8''$, impaccate diversamente a seconda delle frazioni da esaminare, e precisamente:

a) Idrocarburi: fase stazionaria JXR all'1% su Chromosorb 100 200 mesh. Si è operato con temperatura programmata da 120 a 280° (incremento di 4°/min), temperatura della camera di iniezione 200°, usando come gas di trasporto l'azoto (flusso 45 ml/min). Si è fatto uso, inoltre, di uno standard interno di squalano, suscettibile di dare il medesimo coefficiente di responso rispetto allo squalene.

b) Steroli e alcoli triterpenici: fase stazionaria SE 30 all'1% su Chromosorb W 100-200 mesh silanizzato. Si è operato ad una temperatura di colonna costante a 230°C, usando come gas di trasporto l'azoto (flusso 45 ml/min), temperatura camera iniezione 200°C. Si è avuto cura, inoltre, secondo quanto consigliato dal WOLFF (6), di utilizzare la colonna sopraindicata solo dopo prolungata maturazione (250 h), accompagnata da satura-

zione con le sostanze da esaminare, realizzata mediante numerose introduzioni di tali sostanze nel corso della maturazione medesima.

In queste condizioni la perdita dei costituenti minori della miscela in esame dovrebbe essere ridotta al minimo, realizzandosi una eluzione praticamente quantitativa di tutti i componenti della miscela iniettata in colonna.

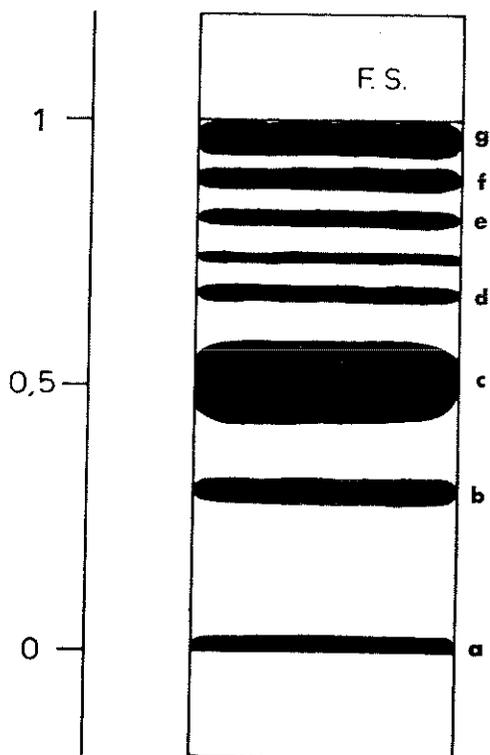


Fig. 1. — Cromatogramma su strato sottile di gel di silice dell'insaponificabile di *Cardiospermum Halicacabum*. - a) (origine) xantofille; b) steroli; c) alcoli alifatici e terpenici; d-f) tocoferoli; g) idrocarburi alifatici.

I cromatogrammi relativi alle tre frazioni studiate (idrocarburi, steroli ed alcoli triterpenici) sono riportati nelle figg. 2, 3 e 4.

RISULTATI E DISCUSSIONE.

I risultati ottenuti permettono di osservare, innanzitutto, come i costituenti presenti nell'insaponificabile dell'olio dei semi di *Cardiospermum Halicacabum*, rilevabili mediante la cromatografia su strato sottile, comprendono

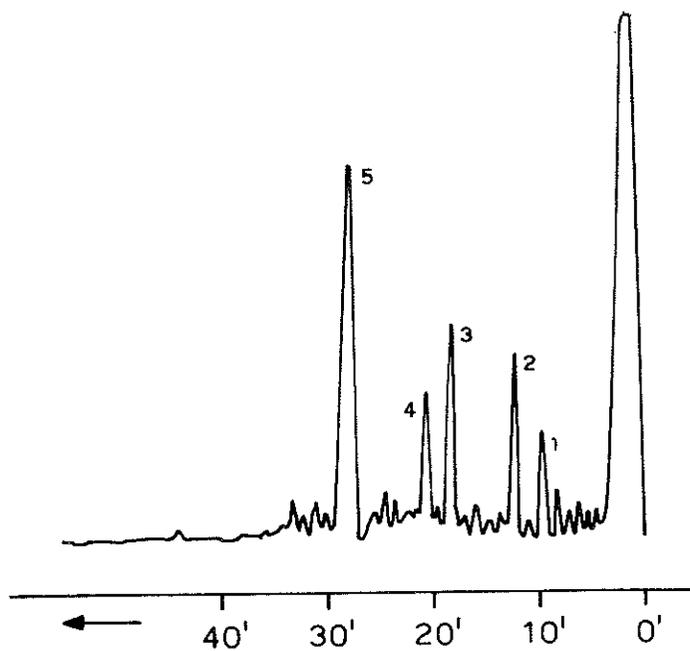


Fig. 2. — Gascromatogramma della frazione idrocarburica dell'insaponificabile di *Cardiospermum Halicacabum*. Si osserva la prevalenza dei picchi corrispondenti agli idrocarburi: C_{19} (1); C_{21} (2); C_{23} (3); C_{25} (4); C_{29} + Squalene (5).

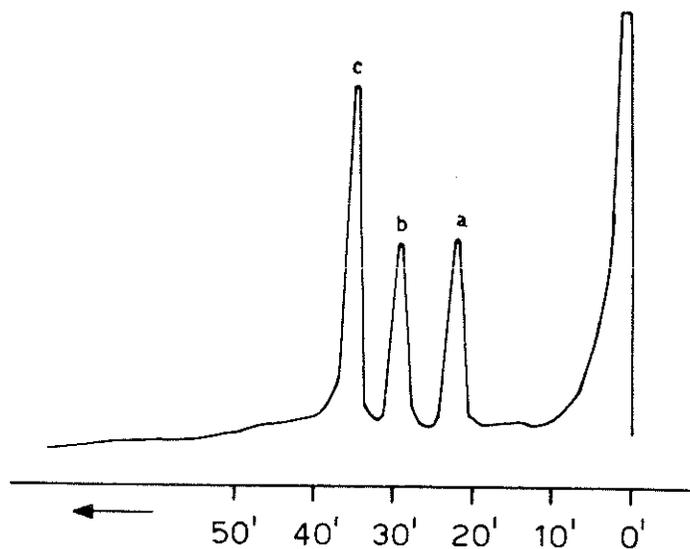


Fig. 3. — Gascromatogramma della frazione sterolica dell'insaponificabile dell'olio di *Cardiospermum Halicacabum*. - a) = Campesterolo, b) = stigmasterolo; c) = β -sitosterolo.

in pratica tutte le classi di composti rinvenibili in linea generale nella frazione insaponificabile degli oli vegetali. D'altra parte l'indagine approfondita eseguita per via gascromatografica, pur nella varietà e nella scarsa specificità qualitativa dei costituenti ritrovati, permette di evidenziare talune caratteristiche specifiche di ordine quantitativo.

In particolare, per quanto riguarda gli idrocarburi (vedi fig. 2), si è osservata la presenza di tutte le n-paraffine comprese tra C_{14} e C_{32} (ciò è stato verificato, oltre che, come si è detto, mediante lo standard interno di squa-

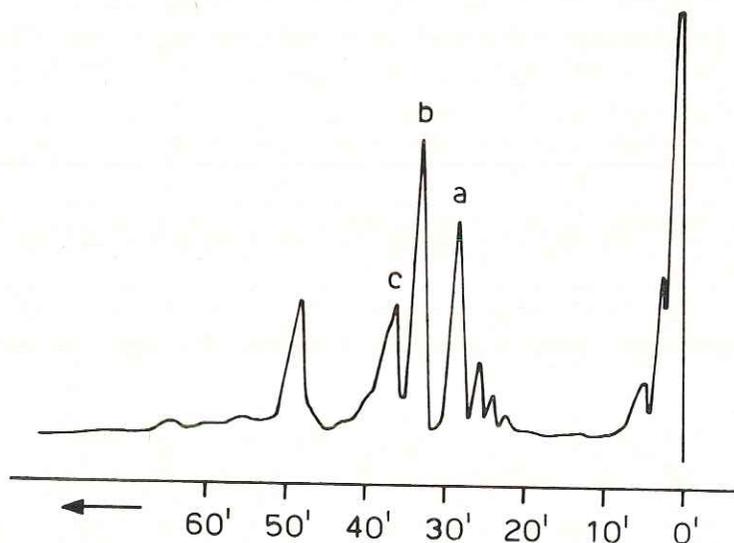


Fig. 4. — Gascromatogramma degli alcoli triterpenici della frazione insaponificabile dell'olio di *Cardiospermum Halicacabum*. a = α -amirina, b = β -amirina; c = cicloartenolo.

lano, anche a mezzo di controlli con idrocarburi noti). Accanto a questo dato, però, si è evidenziata la particolare ricchezza quantitativa degli idrocarburi C_{21} e C_{25} , non comune negli oli vegetali.

La composizione sterolica non presenta caratteristiche peculiari. Sono stati rilevati i picchi del campesterolo, dello stigmasterolo e del β -sitosterolo, costituenti classici degli oli vegetali. Dato caratteristico può essere considerato, forse, quello della pronunziata equivalenza tra i picchi del campesterolo e dello stigmasterolo, mentre la netta prevalenza del β -sitosterolo costituisce un reperto normale. Non si è osservata presenza di tracce di colesterolo, spesso rilevabile in piccole quantità negli oli vegetali (7).

La presenza di altri picchi di limitato rilievo quantitativo e di natura non ancora individuata, non ci consente, per ora, di formulare considerazioni in merito.

Per quanto riguarda, infine, la frazione degli alcoli triterpenici, si sono potuti evidenziare nettamente i picchi della α e della β -amirina, nonché quello del cicloartenolo. Oltre questi picchi, ne sono stati evidenziati altri (vedi fig. 4) non identificati. Tra questi particolarmente abbondante il picco contrassegnato col n. 1 che, pur non essendo riferibile a costituenti di questa classe rinvenibili in letteratura, sembrerebbe tipico dell'olio in esame. L'approfondimento di questo punto costituirà argomento di ulteriori studi da parte del nostro gruppo di ricerca.

Studi ulteriori sono in corso, inoltre, per chiarire la composizione della frazione tocoferolica dell'insaponificabile oggetto del presente studio. Sui risultati di tali ricerche si darà conto in una prossima nota.

BIBLIOGRAFIA

- 1) CATALANO G. *Delpinoa* n.s. del Boll. Ist. e Orto Botanico, Napoli, **18**, 1, (1948).
- 2) COVELLO M. *Annali di Chimica*, **41**, 780 (1951).
- 3) CHISHOLM M. J., HOPKINS C. Y. *Can. Chem.*, **36**, 1537 (1958).
- 4) CAPELLA P., FEDELI E., CIRIMELE N., LANZANI A., JACINI G. *Riv. It. Sost. Grasse*, XL, 660 (1963).
- 5) CAPELLA P., DE ZOTTI G., RICCA G. S., VALENTINI A. F., JACINI G. *J. Am. Oil Chem. Soc.*, **37**, 564 (1960).
- 6) WOLFF J. P. *Riv. It. Sost. Grasse*, XLX, 634 (1963).
- 7) AMATI A., ZANIRATO-CARRARO F., FERRI G. *Atti del X Congr. Ital. di Studi sulle Sostanze Grasse - Pescara - Giugno 1970.*
Laboratorio di Chimica Bromatologica dell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica dell'Università di Napoli, 1973.

Su un'assiomatica per l'elettrotermodinamica relativistica di un sistema continuo *)

*Nota del prof. Antonio Romano
presentata dal socio ordinario Carlo Tolotti*

(Adunanza del 3 novembre 1973)

RIASSUNTO. — Si fornisce per un sistema continuo carico ed isolato S un'assiomatica fondata su principi di conservazione formalmente analoghi a quelli classici ma che, riguardando S come un tutto inscindibile, mette in evidenza l'aspetto puramente convenzionale della scomposizione di S in una parte materiale ed una elettromagnetica.

SUMMARY. — It is supplied for a charged and isolated continuous system an axiomatic bases on the principles of conservation formally similar to the classical ones but which considering S as an indivisible whole points out the purely conventional feature of decomposition of S in one material part and another electromagnetic.

1. INTRODUZIONE.

Sia $S_{(m)}$ un sistema materiale continuo carico ed $S_{(e)}$ il campo elettromagnetico da esso prodotto.

In un mio precedente lavoro [1], ho postulato che in Relatività ristretta, durante il moto di $S_{(m)}$ in un generico riferimento inerziale, siano soddisfatti principi di bilancio ¹⁾ formalmente analoghi a quelli classici. Ho mostrato quindi che, per il sistema $S \equiv \{S_{(m)}, S_{(e)}\}$, di materia e campo elettromagnetico, risultano altresì soddisfatti i principi di conservazione dell'impulso totale ²⁾ e dell'energia totale. Infine, questi principi, insieme alla richiesta che per S sia valida anche la conservazione del momento angolare totale, consentono, fissato il tensore impulso-energia $S^{\alpha\beta}_{(e)}$ del campo elettromagnetico,

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

¹⁾ Nel seguito, per brevità, con la locuzione « principi di bilancio » intenderò il bilancio dell'impulso, dell'energia e del momento angolare. Analogo significato darò alla locuzione « principi di conservazione ».

²⁾ Cioè comprensivo dell'impulso materiale e di quello elettromagnetico.

di determinare l'espressione del tensore impulso-energia $T^{\alpha\beta}_{(m)}$ di $S_{(m)}$ nonché di quello totale $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ di S .

Nel presente lavoro, a fondamento dell'elettrotermodinamica relativistica del sistema isolato S , postulo (n. 2) direttamente la validità, in ogni riferimento inerziale, di principi di conservazione, formalmente analoghi a quelli classici, e determino l'espressione di $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ *senza richiedere che in S si sia distinta una parte elettromagnetica $S_{(e)}$ da una parte materiale $S_{(m)}$.*

Successivamente (n. 3), riadottando il punto di vista, da me utilizzato in [1], secondo il quale S è costituito da una parte materiale $S_{(m)}$ ed una elettromagnetica $S_{(e)}$, verifico che per $S_{(m)}$ valgono i principi di bilancio ammessi in [1] e pervengo, fissato $S^{\alpha\beta}_{(e)}$, alle stesse espressioni per $T^{\alpha\beta}_{(m)}$ e $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ ivi determinate.

Infine, al n. 4, osservo che l'assiomatica qui proposta comporta, in pieno accordo con l'opinione condivisa da altri Autori ³⁾, l'esistenza di infinite decomposizioni per S del tipo $\{S_{(m)}, S_{(e)}\}$ le quali, non avendo influenza sull'evoluzione di S , sono superflue e prive di vero contenuto fisico.

2. POSTULATI FONDAMENTALI E LORO PRIME CONSEGUENZE.

Siano C_* e C le configurazioni di riferimento ed attuale del sistema definito al numero precedente e

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} \in C, \mathbf{X} \in C_*,$$

le sue equazioni del moto in un riferimento inerziale I . Siano inoltre $V \subset C$ un generico volume materiale di bordo ∂V ed \mathbf{n} la normale esterna all'elemento ds di superficie.

In analogia con quanto è noto dalla Meccanica classica, nel presente lavoro postulo che:

α) Ad S sono associati, per tutto il suo moto, i campi

$$(2) \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \mathbf{t}(\mathbf{x}, t), h(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in C \times \mathbb{R},$$

— con \mathbf{g} densità di impulso, \mathbf{t} tensore corrente di impulso, h densità di energia e \mathbf{p} vettore corrente di energia — soddisfacenti in ogni riferimento inerziale le equazioni di conservazione dell'impulso, dell'energia e del mo-

³⁾ Cfr. [3], pag. 376; [4], pag. 143; [5], pag. 101; [6] e [7], pag. 691.

mento angolare:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV = - \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} ds, \\ \frac{d}{dt} \int_V h dV = - \int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} ds, \quad AV \supset C, \\ \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{x} \wedge \mathbf{g} dV = - \int_{\partial V} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} ds. \end{array} \right.$$

β) Nel passaggio da un riferimento inerziale I ad un altro I' la generica ψ^i delle quantità (2) si trasforma con la legge:

$$\Psi^i = f^i(\psi^i),$$

con le f funzioni omogenee.

Applicando il teorema del trasporto alle (3)_{1,2} si ottiene con facili calcoli la seguente forma locale della conservazione dell'impulso e dell'energia:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g^i}{\partial t} + \partial_k (g^i v^k + t^{ik}) = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \partial_k (h v^k + p^k) = 0, \end{array} \right.$$

dove con (v^i) si è indicata la velocità della generica particella $\mathbf{X} \in S$.

Le (4), quando si sia posto,

$$(5) \quad \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{l} g^i v^k + t^{ik} \quad \vdots \quad c g^i \\ \dots \dots \dots \quad \vdots \quad \dots \\ \frac{1}{c} (h v^i + p^i) \quad \vdots \quad h \end{array} \right\|,$$

con c velocità della luce nel vuoto, possono sinteticamente scriversi:

$$(6) \quad \partial_\beta \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0.$$

D'altra parte, può provarsi, con lo stesso procedimento adottato in [1], n. I, che il postulato β) ed il sussistere delle (6) in ogni riferimento inerziale,

comportano che le $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ sono le componenti di un tensore dello spazio-tempo V_4 , che è detto il *tensore impulso-energia* (totale) di S .

Infine, dalla (3)₃ consegue, quando si tenga conto delle (3)_{1,2}, che localmente si abbia:

$$\mathfrak{g}^{(i)} = 0.$$

Quest'ultima relazione, come si è provato in [1], n. 3, dovendo sussistere in ogni riferimento e stante il carattere tensoriale di $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$, implica

$$(7) \quad \mathfrak{g}^{[\alpha\beta]} = 0.$$

Una importante conseguenza delle (7), e quindi degli assiomi α) e β), è il *teorema dell'equivalenza massa-energia*:

$$g^i = \frac{1}{c^2} (h v^i + p^i).$$

In particolare, nel riferimento proprio I per la generica particella $\mathbf{X} \in S$, dalle (5) e (7) consegue:

$$(8) \quad \overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c} \overset{\circ}{t}/c \quad \cdot \quad c g^i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overset{\circ}{p}^{\theta} \quad \cdot \quad h \end{array} \right\|$$

e

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{t}^{\theta} = \overset{\circ}{\pi}^{\theta}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overset{\circ}{g}^i = \overset{\circ}{p}^i/c^2. \end{array} \right.$$

Procedendo come in [1], n. 3, si prova che da (8) e (9) si perviene alla seguente espressione di $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}$:

$$(10) \quad \overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\rho} U^{\alpha} U^{\beta} + \overset{\circ}{\Pi}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\Sigma}^{\alpha} U^{\beta} + \overset{\circ}{\Sigma}^{\beta} U^{\alpha} \quad , \quad (\overset{\circ}{\rho} = \overset{\circ}{h}/c^2),$$

dove U^{α} è la quadrivelocità di $\mathbf{X} \in S$ ed è, per definizione,

$$\overset{\circ}{\Pi}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c} \overset{\circ}{t}^{\theta} \quad \cdot \quad 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sigma \quad \cdot \quad 0 \end{array} \right\| \quad , \quad \overset{\circ}{\Sigma}^{\alpha} = \left(\frac{\overset{\circ}{p}^i}{c^2} \quad , \quad 0 \right) ;$$

si ha anche

$$(11) \quad \begin{cases} \Pi^{\alpha\beta} U_\beta = \Pi^{\dot{\alpha}} U_\beta = 0, \\ \Sigma^\alpha U_\alpha = 0. \end{cases}$$

La (10) coincide, in assenza di campo elettromagnetico, con la (37) di [1] quando si identifichi il flusso di energia p^i con il vettore corrente di calore h^i .

3. SCOMPOSIZIONE DEL SISTEMA IN UNA PARTE MATERIALE ED UNA ELETTROMAGNETICA.

Determinato il tensore $\mathfrak{J}^{\alpha\beta}$ attraverso le determinazioni t^{ij} ($i \leq j$), p^i , $\overset{\circ}{h}^i$ in $\overset{\circ}{I}$, si pensi di assegnare il tensore impulso-energia $S^{\alpha\beta}_{(e)}$ del campo elettromagnetico $S_{(e)}$ presente in S . Si ponga quindi

$$(12) \quad \mathfrak{J}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{(m)} + S^{\alpha\beta}_{(e)}$$

La decomposizione (12) si può poi riguardarsi come la scissione di S in due sottosistemi $S_{(m)}$, con tensore impulso-energia $T^{\alpha\beta}_{(m)}$, ed $S_{(e)}$, con tensore impulso-energia $S^{\alpha\beta}_{(e)}$. $S_{(m)}$ ed $S_{(e)}$ possono denominarsi rispettivamente *parte materiale* e *parte elettromagnetica* di S .

Dalle (6) e (7) segue allora

$$(13) \quad \begin{cases} \partial_\beta T^{\alpha\beta}_{(m)} = - \partial_\beta S^{\alpha\beta}_{(e)} = f^\alpha, \\ T^{[\alpha\beta]}_{(m)} = - S^{[\alpha\beta]}_{(e)}, \end{cases}$$

sicchè posto

$$(14) \quad T^{\alpha\beta}_{(m)} = \begin{vmatrix} g^i_{(m)} v^j + t^ij_{(m)} & \vdots & c g^i_{(m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{c} (h_{(m)} v^i + p^i_{(m)}) & \vdots & h_{(m)} \end{vmatrix}$$

con

$$\begin{cases} t^ij_{(m)} = T^ij_{(m)} - g^i_{(m)} v^j, & c g^i_{(m)} = T^{i4}_{(m)}, \\ p^i_{(m)} = c T^{44}_{(m)} - h_{(m)} v^i, & h_{(m)} = T^{44}_{(m)}, \end{cases}$$

ed introdotta la notazione

$$f^{\alpha} = (\mathbf{f}, \varnothing/e)$$

le (13), si scrivono:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{(m)}^i + \partial_k (g_{(m)}^i v^k + t_{(m)}^{ik}) = f^i, \\ \frac{\partial}{\partial t} h_{(m)} + \partial_k (h_{(m)} v^k + p_{(m)}^k) = \varnothing. \end{cases}$$

Integrando le (15) su un generico volume materiale si ottengono le equazioni del *bilancio dell'impulso e dell'energia materiali* (cioè di $S_{(m)}$) nella forma integrale:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} g_{(m)}^i dV = - \int_{\partial \mathcal{V}} t_{(m)}^{ik} n_k ds + \int_{\mathcal{V}} f^i dV, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} h_{(m)} dV = - \int_{\partial \mathcal{V}} p_{(m)}^k n_k ds + \int_{\mathcal{V}} \varnothing dV. \end{cases}$$

Inoltre, moltiplicando la (15)₁ per x^i , antisimmettizzando su i e j , integrando su un volume materiale e tenendo conto di (13)₂, si perviene al *bilancio del momento angolare* (materiale):

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} x^{[i} g_{(m)}^{j]} dV = - \int_{\partial \mathcal{V}} x^{[i} t_{(m)}^{j]k} n_k ds + \int_{\mathcal{V}} (x^i f^j - x^j f^i) dV$$

dove si è posto:

$$(18) \quad l^{ij} = S_{(m)}^{[ij]} \quad (l^{ij} = -l^{ji}).$$

Nelle (16) e (17), $\mathbf{g}_{(m)}$, $\mathbf{t}_{(m)}$, $h_{(m)}$ e $\mathbf{p}_{(m)}$ hanno, relativamente al sistema materiale $S_{(m)}$, gli stessi significati e denominazioni dati a \mathbf{g} , \mathbf{t} , h e $\mathbf{p}_{(m)}$ nell'assioma α).

I campi f^i , \varnothing ed l^{ij} si denomineranno rispettivamente *densità di forza*, *densità di potenza* e *densità di momento non originato da forze*.

Pertanto, in corrispondenza alla decomposizione di S in due sottosistemi, la parte materiale e la parte elettromagnetica di S valgono per $S_{(m)}$

equazioni di bilancio della stessa forma di quelle proposte in [1] e l'azione di $S_{(e)}$ su $S_{(m)}$ è rappresentata dai campi f^i , \varnothing ed h^i .

Per determinare $T^{\alpha\beta}_{(m)}$ per ogni scelta di $S^{\alpha\beta}_{(e)}$, basta osservare che da (8), (12) e (14) si ha:

$$(19) \quad \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{t}{}_{(m)}^{ij} + \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{ij} & c\overset{\circ}{g}{}_{(m)}^i + \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{i4} \\ \dots & \dots \\ \overset{\circ}{p}{}_{(m)e}^i + \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{4i} & \overset{\circ}{h}{}_{(m)} + \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{44} \end{array} \right\|$$

e quindi anche

$$(20) \quad \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{t}{}_{(m)}^{ij} & \overset{\circ}{\sigma}{}_{(m)e}^{i4} \\ \dots & \dots \\ \overset{\circ}{p}{}_{(m)e}^i & \overset{\circ}{h}{}_{(m)} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{ij} & \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{i4} \\ \dots & \dots \\ \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{4i} & \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{44} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c|c} 0 & c\overset{\circ}{\tau}{}^i \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$, (c\overset{\circ}{\tau}{}^i = c\overset{\circ}{g}{}_{(m)}^i - \overset{\circ}{p}{}_{(m)e}^i).$

D'altra parte, per la simmetria di $\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$ deve risultare

$$\overset{\circ}{\tau}{}^i + \overset{\circ}{p}{}_{(m)e}^i + \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{i4} = \overset{\circ}{p}{}_{(m)e}^i + \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{4i}$$

e quindi

$$\overset{\circ}{\tau}{}^i = \frac{\overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{4i} - \overset{\circ}{S}{}_{(e)}^{i4}}{c}$$

Introdotti i vettori q^α e τ^α ed il tensore $\Pi^{\alpha\beta}$ di V_4 che in I hanno componenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} q^\alpha = (\overset{\circ}{p}{}_{(m)e}^i/c, 0), \\ \tau^\alpha = (\overset{\circ}{\tau}{}^i, 0), \\ \Pi_{(m)}^{\alpha\beta} = (\overset{\circ}{\tau}{}_{(m)}^{ij}, 0), \end{array} \right.$$

è possibile provare, procedendo come in [1], n. 5, che

$$(21) \quad \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\rho}{}_{(m)} U^\alpha U^\beta + \Pi_{(m)}^{\alpha\beta} + q^\alpha U^\beta + q^\beta U^\alpha + \tau^\alpha U^\beta + S_{(e)}^{\alpha\beta}$$

che coincide, a meno del cambiamento di qualche notazione, con la (68) di [1].

4. ASSENZA DI SIGNIFICATO FISICO DELLA SCOMPOSIZIONE DEL N. 3.

Da quanto detto al n. 2 si conclude che assegnando $\overset{\circ}{t}^{ij}$ ($i \leq j$), $\overset{\circ}{h}$ e $\overset{\circ}{p}^i$ in funzione delle variabili fondamentali del sistema (equazioni costitutive) ed associando alle (6) le eventuali equazioni di campo in queste variabili, si perviene ad un sistema completo da cui dipende lo studio dell'evoluzione di S.

Si può così ritenere che ogni scomposizione in parti di t^{ij} e p^i , che sono funzioni di v^i , $\overset{\circ}{t}^{ij}$, $\overset{\circ}{p}^i$, $\overset{\circ}{h}$, purchè queste ultime quantità siano assegnate allo stesso modo, non comporti alcuna modifica sul sistema che descrive l'evoluzione di S. Pertanto, tale decomposizione appare come un inessenziale e superfluo tentativo di separare in t^{ij} e p^i contributi di diversa origine (termica, meccanica, elettromagnetica, ecc.).

Così, ad es., le equazioni (2) che ho dato in [1] per un sistema termodinamico non carico, quando si confrontino con le (3) del presente lavoro comportano

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^{ij} = \hat{t}^{ij}, \\ p^i = \hat{v}^i v_j - h^i, \end{array} \right.$$

dove \hat{t}^{ij} è il « tensore degli sforzi » ed \mathbf{h} il vettore « corrente di calore ».

Invece le equazioni, che Moller dà in [2] per detto sistema⁴⁾, quando si confrontino con le (3) del presente lavoro comportano:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^{ij} = \tilde{t}^{ij} + v^i \tilde{h}^j / c^2, \\ p^i = \tilde{v}^i v_j - \tilde{h}^i, \end{array} \right.$$

dove \tilde{t}^{ij} è ancora il « tensore degli sforzi » ed h^i è il « vettore corrente di calore ».

Le equazioni di conservazione che si ottengono sostituendo le (22) o le (23) nelle (6) sembrano apparentemente diverse. Tuttavia nel riferimento proprio I esse coincidono avendosi

$$\overset{\circ}{t}^{ij} = \overset{\circ}{t}^{ij} \quad , \quad \overset{\circ}{p}^i = - \overset{\circ}{h}^i,$$

nel primo caso e

$$\overset{\circ}{t}^{ij} = \overset{\circ}{t}^{ij} \quad , \quad \overset{\circ}{p}^i = - \overset{\circ}{h}^i,$$

nel secondo caso.

⁴⁾ Cfr. [2], pag. 230, eqq. (7.147) e (7.148).

Ciò comporta che, scegliendo le stesse equazioni costitutive per $\overset{\circ}{t}^{ij}$ e $\overset{\circ}{t}^{ji}$, nonchè per $\overset{\circ}{h}^i$ e $\overset{\circ}{h}^i$, si perviene alle stesse determinazioni per \mathbf{t} e \mathbf{p} e quindi alle stesse equazioni di evoluzione per il sistema S . Pertanto le suddivisioni (22) e (23) e le loro rispettive giustificazioni fisiche sono equivalenti e come tali fisicamente inessenziali.

Per quanto concerne poi i sistemi termodinamici carichi e la relativa decomposizione di S in una parte materiale $S_{(m)}$ ed una elettromagnetica $S_{(e)}$ (cfr. n. 3), si può osservare che di tali scomposizioni ne esistono infinite e per ognuna di esse risulterà modificata l'interazione tra $S_{(m)}$ ed $S_{(e)}$. Poichè, per quanto si è visto, tutte queste scomposizioni sono equivalenti purchè in ogni caso non si modifichino le equazioni costitutive per $\overset{\circ}{t}^{ij}$ ($i \leq j$), $\overset{\circ}{h}$ e $\overset{\circ}{p}$, esse sono anche fisicamente superflue.

Inversamente, ad ogni scelta di $f^i \varnothing$ ed l^{ij} , con l^{ij} antisimmetrico, corrisponde un solo tensore $S^{\alpha\beta}_{(e)}$ (a meno di un tensore a divergenza nulla) e quindi una sola scomposizione di S in una somma (12) che, ovviamente, determina $T^{\alpha\beta}_{(m)}$. Risulta così superflua anche ogni discussione sull'espressione di f^i , \varnothing ed l^{ij} nelle equazioni del bilancio (16) e (17) e di conseguenza sono risolte le note controversie ⁵⁾ sulla scelta del tensore impulso-energia elettromagnetico $S^{\alpha\beta}_{(e)}$.

