

SO C I E T À N A Z I O N A L E D I S C I E N Z E , L E T T E R E E A R T I I N N A P O L I
M E M O R I E D E L L ' A C C A D E M I A
D I S C I E N Z E F I S I C H E E M A T E M A T I C H E

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

**MATHEMATICAL PHYSICS MODELS
AND ENGINEERING SCIENCES**

LIGUORI EDITORE

Pubblicazione realizzata con il Contributo
– del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica dell'INdAM
– della Regione Campania
– del Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”
– dell’Università di Napoli “Federico II”
– del MiUR e del Ministero per i Beni Culturali

Questa opera è protetta dalla Legge sul diritto d'autore
(Legge n. 633/1941: http://www.giustizia.it/cassazione/leggi/633_41.html).
Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla citazione, alla riproduzione in qualsiasi
forma, all'uso delle illustrazioni, delle tabelle e del materiale software a corredo, alla trasmissione ra-
diofonica o televisiva, alla registrazione analogica o digitale, alla pubblicazione
e diffusione attraverso la rete Internet sono riservati, anche nel caso di utilizzo parziale.
La riproduzione di questa opera, anche se parziale o in copia digitale, è ammessa solo ed
esclusivamente nei limiti stabiliti dalla Legge ed è soggetta all'autorizzazione scritta dell'Editore.
La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.
Il regolamento per l'uso dei contenuti e dei servizi presenti sul sito della Casa Editrice Liguori
è disponibile al seguente indirizzo: http://www.liguori.it/politiche_contatti/default.asp?c=legal
L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali e marchi registrati,
anche se non specificamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano pro-
tetti dalle relative leggi o regolamenti.

Liguori Editore - I 80123 Napoli
<http://www.liguori.it/>

© 2008 by Liguori Editore, S.r.l.
Tutti i diritti sono riservati
Prima edizione italiana Marzo 2008
Stampato in Italia da OGL - Napoli

Mathematical physics models and engineering sciences

Napoli : Liguori, 2008
ISBN-13 978 - 88 - 207 - 4057 - 3

1. Modelli 2. Equazioni a derivate parziali I. Titolo

Ristampe:

16 15 14 13 12 11 10 09 08 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

La carta utilizzata per la stampa di questo volume è inalterabile, priva di acidi, a pH neutro,
conforme alle norme UNI EN Iso 9706 ∞, realizzata con materie prime fibrose vergini
provenienti da piantagioni rinnovabili e prodotti ausiliari assolutamente naturali,
non inquinanti e totalmente biodegradabili.

INDICE GENERALE

Introduzione al convegno di

Armando D'Anna.....	XVII
Guido Trombetti	XXI
Luigi Nicolais	XXV
Tommaso Ruggeri	XXIX
Massimo D'Apuzzo	XXXI
Edoardo Cosenza	XXXIII
Vittorio Coti Zelati	XXXV
Giorgio Franceschetti	XXXVII

Apertura del convegno

- 3 Nicola Augenti
Instabilità strutturale in presenza di elasticità non lineare
- 9 Ivana Bochicchio, Ettore Laserra, Massimo Pecoraro
Sul carico alla De Saint Venant della Sesta Distorsione Elementare di Volterra
- 17 Fabio Bozza, Raffaele Tuccillo
Soluzione numerica di problemi instazionari nelle macchine a fluido
- 53 Giuseppe Bruno, Emilio Esposito, Michele Mastroianni, Daniela Vellutino
Accessibility improvement of public e-procurement web services
- 73 Florinda Capone
Nonlinear stability for reaction-diffusion Lotka-Volterra predator-prey model equations with Holling Type 2 functional response
- 85 Francesco Caputo
Modelli Meccanici nella Realtà Virtuale
- 113 Gaetano Caricato
L'elaborazione matematica e la corrispondente attività del cervello

- 1 27 Giovanni Maria Carlomagno
Colours in a complex fluid flow
- 1 51 Stan Chiriță, Michele Ciarletta
Spatial behaviour of solutions for constrained cylinder in linear elasticity
- 1 63 Berardino D'Acunto, Francesco Parente, Gianfranco Urciuoli
Front-tracking Numerical Methods in Civil Engineering
- 1 75 Salvatore D'Agostino
La storia del Costruire e la Meccanica Razionale
- 1 91 Monica De Angelis, Alfonso Maio, Enrico Mazziotti
Existence and uniqueness results for a class of non linear models
- 2 03 Lelio Della Pietra
Meccanica applicata alle macchine e Meccanica razionale: una testimonianza
- 2 21 Luciano M. de Socio
Models for flows in porous media
- 2 31 Mauro Fabrizio, Barbara Lazzari
On linear viscoelastic fluids: free energy and asymptotic behavior
- 2 49 Paolo Fergola, Jianquan Li, Catello Tenneriello, Zhien Ma
An Allelopathic Competition Model with an External Toxicant
- 2 61 Giorgio Ferrarese, Maria Clara Fanigliulo
Sui Neutrini in Teoria di Maxwell Rainich
- 2 81 Gaetano Fiore
Some explicit travelling-wave solutions of a perturbed sine-Gordon equation
- 2 89 Mauro Francaviglia, Marcella Giulia Lorenzi, Pietro Pantano
Communicating Science Today
- 3 05 Sandro Graffi
On the Convergence of Many-Particles Dynamics towards the Hartree and Vlasov Evolutions
- 3 19 Giuliana Lauro
Uniform flow of an elastic material of Korteweg type
- 3 25 Sebastiano Lombardo, Giuseppe Mulone, Massimo Trovato
Nonlinear stability of an epidemic model of the spatial spread of rabies among foxes via the canonical reduction method
- 3 35 Giovanni Matarazzo
Evolution of Slow Rotating Viscous Liquid. Part 1. Model of the Process

- 343 Laura Buonanno, Giovanni Matarazzo, Massimo Pecoraro
Evolution of Slow Rotating Viscous Liquid. Part 2. Numerical Results
- 351 Angelo Morro
An identity for the material time derivative of gradients of any orders
- 359 Gioconda Moscariello, Carlo Sbordone
On Weak $W^{1,1}$ Convergence of Planar Homeomorphisms
- 365 Luciano Nunziante, Massimiliano Fraldi, Federico Carannante, Maria Cristina Pernice
Elastic and Post-elastic Mechanical Response of FGMC Applications to Emerging Technical Problems
- 381 Mario Pasquino, Antonia de Majo
La stabilità dell'equilibrio elastico in regime viscoso
- 391 Mario Pitteri
An armchair presentation of some ideas on which Aldo Bressan bases his axiomatization of Newtonian Mechanics
- 403 Amilcare Pozzi, Renato Tognaccini
Turbulent channel flow analysis by a statistical method
- 415 Mario Raffa
L'alleanza Ingegneria-Economia
- 425 Salvatore Rionero
On the Dynamics of the Brusselator System
- 439 Giovanni Romano, Marina Diaco, Raffaele Barretta
The general Law of Dynamics in nonlinear manifolds and Noether's theorem
- 455 Tommaso Ruggeri, Srboľjub Simić
Mixture of Gases with Multi-temperature
- 467 Piero Salatino
Problemi di contorno mobile nella reattoristica solido-gas non catalitica: applicazione alla combustione di particelle carboniose in letto fluido
- 477 Luigi Salvadori
On the bifurcation problem for periodic differential equations
- 485 Edoardo Scarpetta, Mezhlum A. Sumbatyan
Some Analytical Results for Acoustic Scattering through a Periodic Array of Elastic Membranes
- 509 Brian Straughan
Acceleration waves in porous media
- 525 Paolo Luchini
Phase-locked linear response and the optimal feedback control of near-wall turbulence



A.D. MCCCXIV

Gruppo Nazionale per
la Fisica Matematica



Meeting on
**MATHEMATICAL PHYSICS MODELS
AND ENGINEERING SCIENCES**

*In honour of the
Pasquale Renno 70th
birthday*

Naples, June 22-23, 2006

*Università di Napoli Federico II
Facoltà di Ingegneria - Piazzale Tecchio*

INVITED LECTURERS

Prof. Gaetano Caricato (Roma La Sapienza)

Prof. Francesco Caputo (Napoli Federico II)

Prof. Giovanni Carlomagno (Napoli Federico II)

Prof. Michele Ciarletta (Salerno)

Prof. Salvatore D'Agostino (Napoli)

Prof. Lelio Della Pietra (Napoli Federico II)

Prof. Luciano de Socio (Roma La Sapienza)

Prof. Mauro Fabrizio (Bologna)

Prof. Giorgio Ferrarese (Roma La Sapienza)

Prof. Mauro Francaviglia (Torino)

Prof. Sandro Graffi (Bologna)

Prof. Paolo Luchini (Salerno)

Prof. Giuseppe Mensitieri (Napoli)

Prof. Giuseppe Mulone (Catania)

Prof. Luciano Nunziante (Napoli Federico II)

Prof. Mario Pasquino (Napoli Federico II)

Prof. Mario Pitteri (Padova)

Prof. Amilcare Pozzi (Napoli Federico II)

Prof. Mario Raffa (Napoli Federico II)

Prof. Giovanni Romano (Napoli Federico II)

Prof. Salvatore Rionero (Napoli Federico II)

Prof. Tommaso Ruggeri (Bologna)

Prof. Piero Salatino (Napoli Federico II)

Prof. Carlo Sbordone (Napoli Federico II)

Prof. Brian Straughan (Durham, U. K.)

Prof. Raffaele Tuccillo (Napoli Federico II)

PROGRAM

Thursday, June 22 – morning session

08.30 - Registration

09.00 - Opening -

*Prof. Guido Trombetti (Magnifico Rettore dell'Università di Napoli Federico II – Presidente CRUI),
Prof. Luigi Nicolais (Ministro per le riforme e l'innovazione nella Pubblica Amministrazione),
Prof. Tommaso Ruggeri (Presidente del GNFM del CNR),
Prof. Massimo D'Apuzzo (Presidente del Polo delle Scienze e delle Tecnologie, Napoli Federico II),
Prof. Edoardo Cosenza (Preside della Facoltà di Ingegneria, Napoli Federico II),
Prof. Vittorio Coti Zelati (Direttore del Dip. Mat. e Appl. "R. Caccioppoli", Napoli Federico II),
Prof. Giorgio Franceschetti: un ricordo di Dario Graffi.*

10.20 - *Prof. Salvatore Rionero*

University of Napoli Federico II
Global stability for nonlinear reaction-diffusion systems with applications to spatial ecology and Turing effect

10.40 - *Prof. Francesco Caputo*

University of Napoli Federico II
Modelli Meccanici nella realtà virtuale

11.00 - *Prof. Luciano de Socio*

University of Roma La Sapienza
Models for flows in porous media

11.20 - *Prof. Mauro Fabrizio*

University of Bologna
Equazioni di Ginzburg-Landau e transizioni di fase

11.40 - Coffee break

12.00 - *Prof. Sandro Graffi*

University of Bologna
Confronto fra evoluzione classica ed evoluzione quantistica

12.20 - *Prof. Luciano Nunziante and Prof. Massimiliano Fraldi*

University of Napoli Federico II
Functionally graded composite cylinders. Application to optic fibre sensor

12.40 - *Prof. Mario Pitteri*

University of Padova
Una chiacchierata sull'assiomatizzazione della Meccanica newtoniana di Aldo Bressan

13.00 - *Prof. Mario Raffa*

University of Napoli Federico II
L'alleanza Ingegneria-Economia

13.20 - *Prof. Salvatore D'Agostino*
University of Napoli Federico II
La Meccanica razionale e la Storia del costruire

13.40 - Lunch

Thursday, June 22 – afternoon session

15.00 - *Prof. Tommaso Ruggeri*
University of Bologna
Sul sistema iperbolico di una miscela di fluidi di
Eulero con multi temperature

15.20 - *Prof. Raffaele Tuccillo, Prof. Fabio Bozza and*
Prof. Marcello Manna
University of Napoli Federico II
Soluzione Numerica di Problemi Instazionari nelle
Macchine a fluido

15.40 - *Prof. Giuseppe Mulone*
University of Catania
Stability in ODEs and PDEs systems via the Canonical
Reduction Method

16.00 - *Prof. Mario Pasquino*
University of Napoli Federico II
La stabilità dell'equilibrio elastico in regime viscoso

16.20 - Coffee break

16.40 - *Prof. Gaetano Caricato*
University of Roma La Sapienza
La elaborazione matematica e la corrispondente attività
del cervello

17.00 - *Prof. Giovanni Carlomagno*
University of Napoli Federico II
Colori e campi termofluidodinamici complessi

17.20 - *Prof. Michele Ciarletta and Prof. Stan Chirita*
Univ. of Salerno and Univ. of Iasi (Romania)
Sul comportamento delle soluzioni in elasticità

17.40 - *Prof. Lelio Della Pietra*
University of Napoli Federico II
Meccanica applicata alle macchine e Meccanica
razionale: una testimonianza

18.00 - *Prof. Giuseppe Mensitieri and*
Prof. Domenico Larobina
University of Napoli Federico II
L'analisi dell'accoppiamento tra trasporto di massa e
stato tensionale ad esso associato in sistemi polimerici

21.00- *Social banquet*

Friday, June 23 – morning session

- 09.00 - *Prof. Brian Straughan*
University of Durham U.K.
Onde di accelerazione in mezzi porosi
- 09.20 - *Prof. Paolo Luchini*
University of Salerno
Phase-locked linear response and the optimal feedback control of wall turbulence
- 09.40 - *Prof. Amilcare Pozzi and Prof. Renato Tognaccini*
University of Napoli Federico II
A statistical method for turbulence
- 10.00 - *Prof. Piero Salatino*
University of Napoli Federico II
Moving boundary problems in gas-solid non-catalytic reactions
- 10.20 - *Prof. Giorgio Ferrarese*
University of Roma La Sapienza
Sui neutrini in teoria di Maxwell-Rainich
- 10.40 - Coffee break
- 11.00 - *Prof. Mauro Francaviglia*
University of Torino
Prof. Marella Giulia Lorenzi
University of Calabria
Comunicare Scienza oggi
- 11.20 - *Prof. Giovanni Romano*
University of Napoli Federico II
Transizioni di fase elastica e integrale J in meccanica della frattura
- 11.40 - *Prof. Carlo Sbordone*
President of U.M.I.
University of Napoli Federico II
Recent results on G-convergence

SCIENTIFIC COMMITTEE

Prof. G. Trombetti (Rector of Univ. of Napoli Federico II)
Prof. G. Caricato (Univ. of Roma La Sapienza)
Prof. B. D'Acunto (Univ. of Napoli Federico II),
Prof. A. D'Anna (Chairman, Univ. of Napoli Federico II)
Prof. S. Rionero (Univ. of Napoli Federico II)
Prof. T. Ruggeri (Univ. of Bologna)

ORGANIZING COMMITTEE

Prof. A. D'Anna (Chairman, Univ. of Napoli Federico II)
Prof. B. D'Acunto (Univ. of Napoli Federico II)
Prof. M. De Angelis (Univ. of Napoli Federico II)
Prof. G. Fiore (Univ. of Napoli Federico II)
Prof. A. Maio (Univ. of Napoli Federico II)
Prof. P. Massarotti (Univ. of Napoli Federico II)
Prof. E. Mazziotti (Univ. of Napoli Federico II)

SPONSORSHIPS AND CONTRIBUTIONS

Università degli Studi di Napoli Federico II
Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica dell'Istituto Nazionale
di Alta Matematica (INdAM - G.N.F.M.)
Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società
Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli
Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
"Renato Caccioppoli"

CONTACTS

Prof. Armando D'Anna
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
"Renato Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli Federico II
Via Claudio 21, 80125 Napoli, Italy
Phone: +39 081 7683383; Fax: +39 081 2396945
E-mail: danna@unina.it

GENERAL INFORMATION

The scientific program of the meeting will
include only invited lecturers.
The meeting proceedings will be published on a special volume of
Memorie dell'Accademia di Scienze Fisiche Matematiche e
Naturali in Napoli.

INTRODUZIONE AL CONVEGNO

Prof. Armando D'Anna

Università degli Studi di Napoli Federico II
Chairman del Meeting.

Magnifico Rettore, Onorevole Ministro per le riforme e l'innovazione nella Pubblica Amministrazione, Presidente del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica del C.N.R., Presidente del Polo delle Scienze e delle Tecnologie, Preside della Facoltà di Ingegneria, Direttore del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", gentili Signore e Signori,

a nome dei Comitati scientifico ed organizzatore e mio personale sono lieto di porgere a Voi tutti il più cordiale benvenuto al Convegno Mathematical Physics Models and Engineering Sciences.

Desidero anzitutto manifestare la nostra gratitudine a tutti quanti che con la loro adesione ed il loro contributo hanno sostenuto la nostra iniziativa e ne hanno reso possibile la realizzazione.

Desidero anche ringraziare tutti gli Enti che hanno fornito un appoggio concreto alla organizzazione e al finanziamento del Convegno:

- L'Università degli Studi di Napoli Federico II ed in particolare il Rettore Professore Guido Trombetti;
- Il Gruppo Nazionale Fisica Matematica (GNFM) del CNR ed in particolare il Direttore Professore Tommaso Ruggeri;
- Il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" ed in particolare Direttore Professore Vittorio Coti Zelati;
- L'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli ed in particolare il Direttore Professore Carlo Sbordone.

Abbiamo inteso promuovere questo Convegno con un duplice intento.

Da un lato come un'occasione di un interessante incontro culturale tra tematiche, metodi, argomentazioni tipiche della Fisica Matematica e quelle proprie dell'Ingegneria.

Occasione che può costituire un momento in cui si possono ampliare gli orizzonti culturali e le ambizioni di ricerca di ogni ricercatore e studioso.

Dall'altro come un momento in cui si possa festeggiare il 70^{mo} compleanno del Professore Pasquale Renno innestando nel tradizionale festeggiamento un incontro dai sicuri ed ampi contenuti scientifici. Ciò anche per porre in rilievo il costante interesse che il Collega Renno ha avuto per l'attività di ricerca rivolta sia a questioni teoriche sia a problematiche tipicamente applicative.

Il Professore Renno detiene il record di essere stato nel 1965 il primo assistente incaricato nell'ambito degli insegnamenti del primo e secondo anno della Facoltà di Ingegneria, nominato presso la cattedra di Meccanica razionale di cui era titolare il prof. Stoppelli.

Tale circostanza si è ripetuta in occasione del concorso a cattedra nel 1979 quando fu il primo assistente del Biennio a vincere un concorso libero bandito dalla Facoltà.

Così tutta la sua attività didattica si è fin da subito indirizzata e poi interamente svolta nella Facoltà di Ingegneria. Ed anche quella scientifica ha avuto inizio in questa Facoltà con non facili temi e problematiche, propostigli dal prof. Luigi Napolitano nel periodo 1960-1965, quando era tecnico diplomato e contrattista C.N.R. e svolgeva studi e ricerche presso l'Istituto di Aerodinamica.

Le principali tematiche di ricerca che lo hanno visto impegnato (con oltre sessanta pubblicazioni) hanno riguardato equazioni a derivate parziali di ordine superiore al II, sia lineari sia non lineari; equazioni integro-differenziali e modelli con memoria; teoria delle distribuzioni e determinazione esplicita di soluzioni fondamentali di operatori iperbolici e parabolici; problemi di perturbazione singolare con teoremi di approssimazione rigorosa. Tutte trattazioni che ne hanno evidenziato le notevoli doti di matematico, di profondo conoscitore delle tecniche di studio e risoluzione, sempre attento alle problematiche delle Scienze applicate.

Senza ombra di dubbio si può affermare che in ogni occasione culturale il Professore Pasquale Renno ha sempre mostrato un particolare attaccamento alla nostra Facoltà, direi "l'orgoglio di appartenere ad essa".

Inoltre ricordo che è membro del Comitato di Redazione della prestigiosa rivista "Ricerche di Matematica", nonché Socio Nazionale Ordinario della Sezione di Scienze Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, e reviewer di Zentralblatt für Mathematik.

Mi dilungherò poco sulla sua ampia attività didattica che dura dal 1965 e che ha riguardato corsi di Meccanica razionale (presso la Federico II, la seconda Università di Napoli, l'Accademia Aeronautica, ed anche teleimpartiti presso il Consorzio Nettuno), corsi di Fisica Matematica e

sulle equazioni a derivate parziali in laurea specialistica. È anche autore di numerosi testi didattici.

Per noi tutti è stato ed è una guida scientifica sicura ed un punto di riferimento certo; ciò anche quando l'adempimento di tutte le attività didattiche e scientifiche era particolarmente oneroso. A riguardo ricordo i notevoli sacrifici sostenuti specialmente negli anni '70 durante i quali il cosiddetto "Biennio" di Ingegneria, per l'elevato numero di studenti e per la novità degli esami mensili, fu lasciato dai professori della Facoltà di Scienze e tutto l'onere didattico fu sostenuto dai soli docenti (assistenti e professori incaricati) della Facoltà di Ingegneria e tra questi il Professore Pasquale Renno fu certamente uno di quelli maggiormente coinvolti.

Da questa rapida sintesi si comprende che la nostra Facoltà è la sede che più si confà per festeggiare compiutamente il 70^{mo} compleanno del Professore Pasquale Renno.

Prof. Guido Trombetti

Rettore Magnifico dell'Università degli Studi di Napoli Federico II.

Non potevo mancare alla inaugurazione di questo Convegno perché a Pasquale mi legano rapporti di amicizia e di affetto enormi.

Essendo arrivato in ritardo a causa di un impegno inderogabile, ho avuto occasione di ascoltare la bella conferenza di Franco Caputo che mi riporta all'idea che bisogna sempre richiamare che in fondo la ricerca scientifica è come una catena fatta di tante maglie perché parte dai fondamenti, dalla ricerca propositiva, dalla ricerca indotta dalla pura curiosità e arriva nei supermercati. Chi pensasse di tagliare la catena e cercare scorciatoie commetterebbe un errore fatale. Questo concetto esprimevo poco fa all'Unione degli industriali e mi piace ripeterlo qui, perché queste espressioni di grande successo nel rapporto col mondo industriale testimoniano quanto sia indispensabile la ricerca di base. Tutto ciò occorre sempre di più ricordare all'opinione pubblica perché, nell'ambito di un'opinione pubblica frettolosa e di politici frettolosi, magari si immagina che sia possibile costruire solo l'ultima parte di tutta la grande filiera della conoscenza, dimenticando che il fondamento è la ricerca di base, la quale inevitabilmente deve rimanere in gran parte a carico dello Stato perché è una ricerca che non rende ed è ad alto rischio. Parlo di alto rischio perché la ricerca fondamentale è ricerca di qualità, almeno quando si intraprendono strade nuove senza sapere se poi il risultato verrà, occorre prevedere anche anni di lavoro senza risultati significativi immediati. Da questo punto di vista la Facoltà di Ingegneria, per la sua tradizione, per la sua struttura e per il suo spessore, è la sintesi ideale di queste varie anime che compongono il grande mondo della ricerca scientifica.

Che dire di Pasquale Renno? Egli è un elemento di grande fierezza e di grande orgoglio per l'Università. Ha formato intere generazioni di studenti dimostrando alle migliaia di allievi notevole attaccamento alla didattica ed efficacia oramai proverbiali. Inoltre egli è stato anche un ricercatore di grande valore e certamente non l'ho scoperto io oggi. Personalmente gli sono debitore di alcune cose, la prima delle quali è l'amicizia; è questa

un'espressione che non si può riferire a tutti, nè usare in maniera superficiale. Invece, nel rapporto tra me e Pasquale, mi sento di parlare di vera amicizia, che è nata quando io ero ragazzino. Poiché ero un ansioso, prima di sostenere un esame ricorrevo a Pasquale per farmelo sentire; ricordo in particolare l'esame di Analisi e l'esame di Meccanica razionale che poi sostenni con Salvatore Rionero e fu certamente l'esame più bello della mia carriera.