In conclusione, è del tutto arbitrario ogni tentativo di distinguere nelle quantità globali $\overset{\circ}{t}$, $\overset{\circ}{h}$ e $\overset{\circ}{p}$ i contributi materiali, termici ed elettromagnetici poichè ha significato soltanto l'evoluzione di S e questa può riguardarsi, in infiniti modi equivalenti, come prodotta dall'interazione di parti di S che, pur se apparentemente distinte (materia, calore, campo elettromagnetico, ecc.), restano indissolubilmente legate nelle equazioni costitutive per $\overset{\circ}{t}^{ij}$ ($i \leq j$), $\overset{\circ}{h}$ e $\overset{\circ}{p}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ROMANO, *Sul tensore d'impulso-energia di un sistema continuo non carico o carico*. Ann. di Mat. pura ed applic. (IV), vol. XCV, pag. 211 (1973).
- [2] C. MOLLER, *The theory of relativity*. Oxford (1972).
- [3] DE GROOF e MAZUR, *Non-equilibrium thermodynamics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pag. 396 (1963).
- [4] P. PENFIELD e H. HAUS, *Electrodynamics of moving media*. M.I.T. (1964).
- [5] R. TOUPIN, *A dynamical theory of elastic dielectrics*. J. Eng. Sci., 1, 101-126 (1963).
- [6] G. GYÖRGY, *Die Bewegung des Energiemittelpunktes und der Energie-Impuls-Tensor des Elektromagnetischen Feldes in Dielektrika*. Acta Phys. Hung., 4, 121-131 (1955).
- [7] C. TRUESDELL, *The classical field theories*. Hand. der Physik, Band III/1 (1960).

⁵⁾ Cfr., ad es., [2] pag. 220 e [4], pag. 242.

Su un'assiomatica per l'elettrotermodinamica relativistica di un sistema continuo con spin

Nota del prof. A. Romano) e della dott. M. Padula**)
presentata dal socio ordinario Carlo Tolotti*

(Adunanza del 3 novembre 1973)

RIASSUNTO. — Partendo da assiomi di cui si illustra il contenuto fisico, si determina il tensore impulso-energia di un sistema continuo S isolato, in presenza di spin, nonché le equazioni del moto di S rispetto ad un generico riferimento inerziale.

SUMMARY. — Starting with axioms of which the physical contents is illustrated, the momentum-energy tensor is determined of an isolated continuous system S , in the presence of spin, as well as the equation of motions of S in respect of a general inertial frame.

INTRODUZIONE.

Nel presente lavoro ci si propone di porre in Relatività ristretta a fondamento dell'elettrotermodinamica di un sistema continuo S con spin (cioè con distribuzione continua di momento angolare interno) alcuni principi generali, di cui si illustra il contenuto fisico, che costituiscono un'estensione dell'assiomatica che in [1] è stata posta a fondamento dell'elettrotermodinamica di un sistema continuo *in assenza di spin*.

L'assiomatica così ottenuta, in particolare, consente di ritrovare sia i risultati proposti da alcuni Autori (cfr., ad es., da [2] a [7]), a partire dalla teoria dell'elettrone di Dirac per il caso di materia disgregata, e sia quelli più generali che in [8] si deducono da principi di non chiaro contenuto fisico.

Dette C_* e C le configurazioni di riferimento ed attuali di S nel moto

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} \in C, \mathbf{X} \in C_*$$

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi Nazionali di ricerca matematica del C.N.R.

***) Lavoro eseguito nel periodo di godimento di una borsa di studio ministeriale.

ed indicati inoltre con $V \subset C$ un generico volume materiale di bordo ∂V e con \mathbf{N} la normale esterna all'elemento ds di superficie, nel presente lavoro, in analogia con quanto è stato fatto in [1], si postula che:

A) Ad S sono associati, per tutto il suo moto, i campi

$$(2) \quad \mathbf{g}, h, \mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{n}$$

— con \mathbf{g} densità d'impulso, h densità d'energia, \mathbf{t} tensore corrente di impulso, \mathbf{p} vettore corrente d'energia, \mathbf{k} densità (per unità di massa relativa μ) di spin, \mathbf{n} densità (per unità di massa relativa μ) di momento statico interno — soddisfacenti, in ogni riferimento inerziale, le equazioni di conservazione dell'impulso, dell'energia e del momento angolare:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV = - \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{N} ds, \\ \frac{d}{dt} \int_V h dV = - \int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} ds, \\ \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \wedge \mathbf{g} + \mu \mathbf{k}) dV = - \int_{\partial V} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} \cdot \mathbf{N} ds, \end{array} \right. \quad \forall V \subset C,$$

nonchè l'equazione di bilancio dei momenti statici:

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{h}{c^2} \mathbf{x} + \mu \mathbf{n} \right) dV = - \frac{1}{c^2} \int_{\partial V} \mathbf{x} \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} ds + \int_V \mathbf{g} dV^{(1)}$$

B) Nel passaggio da un riferimento inerziale I ad un altro I' , la generica ψ^i delle quantità $\mathbf{g}, h, \mathbf{t}, \mathbf{p}$ si trasforma con la legge:

$$\psi^i = f^i(\psi^j),$$

con le f^i omogenee.

C) Nel riferimento proprio $\overset{\circ}{I}$ per la generica particella $\mathbf{X} \in S$ è:

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}} = \mathbf{O}.$$

¹⁾ Con c si indica la velocità della luce nel vuoto.

Si osservi che ponendo $\mathbf{k} = \mathbf{n} = \mathbf{O}$ e sopprimendo l'equazione (4) ed il postulato C), si riottiene l'assiomatica proposta in [1].

La presenza di un campo \mathbf{n} con significato di densità (specificata) di momento statico interno, accanto alla densità specifica di spin \mathbf{k} , e l'equazione (4) del bilancio dei momenti statici sono poi motivati al n. 1 richiedendo che lo spin abbia proprietà analoghe a quelle del momento angolare totale di S , in assenza di spin. Sempre al n. 1 viene rilevato come il postulato C) sia in accordo coll'esperienza.

Successivamente (n. 2), si prova che le equazioni (2)_{1,2} di conservazione dell'impulso e dell'energia, quando si tenga conto anche del postulato B), localmente possono scriversi:

$$(5) \quad \partial_{\beta} \mathfrak{J}^{\alpha\beta} = 0,$$

dove $\mathfrak{J}^{\alpha\beta}$ è un tensore di V_4 , detto *tensore impulso-energia* di S , che nel riferimento proprio $\overset{\circ}{I}$ per la generica particella $\mathbf{X} \in S$ ha componenti:

$$(6) \quad \mathfrak{J}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{t}^{\beta} & c \overset{\circ}{g}^{\beta} \\ \hline \overset{\circ}{p}^{\beta}/c & \overset{\circ}{h} \end{array} \right\|$$

(l'indice \circ indica che le grandezze sono valutate in $\overset{\circ}{I}$).

Al n. 3 si mostra poi che l'equazione (3)₃ di conservazione del momento angolare e quella (4) del bilancio dei momenti statici si scrivono localmente:

$$(7) \quad \mathfrak{J}^{[\alpha\beta]} = \mu \frac{d K^{\alpha\beta}}{d \tau},$$

dove τ è il tempo proprio per la generica particella $\mathbf{X} \in S$, μ è la densità di pura materia in $\overset{\circ}{I}$ e $K^{\alpha\beta}$ è un tensore antisimmetrico di V_4 che in $\overset{\circ}{I}$ ha componenti:

$$(8) \quad \overset{\circ}{K}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{k}^{ij} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Le relazioni (7), che in presenza di spin sostituiscono le note relazioni di simmetria $\mathfrak{J}^{[\alpha\beta]} = 0$, verificate in assenza di spin, comportano l'impossibi-

lità di assegnare indipendentemente le quantità $\overset{\circ}{t}^{ij}$, $\overset{\circ}{g}^i$, $\overset{\circ}{p}^i$, $\overset{\circ}{h}$ e $\overset{\circ}{k}^{ij}$. Infatti dalle (7), scritte nel riferimento proprio $\overset{\circ}{I}$,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{t}^{ij} = \overset{\circ}{t}^{ij} + \overset{\circ}{\mu} \left(\frac{d \overset{\circ}{K}^{ij}}{d \tau} \right), \\ \overset{\circ}{g}^i = \frac{\overset{\circ}{p}^i}{c^2} + \frac{\overset{\circ}{\mu}}{c} \left(\frac{d \overset{\circ}{K}^{i4}}{d \tau} \right), \end{array} \right.$$

segue che soltanto $\overset{\circ}{t}^{ij}$ ($i \leq j$), $\overset{\circ}{h}$, $\overset{\circ}{p}^i$ e $\overset{\circ}{k}^{ij}$ tra i campi (2) possono assegnarsi arbitrariamente.

Inoltre, la (9)₁ prova la non simmetria degli sforzi in $\overset{\circ}{I}$ mentre la (9)₂ costituisce la nuova forma del teorema dell'equivalenza massa-energia in presenza di spin. In proposito, sempre al n. 3, si verifica che essa coincide con quella che in [8] è ottenuta a partire da un modello microscopico.

Nel n. 4 si determinano le espressioni di \mathbf{g} ed h in un generico riferimento inerziale I pervenendo alle equazioni del moto di S relative ad I.

Infine, nel n. 5, si fornisce un'estensione della versione relativistica del teorema del centro d'inerzia ²⁾ ai sistemi con distribuzione continua di spin.

I. MOTIVAZIONE DELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO DEI MOMENTI STATICI.

Per giustificare la presenza, postulata in A), di un campo \mathbf{n} con significato di densità (specifica) di momento statico interno, accanto alla densità (specifica) di spin \mathbf{k} , si ricordi che ³⁾, in assenza di spin, è in genere possibile determinare un riferimento inerziale $\overset{\circ}{R}$ in cui si annullano sia l'impulso

totale $\overset{\circ}{G}$ sia il momento statico totale $\overset{\circ}{N} = \int \frac{\overset{\circ}{h}}{c^2} \times dC$ rispetto all'origine di

$\overset{\circ}{R}$. Inoltre ⁴⁾, in un riferimento inerziale rispetto al quale $\overset{\circ}{R}$ è in moto con velocità \mathbf{u} , si presenta un momento statico \mathbf{N} espresso da:

$$\mathbf{N} = \gamma \frac{\mathbf{u} \wedge \overset{\circ}{K}_0}{c^2}, \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right),$$

ove $\overset{\circ}{K}_0$ denota il momento angolare nel riferimento $\overset{\circ}{R}$, valutato rispetto all'origine 0 di $\overset{\circ}{R}$.

²⁾ Cfr., ad es., [9], pag. 176.

³⁾ Cfr. [9], pag. 176.

⁴⁾ Cfr. [9], pag. 179.

La presenza di \mathbf{n} nei campi (2) equivale così alla richiesta che la proprietà della sussistenza di un momento statico in dipendenza di un momento angolare continui a valere anche per lo spin (che è un momento angolare interno), purchè si identifichi il riferimento \mathring{R} per dV con quello proprio \mathring{I} e si assuma, conformemente al postulato C), che risulti $\mathring{\mathbf{n}} = 0$. Quest'ultima condizione è in accordo con l'esperienza non essendo note particelle con momento statico proprio ⁵⁾.

Ammissa così la presenza di una densità \mathbf{n} di un momento statico interno accanto alla densità \mathbf{k} di spin, si giustificherà la forma (4) data all'equazione del bilancio dei momenti statici.

A tale scopo cominceremo col provare che, in assenza di spin, vale una equazione di bilancio dei momenti statici nella forma

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{h}{c^2} \mathbf{x} dV = - \frac{1}{c^2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} ds + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} dV$$

in conseguenza dei postulati $\alpha)$ e $\beta)$ di [1].

Invero, dalla conservazione dell'energia nella forma locale

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \partial_k (h v^k + p^k) = 0$$

segue, moltiplicando per x^i :

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} (x^i h) + \partial_k [x^i (h v^k + p^k)] = h v^i + p^i.$$

D'altra parte, in [1], n. 2, si è provato anche che:

$$c^2 g^i = h v^i + p^i$$

(equivalenza massa-energia) sicchè, sostituendo quest'ultima relazione in (10), si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} (x^i h) + \partial_k [x^i (h v^k + p^k)] = c^2 g^i$$

che, integrata su volume materiale, fornisce appunto la (10).

⁵⁾ Cfr. [10], pag. 438.

Riconosciuta la validità dell'equazione (10) in assenza di spin, è naturale richiedere che, in presenza di spin, una siffatta equazione continui a valere pur di aggiungere ad $\frac{h}{c^2} \mathbf{x}$ il momento statico interno $\mu \mathbf{n}$. In tal modo la (10) dà origine alla (4) così come l'equazione di conservazione del momento angolare in assenza di spin (cioè la (3)_s di [1]) dava origine alla (3)_s aggiungendo $\mu \mathbf{k}$ ad $\mathbf{x} \wedge \mathbf{g}$.

2. FORMULAZIONE LOCALE DELLE EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DELL'IMPULSO E DELL'ENERGIA.

Procedendo come in [1], le (3)_{1,2} si possono scrivere nella seguente forma tensoriale nello spazio-tempo V_4 :

$$(12) \quad \partial_{\beta} \mathfrak{J}^{\alpha\beta} = 0,$$

dove

$$(13) \quad \mathfrak{J}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} g^i v^j + t^{ij} & c g^i \\ \hline \frac{1}{c} (h v^i + p^i) & h \end{array} \right\|.$$

è il *tensore impulso-energia totale* del sistema S.

In particolare, nel riferimento proprio $\overset{\circ}{I}$ si ha:

$$(14) \quad \overset{\circ}{\mathfrak{J}}^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{t}^{ij} & c \overset{\circ}{g}^i \\ \hline \overset{\circ}{p}^i/c & \overset{\circ}{h} \end{array} \right\|.$$

Si considerino quindi i tensori $\Theta^{\alpha\beta}$, $\Pi^{\alpha\beta}$, $Q^{\alpha\beta}$ di V_4 che nel riferimento proprio $\overset{\circ}{I}$ hanno componenti:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\Theta}^{ij} = \overset{\circ}{\Theta}^{i4} = \overset{\circ}{\Theta}^{4i} = 0, \quad \overset{\circ}{\Theta}^{44} = \overset{\circ}{h} \equiv \overset{\circ}{\rho} c^2, \\ \overset{\circ}{\Pi}^{ij} = \overset{\circ}{t}^{ij}, \quad \overset{\circ}{\Pi}^{i4} = \overset{\circ}{\Pi}^{4i} = \overset{\circ}{\Pi}^{44} = 0, \\ \overset{\circ}{Q}^{ij} = 0, \quad \overset{\circ}{Q}^{i4} = c \overset{\circ}{g}^i, \quad \overset{\circ}{Q}^{4i} = \overset{\circ}{p}^i/c, \quad \overset{\circ}{Q}^{44} = 0 \end{array} \right.$$

e si indichino con $\overset{\circ}{A}^{\alpha}_{\beta}$ i coefficienti della trasformazione $\overset{\circ}{I} \rightarrow I$ che, com'è noto ⁶⁾, sono tali che

$$(16) \quad \overset{\circ}{A}^{\alpha}_{\alpha} = U^{\alpha}/c,$$

essendo U^{α} la quadrivelocità della generica particella $\mathbf{X} \in S$.

Dalle (15) e (16) segue allora

$$(17) \quad \begin{aligned} \Pi^{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{A}^{\alpha}_{i} \overset{\circ}{A}^{\beta}_{j} \overset{\circ}{t}^{ij}, \\ \Theta^{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{A}^{\alpha}_{\alpha} \overset{\circ}{A}^{\beta}_{\alpha} c^2 \overset{\circ}{\rho} = \overset{\circ}{\rho} U^{\alpha} U^{\beta}, \\ Q^{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{A}^{\alpha}_{i} \overset{\circ}{A}^{\beta}_{\alpha} c \overset{\circ}{g}^i + \overset{\circ}{A}^{\alpha}_{\alpha} \overset{\circ}{A}^{\beta}_{i} \overset{\circ}{p}^i/c = (\overset{\circ}{A}^{\alpha}_{i} \overset{\circ}{g}^i) U^{\beta} + U^{\alpha} (\overset{\circ}{A}^{\beta}_{i} \frac{\overset{\circ}{p}^i}{c^2}) \end{aligned}$$

sicchè, introdotti i quadrivettori Ξ^{α} e Σ^{α} che in $\overset{\circ}{I}$ hanno componenti

$$(18) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{\Sigma}^{\alpha} \equiv (\overset{\circ}{p}^i/c^2, 0) \\ \overset{\circ}{\Xi}^{\alpha} \equiv (\overset{\circ}{g}^i, 0), \end{cases}$$

si perviene alla seguente espressione per $g^{\alpha\beta}$:

$$(19) \quad g^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\rho} U^{\alpha} U^{\beta} + \Pi^{\alpha\beta} + \Xi^{\alpha} U^{\beta} + \Sigma^{\beta} U^{\alpha},$$

dove

$$(20) \quad \begin{cases} \Pi^{\alpha\beta} U_{\beta} = \Pi^{\beta\alpha} U_{\beta} = 0, \\ \Xi^{\alpha} U_{\alpha} = 0, \\ \Sigma^{\alpha} U_{\alpha} = 0. \end{cases}$$

La sostituzione della (19) nella (12) fornisce la cercata forma locale delle equazioni di conservazione dell'impulso e dell'energia.

⁶⁾ Cfr. [9], pag. 120.

3. FORMULAZIONE LOCALE DELLE EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE E DEL BILANCIO DEI MOMENTI STATICI.

Nel numero precedente si è provato che il tensore impulso-energia totale $g^{\alpha\beta}$ è ottenuto dalle determinazioni $\overset{\circ}{t}^{ij}$, $\overset{\circ}{g}^i$, $\overset{\circ}{p}^i$, $\overset{\circ}{h}$ in $\overset{\circ}{I}$, sicchè assegnando queste grandezze in funzione delle variabili fondamentali del sistema (deformazione, temperatura, ecc.) le (3)_{1,2} costituiscono delle effettive restrizioni sul moto di S .

Nel numero presente si vuol verificare che, in conseguenza delle (3)₃ e (4), valgono le (7) che pertanto comportano delle restrizioni sull'assegnazione delle quantità $\overset{\circ}{t}^{ij}$, $\overset{\circ}{g}^i$, $\overset{\circ}{p}^i$, $\overset{\circ}{h}$.

A tal fine, si osservi che dalla (3)₃, passando agli aggiunti, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\underset{v}{V}} (x^{[i} g^{j]} + \mu k^{ij}) dV = - \int_{\underset{v}{\partial V}} x^{[i} t^{j]k} N_k ds.$$

Applicando il teorema del trasporto ed utilizzando l'arbitrarietà di $V \subset C$, si ha poi l'equazione locale

$$\frac{\partial}{\partial t} x^{[i} g^{j]} + \partial_k (x^{[i} g^{j]} v^k + x^{[i} t^{j]k}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mu k^{ij}) + \partial_k (\mu k^{ij} v^k) = 0$$

che può anche scriversi, stante (12) per $\alpha = i$ e (13),

$$g^{[i} v^{j]} + t^{[ij]} = \partial_\lambda (\overset{\circ}{\mu} k^{ij} U^\lambda) \quad , \quad (\overset{\circ}{\mu} = \overset{\circ}{\mu} \gamma)$$

Quest'ultima relazione, ricordando la conservazione della massa propria μ

$$(21) \quad \partial_\lambda (\overset{\circ}{\mu} U^\lambda) = 0$$

nonchè la (13), si scrive:

$$(22) \quad \mathfrak{g}^{[ij]} - \overset{\circ}{\mu} \frac{d k^{ij}}{d \tau} = 0,$$

dove τ è il tempo proprio per la generica particella $\mathbf{X} \in S$.

Analogamente, dalla (4) consegue:

$$\frac{\partial}{\partial t} (x^i h + c^2 \mu n^i) + \partial_k [(x^i h + c^2 \mu n^i) v^k + x^i p^k] = c^2 g^i$$

e quindi anche, tenendo conto di (12) per $\alpha = 4$ e (13),

$$(23) \quad c^2 g^i - (h v^i + p^i) = c^2 \mu \frac{dn^i}{d\tau}.$$

Infine, da (22) e (23), stante (13), seguono appunto le (7) dove

$$(24) \quad K^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} k^{ij} & cn^i \\ \hline -cn^i & 0 \end{array} \right\|, \quad (k^{ij} = -k^{ji})$$

tensore che, per il postulato (C), nel riferimento proprio $\overset{\circ}{I}$ ha componenti espresse dalla matrice (8). In conseguenza, come si è visto nell'introduzione, le (7), scritte in I, assumono la forma (9).

La (9)₂ consente di scrivere la (18)₁ nel modo seguente:

$$(25) \quad \Xi^\alpha = \Sigma^\alpha + l^\alpha$$

dove si è posto

$$(26) \quad l^\alpha = \left(\frac{\mu}{c^2} \left(\frac{d\overset{\circ}{K}^{i4}}{d\tau} \right), 0 \right).$$

In definitiva, da (15), (25) e (26) si perviene alla seguente altra espressione per $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}^{\alpha\beta}$:

$$(27) \quad \overset{\circ}{\mathfrak{A}}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\rho} U^\alpha U^\beta + \Pi^{\alpha\beta} + \Sigma^\alpha U^\beta + \Sigma^\beta U^\alpha + l^\alpha U^\beta$$

nella quale intervengono solo le grandezze indipendenti ρ , t^{ij} ($i \leq j$), p^i , k^{ij} (antisimmetrico). Si osservi che, per (26), è anche

$$(28) \quad l^\alpha U_\alpha = 0.$$

Il significato delle (9) è stato già chiarito nell'introduzione. Qui si vuole osservare che il termine aggiuntivo nella (9)₂ coincide con quello che in [8] è dedotto da un modello microscopico. Infatti, dalla (8) consegue, al primo ordine in v/c ,

$$K^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c} \overset{\circ}{k}^{ij} & \frac{1}{c} (\overset{\circ}{k} \wedge v) \\ \hline -\frac{1}{c} (\overset{\circ}{k} \wedge v) & 0 \end{array} \right\|$$

¹⁾ Cfr. [8], pag. 149.

dove $k^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} k_{ji}$ è l'aggiunto di k^{ij} , e quindi, per confronto con la (25),

$$K^{4i} = \frac{(\mathbf{k} \wedge \mathbf{v})^i}{c} + 0 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) = cn^i.$$

È ora subito visto che il termine aggiuntivo nella (27) risulta:

$$\frac{\overset{\circ}{\mu}}{c^2} \mathbf{a} \wedge \hat{\mathbf{k}},$$

dove $\overset{\circ}{\mathbf{a}}$ è l'accelerazione della particella $\mathbf{X} \in S$ in $\overset{\circ}{\mathbb{I}}$, e pertanto coincide con l'impulso (form. 5.180) di [8]) addizionale di spin che in [8] è giustificato a partire da un modello microscopico.

Si osserverà infine che è possibile, anche in presenza di spin, ristabilire l'equivalenza massa-energia nella consueta forma $\overset{\circ}{\mathbf{g}} = \overset{\circ}{\mathbf{p}}/c^2$. Basta infatti adottare come tensore impulso-energia

$$\Lambda^{\alpha\beta} = \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mu} \frac{d}{d\tau} k^{\alpha\beta}$$

ed osservare che $\Lambda^{\alpha\beta}$ è simmetrico e con esso le equazioni del moto si scrivono ancora:

$$\partial_{\beta} \wedge^{\alpha\beta} = 0.$$

4. DETERMINAZIONE DELLE DENSITÀ TOTALI DI IMPULSO E DI ENERGIA E DELLE EQUAZIONI RELATIVE DEL MOTO.

Dall'espressione (27) di $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$, per (20) e (31), si ottiene per saturazione con U_{β}

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} U_{\beta} = - \overset{\circ}{\rho} c^2 U^{\alpha} - (\Sigma^{\alpha} + l^{\alpha}) c^2, \\ \mathfrak{g}^{\alpha\beta} U_{\beta} = - \overset{\circ}{\rho} c^2 U^{\alpha} - \Sigma^{\alpha} c^2, \end{array} \right.$$

da cui sottraendo e tenendo conto di (7)

$$(30) \quad l^{\alpha} = - \frac{\overset{\circ}{\mu}}{c^2} U_{\beta} \frac{dk^{\alpha\beta}}{d\tau}.$$

Ancora, da (29)₁ e (13) segue

$$(g^i v^j + t^{ij}) \gamma v_j - c^2 g^i \gamma = \overset{\circ}{\rho} c^2 \gamma v^i - c^2 (\Sigma^i + l^i)$$

che fornisce l'espressione seguente di g^i :

$$(31) \quad g^i = \overset{\circ}{\rho} \gamma^2 v^i + \gamma^2 \frac{t^{ij}}{c^2} v_j + (\Sigma^i + l^i) \gamma.$$

Analogamente, dalla (29)₁ per $\alpha = 4$ e dalla (13), si ottiene ancora

$$\frac{1}{c} (h v^i + p^i) v_i - ch = -\overset{\circ}{\rho} c^3 - \frac{c^2}{\gamma} (\Sigma^4 + l^4)$$

da cui

$$(32) \quad h = \overset{\circ}{\rho} c^2 \gamma^2 + \frac{p^i v_i}{c^2} \gamma^2 + c \gamma (\Sigma^4 + l^4).$$

D'altra parte, per (20)₃ e (29) è anche

$$\begin{cases} c \Sigma^i = \Sigma^i v_i, \\ c l^i = l^i v_i, \end{cases}$$

sicchè sostituendo queste due ultime espressioni nelle (31) e (32) e tenendo conto di (31) si perviene alle seguenti espressioni per g^i ed h :

$$(33) \quad \begin{cases} g^i = \overset{\circ}{\rho} \gamma^2 v^i + \gamma^2 \frac{t^{ij} v^j}{c^2} + \gamma \Sigma^i + \frac{\overset{\circ}{\mu}}{c^2} U_{\beta} \frac{dK^{i\beta}}{d\tau}, \\ h = \overset{\circ}{\rho} c^2 \gamma^2 + \gamma^2 \frac{p^i v^i}{c^2} + \left(\gamma \Sigma^i + \frac{\overset{\circ}{\mu}}{c^2} U_{\beta} \frac{dK^{i\beta}}{d\tau} \right) \frac{v_i}{c} \end{cases}$$

Le equazioni relative del moto si ottengono sostituendo le (33) nelle formulazioni locali delle leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia (3)_{1,2}:

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \partial_k (h^i v^k + p^k) = 0, \\ \frac{\partial g^i}{\partial t} + \partial_k (g^i v^k + t^{ik}) = 0, \end{cases}$$

5. ESTENSIONE DEL TEOREMA DEL CENTRO D'INERZIA.

Per dedurre il teorema del centro d'inerzia per il sistema S, si cominci coll'osservare che se S è spazialmente limitato può applicarsi la (4) a tutto lo spazio ottenendosi:

$$(35) \quad \frac{d}{dt} \int \left(\frac{h}{c^2} \mathbf{x} + \mu \mathbf{n} \right) dV = \int \mathbf{g} dV$$

Sempre supponendo che S sia spazialmente limitato, dalle (3)_{1,2} consegue:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{G}}{dt} = 0, \\ \frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0, \end{array} \right.$$

dove

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dV,$$

$$\mathbf{H} = \int h dV,$$

rappresentano l'impulso e l'energia totali di S. È poi noto che ^{*)} essi costituiscono le componenti di un quadrivettore $\mathbf{P}^\alpha \equiv (\mathbf{G}, \mathbf{H}/c)$.

Se \mathbf{P}^α è del genere tempo, è possibile determinare un riferimento inerziale R, fisicamente ammissibile, in cui è $\mathbf{G} = 0$. Se \mathbf{u} è la velocità (certamente minore di quella della luce nel vuoto) di tale riferimento rispetto al generico riferimento inerziale I, può definirsi un punto \mathbf{X} , detto *centro d'inerzia*, colla posizione:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\mathbf{H}} \int \left(\frac{h}{c^2} \mathbf{x} + \mu \mathbf{n} \right) dV$$

da cui derivando e tenendo conto di (36),

$$(37) \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{c^2 \mathbf{G}}{\mathbf{H}} = \text{cost} = \mathbf{v}^*$$

^{*)} Cfr., ad es., [9], pag. 173.

La (37) mostra che il centro d'inerzia si muove di moto rettilineo ed uniforme con velocità v° minore di quella della luce. Infatti,

$$(v^{\circ})^2 = \frac{c^4 G^2}{H^2} < c^2.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ROMANO, In corso di stampa su *Ac. Sci. Lett. ed Arti in Napoli* (1973).
- [2] M. OLIVER COSTA DE BEAUREGARD, *C.R. Ac. Sc. Paris*, 211, pagg. 428-430 (1940).
- [3] M. OLIVER COSTA DE BEAUREGARD, *C.R. Ac. Sc. Paris*, 211, pagg. 499-501 (1940).
- [4] M. OLIVER COSTA DE BEAUREGARD, *Journ. de Math. Pure et Appliquées*, 21, fasc. 3, pagg. 267-275 (1942).
- [5] A. PAPAETIROU, I.C.I. Research Fellow, University of Manchester, pagg. 937-946 (1949).
- [6] D. W. SCIAMA, *Proc. Camb. Roy. Soc.*, 54, pagg. 72-80 (1958).
- [7] W. G. DIXON, *Proc. Roy. Soc. London*, A. 314, pagg. 499-527 (1970).
- [8] HAUS-PENFIELD, *Electrodynamics of moving media*, M.I.T., pag. 146 (1967).
- [9] C. MOLLER, *The theory of Relativity*, Oxford (1972).
- [10] W. PANOFSKI, M. PHILLIPS, *Classical electricity and magnetism*, Addison-Wesley Publishing Company (1962).

Applicabilità del microscopio elettronico a scansione allo studio del grado di coesione della pasta di cemento

*Nota del prof. Bernardo Marchese
presentata dal socio ordinario Riccardo Sersale*

(Adunanza del 1° dicembre 1973)

RIASSUNTO. — L'Autore, nell'ambito di una indagine sistematica rivolta allo studio della microstruttura delle paste di cemento mediante microscopia elettronica a scansione (SEM), esamina i prodotti d'idratazione di alcuni campioni di silicato tricalcico contenente in soluzione solida alluminio, magnesio o ferro, sia singolarmente che in coppia, impiegando un rapporto acqua-solido di 0,5 e spingendo l'indagine anche oltre i 28 giorni di maturazione.

Dopo aver sottolineato i vantaggi dell'impiego del microscopio elettronico a scansione, pone in evidenza il contributo che esso può dare alla interpretazione di fenomeni molto complessi, quali la coesione dei prodotti di neoformazione, discutendo i risultati delle osservazioni condotte sulle superfici di frattura dei campioni esaminati, anche al lume dei dati di una indagine collaterale in diffrazione dei raggi X. Viene altresì posto in luce il ruolo attribuibile alla porosità capillare, alle cavità, alla saldatura fra le particelle, ai fini delle modalità di propagazione della frattura delle paste.

SUMMARY. — Within a systematic study on the microstructure of the cement pastes using scanning electron microscopy (SEM), morphological features of hydration products of solid solutions tricalcium silicate are reported. The elements were Al, Mg or Fe, alone or in pair; the specimens were hydrated with a 0.5 water-solid ratio and observed also over 28 days of ageing.

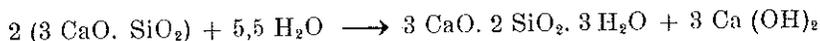
After a description of the scanning electron microscopy advantages, it is emphasized the contribution it may give to the interpretation of very complex phenomena as the new-formed products cohesion, discussing the results obtained from fracture surfaces, in connection to a collateral X-ray diffraction analysis. The role of the capillary porosity, of the cavities and of the particles bond on the fracture propagation mode is pointed out too.

INTRODUZIONE

È ben noto che alla resistenza meccanica dei calcestruzzi contribuisce in maniera determinante la resistenza della pasta di cemento. La resistenza di quest'ultima, per un dato rapporto acqua-cemento, è funzione della composizione chimica del cemento, della sua finezza, del quantitativo d'aria

inclusa, della durata della stagionatura, e infine della temperatura e della umidità dell'ambiente circostante.

Tra i composti d'idratazione del cemento, il silicato tricalcico è, com'è noto, il diretto responsabile delle resistenze meccaniche a breve stagionatura, sicchè non appare improprio prenderlo a modello della reazione di idratazione:



è molto complessa sia dal punto di vista chimico, che da quello fisico.

In primo luogo i silicati di calcio idrati variano di struttura e di composizione, con un rapporto CaO/SiO_2 non definito e compreso fra 1,5 a 2. Lo stesso idrossido di calcio cristallino non sembra conservare, qualora le condizioni ambientali lo impongono, il suo caratteristico *habitus*.

In secondo luogo la pasta di silicato tricalcico o di cemento, che esplica la propria azione cementante a seguito della trasformazione di particelle solide con l'acqua, è da considerarsi un sistema multifasico, o meglio essa, secondo l'efficace definizione del Powers [1], « comprises a hierarchy of aggregations of matter ».

Alla sua costituzione, infatti, concorre sia il volume occupato dal solido, cioè particelle gelatinose e cristalline intimamente legate ai grani originari residui, e sia il volume occupato dall'aria, che nei primi tempi di stagionatura ha ospitato in parte una soluzione acquosa più o meno concentrata. Il volume occupato dall'aria, definita come è noto porosità capillare, trae origine dalla suddivisione del primitivo spazio interstiziale, esistente tra i grani di cemento, in tante piccole cavità e pori, i quali vengono progressivamente occlusi dal « gelo tobermoritico ». Quest'ultimo eredita anch'esso un insieme di vuoti di gran lunga più piccoli, insieme che non può essere inferiore al 28% del solido e che va a costituire come è noto, la porosità del gelo.

Di conseguenza il comportamento sotto carico di un sistema talmente complesso è condizionato da una parte dalla porosità, e cioè con la forma, la dimensione e la distribuzione dei pori, e dall'altra dalla orientazione e dalla tessitura delle zone di contatto [2, 3].

Perciò, uno dei maggiori contributi allo studio della coesione, opportunamente correlato con la conoscenza della composizione chimica e della struttura cristallina, viene dato dalle tecniche di microscopia sia ottica che elettronica. In tempi recenti notevole è stato quello apportato dalla microscopia elettronica a scansione; ed alcuni dei lavori che hanno utilizzato tale tecnica sono stati già citati in un lavoro precedente [4].

Scopo della presente Nota è non solo di illustrare i molteplici aspetti microstrutturali della pasta di cemento messi in luce dalle superfici di frattura, ma di studiare la loro influenza nella propagazione della frattura.

PARTE SPERIMENTALE

I campioni di silicato tricalcico, $3\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$, e delle sue soluzioni solide sono stati preparati e caratterizzati secondo le modalità descritte nei precedenti lavori [4].

Sono riassunti nella tabella I la composizione chimica dei prodotti esaminati ed il loro grado di idratazione, quest'ultimo dedotto mediante diffrazione dei raggi X [5] dopo impasto con acqua nel rapporto acqua/solido di 0,5.

TABELLA I
Caratteristiche chimiche e fisiche dei prodotti esaminati

Campione	Analisi chimica, % in peso						grado di idratazione %			Micrografie corrispondenti
	SiO ₂ totale	CaO libera	CaO	MgO	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	a 2 giorni	a 7 giorni	a 30 giorni	
1	26,07	73,47	0,33	—	—	—	25	—	—	fig. 1
2	26,08	73,17	0,27	0,45	—	—	—	37	—	fig. 4, 6
3	25,90	73,06	0,07	1,00	—	—	30	—	—	fig. 5
6	25,68	73,00	0,11	—	—	0,90	—	45	—	fig. 2
7	25,91	73,51	0,49	—	0,80	—	36	48	—	fig. 3, 4
8	26,35	72,70	0,24	—	1,08	—	36	—	—	fig. 5
16	25,69	71,98	0,08	1,01	1,02	—	—	—	68	fig. 6

La caratterizzazione dei prodotti derivanti dall'idratazione, dopo 28 giorni, è stata eseguita mediante analisi diffrattometrica utilizzando una Camera Guinier-de Wolff con la radiazione Cuk. Essi sono riportati nella tavola I, a confronto con i prodotti anidri corrispondenti e con i riflessi principali dell'idrossido di calcio [6].

OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE

Alle brevi stagionature la frattura dei provini è di preferenza intergranulare come dimostrano le micrografie delle figure 1 e 2.

Sul grano della fig. 1 sono visibili, specie quando viste di profilo, formazioni sottili lanceolate che si proiettano in direzione radiale. Il suo aspetto superficiale perciò non è stato alterato dall'azione meccanica della frattura. È presumibile che esso sia rimasto legato al resto della massa nella parte non visibile, così come i tre grani della fig. 2. Questi ultimi si mostrano ben concatenati, ed infatti il confine tra essi appare piuttosto incerto.

Quando si propaga attraverso il singolo grano, la frattura riesce a rilevare le caratteristiche della massa interna. Infatti il grano della fig. 3, micrografia A, di notevoli dimensioni rispetto agli altri grani, presenta innumerevoli fratture all'interno ed una corteccia nella parte periferica inferiore. I segni profondi di frattura, che portano addirittura al distacco di grosse porzioni, lasciano presupporre trattarsi di un grano policristallino, la cui formazione è tra l'altro avvenuta allo stato solido tra grani sinterizzati.

Il cammino tortuoso delle linee di frattura trova riscontro nelle irregolarità della superficie, rese più evidenti dal profilo altimetrico, riportato in C. E' molto probabile che l'idratazione si sia propagata più velocemente nell'in-

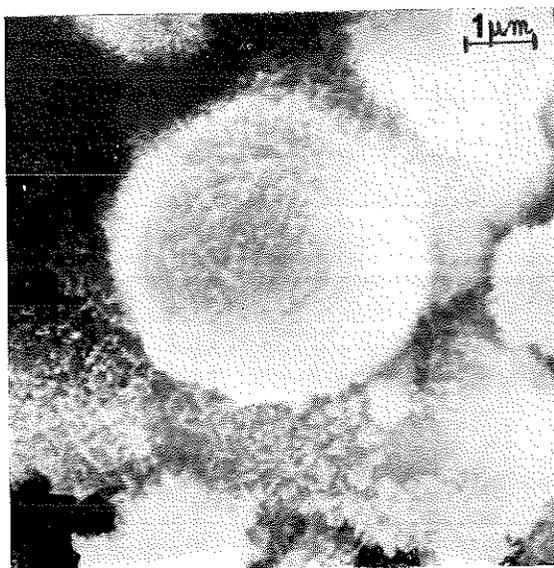


Fig. 1. — Superficie di frattura della pasta di silicato tricalcico puro, dopo 2 giorni d'idratazione.

terno sfruttando le imperfezioni preesistenti e che la conseguente anormale dilatazione abbia agevolato innanzi tutto la frattura, e poi il distacco di alcune parti del grano, ed infine una netta separazione tra i primi prodotti e la parte più interna del grano [7].

Nella fig. 4 sono messe a confronto le aree di due paste, contenenti MgO e Fe_2O_3 rispettivamente, dopo lo stesso tempo d'idratazione. Tali aree, che raggiungono $\approx 80 \times 80 \mu\text{m}^2$ nelle micrografie A e D, denotano una maggiore frequenza di zone più addensate per il campione contenente Fe_2O_3 , al quale corrisponde un valore più elevato della resistenza meccanica a compressione [5]. Il grano centrale della micrografia A denuncia negli ingrandimenti successivi la presenza molto ridotta di prodotti aghi-

formi ed una più vistosa di forme lamellari. Queste sono da attribuire ad $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ed il loro accrescimento lascia presupporre un meccanismo di

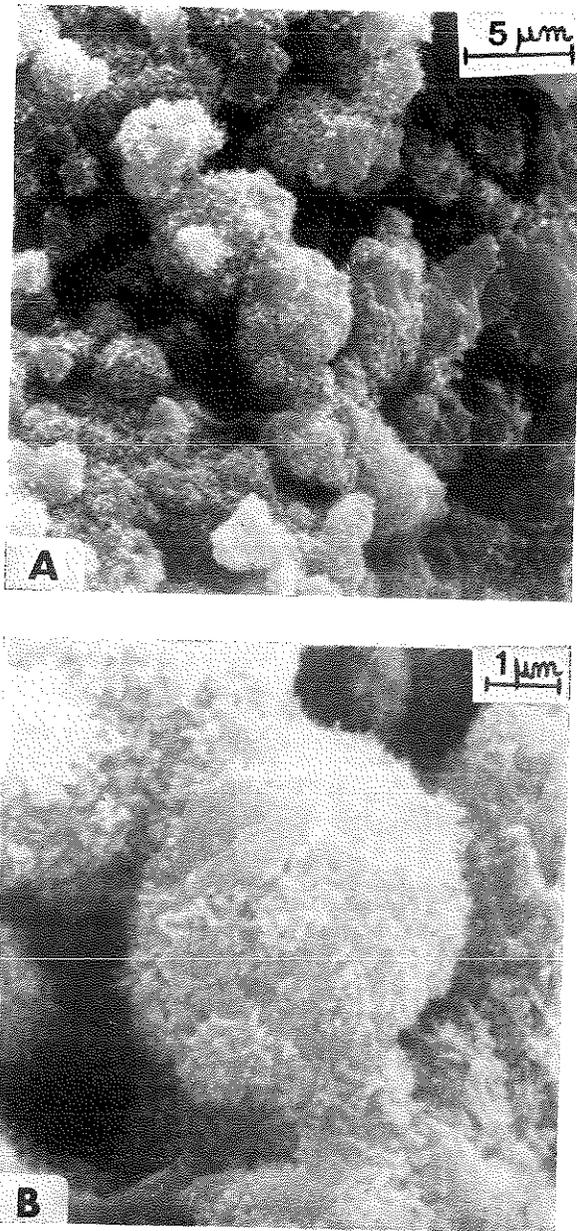


Fig. 2. — A = superficie di frattura della pasta del campione n° 6, dopo 7 giorni d'idratazione. B = particolare della micrografia A.

crescita a spirale. Un meccanismo simile può chiarire l'aspetto, meno regolare in verità, della massa, in alto a destra nella micrografia F, particolare ingrandito della zona centrale della micrografia D.

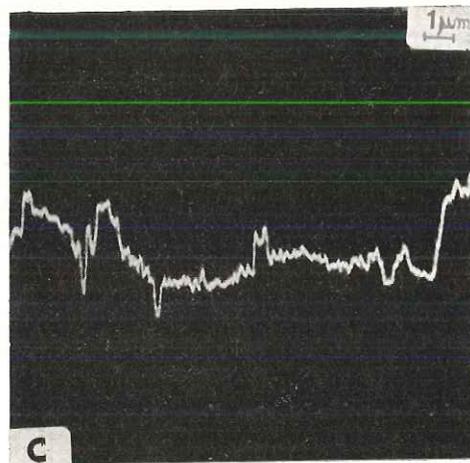
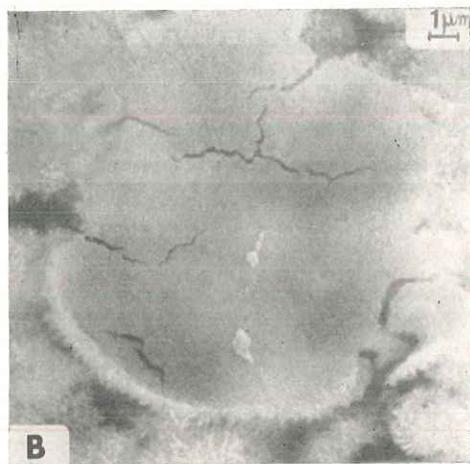
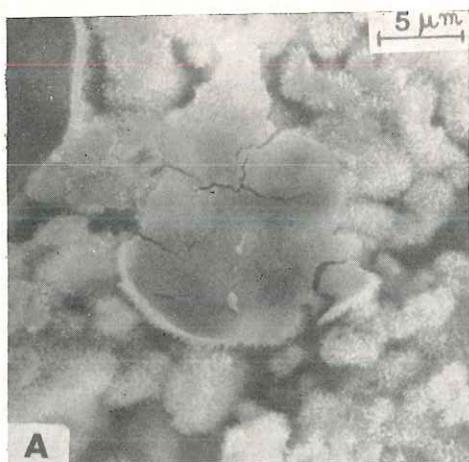


Fig. 3. — A = sezione di frattura di un grano della pasta del campione n° 7, dopo 2 giorni d'idratazione. B = particolare della micrografia A. C = profilo altimetrico lungo una linea a metà altezza della micrografia B.

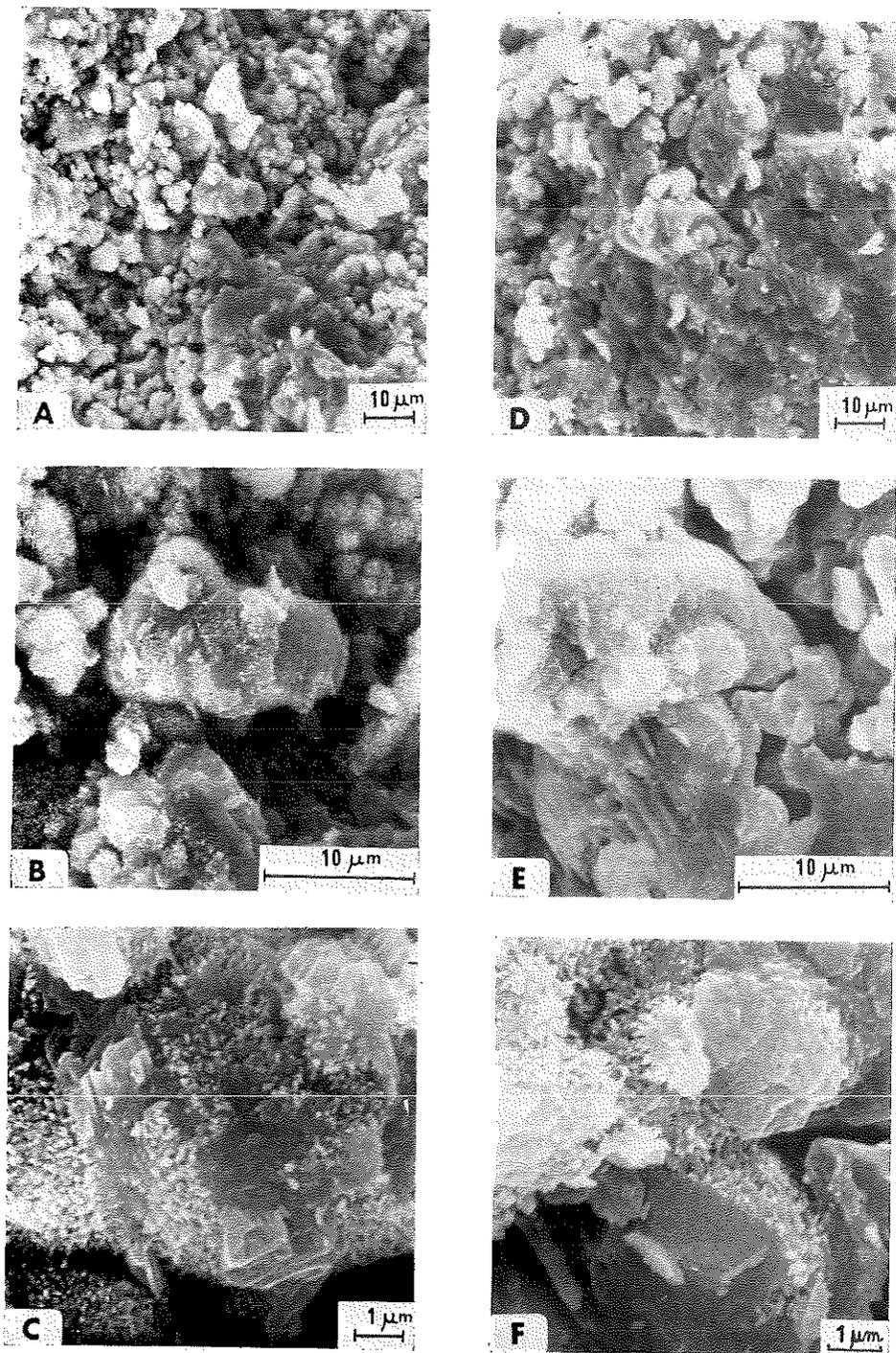


Fig. 4. — A = superficie di frattura della pasta del campione n° 2, dopo 7 giorni di idratazione. B e C = ingrandimenti successivi della zona centrale di A. D = superficie di frattura della pasta del campione n° 7, dopo 7 giorni d'idratazione. E ed F = ingrandimenti successivi della zona centrale di D.

Le immagini, finora mostrate, hanno messo in chiara evidenza l'esistenza di vuoti e come il loro volume si distribuisce nell'interno della massa. Si ritrovano cioè, accanto a pori di maggiore dimensione che conservano per la maggior parte la forma di quelli originari, altri di dimensione ridotta la cui forma si va modificando per lo sviluppo dei prodotti di neoformazione, ed altri di dimensioni ancora più piccole che rimangono tra i grani confinanti e che sono visibili nella fig. 4F. Tali considerazioni vogliono confermare una distribuzione continua dei vuoti costituenti la cosiddetta porosità capillare, per le paste ottenute in condizioni normali. È appena qui il caso di sottolineare la stretta relazione della porosità con la resistenza meccanica del calcestruzzo da una parte [8] e dall'altra con il ritiro e con l'espansione [9].

L'esame dell'interno della pasta attraverso le superfici di frattura può caratterizzare e distinguere i vuoti dovuti alla presenza di aria o che hanno raccolto una notevole quantità della soluzione liquida di contatto. Alcune di queste cavità, presenti nei campioni di diversa composizione chimica, sono riportate nelle figure 5 e 6. Esse si distinguono innanzi tutto per la forma quasi sferica e per le notevoli dimensioni, che per i casi riportati superano largamente i 10 μm (fig. 5A) fino a 100 μm di diametro (fig. 5D). La superficie concava delle pareti, priva di porosità capillare, non presenta la caratteristica morfologia aciculare dei prodotti di neoformazione caratterizzante i primi stadi di crescita, anzi passa da un aspetto irregolare a terrazze, figure 5B, 6B, 6C e 6E, ad uno addirittura amorfo, fig. 5D. Quest'ultimo potrebbe essere derivato da una precipitazione avvenuta in modo veloce dalla soluzione ivi raccolta.

È ben noto che la frattura a carattere fragile è facilmente agevolata dalla presenza di discontinuità (10, 11), tra queste le cavità possono agire da innesco. Nelle due figure 5B e 5E sono messi a confronto due segni di frattura entrambi di limitata estensione, in direzione radiale rispetto alle cavità. Si può facilmente osservare che la frattura della prima cavità fig. 5B, ha inizio dall'interno, forse provocata da un aumento di volume, viceversa una lieve contrazione pare sia stata responsabile della frattura della seconda cavità, fig. 5E, diretta questa verso l'interno della cavità e che rimane bloccata dalla massa amorfa.

Quando la separazione assume dimensioni notevoli anche le cavità sono attraversate facilmente, come mostrano le figg. 6B e 6E. Si può notare inoltre che i segni discontinui di frattura dell'interno della cavità della fig. 6B hanno molta somiglianza con quelli del grano della fig. 3B.

Infine, nelle aree immediatamente vicine, è possibile seguire, fig. 5C, 5F e 6F, il propagarsi della frattura. In tutti i casi trova conferma il fatto che la frattura opera più facilmente tra i confini delle fasi neoformate.

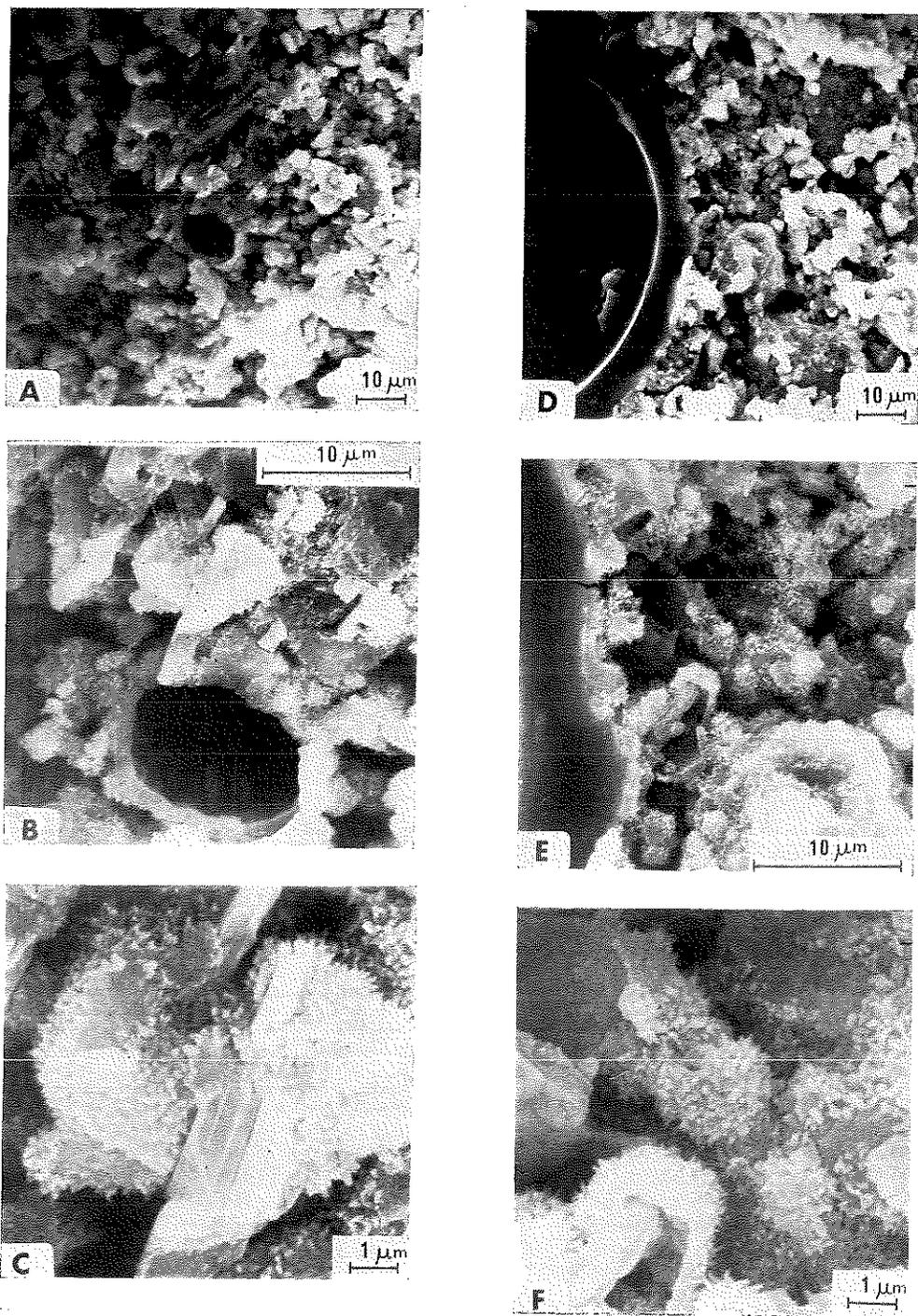


Fig. 5. — A = superficie di frattura della pasta del campione n° 3, dopo 3 giorni di idratazione. B e C = ingrandimenti successivi della zona centrale di A. D = superficie di frattura della pasta del campione n° 8, dopo 3 giorni d'idratazione. E ed F = ingrandimenti successivi della zona centrale di D.

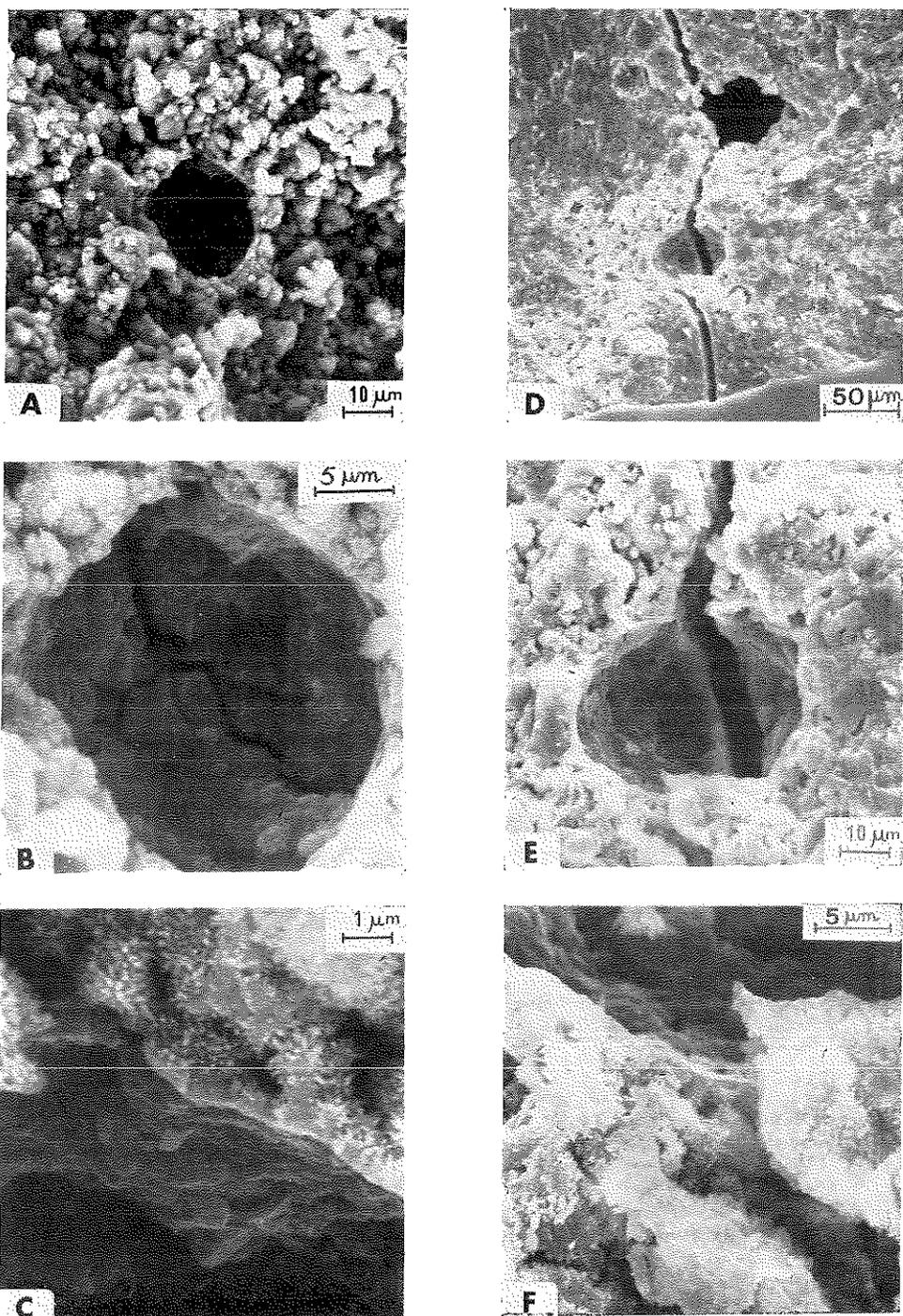


Fig. 6. — A = superficie di frattura della pasta del campione n° 2, dopo 7 giorni di idratazione. B = ingrandimenti dell'interno della cavità mostrata in A. C = particolare della zona in alto della micrografia B. D = superficie di frattura della pasta del campione n° 16, dopo 60 giorni di maturazione. E = ingrandimento della cavità mostrata in D. F = particolare della zona in basso della micrografia E.

CONCLUSIONI

Il complesso delle osservazioni effettuate, testimoniate solo in parte nelle micrografie presentate, ha permesso di chiarire i seguenti punti:

a) La morfologia di solidi neoformati, responsabili dell'azione legante, varia notevolmente passando da uno stato amorfo ad uno decisamente cristallino, con la possibilità molto frequente di zone amorse che inglobano fasi cristalline. A queste ultime sembra possa essere affidato il ruolo di una maggiore resistenza.

b) Mentre la porosità cosiddetta del gelo non si può evidenziare con sicurezza a causa della risoluzione non eccessiva ($\approx 250\text{\AA}$) raggiungibile con la SEM, quella capillare può essere studiata più efficacemente. I vuoti che la costituiscono, infatti, inizialmente irregolari come forma e dimensioni, si ritrovano poi distribuiti più uniformemente e con determinate caratteristiche.

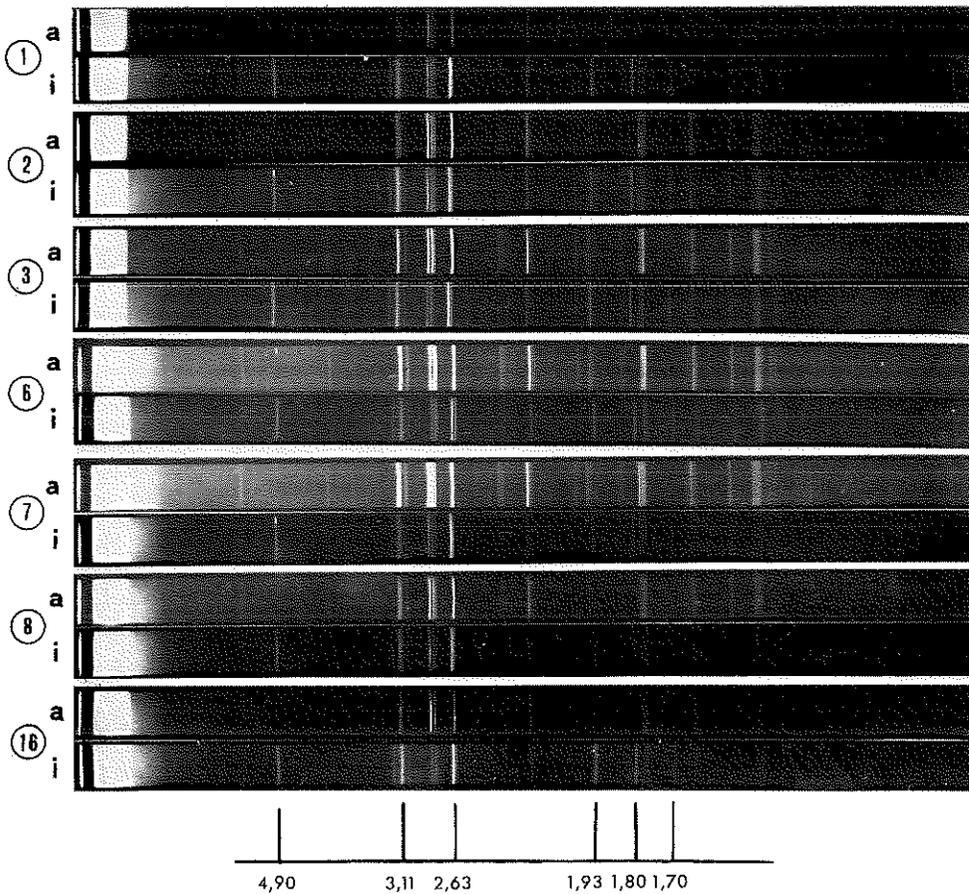
c) La frattura si propaga più facilmente attraverso le imperfezioni. Essa quindi è di preferenza intergranulare nelle paste di breve stagionatura, e transgranulare in quelle di più lunga stagionatura, a causa della maggior frequenza di aree sempre più compatte. In quest'ultimo caso essa è costretta ad attraversarle, ma con cambiamenti di direzione imposti dalla anisotropia della massa interna.

Qualora la frattura va ad interessare il singolo grano, viene messa in luce la inomogeneità dell'interno, ereditata dal meccanismo di formazione, e la presenza, in certi casi, di uno strato dei prodotti in via di accrescimento.