Il rapporto con Pasquale non si esaurisce nell'ambito della Facoltà d'Ingegneria, perché Pasquale ha anche operato all'interno della struttura trasversale del Dipartimento di Matematica ed Applicazioni Renato Caccioppoli del quale è stato anche Direttore. Un Direttore efficiente e tosto, pure un po' spilorcio; però questa spilorceria di Pasquale era la spilorceria della persona di grande spessore etico perché Pasquale è tanto generoso con le sue risorse personali, quanto rigoroso con il denaro pubblico. Da questo punto di vista è questa una caratteristica che mi piace ricordare; gli anni in cui Pasquale ha diretto e amministrato il Dipartimento lo ha fatto con impegno, con efficienza e, ripeto, con un'attenzione agli interessi della cosa pubblica che dovrebbe essere il vademecum di tutti.

Senza prenderla per le lunghe, voglio solo ricordare che la carriera di Pasquale è la carriera di un "cavallo di razza" perché Pasquale, come me, non proviene da una gioventù facilissima e ciò che ha costruito l'ha costruito con la sua forza di volontà e per le sue capacità. Pasquale era uno studente lavoratore e queste cose fa piacere ricordarle perché proiettano una luce che ci deve fare riflettere sul passato e su quante opportunità una democrazia, sia pure giudicata zoppicante per tanti aspetti, ha però concesso a quelli come noi che non avevamo le stimmate.

Questo lo dobbiamo ricordare. È giusto richiamare qui come questo nostro mondo, il mondo dell'Università, abbia aperto le porte e consentito una splendida carriera a tanti di noi che non avevano altro merito se non quello di aver colpito una personalità come Carlo Miranda, al quale sono dovute sia la mia carriera, sia quella di Pasquale, sia quella di tutti i matematici qui presenti, indipendentemente dal settore di appartenenza, quali Analisi, Meccanica, Geometria. Su tutti dominava Carlo Miranda, che, in un certo senso, era uno straordinario gigante sempre presente nella nostra vita accademica. Quando non si sapeva che strada prendere per risolvere un problema, ci si rivolgeva a Miranda che leggeva il quesito, rifletteva con la penna in bocca e scriveva le sue conclusioni dicendo: *"Picone avrebbe fatto così."*

La famiglia di origine di questo gigante che era Carlo Miranda era molto, molto rilevante dal punto di vista accademico perché il padre fu Rettore dell'università di Napoli, grande ginecologo, e maestro di Tesau-ro. Egli giudicava ed incoraggiava sulla base della sua personale valutazione della qualità, che non dico fosse la giustizia assoluta o la perfezione assoluta, ma rappresenta un bell'esempio di meritocrazia non di classe

che tutti riconoscono tra le qualità di Carlo Miranda.

Infine, mi piacere ribadire che oggi sono venuto qui non per dovere, ma per affetto e per piacere, perchè in tanti momenti, tante occasioni e tante evenienze ho sentito la mia storia e quella di Pasquale come due storie parallele. Auguri e buon lavoro.

Prof. Luigi Nicolais

Ministro per le riforme e l'innovazione nella Pubblica Amministrazione.

È un onore stare qui oggi a ricordare tutti i lavori e tutte le attività che Pasquale ha sviluppato in questi anni. Devo dire che Pasquale è un vero esempio di precursore perché ha dimostrato ciò che oggi chiamiamo "interazione di saperi positivi" e cioè la capacità di interagire con altri competenti collegando così le conoscenze di base rigorose della Matematica con le discipline più specificamente empiriche. Questo è stato il grande merito che egli ha avuto per la nostra Facoltà e, principalmente, per i nostri giovani che sempre di più hanno imparato a coniugare attività sperimentali con attività teoriche e di base. Anche con il mio gruppo di ricerca Pasquale ha interagito varie volte, dando molti suggerimenti e indicando quella metodologia di lavoro di cui a volte, presi dalle attività più sperimentali, ci si dimentica. Questa è la parte più bella del lavoro svolto da Pasquale; ci siamo divertiti molto perché abbiamo affrontato problemi complessi, sempre con la curiosità del giovane ricercatore e ciò, secondo me, è cruciale per la nostra carriera.

Devo dire che sulla ricerca c'è grande attenzione da parte di tutti; se ne è parlato molto e se ne parla anche a livello del Governo. La ricerca e l'innovazione rappresentano questioni veramente cruciali, soprattutto quando la situazione economica è abbastanza limitata. È necessario lavorare molto e fare di tutto per dare segnali al Paese. In particolare, quale Ministro per le riforme e l'innovazione nella Pubblica Amministrazione, sto portando avanti una iniziativa per gli Enti pubblici di ricerca, che consiste nel trasformarli da Enti a pianta organica in Enti a budget. Ciò consentirebbe immediate possibilità di concorso per tutti quei giovani che già lavorano nella ricerca ma non hanno potuto partecipare ad alcun concorso, perché i concorsi sono bloccati dalle piante organiche rigidamente sottoposte alle regole della funzione pubblica. Questa iniziativa è stata già inserita nella Finanziaria e verrà presentata il prossimo 7 Luglio. Sono contento di anticipare tale notizia per la prima volta proprio nella mia Università e nella mia Facoltà. È questo un momento importante per i gio-

vani, perché si avverte una chiara volontà di apertura e la disponibilità ad investire sui giovani per vedere questo nostro paese sempre più impegnato nella ricerca e nella realizzazione dei suoi risultati. Tutto ciò costituisce un altro argomento di cui abbiamo parlato varie volte con Pasquale.

La ricerca, anche se si chiama applicata, deve avere una base di rigosità ed internazionalità; non esiste la ricerca campana o la ricerca pugliese, ma solo ricerca o cattiva ricerca, della quale nessuno ha interesse a parlarne. Abbiamo bisogno di fare buona ricerca e di saper utilizzare, oggi più che in passato, i risultati della ricerca prodotta. Questo è il punto sul quale dobbiamo porre più attenzione, non si deve cambiare il modo di lavorare ma cercare di capire meglio come i risultati acquisiti possano essere utilizzati sia nel mondo del sociale, che nel mondo amministrativo, che nel mondo dell'impresa.

È un momento in cui tutti sono impegnati. Il Governo ha dato un segnale forte nel creare una Commissione interministeriale tra funzione pubblica, ricerca, Università e attività produttive; proprio perché si vuole dare un segno di coordinamento dei progetti di ricerca, al fine di individuare obiettivi condivisi per investire su qualcosa che possa rappresentare un momento di crescita per il Paese. In questo programma stiamo lavorando tutti, con la convinzione di raggiungere i risultati perché i nostri docenti sono motivati e molto capaci. I ricercatori italiani producono scientificamente quanto i ricercatori francesi, pur essendo i francesi circa il doppio dei nostri. I docenti italiani dovrebbero porre più attenzione alla utilizzabilità dei risultati.

La ricerca di oggi non può essere incentrata su discipline singole, né si può avere il grande scienziato che sviluppa un grande prodotto di *breakthrough* e di conoscenza. Abbiamo bisogno di lavorare insieme, abbiamo bisogno di masse critiche e abbiamo bisogno di riuscire a parlare tra noi. Perciò i Convegni come questo di oggi servono. Molti pensano che i Convegni non siano più attuali perché oggi c'è Internet, il sistema virtuale che rende possibile l'accesso a qualunque fonte di informazione. Non è così. I convegni sono sempre importanti; la componente umana è essenziale quanto la componente scientifica perché implica la possibilità di conoscersi, di scambiare le idee e di avere i rapporti sociali che permettono di stare vicini. Il modo di interagire con le conoscenze e quello che determina poi il *breakthrough* ed i veri salti di qualità in qualunque settore della conoscenza.

Tutto ciò Pasquale Renno lo aveva capito già molti anni fa, quando parlava di ricerca con Gianni Astarita, con Leopoldo Massimilla, con Luigi Napoletano e con altri grandi ricercatori che hanno reso famosa nel mondo questa nostra Facoltà. Dopo di loro c'è stato un grande sforzo degli allievi per mantenere grande la reputazione conquistata.

In base ad alcuni dati di cui il Preside è giustamente orgoglioso, ancora oggi la nostra Facoltà è tra le migliori in Italia e nel mondo. Questo orgoglio deve costituire un pungolo per migliorare sempre più la ricerca di questa

Facoltà, insieme all'insegnamento ai nostri giovani. Un buon professore universitario non si deve limitare ad insegnare ciò che è scritto nei libri, ma insegna ciò che non è ancora scritto nei libri e gli deriva da un'attività di ricerca avanzata. In tal modo egli potrà trasmettere ai giovani quella conoscenza da utilizzare nella vita professionale e nella vita da civile.

Vive congratulazioni al nostro grande Professore Pasquale Renno per il settantesimo compleanno, insieme alla sua famiglia e ai suoi figlioli uno dei quali, Antonello, ha lavorato anche con me. I migliori auguri per poter collaborare ancora insieme.

.....

Prof. Tommaso Ruggeri

Direttore del Gruppo Nazionale della Fisica Matematica
Istituto Nazionale di Alta Matematica

Esprimo a Voi tutti il mio buongiorno più caloroso.

Sono qui come rappresentante del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica, ma soprattutto come vecchio amico fraterno di Pasquale Renno. Quale Direttore del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica porto il benvenuto a Voi tutti, anche a nome del Consiglio Scientifico che qui è largamente rappresentato.

Pasquale Renno è stato sempre molto attivo nell'ambito del G.N.F.M perché per molti anni è stato membro del Consiglio Scientifico e ha sempre partecipato sia alle nostre attività di ricerca che a quelle di tipo organizzativo. Dal punto di vista personale conosco Pasquale da oltre un trentennio; abbiamo vissuto le stesse ansie e la medesima gioia di vincere lo stesso concorso a cattedra nel 1980 e, da quel momento in poi, siamo stati sempre nello stesso gruppo di ricerca, che a quei tempi era coordinato dal nostro comune amico Salvatore Rionero. Quindi abbiamo sempre avuto modo di frequentare gli stessi Convegni. Concordo con il Ministro che i Convegni rimangono essenziali sia per l'attività di ricerca, sia per i rapporti umani che ne derivano.

In questi lunghi anni trascorsi insieme ho apprezzato sempre Pasquale come un fine fisico-matematico che ha sempre trattato i problemi descritti da Armando con il rigore tipico della Scuola napoletana, ben nota per precisione e rigore. D'altra parte basta ricordare i contributi di Stoppelli nell'ambito della Meccanica dei continui.

Un altro grande merito di Pasquale è stato quello di aver coagulato un gruppo di ricerca. Una delle funzioni del professore universitario è appunto quella di creare una Scuola. E Pasquale ci è riuscito, come dimostra questo Convegno che è anche la prova del grande affetto e grande amicizia che i suoi Allievi gli dimostrano; è il merito più evidente di quello che ha fatto Pasquale Renno.

Un ulteriore aspetto quasi ovvio è la personalità di Pasquale, con la

XXX *T. Ruggeri*

simpatia tipica di noi meridionali che riusciamo a dare il giusto valore ad ogni cosa. Esprimo gli auguri che egli continui ad occuparsi di Fisica Matematica, partecipando ai Convegni e alle attività dei Gruppi nazionali di ricerca.

Prof. Massimo D'Apuzzo

Presidente del Polo delle Scienze e delle Tecnologie.
Università degli Studi di Napoli Federico II

È una bella festa! In siffatta organizzazione apprezzo moltissimo lo spirito di comunità che questo tipo di manifestazione rafforza in maniera notevole. Il collegamento tra il momento di passaggio della vita di ciascuno di noi con la presenza della Facoltà e l'evoluzione scientifica attraverso una riunione di ricerca, costituisce l'optimum di una miscela di elementi che rappresenta il modo migliore per festeggiare il professore Pasquale Renno.

Mi scuso se esprimo delle considerazioni di carattere personale, ma mi fa piacere ricordare il primo incontro che ebbi con il professore Renno nel luglio del 1967, in occasione del mio esame di Meccanica Razionale nelle aule di via Mezzocannone. In quel periodo tutti gli studenti di Ingegneria, qualunque fosse il Corso di laurea, sostenevano l'esame di Meccanica Razionale con una Commissione unica costituita dal professore Stoppelli e dai suoi assistenti. Ebbi la fortuna di capitare con il professore Renno e quando parlo di fortuna intendo in senso classico, cioè la buona sorte. Infatti il professore aveva l'abitudine di mettere ogni allievo a proprio agio, trattandolo con cordialità ed aiutandolo a controllare l'emotività tipica degli esami. Ebbi 28 e non 30 ma dopo quaranta anni ricordo ancora la felicità per essere riuscito a concludere tutti gli esami del Biennio entro luglio del secondo anno.

Successivamente non ho avuto molte occasioni di incontro con il professore Renno, ma ho potuto conoscerlo meglio attraverso l'entusiasmo degli studenti e gli apprezzamenti dei Colleghi che mi raccontavano le sue attività di ricerca sempre rivolte al mondo delle applicazioni ingegneristiche. Anche se è un matematico, ritengo che egli sia molto ingegnere, perchè vive scientificamente i problemi della ricerca di Ingegneria, essendo ben convinto della stretta interazione che deve esistere tra la Matematica e il mondo delle applicazioni.

Tutto ciò rientra nella logica dell'esistenza e delle funzioni del Polo,

che rappresenta appunto una struttura idonea a realizzare sinergia tra le varie attività di ricerca provenienti dalle diverse realtà. Per quello che ha fatto, il professore Renno, è un esempio vivente di questa logica.

Concludo augurando a Pasquale di continuare queste sue attività come ha fatto fino ad oggi, in modo da dare il suo contributo allo sviluppo e alla crescita di questa fantastica Facoltà.

Prof. Edoardo Cosenza

Presidente della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi
di Napoli Federico II

Cosa posso aggiungere? Fare il Preside di una Facoltà che ha cinquecento Docenti, diciassettemila studenti e milleduecento insegnamenti è un'esperienza molto impegnativa, soprattutto in momenti difficili come questo che stiamo vivendo. Mi auguro che il Governo e il Ministro possano dare un aiuto alle Università che oggi sono abbastanza in crisi per le leggi approvate alcuni mesi fa.

Però, in compenso, ci sono anche giornate molto belle; ne abbiamo vissuta una qualche giorno fa, con la festa bellissima che si è tenuta in onore di Vittorio Betta, che oggi è qui tra noi. E' sempre bello vedere i vari gruppi che si sforzano di organizzare qualcosa di nuovo e di diverso. Oggi abbiamo un altro tipo di compleanno, con un Convegno organizzato in maniera intelligentissima perché si rivede la centralità assoluta della Fisica Matematica, con i Colleghi di tutti i settori dell'Ingegneria e della Matematica che parleranno in questi due giorni di argomenti affascinanti. Peraltro i Relatori sono stati scelti in maniera molto oculata perché sono anche grandi divulgatori. Ricordo quando noi del settore di Tecnica delle costruzioni festeggiammo, a sorpresa, Elio Giangreco.

Molti mesi fa, il gruppo di Fisica Matematica venne a parlarmi di questa iniziativa che ha richiesto una fase organizzativa lunghissima. Tutto ciò per festeggiare il compleanno di Pasquale Renno con una torta un po' particolare dedicata ad una persona iperattiva; invece delle candeline ci sarà una serie di conferenze qualificate.

Con Pasquale ci siamo consultati anche recentemente e, tra l'altro, sono certo che ci darà una mano per risolvere una serie di questioni.

Perché questa Facoltà, che nel 2011 compierà duecento anni, richiede impegno e collaborazioni continue riuscendo sempre a sfornare ricercatori, progettisti, manager e anche grandi amministratori. Mi piace ricordare, con orgoglio, che provengono dalla nostra Facoltà un Assessore Regionale ed un Ministro che sono tra i più apprezzati.

Come discendente di una Scuola di Ingegneria strutturale conosco

benissimo l'importanza che ha avuto il percorso costituito da Meccanica razionale, Scienza delle costruzioni e Tecnica delle costruzioni, creando così una Scuola antichissima. In molti di questi settori oggi in Italia si parla napoletano. Perciò apprezzo ancora di più questo evento.

Rivolgo i miei migliori auguri a Pasquale e un sentito grazie agli organizzatori e a tutti gli ospiti per essere qui tra noi.

Prof. Vittorio Coti Zelati

Direttore del Dipartimento di Matematica e Applicazioni.
Università degli Studi di Napoli Federico II

Sono molto contento e onorato di portare i saluti dell'intero Dipartimento e miei personali a Pasquale Renno per tutto quello che ha fatto in questi anni e per tutto ciò che – ne siamo sicuri - continuerà a fare ancora a lungo. Abbiamo ascoltato interventi in cui sono state illustrate le sue attività all'interno della Facoltà di Ingegneria e la sua attività di ricerca. Sono anche state ricordate le sue notevoli capacità didattiche, testimoniate dai numerosi studenti che ne hanno apprezzato il rigore e l'amore per la disciplina che insegna.

C'è un altro aspetto che non è stato toccato, e cioè il fatto che Pasquale ha collaborato attivamente anche alla gestione amministrativa del Dipartimento di Matematica e Applicazione, sia come Direttore, nel triennio 1992-95, che, per quasi un decennio, come Coordinatore della Sezione di Ingegneria del Dipartimento stesso.

È sicuramente una persona come ne vorremmo molte perché, oltre a svolgere ottima didattica e ottima ricerca, si occupa attivamente dell'Amministrazione e del buon funzionamento della struttura. Vorrei anche segnalare che Pasquale costituisce il punto di riferimento di un attivo gruppo di ricerca presso la Sezione di Ingegneria che negli anni si è andato rafforzando.

Da parte di tutto il Dipartimento l'augurio ma anche la certezza che Pasquale continui in queste sue molteplici attività.

Tante grazie e tanti auguri di buon compleanno.

Prof. Giorgio Franceschetti

Professore ordinario dell'Università degli Studi di Napoli Federico II
Adjunct Professor at UCLA

Un ricordo di Dario Graffi

Sono qui per dire qualcosa sulla personalità e l'importanza che la presenza del Professore Dario Graffi ha avuto qui nella nostra Facoltà. Prima di espletare questo compito che mi lusinga desidero esprimere, con un applauso, la mia grande totale amicizia e grande ammirazione per il professore Pasquale Renno.

Adesso dirò, assolutamente a braccio, qualche parola sul Professore Dario Graffi. Dobbiamo andare indietro negli anni sessanta quando, nel 1959, mi sono laureato in Ingegneria Elettrotecnica. Però, come tanti giovani dell'epoca, ero affascinato dalla misteriosa "Elettronica" dove per Elettronica intendevamo gli apparati che si vedevano, come le radio e gli enormi valvoloni; quindi avevamo una visione molto specifica e direi molto hardware dell'Elettronica. Con idee poche, ma confuse, vidi un bando per seguire un Corso in Elettronica tenuto alla Fondazione Bordoni all'Istituto Superiore delle Poste, e con una borsa di cinquantamila lire al mese, mi sono iscritto al Corso e sono andato a Roma. Un giorno, durante la frequenza delle lezioni, si apre la porta ed entra un signore mingherlino con occhi azzurri vivissimi che inizia dicendo: "*sono il professore Dario Graffi*" e ciò mi conquistò subito poiché gli altri professori entravano e incominciavano a parlare dando per scontato che loro fossero conosciuti in tutto il mondo.

Durante le Sue lezioni mi apparve subito chiaro che l'Elettronica non erano gli apparati ma i modelli e la filosofia che sono dietro gli apparati; quei modelli che poi hanno portato alla grande rivoluzione che ha cambiato la nostra vita. Le ultime infomobilità, internet, il villaggio globale, sono cose che non avremmo mai pensato se fossimo rimasti a guardare gli apparati.

Seguii il Corso per un anno con enorme ammirazione e fui introdotto

così alle equazioni di Maxwell dove sono cascato in amore, anche attratto dal Professore Graffi che mi ha dato la prima spinta.

Vi mostro questo libretto, stampato semplicemente in ciclostile nell'anno 1960 e scritto dal Professore Graffi, dal titolo "*Complementi alle lezioni di Onde Elettromagnetiche*". Questo libro che conservo con grande cura è oggi considerato un gioiello e si riferisce ad un ciclo di lezioni organizzato su argomenti di innovazione, come ha detto il Ministro Nicolais.

Erano anni in cui l'Elettromagnetismo dall'ambito dei Fisici si spostava nell'ambito dell'Ingegneria, e il prof. Stratton scriveva il suo celeberrimo libro sulle "Onde Elettromagnetiche" alla MIT, ma lo spirito in cui era stato scritto questo libro, noto in tutto il mondo, si ritrova appieno nel testo del professore Graffi.

Viene esposta una nuova visione dell'Elettromagnetismo, sempre rigorosa e brillante, ma calata in un ambiente diverso che non è più quello dei fisici, interessati alla ricerca di nuove particelle mediante bombardamento degli elettroni con forze enormi. Mentre i sistemi per sparare gli elettroni li costruivano gli ingegneri, i fisici prendevano i premi Nobel.

Ho continuato a vedere il Professore Graffi a Napoli, dove ha svolto un'attività di tutto rilievo, assolutamente significativa per lo sviluppo della ricerca del gruppo del professore Renno.

Ho avuto anche l'onore di essere stato invitato a tenere una conferenza nell'ambito di un Convegno organizzato dall'Accademia dei Lincei e dedicato al ricordo del professore Graffi. In tale occasione ho avuto il piacere di conoscere il figlio e presentare un mio piccolo lavoro sulle ricerche più recenti.

La mia ammirazione non si è spenta alla fine della frequentazione come allievo, ma è continuata negli anni.

Mi piace infine ricordare che ho avuto l'onore di conoscere e frequentare il professore Schwinger che insieme con il professore Feinman ha vinto un premio Nobel nell'ambito della Elettrodinamica Quantistica. Lo incontrai alla UCLA, in California, dove veniva dall'Università di Harvard. In occasione di un party di Facoltà, dove insegnava "Campi elettromagnetici", gli chiesi come mai un luminare nel campo della Elettrodinamica Quantistica insegnasse argomenti sulle onde elettromagnetiche. Mi rispose: "*chi conosce le onde elettromagnetiche può affrontare qualunque problema*". Sono convinto che il professore Graffi sarebbe totalmente d'accordo e farebbe Sua questa affermazione.

APERTURA DEL CONVEGNO

.....

Instabilità strutturale in presenza di elasticità non lineare

di Nicola Augenti*

Sommario

I fenomeni di instabilità rientrano tra le cause più frequenti di dissesti riguardanti le strutture snelle in acciaio, in conglomerato cementizio armato e in legno, costituite da elementi duttili. La circostanza che il dissesto rimanga contenuto entro limiti accettabili o che evolva verso il completo collasso della costruzione, è legato al comportamento post-critico del sistema. La presente nota affronta il problema nell'ambito di una teoria di ordine superiore e nelle ipotesi di comportamento elastico non lineare, gli unici che consentano di ottenere indicazioni attendibili in campo post-critico. Si dimostra come, a fronte di una presunta "indifferenza" dell'equilibrio denunciato da teorie di ordine inferiore e rispetto ai comportamenti teorici evidenziati da una teoria del second'ordine nelle ipotesi di elasticità lineare, il reale comportamento della struttura, oltre la soglia del carico critico, possa essere evidenziato solamente in campo elastico non lineare.

Il problema dell'instabilità strutturale

Il verificarsi di dissesti nelle strutture costituite da elementi snelli e duttili, è molto spesso legato ai fenomeni di instabilità. Particolarmente insidiosi, come è noto, sono quelli di "prima specie" che coinvolgono improvvisamente componenti di spostamento non impegnate nei rami principali, avviando la struttura verso rami di equilibrio secondario.