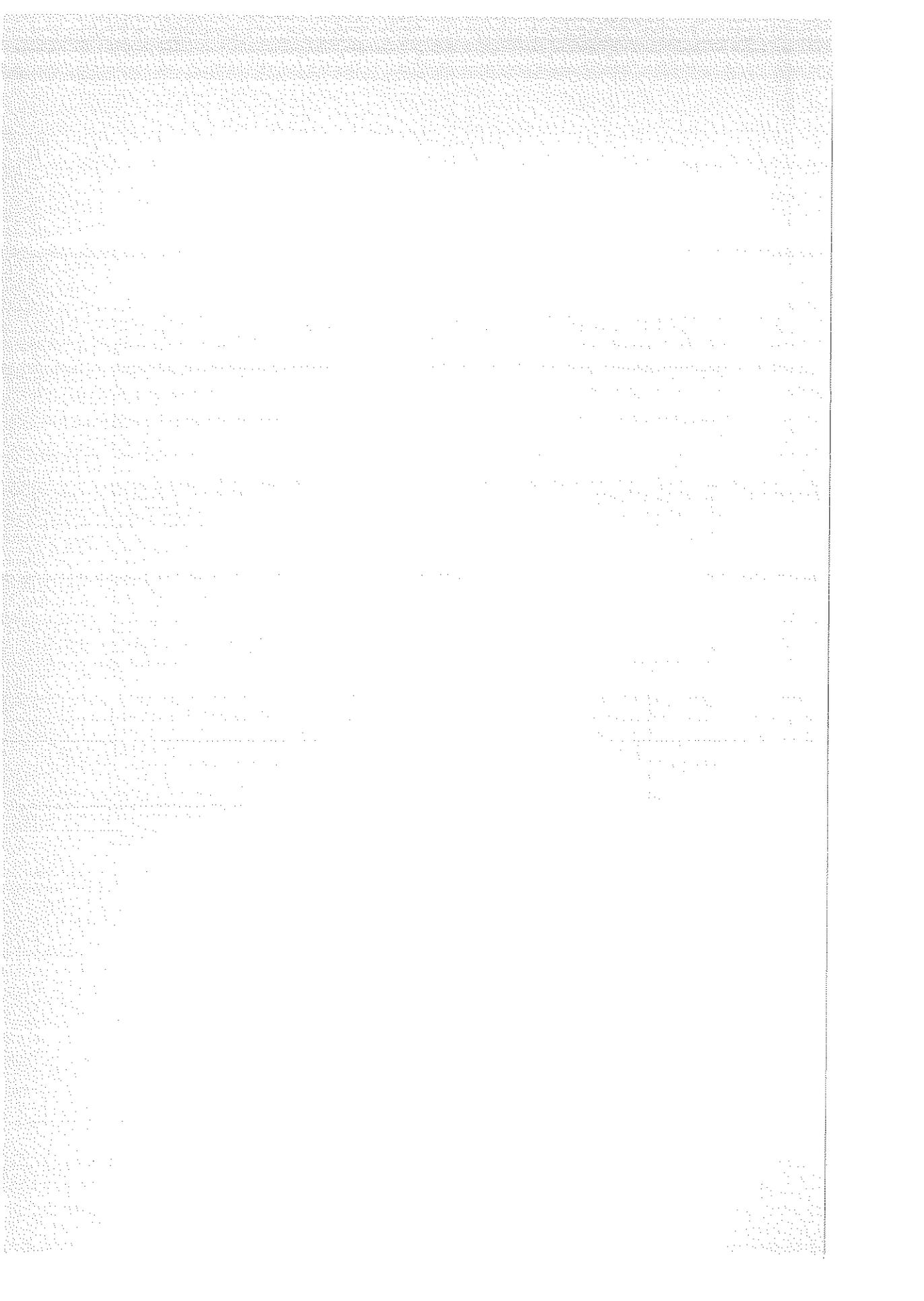
BIBLIOGRAFIA

- 1) T. C. POWERS: « The Nature of Concrete » in: *Concrete and Concretemaking Materials*, ASTM STP 169-A (1966).
- 2) A. GRUDEMO: « On the Development of Hydrate Crystal Morphology in Silicate Cement Binders ». Colloque Intern. RILEM, Toulouse 22-24 nov. 1972, pag. 112-132.
- 3) J. FARRAN: « Contribution minéralogique a l'étude de l'adhérence entre les constituants hydratés des ciments et les matériaux enrobés ». *Rev. Mat.* n° 490-491, 492 (1956).
- 4) B. MARCHESE: « Il contributo del microscopio elettronico a scansione allo studio delle paste di cemento. Nota I. Morfologia dei prodotti di idratazione del silicato tricalcico e di alcune sue soluzioni solide ». *Il Cemento* (in corso di stampa).
- 5) R. SERSALE: « Hydraulic Behaviour of Al, Fe, Mg-bearing Alites ». *Proc. VI Intern. Cong. Chem. Cement, Mosca* (1974) accepted for publication.
- 6) Scheda ASTM 4-0733.
- 7) R. B. WILLIAMSON: « Solidification of Portland Cement ». *Prog. Mat. Sci.* 15 [3], (1972).

- 8) C. E. SANDSTEDT, W. B. LEDBETTER, B. M. GALLAWAY « Prediction of Concrete Strength from the Calculated Porosity of the Hardened Cement Paste ». *J. Am. Conc. Inst.* **70** [2], 115-116 (1973).
- 9) T. C. POWERS: « Mechanisms of Shrinkage and Reversible Creep of Hardened Cement Paste ». *Proc. Int. Conf. London, Sept. 1965. Cement and Concrete Assoc.* 319-344 (1968).
- 10) R. L. BERGER, F. V. LAWRENCE jr, J. F. YOUNG: « Studies on the Hydration of Tricalcium Silicate Pastes. II. Strength Development and Fracture Characteristics ». *Cem. Conc. Res.* **3** 497-508 (1973).
- 11) F. RADJY, T. C. HANSEN: « Fracture of Hardened Cement Paste and Concrete ». *Cem. Conc. Res.* **3** 343-361 (1973).



Diffattogrammi dei campioni ottenuti con la camera Guinier-de Wolff. I numeri corrispondono a quelli della tabella I. a = anidro, i = idrato dopo 30 giorni. In basso i riflessi principali dell' $\text{Ca}(\text{OH})_2$ (6).



Formule di maggiorazione relative ad una classe di equazioni a coefficienti costanti

Nota del dott. Silvano Matarasso)
presentata dal socio ordinario Carlo Miranda*

(Adunanza del 1° dicembre 1973)

RIASSUNTO. — Alcuni risultati di M. Schechter relativi a valutazioni « a priori » per soluzioni di problemi differenziali nel semispazio, sono estesi, relativamente a una particolare classe di equazioni, includenti alcune di tipo ipoellittico, ad una classe più generale di soluzioni.

SUMMARY. — Some results of M. Schechter relative to « a priori » bounds for solutions of differential problems in halfspace, are extended, relatively to a particular class of equations, including some of the hypoelliptic type, to a more general class of solutions.

INTRODUZIONE.

In una memoria di qualche anno fa, cfr. [11], M. SCHECHTER ha stabilito delle formule di maggiorazione integrale per le soluzioni di una equazione a coefficienti costanti, definite nel semispazio $t \geq 0$ e soddisfacenti, per $t = 0$, ad un sistema di condizioni al contorno che ricoprono l'operatore a primo membro della equazione.

Gli operatori considerati appartengono ad una classe più ampia di quella degli operatori ipoellittici e le soluzioni considerate sono di classe C^∞ ¹⁾.

Si pone pertanto il problema di estendere la validità di tali formule a soluzioni che appartengano ad una classe più generale nella quale, tuttavia, i valori al contorno delle soluzioni si possano interpretare come « tracce ».

In questa nota mi occupo di tale questione, valendomi di alcuni teoremi di tracce stabiliti da A. CAVALLUCCI [3], limitandomi però alla considerazione di una classe di equazioni più ristretta di quella considerata da

*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

¹⁾ Per risultati precedenti riguardanti le equazioni ipoellittiche cfr. [2], [4], [5], [8].

M. SCHECHTER. Riesco anche a precisare la formula di M. Schechter, valutando in modo preciso i coefficienti di una forma quadratica che in essa interviene e a stabilire le regolarità della soluzione in una classe funzionale dipendente da quella cui appartengono i termini noti.

Questo risultato è enunciato nel n. 6 come teorema III; lo stesso numero contiene i teoremi I e II, che si riferiscono ad una classe di equazioni che, se sotto certi aspetti è più ristretta di quella considerata da M. SCHECHTER, sotto altri è più generale.

Nei n. 1, 2 e 3 sono precisate le notazioni, le classi funzionali utilizzate e le ipotesi relative all'operatore e alle condizioni di frontiera, mentre nel n. 4 si dà la valutazione di certi integrali; nel n. 5 sono stabilite le condizioni sotto le quali il sistema di condizioni al contorno ricopre l'operatore.

La dimostrazione dei teoremi del numero 6 è data nel numero 8, dopo aver stabilito nel n. 7 alcuni lemmi preliminari.

1. L'OPERATORE P.

Sia R^n lo spazio a n dimensioni il cui generico elemento sarà indicato con $y = (x, t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, t)$; con R_+^n e $\overline{R_+^n}$ indicheremo, rispettivamente, i semispazi $t > 0$ e $t \geq 0$.

Posto $(\xi, \eta) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta) \in R^n$, consideriamo il polinomio $P(\xi, \eta)$ e l'operatore $P(D_x, D_t)$ ove $D_x = (D_1, \dots, D_{n-1})$ con $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ e

$$D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$$

Posto

$$P^{(\mu)} = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial \xi_1^{\mu_1} \dots \partial \xi_{n-1}^{\mu_{n-1}} \partial \eta^{\mu_n}},$$

faremo le seguenti ipotesi:

1) Esistono due costanti N e M , tali che, per $(\xi, \eta) \in R^n$ e $|\xi| \geq N$, si abbia:

$$(1.1) \quad \sum_{\mu} |P^{(\mu)}(\xi, \eta)| \leq M |P(\xi, \eta)|.$$

Indicato con $\tau_k(\xi)$, $1 \leq k \leq m$, le radici di $P(\xi, \eta) = 0$, discende da tale ipotesi (cfr. [11]), che esiste una costante H_m , dipendente solo da m , per la quale si ha

$$(1.2) \quad |Im \tau_k(\xi)| \geq H_m \cdot M^{-1}, \quad |\xi| \geq N.$$

Si ha allora che $P(\xi, \eta) \neq 0$, per $(\xi, \eta) \in R^n$ e $|\xi| \geq N$, e se $n > 2$, $P(\xi, \eta)$ è di tipo determinato cioè il numero r delle radici con parte immaginaria positiva di $P(\xi, \eta) = 0$, considerata come equazione in η , non dipende da ξ , per $|\xi| \geq N$; indicheremo con $\tau_1^+(\xi), \dots, \tau_r^+(\xi)$ e $\tau_1^-(\xi), \dots, \tau_s^-(\xi)$, $r+s = m$, $|\xi| \geq N$, rispettivamente le radici con parte immaginaria positiva e con parte immaginaria negativa.

Per $n = 2$ faremo l'ipotesi che $P(\xi, \eta)$ è di tipo determinato.

Posto poi

$$P(\xi, \eta) = a_0(\xi) \eta^m + a_1(\xi) \eta^{m-1} + \dots + a_m(\xi),$$

supporremo che, con K' costante e per ogni $\xi \in R^{n-1}$,

$$(1.3) \quad K' |a_0(\xi)| \geq 1.$$

2) Supporremo poi che, per $|\xi| \geq N$ e $K_i = \text{cost.}$, si abbia

$$(1.4) \quad K_1 V(\xi, \eta) \leq |P(\xi, \eta)|^2 \leq K_2 V(\xi, \eta)$$

$$(1.5) \quad K_3 (d^2(\xi) + |a_0(\xi)|^2 \eta^{2m}) \leq V(\xi, \eta) \leq K_4 (d^2(\xi) + |a_0(\xi)|^2 \eta^{2m}),$$

ove, posto $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$V(\xi, \eta) = \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \eta^{2\alpha_n}$$

$$d^2(\xi) = \sum_{\alpha \in A'} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}}.$$

A è un insieme finito di punti di R^n con coordinate intere non negative, contenente l'origine e che soddisfa alla ulteriore proprietà che se $\alpha \in A$ e $0 \leq y \leq \alpha$, se ne deduce $y \in \overline{\langle A \rangle}$; $y \leq \alpha$ significa $y_i \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$, e $\langle A \rangle$ indica l'involuppo convesso di A ; si è posto poi

$$A' = \{ \alpha \in A \mid \alpha_n = 0 \}.$$

Facciamo ora vedere che, posto

$$c = c(\xi) = \left(\frac{d(\xi)}{|a_0(\xi)|} \right)^{\frac{1}{m}},$$

si ha, con K indipendente da ξ ,

$$(1.6) \quad \frac{|a_i(\xi)|}{|a_0(\xi)| \cdot c^i(\xi)} \leq K, \quad |\xi| \geq N.$$

Si ottiene infatti da (1.4) e (1.5), ponendo $\eta = \sigma c(\xi)$, $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sigma^m + \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi) c(\xi)} \sigma^{m-1} + \dots + \frac{a_{m-1}(\xi)}{a_0(\xi) c^{m-1}(\xi)} \sigma + \frac{a_m(\xi)}{a_0(\xi) c^m(\xi)} \right|^2 \leq K (1 + \sigma^{2m}),$$

da cui l'asserto per l'arbitrarietà di σ .

Posto ora

$$\begin{aligned} \dot{P}(\xi, \eta) = & \eta^m + \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi) c(\xi)} \eta^{m-1} + \dots + \frac{a_{m-1}(\xi)}{a_0(\xi) c^{m-1}(\xi)} \eta \\ & + \frac{a_m(\xi)}{a_0(\xi) c^m(\xi)}, \end{aligned}$$

in virtù di (1.6) le radici dell'equazione (in η) $\dot{P}(\xi, \eta) = 0$, sono contenute in un compatto indipendente da ξ .

E dunque poichè

$$P(\xi, \psi c(\xi)) = c^m(\xi) a_0(\xi) \dot{P}(\xi, \psi),$$

se ne deduce che le radici di $P(\xi, \eta) = 0$ sono del tipo $\tau(\xi) = \psi(\xi) c(\xi)$ con $\psi(\xi)$ limitato

Osserviamo ora che, in virtù di (1.2), dette $\phi_1^+, \dots, \phi_r^+, \phi_1^-, \dots, \phi_s^-$ le radici di $\dot{P}(\xi, \psi) = 0$, si ha:

$$| \operatorname{Im} \psi_k^\pm(\xi) | \geq \frac{H_m \cdot M^{-1}}{c(\xi)}, \quad |\xi| \geq N.$$

3) Supporremo allora che, per $|\xi| \geq N$, e con h_1 e h_2 costanti positive, dipendenti solo da m , si abbia:

$$(1.7) \quad h_1 e^{-\beta^\pm(\xi)} \leq | \operatorname{Im} \psi_k^\pm(\xi) | \leq h_2 e^{-\gamma^\pm(\xi)}, \quad 0 \leq \gamma^\pm \leq \beta^\pm \leq 1;$$

indicheremo con β il più grande tra β^+ e β^- .

4) Nel caso $0 < \beta^\pm \leq 1$, supporremo che siano r' (risp. s') le radici con parte immaginaria positiva (risp. con parte immaginaria negativa) di $\dot{P}(\xi, \psi) = 0$, che hanno parti reali distinte tra di loro, essendo r' (risp. s') indipendente da ξ per $|\xi| \geq N$; indicheremo con $\phi_1^+, \dots, \phi_{r'}^+$, r' radici con parte immaginaria positiva che, per $|\xi| \geq N$, hanno parti reali distinte; sia poi χ^+ , indipendente da ξ per $|\xi| \geq N$, il numero di volte che ogni $\operatorname{Re} \phi_i^+$, $1 \leq i \leq r'$, compare fra le parti reali delle radici con parte immaginaria

positiva; per semplicità di esposizione supporremo χ^+ indipendente dall'indice i , $1 \leq i \leq r'$.

Analogamente definiremo χ^- e indicheremo con $\phi_1^-, \dots, \phi_{s'}^-, |\xi| \geq N, s'$ radici con parte immaginaria negativa e parti reali distinte tra di loro.

Supporremo ancora che le parti reali distinte tra di loro rimangano tali anche « all'infinito » e cioè che esistano delle costanti positive K' e K'' tali che, per ogni ξ per cui $|\xi| \geq N$, si abbia

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} | \operatorname{Re} \phi_i^+(\xi) - \operatorname{Re} \phi_j^+(\xi) | \geq K', \quad i \neq j, \quad i, j \leq r' \\ | \operatorname{Re} \phi_i^-(\xi) - \operatorname{Re} \phi_j^-(\xi) | \geq K'', \quad i \neq j, \quad i, j \leq s'. \end{array} \right.$$

Porremo poi:

$$P_+(\xi, \eta) = \prod_{k=1}^r (\eta - \tau_k^+(\xi)) = \sum_{p=0}^r \alpha_p^+(\xi) \eta^{r-p}$$

$$P_-(\xi, \eta) = a_0(\xi) \prod_{k=1}^s (\eta - \tau_k^-(\xi)) = a_0(\xi) \sum_{p=0}^s \alpha_p^-(\xi) \eta^{s-p}$$

$$P_{+,j}(\xi, \eta) = \sum_{q=0}^j \alpha_q^+(\xi) \eta^{j-q}$$

$$P_{-,j}(\xi, \eta) = a_0(\xi) \sum_{q=0}^j \alpha_q^-(\xi) \eta^{j-q},$$

e, definiti analogamente $\dot{P}_+, \dot{P}_-, \dot{P}_{+,j}, \dot{P}_{-,j}$ a partire da \dot{P} , è immediato riconoscere che:

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_+(\xi, c(\xi)\eta) = c^r(\xi) \dot{P}_+(\xi, \eta) \\ P_-(\xi, c(\xi)\eta) = a_0(\xi) c^s(\xi) \dot{P}_-(\xi, \eta) \\ P_{+,j}(\xi, c(\xi)\eta) = c^j(\xi) \dot{P}_{+,j}(\xi, \eta) \\ P_{-,j}(\xi, c(\xi)\eta) = a_0(\xi) c^j(\xi) \dot{P}_{-,j}(\xi, \eta). \end{array} \right.$$

Si osservi che $\dot{P}_+, \dot{P}_-, \dot{P}_{+,j}, \dot{P}_{-,j}$, al pari di \dot{P} , sono polinomi in η a coefficienti limitati.

2. SPAZI FUNZIONALI.

Indicato con L^p lo spazio delle funzioni di potenza p -ma sommabile, porremo per $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{u}(\xi, \eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j \xi_j + x_n \eta\right)} u(y) dy.$$

Definiamo, con s intero non negativo, lo spazio $H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$ delle distribuzioni temperate u , per le quali \hat{u} è una funzione soddisfacente la condizione $V(\xi, \eta) (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$; esso sarà dotato della norma

$$\|u\|_{s,v}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} V(\xi, \eta) (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta;$$

si osservi, (cfr. [3]), che $H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$ coincide con lo spazio delle funzioni u tali che $D_x^\beta D_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha \in A$ e $|\beta| \leq s$, le derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni.

Posto con $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) = (\mu', \mu_n)$ e $c_\mu = \text{cost} \neq 0$,

$$P(\xi, \eta) = \sum_{\mu} c_{\mu} \xi^{\mu'} \eta^{\mu_n}$$

ove si intende che i multiindici μ siano a due a due distinti, si osservi che, in virtù di (1.4), se $u \in H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$, u possiede le derivate $D_x^\nu D_x^{\mu'} D_x^{\mu_n} u \in L^2$ con $|\nu| \leq s$, tali derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni; e infatti cominciamo con il far vedere che per ogni μ che figura nell'espressione di P

$$(2.1) \quad \xi^{2\mu'} \eta^{2\mu_n} \leq K V(\xi, \eta).$$

A tal fine se

$$B(\xi, \eta) = |P(\xi, \eta)|^2,$$

porremo con $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\beta', \beta_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$B_{\beta}(\xi, \eta) = B(\xi \beta', \eta \beta_n) = \sum_{\delta} d_{\delta} \beta^{\delta} \xi^{\delta'} \eta^{\delta_n},$$

ove la sommatoria è estesa ad un sistema di multiindici $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) = (\delta', \delta_n)$ a due a due distinti e i d_δ sono non nulli.

Supposto che gli addendi di B_β siano M non è difficile far vedere che esistono M vettori $\beta^{(k)}$, $k = 1, \dots, M$, tali che i $B_{\beta^{(k)}}(\xi, \eta)$ siano linearmente indipendenti.

Si ha allora per la (1.4) e con degli opportuni A_k e N' e con $|\xi| \geq N'$:

$$\xi^{\delta'} \eta^{\delta_n} = \sum_{k=1}^M A_k B_{\beta^{(k)}}(\xi, \eta) \leq K V(\xi, \eta).$$

La (2.1) è così verificata per $|\xi| \geq N'$; che poi sussista anche per $|\xi| < N'$ segue dal fatto che

$$|\eta|^{\delta_n} \leq 1 + \eta^{2m} \leq V(\xi, \eta).$$

Allora, poiché

$$|\hat{u}|^2 (1 + |\xi|^s)^s \xi^{2\mu'} \eta^{2\mu_n} \leq K |\hat{u}|^2 (1 + |\xi|^s)^s V(\xi, \eta),$$

se $u \in H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$, si deduce che, per $|v| \leq s$

$$(2.2) \quad D_\alpha^v D_\alpha^{\mu'} D_t^{\mu_n} u \in L^2.$$

Si noti che sia le $D_\alpha^\beta D^\alpha u$ con $\alpha \in A$ e $|\beta| \leq s$, che le $D_\alpha^v D_\alpha^{\mu'} D_t^{\mu_n}$, possono essere intese come derivate « forti » della u , giacché C_0^∞ è denso in $H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$ (cfr. [12]).

Considerato poi lo spazio $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ delle funzioni indefinitamente differenziabili e a supporto compatto in $\overline{\mathbb{R}_+^n}$, dotato della norma

$$(2.3) \quad \| \| u \| \|_{+,s,v}^2 = \sum_{|\beta| \leq s} \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathbb{R}_+^n} |D_\alpha^\beta D^\alpha u|^2 dy,$$

indichiamo con $H_{s,v}(\mathbb{R}_+^n)$ il suo completamento rispetto alla (2.3). Posto

$$(2.4) \quad \| \| u \| \| '_{+,s,v} = \inf_{v=u|_{\mathbb{R}_+^n}} \| \| v \| \|$$

è facile constatare che $\| \| \cdot \| \|_{+,s,v}$ e $\| \| \cdot \| \| '_{+,s,v}$ sono equivalenti.

E infatti (cfr. [3]), è possibile costruire una v definita in \mathbb{R}^n che coincide con u in \mathbb{R}_+^n e per la quale si ha, con K costante positiva,

$$(2.5) \quad \| \| v \| \|_{s,v} \leq K \| \| u \| \|_{+,s,v} ;$$

da ciò l'asserto.

Si osservi che se $u \in H_{s,v}(\mathbb{R}_+^n)$ è verificata la (2.2). E infatti si può costruire un prolungamento v a tutto \mathbb{R}^n di u , con $v \in H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$ (cfr. [3]).

Indichiamo poi con $L^2_{s,\mu}(\mathbb{R}_+^n)$ lo spazio delle distribuzioni temperate per le quali \hat{u} è una funzione soddisfacente la condizione

$$\| \| u \| \|_{s,\mu}^2 = \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi|^2)^s c^{2\mu}(\xi) |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi < +\infty ,$$

ove $\hat{u}(\xi, t)$ indica la trasformata di Fourier di $u(x, t)$ rispetto alle x_1, \dots, x_{n-1} ; porremo $L^2_{s,0} = L^2_s$ e $\| \| u \| \|_{s,0}^2 = \| \| u \| \|_s^2$.

Facciamo ora vedere che se $u \in H_{s,v}(\mathbb{R}_+^n)$ di conseguenza $f = P u \in L^2_s(\mathbb{R}_+^n)$. Infatti sia $v \in H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$ quel prolungamento di u per il quale vale la (2.5) e sia $f_1 = P v$.

Utilizzando la (1.4) si ottiene:

$$(2.6) \quad \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi, t)|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}_1(\xi, t)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |P(\xi, \eta)|^2 |\hat{v}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$$

$$\leq K \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s V(\xi, \eta) |\hat{v}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \leq K \| \| u \| \|_{+,s,v} .$$

3. GLI OPERATORI DI FRONTIERA Q_j .

Assegniamo r operatori a coefficienti costanti della forma

$$Q_j(D_x, D_t) = \sum_{h=0}^{p_j} Q_{jh}(D_x) D_t^h, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Supporremo

$$(3.1) \quad \begin{cases} p_j < m \\ Q_{jh}(\xi) = O(\sigma_j^{-h}(\xi)), \quad p_j \leq q_j \leq m - 1. \end{cases}$$

Si ha allora

$$Q_{jh}(\xi) = \sigma_j^{-h}(\xi) \dot{Q}_{jh}(\xi),$$

con $\dot{Q}_{jh}(\xi)$ funzione limitata di ξ e, posto

$$\dot{Q}_j(\xi, \eta) = \sum_{h=0}^{p_j} \dot{Q}_{jh}(\xi) \eta^h,$$

si ha

$$(3.2) \quad Q_j(\xi, \sigma(\xi) \eta) = \sigma_j^{q_j}(\xi) \dot{Q}_j(\xi, \eta).$$

si osservi che $\dot{Q}_j(\xi, \eta)$ è un polinomio in η a coefficienti limitati come funzioni di ξ .

Poniamo ora (cfr. [3])

$$h_r^{-1}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^{2r}}{V(\xi, \eta)} d\eta,$$

e osserviamo che, posto

$$U(\xi, \eta) = |a_0(\xi)|^2 (c^{2m} + \eta^{2m}),$$

si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^{2r}}{U(\xi, \eta)} d\eta = \text{cost.} \frac{\sigma^{2r+1-2m}}{|a_0(\xi)|^2}$$

da cui, poiché per $|\xi| \geq N$, in virtù della (1.5),

$$K_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^{2r}}{U(\xi, \eta)} d\eta \right)^{-1} \\ \cong \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^{2r}}{V(\xi, \eta)} d\eta \right)^{-1} \cong K_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta^{2r}}{U(\xi, \eta)} d\eta \right)^{-1},$$

ricaviamo che

$$(3.3) \quad k_r(\xi) = \varphi_r(\xi) | \alpha_o(\xi) |^2 e^{2m-2r-1}, \quad | \xi | \geq N,$$

ove $\varphi_r(\xi)$ è una funzione limitata con estremo inferiore positivo.

Definiamo ora

$$T_r u(x) = D_t^r u(x, 0), \quad u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n);$$

considerato allora

$$T : u \longrightarrow (T_o u, \dots, T_{m-1} u),$$

per un risultato di A. CAVALLUCCI [3], si deduce che T si prolunga per conti-

uità in un omomorfismo di $H_{s,v}(\mathbb{R}_+^n)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} H_{s,k_j}(\mathbb{R}^{n-1})$;

Poiché dalle (3.1) e (3.3) si ricava che

$$k_{q_j}(\xi) | Q_{j^h}(\xi) |^2 \cong K k_h(\xi),$$

se ne deduce, per $u \in H_{s,v}(\mathbb{R}_+^n)$,

$$(3.4) \quad Q_j(D_w, D_t) u(x, 0) \in H_{s,k_{q_j}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

In definitiva, considerato l'operatore

$$\mathfrak{S} : u \longrightarrow \mathfrak{S} u \\ = (P(D_w, D_t) u, Q_1(D_w, D_t) u(x, 0), \dots, Q_r(D_w, D_t) u(x, 0)),$$

si ha per la (2.6) e per il teorema di A. Cavallucci, che esso è lineare e continuo da $H_{s,v}(\mathbb{R}_+^n)$ in

$$L_s^2(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H_{s,k_{q_j}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

4. VALUTAZIONE DI CERTI INTEGRALI.

In questo numero studieremo alcuni integrali la cui valutazione sarà utile nel seguito; in alcune di tali valutazioni avranno un ruolo essenziale le (1.7) e (1.8).

Osserviamo per primo che, nel caso $\beta^+ = 0$, è immediato ricavare che

$$(4.1) \quad H_1 \leq \int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1, \dots, \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r \leq H_2$$

ove H_1 e H_2 sono costanti positive indipendenti da ξ per $|\xi| \geq N$ e $V(\rho_1 \dots \rho_r)$ è il determinante di Vandermonde di $\rho_1 \dots \rho_r$.

Indicato infatti con ψ un numero tale che, per $|\xi| \geq N$ e per ogni k , $|\psi_k^+(\xi)| \leq \psi e$, detto I_ψ l'intervallo di \mathbb{R} con centro nell'origine e semidimensione ψ , si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r \\ & \leq K_1 \int_{(I_{2\psi})^r} V^2(\rho_1 \dots \rho_r) d\rho_1 \dots d\rho_r \\ & + K_2 \int_{\mathbb{R}^r - (I_{2\psi})^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{\prod_{h=1}^r (\rho_h - \psi)^{2r}} d\rho_1 \dots d\rho_r \leq K; \end{aligned}$$

si noti che, per quanto riguarda l'integrale esteso a $(I_{2\psi})^r$, si è utilizzato il

fatto che, in virtù della (1.7), con $\beta^+ = 0$, l'espressione $\prod_{h,k}^{1,r} \{(\rho_h - \operatorname{Re} \psi_k^+)^2 +$
 $+ I^2 m \psi_k^+\}$ si minora con una costante positiva indipendente da ξ per $|\xi| \geq N$.

Si ha poi con H_1 costante positiva,

$$\int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r \geq K_3 \int_{(I_{2\psi})^r} V^2(\rho_1 \dots \rho_r) \geq H_1;$$

è dunque dimostrata la (4.1).

Posto ora

$$v_k^+ = \operatorname{Re} \psi_k^+, \quad \sigma_k^+ = \operatorname{Im} \psi_k^+, \quad 1 \leq k \leq r,$$

ricordiamo che, nell'ipotesi 4), v_1^+, \dots, v_r^+ , sono distinti tra di loro, ognuno essendo ripetuto χ^+ volte nella r-pla v_1^+, \dots, v_r^+ .

Indichiamo ora con J l'insieme delle permutazioni di $1 \dots r$ che forniscono permutazioni distinte di $v_1^+ \dots v_r^+$ e sia $I_{p_1 \dots p_r}$ l'intervallo di centro $v_{p_1}^+ \dots v_{p_r}^+$ di dimensione $\varepsilon < 2k'$ (cfr. (1.8)).

Si ha allora utilizzando (1.7) e (1.8):

$$\begin{aligned} & \int_{R^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r \\ &= \int_{R^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{\prod_{h,k} \{(\rho_h - v_k^+)^2 + \sigma_k^{+2}\}} d\rho_1 \dots d\rho_r \\ &\leq K \sum_{p_1 \dots p_r, \epsilon \in J} \int_{I_{p_1 \dots p_r}} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{\prod_h \{(\rho_h - v_{p_h}^+)^2 + \epsilon^{-2\beta^+}\}^{\chi^+}} d\rho_1 \dots d\rho_r \\ &+ \int_D \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{\prod_{h,k} (\rho_h - v_k^+)^2} d\rho_1 \dots d\rho_r. \end{aligned}$$

con D si è indicato il complemento rispetto a R^r dell'unione degli $I_{p_1 \dots p_r}$; si noti poi che si è utilizzato il fatto che, in virtù di (1.8), se $v_{p_h}^+ - \varepsilon \leq \rho_h \leq v_{p_h}^+ + \varepsilon$ si ha di conseguenza che $(\rho_h - v_{p_h}^+)^2 \geq \operatorname{cost} > 0$, se $v_{p_h}^+ \neq v_{p_k}^+$, con cost . indipendente da ξ per $|\xi| \geq N$.