Usualmente, nell'ambito strutturale, l'interesse del progettista è rivolto solo all'ambito della stabilità ovvero alla determinazione del *carico critico*, per i fenomeni di instabilità improvvisa, o a quella del *carico limite*, per i fenomeni di instabilità progressiva, considerati come

* Università degli Studi di Napoli Federico II, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Claudio 21, 80125 Napoli, augenti@unina.it, tel. 081-7683102, fax. 081-7683491.

frontiere dalle quali tenersi convenientemente lontani attraverso l'impiego di opportuni coefficienti di sicurezza.

L'interesse dell'ingegnere forense che indaga sulla genesi dei crolli, o dell'ingegnere che si occupa di patologie strutturali è rivolto, invece, essenzialmente alla tendenza post-critica, l'unica che possa fornire indicazioni attendibili sulla sorte della struttura.

Il destino della costruzione "colpita da instabilità" è scritto nel suo comportamento post-critico: il dissesto (malattia) sarà curabile solamente se il ramo post-critico è stabile, mentre evolverà verso il crollo (morte) nel caso di comportamento post-critico instabile.

Per un esame attendibile di tale tendenza risulta necessario, perlomeno, rimuovere l'ipotesi di comportamento elastico indefinito e introdurre la non linearità elastica. Ciò equivale ad assumere, per la struttura, una curva caratteristica forze-spostamenti che, dopo un primo tratto lineare, evolva con un ramo curvilineo a rigidità crescente (comportamento *hardening*) oppure a rigidità decrescente (comportamento *softening*).

Il metodo di indagine energetico

Come già detto diffusamente in altra sede¹, lo strumento di analisi più agevole e affidabile per l'approfondimento dei fenomeni di instabilità è costituito dal metodo energetico.

Indicando con L_e il lavoro delle forze esterne applicate alla struttura e con L_i il lavoro interno compiuto dagli sforzi che nascono negli organi elastici, è possibile esprimere il primo attraverso l'energia U , potenziale dei carichi, e il secondo mediante l'energia W , elastica di deformazione. Il lavoro totale $L = L_i - L_e$ che si accompagna ad ogni variazione di configurazione della struttura può, allora, considerarsi anch'esso un potenziale, energia di potenziale totale, esprimibile nella forma: $T = W + U$.

Nell'ipotesi di forze conservative e di elasticità perfetta, le variazioni di T forniscono indicazioni sulla stabilità o sull'instabilità delle configurazioni di equilibrio della struttura. L'indagine, ovviamente, va indirizzata alle variazioni prima e seconda di T , sia per definire le condizioni di equilibrio che quelle di stabilità.

Come noto, l'ingegnere opera nel discreto e tale tendenza è stata vieppiù accentuata nel volgere degli ultimi anni con l'evolversi dei metodi di discretizzazione *a priori*.

Una modellazione della struttura che contemperi un comportamento sufficientemente aderente alla realtà e la possibilità di effettuare analisi attendibili, è quella che rappresenta le strutture tramite sistemi olonomi, costituiti da elementi rigidi collegati da vincoli che impediscono le labilità, ovvero l'evoluzione spontanea di cinematismi.

¹ Raithel A., Augenti N., Nicolosi G., *Equilibrio e stabilità delle strutture elastiche*, ESAC, Roma 1989.

La dipendenza della generica reazione $R(s)$ del vincolo elastico dallo spostamento relativo s (traslazione o rotazione) che lo genera, nell'ipotesi di elasticità lineare indefinita, si può esprimere nella forma $R = k \cdot s$, avendo indicato con k la rigidità elastica.

L'energia elastica di deformazione accumulata dai vincoli assume, pertanto, l'espressione:

$$W = \int R \cdot ds = \int k \cdot s \cdot ds = \frac{1}{2} k \cdot s^2$$

Esplicitando la dipendenza dello spostamento $s = s^{(1)} + s^{(2)} + \dots$ dai termini di ordine differente nelle coordinate lagrangiane che definiscono il sistema olonomo, in una teoria di ordine generico, la W è esprimibile simbolicamente nella forma:

$$W = \frac{1}{2} k \cdot (s^{(1)} + s^{(2)} + \dots)^2$$

Limitandosi a una teoria del second'ordine si può scrivere:

$$W = \frac{1}{2} k \cdot (s^{(1)} + s^{(2)})^2 = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)}$$

avendo posto, per i termini di diverso ordine nelle coordinate lagrangiane:

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} k \cdot s^{(1)2} \quad (\text{second'ordine})$$

$$W^{(3)} = k \cdot s^{(1)} \cdot s^{(2)} \quad (\text{terz'ordine})$$

$$W^{(4)} = \frac{1}{2} k \cdot s^{(2)2} \quad (\text{quart'ordine})$$

Indicando con F le azioni esterne e con $f = f^{(1)} + f^{(2)} + \dots$ gli spostamenti assoluti duali, esprimibili anch'essi in termini di diverso ordine nelle coordinate lagrangiane, l'energia potenziale dei carichi esterni, limitatamente al second'ordine, si può scrivere nella forma:

$$U = F \cdot (f^{(1)} + f^{(2)})$$

Poiché per l'equilibrio strutturale l'energia potenziale totale deve assumere un valore estremo, ovvero la sua variazione deve risultare nulla (ciò che in un sistema olonomo equivale a porre $\delta T = d^{(1)}T = 0$), l'energia accumulata come energia di deformazione deve essere pari a quella fornita dai carichi esterni. Dall'eguaglianza $W=U$ deriva la possibilità di definire la generica equazione di equilibrio nella forma:

$$F = \frac{W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)}}{f^{(1)} + f^{(2)}}$$

che individua il ramo naturale di equilibrio elastico.

Influenza dell'elasticità non lineare

Nel caso in cui il vincolo elastico non si ipotizzi più di tipo elastico lineare, ma non lineare, il suo comportamento si può esprimere come somma di due termini, aggiungendo al termine lineare $k_1 \cdot s$ un termine non lineare $k_n \cdot |s^n| \cdot \text{sign}(s)$, di grado n : ciò equivale a considerare la presenza di due organi elastici in parallelo, uno di tipo lineare e l'altro non lineare.

In definitiva il legame $R(s)$, in presenza di comportamento elastico non lineare, si può esprimere nella forma:

$$R = k_1 \cdot s + k_n \cdot |s^n| \cdot \text{sign}(s)$$

valida, ovviamente, nel solo campo in cui la rigidezza risulti positiva, ovvero per $dR/ds > 0$.

A seconda che k_n assuma un valore positivo o negativo, sarà possibile simulare comportamenti di tipo *hardening* o di tipo *softening*: è evidente come sia quest'ultima ipotesi a simulare, in genere, il comportamento reale.

Il caso più semplice di elasticità non lineare indefinita può essere espresso nella forma:

$$R = k_1 \cdot s + k_2 \cdot |s^2| \cdot \text{sign}(s)$$

Va osservato che il secondo addendo del secondo termine è senz'altro più corretto dell'intuitivo prodotto $k_2 \cdot s^2$ da più Autori adottato per esprimere il termine non lineare: quest'ultimo, infatti, fornisce un comportamento irrealistico per valori negativi degli spostamenti s , facendo corrispondere ad essi un accumulato energetico di segno opposto, ovvero dando luogo ad un sistema non più conservativo. In altri termini a spostamenti positivi corrisponderebbe un accumulatore di energia, mentre per spostamenti negativi si genererebbe un motore.

L'energia elastica non lineare di deformazione, con le posizioni innanzi assunte, è esprimibile mediante il termine:

$$W = \int R \cdot ds = \frac{1}{2} k_1 \cdot s^2 + \frac{1}{3} k_2 \cdot |s|^3$$

Volendo evidenziare simbolicamente la dipendenza di tale energia dai termini di diverso ordine nelle coordinate lagrangiane, si può osservare che il termine legato all'elasticità non lineare influisce in modo poco significativo sul ramo principale di equilibrio, mentre condiziona in maniera determinante l'andamento dei rami secondari, allorché si operi nell'ambito di una teoria di ordine superiore al primo.

In presenza di elasticità lineare indefinita, il ramo secondario è condizionato dagli infinitesimi di ordine uguale o superiore al quarto. L'introduzione del termine connesso al comportamento elastico non lineare comporta, invece, la presenza di infinitesimi di grado inferiore al quarto che determinano il comportamento post-critico, per lo meno nella fase iniziale.

In definitiva, per valori del grado n compresi tra 1 e 2 ($1 < n < 2$) il termine dell'energia di deformazione di ordine superiore al secondo, nella maggior parte dei casi reali che sono caratterizzati da legami elastici

di tipo *softening* ($k_n < 0$), condiziona in maniera determinante il comportamento post-critico nel modo seguente:

1) Nel caso di comportamento post-critico stabile, fin quando l'entità degli spostamenti è tale da far prevalere i termini energetici di ordine inferiore al quarto, il carico sopportabile dalla struttura si riduce sino ad un valore limite oltre il quale il comportamento torna stabile, per il prevalere dei termini di ordine uguale o superiore al quarto (li unici presenti nelle ipotesi di elasticità lineare indefinita). Trasposto nell'ambito strutturale, ciò significa che la costruzione manifesta dissesti nel campo degli spostamenti piccoli, ma non piccolissimi (ovvero tali da far confondere la deformazione deformata con quella indeformata); tali dissesti rimangono però contenuti e ciò per la naturale tendenza della struttura alla stabilità in presenza di grandi spostamenti. Il caso è rappresentato schematicamente nella Figura 1.

2) L'ipotesi di comportamento post-critico instabile evidenzia, con l'introduzione del termine di elasticità non lineare, fenomeni di instabilità vièppiù accentuati, come bene si evince dalla Figura 2. In tale caso i fenomeni di dissesto generati in corrispondenza del carico critico evolvono rapidamente e conducono la struttura verso il collasso.

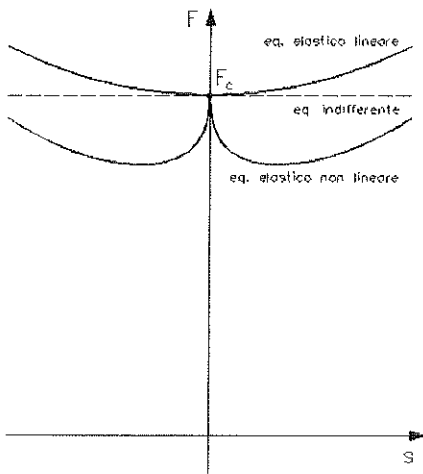


Figura 1

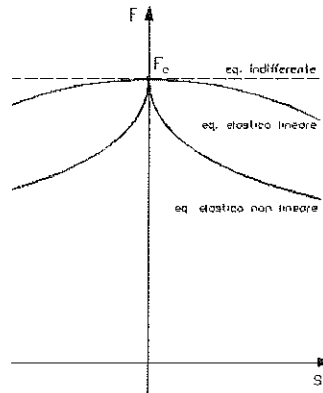


Figura 2

Conclusioni

In definitiva, il tenere conto del comportamento elastico non lineare evidenzia il vero comportamento post-critico delle strutture che si ammalano di instabilità, ovvero le cui azioni perturbatrici determinano l'attingimento del carico critico.

Le costruzioni a comportamento post-critico stabile subiranno dissesti limitatamente a un campo contenuto di spostamenti, ma senza conseguenze catastrofiche.

Le costruzioni a comportamento post-critico instabile esibiranno, invece, capacità portante sempre più ridotta al crescere degli spostamenti e, in un'inarrestabile corsa alla ricerca di nuove configurazioni equilibrate, perverranno al crollo.

Dedica

Il Convegno di studi organizzato in onore di Pasquale Renno mi ha fornito l'occasione per il ritorno a due periodi importanti della mia crescita culturale in ambito accademico.

Il ricordo dei primi passi mossi in Ateneo nel 1970, quale *Assistente Incaricato di Meccanica Razionale*, dove fui accolto proprio da Pasquale Renno e Armando D'Anna, assistenti anziani della Materia: furono proprio loro che, guidandomi in un mondo tanto complesso quanto affascinante per un ingegnere, mi misero in condizione da superare un Concorso di *Assistente Ordinario di Meccanica Razionale*.

La seconda occasione importante è stata quella di ritrovare un vecchio amore, il tema della *Stabilità dell'Equilibrio* al quale mi iniziò il mio Maestro Aldo Raithel, argomento che mi è sembrato più coerente con il mondo scientifico di Pasquale Renno di quanto non lo siano gli studi di cui mi occupo attualmente.

È per me motivo di gioia offrire un modesto scritto in onore di chi, dedicando pionieristicamente la sua vita scientifica e didattica alla nostra Facoltà di Ingegneria, ha contribuito a creare le solide basi su cui il Settore Strutturale può oggi plasmare Ingegneri di altissimo livello internazionale.

Sul Carico alla De Saint Venant della Sesta Distorsione Elementare di Volterra

I. Bochicchio * E. Laserra † M. Pecoraro ‡

A Pasquale Renno con affetto

Sommario

In questo lavoro, riprendiamo in esame la teoria delle distorsioni elastiche di V. Volterra e analizziamo, con modello alla De Saint Venant, il carico indotto dalla sesta distorsione elementare di Volterra su un cilindro cavo omogeneo, isotropo e linearmente elastico di altezza finita.

Parole-chiave: Distorsioni, Volterra, De Saint Venant.

1 Introduzione

Tra le distorsioni di Volterra hanno particolare importanza le distorsioni elementari, in quanto la più generale distorsione può essere costruita tramite le distorsioni elementari.

In questo lavoro vogliamo analizzare il carico indotto dalla sesta distorsione di Volterra su un cilindro cavo di altezza finita, utilizzando un modello alla De Saint Venant.

2 Genesi di una distorsione di Volterra

Consideriamo un solido cilindrico cavo, cioè a connessione doppia, di altezza finita d e configurazione di riferimento C insieme alla sua sezione retta passante per il generico punto P del corpo ove (O, x_1, x_2, x_3) è una terna di riferimento trirettangola levogira di versori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$, mentre $\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\theta(\mathbf{x}) = \arctg \frac{x_2}{x_1}$ rappresentano la distanza polare e l'anomalia, computata positivamente in senso antiorario a partire dal semiasse positivo x_1 , del generico punto P del solido nel passaggio dal riferimento cartesiano al sistema di coordinate cilindriche associato (O, ρ, θ, x_3) .

Sia Σ la frontiera di C e Σ_i ($i = 1, \dots, 4$) siano le sue parti componenti, e precisamente Σ_1 la frontiera interna di raggio R_1 , Σ_2 la frontiera esterna di

*Department of Mathematics and Informatics, University of Salerno, via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (SA), Italy. E-mail: ibochicchio@unisa.it

†Dipartimento di Matematica and Informatica, Università di Salerno, Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (SA), elaserra@unisa.it

‡Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata, Università di Salerno, via Ponte Don Melillo, 84084, Fisciano (SA), pecoraro1@libero.it

raggio R_2 , Σ_3 la frontiera di base a quota $x_3 = 0$, Σ_4 la frontiera di base a quota $x_3 = d$, altezza del cilindro. Si supponga, ora, che, in assenza di vincoli esterni e forze di massa, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sia il vettore spostamento, soluzione del problema d'equilibrio elastico per un corpo soggetto ad assegnate forze esterne, che contenga un termine di polidromia, fisicamente significativo per una regione di spazio doppiamente convessa (qual è il caso di un corpo a simmetria cilindrica cava), legato alla funzione $\theta(\mathbf{x})$ e un eventuale altro termine con punti di singolarità appartenenti ad un luogo geometrico che non intersechi il dominio C .

Lo stesso Volterra fornisce una interpretazione fisica della polidromia di cui gode il vettore $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ per effetto di $\theta(\mathbf{x})$. Infatti, se si rende semplicemente connessa la regione C mediante un taglio con un semipiano avente per spigolo l'asse Ox_3 , o addirittura con lo stesso semipiano Ox_1x_3 , per $x_1 \geq 0$, il vettore $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ nel dominio semplicemente connesso così ottenuto potrà essere in tal caso caratterizzato solo da una discontinuità di prima specie attraverso il semipiano del taglio.

Siccome lo spostamento rigido di una faccia del taglio rispetto all'altra può essere ottenuta sovrapponendo in generale ad una traslazione rigida una rotazione rigida, allora una distorsione può essere descritta da sei parametri costanti l, m, n, p, q, r , detti "coefficienti caratteristici della distorsione" corrispondenti alle tre componenti di traslazione e alle tre componenti di rotazione rigida delle facce del taglio rispetto agli assi x_1, x_2, x_3 del riferimento.

3 Distorsioni elementari di Volterra nel caso di un cilindro cavo

Si chiamerà "distorsione elementare" quella distorsione che corrisponde all'essere diversa da zero una sola delle sei caratteristiche della distorsione e tutte le altre nulle [1, 3, 6].

Lo spostamento base che rappresenta una distorsione elementare è quello che si ha quando esso contiene uno solo dei coefficienti l, m, n, p, q, r diverso da zero. In particolare, per realizzare la 6^a distorsione elementare, quella relativa ad r , basta tagliare il cilindro con un piano assiale, ad esempio quello Ox_1x_3 , e, poi, far ruotare intorno all'asse x_3 , in senso antiorario o in senso orario, a seconda del segno di r , la faccia del taglio che guarda verso il semipiano $x_2 < 0$, aggiungendo per $r > 0$ (rotazione antioraria) un sottile cuneo di materia, o sopprimendo un sottile cuneo di materia per $r < 0$ (rotazione oraria) e poi rinsaldare i lembi.

Va detto comunque che è inessenziale l'aver supposto che il piano del taglio, scelto per determinare la 6^a distorsione, coincida con il piano coordinato Ox_1x_3 in quanto la distorsione è caratterizzata unicamente dal valore assunto dalla caratteristica r ma non dal particolare semipiano scelto avente come bordo l'asse Ox_3 .

4 Analisi del carico alla De Saint Venant

Con riferimento alla soluzione dell'equilibrio elastico proposta dal De Saint Venant per un solido prismatico isotropo ed omogeneo linearmente elastico con carico agente solo sulle basi, è possibile sostituire il carico specifico con un altro staticamente equivalente (avente cioè la stessa risultante) senza avere conseguenze

sulla effettiva distribuzione dello stress e strain in tutti i punti del corpo se non in una zona limitata alle immediate vicinanze delle basi ¹. Ogni soluzione del problema dell'equilibrio elastico è allora da considerarsi come soluzione di tutta una infinità di casi, relativi ad infiniti schemi di carico agenti sulle basi, distribuiti tutti con leggi diverse, ma tutti aventi la stessa risultante. Tale risultante può essere ridotta, come è noto dalla statica, in una forza passante per un punto della sezione di base più una coppia di momento pari a quello della risultante rispetto al punto considerato.

Sia la forza che la coppia possono decomporre in generale secondo i tre assi di riferimento ottenendo quelle che si chiamano "caratteristiche della sollecitazione esterna". Ogni sistema di carichi esterni sulle basi del solido può quindi essere definito attraverso le sole sei caratteristiche della sollecitazione esterna, risultando superfluo definire la effettiva distribuzione puntuale di tali carichi sulle basi. Il vantaggio conseguente a tale impostazione risulta evidente quando si considera che in tal modo è possibile risolvere il caso più generale attraverso una combinazione lineare di sei casi elementari (sforzo normale, taglio lungo y , taglio lungo x ², flessione intorno a x , flessione intorno a y , torsione). Volterra, dopo aver esaminato, da un punto di vista puramente qualitativo le distorsioni elastiche [1], affronta e risolve, almeno in parte, il problema da un punto di vista rigorosamente matematico, ponendo l'attenzione su un cilindro doppiamente connesso linearmente elastico, isotropo ed omogeneo di altezza finita d .

Per evidenti ragioni di simmetria conviene riferirsi ad una terna di coordinate cilindriche e indicare con (P, ρ^*, t^*, x_3^*) il riferimento trirettangolo levogiro che si ottiene trasladando in P gli assi ρ, t e x_3 . Volterra determinò, in coordinate cilindriche, le espressioni delle componenti di un possibile vettore spostamento $\mathbf{u}(P)$ relativo alla 6^a distorsione elementare [1, 4, 5, 6, 7, 8]

$$\begin{cases} u_{\rho^*}(\rho, \theta, x_3) = -\frac{r}{2\pi} \rho \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \left(\log \rho^2 - \frac{R_2^2 \log R_2^2 - R_1^2 \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\log R_2^2 - \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right] \\ u_{t^*}(\rho, \theta, x_3) = \frac{r}{2\pi} \rho \theta \\ u_{x_3^*}(\rho, \theta, x_3) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

ove μ e λ sono rispettivamente la 1^a e il 2^a costante di Lamé di un corpo istropo, omogeneo e linearmente elastico. Il vettore $\mathbf{u}(P)$, rappresentato dalle (4.1) genera sulle basi, rispettivamente a quota $x_3 = 0$ ed $x_3 = d$, un carico specifico non nullo aventi le seguenti componenti nel riferimento cilindrico (O, ρ, θ, x_3) [1, 4, 5, 6, 7, 8]

¹La profondità di tale zona, pari all'incirca alle dimensioni della base, al di là della quale lo schema dei carichi agente sulle basi interviene solo con la sua risultante, è detta "distanza di estinzione".

²In vero il taglio lungo x è sempre associato ad una flessione intorno ad y e torsione, come pure il taglio lungo y è sempre associato ad una flessione intorno ad x e torsione, e ciò al fine di ottenere che tutti i sei casi godano della proprietà dell' "ortogonalità" : cioè sia sempre nulla l'energia mutua di deformazione per ogni possibile combinazione dei sei casi.

$$\begin{cases} f_\rho(\rho, \theta, 0) = 0 \\ f_t(\rho, \theta, 0) = 0 \\ f_{x_3}(\rho, \theta, 0) = -\frac{r}{2\pi} \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left(1 + \log \rho^2 - \frac{R_2^2 \log R_2^2 - R_1^2 \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f_\rho(\rho, \theta, d) = 0 \\ f_t(\rho, \theta, d) = 0 \\ f_{x_3}(\rho, \theta, d) = \frac{r}{2\pi} \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \left(1 + \log \rho^2 - \frac{R_2^2 \log R_2^2 - R_1^2 \log R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \end{cases}$$

Allo scopo di procedere all'analisi del carico alla De Saint Venant, si è elaborato quanto segue.

D'ora in poi, si prederà in considerazione la sola componente verticale del carico, cioè quella $f_{x_3}(\rho, \theta, d)$ agente sulla base $z = d$, che si denoterà, per comodità, senza pedice con $f(\rho)$, in quanto, alla quota fissata, essa risulta funzione solo di ρ .

Siccome la $f(\rho)$ considerata è relativa ad un carico autoequilibrato e gode, inoltre, della proprietà di essere monotona nell'intervallo $[R_1, R_2]$; allora l'equazione $f(\rho) = 0$ che da essa si ottiene ammetterà nell'intervallo (R_1, R_2) certamente una sola radice reale che vale

$$\rho_n = e \sqrt{\frac{R_2^2 \ln R_2^2 - R_1^2 \ln R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - 1}$$

la quale soddisfa la seguente limitazione più restrittiva, e cioè

$$\rho_M < \rho_n < R_2 \quad \text{ove} \quad \rho_M = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

E' facile verificare, inoltre, essendo $\rho_M < \rho_n < R_2$, che

$$\left| \int_{R_1}^{\rho_n} f(\rho) d\rho \right| > \left| \int_{\rho_n}^{R_2} f(\rho) d\rho \right|$$

cioè, in modulo, l'area racchiusa da $f(\rho)$ su $[R_1, \rho_n]$ è maggiore di quella che essa racchiude su $[\rho_n, R_2]$.

Indicato con ρ_{n_T} il valore di ρ in cui bisogna traslare il diagramma di $f(\rho)$ per ottenere che le due aree risultino uguali in modulo, esso si determina risolvendo la seguente equazione

$$\int_{R_1}^{\rho_{n_T}} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho + \int_{\rho_{n_T}}^{R_2} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho = 0$$

Essa fornisce

$$\rho_{n_T} = e \sqrt{\frac{R_2 \ln R_2^2 - R_1 \ln R_1^2}{R_2 - R_1} - 2}$$

Pertanto, il carico agente sulla sezione sarà rappresentabile come sovrapposizione di uno sforzo normale \mathbf{N} applicato nel baricentro M della sezione pari a

$$N = f(\rho_{n_T})(R_2 - R_1)$$

e di una coppia C il cui centro D non coincide con M .

Per determinare il valore della coppia, il braccio e la coordinata del suo centro D , si premette il calcolo di ρ_{G_1} e ρ_{G_2} , valori di ρ corrispondenti ai baricentri G_1 e G_2 delle figure rappresentative delle due aree. Sfruttando la tecnica dei momenti statici si ottengono i seguenti valori

$$\rho_{G_1} = \frac{1}{2} \left[R_1 + \frac{(\rho_{n_T} - R_1)^2}{2(\rho_{n_T} - R_1) - R_1(\ln \rho_{n_T}^2 - \ln R_1^2)} \right]$$

$$\rho_{G_2} = \frac{1}{2} \left[R_2 + \frac{(R_2 - \rho_{n_T})^2}{2(R_2 - \rho_{n_T}) - R_2(\ln R_2^2 - \ln \rho_{n_T}^2)} \right]$$

Con riferimento all'area

$$\int_{\rho_{n_T}}^{R_2} [f(\rho) - f(\rho_{n_T})] d\rho$$

si ottiene il momento della coppia che vale

$$C = -\frac{r}{2\pi} \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} [2(R_2 - \rho_{n_T}) - R_2(\ln R_2^2 - \ln \rho_{n_T}^2)]$$

Siccome il braccio della coppia vale a sua volta

$$b = \frac{1}{2} [(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})]$$

si ha che il valore del momento risulta pari a

$$M_D = b \cdot C = \frac{1}{2} C [(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})]$$

essendo

$$\rho_D = \frac{1}{4} [(R_2 - \rho_{G_2}) + (R_1 + \rho_{G_1})]$$

la coordinata del centro D che soddisfa, come è possibile dimostrare, la seguente limitazione

$$\rho_{n_T} < \rho_D < \rho_M$$

Per ottenere il carico globalmente agente nella sezione (sforzo normale + momento della coppia) applicati entrambi nello stesso punto, cioè nel centro D della coppia, bisogna traslare \mathbf{N} in D aggiungendo il momento di trasporto. Per fare ciò bisogna calcolare la distanza d_1 tra D ed M :

$$d_1 = \rho_M - \rho_D = \frac{1}{4} [(\rho_{G_2} + R_2) - (\rho_{G_1} - R_1)]$$

Pertanto, il momento di trasporto M'_D vale a sua volta

$$M'_D = \frac{1}{4} f(\rho_{n_T})(R_2 - R_1) [(\rho_{G_2} + R_2) - (\rho_{G_1} - R_1)]$$

Tale momento di trasporto sarà sempre opposto in segno a quello M_D per effetto del segno di \mathbf{N} e della limitazione $\rho_D < \rho_M$.

Il momento totale agente applicato in D vale

$$M_D'' = M_D + M_D' = \frac{1}{2}C [(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})] \\ + \frac{1}{4} f(\rho_{n_T})(R_2 - R_1)[(\rho_{G_2} + R_2) - (\rho_{G_1} - R_1)]$$

Noto M_D'' , che è sempre minore di M_D , è possibile calcolare l'eccentricità dello sforzo normale N rispetto al punto D . Tale eccentricità, calcolata rispetto a D , individua la posizione del centro di sollecitazione C_s , che è quel particolare punto appartenente al piano meridiano (che è anche piano di sollecitazione) in cui è possibile far agire da solo lo sforzo normale per ottenere lo stesso effetto prodotto dal carico specifico presente su entrambe le basi di estremità della sezione retta del cilindro cavo col fissato piano meridiano. Essa vale

$$e_{C_s} = \frac{M_D''}{N} = \frac{1}{4} \left[(R_2 + \rho_{G_2}) - (\rho_{G_1} - R_1) + \frac{2C}{f(\rho_{n_T})} \frac{(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})}{R_2 - R_1} \right]$$

Il segno di e_{C_s} è computato positivamente nel senso delle ρ crescenti. In particolare, siccome $\rho_M < \rho_n < R_2$, accade sempre che C_s non appartiene alla sezione retta del cilindro cavo nel piano meridiano considerato.

In fine, la coordinata ρ_{C_s} nel piano coordinato $(0, \rho, z)$ vale

$$\rho_{C_s} = \frac{1}{2} \left[\rho_{G_2} + \rho_{G_1} + \frac{2C}{f(\rho_{n_T})} \frac{(R_2 - \rho_{G_2}) - (R_1 + \rho_{G_1})}{R_2 - R_1} \right]$$

Tale ascissa pone il centro C_s , rispetto ad M , dalla parte opposta del punto in cui la superficie neutra interseca la basi di estremità della sezione del cilindro col piano meridiano, e cioè nella zona cava del cilindro in prossimità dell'asse di simmetria.

5 Conclusioni

In definitiva, si può affermare che il carico specifico agente sulle basi del cilindro dà luogo globalmente, cioè in termini di caratteristica della sollecitazione, ad uno sforzo normale eccentrico. In particolare, siccome il piano meridiano è piano principale di tensione per ogni suo punto, esso oltre ad essere piano di sollecitazione sarà anche piano di flessione, per cui lo sforzo normale eccentrico darà luogo ad una "presso-flessione retta" se la caratteristica di distorsione r è oraria (negativa) e ad una "tenso-flessione retta" se r è antioraria (positiva). Inoltre, per $s = R_2 - R_1 = \Delta R \rightarrow 0$, cioè, per spessori molto piccoli del cilindro, la sollecitazione tenderà ad una flessione retta semplice intorno alla superficie neutra, che tende a passare per M nel mentre C_s , spostandosi verso l'asse del cilindro, tende a ∞ .

Riferimenti bibliografici

- [1] Volterra V., *Sur l'équilibre des corps élastique multiplément connexes*, Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-libraire, 1907.

- [2] Weingarten M., *Sur les surfaces de discontinuité dans la théorie des corps solides*, Rend. Accad. Lincei.,1901, **10**, pagg:57-60.
- [3] Grioli G., *Le distorsioni elastiche e l'opera di Vito Volterra*, in Atti dei Convegni Lincei **92**, 1992, pp.271-289.
- [4] Caricato G., *On the Volterra's distortions theory*, AIMETA'99, 14th Ital.Conf.Theor. and Appl. Mechanics, Villa Olmo (Como), Italy.
- [5] Caricato G., *On the Volterra's distortions theory*, Meccanica, 2000, 35, pp.411-420.
- [6] Signorini A., *Lezioni di Fisica Matematica*, Libreria Eredi Virgiklio Veschi, Roma, 1953.
- [7] Love A.E.H., *The Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univerity Press,4th edn., 1952.
- [8] Laserra E. and Pecoraro M., *Volterra's Theory of Elastic Dislocations For A Transversally Isotropic Homogeneous Hollow Cylinder*, 2003, Nonlinear Oscillations, Tom. 6, n.1, pagg.56-73, ISSN 1562-3076.

Soluzione numerica di problemi instazionari nelle macchine a fluido

di Fabio Bozza* e Raffaele Tuccillo*

Introduzione

I sistemi di conversione dell'energia basati sui processi termofluidodinamici di un fluido motore sono di frequente caratterizzati da condizioni non stazionarie instaurate in taluni casi dalla costituzione della macchina, in altri dalla transizione tra due differenti regimi operativi. È noto infatti che nelle macchine volumetriche, quali ad esempio i motori alternativi a combustione interna, si susseguono nel tempo le fasi di trasferimento di energia meccanica e termica e quelle di ricambio della carica: ne consegue una necessaria variazione temporale dello stato termodinamico del gas evolvente cui si accompagna, durante le fasi di immissione e scarico del fluido motore, una propagazione spaziale delle perturbazioni attraverso i dispositivi di aspirazione e scarico. L'intero sistema presenta quindi, anche nelle condizioni usualmente definite di regime, un'instazionarietà di tipo periodico.

Nei casi di sistemi a flusso continuo, quali ad esempio le turbine a gas, l'assenza delle citate instazionarietà nel periodo rende accettabile l'ipotesi di condizioni stazionarie in corrispondenza di un determinato regime; una qualsiasi variazione di condizioni operative, normalmente provocata da una differente richiesta di carico meccanico o termico, induce però fenomeni di transitorio durante i quali le condizioni dei singoli componenti possono allontanarsi in misura significative da quelle ottimali.

Lo studio di problemi non stazionari costituisce quindi uno degli strumenti essenziali per la comprensione di fenomenologie tipiche delle macchine a fluido, quali:

- Le caratteristiche di risposta dinamica e termica della macchina [3, 5, 6, 7, 11, 13, 14];

* Dipartimento di Ingegneria Meccanica per l'Energetica Università di Napoli Federico II.

- Le instabilità globali del sistema o di un singolo componente [4, 9, 12];
- Il consumo di combustibile e la produzione di inquinanti durante le fasi non stazionarie [10, 13, 14];
- I processi di trasferimento di massa durante le fasi di ricambio della carica [21, 22, 23, 24, 25];
- Le emissioni acustiche associate ai flussi pulsanti attraverso i condotti di aspirazione e scarico [29, 30, 31, 32, 33, 34];

In questo lavoro gli autori presentano una rassegna dei metodi da loro adottati per la soluzione di alcuni dei problemi prima citati, attraverso la definizione di appropriati modelli non stazionari e l'integrazione numerica delle relative equazioni. Come si mostrerà nel seguito, i modelli mirano sia alla caratterizzazione globale della risposta del sistema attraverso approcci a parametri concentrati, sia alla descrizione di fenomenologie specifiche di alcuni componenti con metodologie tipiche della fluidodinamica computazionale attraverso approssimazioni monodimensionali o multidimensionali dei domini di calcolo.

Una particolare segnalazione merita l'adozione di metodologie di integrazione tra i vari approcci [4, 11, 12, 21], il cui scopo è l'identificazione della risposta non stazionaria di un sistema complesso, accompagnata dalla verifica fluidodinamica dei processi che richiedono una descrizione più accurata, quali quelli di sviluppo dei processi di combustione non stazionaria e di produzione di specie inquinanti. L'approccio integrato consente la corretta assegnazione di condizioni ai limiti tempo-varianti ai codici di simulazione fluidodinamica e di correggere le indicazioni di massima fornite dai modelli non stazionari di ordine inferiore. Un corretto impiego di tali metodologie rende possibile una realistica descrizione di fenomeni non stazionari complessi e la definizione di opportune leggi di controllo per limitarne gli effetti negativi dal punto di vista energetico e ambientale.

1. Modello dinamico a parametri concentrati di una micro-turbina a gas

In questo paragrafo si descrive un metodo di analisi del comportamento non stazionario di una micro-turbina a gas (*MTG*), che costituisce un sistema di conversione dell'energia di grande attualità nel campo della "generazione distribuita", adatta quindi all'impiego da parte di utenze con ridotta richiesta di potenza elettrica (usualmente dell'ordine di 10 – 100 kW). Questa sua caratteristica la rende suscettibile di frequenti variazioni di carico che comportano la transizione tra due differenti regimi operativi.

Lo sviluppo del transitorio di una macchina termica è generalmente oggetto di particolare attenzione in quanto possono venir meno le condizioni ottimali che ne garantiscono la sicurezza nei confronti delle sollecitazioni meccaniche e termiche e la migliore efficienza in termini di prestazioni energetiche ed ambientali. L'istituzione di adeguate strategie di controllo richiede preliminarmente l'impostazione di tecniche di simulazione della risposta dinamica dell'intero sistema quando siano imposte condizioni ai limiti variabili nel tempo in modo continuo o impulsivo.

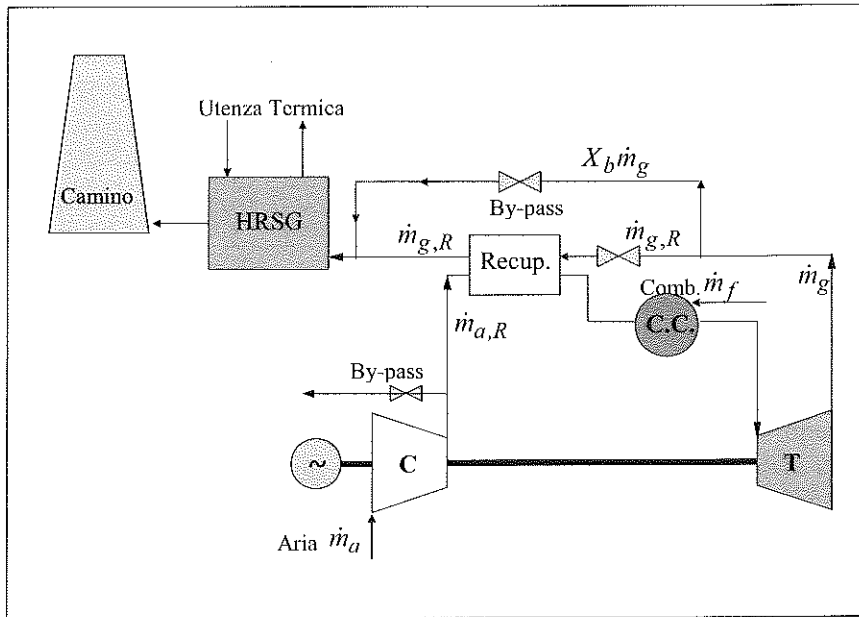


Fig. 1: Schema d'impianto della Micro-Turbina a Gas

Sebbene lo studio fluidodinamico non-stazionario di un singolo componente sia attualmente affidato ai metodi della fluidodinamica computazionale (*CFD*) come descritto ai successivi paragrafi, l'adozione di metodi di analisi a parametri concentrati – secondo modelli “zero-dimensionali” – può presentare ancora soddisfacente efficacia quando l'obiettivo prevalente sia l'identificazione delle caratteristiche di risposta di un sistema termo-fluidodinamico articolato in diversi sotto-sistemi interconnessi.

Nel caso specifico, la micro-turbina a gas, il cui schema è riportato in fig. 1, è riconducibile a un sistema quale quello in fig. 2, costituito da blocchi interconnessi ciascuno dei quali rappresenta il volume di controllo cui è assimilabile ciascuno dei componenti della micro-turbina:

- Il compressore
- La valvola di by-pass a valle del compressore

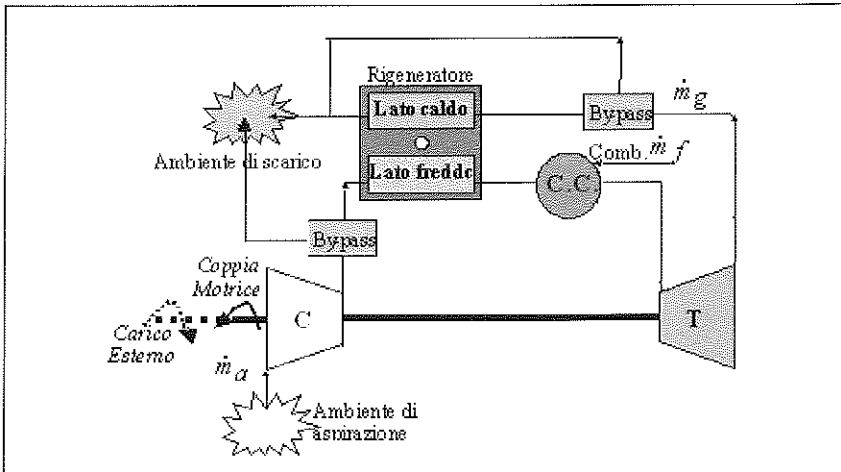


Fig. 2: Schema per il modello dinamico della MTG.

- Lo scambiatore di calore rigenerativo (lato aria)
- La camera di combustione
- La turbina
- La valvola di by-pass dello scambiatore rigenerativo
- Lo scambiatore di calore rigenerativo (lato gas di scarico)

Per il singolo volume di controllo, schematizzabile, nelle ipotesi fatte, come in fig. 3, valgono le equazioni di bilancio della massa e dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= V \frac{d\rho}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{ex} \\ \frac{dE}{dt} &= u \frac{dM}{dt} + M \frac{du}{dt} = \dot{m}_{in} H_{in} - \dot{m}_{ex} H_{ex} + \dot{Q} - P \end{aligned} \quad (1)$$

Va precisato che nella precedente formulazione delle equazioni di bilancio si è già assunta la costanza nel tempo del volume. L'assenza di un'equazione di quantità di moto è giustificata dalla tipica assunzione di variazione di energia cinetica trascurabile rispetto a quella di energia totale attraverso ciascuno dei componenti del sistema.

Le equazioni accessorie che risolvono lo stato istantaneo del sistema sono:

- Equazione di stato del gas evolvente:

$$p = f(\rho, T, \dots) \quad (2)$$

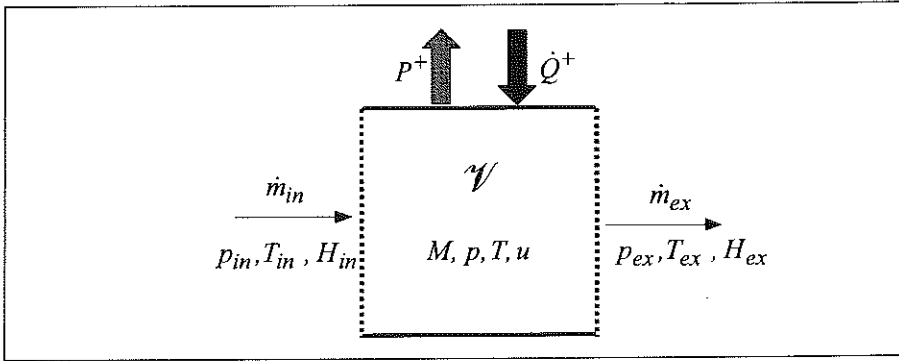


Fig. 3: Schema di volume di controllo per le equazioni di bilancio.

- Equazione della trasformazione:

$$\frac{dp}{d\rho} = m \frac{p}{\rho}, \quad \text{in cui:} \quad \frac{m-k}{m-1} = \frac{Tds}{du} \quad (3)$$

- Equazioni dei flussi di massa:

$$\begin{cases} \dot{m}_{in} = \frac{P_{in}}{\sqrt{kR P_{in}}} \Omega_{in} \psi \left(\frac{P}{P_{in}} \right) & (\text{flussi comprimibili}) \\ \dot{m}_{in} = \frac{P_{in} - P}{\sigma_{in}} & (\text{flussi incomprimibili}) \end{cases} \quad (4)$$

Il processo di identificazione delle caratteristiche del sistema è basato sulla trattazione del sistema di equazioni differenziali ordinarie (1). A titolo di esempio, nel caso più generale di volume variabile nel tempo e assumendo trasferimenti di massa tra i sistemi adiacenti a basso numero di Mach (quindi in condizioni di flusso quasi incomprimibile) si perviene all'unica equazione del secondo ordine:

$$V \frac{d^2 \rho}{dt^2} + \left(\frac{mRT}{\sigma_{eq}} \frac{d\rho}{dt} + 2 \frac{dV}{dt} \right) \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{1}{\sigma_{in}} \frac{dp_{in}}{dt} + \frac{1}{\sigma_{ex}} \frac{dp_{ex}}{dt} \quad (5)$$

In cui la resistenza equivalente al flusso, σ_{eq} , è data da:

$$\frac{1}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{\sigma_{in}} + \frac{1}{\sigma_{ex}} \quad (6)$$

Un sistema a volume variabile, tipico ad esempio delle macchine volumetriche quali i motori alternativi le cui problematiche sono trattate nel

successivo paragrafo 3, presenta una risposta con oscillazione smorzata le cui principali caratteristiche sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_L = \sqrt{\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dt^2}} \quad (\text{pulsazione libera}) \\ \omega_s = \sqrt{\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dt^2} - \frac{mRT + 2\sigma_{eq} dV/dt}{2V}} \quad (\text{pulsazione smorzata}) \\ \tau = \frac{V\sigma_{eq}}{mRT + 2\sigma_{eq} dV/dt} \quad (\text{costante di tempo}) \end{array} \right. \quad (7)$$

Nel caso in esame, di volume invariante nel tempo, la precedente equazione (5) si riduce alla forma:

$$V \frac{d^2 \rho}{dt^2} + \frac{mRT}{\sigma_{eq}} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\sigma_{in}} \frac{dp_{in}}{dt} + \frac{1}{\sigma_{ex}} \frac{dp_{ex}}{dt} \quad (8)$$

Il sistema reagisce quindi a una variazione impulsiva delle condizioni di trasferimento di massa (ad esempio ad una variazione istantanea di una delle pressioni di estremità p_{in} o p_{ex}) con una risposta asintotica caratterizzata da una costante di tempo:

$$\tau = \frac{V\sigma_{eq}}{mRT} \quad (9)$$

Il ritardo di risposta è quindi, come prevedibile, crescente con il volume del sistema e con le resistenze al flusso con quelli adiacenti, ma è anche variabile con il suo stato termodinamico e con la legge di trasformazione. Quest'ultima è sintetizzata dalla costante m il cui valore è associato alla presenza di trasferimenti di energia nel modo calore ma anche all'esistenza di generazioni interne di entropia.

Se dalla precedente discussione è identificabile il comportamento del sistema in termini di oscillazioni o di accumuli di massa, un'analoga elaborazione dell'equazione di bilancio dell'energia permette di caratterizzare l'adeguamento della temperatura del sistema a flussi convettivi o diffusivi variabili nel tempo. Quest'ultimo aspetto è di particolare interesse nel caso della micro-turbina a gas oggetto di questa trattazione, in quanto la presenza dello scambiatore di calore rigenerativo è causa di un considerevole aumento della costante di tempo.

La necessità della soluzione numerica. L'elaborazione analitica delle equazioni di bilancio del sistema (1) è utile alla caratterizzazione quali-

tativa delle sue caratteristiche di risposta ma non si presta, di fatto, a un'utilizzazione per la effettiva soluzione del problema non stazionario. A tale riguardo, va considerato che le equazioni che caratterizzano il generico componente della micro-turbina a gas:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{ex} \\ \frac{d(Me)}{dt} &= \sum \dot{m}_{in} H_{in} - \sum \dot{m}_{ex} H_{ex} - \dot{Q}_w + \frac{dm_f}{dt} h_{0f}\end{aligned}\quad (10)$$

risultano non lineari a seguito di numerose cause:

- I gas evolventi non seguono il modello di gas ideale e quindi non esiste dipendenza lineare tra energia interna (o entalpia) e temperatura;
- Gli stessi gas sono soggetti a variazioni di composizione per effetto della reazione di combustione la cui velocità, rappresentata dal termine $\frac{dm_f}{dt}$, è soggetta alle leggi dell'equilibrio o della cinetica chimica e quindi dallo stato istantaneo del sistema;
- Le leggi di trasferimento di calore, associate al termine \dot{Q}_w , presentano una dipendenza implicita dallo stato termo-fluidodinamico del sistema;
- Le leggi di trasferimento di massa, associate al termine generico \dot{m}_j , sono rappresentate dalla funzione di flusso, fortemente non lineare con le pressioni in caso di flusso comprimibile.