Posto allora

$$\rho_h - v_{p_h}^+ = \sigma_h \epsilon^{-\beta^+}$$

si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1, \dots, \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r$$

$$\cong \int_{\mathbb{D}} \frac{V^2(\rho_1, \dots, \rho_r)}{\prod_{h,k} (\rho_h - \nu_k^+)^2} d\rho_1 \dots d\rho_r + K e^{r\beta^+ (2\chi^+ - 1)} \int_{-\varepsilon e^{\beta^+}}^{\varepsilon e^{\beta^+}} \frac{d\sigma_1}{(1 + \sigma_1^2)^{\chi^+}} \dots$$

$$\dots \int_{-\varepsilon e^{\beta^+}}^{\varepsilon e^{\beta^+}} \frac{V^2(\nu_{p_1}^+ + \sigma_1 e^{-\beta^+}, \dots)}{(1 + \sigma_r^2)^{\chi^+}} d\sigma_r.$$

Osserviamo ora che, in base alla diseguaglianza di Hadamard relativa ai determinanti, si ha:

$$V^2(\nu_{p_1}^+ + \sigma_1 e^{-\beta^+}, \dots) \leq K \prod_{i=1}^r \{1 + (\sigma_i e^{-\beta^+})^{2(r-1)}\},$$

e, poiché

$$\int_0^{\varepsilon e^{\beta^+}} \frac{1 + (\sigma_i e^{-\beta^+})^{2(r-1)}}{(1 + \sigma_i^2)^{\chi^+}} d\sigma_i \leq K_1 + K_2 e^{\beta^+(1-2\chi^+)},$$

si ottiene

$$(4.2) \quad \int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1, \dots, \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r = O(e^{\beta^+ r(2\chi^+ - 1)}).$$

Si ha poi analogamente, utilizzando (1.7) e (1.8):

$$\int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1, \dots, \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r \cong$$

$$\begin{aligned} &\cong \int_{I_{p_1 \dots p_r}} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{\prod_{h=1}^r \{(\rho_h - v_{p_h}^-)^2 + e^{-2\gamma^+}\}^{\chi^+}} d\rho_1 \dots d\rho_r \\ &= K e^{\gamma^+(2\chi^+-1)r} \int_{-e\epsilon\gamma^+}^{e\epsilon\gamma^+} \frac{d\sigma_1}{(1 + \sigma_1^2)^{\chi^+}} \dots \int_{-e\epsilon\gamma^+}^{e\epsilon\gamma^+} \frac{V^2(v_{p_1}^+ + \sigma_1 e^{-\gamma^+}, \dots)}{(1 + \sigma_r^2)^{\chi^+}} d\sigma_r \\ &\cong K e^{\gamma^+(2\chi^+-1)r} \int_{\Sigma} \frac{V^2(v_{p_1}^+ + \sigma_1 e^{-\gamma^+}, \dots)}{\prod_{h=1}^r (1 + \sigma_h^2)^{\chi^+}} d\sigma_1 \dots d\sigma_r \end{aligned}$$

ove, posto $b = \epsilon e^{\gamma^+}/3$,

$$\Sigma = \left\{ \sigma \mid b \frac{2^{2i-1} - 1}{2^{2i-1}} \leq \sigma_i \leq b \frac{2^{2i} - 1}{2^{2i}} \right\}.$$

Osserviamo ora che, per $\sigma \in \Sigma$ e con K indipendente da ξ ,

$$0 < K \leq |\sigma_i - \sigma_j| e^{-\gamma^+} \leq \frac{2}{3} \epsilon, \quad i \neq j,$$

si deduce che, con $H > 0$ indipendente da ξ ,

$$\begin{aligned} &V^2(v_{p_1}^+ + \sigma_1 e^{-\gamma^+}, \dots) \\ &= \prod_{i < j} \{v_{p_i}^+ - v_{p_j}^+ + (\sigma_i - \sigma_j) e^{-\gamma^+}\}^2 \geq H. \end{aligned}$$

In definitiva

$$(4.3) \quad \int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r \geq K e^{\gamma^+(2\chi^+-1)r}.$$

5. CONDIZIONE DI RICOPRIMENTO PER GLI OPERATORI P E Q_j .

Poniamo

$$(5.1) \quad \frac{Q_j(\xi, \eta)}{P(\xi, \eta)} = \frac{Q_j^+(\xi, \eta)}{P_+(\xi, \eta)} + \frac{Q_j^-(\xi, \eta)}{P_-(\xi, \eta)},$$

con $Q_j^+(\xi, \eta)$ e $Q_j^-(\xi, \eta)$ polinomi in η , di grado, rispettivamente, inferiore ad r ed s .

Consideriamo poi le matrici (cfr. [11])

$$A = \|\alpha_{ij}\|, \quad B = \|\beta_{ij}\|,$$

ove

$$\alpha_{ij}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \frac{Q_i^+(\xi, \eta) \overline{Q_j^+(\xi, \eta)}}{|P_+(\xi, \eta)|^2} d\eta$$

$$\beta_{ij}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \frac{Q_i^-(\xi, \eta) \overline{Q_j^-(\xi, \eta)}}{|P_-(\xi, \eta)|^2} d\eta;$$

introduciamo anche la matrice $T = B A^{-1} B$ ove A^{-1} è la matrice inversa di A .

Si osservi ora che utilizzando la (1.6) di [1] si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{+,r-1-h}(\xi, \eta) Q_j^+(\xi, \eta)}{P_+(\xi, \eta)} d\eta$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} Q_{jk}^+(\xi) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{+,r-1-h}(\xi, \eta) \eta^k}{P_+(\xi, \eta)} d\eta = Q_{jk}^+(\xi),$$

ove con γ si è indicata una curva semplice e chiusa contenuta in $\text{Im } \eta > 0$ e contenente $\tau_1^+, \dots, \tau_r^+$; si ha poi, utilizzando (5.1) e (1.9):

$$Q_{jh}^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{+,r-1-h}(\xi, \eta) Q_j^+(\xi, \eta)}{P_+(\xi, \eta)} d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{+,r-1-h}(\xi, \eta) Q_j(\xi, \eta)}{P(\xi, \eta)} d\eta$$

$$= \frac{e^{r-h+q_j-m}}{a_o(\xi)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\dot{P}_{+,r-1-h}(\xi, \eta) \dot{Q}_j(\xi, \eta)}{\dot{P}(\xi, \eta)} d\eta;$$

con $\dot{\gamma}$ si è indicato una curva semplice e chiusa contenente le radici di $\dot{P}_+(\xi, \eta)$ e contenuta in $\text{Im } \eta > 0$.

Poiché in virtù della (1.7) e con una opportuna scelta di $\dot{\gamma}$

$$|\dot{P}(\xi, \eta)| \geq K e^{-m\beta},$$

se ne trae

$$Q_{jh}^+(\xi) = \frac{e^{r-h+q_j-m(1-\beta)}}{a_o(\xi)} \dot{Q}_{jh}^+(\xi)$$

ove $\dot{Q}_{jh}^+(\xi)$ è una funzione limitata di ξ .

Si osservi poi che:

$$(5.2) \quad Q_j^+(\xi, \eta e(\xi)) = \frac{e^{q_j+r-m(1-\beta)}}{a_o(\xi)} \dot{Q}_j^+(\xi, \eta)$$

ove

$$\dot{Q}_j^+(\xi, \eta) = \sum_{h=0}^{r-1} \dot{Q}_{jh}^+(\xi) \eta^h.$$

Si osservi che $\dot{Q}_j^+(\xi, \eta)$ è un polinomio in η a coefficienti limitati come funzioni di ξ .

Analogamente si ottiene:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} Q_{jh}^-(\xi) &= e^{s-h+q_j-m(1-\beta)} \dot{Q}_{jh}^-(\xi) \\ Q_j^-(\xi, \eta e(\xi)) &= e^{q_j+s-m(1-\beta)} \dot{Q}_j^-(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Applicando ora un risultato riportato da M. PICONE (cfr. [9] pg. 511-512), si ha:

$$\det A = \frac{1}{r!} \int_{R^r} \frac{|\det \|Q_i^+(\xi, \rho_j)\|^2|}{|\det \|P_+(\xi, \rho_1) \dots P_+(\xi, \rho_r)\|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r;$$

posto allora

$$\dot{Q}^+(\xi) = \det \| \dot{Q}_{ij}^+(\xi) \|, \quad V(\rho_1 \dots \rho_r) = \det \| \rho_j^{i-1} \|,$$

si ottiene, utilizzando (1.9) e (5.2):

$$(5.4) \quad \det A = \frac{c^\alpha}{|\alpha_o(\xi)|^{2r}} \cdot \frac{1}{r!} \int_{\mathbb{R}^r} \frac{|\det \|\dot{Q}_j^+(\xi, \rho_j)\||^2}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r$$

$$= \frac{c^\alpha}{|\alpha_o(\xi)|^{2r}} \frac{1}{r!} |\dot{Q}^+(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r,$$

ove si è posto

$$a = 2 \sum_{j=1}^r q_j + r - 2rm(1 - \beta).$$

Faremo ora la seguente ipotesi (di ricoprimento):

$$(5.5) \quad A \text{ non singolare,} \quad |\xi| \geq N.$$

Ciò significa dunque che, per $|\xi| \geq N$,

$$(5.6) \quad \dot{Q}^+(\xi) \neq 0.$$

Tale condizione però non è da sola sufficiente ai nostri scopi, in quanto, come vedremo, è necessario che A sia non singolare « uniformemente » per $|\xi| \geq N$.

Supporremo allora che esista un numero $H > 0$, indipendente da ξ , per $|\xi| \geq N$, tale che

$$(5.7) \quad |\dot{Q}^+(\xi)| \geq H.$$

Posto allora

$$\dot{A}(\xi) = \frac{1}{r!} |\dot{Q}^+(\xi)|^2$$

$$e^{-\gamma^{+r}(2\chi^{+1})} \int_{\mathbb{R}^r} \frac{V^2(\rho_1 \dots \rho_r)}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_r)|^2} d\rho_1 \dots d\rho_r,$$

si ottiene che, in virtù di (4.3) e (5.7)

$$(5.8) \quad \inf_{|\xi| \geq N} \dot{A}(\xi) \geq K > 0.$$

Si ha infine

$$(5.9) \quad \det A(\xi) = \frac{e^{a+\gamma^+(2\chi^+-1)}}{|a_0(\xi)|^{2r}} \dot{A}(\xi).$$

Si osservi che, nell'ipotesi $\beta^+ = 0$ (e quindi $\gamma^+ = 0$), le (5.8) e (5.9) sussistono senza utilizzare l'ipotesi 4). A tal fine basta utilizzare la (4.1) al posto della (4.3).

6. ENUNCIATO DEI TEOREMI.

Scopo di questo lavoro è di far vedere che se u soddisfa il problema

$$(6.1) \quad \begin{cases} P(D_x, D_t) u(x, t) = f(x, t) \\ Q_j(D_x, D_t) u(x, 0) = g_j(x) \end{cases} \quad 1 \leq j \leq r,$$

con $f \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$, $g_j \in H_{s, k_{q_j}}(\mathbb{R}^{n-1})$, sussiste il seguente teorema:

TEOREMA I. *Supposto che l'operatore P verifichi le ipotesi 1), 2), 3) con $\beta^\pm = 0$, gli operatori Q_j la (3.1) e il sistema $\{P, Q_j\}$ la (5.7), per $u \in H_{0, v}(\mathbb{R}^n)$, soddisfacente il problema (6.1), vale la maggiorazione:*

$$(6.2) \quad \| \| u \| \|_{+, s, v} \leq K \left(\| f \|_s + \sum_{j=1}^r \| \| g_j \| \|_{s, k_{q_j}} + \| u \|_0 \right).$$

Posto poi

$$(6.3) \quad \delta = (2\chi^+ - 1)(\beta^+(r-1) - \gamma^+r) - 2\beta m,$$

$$(6.4) \quad 2\mu = \delta + 2\beta m + \beta^-(2\chi^- - 1)$$

$$W(\xi, \eta) = V(\xi, \eta) (1 + |\xi|^2)^p$$

con p soddisfacente la condizione

$$(1 + |\xi|^2)^p \geq K e^{2\mu}(\xi), \quad |\xi| \geq N,$$

nell'ipotesi che u soddisfi le (6.1) con $f \in L^2_{s, \text{ult}}$ e $g_j \in H_{s, \kappa_{q_j}}(\mathbb{R}^{n-1})$, ove $\kappa_{q_j} = k_{q_j} \cdot c^\delta$, sussiste il seguente altro teorema:

TEOREMA II. *Supposto che l'operatore P verifichi le ipotesi 1), 2), 3), 4),*

gli operatori Q_j la (3.1) e il sistema $\{P, Q_j\}$ la (5.7), per $u \in H_{0,W}(R_+^n)$, soddisfacente il problema (6.1), nelle ipotesi fatte sui dati, vale la maggiorazione:

$$(6.5) \quad \| \| u \| \|_{+,s,V} \leq K (\| f \|_{k,\mu} + \sum_{j=1}^r \| \| g_j \| \|_{s,\omega_j} + \| u \|_0).$$

Facciamo ora l'ipotesi, (cfr. la (2.4) di [11]), che esista una costante H , indipendente da ξ , tale che $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in C^r$ (C campo dei numeri complessi), si abbia

$$(6.6) \quad \sum_{i,j}^{1,r} \tau_{ij}(\xi) \lambda_i \bar{\lambda}_j \leq H \sum_{i,j}^{1,r} s_{ij}(\xi) \lambda_i \bar{\lambda}_j, \quad | \xi | \geq N;$$

si osservi che con $\tau_{ij}(\xi)$ abbiamo indicato gli elementi della matrice T definita nel 5.

Posto ora

$$Z(\xi, \eta) = V(\xi, \eta) (1 + | \xi |^2)^q,$$

con q soddisfacente la condizione (cfr. la (6.3))

$$(1 + | \xi |^2)^q \geq K \epsilon^\delta(\xi), \quad | \xi | \geq N,$$

nell'ipotesi che $f \in L^2_s, g_j \in H_{s,\omega_j}(R^{n-1})$ sussiste il teorema:

TEOREMA III. *Supposto che l'operatore P verifichi le ipotesi 1), 2), 3), 4), gli operatori Q_j la (3.1) e il sistema $\{P, Q_j\}$ la (5.7) e la (6.6), per $u \in H_{0,s}(R_+^n)$ e soddisfacente il problema (6.1), nelle ipotesi fatte sui dati, vale la maggiorazione:*

$$(6.7) \quad \| \| u \| \|_{+,s,V} \leq K (\| f \|_k + \sum_{j=1}^r \| \| g_j \| \|_{s,\omega_j} + \| u \|_0).$$

Osservazione. Si noti che nei precedenti teoremi si è ottenuta con la maggiorazione di u in $H_{s,V}(R_+^n)$, anche dei teoremi di regolarizzazione, in quanto in essi la u non è presupposta di classe $H_{s,V}$.

7. ALCUNI LEMMI.

In questo numero stabiliremo alcuni lemmi preliminari che saranno utilizzati per stabilire i teoremi del n. 6.

Ci proponiamo per primo, di ottenere una valutazione per gli elementi di A^{-1} , matrice inversa di A ; a tale scopo indicheremo con σ_{it} il minore complementare di α_{it} e con α'^t gli elementi di A^{-1} ; analogamente indicheremo con $Q^{+(it)}(\xi)$ e V_{it} , rispettivamente, i minori complementari degli elementi di $Q^+(\xi)$ e V (determinante di Vandermonde di ordine r).

Sussiste il seguente

LEMMA 1. *Supposto che P verifichi le ipotesi 1), 2), 3), 4), i Q_j la (3.1) e il sistema $\{P, Q_j\}$ la (5.7), sussiste la relazione*

$$(7.1) \quad |\alpha'^t(\xi)| \leq H_2 \cdot k_{q_t}^{1/2}(\xi) \cdot k_{q_t}^{1/2}(\xi), \quad |\xi| \geq N$$

ove, con δ fornito dalla (6.3),

$$(7.2) \quad H_2 = O(e^\delta).$$

E infatti, per un risultato riportato da M. PICONE (cfr. [9] pp. 511-512) si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{it}(\xi) &= \det_{\substack{i \neq l \\ j \neq t}} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_i^+(\xi, \eta) \cdot \overline{Q_j^+(\xi, \eta)}}{|P_+(\xi, \eta)|^2} d\eta \right\| \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \frac{\det_{\substack{i \neq l \\ j \neq t}} \|Q_j^+(\xi, \rho_i)\| \cdot \det_{\substack{i \neq l \\ j \neq t}} \|\overline{Q_j^+(\xi, \rho_i)}\|}{|P_+(\xi, \rho_1) \dots P_+(\xi, \rho_{r-1})|^2} d\rho_1 \dots d\rho_{r-1}; \end{aligned}$$

posto poi

$$b = \sum_{i \neq l} q_i + \sum_{j \neq t} q_j + r - 1 - 2(r-1)(1-\beta)m,$$

in virtù delle (1.9) e (5.2), si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(\xi) &= \frac{c^b}{|a_o(\xi)|^{2(r-1)}} \\ &\cdot \frac{1}{(r-1)!} \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \frac{\det \|\dot{Q}_{j^+}(\xi, \rho_i)\| \cdot \det \|\overline{\dot{Q}_{j^+}(\xi, \rho_i)}\|}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_{r-1})|^2} d\rho_1 \dots d\rho_{r-1} \\ &= \frac{c^b}{|a_o(\xi)|^{2(r-1)}} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{i,j}^{1,r} \dot{Q}_{(i,t-1)}^+(\xi) \overline{\dot{Q}_{(i,t-1)}^+(\xi)} \cdot \\ &\int_{\mathbb{R}^{r-1}} \frac{V_{ri}(\rho_1 \dots \rho_{r-1}) \cdot V_{rj}(\rho_1 \dots \rho_{r-1})}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_{r-1})|^2} d\rho_1 \dots d\rho_{r-1}. \end{aligned}$$

Con lo stesso procedimento utilizzato per stabilire la (4.2) è immediato ottenere che

$$(7.3) \quad \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \frac{V_{ri}(\rho_1 \dots \rho_{r-1}) V_{rj}(\rho_1 \dots \rho_{r-1})}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_{r-1})|^2} d\rho_1 \dots d\rho_{r-1} = O(c^{\beta \cdot (r-1)(2\chi+1)}).$$

Di conseguenza

$$(7.4) \quad \sigma_{ii}(\xi) = \frac{c^{b+\beta \cdot (r-1)(2\chi+1)}}{|a_o(\xi)|^{2(r-1)}} \dot{\sigma}_{ii}(\xi),$$

ove

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ii}(\xi) &= \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{c^{\beta \cdot (r-1)(2\chi+1)}} \\ &\cdot \sum_{i,j}^{1,r} \dot{Q}_{(i,t-1)}^+(\xi) \cdot \overline{\dot{Q}_{(i,t-1)}^+(\xi)} \cdot \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \frac{V_{ri}(\rho_1 \dots \rho_{r-1}) \cdot V_{rj}(\rho_1 \dots \rho_{r-1})}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_{r-1})|^2} d\rho_1 \dots d\rho_{r-1}. \end{aligned}$$

Si osservi che $\dot{\sigma}_{ii}(\xi)$ è una funzione limitata di ξ .

Si ottiene allora, utilizzando la (5.9),

$$(7.5) \quad \alpha^u(\xi) = \frac{|a_o(\xi)|^2}{e^{q_l+q_l-2m+1}} e^\delta \dot{\alpha}^u(\xi),$$

ove δ è fornito dalla (6.3) e

$$\dot{\alpha}^u(\xi) = \frac{\dot{\sigma}_{ul}(\xi)}{\dot{A}(\xi)};$$

si osservi ancora $\dot{\alpha}^u(\xi)$ è una funzione limitata di ξ in virtù della (5.8) e del fatto che tale è anche $\dot{\sigma}_{ul}(\xi)$.

Ricordato la (3.3) si perviene dunque alla (7.1).

Si noti che se $\chi^+ = 1$, si ha $H_2 = O(1)$ (cfr. la (7.2)).

Si ottiene con ragionamenti analoghi il seguente

LEMMA 2. *Supposto che P verifichi le ipotesi 1), 2), 3), con $\beta^+ = 0$, i Q, la (3.1) e il sistema $\{P, Q_j\}$ la (5.7), sussiste la (7.1) con $H_2 = O(1)$.*

Basta osservare che, in tali ipotesi, cfr. la (4.1), al posto della (7.3) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{r-1}} \frac{V_{ri}(\rho_1 \dots \rho_{r-1}) V_{rj}(\rho_1 \dots \rho_{r-1})}{|\dot{P}_+(\xi, \rho_1) \dots \dot{P}_+(\xi, \rho_{r-1})|^2} d\rho_1 \dots d\rho_{r-1} = O(1).$$

Sussiste poi il seguente

LEMMA 3. *Nelle ipotesi del lemma 1, qualunque sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$, si ha*

$$(7.6) \quad \sum_{i,j}^{1,r} \tau_{ij}(\xi) \lambda_i \bar{\lambda}_j \leq H_1 \sum_{i,j}^{1,r} \beta_{ij}(\xi) \lambda_i \bar{\lambda}_j, \quad |\xi| \geq N,$$

ove $\tau_{ij}(\xi)$ sono gli elementi della matrice $B A^{-1} B$ e

$$(7.7) \quad H_1 = O(e^{2\mu})$$

con μ dato dalla (6.4).

Incominciamo con l'osservare che, utilizzando (1.9) e (5.3), si ha

$$\begin{aligned} \beta_{ij}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} \frac{Q_i^-(\xi, \eta) \overline{Q_j^-(\xi, \eta)}}{|P_-(\xi, \eta)|^2} d\eta = \frac{e^{a_i+a_j+1-2m(1-\beta)}}{|a_o(\xi)|^2} \int_{\mathbf{R}} \frac{\dot{Q}_i^-(\xi, \eta) \overline{\dot{Q}_j^-(\xi, \eta)}}{|\dot{P}_-(\xi, \eta)|^2} d\eta \\ &= \frac{e^{a_i+a_j+1-2m(1-\beta)}}{|a_o(\xi)|^2} \sum_{h,k}^{0,s-1} \dot{Q}_{ih}^-(\xi) \overline{\dot{Q}_{jk}^-(\xi)} \int_{\mathbf{R}} \frac{\eta^{h+k}}{|\dot{P}_-(\xi, \eta)|^2} d\eta. \end{aligned}$$

Procedendo ora come si è fatto per stabilire la (4.2), si ottiene:

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\eta^{h+k}}{|\dot{P}_-(\xi, \eta)|^2} d\eta = O(e^{\beta-(2\chi-1)}).$$

Si ha allora:

$$(7.8) \quad \beta_{ij}(\xi) = \frac{e^{a_i+a_j+1-2m(1-\beta)+\beta-(2\chi-1)}}{|a_o(\xi)|^2} \dot{\beta}_{ij}(\xi),$$

con $\dot{\beta}_{ij}(\xi)$ funzione limitata di ξ .

Si ha allora

$$\sum_{ij}^{1,r} \beta_{ij}(\xi) \lambda_i \bar{\lambda}_j = \sum_{ij}^{1,r} \dot{\beta}_{ij}(\xi) \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_j,$$

ove, posto

$$e_i = a_i + \frac{1}{2} + \frac{\beta-(2\chi-1)}{2} - m(1-\beta),$$

si ha

$$\varepsilon_i = \frac{e^{e_i}}{a_o(\xi)} \lambda_i.$$

Si osservi poi che:

$$(7.9) \quad \sum_{ij}^{1,r} \beta_{ij}(\xi) \lambda_i \bar{\lambda}_j = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\sum_i^{1,r} Q_i^-(\xi, \eta) \lambda_i|^2}{|P_-(\xi, \eta)|^2} d\eta \geq 0, \quad |\xi| \geq N.$$

Si ha poi utilizzando (7.5) e (7.8):

$$\tau_{ij}(\xi) = \sum_{i,t}^{1,r} \beta_{it}(\xi) \alpha^t(\xi) \beta_{tj}(\xi) = \frac{e^{\epsilon_i + \epsilon_j + 2\mu}}{|a_o(\xi)|^2} \dot{\tau}_{ij}(\xi)$$

ove μ è dato dalla (6.4) e

$$\dot{\tau}_{ij}(\xi) = \sum_{i,t}^{1,r} \dot{\beta}_{it}(\xi) \dot{\alpha}^t(\xi) \dot{\beta}_{tj}(\xi).$$

Se ne deduce

$$\sum_{ij}^{1,r} \tau_{ij}(\xi) \lambda_i \bar{\lambda}_j = e^{2\mu}(\xi) \sum_{ij}^{1,r} \dot{\tau}_{ij}(\xi) \epsilon_i \bar{\epsilon}_j.$$

Si osservi che $\dot{\tau}_{ij}(\xi)$ è una funzione limitata di ξ .
È noto che esiste una trasformazione ortonormale

$$(7.10) \quad \epsilon_i = \sum_{p=1}^r a_{pi} \rho_p,$$

la quale canonizza la forma hermitiana

$$\sum_{ij}^{1,r} \dot{\beta}_{ij}(\xi) \epsilon_i \epsilon_j,$$

e gli a_{pi} soddisfano il sistema

$$(7.11) \quad \sum_{i=1}^r (\dot{\beta}_{ki}(\xi) - \mu_p(\xi) \delta_{ki}) \bar{a}_{pi} = 0;$$

δ_{ik} è il simbolo di Kroneker e i $\mu_p(\xi)$ sono le radici dell'equazione caratteristica di $|\dot{\beta}_{ij}(\xi)|$.

Si osservi che, in virtù della (7.9), i $\mu_p(\xi)$ sono non negativi.

Si ottiene utilizzando la (7.10):

$$\sum_{ij}^{1,r} \dot{\tau}_{ij} \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_j = \sum_{p,q}^{1,r} \dot{\gamma}_{pq} \mu_p \mu_q \rho_p \bar{\rho}_q,$$

ove

$$\dot{\gamma}_{pq}(\xi) = \sum_{i,t}^{1,r} a_{pt}(\xi) \dot{\alpha}^{it}(\xi) \bar{a}_{qt}(\xi).$$

Si osservi che $\dot{\gamma}_{pq}(\xi)$ è una funzione limitata di ξ .

Essendo poi $\mu_p(\xi)$ una funzione limitata di ξ non negativa, si ha

$$\sum_p^{1,r} \mu_p^2 |\rho_p|^2 \leq K \sum_p^{1,r} \mu_p |\rho_p|^2,$$

da cui

$$\sum_{p,q}^{1,r} \dot{\gamma}_{pq} \mu_p \mu_q \rho_p \bar{\rho}_q \leq K \sum_p^{1,r} \mu_p^2 |\rho_p|^2 \leq K \sum_{ij}^{1,r} \dot{\beta}_{ij}(\xi) \varepsilon_i \bar{\varepsilon}_j.$$

Si è dunque dimostrata la (7.6).

Si osservi che (cfr. la (7.7)) se $\chi^+ = \chi^- = 1$ si ha $H_1 = O(1)$ nell'ipotesi che $(\beta^+ - \gamma^+)r \leq \beta^+ - \beta^-$.

LEMMA 4. *Nelle ipotesi del lemma 2 e che $\beta^- = 0$, vale la (7.6) con $H_1 = O(1)$.*

La dimostrazione si consegue come per il lemma 3, utilizzando il lemma 2 al posto del lemma 1.

Sussiste poi il seguente importante lemma dovuto a M. SCHECHTER (cfr. la (3.5) di [11]):

LEMMA 5. *Supposto che P verifichi l'ipotesi 1) e il sistema $\{P, Q_j\}$ la (5.6) e la (6.6), considerata una qualsiasi $v(\xi, t) \in C_{\infty}(\overline{\mathbb{R}_+})$ (ξ parametro),*

esiste un suo prolungamento $v_1(\xi, t) \in H^m(\mathbb{R}^2)$ tale che per $|\xi| \geq N$

$$(7.12) \quad \int_{\mathbb{R}} |P(\xi, D_t) v_1(\xi, t)|^2 dt \leq K \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) v(\xi, t)|^2 dt \\ + \sum_{i,j}^{1,r} Q_i(\xi, D_t) v(\xi, 0) \alpha^{ij}(\xi) \overline{Q_j(\xi, D_t) v(\xi, 0)} \left\{$$

con K costante indipendente da v e da ξ per $|\xi| \geq N$. La $v_1(\xi, t)$ è, per ogni t , funzione misurabile di ξ se tale è $v(\xi, t)$.

Con ragionamenti analoghi a quelli utilizzati da M. SCHECHTER per dimostrare il lemma 5, si ha utilizzando i lemmi 1 e 3:

LEMMA 6. Nelle ipotesi del lemma 1, considerata una qualsiasi $v(\xi, t) \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ (ξ parametro), esiste un suo prolungamento $v_1(\xi, t) \in H^m(\mathbb{R})$, tale che, per $|\xi| \geq N$:

$$(7.13) \quad \int_{\mathbb{R}} |P(\xi, D_t) v_1(\xi, t)|^2 dt \leq H_1 \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) v(\xi, t)|^2 dt \\ + H_2 \sum_j^{1,r} k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) v(\xi, 0)|^2$$

con H_1 e H_2 indipendenti da v e soddisfacenti, rispettivamente a (7.2) e (7.7); la $v_1(\xi, t)$ è per ogni t funzione misurabile di ξ se tale è $v(\xi, t)$.

Analogamente utilizzando i lemmi 2 e 4 si ha:

LEMMA 7. Nelle ipotesi del lemma 4, considerata una qualsiasi $v(\xi, t) \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ (ξ parametro), esiste un suo prolungamento $v_1(\xi, t) \in H^m(\mathbb{R})$ tale che per $|\xi| \geq N$, vale la (7.13) con H_1 e H_2 costanti indipendenti da v e da ξ ; la $v_1(\xi, t)$ è, per ogni t funzione misurabile di ξ se tale è $v(\xi, t)$.

Si ha ancora il seguente lemma:

LEMMA 8. Nelle ipotesi del lemma 4, e se $u \in H_{0,V}(\mathbb{R}_+^n)$, $\hat{u}(\xi, t)$ ammette per quasi ogni ξ con $|\xi| \geq N$, un prolungamento ad $H^m(\mathbb{R})$ diciamolo $u_1(\xi, t)$, soddisfacente la disequaglianza:

$$(7.14) \quad \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} u_1(\xi, t)|^2 dt \\ \leq H_1 \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, t)|^2 dt + H_2 \sum_{j=1}^r k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, 0)|^2$$

²⁾ Con il simbolo $H^m(\mathbb{R})$ indichiamo l'ordinario spazio di Sobolev delle funzioni dotate di derivate, fino all'ordine m , di quadrato sommabile.

con H_1, H_2 indipendenti da u e da ξ ; la $u_1(\xi, t)$ è per ogni t funzione misurabile di ξ ³⁾.

Incominciamo con l'osservare che se $\varphi(\xi, t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+)$, (ξ parametro), indicato con $\varphi_1(\xi, t)$ il suo prolungamento ad $H^n(\bar{R})$, di cui al lemma 7, utilizzando la (1.4), il teorema di Parseval e la (7.13), si ottiene per $|\xi| \geq N$:

$$\begin{aligned}
 (7.15) \quad & \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\bar{R}} |D_t^{\alpha_n} \varphi_1(\xi, t)|^2 dt = \int_{\bar{R}} V(\xi, \eta) |\tilde{\varphi}_1(\xi, \eta)|^2 d\eta \\
 & \cong K \int_{\bar{R}} |P(\xi, \eta) \tilde{\varphi}_1(\xi, \eta)|^2 d\eta = K \int_{\bar{R}} |P(\xi, D_t) \varphi_1(\xi, t)|^2 dt \\
 & \cong K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \varphi(\xi, t)|^2 dt + \sum_{j=1}^r k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \varphi(\xi, 0)|^2 \right\};
 \end{aligned}$$

con $\tilde{\varphi}_1(\xi, \eta)$ si è indicato la trasformata di Fourier, rispetto a t di $\varphi_1(\xi, t)$.