Infine, il flusso di massa attraverso i componenti rotanti, compressore e turbina, è legato al rapporto tra le pressioni estreme secondo leggi variabili con la velocità di rotazione come riportato nelle rispettive mappe operative (fig. 4). Le variazioni di velocità dell'albero sono valutabili dall'equazione di equilibrio meccanico del sistema rotante:

$$\frac{dN_{TC}}{dt} = \frac{60^2}{4\pi^2} \frac{(P_t - P_c - P_{el})}{I_{TC} N_{TC}} \quad (11)$$

e dipendono quindi, a loro volta, dalle stesse portate massiche e dai rapporti di pressione realizzati ad ogni istante, a conferma della caratteristica implicita e fortemente non-lineare anche di questa equazione dinamica.

Si aggiunga a tali considerazioni la necessità di risolvere simultaneamente, ad ogni istante temporale, le variazioni di stato dei vari componenti stante la loro mutua dipendenza determinata dai trasferimenti convettivi di massa ed energia. Ne consegue che il sistema complessivo di

2xN equazioni differenziali ordinarie va integrato nel dominio temporale con tecniche tipiche dell'integrazione numerica non lineare: quindi risultano appropriati i noti metodi della classe "predictor-corrector" e in particolare i metodi *Runge-Kutta*.

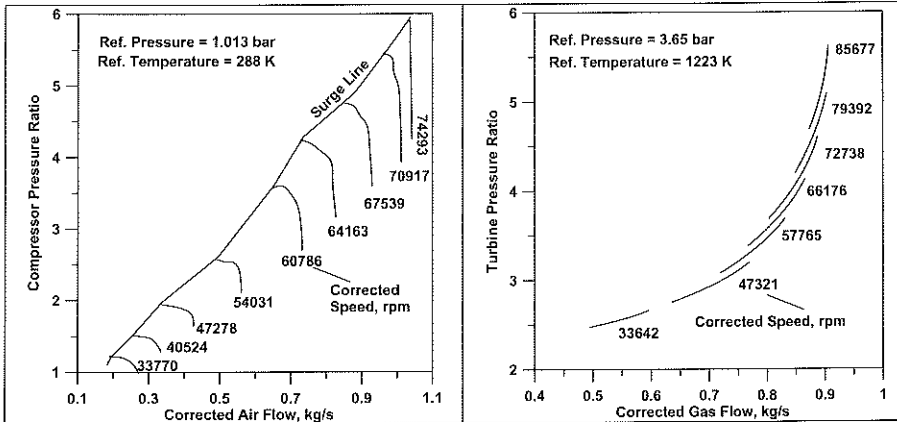


Fig. 4: Mappe caratteristiche del compressore e della turbina

I gradi di libertà del sistema e le condizioni ai limiti. In precedenti lavori degli autori [1, 11], è stata operata una caratterizzazione del sistema complessivo "turbina a gas monoalbero" allo scopo di derivarne le caratteristiche operative. Il sistema, costituito dai componenti rappresentati nelle figure 1 e 2 presenta due gradi di libertà associati alla coppia di variabili primitive indipendenti (*portata di combustibile, velocità di rotazione*). Lo studio del sistema nello spazio delle variabili indipendenti permette di accertare l'esistenza delle condizioni di accoppiamento termo-fluidodinamico tra i componenti fissi e rotanti. La regione denominata "dominio operativo" (fig. 5) rappresenta il luogo dei punti soluzione del problema dell'accoppiamento e, una volta individuata, può essere proiettata in un qualsiasi piano di variabili dipendenti associate alla coppia di variabili primitive. Ad esempio, il piano (velocità di rotazione, potenza) in fig. 6 è più idoneo a una rappresentazione immediata delle prestazioni della macchina. Al suo interno, sono rappresentate le isolinee della portata di combustibile e della "costante di carico" definita attraverso la relazione:

$$\frac{P_{el}}{P^*} = K \left(\frac{N_{TC}}{N_{TC}^*} \right)^3 \quad (12)$$

In cui l'asterisco identifica i valori nominali di potenza e velocità di rotazione. Va precisato che le mappe come quelle in fig. 5 e 6, sono su-

scettibili di alterazioni con le condizioni ambientali, che costituiscono le condizioni ai limiti del sistema. Per valori fissati dei parametri ambientali un transitorio del sistema può essere indotto da una variazione della potenza elettrica richiesta, P_{el} , o della velocità di rotazione, N_{TC} . Più sinteticamente tali variazioni sono quindi rappresentate da quella della costante di carico K , una cui variazione a gradino provoca un'istantanea attivazione del processo di accelerazione del sistema secondo l'equazione di equilibrio dinamico (11). Formalmente, la dipendenza della velocità di rotazione dal bilancio di potenza attiva e resistente elimina un grado di libertà del sistema, che può essere quindi controllato attraverso le sole variazioni della portata di combustibile.

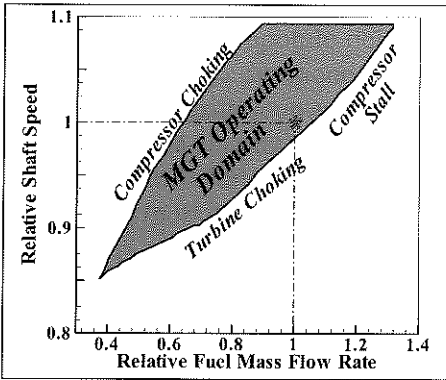


Fig. 5 : Dominio operativo della MTG.

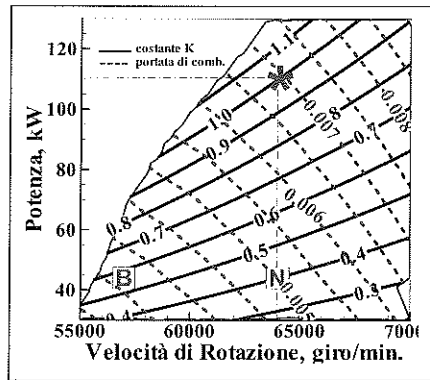


Fig. 6: Mappa operativa della MTG

La legge di variazione temporale della portata di combustibile ha quindi per obiettivo primario il controllo della velocità di rotazione il cui valore va riportato a quello originario o, comunque, a un livello prefissato. A titolo di esempio, nella mappa in fig. 6 è riportato il punto di funzionamento nominale (*) e due punti operativi a potenza ridotta con la stessa velocità di rotazione (punto "N") o con velocità minore (punto "B"). In ambedue i casi, il controllo della velocità [3, 13] può essere operato attraverso una "retro-azione" del tipo:

$$\dot{m}_f(t + dt) = \dot{m}_f(t) + \Pi \frac{N_{TC}(t) - N_{TC}^*}{N_{TC}^*} \quad (13)$$

Gli esempi riportati nelle figure 7 e 8 si riferiscono a un caso di transizione della macchina dalla sua potenza nominale a un livello di potenza ridotta a seguito di un'istantanea variazione della costante di carico K prima definita dal valore unitario (corrispondente alla condizione di "pieno carico") al valore $K=0.4$ (che rappresenta una possibile situazione di "carico parziale"). In tali grafici viene evidenziata l'influenza della costante di controllo Π introdotta nell'equazione di controllo (13).

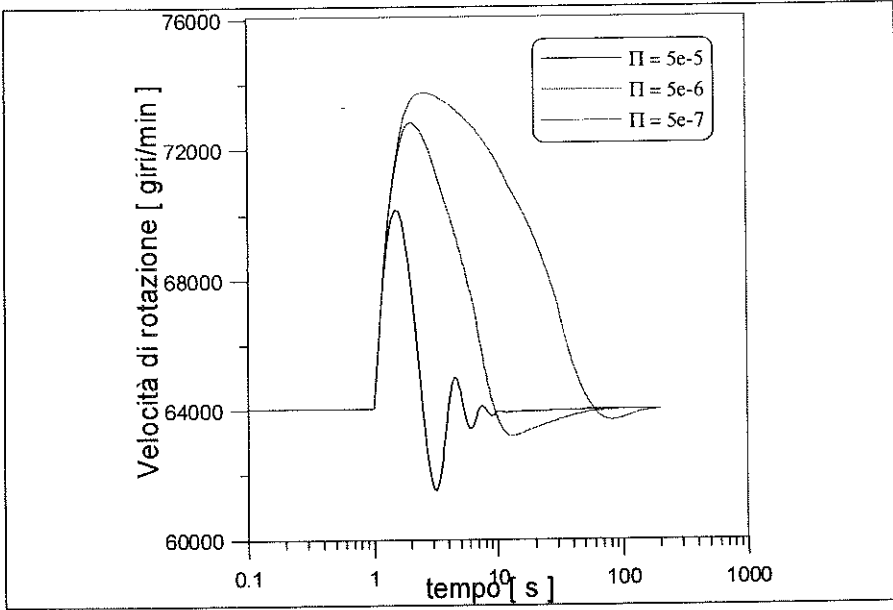


Fig. 7: Effetto della costante di controllo sulla risposta dinamica della micro-turbina

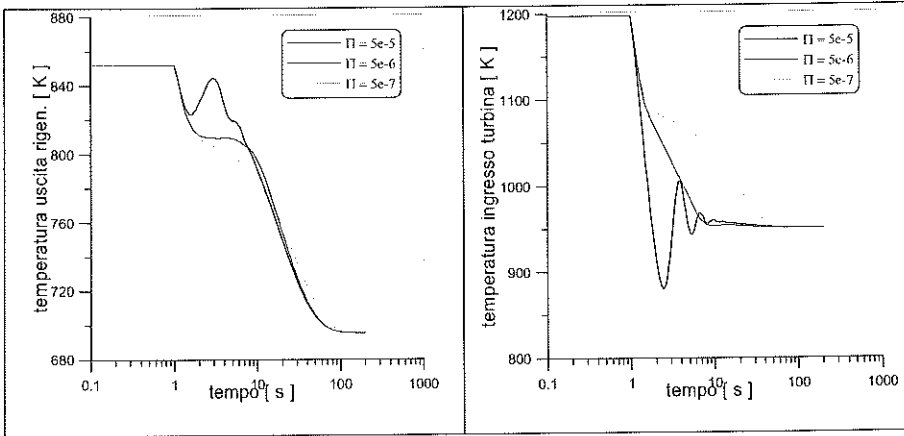


Fig. 8: Effetto della costante di controllo sulla risposta termodinamica della micro-turbina

Valori più bassi di tale costante ($\Pi = 1 \times 10^{-5}$) producono un più rapido adeguamento della velocità di rotazione e della temperatura di ingresso in turbina ai valore finali di equilibrio ma provocano anche oscillazioni in tali due parametri che si riflettono in accentuate sollecitazioni meccaniche dell'albero e in possibili instabilità termo-fluidodinamiche nella camera di combustione. Tale ultimo aspetto merita uno studio più dettagliato.

to, quale quello descritto nei successivi paragrafi. La ragione di tali oscillazioni è da ricercarsi nelle differenti velocità di variazione del combustibile, in accordo alla legge definita in (13), e dell'aria, le cui variazioni sono associate alle curve caratteristiche del compressore in fig. 4. Adeguamenti più "morbidi" ma in pratica con tempi di risposta pressoché inalterati sono ottenibili incrementando di un ordine di grandezza la costante di controllo ($\Pi = 1 \times 10^{-6}$). Ulteriori aumenti di tale costante ($\Pi = 1 \times 10^{-7}$) provocherebbero invece un notevole ritardo di risposta del sistema con un'eccessiva permanenza della turbina a velocità e a temperature dei gas elevate.

Va anche notato come la temperatura dell'aria in uscita dallo scambiatore rigenerativo subisca variazioni molto più lente, indipendentemente dal valore della costante di controllo (fig. 8). Ciò a conferma che sulla risposta del sistema influisce un ritardo di tipo meccanico e uno, con costante di tempo decisamente più elevata, di tipo termico.

La successive figure 9 – 11 illustrano alcuni dettagli di transitori da carico totale a parziale o viceversa, assumendo una costante di controllo $\Pi = 1 \times 10^{-6}$. Le temperature caratteristiche della micro-turbina (fig. 9) presentano evoluzioni differenti: quella di uscita dallo scambiatore rigenerativo risente infatti del citato valore elevato della costante di tempo di questo componente ed è quindi caratterizzata da un progressivo e lento adeguamento al valore finale. Quella di uscita dalla camera di combustione (e di ingresso nella turbina) presenta un rilevante picco nel caso di transitorio con aumento di carico, a causa del rapido aumento della portata di combustibile: il valore di regime è poi raggiunto più rapidamente rispetto a quanto osservato per la temperatura di rigenerazione.

La potenza della micro-turbina a gas (fig. 10) riassume un valore costante dopo un ritardo corrispondente a quello osservato per lo scambiatore rigenerativo, che quindi rappresenta l'elemento critico per quanto riguarda la risposta energetica del sistema. Con analoghi ritardi si adeguano ai valori finali le emissioni di specie chimiche di impatto sull'atmosfera, quali la CO₂ e di specie inquinanti quali gli ossidi di azoto (fig. 11). Inoltre, durante il transitorio si verificano notevoli picchi di produzione di tali specie nocive, associati a quelli di temperatura di ingresso in turbina evidenziati in figura 9. Tali considerazioni hanno indotto gli autori a perfezionare le strategie di controllo, introducendo ulteriori elementi a "retro-azione" nell'equazione (13) per il controllo delle dosature istantanee aria-combustibile durante il transitorio. Tale intervento, descritto in dettaglio nel lavoro [14] mira a correggere le già citate differenze di risposta delle portate di aria e di combustibile.

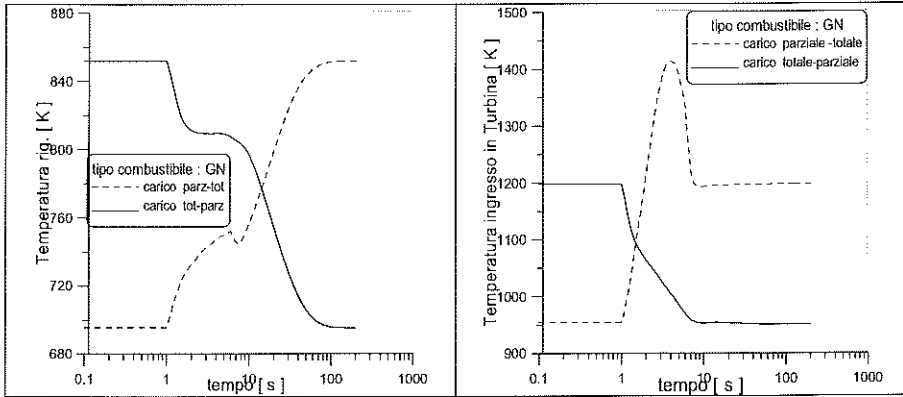


Fig. 9: Temperature caratteristiche della micro-turbina a gas durante il transitorio

Un'ulteriore problematica tipica dei transitori delle turbomacchine è evidenziata nella stessa figura 10: le repentine variazioni di velocità dell'albero possono portare il compressore ad operare con portate al di sotto del limite di stallo. In tali condizioni, il sistema può essere caratterizzato da pericolose instabilità fluidodinamiche, usualmente evitabili attraverso l'apertura della valvola di by-pass a valle del compressore. La necessità di un efficace controllo simultaneo della velocità dell'albero, della dosatura aria-combustibile e della stabilità fluidodinamica del sistema ha condotto alla proposta di sistema integrato di controllo discusso nel citato lavoro [14].

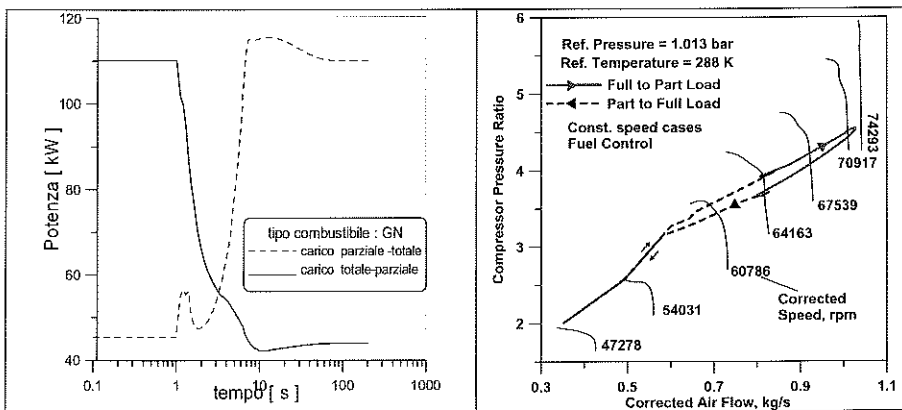


Fig. 10: Prestazioni della micro-turbina durante il transitorio.

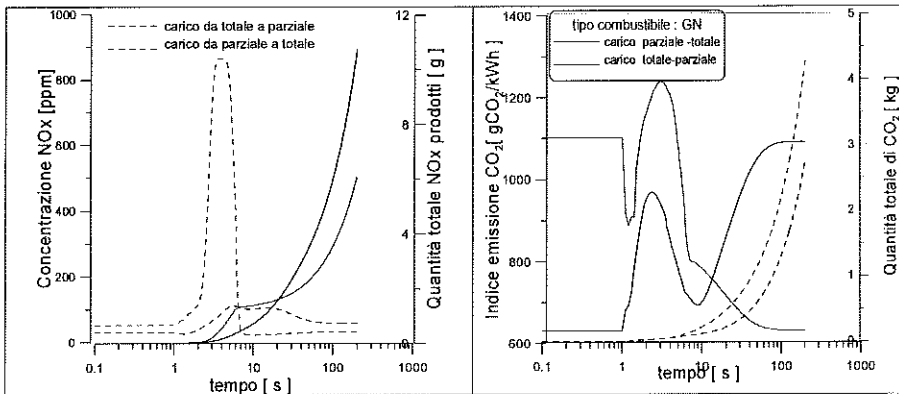


Fig. 11: Emissioni di specie nocive dalla micro-turbina durante il transitorio.

2. Il transitorio della camera di combustione della micro-turbina a gas

L'approccio a parametri concentrati illustrato al paragrafo precedente risulta efficace per lo studio dell'intero sistema costituito da più componenti interconnessi dal punto di vista termofluidodinamico e meccanico. Nonostante le evidenti semplificazioni, risulta possibile l'identificazione delle caratteristiche di risposta della macchina e l'individuazione di problematiche specifiche da approfondire con metodologie più accurate. In particolare, i risultati mostrati dalle figure 9 e 11 mostrano come le variazioni di temperatura e di dosatura aria-combustibile in ingresso alla camera di combustione possano condurre a condizioni non corrette per lo sviluppo della combustione e, soprattutto, a un eccesso di produzione di specie inquinanti.

Si rende pertanto necessario lo studio dei processi non stazionari nella camera di combustione, peraltro da tempo oggetto di studio da parte degli autori con metodologie tipiche della fluidodinamica computazionale (CFD).

La configurazione geometrica della camera di combustione, di tipo "lean-premixed", con accensione della fiamma premiscelata supportata da una fiamma pilota stechiometrica è illustrata in figura 12. Il campo fluidodinamico dell'aria in ingresso alla zona primaria è generato da uno "swirler" radiale, a monte del quale avviene anche l'iniezione del getto di combustibile principale. Il campo di moto viene poi perturbato, a valle della zona primaria, dagli ingressi di aria secondaria e di diluizione [8, 12].

Lo studio del flusso reagente è condotto da tempo dagli autori utilizzando solutori commerciali, quali il *FLUENT*®, e codici di calcolo "open source" quali il *KIVA*, che consentono interventi di introduzione o perfezionamento di specifici sotto-modelli. Nel seguito si farà riferimento solo a quest'ultimo codice, in quanto utilizzato espressamente dagli autori per

la soluzione di problemi non stazionari nel combustore della *MTG* [4, 12].

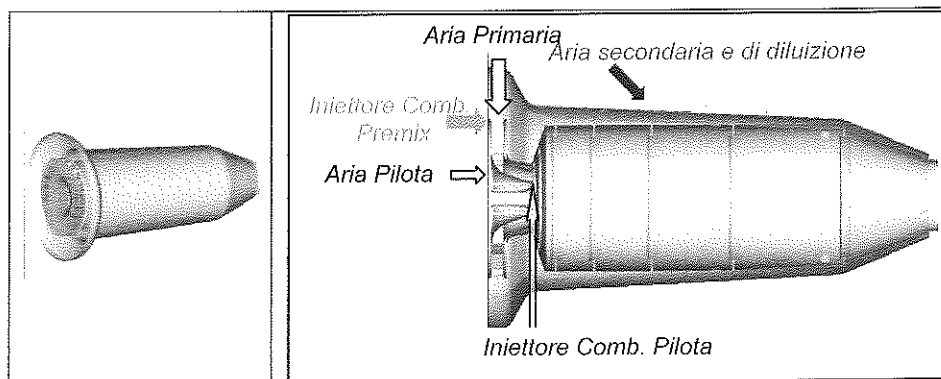


Fig. 12: Configurazione della camera di combustione della micro-turbina a gas.

Il codice *KIVA* [15, 16] risolve le equazioni non stazionarie di Navier-Stokes in sistemi multifase reagenti:

- Le equazioni di conservazione della massa delle *NSP* specie reagenti sono genericamente espresse come:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho \nabla Y_m) + \rho_m^c \quad (m=1, NSP) \quad (14)$$

dove m è la specie generica. Il primo termine a destra rappresenta il trasporto di massa per diffusione, mentre il secondo è il termine “sorgente” dovuto alle reazioni chimiche. Quest’ultimo è quindi legato alle effettive velocità di reazione.

- La conservazione della quantità di moto per la miscela fluida è data da:

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\frac{1}{\alpha^2} \nabla p - A_0 \nabla \left(\frac{2}{3} \rho k \right) + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \mathbf{g} \quad (15)$$

dove il tensore degli sforzi viscosi è pari a:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I}$$

\mathbf{I} = matrice unitaria; A_0 ha valore zero per flussi laminari, valore 1 quando è utilizzato il modello di turbolenza k - ε ; e \mathbf{g} è l'accelerazione gravitazionale.

- L'equazione di conservazione dell'energia è espressa come:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} E) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + (1 - A_0) \overline{\overline{\sigma}} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{J} + A_0 \rho \varepsilon + \dot{Q}_c \quad (16)$$

dove l'ultimo termine rappresenta la velocità di rilascio di calore dalle reazioni chimiche.

- Le equazioni precedenti includono i termini k ed ε (energia cinetica turbolenta e relativa velocità di dissipazione) in accordo al modello di turbolenza (k - ε) a due equazioni:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} k) = -\frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \mathbf{v} + \overline{\overline{\sigma}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \nabla k \right] - \rho \varepsilon \quad (17)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \varepsilon) = -\left(\frac{2}{3} c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} \overline{\overline{\sigma}} \cdot \nabla \mathbf{v} - c_{\varepsilon 2} \varepsilon \rho) \quad (18)$$

Il modello di flusso è completato dalle equazioni di stato tipiche di una miscela di gas perfetti:

$$\rho = RT \sum_{m=1}^{NSP} \left(\frac{\rho_m}{W_m} \right); \quad e(T) = \sum_{m=1}^{NSP} Y_m e_m(T); \quad c_p(T) = \sum_{m=1}^{NSP} Y_m c_{pm}(T) \quad (19)$$

Il codice *KIVA* opera la soluzione numerica delle equazioni instazionarie di Navier-Stokes prima richiamate secondo una schema ai volumi finiti che incorpora numerosi sottomodelli quali:

- Il già citato modello di turbolenza κ - ε ;
- Un modello di cinetica di combustione a due passi (ossidazione parziale del gas naturale e ossidazione del monossido di carbonio ad anidride carbonica [17]); le effettive velocità di reazione sono determinate da un classico schema "finite rate – eddy dissipation" in cui l'effettiva velocità di reazione è la minore tra quella cinetica e quella associata al mixing turbolento.
- La verifica dell'autoignizione delle miscele reagenti locali con modelli fenomenologici [18].
- Il meccanismo esteso di Zel'dovich [17, 19] per la formazione gli ossidi di azoto termici.

La figura 13 mostra alcuni dettagli della discretizzazione del dominio computazionale di cui alla precedente figura 12. In particolare, la prima si riferisce alla rappresentazione tridimensionale ($3D$) pressoché completa della camera, mentre la seconda ne costituisce un'approssimazione bidimensionale ($2D$) assialsimmetrica. Quest'ultima risulta utile per lo sviluppo di calcoli che richiederebbero elevati tempi di elaborazione in $3D$ e si avvale, in genere, dei risultati ottenuti dal primo e più accurato approccio per la definizione delle condizioni ai limiti appropriate, quali: la ripartizione dei flussi di aria tra la zona primaria e quelle secondarie e di diluizione, gli angoli di flusso all'uscita delle palettature dello *swirler* radiale [2, 4, 12].

Sia l'approccio $3D$, sia quello $2D$ sono basati, come detto, sulla soluzione di equazioni intrinsecamente non stazionarie. Il problema fluidodinamico generale può però essere inteso secondo due differenti modalità:

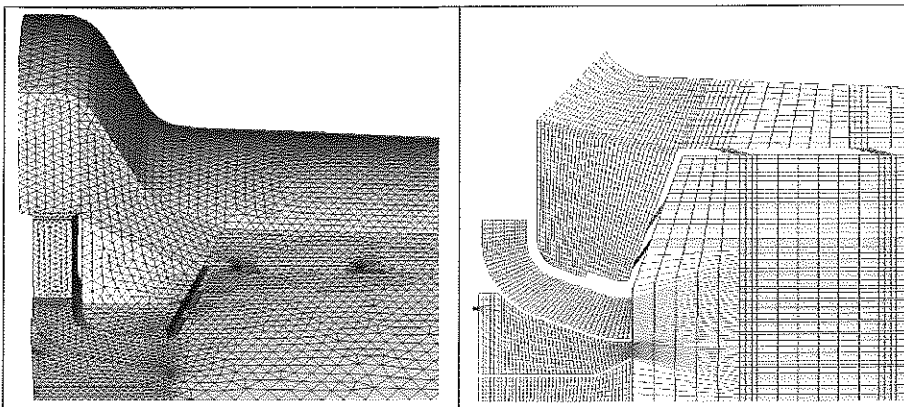


Fig. 13: Discretizzazione dei domini computazionali tridimensionali e bidimensionali.

- **Flussi reagenti stazionari.** Si tratta del problema più usuale e la sua soluzione mira alla determinazione dei campi termo-fluidodinamici in condizioni di regime, che rappresentano la situazione asintotica del processo non stazionario:
 - ❖ Sono assegnate *condizioni ai limiti costanti* nel tempo e condizioni iniziali arbitrarie. Il processo *time-marching* deve raggiungere quindi la convergenza.
 - ❖ La convergenza richiede progressive iterazioni corrispondenti a un tempo fisico di 0.05 – 1 s. Un tipico esempio di “storia di convergenza” è riportato in fig. 14.
- **Flussi reagenti non stazionari.** In questo caso, la soluzione delle equazioni ha l'obiettivo di valutare le distribuzioni di flusso e di proprietà termochimiche ad ogni istante di tempo:

- ❖ *Le Condizioni ai limiti variabili nel tempo* provocano un reale transitorio nella camera di combustione. Il calcolo *CFD* valuta il campo di moto non stazionario e lo sviluppo del processo di combustione.
- ❖ La variazione delle condizioni ai limiti può anche essere di tipo *impulsivo* e in tal caso, partendo da una situazione di regime, si esaminano le caratteristiche di risposta del sistema nel passaggio a un regime differente.

La seconda modalità di calcolo consente quindi l'esame di fenomeni di transitorio della camera associati a variazioni continue o istantanee delle sue condizioni di ingresso. Va precisato che la scelta del codice *KIVA* appare particolarmente indicata a questo scopo in quanto esso è stata inizialmente concepito per la simulazione di processi in motori alternativi a combustione interna, quindi realmente non stazionari. Solo successivamente alcuni ricercatori, tra cui gli autori stessi, ne hanno adattato le caratteristiche per il calcolo di sistemi a flusso continuo quali le camere di combustione di turbine a gas.

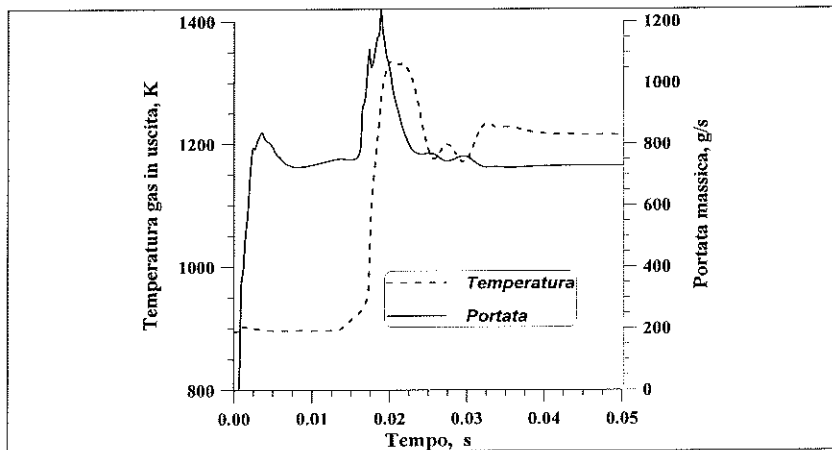


Fig. 14: Un esempio di storia di convergenza della soluzione *CFD* stazionaria

Analisi del transitorio del combustore

La simulazione fluidodinamica non stazionaria della camera di combustione rappresenta quindi un efficace completamento dello studio del transitorio della micro-turbina a gas discusso al paragrafo precedente. I calcoli *CFD* sono indirizzati all'analisi delle situazioni che dalla simulazione a parametri concentrati apparivano più critiche quali, ad esempio, quelle caratterizzate da un'eccessiva alterazione della dosatura aria-combustibile rispetto alle condizioni di regime. Rimandando, per una rassegna più completa dei risultati, ad altri lavori [4, 11, 12], si mostrano qui

solo alcuni risultati relativi alla transizione “part-to-full load”, i cui risultati globali sono già stati mostrati nella precedenti figure 9 – 11. Come già ricordato, le differenti risposte dei sistemi di alimentazione dell’aria e del combustibile alla camera provocano, durante il transitorio, un eccesso di dosatura combustibile aria (espressa in termini di rapporto di equivalenza rispetto alla dosatura stechiometrica) con conseguente innalzamento della temperatura di uscita dal combustore (fig. 15) e di produzione di specie inquinanti, già evidenziata in fig. 11.

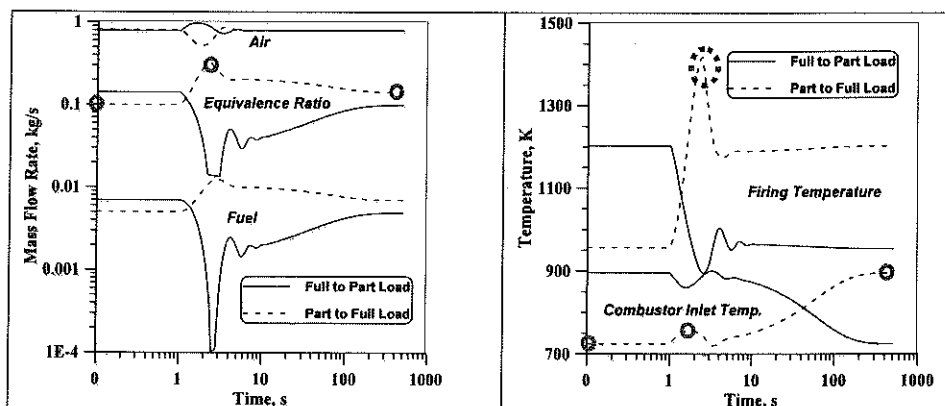


Fig. 15: *Variazioni delle condizioni ai limiti e della temperatura in un transitorio del combustore*

La figura 15 riporta quindi alcune tipiche condizioni ai limiti variabili nel tempo che andrebbero assegnate per la simulazione del transitorio del combustore. In una prima fase di analisi, cui si riferiscono i risultati presentati nel seguito, ci si è limitati a un’analisi semplificata basandosi sulle seguenti considerazioni:

- Calcolare l’intero sviluppo del transitorio, la cui durata è dell’ordine di 10^2 - 10^3 s, comporterebbe costi computazionali inaccettabili.
- La *costante di tempo* del combustore, per variazioni impulsive delle condizioni ai limiti, è circa due ordini di grandezza minore della durata del transitorio, come si nota dalla storia di convergenza riportata in fig. 14.
- L’analisi non stazionaria considera quindi alcuni *punti nodali all’interno del processo in transitorio*, come evidenziato dalla fig. 15:
 - o Le condizioni di regime iniziale;
 - o Quelle intermedie dopo circa 5-10 secondi;
 - o Il regime finale di equilibrio

- Le relative condizioni ai limiti sono imposte come *variazioni impulsive*, che provocano *brusche variazioni* nelle distribuzioni di flusso e nei parametri di combustione.

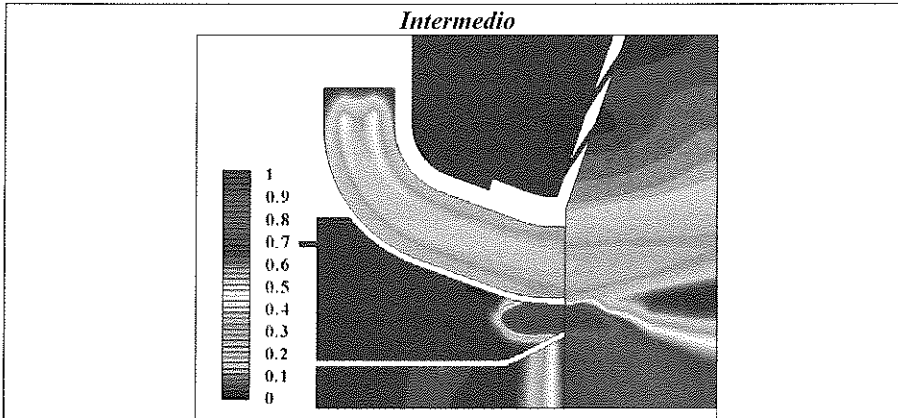


Fig. 16: *Distribuzione del rapporto di equivalenza combustibile/aria in un passo intermedio del transitorio*

Sebbene le ipotesi di variazioni impulsive non corrispondano al reale sviluppo del processo in transitorio, tale assunzione consente di operare una verifica particolarmente severa delle caratteristiche di risposta della camera, quando alimentata in condizioni notevolmente distanti da quelle tipiche di regime. La figura 16 illustra chiaramente come, durante le fasi intermedie del transitorio, i picchi di dosatura di combustibile/aria comportino l'esistenza di zone particolarmente ricche di combustibile (la figura esprime tale situazione in termini di rapporto di equivalenza). Il combustore si allontana, così, dalle sue normali condizioni operative che prevedono uno sviluppo "morbido" del processo di combustione grazie al ridotto rapporto di miscela combustibile/aria realizzato attraverso il canale di premiscelamento. Di conseguenza, la distribuzione di temperatura in questa situazione intermedia risulta fortemente alterata rispetto alle condizioni di regime iniziale e finale (fig. 17). Risultano quindi confermate le previsioni fornite dallo studio del transitorio del sistema complessivo (fig. 15), con aumento considerevole della temperatura media di scarico dalla camera di combustione. L'analisi *CFD* evidenzia inoltre una distribuzione di temperatura allo scarico assolutamente inaccettabile, a causa dell'esistenza di zone con gas ad elevatissima temperatura che comprometterebbe la resistenza dei materiali della turbina collocata immediatamente a valle della camera.

La stessa analisi fluidodinamica fornisce poi la conferma che, in tali situazioni anomale, l'effetto combinato di estese regioni ad alta tempera-

tura e di difetto locale di ossigeno si manifesta con effetti sfavorevoli sia sulla produzione di ossidi di azoto (fig. 18), sia su quella di monossido di carbonio (fig. 19). Ambedue le figure mostrano il dettaglio del solo bruciatore primario.

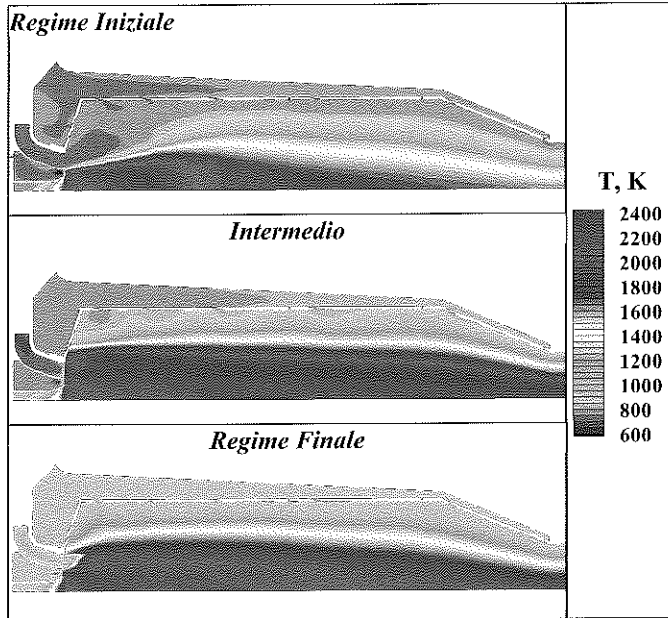


Fig. 17: *Distribuzione di temperatura durante il transitorio del combustore*

In definitiva, l'analisi integrata del transitorio del sistema "micro-turbina a gas" e dei processi fluidodinamici non stazionari nella camera di combustione fornisce una visione pressoché completa delle problematiche legate a brusche variazioni di regime di carico della macchina, suggerendo al tempo stesso la necessità di più efficaci sistemi di controllo del transitorio. Come più volte ricordato, in altri lavori degli autori sono state proposte tecniche più affidabili, basate sul controllo simultaneo "multi-obiettivo" della velocità di rotazione del gruppo rotante e della dosatura istantanea del combustibile [14]. La metodologia integrata di analisi globale e di simulazione fluidodinamica del transitorio fornirà risposte circa l'efficacia di tali tecniche.

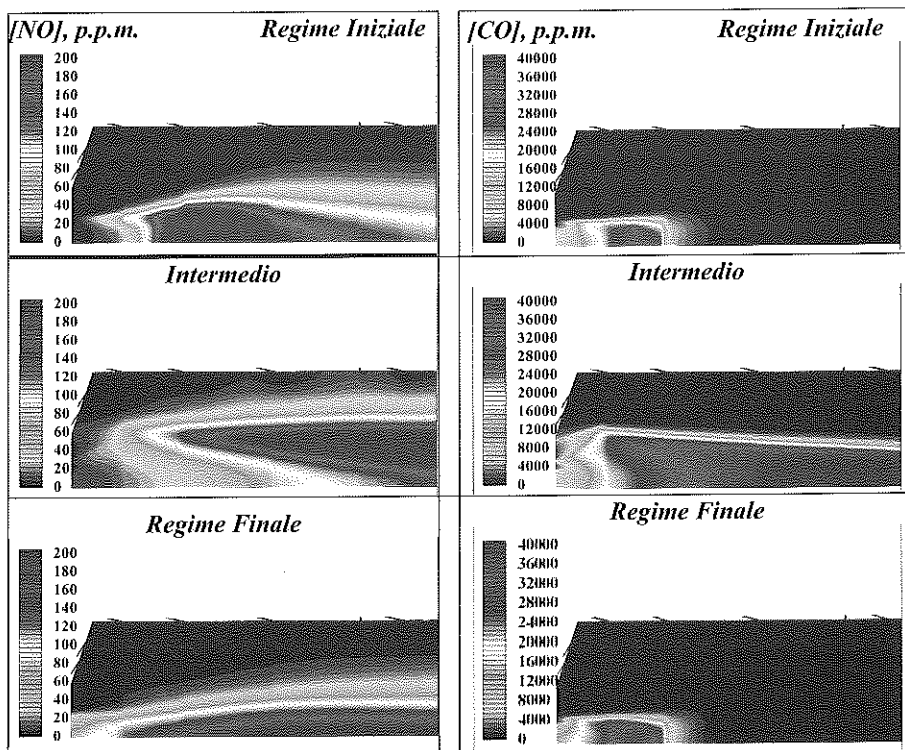


Fig. 18: Distribuzione di monossido di azoto durante il transitorio

Fig. 19: Distribuzione di monossido di carbonio durante il transitorio

3. Modellistica dei processi non-stazionari in motori a combustione interna (MCI)

Modello di propagazione monodimensionale non-stazionario. Il flusso monodimensionale comprimibile in un condotto a sezione costante (fig. 20) in assenza di termini di attrito e scambio termico è retto dal sistema di equazioni (Equazioni di Eulero) nelle incognite $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $p(x,t)$:

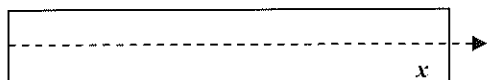


Fig. 20: Condotto a sezione costante

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad (\text{continuità}) \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \quad (\text{quantità di moto}) \\
 \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad (\text{energia}) \quad (20)
 \end{aligned}$$

Nel sistema (20) ρ rappresenta la densità, p la pressione, u la velocità del fluido, c la velocità del suono nel fluido, mentre x e t rappresentano le coordinate spaziali e temporali di integrazione. Al sistema di equazioni (20) vanno inoltre aggiunte le equazioni costitutive del tipo di fluido che

evolve nel condotto. Nel caso in esame si considera l'equazione di stato dei gas: $p = \rho RT$, e la relazione per il calcolo della velocità del suono adiabatica: $c^2 = \gamma RT$, dove T è la temperatura, R è la costante dei gas e $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto tra i calori specifici a pressione costante (c_p) e a volume costante (c_v).

Il sistema (20) può essere generalizzato per tener conto anche degli effetti legati alla presenza di una variazione di sezione del condotto $d\Omega/dx$ e può anche essere espresso in "forma conservativa". Individuando infatti il vettore delle variabili conservative \mathbf{U} ed il vettore dei flussi \mathbf{F} , ed indicando con E ed H rispettivamente l'energia interna e l'entalpia totale ($E = c_v T + u^2/2$, $H = c_p T + u^2/2$), il sistema (20) si esprime in forma vettoriale:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{Bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \rho u \alpha \\ \rho u^2 \alpha \\ \rho u H \alpha \end{Bmatrix} \quad \alpha = \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dx} \quad (21)$$

L'analisi delle proprietà del sistema (21) (sistema iperbolico) porta alla definizione dei seguenti autovalori della matrice dei coefficienti:

$$\lambda_1 = 1/u \quad \lambda_2 = 1/(u + c) \quad \lambda_3 = 1/(u - c)$$

che evidenziano la presenza nel condotto di onde di velocità (λ_1 - Path Lines) e di onde di pressione (λ_2, λ_3 - Mach Lines) che si propagano a velocità rispettivamente u e $u \pm c$.

L'integrazione del sistema (21) può essere effettuata numericamente utilizzando uno schema ai volumi finiti, in cui i vettori $\mathbf{U}(x, t)$, $\mathbf{F}(x, t)$ ed $\mathbf{S}(x, t)$ sono approssimati dai rispettivi valori medi integrali $\bar{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{S}}$ in ogni cella computazionale:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}(x, t) dx \\ \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^n(\mathbf{U}) = \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} \mathbf{F}[\mathbf{U}(x_{j+1/2}, t)] dt \\ \bar{\mathbf{S}}_j^n = \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} \left[\frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}(x, t) dx \right] dt \end{cases} \quad (22)$$

Ciò consente di includere nei risultati numerici anche le soluzioni discontinue (onde d'urto, discontinuità di contatto tra gas a diversa temperatura) ammesse dal sistema (21). Esso viene pertanto discretizzato come segue:

$$\bar{\mathbf{U}}_j^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}_j^n - \lambda \left[\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^n(\mathbf{U}) - \hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}^n(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_j h \right] \quad (23)$$

con $x_j = jh, t^n = n\tau, \lambda = \tau/h, j, n \in \mathbb{N}^+$

Il calcolo dei valori medi integrali nelle (22) viene effettuato definendo una opportuna ricostruzione polinomiale della soluzione alla quale viene applicata la tecnica *TVD* (Total Variation Diminishing) che assicura l'eliminazione di oscillazioni non fisiche della soluzione a monte ed a valle delle discontinuità presenti nel campo di moto [26, 27].

La (23) viene integrata rispettando il criterio di stabilità di Courant-Frederichs-Lewy ($CFL < 1$):

$$\frac{\tau}{h} = \frac{CFL}{\max |u + c|} \quad (24)$$

e definendo opportune condizioni al contorno ed iniziali. Le condizioni al contorno, specificate nelle sezioni $x_s=0$ e $x_s=L$, sono in genere costituite dai valori istantanei di pressione e temperatura totale ($p_0(x_s, t)$ e $T_0(x_s, t)$) per flusso in ingresso nella generica sezione x_s , e dalla sola pressione statica ($p(x_s, t)$) per flusso in uscita dalla medesima sezione.

Tipiche condizioni iniziali corrispondono ad un fluido inizialmente fermo ($u(x, 0)=0$) e in generiche condizioni termodinamiche di densità e pressione ($\rho(x, 0)$ e $p(x, 0)$).

Esempi di calcolo. Si sono considerati due tipi di deflusso stazionario (uno interamente supersonico ed uno transonico), più un tipico esempio di flusso instazionario in un tubo d'urto. Per questo tipo di problemi è possibile confrontare la soluzione numerica con quella analitica derivata dalla teoria dei condotti adiabatici isentropici. In presenza di onda d'urto, per il calcolo della soluzione esatta, si utilizzano anche le relazioni di Rankine-Hugoniot che collegano i valori delle grandezze termofluidodinamiche tra monte e valle della discontinuità. Negli esempi riportati, il dominio fisico è stato discretizzato in 51 nodi e si è adottato un *CFL* unitario.

Nel caso di flusso stazionario, si è in particolare fatto riferimento ad un condotto di tipo divergente la cui legge di variazione di area è:

$$\Omega(x) = a + b * \tanh(cx - d) \quad (25)$$

con $x \in [0, 10]$, $a=1.398$, $b=0.347$, $c=0.8$ e $d=4$.

In figura 21(a) e 21(b) le distribuzioni del numero di Mach calcolate vengono confrontate con la soluzione esatta per il caso di deflusso supersonico e supersonico-subsonico. Nel secondo caso (fig. 21(b)) è presente un'onda d'urto situata ad $x=5$. La precisione del metodo, in termini di errore relativo e di capacità di definizione dell'urto è evidente. Allo scopo

di verificare se tale precisione viene mantenuta anche in problemi non stazionari ed in presenza di discontinuità di contatto (interfaccia tra gas a temperatura diversa), si è effettuato un ulteriore confronto (fig. 22(a) e 22(b)) con la soluzione esatta del problema del tubo d'urto. Anche in questo caso la risoluzione delle discontinuità risulta più che soddisfacente considerata, inoltre, la non elevatissima densità della discretizzazione effettuata.