Osserviamo ora che, poiché $u \in H_{0,V}(R_+^n)$, esiste una successione di funzioni $\varphi_k(x, t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$, convergente in $H_{0,V}(R_+^n)$ ad u . E dunque poiché

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \varphi_k - u \|_{+,0,V}^2 = 0,$$

con

$$\begin{aligned}
 & \| \varphi_k - u \|_{+,0,V}^2 \\
 & = \sum_{\alpha \in A} \int_{\bar{R}_+^n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |D_t^{\alpha_n} \hat{\varphi}_k(\xi, t) - D_t^{\alpha_n} \hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi dt,
 \end{aligned}$$

esiste una successione estratta dalla $\{\hat{\varphi}_k(\xi, t)\}$, e che indicheremo con lo stesso simbolo, tale che, per quasi ogni $\xi \in R^{n-1}$, e per $0 \leq h \leq m$,

$$(7.16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\bar{R}_+} |D_t^h \hat{\varphi}_k(\xi, t) - D_t^h \hat{u}(\xi, t)|^2 dt = 0;$$

tale relazione è verificata per $h = 0$ e $h = m$ in forza delle proprietà di A

³⁾ Cfr. la (7.25) da cui risulta che $u_1(\xi, t)$ è anche di quadrato sommabile rispetto a ξ per $|\xi| \geq N$.

formulate in 2) del n. 1; per i valori intermedi di h la proprietà discende da note diseguglianze (cfr. [7]).

Applicando ora la (7.15) a $\widehat{\varphi}_k(\xi, t) \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$, si ha per $|\xi| \geq N$:

$$(7.17) \quad \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} \varphi_{k1}(\xi, t)|^2 dt \\ \leq K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \widehat{\varphi}_k(\xi, t)|^2 dt + \sum_{j=1}^r k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \widehat{\varphi}_k(\xi, 0)|^2 \right\},$$

da cui, in virtù della (7.16), per quasi ogni ξ esiste un $\bar{k}(\xi)$ tale che per $k \geq \bar{k}(\xi)$

$$(7.18) \quad \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} \varphi_{k1}(\xi, t)|^2 dt \\ \leq K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \widehat{u}(\xi, t)|^2 dt + \sum_{j=1}^r k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \widehat{u}(\xi, 0)|^2 \right\};$$

si osservi che con $\varphi_{k1}(\xi, t)$ si è indicato il prolungamento ad $\mathbb{H}^m(\mathbb{R})$ di $\widehat{\varphi}_k(\xi, t)$ di cui al lemma 7; K è indipendente da ξ per $|\xi| \geq N$.

Poiché $\widehat{\varphi}_k(\xi, t)$ è misurabile rispetto a ξ tale è anche $\varphi_{k1}(\xi, t)$ e dalla (7.17) si deduce:

$$(7.19) \quad \sum_{\alpha \in A} \int_{|\xi| \geq N} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} d\xi \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} \varphi_{k1}(\xi, t)|^2 dt \\ \leq K \left\{ \int_{|\xi| \geq N} d\xi \int_{\mathbb{R}} |P(\xi, D_t) v_k(\xi, t)|^2 dt + \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{R}^{n-1}} k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \widehat{\varphi}_k(\xi, 0)|^2 d\xi \right\}$$

ove con $v_k(\xi, t)$, si è indicato il prolungamento a $t < 0$ di $\widehat{\varphi}_k(\xi, t)$ così definito:

$$(7.20) \quad v_k(\xi, t) = \begin{cases} \widehat{\varphi}_k(\xi, t), & t \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{m+1} c_j \widehat{\varphi}_k(\xi, -j t), & t < 0 \end{cases}$$

ove i numeri c_j sono fissati in modo che

$$\sum_{j=1}^{m+1} c_j (-j)^h = 1, \quad h = 0, 1, \dots, m;$$

tale prolungamento soddisfa alla condizione

$$(7.21) \quad \int_{\mathbb{R}} |D_t^h v_k(\xi, t)|^2 dt \leq K \int_0^{+\infty} |D_t^h \hat{\varphi}_k(\xi, t)|^2 dt, \quad 0 \leq h \leq m.$$

Si ha poi in virtù della (1.4):

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi| \geq N} d\xi \int_{\mathbb{R}} |P(\xi, D_t) v_k(\xi, t)|^2 dt \\ &= \int_{|\xi| \geq N} d\xi \int_{\mathbb{R}} |P(\xi, \eta) \tilde{v}_k(\xi, \eta)|^2 d\eta \leq K \int_{\mathbb{R}^n} V(\xi, \eta) |\tilde{v}_k(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\ &= K \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |D_t^{\alpha} v_k(\xi, t)|^2 d\xi dt \\ &\leq K \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |D_t^{\alpha} \hat{\varphi}_k(\xi, t)|^2 d\xi dt. \end{aligned}$$

Si deduce dunque dalla (7.19), per k maggiore di un opportuno k_1 :

$$(7.22) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \int_{|\xi| \geq N} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} d\xi \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha} \varphi_{k_1}(\xi, t)|^2 dt \\ & \leq K \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |D_t^{\alpha} \hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{R}^{n-1}} k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi \right\}. \end{aligned}$$

È possibile allora estrarre dalla successione $\{\varphi_{k_1}(\xi, t)\}$ un'altra successione $\{\varphi_{k'}(\xi, t)\}$ la quale tende debolmente verso una funzione $u_1(\xi, t)$ di classe H^m come funzione di t e di classe L^2 come funzione di ξ e tale

inoltre che la successione $\{D_t^h \varphi'_{h_1}(\xi, t)\}$, $0 \leq h \leq m$ tenda debolmente in L^2 alla omologa derivata di $u_1(\xi, t)$, nel dominio $|\xi| \geq N$ dello spazio (ξ, t) (cfr. il lemma 1 di [6]).

Di conseguenza mediante ripetute applicazioni del teorema di Banach-Saks (cfr. [10] pg. 80), è possibile costruire una successione $\{\Phi_k(\xi, t)\}$ tale che la successione $\{D_t^h \Phi_k(\xi, t)\}$, $0 \leq h \leq m$, tenda fortemente in L^2 alla $D_t^h u_1(\xi, t)$.

Di conseguenza per quasi ogni ξ con $|\xi| \geq N$:

$$(7.23) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |D_t^h \Phi_k(\xi, t) - D_t^h u_1(\xi, t)|^2 dt = 0, \quad 0 \leq h \leq m.$$

Si ottiene poi dalla (7.18), per quasi ogni ξ con $|\xi| \geq N$ e per $k \geq \bar{k}(\xi)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} \Phi_k(\xi, t)|^2 dt \\ & \leq K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, t)|^2 dt + \sum_{j=1}^r k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, 0)|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Da cui facendo divergere k , si ottiene per quasi ogni ξ con $|\xi| \geq N$

$$(7.24) \quad \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} u_1(\xi, t)|^2 dt \\ & \leq K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, 0)|^2 dt + \sum_{j=1}^r k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, 0)|^2 \right\}, \end{aligned}$$

Dalla (7.22) discende poi:

$$(7.25) \quad \begin{aligned} & \sum_{\substack{\alpha \in A \\ |\xi| \geq N}} \int \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} d\xi \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} u_1(\xi, t)|^2 dt \\ & \leq K \left\{ \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} |D_t^{\alpha_n} \hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi dt \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{R}^{n-1}} k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, 0)|^2 d\xi \right\}, \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che, per ξ con $|\xi| \geq N$, $\varphi_{k_1}(\xi, t) = \varphi_k(\xi, t)$ se $t > 0$; si deduce allora dalle (7.16) e (7.23) che, per quasi ogni ξ con $|\xi| \geq N$ e $t > 0$, si ha $u_1(\xi, t) = \hat{u}(\xi, t)$.

Il lemma è dunque dimostrato.

Si ottengono poi, con ragionamenti analoghi a quelli utilizzati per stabilire il lemma 8, i seguenti lemmi:

LEMMA 9. *Nelle ipotesi del lemma 1, se $u \in H_{0,W}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u}(\xi, t)$ ammette per quasi ogni ξ , con $|\xi| \geq N$, un prolungamento ad $H^m(\mathbb{R})$ diciamolo $u_1(\xi, t)$, soddisfacente la (7.14) con H_1 e H_2 indipendenti da u e soddisfacenti rispettivamente a (7.2) e (7.7).*

LEMMA 10. *Nelle ipotesi del lemma 1, e supposto inoltre verificata la (6.6), se $u \in H_{0,z}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u}(\xi, t)$ ammette per quasi ogni ξ con $|\xi| \geq N$, un prolungamento ad $H^m(\mathbb{R})$, diciamolo $u_1(\xi, t)$ soddisfacente la (7.14) con H_1 costante indipendente da u e da ξ e H_2 costante indipendente da u e soddisfacente alla (7.7).*

Osservazione. Nei lemmi 9 e 10, la $u_1(\xi, t)$ è, per ogni t , una funzione misurabile di ξ ; si può anzi affermare che essa è di quadrato sommabile rispetto a ξ per $|\xi| \geq N$ (cfr. la nota ³).

8. DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI.

Incominciamo con il dimostrare il teorema I. Sia $u \in H_{0,V}(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{u}(\xi, t)$ la sua trasformata di Fourier rispetto a x_1, \dots, x_{n-1} .

Per $|\xi| < N$ poniamo (cfr. (7.20) e (7.21))

$$u_2(\xi, t) = \begin{cases} \hat{u}(\xi, t), & t \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{m+1} c_j \hat{u}(\xi, -j t), & t < 0. \end{cases}$$

Si ha allora per $|\xi| < N$ e con K indipendente da ξ :

$$\begin{aligned} & (1 + |\xi|^2)^s \cdot \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} u_2(\xi, t)|^2 dt \\ & \leq K \sum_{k=0}^m \int_0^{+\infty} |D_t^k \hat{u}(\xi, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

e poiché, sempre con $|\xi| < N$, e con K indipendente da ξ

$$\int_0^{+\infty} |D_t^m \hat{u}(\xi, t)|^2 dt \\ \cong K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, t)|^2 dt + \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{+\infty} |D_t^k \hat{u}(\xi, t)|^2 dt \right\},$$

si ha

$$\sum_{k=0}^m \int_0^{+\infty} |D_t^k \hat{u}(\xi, t)|^2 dt \\ \cong K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, t)|^2 dt + \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{+\infty} |D_t^k \hat{u}(\xi, t)|^2 dt \right\}$$

e quindi, utilizzando la disuguaglianza di Ehrling,

$$\sum_{k=0}^m \int_0^{+\infty} |D_t^k \hat{u}(\xi, t)|^2 dt \\ \cong K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |\hat{u}(\xi, t)|^2 dt \right\}.$$

In definitiva, per $|\xi| < N$:

$$(8.1) \quad (1 + |\xi|^2)^s \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbf{R}} |D_t^{\alpha_n} u_2(\xi, t)|^2 dt \\ \cong K \left\{ \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \hat{u}(\xi, t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |\hat{u}(\xi, t)|^2 dt \right\}.$$

Definiamo ora la funzione

$$v(\xi, t) = \begin{cases} u_1(\xi, t) & |\xi| \geq N \\ u_2(\xi, t) & |\xi| < N \end{cases}$$

ove $u_1(\xi, t)$ è il prolungamento a $t < 0$ di $\hat{u}(\xi, t)$ di cui al lemma 8.

È evidente che $v(\xi, t) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ come funzione di ξ ⁴⁾.

Poiché la trasformata di Fourier è un isomorfismo di L^2 su L^2 , esiste $h(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tale che

$$\widehat{h}(\xi, t) = v(\xi, t).$$

Si osservi poi che

$$(8.2) \quad h(x, t) = u(x, t), \quad t > 0.$$

E infatti

$$(h - u)^\wedge(\xi, t) = \widehat{h}(\xi, t) - \widehat{u}(\xi, t) = 0, \quad t > 0$$

da cui la (8.2).

Esiste dunque un prolungamento $h(x, t)$ (di classe L^2 come funzione di x e di classe H^m come funzione di t) di $u(x, t)$ tale che (cfr. (7.14) e (8.1)):

$$\begin{aligned} & (1 + |\xi|^2)^s \sum_{\alpha \in A} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_{n-1}^{2\alpha_{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |D_t^{\alpha_n} \widehat{h}(\xi, t)|^2 dt \\ & \leq K \left\{ (1 + |\xi|^2)^s \int_0^{+\infty} |P(\xi, D_t) \widehat{u}(\xi, t)|^2 dt \right. \\ & \quad + (1 + |\xi|^2)^s \sum_{j=1}^r k_{q_j}(\xi) |Q_j(\xi, D_t) \widehat{u}(\xi, 0)|^2 \\ & \quad \left. + \int_0^{+\infty} |\widehat{u}(\xi, t)|^2 dt \right\}, \end{aligned}$$

da cui

$$(8.3) \quad \|h\|_{s,v} \leq K (\|f\|_{s,0} + \sum_{j=1}^r \|g_j\|_{s,kq_j} + \|u\|_0).$$

Dunque esiste un prolungamento u $t < 0$, di $u(x, t)$, appartenente allo spazio $H_{s,v}(\mathbb{R}^n)$; ma poiché tale spazio coincide con quello delle funzioni di quadrato sommabile per le quali $D_x^\beta D_t^\alpha u \in L^2$ con $\alpha \in A$ e $|\beta| \leq s$, se ne deduce che u stesso è dotato di tali derivate, in \mathbb{R}_+^n , di quadrato sommabile.

⁴⁾ Cfr. la nota ³⁾.

Dalla (8.3), ricordato che

$$K \|u\|_{+,s,v} \cong \inf_{h=u|_{\mathbb{R}_+^n}} \|h\|_{s,v}$$

si ottiene la (6.2).

La dimostrazione del teorema II si ottiene con analoghi ragionamenti utilizzando il prolungamento a $t < 0$, $u_1(\xi, t)$, di $\hat{u}(\xi, t)$ di cui al lemma 9.

La dimostrazione del teorema III si ottiene utilizzando i lemmi I e 10.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON, A. DOUGLAS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I COMM.ON pure and applied mathematics XII (1959), 623-727.
- [2] L. ARKERYD, *A priori estimates for hypoelliptic equations in a halfspace*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, XXII (1968), 409-424.
- [3] A. CAVALLUCCI, *Alcuni teoremi di tracce*, Atti Sem. Mat. Fis. Modena, 15 (1966), 137-157.
- [4] L. HÖRMANDER, *On the regularity of solutions of boundary problems*, Acta Mathematica, 99 (1958), 225-264.
- [5] L. HÖRMANDER, *On interior regularity of the solutions of partial differential equations*, COMM.ON pure and applied Mathematics XI (1958), 197-218.
- [6] L. NIRENBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, COMM.ON pure and applied Mathematics, VIII (1955), 648-674.
- [7] L. NIRENBERG, *On elliptic partial differential equations*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, XIII (1959), 115-162.
- [8] J. PEETRE, *On estimating the solutions of hypoelliptic differential near the plane boundary*, Mathematica Scandinavica 9 (1961), 337-351.
- [9] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Ed. Rondinella (1940) Napoli.
- [10] F. RIESZ, B. SZ-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Académie des Sciences de Hongrie, (1955).
- [11] M. SCHECHTER, *On the dominance of partial differential operators II*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, XVIII (1964), 255-282.
- [12] L. R. VOLEVICH, B. P. PANAYAKH, *Alcuni spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione* (in russo), *Usp. Mat. Nauk*, 20 (1965), 3-74; tra. inglese: *Russian Math. Surveys*, 20 (1965), 1-73.

Il ruolo del litio nelle sintesi idrotermali di edingtonite e cymrite

Nota del dott. Carmine Colella
presentata dal socio ordinario Riccardo Sersale

(Adunanza del 1° dicembre 1973)

RIASSUNTO. — Nel quadro delle ricerche sulla neoformazione di termini zeolitici nel sistema $\text{SiO}_2 - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{BaO} - \text{Li}_2\text{O} - \text{H}_2\text{O}$, vengono riportate le condizioni sotto le quali sono stati sintetizzati due tectosilicati di bario, poco diffusi in natura: l'*edingtonite* e la *cymrite*, ottenuti per trattamento idrotermale, in ambiente alcalino per $\text{Ba}(\text{OH})_2$ e LiOH , di miscele di metacaolinite e silice amorfa e di caolinite, rispettivamente.

Mediante analisi roentgenografiche, termiche e chimiche vengono in primo luogo individuate le specie sintetizzate e poste in luce le differenze strutturali e di composizione fra i termini ottenuti ed i loro equivalenti naturali. Successivamente, anche sulla base di precedenti acquisizioni, viene discusso il ruolo del litio nella sintesi dei due allumosilicati, tipicamente barici, e viene altresì fornita un'interpretazione della loro non formazione in ambiente di solo idrossido di bario.

SUMMARY. — The synthesis conditions of *edingtonite* and *cymrite*, two rare barium framework silicates, in the $\text{SiO}_2 - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{BaO} - \text{Li}_2\text{O} - \text{H}_2\text{O}$ system, have been reported.

Both silicates have been obtained by hydrothermal treatment in $\text{Ba}(\text{OH})_2$ and LiOH environment, starting from metakaolinite and amorphous silica mixtures and from kaolinite, respectively.

By means of X-ray, thermal and chemical analyses the synthesized species have been identified and the differences between synthetic and natural products pointed out.

The role of lithium in promoting synthesis of both barium aluminosilicates, also on the ground of previous data, has been discussed and an explanation of the lack of their formation in pure barium environment at last proposed.

INTRODUZIONE.

In un recente lavoro (1), che si inquadra nella direttrice di ricerca afferente alla zeolitizzazione, in sistemi bicationici, di caolinite e metacaolinite, con o senza aggiunta di silice amorfa, sono state individuate le condizioni sotto le quali è possibile sintetizzare, in presenza di bario e di litio, due tectosilicati riferibili a minerali poco diffusi in natura: l'*edingtonite* ($\text{BaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) (2) e la *cymrite* ($\text{BaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$) (3).

Poichè la sintesi di tali silicoalluminati riveste particolare importanza ai fini del chiarimento dei meccanismi di zeolitizzazione, sia in laboratorio, che in natura, si è creduto interessante impostare una ricerca avente un duplice scopo: interpretare, anche sulla base di precedenti acquisizioni, il ruolo dello ione Li^+ in sistemi misti bario-litio che evolvono in termini tipicamente barici ed approfondire lo studio del complesso delle proprietà (strutturali, costituzionali e di comportamento termico) dei prodotti di neoformazione, con particolare riferimento agli equivalenti naturali.

Delle modalità sperimentali e dei relativi risultati si riferisce nel corso di questa Nota.

PARTE SPERIMENTALE.

Le condizioni e le modalità di sintesi, riportate in dettaglio nel precedente lavoro (1), vengono qui di seguito brevemente riassunte.

Le singole prove sono state condotte in bottiglie di polipropilene, che ruotavano, a velocità costante, in un termostato ad aria.

Le miscele di reazione sono state preparate a partire da quantità pesate di caolinite o metacaolinite *) (MTK) e di reagenti puri, quali: silice amorfa, $\text{Ba}(\text{OH})_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$, soluzioni di LiOH di appropriata concentrazione e acqua.

In tutte le prove sono stati mantenuti costanti: il rapporto in peso metacalinite/acqua (1/25) (anche quando il prodotto di partenza era costituito da caolinite); la temperatura (80°C); la durata del trattamento (una settimana).

Sono stati invece fatti variare il rapporto molare $\text{BaO}/(\text{BaO} + \text{Li}_2\text{O})$ fra 0,1 e 1,0; il rapporto molare silice amorfa/metacaolinite fra 0 e 4; l'alcalinità totale del sistema tra 0,1 e 2 *m*.

Al termine dei vari esperimenti i prodotti neoformati, lavati, essiccati ed infine equilibrati per una settimana su soluzione satura di $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$, sono stati sottoposti ad indagini roentgenografiche, chimiche e termiche, sulle cui modalità di esecuzione si rimanda ad una precedente Nota (4).

Si precisa solo che, per quanto attiene alle analisi chimiche, silice e bario sono stati determinati gravimetricamente come SiO_2 e BaSO_4 ; l'alluminio complessometricamente con EDTA; il litio tramite fotometria di fiamma.

*) Trattasi di prodotti finemente polverizzati, posti in commercio dalla HOUDRY.

RISULTATI.

Si espongono qui di seguito condizioni di sintesi e proprietà strutturali, termiche e chimiche dei due termini sintetizzati.

Edingtonite. È una zeolite di bario, assai poco diffusa in natura, rinvenuta nelle località Old Kilpatrick, Dumbartonshire (Gran Bretagna) e Böhlet, Westergotland (Svezia), che, nella forma omocationica, corrisponde alla formula $BaO \cdot Al_2O_3 \cdot 3SiO_2 \cdot 4H_2O$.

In accordo con la struttura, risolta da TAYLOR e JACKSON (5), l'edingtonite presenta simmetria ortorombica con parametri di cella: $a_0 = 9,54 \text{ \AA}$, $b_0 = 9,65 \text{ \AA}$, $c_0 = 6,50 \text{ \AA}$ (6), anche se il tipo rinvenuto nella località Old Kilpatrick denuncia simmetria pseudo-tetragonale, con parametri di cella: $a_0 = 9,58 \text{ \AA}$, $c_0 = 6,54 \text{ \AA}$ (2).

Con riferimento alla presente sperimentazione tale zeolite è stata sintetizzata solo a partire da miscele metacaolinite-silice amorfa, nel rapporto molare 1:4.

Le composizioni dei sistemi di partenza che hanno originato la zeolite, quale unica fase cristallina, compaiono in Tab. I.

TABELLA I

Composizioni molari dei sistemi di neoformazione di edingtonite

n.	Ba(OH) ₂	LiOH	Al ₂ O ₃	SiO ₂	H ₂ O
1	0,42	7,49	1	6	308,5
2	0,55	9,99	1	6	308,5

In Fig. 4 sono riportati i diffrattogrammi di polvere (Camera Guinier-De Wolff) del prodotto sintetizzato (a), corrispondente alla composizione iniziale indicata col n° 1 in Tab. I, e di un campione di zeolite naturale della località Böhlet (b). Si può notare come la zeolite sintetica denunzi un minor numero di riflessi, fatto che corrisponde, in genere, ad una più alta simmetria della struttura. Infatti, pur non potendosi escludere a priori che la simmetria vera della struttura sia ortorombica, come nel tipo naturale, entrambi i campioni sintetizzati, di cui alla Tab. I, sono stati indicizzati secondo il sistema tetragonale (1) con parametri di cella $a_0 = 9,571 \text{ \AA}$, $c_0 = 6,540 \text{ \AA}$ (campione 1) e $a_0 = 9,520 \text{ \AA}$, $c_0 = 6,570 \text{ \AA}$ (campione 2).

La leggera differenza tra i parametri di cella nei due campioni sintetizzati è probabilmente da porsi in relazione con la diversa popolazione cationica e con il diverso rapporto SiO_2/Al_2O_3 nei due prodotti.

L'analisi chimica del campione 1 ha messo in luce la presenza di un certo contenuto di frazione amorfa nel sintetizzato. Un lavaggio con acqua a 80°C per diversi giorni ha però consentito la dissoluzione di tale fase amorfa, permettendo di rilevare, tramite analisi del prodotto purificato, la seguente composizione chimica:



Il rapporto $\text{Li}^+/\text{Ba}^{++}$ nel sintetizzato è 2,3 molto minore di quello nel sistema iniziale (uguale a 18). Ciò dimostra la forte selettività del-

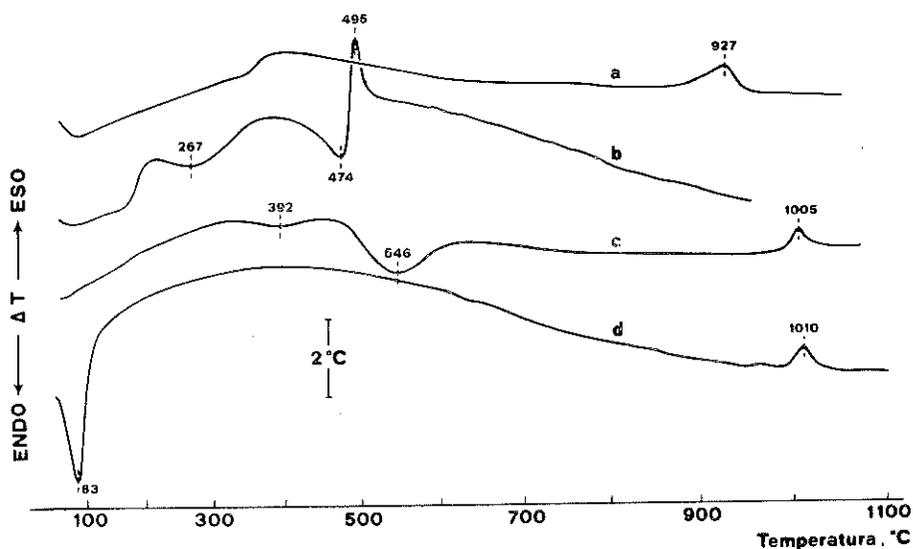


Fig. 1. — Diagrammi termodifferenziali. Peso del campione: 20 mg; velocità di riscaldamento: 15°C/min; atmosfera: aria.

- a) Edingtonite sintetica (Tab. I, n. 1).
- b) Edingtonite naturale di Böhlet (Naturhistoriska Riksmuseet, Stoccolma; camp. n. g 1505).
- c) Cymrite sintetica (Fig. 2, punto C).
- d) Cymrite sintetica, trattata per due ore a 600°C, dopo reidratazione per una settimana a 20°C in ambiente con umidità pari al 100%.

l'edingtonite per il bario e spiega la notevole concentrazione del catione nei termini naturali (2).

L'analisi termodifferenziale eseguita sul campione sintetico, dopo lavaggio, e sull'edingtonite di Böhlet, ha consentito di rilevare i diagrammi riportati in Fig. 1 (a e b, rispettivamente).

Si constata un differente andamento delle curve, addebitabile anche in questo caso alla diversa popolazione cationica, che si evidenzia

sostanzialmente nella mancanza, nel prodotto sintetizzato, del tipico effetto endo-esotermico nella zona fra i 474 e 495°C, addebitabile ad una rapida rottura del reticolo con successiva ricristallizzazione (7).

Il largo effetto endotermico di disidratazione nella zona 100-400°C è invece abbastanza simile nei due campioni, mentre un effetto di ricristallizzazione del termine sintetico compare a 927°C (formazione di un polimorfo esagonale sintetico della celsiana (8) e di un termine indicato in letteratura come « prodotto di ignizione della fase sintetica Ba - A » (9)).

Cymrite. È un silicoalluminato di bario idrato, molto poco diffuso in natura. È stato finora ritrovato sempre in stretta associazione con altri minerali, che non hanno consentito di poter disporre di campioni adeguati a fornire dati sufficienti sulle proprietà chimiche e fisiche.

Il minerale è stato per la prima volta rinvenuto a Rhiw, Carnarvonshire (Galles) (10) e successivamente in varie località dell'Alaska (11, 3, 12), della California (13) e del Sud Africa (14).

Solo di recente (3, 13) è stata riportata la formula esatta della cymrite naturale: $BaO \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot H_2O$, dopo aver chiarito, tramite studi IR, che l'acqua è presente nel minerale come H_2O e non come gruppo OH (3).

In letteratura vengono anche riportate modalità di sintesi della cymrite (15, 16) e messe in evidenza le strette relazioni esistenti fra tale minerale e un feldspato di bario, puramente sintetico di composizione: $BaO \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$, avente struttura esagonale (8) ed ottenuto sia con metodi pirolitici (17, 16) che idrotermali (9).

Nel corso della sperimentazione, di cui si dà conto in questa Nota, la cymrite è stata sintetizzata a partire da caolinite, in un'ampia gamma di composizioni dei sistemi iniziali.

Nel diagramma ternario, riportato in Fig. 2, i due tratti rettilinei individuano approssimativamente la zona in cui cadono tutte le composizioni dei sistemi iniziali, che hanno dato luogo alla neoformazione di cymrite. Il segmento tratteggiato indica il limite del campo esplorato e la zona scura individua le composizioni che determinano la cristallizzazione di cymrite, quale unica fase cristallina.

Nell'ambito delle condizioni sperimentali adottate, la trasformazione caolinite → cymrite non è risultata completa, per cui in tutti i sintetizzati sono presenti aliquote di caolinite residua.

Lo studio della specie sintetizzata è stato condotto su un campione ottenuto per trattamento di un sistema della seguente composizione molare:

1,11 Ba(OH)₂, 3,33 LiOH, Al₂O₃, 2SiO₂, 308,5 H₂O (punto C in Fig. 2).

Nella prima colonna della Tab. II compaiono le distanze reticolari della cymrite sintetica in confronto con quelle del termine naturale della

località tipo (colonna 2). Il campione sintetico è stato indicizzato secondo la simmetria esagonale, fornendo i seguenti valori dei parametri di cella: $a_0 = 5,36 \text{ \AA}$, $c_0 = 7,69 \text{ \AA}$, non molto diversi da quelli del minerale corrispondente: $a_0 = 5,33 \text{ \AA}$, $c_0 = 7,67 \text{ \AA}$.

L'analisi chimica dello stesso campione sintetico ha messo innanzitutto in luce la completa assenza di litio nella specie neoformata. Inoltre, assumendo che la differenza: moli (Al_2O_3) — moli (BaO) rappresenti le moli di

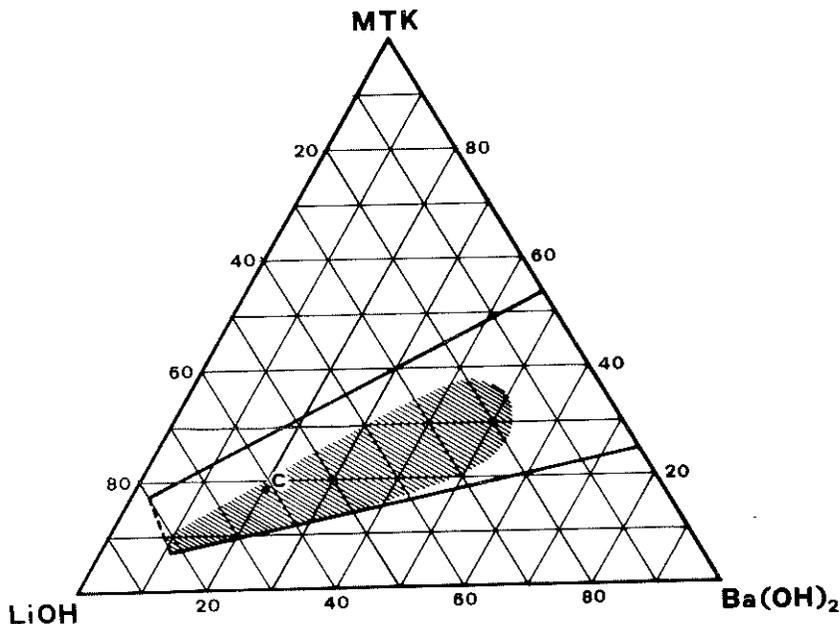
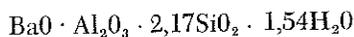


Fig. 2. — Dominio di cristallizzazione della cymrite. La zona tratteggiata comprende le composizioni che hanno dato luogo alla neoformazione di cymrite quale unica fase cristallina. (Composizioni in moli; $\text{MTK} = 2\text{SiO}_2 + \text{Al}_2\text{O}_3$; $\text{MTK}/\text{H}_2\text{O} = 1/25$ (in peso).

caolinite residua presente nel campione, è stata calcolata per la cymrite sintetizzata la seguente formula chimica:



Se si ammette che la formula riportata in letteratura sia corretta e che i rapporti $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ e $\text{BaO}/\text{H}_2\text{O}$ siano invariabili, le quantità in eccesso di SiO_2 e H_2O , riscontrate nel campione, potrebbero essere addebitabili alla presenza nel sintetizzato di una modesta aliquota di gelo.