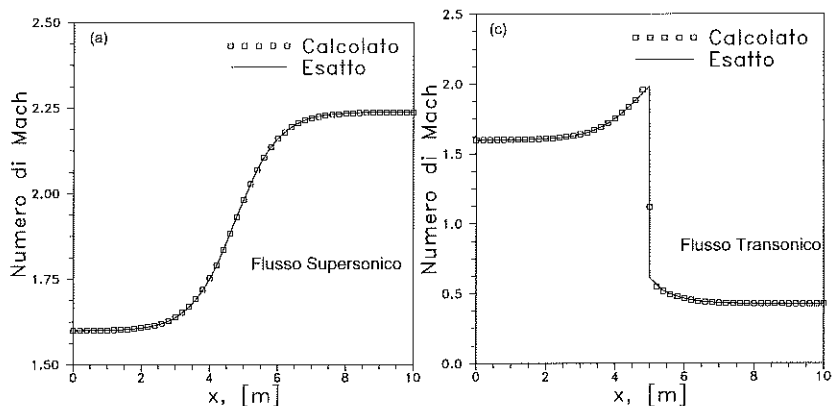


Fig. 21: Flusso monodimensionale stazionario calcolato con la tecnica TVD.

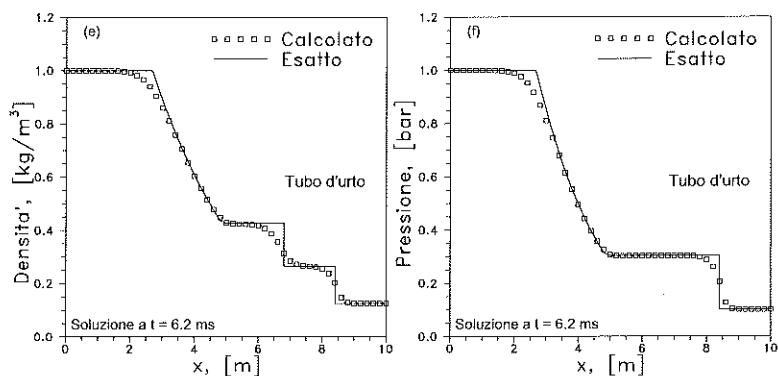


Fig. 22: Flusso monodimensionale instazionario calcolato con la tecnica TVD.

Il motore a combustione interna (MCI). Un MCI è costituito essenzialmente da un sistema di aspirazione, da un insieme di cilindri e da un sistema di scarico. I sistemi di aspirazione e scarico possono essere schematizzati come un insieme di condotti attraversati da un flusso monodimensionale comprimibile, come descritto al paragrafo precedente. Ai fini della simulazione di un MCI, è necessario tuttavia generalizzare ulte-

riormente il sistema di equazioni (21) includendo nei termini sorgente i fenomeni di attrito e scambio termico. È opportuno infine aggiungere al sistema (21) ulteriori equazioni di trasporto scalare di specie chimiche (gas combusti e combustibile), per tener conto della diversa composizione dei gas che evolvono nei sistemi di aspirazione e scarico:

$$\mathbf{U}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{U})]_k = \mathbf{S} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho x_r \\ \rho x_f \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \\ \rho u x_r \\ \rho u x_f \end{Bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \rho \alpha \\ \rho u^2 (\alpha + 2f/D) u / |u| \\ \rho u H \alpha - 4q/D \\ \rho u x_r \alpha \\ \rho u x_f \alpha \end{Bmatrix} \quad (26)$$

L'evoluzione temporale dei fenomeni fisici che evolvono nei cilindri, non essendovi una direzione di moto preferenziale, può essere invece più facilmente descritta con un approccio zerodimensionale (tecnica *filling-emptying*). Per ciascun cilindro andranno risolte pertanto le sole equazioni di bilancio della massa e dell'energia, analoghe all'1 (1) ed alle (10) e di seguito riportate:

$$\frac{d(\rho V)}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \sum \dot{m}_{in,k} - \sum \dot{m}_{out,k} \quad (27)$$

$$\frac{d(\rho e V)}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \sum \dot{m}_{in,k} h_{in,k} - \sum \dot{m}_{out,k} h_{out,k} - p \frac{dV}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} + \dot{Q}_{net} \quad (28)$$

Esempio 1: Motore Diesel Monocilindrico – Il modello di simulazione *0D-1D* e le relative condizioni al contorno sono state testate mediante confronto con dati sperimentali rilevati sul condotto di scarico di un motore diesel monocilindrico. Tale test-case costituisce un severo banco di prova per la procedura numerica a causa della complessa configurazione geometrica del condotto di scarico (fig. 23). Sono presenti infatti, oltre ad alcune brusche variazioni di sezione trasversale, un tratto di condotto divergente che può favorire l'insorgere di onde d'urto e, nella parte terminale, un risonatore di Helmholtz che determina complesse interazioni fra le onde di pressione provenienti dal motore e quelle riflesse dal fondo del condotto.

Il condotto di fig. 23 è stato suddiviso in 3 rami di sezione variabile, tra i quali si determina una giunzione. La tab. 1 riporta i principali parametri numerici utilizzati per il test-case.

coefficiente CFL	0.8
coefficiente di attrito	0.008
coeff. scambio term., W/m^2K	180
numero di nodi ramo 1	74
numero di nodi ramo 2	10
numero di nodi ramo 3	31

Tab. 1. Principali parametri numerici specificati per il test-case.

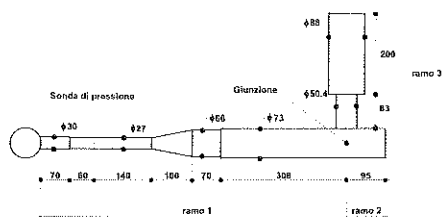


Fig. 23: Configurazione geometrica del condotto di scarico utilizzato nel test-case.

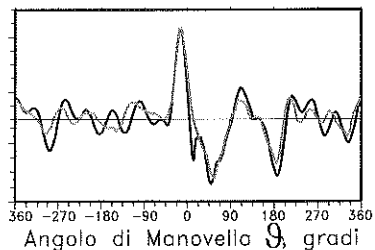


Fig. 24: Andamento delle pressioni rilevate (rosso) e calcolate (blu) nel test-case.

L'andamento della pressione rilevata alla distanza di 130mm dalla valvola di scarico del condotto di fig. 23 evidenzia la nascita di un'onda di pressione principale subito dopo l'apertura della valvola di scarico ($\theta = -50$). A tale onda fa seguito una forte espansione in corrispondenza del tratto divergente del condotto con formazione di un'onda d'urto che viaggia all'indietro e raggiunge la sonda di pressione quando il pistone è in prossimità del punto morto inferiore ($\theta = 0$) (si ricorda che la velocità di rotazione del motore è pari a 3150 giri/min). A tale oscillazione principale fa seguito una seconda onda di sovrappressione determinata anche dalla fase di scarico forzato che si completa 10° dopo il punto morto superiore (PMS) ($\theta = 190$). Da tale angolo, e fino alla successiva apertura della valvola, il condotto di scarico risulta isolato dal motore ed è pertanto sede di oscillazioni libere di pressione di ampiezza gradatamente decrescente in funzione dei fenomeni di attrito e scambio termico.

La fig. 24 riporta il confronto tra i risultati numerici ottenuti con il modello di flusso descritto in questo lavoro e i dati sperimentali. A conferma dell'accuratezza del metodo *TVD*, l'accordo con il segnale di pressione rilevato è molto soddisfacente. Vengono infatti correttamente risol-

te l'ampiezza e la fase di quasi tutte le oscillazioni presenti ed in particolare le prime due appaiono quasi esattamente riprodotte.

Esempio 2: Motore ad accensione comandata Pluricilindrico – La fig. 25 mostra una tipica schematizzazione monodimensionale di un motore ad accensione comandata pluricilindrico. I condotti da numerati da 1 a 27 rappresentano il sistema di aspirazione terminante nelle due valvole di aspirazione per cilindro. I condotti da 28 a 41 schematizzano invece il sistema di scarico. Ciascuno dei condotti numerati viene discretizzato e al suo interno viene risolto il sistema di equazioni (26). Ai 4 cilindri C1-C4 vengono invece applicate le equazioni di bilancio (27) e (28). Nelle giunzioni tra più condotti o tra condotti e cilindri vengono imposte opportune condizioni al contorno.

Le figg. 26-28 mostrano i confronti ottenuti con i dati sperimentali, sia in termini di andamenti istantanei di pressione nel cilindro e nel plenum di aspirazione (fig. 26) che in termini di andamenti globali delle curve caratteristiche del coefficiente di riempimento e della portata d'aria in fig. 27, e della potenza e del consumo del motore in fig. 28. L'approccio modellistico *0D-1D* seguito sembra pertanto essere sufficientemente accurato per descrivere i fenomeni instazionari che si verificano nei condotti di un *MCI* e che determinano le sue prestazioni globali [24, 25, 36, 37].

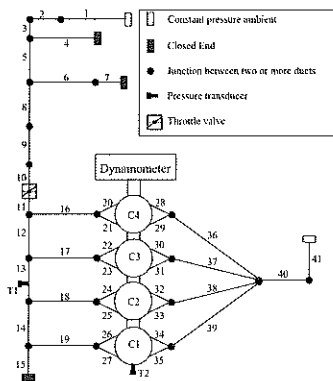


Fig. 25: Schematizzazione monodimensionale di un motore pluricilindrico.

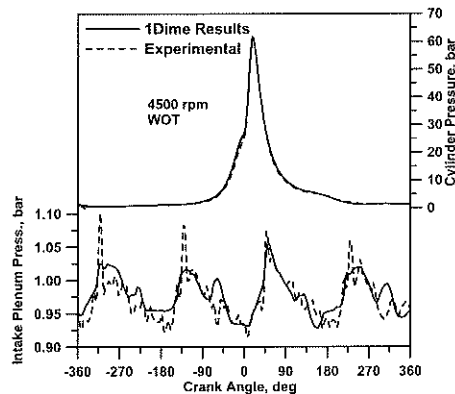


Fig. 26: Andamento della pressione calcolata e rilevata nel cilindro e nel plenum di aspirazione.

Una ulteriore applicazione dei modelli di calcolo monodimensionali per la simulazione dei *MCI* è relativa alla predizione del rumore di natura gadinamica emesso all'aspirazione del propulsore [34]. Con riferimento alla fig. 29, il condotto di aspirazione direttamente in comunicazione con

l'ambiente esterno può essere infatti considerato come una sorgente di emissione sonora puntiforme. Le onde di pressione, generate dall'apertura ciclica delle valvole di aspirazione, giungono infatti alla bocca di aspirazione e si propagano nell'ambiente esterno sotto forma di rumore gasdinamico.

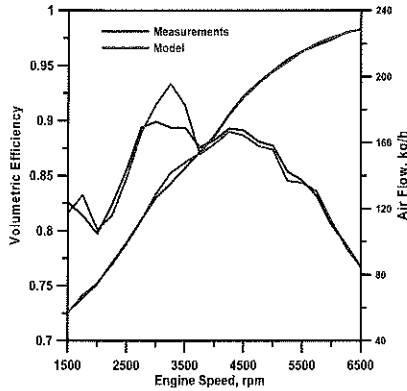


Fig. 27: Andamenti calcolati e rilevati del coefficiente di riempimento e della portata d'aria.

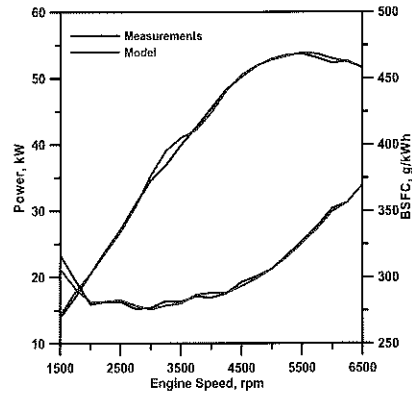


Fig. 28: Andamenti calcolati e rilevati della potenza e del consumo specifico.

$$p(r,t) = \frac{\rho \Omega}{4 \pi r} \frac{d}{dt} \left[u \left(t - \frac{r}{a} \right) \right] \quad (27)$$

$$SPL = 20 \log_{10} \left(\frac{p_{rms}}{p_{ref}} \right) \quad (28)$$



Fig. 29: Condotto di aspirazione visto come una sorgente di emissione sonora puntiforme.

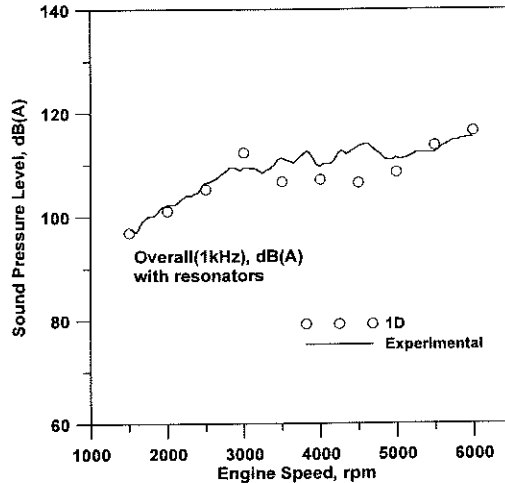


Fig. 30: Andamenti numerici e sperimentali dell'emissione sonora complessiva di un MCI.

I modelli monodimensionali prima descritti sono in grado, come dimostrato, di riprodurre l'evoluzione temporale di tale sistema di onde e possono pertanto essere utilizzati per predire il rumore emesso dal propulsore. A tal fine è possibile ricostruire il campo di pressione a distanza r dalla bocca di aspirazione mediante la relazione (27). Lo scarto quadratico medio ottenuto dalla (27) consente infine di stimare mediante la (28) il livello di pressione sonora (Sound Pressure Level, SPL) e di confrontarlo con una misura microfonica effettuata sul motore installato sul veicolo. La fig. 30 riporta, al variare della velocità di rotazione del motore, gli andamenti numerici e sperimentali dell'emissione sonora complessiva ($Overall\ SPL$, in $dB(A)$) fino alla frequenza di kHz e mostra come sia possibile ottenere un buon accordo anche su tale importante parametro motoristico.

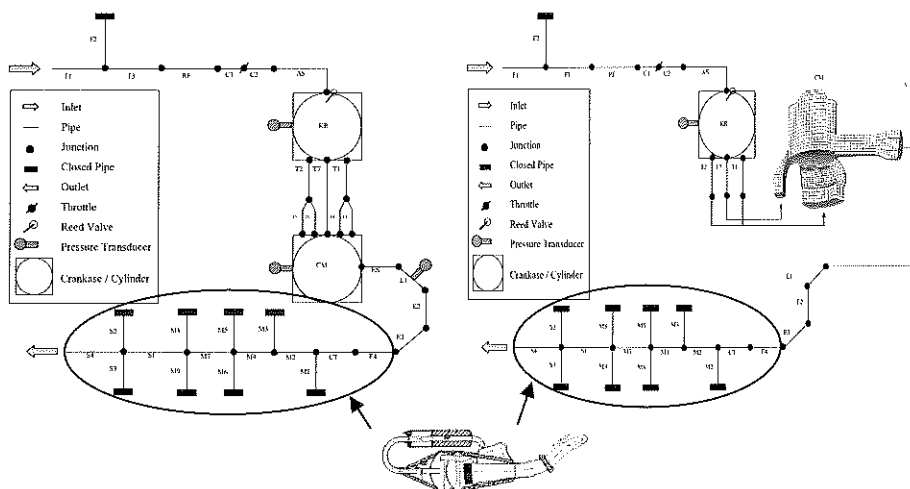


Fig. 31: Schematizzazione 0D-1D di un motore 2 tempi.

Fig. 32: Schematizzazione 0D-1D-3D di un motore 2 tempi.

Esempio 3: Motore 2 tempi – Approccio 0D-1D e 0D-1D-3D.

Un'ulteriore applicazione dei modelli monodimensionali prima descritti è riportata in questo paragrafo con riferimento ai motori a 2 tempi di piccola cilindrata con lavaggio nel carter [22, 23, 35]. Tali motori sono caratterizzati da un complesso sistema di scarico, necessario per ridurre il cortocircuito di carica fresca verso la luce di scarico. Le figg. 31 e 32 rappresentano due diverse possibili schematizzazioni del motore in esame. In entrambe si utilizza la metodologia 1D già applicata negli esempi precedenti ed in entrambe la marmitta di scarico è descritta mediante un complesso sistema di condotti monodimensionali equivalenti.

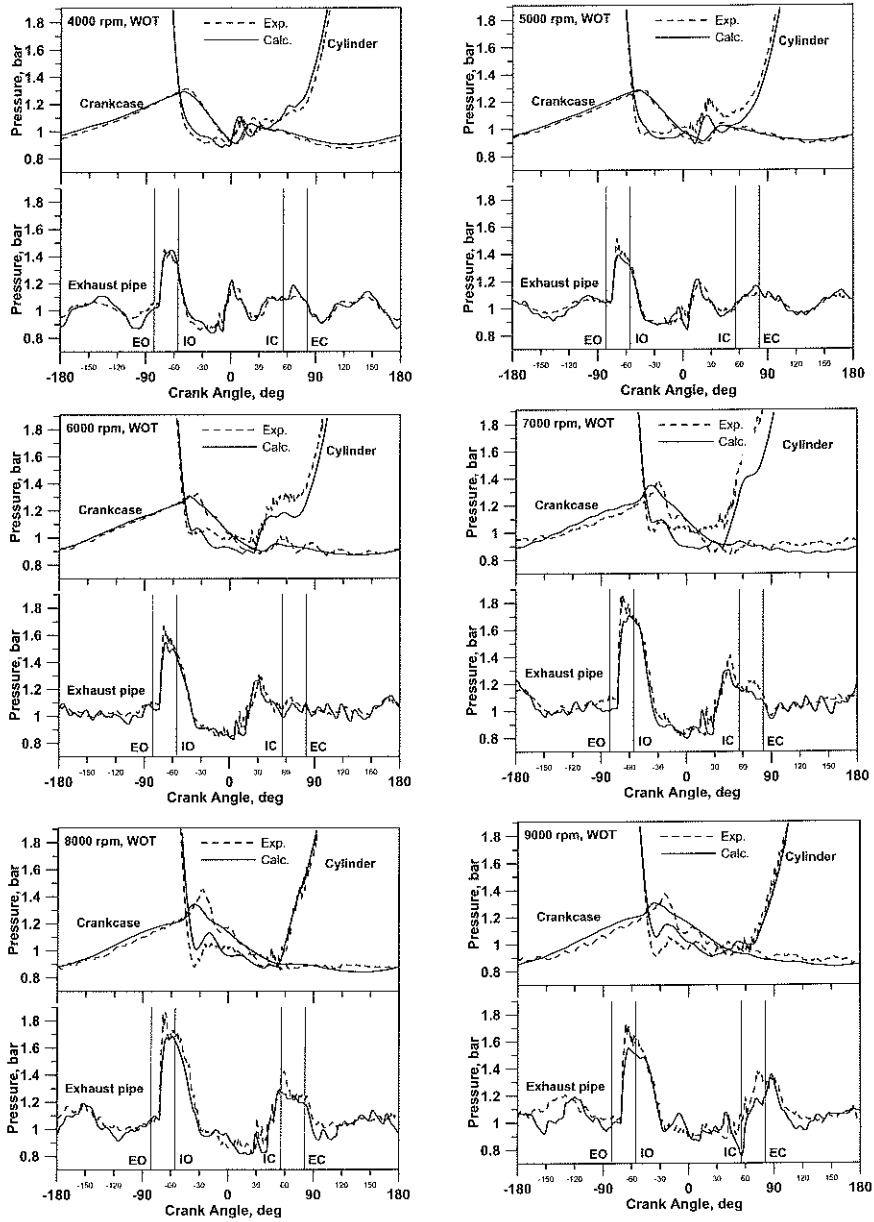


Fig. 33: Confronto numerico sperimentale della pressione istantanea nel cilindro, nel carter e nel condotto di scarico a varie velocità di rotazione e a pieno carico del motore a 2 tempi.

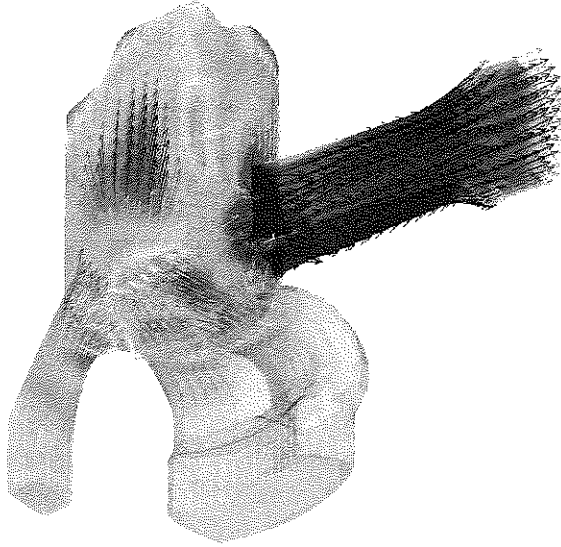


Fig. 34: Rappresentazione del campo di moto istantaneo nel cilindro durante la fase di lavaggio del motore a 2 tempi.

Mentre nella fig. 31 tuttavia le capacità a volume variabile (Carter e Cilindro) sono descritte con schematizzazione zerodimensionale (approccio $0D-1D$), nella fig. 32 si utilizza, per il calcolo del cilindro, una più complessa schematizzazione tridimensionale (approccio $0D-1D-3D$). La reale geometria del cilindro e dei condotti terminali di travaso e scarico è tenuta in conto dalla costruzione di una opportuna griglia di calcolo. I diversi elementi presenti nella schematizzazione sono accoppiati mediante imposizione di sofisticate condizioni al contorno. Il sistema di equazioni risolto per il cilindro è in questo caso del tutto analogo a quanto descritto con riferimento all'analisi *CFD* della camera di combustione di una *MGT* (equazioni 14-19). Il calcolo $1D$ nei condotti è in grado di descrivere l'evoluzione della pressione nel carter-pompa, nel cilindro e nel sistema di scarico in tutte le condizioni operative del motore, come riportato in fig. 33. L'approccio $3D$ consente invece di descrivere in maniera dettagliata l'evoluzione del campo di moto tridimensionale istanzionario turbolento nel cilindro. La fig. 34 mostra, a titolo di esempio, una rappresentazione del campo di moto istantaneo nel cilindro durante la fase di lavaggio del motore a 2 tempi.

L'utilizzo gerarchico di modelli $0D-1D$ e $3D$ consente di utilizzare l'approccio modellistico più appropriato in relazione al sistema fisico in esame e all'applicazione di volta in volta considerata.

Conclusioni

Le metodologie di simulazione termo-fluidodinamica dei processi non stazionari presentate in questo lavoro contribuiscono alla comprensione di tipiche fenomenologie dei processi nelle macchine a fluido, consentendo la definizione di opportune strategie di progetto e di controllo del sistema completo e dei singoli componenti.

Va ricordato che l'approccio teorico-numerico che caratterizza tali metodologie, sebbene affetto dalle limitazioni derivanti dalle ipotesi alla base di alcuni sotto-modelli, costituisce l'efficace complemento allo studio sperimentale delle stesse fenomenologie: è tipico infatti l'impiego della simulazione numerica per l'identificazione dei casi di maggiore interesse, che richiedono quindi la necessaria convalida sperimentale.

Va inoltre sottolineato come l'evoluzione delle potenzialità di calcolo permetta l'impiego intensivo della fluidodinamica computazionale quale strumento di simulazione dei processi non stazionari nei singoli componenti o nel sistema complesso che costituisce la macchina motrice: ne consegue una sempre più valida integrazione con i metodi di ordine dimensionale inferiore per lo studio della risposta non stazionaria della macchina. I risultati discussi nei precedenti paragrafi hanno ampiamente messo in luce come l'impiego di tali metodi di approccio gerarchico consentano di perseguire con crescente efficacia il duplice obiettivo di studio accurato del sistema di conversione dell'energia e del suo controllo ottimale.