L'analisi termodifferenziale (curva *c* in Fig. 1) ha messo in luce,

oltre al picco endotermico di disidratazione della coalinite residua (546°C) ed al picco esotermico a 1005°C, probabilmente dovuto ad una trasforma-

TABELLA II

Distanze reticolari ed intensità relative della cymrite e del feldspato di bario

Cymrite sintetica		Cymrite (10)		Prodotto di ignizione (600°C) della cymrite sint.		Feldspato di bario esagonale (S)		hkl
d, Å	I	d, Å	I	d, Å	I	d, Å	I	
7,64 °	md(l)	7,7	f	7,80 °	m(l)	7,79	112 §	001
4,65 °	d	4,6	ddd	4,58 °	d	—	—	100
3,98 °	ff	3,95	ff	3,96 °	ff	3,963	47	101
—	—	—	—	—	—	3,901	20	002
2,96 °	f(l)	2,95	ff	2,97 °	f(l)	2,977	59	102
2,68 °	ff	2,67	f	2,65 °	ff	2,659	15	110
— °°	—	2,57	dd	2,59	dd	2,602	22	003
— °°	—	2,53	dd	2,51 °	d	—	—	111
2,32 °	m	2,32	d	2,29 °	m	2,300	5	200
2,24	d(l)	2,24	m	2,26	d(l)	2,266	15	103
2,22 °	mf	2,21	m	2,20 °	f	2,206	11	201
2,195	d(l)	—	—	—	—	—	—	112
1,981	dd	1,990	d	1,975	d(l)	—	—	202
1,925	d(l)	1,920	md	1,947	d(l)	1,951	60	004
1,852 °	m(l)	1,849	m	1,855 °	m(l)	1,860	6	113
—	—	1,783	dd	—	—	—	—	104
1,709 °	m	1,705	md	1,693 °	m	Ulteriori riflessi		211
1,596 °	m	1,594	md	1,584 °	m	non riportati		212
1,560	dd	1,565	d	1,567	d(l)	—	—	114
1,547 °	m	1,544	d	1,529 °	m	—	—	300
$a_0 = 5,36 \text{ \AA}$		$a_0 = 5,33 \text{ \AA}$		$a_0 = 5,30 \text{ \AA}$		$a_0 = 5,313 \text{ \AA}$		
$c_0 = 7,69 \text{ \AA}$		$c_0 = 7,67 \text{ \AA}$		$c_0 = 7,80 \text{ \AA}$		$c_0 = 7,805 \text{ \AA}$		

f = forte; m = media; d = debole; l = larga.

° Riflessi utilizzati per il computo dei parametri di cella.

°° Riflessi non rilevabili perchè coperti da quelli della caolinite.

§ Nel citato lavoro il valore 100 della scala arbitraria di intensità è stato assegnato al riflesso più intenso di un polimorfo di bassa temperatura del feldspato di bario.

zione polimorfa a carico dell'Al₂O₃ derivante dalla decomposizione della coalinite, un picco endotermico con minimo a 392°C, che il rilevamento

del diagramma perdita di peso/temperatura (Fig. 3b) ha permesso di addebitare alla disidratazione della cymrite.

Il rilevamento dello spettrogramma di raggi X del campione, trattato per due ore a 600°C, ha messo in evidenza la sua notevole affinità con quello della cymrite di partenza, le uniche differenze essendo dovute a rilevanti spostamenti di riflessi corrispondenti agli stessi piani reticolari e a lievi variazioni di intensità dei riflessi stessi. In effetti tale prodotto di ignizione è risultato identificabile con il già citato feldspato di bario esagonale, come si può rilevare dal confronto delle distanze reticolari e dei parametri di cella delle due specie (Tab. II, colonne 3 e 4, rispettivamente).

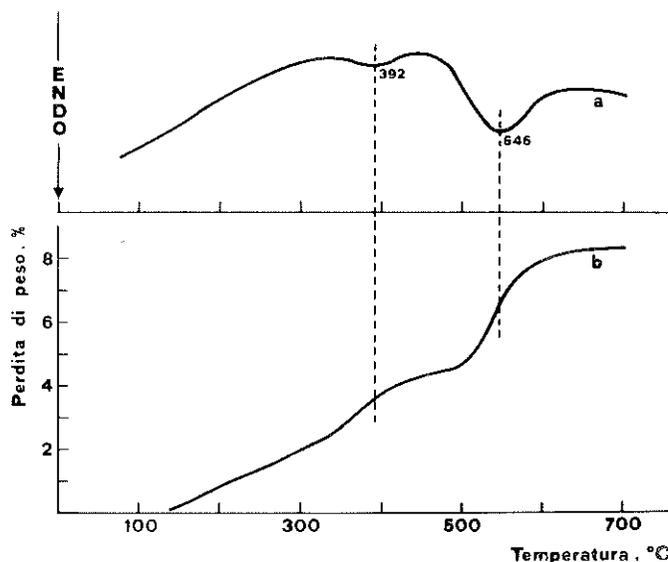


Fig. 3. — a) Diagramma termodifferenziale della cymrite sintetica (confronta curva 1c).
b) Diagramma perdita di peso/temperatura della cymrite sintetica (velocità di riscaldamento: 6,8°C/min).

Lo spettrogramma di raggi X della cymrite sintetica, mediante Camera Guinier-Lenné, con rilevamento dell'andamento dei singoli riflessi al variare della temperatura (Fig. 5), chiarisce che la trasformazione cymrite → feldspato di bario esagonale avviene a temperatura prossima a quella della dipartita dell'acqua dal termine idrato, come rilevato dall'analisi termodifferenziale, ed è quindi addebitabile a tale dipartita. Detta trasformazione non è risultata reversibile. Prove di reidratazione di una settimana, a 20°C, in ambiente con umidità pari al 100%, su campioni di cymrite preventivamente trattati per due ore a 600°C, hanno mostrato che il feldspato di bario non ha più tendenza a riprendere acqua. L'analisi termodifferenziale

sul campione dopo reidratazione (Fig. 1d) non mostra più, infatti, il picco endotermico di deidratazione a 392°C (confronta Fig. 1c) caratteristico della cymrite. Il picco che compare a 83°C è invece dovuto alla dipartita di acqua superficiale, condensatasi sul campione a causa della forte umidità ambientale.

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI.

La sintesi di edingtonite e cymrite, due specie la cui formazione è certamente dipendente dal bario, come è dimostrato dalla grande selettività di entrambe, e specialmente della cymrite, nei confronti del catione, permette di ricavare ulteriori indicazioni sul meccanismo di crescita di silicoalluminati in sistemi idrotermali, sia di laboratorio che naturali, e sul ruolo che il litio e gli altri cationi non mineralizzanti svolgono in tali sistemi.

Come già messo in luce in precedenza (18), lo ione litio ha scarsa tendenza a promuovere la crescita di zeoliti. I risultati della presente ri-

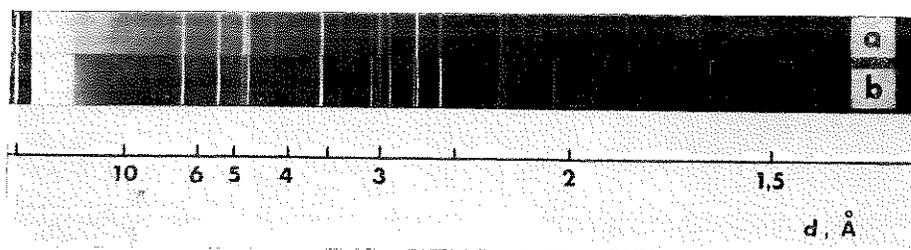


Fig. 4. — Diffratogrammi di raggi X, rilevati tramite Camera Guinier-De Wolff, Rad. $\text{CuK}\alpha$.

- a) Edingtonite sintetica (Tab. I, n. 1).
- b) Edingtonite naturale di Böhlet.

cerca dimostrano d'altra parte che la sua presenza in sistemi a basi miste può essere talvolta indispensabile. Infatti l'edingtonite non è stata mai sintetizzata in ambiente puramente barico (19), mentre la cymrite è stata ottenuta nel corso della presente ricerca in presenza del solo Ba^{++} , ma mai quale unica fase cristallina (confronta la Fig. 2).

Il ruolo svolto dal litio *) è dunque quello di consentire la sintesi di specie, la cui formazione risulti favorita in ambienti caratterizzati da valori di alcalinità maggiori della concentrazione del catione mineralizzante.

*) Si noti che la cymrite è stata sintetizzata anche in sistemi $\text{Ba}^{++} - \text{Na}^+(1)$. È chiaro che in tali particolari sistemi l'azione mineralizzante del bario prevale su quella del sodio e il ruolo di quest'ultimo diventa non dissimile da quello del litio.

Si può allora dedurre in generale che per la sintesi di certe fasi, più che la presenza del catione mineralizzante, è condizione base che nel sistema si realizzi un opportuno rapporto fra gli equivalenti di tale catione e quelli di OH^- e che tale rapporto sia minore dell'unità. Tale situazione è resa possibile dalla presenza nel sistema di più cationi (aggiunti come idrossidi alla miscela di reazione), uno solo dei quali funga da mineralizzante.

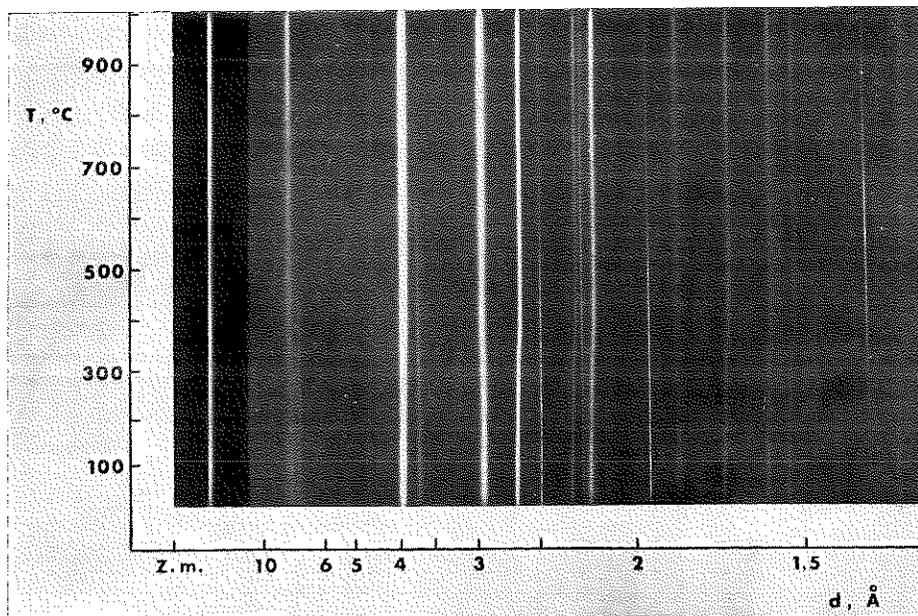


Fig. 5. — Diffratogramma di raggi X della cymrite sintetica, rilevato tramite Camera Guinier-Lemmé. Rad. $\text{CuK}\alpha$.

Velocità di salita della pellicola: 2 mm/ora; termocoppia: Pt/Pt-Rh; temperatura di riferimento: 16°C . Z.m. = zero mark.

(I riflessi che si interrompono si riferiscono alla caolinite residua presente nel campione, quelli sottili e netti alla griglia di platino).

Essendo, d'altra parte, noto dalla letteratura (20) che la neoformazione di alcune altre fasi è favorita da rapporti cationi/alcalinità superiori all'unità, che si realizzano a seguito dell'impiego di coppie costituite da un idrossido e da un sale dello stesso metallo, si può concludere sottolineando il ruolo fondamentale di detto rapporto nell'indirizzare il sistema, in natura o in laboratorio, verso la crescita di una determinata fase, invece che di un'altra.

Istituto di Chimica Applicata dell'Università.

Napoli, Novembre 1973.

BIBLIOGRAFIA

- 1) BARRER R. M., BEAUMONT R., COLELLA C., in corso di pubblicazione su *J. Chem. Soc., Dalton*.
- 2) HEY M. H., BANNISTER F. A., *Min. Mag.*, **23**, 483 (1934).
- 3) CARRON M. K., MROSE M. E., REISER A. N., *Geol. Soc. Amer. Spec. Pap.*, **82**, 26 (1964).
- 4) COLELLA C., AIELLO R., *Ann. Chim.*, **60**, 587 (1970).
- 5) TAYLOR W. H., JACKSON R., *Zeits. Krist.*, **86**, 53 (1933).
- 6) MEIER W. M., OLSON D. H., *Adv. in Chem. Series*, **101**, 155 (1971).
- 7) PÉCSI-DONÁTH É., *Acta geologica*, **6**, 429 (1962).
- 8) TAKÉUCHI Y., *Min. Jour. of Japan*, **2**, 331 (1958).
- 9) BARRER R. M., MARSHALL D. J., *J. Chem. Soc.*, 2296 (1964).
- 10) CAMPBELL SMITH W., BANNISTER F. A., HEY M. H., *Min. Mag.*, **28**, 676 (1949).
- 11) BROSGE W. P., *U. S. Geol. Surv. Prof. Pap.*, **400B**, B351 (1960).
- 12) RUNNELS D. D., *Am. Min.*, **49**, 158 (1964).
- 13) ESSENE E. J., *Am. Min.*, **52**, 1885 (1967).
- 14) DE VILLIERS P. R., *Mem. Dept. Mines South Africa*, **59**, 1 (1970).
- 15) SEKI Y., KENNEDY G. C., *Am. Min.*, **49**, 1407 (1964).
- 16) HAWKINS D. B., *Mat. Res. Bull.*, **2**, 951 (1967).
- 17) YOSHIKI B., MATSUMOTO K., *J. Am. Cer. Soc.*, **34**, 283 (1951).
- 18) COLELLA C., AIELLO R., *Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat.*, [4], **39**, 103 (1972).
- 19) BARRER R. M., MAINWARING D. E., *J. Chem., Soc., Dalton*, 1259 (1972).
- 20) BARRER R. M., MARCILLY C., *J. Chem. Soc.*, 2735 (1970).

Dilatazione termica di vetri del sistema $\text{CaO} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$ *)

*Nota dei dott.ri Alberto Buri, Alberto Marotta e Silvana Saiello
presentata dal socio ordinario Riccardo Sersale*

(Adunanza del 1° dicembre 1973)

RIASSUNTO. — Nell'ambito delle ricerche sul comportamento alla devetrificazione di alcuni vetri del sistema $\text{CaO} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$, è stata eseguita un'indagine preliminare allo scopo di determinare alcune proprietà di vetri appartenenti a tale sistema.

Le composizioni dei campioni esaminati, riconducibili alla formula generale $(2-x)\text{CaO} \cdot (1+x)\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot (1-x)\text{SiO}_2$, con $0 \leq x \leq 0,5$, sono state scelte sulla base dei risultati ottenuti in precedenti ricerche, che avevano mostrato che il primo termine della serie, la cui composizione corrisponde a quella della *gehlenite*, dà origine a vetroceramici dalle interessanti proprietà tecnologiche.

Poiché inoltre era stato ipotizzato che l'ossido di alluminio si comporta in tali sistemi esclusivamente da formatore, l'aumento graduale del contenuto di tale ossido lasciava prevedere una diminuzione progressiva del coefficiente di dilatazione dei vetri quando i valori di x aumentano progressivamente.

I risultati ottenuti hanno confermato le ipotesi formulate, mostrando una progressiva diminuzione del coefficiente di dilatazione termica al crescere di x fino ad un valore negativo per $x = 0,5$.

SUMMARY. — A preliminary investigation devoted to determine some properties of $\text{CaO} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$ glasses, has been carried in order to deep the knowledge on the devetrification behaviour.

Glass compositions, which may be expressed by the general formula $(2-x)\text{CaO} \cdot (1+x)\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot (1-x)\text{SiO}_2$, with $0 \leq x \leq 0,5$, have been chosen on the ground of previous researches, which showed that the first term of this series, whose composition correspond to *gehlenite*, originates glass ceramics of noticeable interest.

Being alumina hypotized to act on the whole as networkformer, it may be expected that an increase of its amount progressively lowers thermal expansion.

Results obtained confirm this hypothesis, showing a progressively lowering of the thermal expansion coefficient with increasing x values, up to a negative value when x is equal to 0.5.

*) Lavoro eseguito con il contributo finanziario del C.N.R.

INTRODUZIONE.

In precedenti pubblicazioni (1, 2, 3) si è dato conto dei risultati di una sperimentazione sistematica rivolta a chiarire il ruolo dell'alluminio in vetri di composizione rappresentabile con formula generale $2CaO \cdot (1-x)MgO \cdot xAl_2O_3 \cdot (2-x)SiO_2$, dove $0 \leq x \leq 1$ e i termini estremi corrispondono stechiometricamente alla akermanite ($x = 0$) ed alla gehlenite ($x = 1$).

I risultati ottenuti avevano permesso di dedurre che la progressiva sostituzione di atomi di alluminio ad atomi di magnesio (modificatore) e di silicio (formatore) non comporta l'assunzione da parte dell'alluminio delle funzioni svolte dagli atomi sostituiti.

L'andamento delle temperature di transizione vetrosa e del coefficiente di dilatazione termica al crescere del tenore di alluminio ($x \rightarrow 1$) poteva infatti essere giustificato solo con l'ammissione che l'alluminio eserciti solo le funzioni di formatore.

I valori notevolmente bassi del coefficiente di dilatazione termica dei vetri ad alto contenuto di alluminio ($x \simeq 1$) hanno indotto gli AA. ad intraprendere una indagine preliminare su una serie di vetri del sistema $CaO - Al_2O_3 - SiO_2$, il cui termine iniziale corrisponde all'ultimo della serie sopra indicata ed i termini successivi sono stati ottenuti mediante una progressiva sostituzione di atomi di calcio e di silicio con atomi di alluminio.

I risultati sperimentali ottenuti e le deduzioni che da essi è stato lecito trarre formano oggetto della presente nota.

PARTE SPERIMENTALE

a) Preparazione dei campioni.

Sono stati approntati sei campioni di vetro le cui composizioni sono espresse dalla formula generale $(2-x)CaO \cdot (1+x)Al_2O_3 \cdot (1-x)SiO_2$ per valori di x pari a 0; 0,1...; 0,5.

In fig. 1 sono riportate le posizioni delle suddette composizioni nel diagramma di stato $CaO - Al_2O_3 - SiO_2$. Ciascun campione viene indicato, in quel che segue, con il corrispondente valore di x .

Ciascun campione è stato ottenuto per fusione in forno elettrico a 1500°C di miscele di ossidi o carbonati chimicamente puri e successiva tempra in acqua per ottenere un'elevata velocità di raffreddamento. I vetri così preparati sono stati sottoposti ad affinazione per tre ore a 1450°C ed infine colati in stampi di ghisa. Non è stato possibile approntare i vetri di composizione $x > 0,5$, in quanto le rispettive miscele di ossidi non risultavano vetrificabili almeno fino alla temperatura di 1500°C.

b) *Analisi termica differenziale.*

I campioni sono stati macinati e setacciati raccogliendo le frazioni tra $92\ \mu$ e $55\ \mu$. Le polveri così ottenute sono state sottoposte ad analisi termica differenziale impiegando campioni del peso di 40 mg e velocità di riscaldamento di $10^\circ\text{C}/\text{min}$. In fig. 2 è riportato il termogramma relativo al vetro 0 che ben rappresenta il comportamento dell'intera serie. Esso mostra un effetto endotermico ad 860°C , attribuibile a transizione vetrosa la cui reversibilità è stata controllata effettuando un ciclo di raffreddamento, ed un effetto esotermico a 1014°C dovuto a cristallizzazione. In fig. 3 sono riportati, in funzione della composizione dei vetri, le temperature dei picchi di cri-

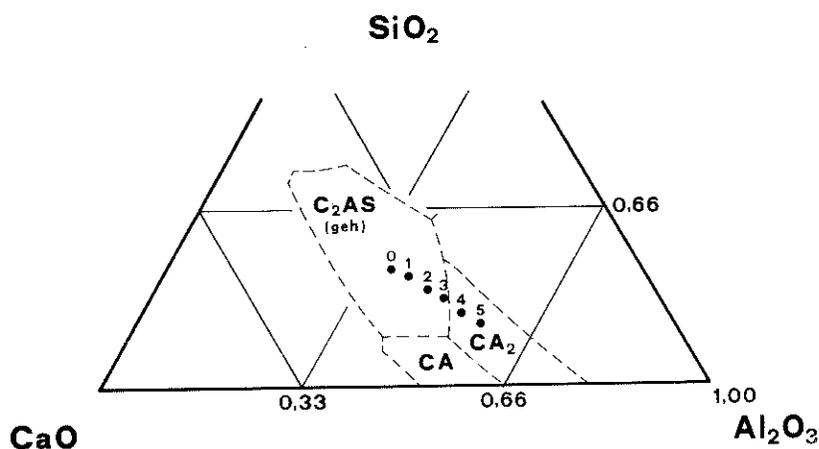


Fig. 1. — Composizione dei campioni esaminati nel diagramma di stato $\text{CaO} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$.

stallizzazione. I termini estremi della serie rivelano una temperatura di cristallizzazione più bassa di quelle dei termini intermedi. Per giustificare questo risultato si è proceduto alla identificazione delle fasi cristalline di neoformazione per mezzo della diffrazione dei raggi X, adoperando una camera di Guinier de Wolff e la radiazione $\text{CuK}\ \alpha$. Si è rilevato in tal modo che i termini estremi danno origine essenzialmente ad una sola fase cristallina, mentre i termini intermedi lasciano cristallizzare almeno due fasi. Ne consegue che la cristallizzazione dei vetri con $0 < x < 0,5$ richiede fenomeni diffusivi più marcati e quindi una temperatura più elevata necessaria affinché gli ioni acquistino una sufficiente mobilità.

c) *Analisi termo-dilatometrica.*

Le curve dilatometriche sono state registrate col dilatometro Leitz UBD, impiegando barrette di circa 45 mm di lunghezza e velocità di riscaldamento

di 5°C/min. Ciascuna barretta è stata preventivamente ricotta per eliminare le tensioni interne dovute al trattamento di tempra. In fig. 4 è ripor-

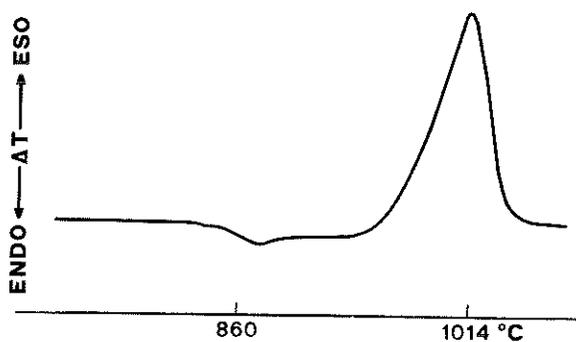


Fig. 2. — Analisi termica differenziale del vetro $x = 0$.

tata la curva dilatometrica del vetro 0 che può essere considerata rappresentativa del comportamento dell'intera serie. Su di essa si può rilevare un tratto a dilatazione uniforme dalla temperatura ambiente fino alla tem-

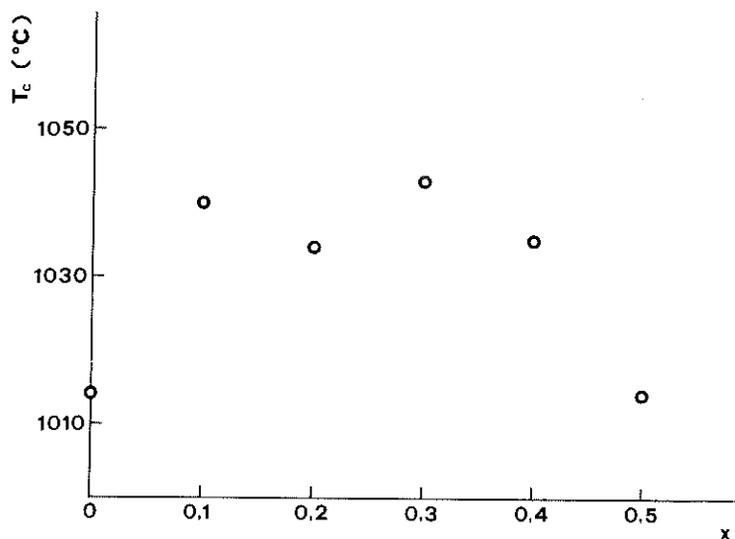


Fig. 3. — Temperature corrispondenti ai picchi esotermici di cristallizzazione desunte dall'analisi termica differenziale.

peratura di transizione vetrosa T_g ; segue un tratto a dilatazione repentina, fino al punto di rammollimento dilatometrico M_g corrispondente alla temperatura alla quale il flusso viscoso eguaglia l'espansione termica.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

L'espansione termica dei vetri è una proprietà complessa che è connessa con l'ampiezza e la distribuzione delle forze agenti sul sistema e che riflette ogni variazione della distribuzione di tali forze in funzione dell'aumento delle vibrazioni termiche e della mobilità degli ioni nel reticolo (4). La brusca variazione del coefficiente di dilatazione termica α che si osserva al disopra di T_g , cioè quando un vetro si trasforma in un liquido sottoraffreddato, è dovuta ad un trasferimento di legami tra « ossigeni a ponte » O_p legati con legami covalenti a 2 atomi di silicio ed « ossigeni non a ponte » O_{np}

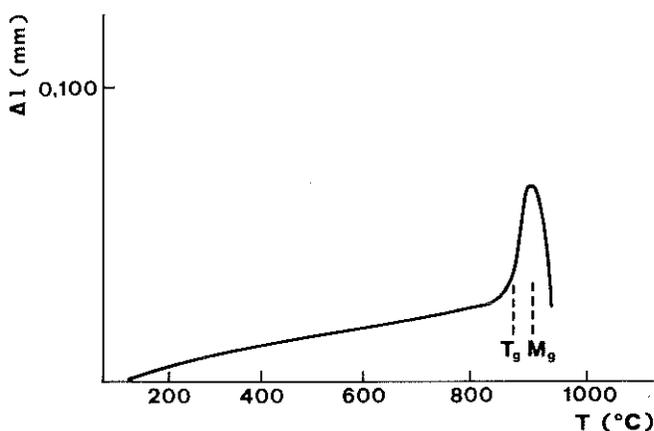


Fig. 4. — Curva termodilatometrica del vetro $x = 0$.

legati con un legame covalente ad un atomo di silicio e con un legame ionico ad un catione modificatore (5). Al crescere del rapporto atomi di modificatore/atomi di formatore, cresce il rapporto O_{np}/O_p e ne consegue un abbassamento di T_g ed un aumento dell'intervallo $M_g - T_g$. Per quanto riguarda poi l'entità di α nel tratto che precede T_g , esso avrà, a parità di altre condizioni, un valore tanto più elevato quanto minore è la simmetria del sistema (4). Il comportamento della silice vetrosa, sistema ad alta simmetria e privo di « ossigeni non a ponte », conferma quanto sopra illustrato. Essa infatti ha un bassissimo valore di α ($0,5 \cdot 10^{-6}$) a temperature minori di T_g , un elevato valore di T_g (1200°C) e non presenta alcuna variazione di α al disopra di T_g (4). L'introduzione di cationi modificatori provoca un aumento del rapporto O_{np}/O_p con conseguente abbassamento della simmetria del sistema. È noto però (6) che esiste una sostituzione isomorfa silicio-alluminio, sempre che siano disponibili i cationi necessari a mantenere la

neutralità della carica nella struttura. Tali cationi, sistemandosi nei vuoti della struttura formata da tetraedri SiO_4 ed AlO_4 , cessano la loro funzione di ioni modificatori e, al limite, se il rapporto $\text{M}_2\text{O}/\text{Al}_2\text{O}_3$ o $\text{MO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ è uguale ad 1, non sono presenti « ossigeni non a ponte ». La struttura è pertanto simile a quella della silice.

In Tab. I sono riportate, in corrispondenza della composizione dei vetri, le lunghezze dei tratti $M_g - T_g$. Si nota una costante diminuzione dei valori al crescere di x , fino ad avere, per $x = 0,5$, un valore quasi trascurabile. Tale andamento può essere giustificato solo ammettendo che l'alluminio si comporti interamente da formatore. In tal caso, diminuendo nell'ambito della serie il rapporto $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ da 2 a 1, si ha che il rapporto $0_{np}/0_p$ tende a 0, per x tendente a 0,5. Si dovrebbe pertanto avere anche

TABELLA I

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
L	32,0	22,0	18,8	13,0	12,8	8,1
$\alpha \cdot 10^6$	0,64	0,58	0,26	0,00	0,00	-0,47

x = composizione dei vetri.

L = lunghezze in millimetri dei tratti $M_g - T_g$ sulle curve dilatometriche.

α = coefficiente di dilatazione termica dei vetri nell'intervallo di temperatura 25-700°C.

un progressivo aumento della simmetria del sistema, con conseguente diminuzione di α al crescere del tenore di alluminio. Ciò è in perfetto accordo con i risultati sperimentali in Tab. I nella quale compaiono anche i valori di α , calcolati dalle curve dilatometriche nell'intervallo 25-700°C.

Resta da chiarire il valore marcatamente negativo di α per il vetro 0,5. In letteratura non sono stati reperiti dati riferentisi al sistema da noi studiato, ma è noto (7) che alcune forme cristalline della silice come il quarzo β e la tridimite, nonchè la stessa silice vetrosa (8), sia pure a bassa temperatura, presentano coefficienti di dilatazione termica negativi. Il vetro 0,5 essendo privo di « ossigeno non a ponte » come la silice, per quanto ipotizzato circa la funzione dell'alluminio, potrebbe avere un comportamento analogo. È intenzione degli AA. continuare ad indagare sulla reale consistenza di questa ipotesi.

CONCLUSIONI.

I risultati ottenuti sembrano comunque promettenti non solo perchè permettono considerazioni teoriche sulle relazioni fra struttura e proprietà di vetri esaminati, ma soprattutto perchè lasciano intravedere il possibile ottenimento di materiali vetro-ceramici a proprietà variabili in modo continuo a seconda della composizione chimica.

BIBLIOGRAFIA

- 1) BURI A., MAROTTA A., GIORDANO ORSINI P. *Transizione vetrosa e composizione in vetri melilitici*. Ceramurgia, **3**, 139 (1973).
- 2) SAIELLO S., MAROTTA A., BURI A. *Sulle relazioni fra temperatura di transizione vetrosa e contenuto di alluminio in vetri della serie melilitica*. Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat., **40**, 121 (1973).
- 3) MAROTTA A., BURI A. *Comportement thermique de produits vitrocéramiques de composition méilitique*. Bull. Soc. Franç. Ceram., **101**, 15 (1973).
- 4) WEYL W. A., MARBOE E. C. *The constitution of glasses. A dynamic interpretation*. Interscience publishers, vol. I, p. 353 (1962).
- 5) LACY E. A. *Structure transition in alkali silicate glasses*. J. Am. Cer. Soc., **51**, 150 (1968).
- 6) RAWSON H. *Inorganic glass-forming systems*. Academic Press, London-New York, p. 89 (1967).
- 7) SOSMAN R. B. *Properties of silica*. American chemical society monograph series n. 37 chemical catalog Co. Inc., New York (1927).
- 8) SMYTH H. T. *Thermal expansion of vitreous silica*. J. Am. Cer. Soc., **38**, 140 (1955).

RELAZIONE
SUI LAVORI COMPIUTI
DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

durante l'anno 1973
letta nell'adunanza plenaria del gennaio 1974
dal Socio BALDASSARRE DE LERMA
Segretario dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche

La relazione che ho l'onore di presentare in questa adunanza plenaria riguarda l'attività svolta dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1973. È stato, quello del 1973, un anno particolarmente felice per il numero e interesse dei contributi di ricerca originali che ci sono pervenuti da studiosi italiani e stranieri e dagli stessi soci accademici. Si tratta infatti di ben 26 lavori che figurano nel XL volume della Serie IV del nostro Rendiconto, lavori che interessano tutte le discipline che afferiscono alle due Sezioni di Scienze naturali e Scienze matematiche.

Ha retto la Presidenza di classe il Prof. Tito Nicolini, nelle otto tornate ordinarie che, come di consueto, si sono tenute durante l'anno accademico 1973.

La brevità del tempo non mi consente di condurre, come avrei desiderato, un'approfondita analisi dei lavori di ricerca pervenutici, e dovrò per ciò limitarmi ad un rapido cenno espositivo di essi.

L'anno accademico ha avuto inizio con l'adunanza dell'11 gennaio. La Prof.ssa Antonietta Orrù illustrava una nota del Prof. A. Biondi e dei dottori M. Cotugno, L. Cesaro e V. Palmieri che riguarda una ricerca sperimentale sugli effetti che si producono in ratti sottoposti a castrazione, a shock elettrico e a dieta iperlipidica-iperproteidica protratta per 520 giorni, effetti che si traducono in profonde alterazioni delle pareti arteriose di grossi vasi a livello morfologico e istochimico. Nella stessa seduta veniva presentata dal Socio Francesco Stoppelli una nota del dott. A. D'Anna riguardante le condizioni sotto cui una sollecitazione che agisca su un sistema omonimo derivi da un potenziale generalizzato.

Nell'adunanza successiva, del 3 febbraio, venivano presentati vari lavori. Per la Sezione di Scienze matematiche il Socio Prof. Mario Curzio riferiva su una ricerca di analisi algebrica del dott. S. Pignataro relativa alla costruzione di infiniti triangoli aritmetici i cui termini rappresentano i coefficienti di sviluppi di potenze, mentre per la Sezione di Scienze naturali

riferivano il Socio prof. A. Carrelli su una nota di G. Acocella su fenomeni di isteresi nei fili ferromagnetici tesi e il Socio Prof. L. Mangoni su ricerche proprie e di studiosi collaboratori — i Professori G. Barone, M. Adinolfi, M. Parrilli, V. Davinola — intorno a reazioni che caratterizzano il comportamento di alcuni composti olefinici. Veniamo poi alla tornata del 7 aprile, durante la quale il Socio Prof. A. Carrelli riferiva su ricerche sue e di collaboratori (i Proff. C. Luponio e F. Porreca) intorno alla propagazione radiale di un transiente magnetico in cilindri elettromagnetici. Il dato originale che emerge da tale ricerca è quello di un contributo che gli strati del campione apportano alla propagazione della magnetizzazione nell'interno della sostanza, contributo che viene interpretato come dovuto allo stato di magnetizzazione diretto dagli strati esterni verso gli interni. Il Socio prof. C. Miranda presentava nella stessa seduta un lavoro dei Professori Kinh Vinh Leung e Mehmet Namik Oguztoreli della Università di Alberta in Canada che tratta di una soluzione numerica di un problema al contorno di una « equazione polivibrante » di D. Mangeron. Al Socio Prof. G. Imbò dobbiamo una ricerca, presentata nella tornata del 5 maggio, sulla radioattività globale dei recenti prodotti eruttivi vesuviani, e nella stessa riunione il Socio Prof. F. Stoppelli presentava una nota a firma di A. D'Anna e P. Renno che riguarda lo studio di un'equazione di tipo iperbolico dell'aereotermochimica unidimensionale.

Nella seduta del 7 giugno, l'ultima prima delle vacanze estive, sono stati presentati ben undici lavori per le due sezioni della nostra Accademia. Il Socio Prof. A. Franchetta riferiva su due importanti contributi, di A. Di Sante sui sistemi lineari di forme a jacobiana indeterminata e di I. Candela su « Spazio fibrato vettoriale delle derivazioni di una varietà differenziale ». Nel campo degli studi sulla relatività venivano poi illustrati dal Socio Prof. Carlo Tolotti un lavoro di A. Romano su un'assiomatica per l'elettrotermodinamica relativistica di un sistema continuo e una nota di R. Grassini dal titolo « Applicazione della regola di trascrizione alla dinamica relativa di una particella in Relatività generale ». L'accademico Prof. M. Picone faceva pervenire due lavori di studiosi stranieri: i Professori K. V. Leung, D. Langeron, M. N. Oguztoreli che hanno studiato problemi al contorno in relazione a sistemi differenziali ordinari e soluzioni numeriche in speciali processi di diffusione. Ancora ai Proff. D. Langeron e M. N. Oguztoreli dobbiamo una nota, illustrata dal Socio C. Miranda, intorno a problemi di correttezza delle soluzioni esatte ed approssimative dei sistemi integro-differenziali non lineari a derivate parziali. Il Socio M. Curzio presentava una nota di A. Bruna de Lucia d'Andrea dal titolo « Alcune osservazioni sugli ultrafiltri di un anello booleano ». Un contributo dell'Ing. S. Santorelli, presentato dal Socio E. Giangreco, fornisce

una panoramica sui procedimenti che si adottano per la valutazione dei fenomeni macrosismici. Altri lavori letti nella tornata del 7 giugno si devono ad un gruppo di studiosi della scuola della Prof. A. Orrù — i Proff. L. Trara Genoino, T. De Leo, M. A. Manginelli, S. Di Meo — che hanno analizzato l'effetto della tiroidectomia e della somministrazione « in vivo » di triiodotironina sull'incorporazione della leucina nelle proteine delle principali frazioni citoplasmatiche. Un'interessante ricerca del prof. T. De Leo, in collaborazione con A. Barletta e G. Martino, tratta degli effetti che sono stati ottenuti in relazione alla sintesi di DNA ad opera di mitocondri isolati da fegato di ratti sottoposti a tiroidectomia seguita da trattamento con triiodotirosina. Una nota del Prof. S. Bianchi, presentata dal Socio Prof. B. de Lerma, svolge interessanti considerazioni di ordine filogenetico intorno ad una neurosecrezione aminica de Lumbricidi, ed infine una ricerca dei Professori S. Saiello, A. Marotta e A. Buri indaga intorno alle relazioni che si stabiliscono tra temperatura di transizione vetrosa e contenuto di alluminio in vetri della serie melitica.

Alla ripresa accademica nelle due tornate di novembre e dicembre sono stati presentati ancora lavori, per la sezione di Scienze matematiche, dal Socio Prof. C. Tolotti nel campo degli studi sulla relatività — due lavori dei Professori A. Romano e M. Padula — e dal Socio C. Miranda per una nota del dott. S. Matarasso dal titolo « Formule di maggiorazione relative a una classe di equazioni a coefficienti costanti », mentre il Socio prof. M. Covello riferiva su una ricerca, in collaborazione con O. Schettino e F. Forgione, che riguarda uno studio cromatografico della frazione insaponificabile dell'olio dei semi di « *Cardiospermum halicabum* ».

Per gli « Atti », dei quali è in preparazione l'VIII volume della Serie 3, il Socio ordinario Prof. Giuseppe Imbò ha presentato un'importante memoria di fisica terrestre riguardante il complesso vulcanico del Somma-Vesuvio.

Un doloroso lutto ha colpito la nostra Accademia. L'ultimo giorno dell'anno, il 31 dicembre 1973, decedeva il Prof. Carmelo Colamonico, nostro Socio sin dal 1934. Tutti ricordiamo con sentimento di riverente affetto la figura di Carmelo Colamonico, che tanto ha dato alla nostra Accademia con la sua costante, validissima ed appassionata opera di studioso.

Si è provveduto alla copertura di due posti di Socio ordinario con la nomina del Prof. Aldo Merola per la Sezione di Scienze naturali e del Prof. Mario Curzio per quella di Scienze matematiche. Il Socio Prof. Francesco Scarsella è passato nella categoria di Soci non residenti.

Per il 1973 sono stati banditi quattro premi di lire 500.000 per attività

di ricerca svolta negli ultimi 5 anni da studiosi di discipline scientifiche: per le Matematiche, per la Fisica, per la Chimica e per la Biologia.

Nell'ultima tornata, quella del dicembre, si è proceduto alla nomina del nuovo Consiglio di Classe che per l'anno accademico 1974 risulta così costituito: Presidente, a norma di statuto, essendo stato Vice Presidente per lo scorso anno, il Prof. Antonio Scherillo; Vice Presidente il Prof. Mario Galgano; Tesoriere il Prof. Riccardo Sersale; Segretario il Prof. Baldassarre De Lerma.

Il Segretario

BALDASSARRE DE LERMA

Relazione della Commissione giudicatrice del Concorso al premio accademico per le Scienze Matematiche bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973

La Commissione, composta dai Soci Carlo Tolotti (Presidente), Tito Nicolini, Mario Curzio, Francesco Stoppelli, Vittorio Dalla Volta (Segretario), si è riunita il giorno 14-1-1974 presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli.

Il Presidente ricorda che, in conformità del bando di concorso, sono da prendere in considerazione i soli lavori concorrenti pubblicati nel quinquennio 1969-73 riguardanti la Matematica ed in particolare la branca « Teorie relativistiche ».

I concorrenti sono due: Prof. Renato Palmieri e Prof. Antonio Romano. La Commissione, dopo ampia discussione, ha approvato la seguente relazione:

Prof. Renato Palmieri. Presenta tredici lavori, alcuni dei quali suddivisi in più articoli, distribuiti come segue:

- a) 18 articoli sulla Rivista « Tempo Nuovo », annate 1970-73;
- b) 2 opuscoli della collezione « Quaderni scientifici », Ed. Athena, Napoli, intitolati « Introduzione alla Fisica unigravitazionale » (1970) e « La fisica unigravitazionale » (1971);
- c) un volume doppio dal titolo « Fisica del campo unigravitazionale », Ed. Cultura e Vita, Napoli, 1970.

Dall'esame di queste pubblicazioni, la Commissione constata che in esse non può ravvisarsi alcuno sviluppo o contributo matematico specifico idoneo per il concorso in questione.

Prof. Antonio Romano. Presenta nove lavori (uno dei quali in collaborazione) tutti pubblicati nel quinquennio 1969-1973 e riguardanti il tema del concorso, fatta eccezione per il lavoro 6. Il lavoro 1 introduce e studia la nozione di gradiente relativo di deformazione in Relatività generale servendosi della quale nel lavoro 2 viene fornita una sistemazione della cinematica relativa dei sistemi continui in Relatività generale che estende l'ordinaria cinematica dei sistemi continui rispetto ad un riferimento rigido. Nel lavoro 3 viene esposto, per la determinazione dell'equazione del moto di una particella in Relatività ristretta, un nuovo procedimento basato su assiomi di carattere puramente meccanico formalmente analoghi a quelli classici del bilancio. L'interesse di tale nuovo procedimento è che esso, esteso ai sistemi

continui, fornisce (lavoro 4) per l'elettrotermodinamica relativistica di tali sistemi un'assiomatica che consente di determinare il tensore impulso-energia e le equazioni relativistiche del moto, portando a risultati che, se coincidono con quelli noti nel caso di un sistema continuo non carico, rappresentano invece delle nuove importanti acquisizioni per i sistemi continui carichi. Tra l'altro (lavoro 7) viene messo in evidenza l'aspetto puramente convenzionale che, secondo l'assiomatica proposta, ha in Relatività ristretta ogni distinzione fra parte materiale e parte elettromagnetica di un sistema continuo carico; nel lavoro 8 (in collaboraz.) l'anzidetta assiomatica viene poi estesa all'elettrotermodinamica relativistica di un sistema continuo con spin. Notevoli infine i lavori 5 e 9 ove alle equazioni del bilancio relativistico viene associata la versione relativistica della disegualianza di Clausius-Duhem, proposta da Pham Mau Quan, pervenendo ad una disegualianza di dissipazione ridotta da cui, conformemente a quanto fatto da Coleman nell'approssimazione classica ed in assenza di campo elettromagnetico, vengono dedotte le restrizioni che essa implica per le equazioni costitutive; precisamente in 5 ciò viene fatto, nell'approssimazione quasi-classica, per materiali di tipo differenziale in campi elettromagneticamente lineari, mentre in 9 viene trattato rigorosamente il caso dei materiali di tipo termoelastico in assenza di campo elettromagnetico pervenendo sia a risultati che estendono quelli classici e sia ad interessanti risultati di natura essenzialmente relativistica. Al lavoro 5 è collegato il lavoro non relativistico 6 che applica nel caso classico, le equazioni ottenute in 5 ad un dielettrico elastico di cui però viene studiata la termodinamica supponendolo anche dispersivo.

A conclusione dell'esame dei titoli dei concorrenti, la Commissione rileva che la produzione scientifica del prof. Romano, concernente il tema del concorso, è ampia e contiene risultati notevoli, mentre in quella del prof. Palmieri non può ravvisarsi alcun contributo matematico specifico idoneo per il concorso in questione.

Pertanto la Commissione unanime propone di assegnare al Prof. Antonio Romano il premio accademico 1973 per le « Scienze Matematiche ».

La Commissione

Prof. CARLO TOLOTTI
Prof. TITO NICOLINI
Prof. MARIO CURZIO
Prof. FRANCESCO STOPPELLI
Prof. VITTORIO DELLA VOLTA

Relazione della Commissione giudicatrice del Concorso al premio accademico per le Scienze Fisiche bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973

La Commissione nominata dall'Accademia per giudicare i partecipanti al concorso delle Scienze Fisiche che ha per tema il Magnetismo, formata dai Proff. Carrelli Antonio, Cortini Giulio, Cennamo Francesco, Imbò Giuseppe, Tolotti Carlo, acclude la sua relazione.

Si sono presentati due candidati: il Sig. Renato Palmieri ed il Prof. Umberto Bernini.

In base ai giudizi qui di seguito riportati, la Commissione unanimamente decide di assegnare il premio al Prof. Umberto Bernini.

Il candidato Renato Palmieri presenta un cospicuo numero di pubblicazioni. Ma in primo luogo esse hanno carattere giornalistico e divulgativo, e per quelle che affrontano più particolarmente problemi scientifici è da dire che si riferiscono ad una teoria gravitazionale che è priva di un contenuto teorico.

Risulta quindi che il candidato Palmieri non ha dato contributi di alcun genere relativamente ai problemi del magnetismo per cui non può essere preso in considerazione ai fini del presente concorso.

Il candidato Umberto Bernini presenta sette lavori di cui sei in collaborazione. Quattro di essi riguardano le relazioni che intervengono fra tensioni elastiche e fenomeni magnetici. Più particolarmente in una nota l'Autore introduce da un punto di vista teorico una nuova linea di ritardo, da lui ideata e sperimentalmente realizzata, fondata sul fenomeno magnetostrittivo.

Un gruppo di due note contiene i risultati che permettono di interpretare in termini magnetostrittivi la magnetizzazione circolare indotta per torsione ed il comportamento caratteristico dei campioni soggetti a sforzi nella zona dei piccoli campi (regione dei processi reversibili).

Nella quarta nota magnetostrittiva si propone e si attua un nuovo metodo di misura dei coefficienti magnetostrittivi, in campioni in cui la distribuzione iniziale dei domini sia prestabilita per effetto di stress.

Le altre note riguardano ricerche nel campo della Risonanza Magne-

tica Nucleare. In due di esse, dallo studio della viscosità e con determinazioni sperimentali del tempo di rilassamento protonico spin-reticolo, si arriva a prevedere una temperatura caratteristica e certi parametri molecolari delle sostanze in esame.

Nell'altra nota, con la determinazione dei tempi di rilassamento, si studiano le interazioni che portano alla formazione di microdomini nelle miscele binarie in prossimità della temperatura critica di miscelamento.

I lavori sono eseguiti con metodi sperimentali moderni e rigorosi, i risultati che si ricavano hanno notevole interesse; si ritiene quindi che il Prof. Umberto Bernini è ben degno del premio posto a concorso.

La Commissione

Prof. ANTONIO CARRELLI
Prof. GIULIO CORTINI
Prof. FRANCESCO CENNAMO
Prof. GIUSEPPE IMBÒ
Prof. CARLO TALOTTI

Verbale e relazione della Commissione giudicatrice per il Concorso ad un premio accademico per la « Chimica », bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973

La Commissione Giudicatrice per il Concorso ad un premio accademico per la Chimica sul tema: « Struttura e proprietà di prodotti inorganici d'interesse industriale si è riunita al completo presso i locali dell'Accademia alle ore 11 del giorno 7 gennaio 1974.

La Commissione formata dai proff. Covello, Nicolaus, Mangoni, Sersale è presieduta dal Prof. A. Scherillo.

In linea preliminare essa constata che è pervenuto un solo plico di lavori, inviato dal dott. Carmine Colella.

Pertanto procede all'esame collegiale dei titoli e del curriculum dell'unico concorrente, dopo di che formula all'unanimità la relazione che segue esprimendo al termine di essa il proprio giudizio.

« Il dott. Colella, Assistente Ordinario alla Cattedra di Chimica Applicata della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Napoli, presenta quindici pubblicazioni a stampa, tutte svolte nel quinquennio 1969-1973 e tutte attinenti al tema del Concorso. L'attività di ricerca ha riguardato il settore di alcuni silicati di interesse industriale e, particolarmente, quello delle zeoliti e setacci molecolari.

Tale settore è stato coltivato secondo differenti angolazioni. Un primo indirizzo ha riguardato lo studio delle variabili chimico-fisiche che influenzano il processo di zeolitizzazione di materiali vetrosi, sia sintetici che naturali, in ambiente alcalino per idrossido di sodio, di potassio o di litio, rispettivamente. Nell'ambito di tale direttrice sono stati sintetizzati tredici diversi termini zeolitici, di cui almeno tre, la *faujasite* (in ambiente sodico) e la *gmelinite* e la *zeolite Linde L* (in ambiente potassico), particolarmente interessati dal punto di vista applicativo, nonché la *zeolite Na-V*, mai sintetizzata in precedenza. L'indagine sui prodotti sintetizzati è stata estesa allo studio delle loro caratteristiche strutturali e del comportamento al riscaldamento, oltre all'esame delle proprietà di adsorbimento del vapor d'acqua, di scambio cationico e, limitatamente alla *faujasite*, alla valutazione dell'attività catalitica.

Particolarmente approfondito lo studio delle condizioni di sintesi della *faujasite* a partire da un vetro naturale: le pomici riolitiche, stante l'interesse

dal punto di vista industriale di tale zeolite, per la sua struttura particolarmente « aperta ». Tale studio di ottimazione è stato oggetto di un brevetto, di cui il dott. Colella risulta essere coautore.

Una seconda direttrice di ricerca ha riguardato lo studio del meccanismo di zeolitizzazione dei vetri sintetici.

Mediante valutazione dell'adsorbimento di vapor d'acqua dei sintetizzati a brevi tempi di reazione e determinazione della frazione zeolitica a mezzo analisi roentgenografica quantitativa, è stato messo in luce che il processo di zeolitizzazione di un vetro sintetico comporta la neoformazione di un composto intermedio metastabile, amorfo alla diffrazione elettronica, un gelo allumo-silicatico, la cui successiva evoluzione, in uno con la fase liquida d'equilibrio, conduce alla nucleazione e alla crescita del termine zeolitico stabile.

Una terza direttrice di ricerca, infine, ha riguardato lo studio delle possibilità di applicazione di tufi vulcanici, materiali litoidi molto diffusi nell'Italia centro-meridionale a matrice zeolitica. Le ricerche sono state particolarmente approfondite su tufi a matrice cabasitica. Dopo opportuno arricchimento del contenuto zeolitico dei tufi, si sono ottenuti campioni a tenore superiore all'80% di cabasite, dei quali sono state in particolare studiate le possibilità d'impiego come dessiccanti e raddolcitori di acque, stante la loro attitudine all'adsorbimento del vapore acqueo e allo scambio cationico verso cationi che impartiscono durezza all'acqua.

Il complesso dei risultati ha mostrato che il tufo zeolitico può essere vantaggiosamente impiegato come dessiccante, in alternativa a prodotti tradizionali, e che il suo impiego è particolarmente indicato in condizioni di temperature superiori a quella ambiente e di basse umidità. Le ottime proprietà di scambio cationico mostrano inoltre che il tufo zeolitico può essere vantaggiosamente impiegato come raddolcitore di acque in processi multi-stadi ».

In base a quanto sopra, la Commissione, riconoscendo l'interesse delle ricerche svolte dal Candidato, il loro corretto svolgimento mediante tecniche diagnostiche aggiornate e la rispondenza delle direttrici di ricerca affrontate al tema del Concorso in oggetto lo ritiene pienamente meritevole di assegnazione del premio accademico per la Chimica bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973.

Letto, firmato e sottoscritto.

Napoli, 7-1-1974

Prof. ANTONIO SCHERILLO
Prof. MARIO COVELLO
Prof. RODOLFO NICOLAUS
Prof. LORENZO MANGONI
Prof. RICCARDO SERSALE

Relazione della Commissione giudicatrice del Concorso ad un premio Accademico per le Scienze Biologiche bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973

La Commissione giudicatrice del Concorso a 1 premio accademico per le Scienze Biologiche per l'anno 1973 sul tema « *Endocrinologia* » si è riunita il giorno 16 Gennaio 1974 alle ore 12 in una sala dell'Accademia per procedere all'esame delle pubblicazioni scientifiche presentate dai concorrenti.

Risultano concorrenti al premio due candidati:

Prof. Stefano Bianchi.

Prof. Virgilio Botte.

Dopo accurato esame della produzione scientifica dei due candidati, la Commissione perviene unanime ai seguenti giudizi.

I. STEFANO BIANCHI.

Presenta 7 pubblicazioni, delle quali cinque su periodici scientifici internazionali di alta qualificazione; due delle dette pubblicazioni sono in collaborazione.

Un gruppo di lavori riguarda lo studio di monoamine-biogene nel sistema nervoso centrale degli Anellidi, delle quali precisa la localizzazione citologica e che, sulla base di approfondite indagini istochimiche, interpreta come espressione di un'attività endocrina di speciali neuroni. Afferma, pertanto, in ordine anche ad una valutazione filogenetica, l'esistenza di un tipo nuovo di neurosecrezione — la neurosecrezione aminica — oltre quella peptidica classicamente nota.

Altri studi fanno conoscere i diversi tipi di cellule neurosecretrici di un Nemertino, *Cerebratulus marginatus*, nel cui prodotto di secrezione dimostra la presenza di triptofano e cistina, e rivela inoltre l'esistenza nei gangli cerebroidi dello stesso animale di un'area neuroemale di rilascio ed accumulo del neurosecreto. Nel lavoro in cui studia gli « Organi cerebrali » dei Nemertini dimostra che l'attività di secrezione dei detti organi è indipendente da quella, neurosecretoria, di centri endocrini cerebroidi.

La produzione scientifica presentata dal Prof. S. Bianchi è rivolta all'endocrinologia di *phyla* di invertebrati e porta contributi nuovi ed interessanti, nei riguardi soprattutto della neurosecrezione aminica, secondo gli viene largamente riconosciuto anche nella letteratura specialistica internazionale.

2. VIRGILIO BOTTE.

Presenta 22 pubblicazioni, delle quali cinque su periodici scientifici internazionali di alta qualificazione; 21 delle dette pubblicazioni sono in collaborazione.

Un gruppo di lavori tratta delle modificazioni dell'ovidutto di Anfibi durante il ciclo sessuale in natura e in varie condizioni sperimentali. A tal riguardo viene anche vagliata l'azione che fattori ormonali esercitano, in *Rana esculenta*, sulle attività di secrezione dell'ovidutto. Possono collegarsi a questi studi le interessanti ricerche sulla regolazione ormonale dei caratteri sessuali secondari degli Anfibi anuri.

Altri lavori riguardano lo studio dell'azione di fosfatasi di vari organi di mammiferi su estrogeni-fosfati, nonché la caratterizzazione di fosfatasi di diversi organi e tessuti di vari vertebrati.

Uno studio sull'ipofisi di un Teleosteo ermafrodita sincrono, *Serranus scriba*, riguarda il comportamento delle cellule basofile nel corso del ciclo riproduttivo, nonché le relazioni tra ipofisi e tiroide.

Altri lavori riguardano il comportamento del tessuto interstiziale del testicolo di *Rana esculenta* in rapporto al fattore ambientale della temperatura e la fosfatasi alcalina dell'intestino dello stesso anuro durante la metamorfosi.

La produzione scientifica del Prof. Virgilio Botte è rivolta prevalentemente al campo dell'endocrinologia degli Anfibi. Le ricerche sono condotte con l'impiego di moderne tecniche e portano un contributo valido ed interessante.

La Commissione è unanime nel giudicare entrambi i candidati ben meritevoli, in assoluto, di conseguire il Premio. Dovendo però attribuire il Premio, che è indivisibile, ad uno solo dei concorrenti, la Commissione ha proceduto ad un ulteriore approfondito esame comparativo. È emerso quanto segue.

Per la più decisa personalità scientifica del Prof. Bianchi e per il contributo nuovo e significativo, che gli viene ampiamente riconosciuto anche in sede internazionale, da lui apportato in campo neuroendocrinologico, i Proff. Orrù, Covello, Nicolaus, De Lerma, sono dell'avviso che il Premio

vada attribuito a lui, pur riconoscendo ampia validità ed interesse alla produzione del Botte.

Il Prof. Leone, che pure apprezza al pari degli altri Commissari i meriti scientifici del Bianchi, fa presente che a suo avviso il Premio andrebbe conferito al Botte per la maggiore ampiezza e pluralità di indirizzi della produzione che ha portato a risultati validi ed interessanti.

La Commissione pertanto, col solo parere contrario del Commissario Leone, delibera di assegnare il Premio al Prof. Stefano Bianchi.

La Commissione

Prof. ANTONIETTA ORRÙ

Prof. MARIO COVELLO

Prof. RODOLFO NICOLAUS

Prof. VINCENZO LEONE

Prof. BALDASSARRE DE LERMA

I N D I C E

A. BIONDI, M. COTUGNO, L. CESARO, V. PALMIERI — Modificazioni di alcuni tratti dell'albero arterioso osservate in ratti alimentati con dieta iperlipidica, ipoprotidica, castrati e sottoposti ad ESH	pag. 3
A. D'ANNA — Sulle forze derivanti da un potenziale dipendente anche dalla velocità	» 8
S. PIGNATARO — Triangoli aritmetici e sviluppi di potenze	» 21
M. PARRILLI, G. BARONE, M. ADINOLFI — La metossibromurazione del 3-metil- e del 2-metil-5 α -colest-2-esse	» 26
M. PARRILLI, V. DOVINOLA — La reazione di Woodward sull'1-metilcicloesene e sull'1-metil-4-t-butilcicloesene	» 29
G. ACOCELLA — Fenomeni d'isteresi nei fili ferromagnetici tesi	» 33
A. CARRELLI, C. LUPONIO, F. PORRECA — Propagazione radiale di un transiente magnetico in cilindri ferromagnetici	» 44
K. V. LEUNG, M. N. OGUZTORELI — In the numerical solution of a boundary value problem for a polywave equation of D. Mangeron: I	» 52
E. FICHERA — Il polo d'inerzia iniziale (1900.0 - 1907.)	» 58
A. D'ANNA, P. RENNA — Su un'equazione di tipo iperbolico dell'aerotermodinamica unidimensionale: calcolo e stabilità delle soluzioni nulle agli estremi	» 67
G. IMBÒ — Sulla radioattività globale dei recenti prodotti eruttivi vesuviani	» 91
S. SANTORELLI — Dai dati accelerometrici alla valutazione degli spostamenti del suolo	» 110
S. SAIELLO, A. MAROTTA, A. BURI — Sulle relazioni fra temperatura di transizione vetrosa e contenuto di alluminio, in vetri della serie melitica	» 121
L. E. KRIVOSHEIN, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI — Problemi di correttezza delle soluzioni esatte ed approssimative dei sistemi integro-differenziali non lineari a derivate parziali	» 127
K. V. LEUNG, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI — Numerical solutions of boundary value problems. I. Solution of an ordinary differential system, frequently occurring in the design of certain electrical networks	» 134
M. N. OGUZTORELI, D. MANGERON, K. V. LEUNG — Numerical solution of a diffusion process with a time-lag concentration dependent diffusion coefficient	» 143

R. GRASSINI — Applicazione della regola di trascrizione alla dinamica relativa di una particella di Relatività generale	pag. 152
I. T. GENOINO, T. DE LEO, M. A. MANGINELLI, S. DI MEO — The effect of thyroidectomy and « in vivo » administration of triiodotyronine on the leucine incorporation into the cell proteins	» 163
S. BIANCHI — Possibile significato neuroendocrino dei neuroni aminergici dei Lumbricidae. Considerazioni filogenetiche	» 177
T. DE LEO, A. BARLETTA, G. MARTINO — Effects of thyroidectomy and « in vivo » administration of triiodothyronine on DNA synthesis by isolated mitochondria	» 180
A. DI SANTE — Sui sistemi lineari di forme a jacobiana indeterminata	» 207
I. CANDELA — Spazio fibrato vettoriale delle derivazioni su una varietà differenziale	» 214
A. B. DE LUCIA D'ANDREA — Alcune osservazioni sugli ultrafiltri di un anello booleano	» 222
M. COVELLO, O. SCHETTINO, P. FORGIONE — Studio cromatografico della composizione della frazione insaponificabile dell'olio dei semi di « <i>Cardiospermum Halicacabum</i> »	» 227
A. ROMANO — Su un'assiomatica per l'elettrotermodinamica relativistica di un sistema continuo	» 235
A. ROMANO, M. PADULA — Su un'assiomatica per l'elettrotermodinamica relativistica di un sistema continua con spin	» 244
B. MARCHESE — Applicabilità del microscopio elettronico a scansione allo studio del grado di coesione della pasta di cemento	» 257
S. MATARASSO — Formule di maggiorazione relative ad una classe di equazioni a coefficienti costanti	» 269
C. COLELLA — Il ruolo del litio nelle sintesi idrotermali di endingtonite e cymrite	» 303
A. BURI, A. MAROTTA, S. SAIELLO — Dilatazione termica di vetri del sistema $\text{CaO} - \text{Al}_2\text{O}_3 - \text{SiO}_2$	» 314
B. DE LERMA — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1973	» 321
Relazione della Commissione giudicatrice del Concorso al premio accademico per le Scienze Matematiche bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973	» 325
Relazione della Commissione giudicatrice del Concorso al premio accademico per le Scienze Fisiche bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973	» 327
Verbale e relazione della Commissione giudicatrice per il Concorso ad un premio accademico per la Chimica, bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973	» 329
Relazione della Commissione giudicatrice del Concorso ad un premio accademico per le Scienze Biologiche bandito dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli per l'anno 1973	» 331



*Finito di stampare
nello Stab. Tip. G. Genovese
Pallonetto S. Chiara, 22 - Napoli
il 10 maggio 1974*

Direttore responsabile: Prof. MICHELE FUIANO

Autorizzazione del Tribunale di Napoli, B/2315 del 14 agosto 1954