Bibliografia

- [1] Bozza, F., Cameretti, M.C., and Tuccillo, R, 2003, "Adapting the Micro-Gas Turbine Operation to Variable Thermal and Electrical Requirements", *ASME paper GT 2003-GT-38652*, also in *ASME Jnl. Of Gas Turbines and Power*, vol. 127, pp. 514-524, 2005.
- [2] Cameretti, M.C., and Tuccillo, R, 2004, "Comparing Different Solutions for the Micro-Gas Turbine Combustor", *ASME paper GT-2004-53286*
- [3] Bozza, F., and Tuccillo, R, 2004, "Transient Operation Analysis of a Co-generating Gas Turbine", *ASME paper ESDA-2004-58079*
- [4] Cameretti, M.C., and Tuccillo, R, 2005, "A CFD Based Off-Design Study Of Micro-Gas Turbines Combustors", *ASME paper GT-2005-68924*
- [5] Traverso A., Calzolari, Massardo A.F., 2003, "Transient Analysis and Control System for Advanced Cycles Based on Micro Gas Turbine Technology", *ASME paper 2003-GT-38269*

- [6] Davison C.R., Birk A.M., 2004, "Steady state and transient modeling of a micro-turbine with comparison to operating engine", ASME paper 2004-GT-53378
- [7] Camporeale, S.M., Fortunato, B., and Mastrovito, M., 2002, "A High-Fidelity Real-Time Simulation Code of Gas Turbine Dynamics for Control Applications", ASME paper GT-2002-30039
- [8] Parente J., Mori G., Anisimov, V., Croce G., 2004, "Micro Gas Turbine Combustion Chamber Design and CFD Analysis", ASME paper GT2004-54247
- [9] Jeffery A. Lovett and Kevin T. Uznanski, 2002, "Prediction Of Combustion Dynamics In A Staged Premixed Combustor ", ASME paper GT-2002-30646
- [10] Bozza F., Rizzo G., and Tuccillo R., 1998, "Identification of a Model for Monitoring Nitric Oxide Emissions in a Gas Turbine Power Plant," in "Theory and Practice of Control and Systems", World Scientific Publishing Ltd. London, pp. 437-442, ISBN 981-02-3668-9.
- [11] Tuccillo R., (2005), " Performance and Transient Behaviour of MTG Based Energy Systems", in VKI/RTO Lecture Series on "Micro Gas Turbines", March 2005.
- [12] Tuccillo R., Cameretti, M.C., 2005. "Combustion and Combustors for MTG Applications", in VKI/RTO Lecture Series on "Micro Gas Turbines", March 2005.
- [13] Bozza F., Pontecorvo A., Reale F, Tuccillo R., 2005, "Analisi del funzionamento a regime ed in transitorio di una microturbina a gas", ATTI del 60° Congresso Nazionale ATI. Roma, Sett. 2005.
- [14] Bozza F., , Reale F, Tuccillo R., 2006, "Il Controllo Delle Prestazioni E Delle Emissioni Nei Transitori Di Una Microturbina A Gas", ATTI del 61° Congresso Nazionale ATI. Perugia, Sett. 2006.
- [15] Amsden A.A., 1997, "KIVA-III v: Block-structured KIVA program Engine with vertical or canted valves", *LA – Los Angeles* 13313 – MS, Los Alamos
- [16] Hirt,C.W., Amsden, A.A., Cook, J.L., 1974, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speed", *Journal of Computational Physics* 14, 227-253.
- [17] Nicol, G.D., Malte, P.C., Hamer, A.J, Roby, R.J., and Steele, R.C., 1998, "A Five-Step Global Methane Oxidation – NO Formation Mechanism for Lean Premixed Gas Turbine Combustion", *ASME paper* 98-GT-185
- [18] Li, S.C. and Williams, F.A, 2000, "Reaction Mechanism for Methane Ignition", *ASME paper no.* 2000-GT-145
- [19] Zel'dovich, Y.B., Sadovnikov, P.Y., Frank-Kamenetskik, D.A., 1947, "Oxidation of Nitrogen in Combustion", Academy of Science of SR, Institute of Chemical Physics, Moscow-Leningrad.
- [20] Benson R.S., Bradham P.T., "A new gas dynamic model for the gas exchange process in two-stroke loop and cross scavenged engines", *Int.J.Mech.Sci.* Vol. 19, 1977.

- [21] Bozza F., Cameretti M.C., Tuccillo R., "Numerical Simulation of In-Cylinder Processes and Duct Flow in a Light-Duty Diesel Engine", Fourth International Symposium on Small Diesel Engines, Varsavia, 1996, in "Jrl of POLISH CIMAC", Vol. 2, n. 1, pp. 51-66, 1996.
- [22] Bozza F., Tuccillo R., de Falco D., "A Two-Stroke Engine Model Based on Advanced Simulation of Fundamental Processes", SAE paper 952139, SAE Int. Congr. & Exp., Milwaukee, WI, sett. 1995.
- [23] Bozza F., Gimelli A., Unich A., Cozzolino R., "A Physically Based Scavenging Model Applied to a Small Size Two Stroke Engine" proc. of 4th International Conference ICE99 Internal Combustion Engines: Experiments and Modeling, Capri, Sett. 1999, pp.623-632
- [24] Bozza F., Gimelli A., Senatore A., Caraceni A., "A Theoretical Comparison of Various VVA Systems for Performance and Emission Improvements of SI Engines", SAE Paper 2001-01-0671, 2001
- [25] Bozza F., Gimelli A., Tuccillo R., "The Control of a VVA Equipped SI-Engine Operation by Means of 1D Simulation and Mathematical Optimization", SAE Paper 2002-01-1107, SAE Trans. Vol. 111, 2002.
- [26] Harten A., "On a Class of High Resolution Total Variation Stable Finite Difference Schemes", Journal of Computational Physics, Vol. 21, 21-23, 1984.
- [27] Manna M., "A Three Dimensional High Resolution Compressible Flow Solver", PhD Thesis, Catholic Univ. of Louvain – Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1992, also in TN 180, VKI, 1992.
- [28] Winterbone D.E. and Pearson R.J., "Design Techniques for Engine Manifolds. Wave Action Methods for IC Engines", Professional Engineering Publishing, 1999, ISBN 1 86058 179 X.
- [29] Onorati A., "Nonlinear Fluid Dynamic Modeling of Reactive Silencers Involving Extended Inlet/Outlet and Perforated Ducts", Noise Control Eng. J. vol. 45(1), Jan-Feb 1997.
- [30] G. Ferrari, A. Onorati, "A white Noise Approach for Rapid Gas Dynamic Modelling of I.C. Engine Silencers", 3rd IMechE International Conference "Computers in reciprocating engines and gas turbines" (CET '96), 9-10 January 1996, London.
- [31] Silvestri J. J., Morel T., Costello M., "Study of Intake System Wave Dynamics and Acoustics by Simulation and Experiment", SAE Paper 940206, 1994.
- [32] Davies P.O.A.L., "The Design of Silencers for Internal Combustion Engines", Jrl of Sound and Vibration, Vol. 1, n° 2, pp. 185-201
- [33] Munjal, M.L., "Acoustic of Ducts and Mufflers", John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [34] Bozza F., Gimelli A., Pianese V., De Martino S., Curion R., "A Procedure for the Design of an Intake System: 1D Analysis and Experimental Validation", SAE Transaction, Jrl of Passenger Cars – Mechanical Systems, Vol .6, ISBN: 0-7680-1555-3 pp. 172-180, 2005.
- [35] Bozza F., Gimelli A., "A Comprehensive 1D Model for the Simulation of a Small-Size Two-Stroke SI Engine", SAE paper 2004-01-0999, Book Number:

SP-1830 Modeling of Spark Ignition Engines, SAE 2004 World Congress & Exhibition, March 2004, Detroit, MI, USA, Session: Modeling of SI Engines (Part 3 & 4 of 6). Published also on SAE 2004 Transactions, Journal of Engines.

[36] Bozza F., Gimelli A., Siano D., Torella E. Mastrangelo G., “A Quasi-Dimensional Three-Zone Model for Performance and Combustion Noise Evaluation of a Twin-Spark High-EGR Engine”, SAE 2004 Transaction, Journal of Engines – section 3, vol. 113-3, pp. 491-501, ISBN 0-7680-1552-9, 2005.

[37] Bozza F., Gimelli A., Merola S. S., Vaglieco B. M., “Validation of A Fractal Combustion Model through Flame Imaging”, SAE 2005 Transaction, Journal of Engines – section 3, vol. 114-3, pp. 973-987, ISBN 0-7680-1689-4, 2006.

Accessibility improvement of public e-procurement web services

di G. Bruno, E. Esposito, M. Mastroianni, D. Vellutino

Abstract

This paper shows some results of a multidisciplinary research whose aim is to identify and test a methodology for the improvement of accessibility of public e-procurement web services. The specific goal is to specify a group of attributes and characteristics that can be measured using quantitative indicators, which allow for the comparison of e-procurement service. At this purpose, a model based on a hierarchical system (the tree of evaluation) articulated on three levels has been introduced. The tree of evaluation represents a powerful tool to improve the accessibility of e-procurement services. The first level allows for a comparison among different service and synthesises the accessibility of the service. The second level individualises possible attributes to improve and the professional skills involved. The third level indicates what kind of intervention must be realised. The proposed methodology has been used to evaluate and compare five Italian public e-procurement services. The experimental results have highlighted the peculiarity of the five analysed services.

Introduction

The Public Sector appears to be more and more involved in the realisation of information systems user (citizen)-orientated (Commission of the European Community, 2000; EITO, 2002). Three main factors are pushing national and local government bodies towards Information and Communication Technology (ICT). The first factor is the necessity to stimulate organisational change of the public sector. The second factor concerns the need to improve efficiency, effectiveness, and cost reduction (e-administration). The third factor regards the possibility to achieve a better relationship between citizen and institution (e-democracy), in terms of transparency of the administrative action and of participation (Bertelsmann Foundation, 2002). Moreover, many industrial countries are developing relevant initiatives to improve public e-procurement

services. At the beginning of 2000 the Federal government of United States launched an on-line reverse auction pilot project for Navy, Army, Air Force and US Postal Service (O'Hara, 2000). Thanks to this activity the Navy saved about 38.8 Millions of US Dollar during the first step of the project (Hardy, 2003). Nowadays, many Agencies of the U.S. Federal Government such as U.S. Department of State, currently use e-procurement systems (U.S. Department of State, 2004).

In this context, this paper focuses on the problem of evaluation of public e-procurement services. In general, in dealing with this problem it is necessary to consider that such a service is essentially based on a web site. Consequently, it is useful to take up a preliminary synthetic analysis of methodologies and variables currently used in the evaluation of web sites.

In the nineties, various studies and researches have been developed to analyse web sites (first approach). Most of studies focus on the aspects concerning the evaluation of web site quality and generally use indicators that are in large part estimated in a subjective manner (Nielsen, 1993, RUR, 2001). Moreover, almost all these studies evaluate web site quality using either the criterion of accessibility or usability. At the half of nineties, Ratner et al. (1996) have demonstrated that accessibility and usability are weakly correlated each other; consequently, it is not possible to evaluate a web site measuring only one of these aspects¹. At the end of nineties, models, which take into consideration a wide range of variables including accessibility, usability, and other parameters have been proposed (recent approach). Such models, finalised at benchmarking the research activities and web sites ranking, introduce a set of variables (mostly qualitative) based on the content, the scope of the web site and the type of users (Nielsen 1994, and 2000). The indicators are grouped together in thematic indexes that synthesise complex concepts, such as accessibility, usability, communication, functionality, availability of the services, etc. Unfortunately, even if such models are well finalised at benchmarking they are not equally efficient to individualise the critical aspects and the type of intervention to improve the web site performance.

As far as the first approach is concerned, in line with Ratner our hypothesis is that the two concepts of accessibility and usability are complementary and not independent each other; therefore it is not possible to separate them. The logic consequence of this hypothesis is that it is not possible to individualise an indicator (or a set of indicators) able to measure just either accessibility or usability. In line with this consideration our approach is that the evaluation of a public e-procurement service should be based on a set of indicators that represent both concepts. For this reason in the next sections we use the word accessibility to mean both concepts (accessibility and usability). Regarding the second approach, we underline the necessity to use quantitative

¹ About the concepts of accessibility and usability see: the W3C Consortium, 1999; G8, 2000; Ratner et al. 1996.

indexes (instead of qualitative ones) grouped in a way that it be possible to individualise the critical aspects, the professional skill involved and the type of intervention to improve the service performance.

Starting from these considerations in this paper a quantitative methodology to evaluate the accessibility of public e-procurement services is introduced. The proposed methodology allows the individualisation of professional skills which could perform an improvement of accessibility.

The paper is organised in six parts. In the second section the methodology is illustrated. The third section focuses on the indexes introduced for the measurement of the web sites accessibility. The fourth section is dedicated to the user analysis. In the fifth section five Italian Public e-procurement services are evaluated. Finally, the discussion and some indications on possible further developments of research are illustrated.

Methodology

The factors affecting the accessibility of e-procurement services in the public sector are various and different. Nevertheless, they can be grouped according to the following aspects (G8 Member States, 2000; Nielsen, 2000):

- information and services must be accessible to users with every kind of disability, social and cultural. The “Okinawa Charter” underlines that accessibility to public services through web sites must then be possible also for users who suffer from any type of disability, be it physical or cultural (G8, 2000). A cultural disadvantage is certainly the case of the low level of citizen education, which can be tackled by publishing documents written in a simple and direct language instead of the bureaucratic terminology that is often incomprehensible. Another category of cultural disability is the insufficient familiarity of the users with the tools of Information Technology; for this reason the web sites have to be designed in such a way that non-computer science users can easily access.;
- the navigation in the system should be the simplest and most comfortable possible, in such a way that the users should be stimulated to use it. As equal opportunities to access information and public services represent a crucial aspect of open and democratic societies, the level of accessibility of ICT services on web is becoming crucial for citizen;
- the public manager should be able to co-ordinate and evaluate the work of all the various professionals and consultants involved in the construction of the web site (eg: the webmaster, graphic designers, communicators, system administrators, et cetera);

On the basis of these factors, we assume that the main objective of an e-procurement service is to allow the access to the widest number possible of users (Mastoianni and Vellutino, 2002; Esposito et al., 2003, Bruno et al. 2004).

From this point of view is crucial to analyse the problem of evaluating the accessibility of e-procurement service considering both the web site (technical aspects and performance) and the user (needs and perceptions). At this purpose we propose a three steps procedure:

1. In the first step the unit of investigation is the web site and the aim is to analysis its performances. In this phase a set of indicators measuring web site technical characteristics is introduced;
2. In the second step the subject of analysis is the user and the aim is to investigate on his perceptions, that is the priorities the user assigns to each characteristic. Thanks a structured questionnaire, users have been interviewed and priorities measured;
3. In the final step, on the base of measured web site characteristics (first step) and users priorities (second step), a model to evaluate the accessibility of public e-procurement services is proposed.

First step: the web site performances

The analysis of the web site starts from the consideration that such a web is a hierarchical system articulated on three levels. The first level represents the e-procurement service that is divided into a set of attributes (second level). Each attribute is defined through a set of characteristics (third level).

More precisely four attributes have been individuated: Textual language, Visual language, Digitalisation, Digital communication. Each attribute is associated to a specific professional skill (Table 1). In this way the model, together with the evaluation of each attribute, indicates the skill which can perform an improvement of accessibility. For instance, low values of indexes relative to visual language attribute indicate that an improvement of the graphic quality is required and, then, the intervention of a designer or of a graphic expert is needed.

In turn, each attribute has been associated with two or three characteristics. On the whole, eleven characteristics have been defined: Syntax comprehensibility, Lexicon comprehensibility, Legibility, Positioning, Colour contrast, Connection speed, Page download speed, Broken links, Reachability, Navigability, and Navigation help (Fig. 1). The set of characteristics can be measured using quantitative indexes and computed using automatic and/or semiautomatic tools.

The proposed attributes and characteristics can be enlarged in order to take into account other factors and aspects affecting the general evaluation of an e-procurement service. For instance indexes of quality and efficiency of the e-procurement service (such as security, costs, organisation and management, etc.) could be also considered.

The addition of further attributes and characteristics does not influence the general architecture and the functionality of the proposed hierarchical model. At current state the choice of attributes comes from the objective of measuring the accessibility of the web service.

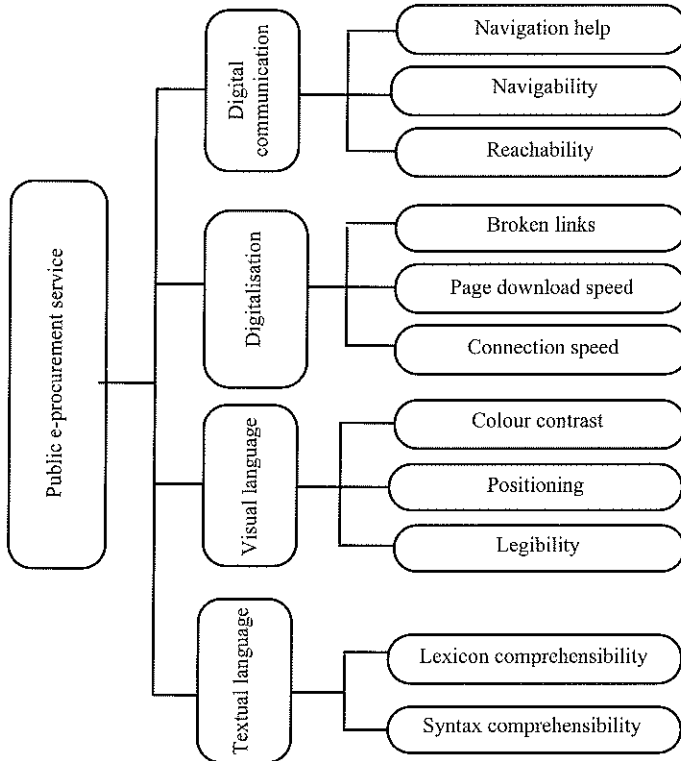


Figure 1 – Attributes and characteristics for the evaluation of an e-procurement web site accessibility.

Table 1 – Attributes and associated profession skills

Attribute	Associated skill
Textual language	Text writer
Visual language	Designer / Graphics expert
Digitalisation	Computer science professional (system or network)
Digital communication	Web designer

Second step: the user priorities

The weight that users assign to each characteristic and each attribute are evaluated through the so-called Analytic Hierarchy Process (AHP) (Saaty, 1980; 1994). The AHP is one of the powerful techniques of measurement which can be used to scale elements in a hierarchy structure with mutually independent elements in each level. This methodology has been widely and successfully applied in many fields (Byun, 2001; Ngai 2003; Sarkis and Talluri, 2004).

AHP is based on the use of a hierarchy structure to decompose a complex problem, proceeding downward from the most general and less controllable (goals, criteria, attributes) to the more concrete and measurable factors. The main aim is to make a ranking of n given criteria or attributes using pairwise comparisons.

The core of the methodology is the introduction of the matrix of the empirical pairwise priorities $A=(a_{ij})$ where a_{ij} express a relative significance of the criterion i and j according to the scale illustrated in Table 2 (Saaty, 1980). The matrix is said to be reciprocal if $a_{ij}=1/a_{ji}$ for each (i,j) and consistence if $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$ for each (i,j,k) .

Table 2 – Pairwise comparisons and score

Score	Pairwise comparison
1	A_i and A_j equally important
3	A_i slightly more important than A_j
5	A_i strongly more important than A_j
7	A_i very strongly more important than A_j
9	A_i absolutely more important than A_j

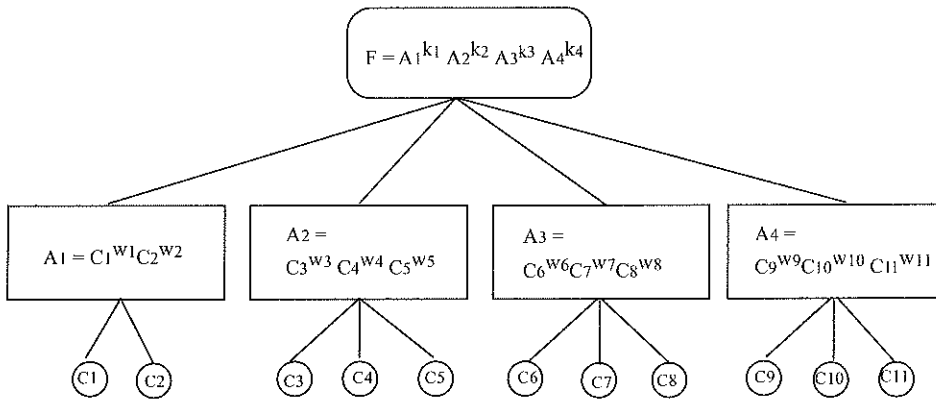


Fig. 2 – The tree of evaluation.

As the matrix is the result of the aggregation of the individual judgements for each set of pairwise comparisons (Forman and Peniwati, 1998), the consistency is not assured. Therefore, a reasonable requirement is to determine a set of priorities w_j associated to a low level of inconsistency. It can be shown that, given an empirical matrix, the principal eigenvector provides the vector of priorities w_j , when normalised, while an index of consistency is given by (Saaty, 1980):

$$CI = (l_{max} - n)/(n-1)$$

where l_{max} denotes the maximal eigenvalue of the matrix.

For complete consistency l_{max} should be equal to the order n of the matrix and, consequently, CI is equal to 0. A consistency index of 0.10 or less is considered acceptable.

The major advantage of the hierarchical structure is that it allows for a detailed, structured and systematic decomposition of the overall problem into its fundamental components and interdependencies, with a large degree of flexibility. On the other hand, the pairwise comparison approach represents a simple and intuitive way of expressing judgements on the relative importance of the different constituents of the hierarchy.

Third step: the final framework

Once Characteristics have been measured (first step) and weighted (second step), different methodologies can be used to evaluate the accessibility of public e-procurement services. One of possible techniques consists in the construction of a multi-criteria function (also called utility function). A multi-attribute function can be ordinal or cardinal. In the first case the function provides an ordering of alternatives without indicating the degree to which one alternative

may be preferable to another; for this reason the scale used to measure each index is not significant. A cardinal function, instead, indicates an ordering and a level of preference in terms of measurable mathematical quantity for which any appropriate unit may be used. Specifically, five cardinal multi-criteria functions have been carried out. One for each attribute, and one representative of the whole service.

The indexes to measure web site performances

In this section the indexes introduced to measure the individuated characteristics are illustrated. According to the hierarchical model the indexes are divided into four groups: indexes relative to the textual language attribute, indexes relative to the visual language attribute, indexes relative to the digitalisation attribute, and indexes relative to the digital communication attribute.

Textual Language Indexes

The indexes relative to the textual language attribute measure characteristics of the textual content with reference to the ease of comprehension. To ensure accessibility to the services offered by the site, the used language should meet the needs of a large number of users widely differentiated from the social and cultural point of view. For such a purpose two indexes of textual comprehensibility have been used: syntax comprehensibility and lexicon comprehensibility.

The index of syntax comprehensibility, Flesch (1951) and Gunning (1973) have demonstrated that a text is more or less comprehensible if some quantitative characteristics, objectively measurable and testable, reflect some criteria drawn from the use of formulas. On these bases, an index (Flesch index) has been proposed that measures, with a score system from 0 to 100, the comprehensibility of a document written in American English. Starting from analogous considerations, the so-called Gulpease index has been developed for the Italian language (Lucisano et al. 1988). Considering a text sample of at least 100 words the Syntax Comprehensibility Index (SCI) or Gulpease index is calculated using the following formula:

$$SCI = 89 - (Lp/10) + (3*Fr)$$

Where:

Lp = the number of letters * 100 / the number of words;

Fr = the number of phrases * 100 / the number of words.

The value of such an index may vary from 0 (hardest to read) to 100 (easiest to read). The score may be translated into school grades: a minimum

value of 80, for example, indicates that the text turns out to be comprehensible for a user with of an elementary scholastic level, 60 for the Italian “scuola media” (ages from 10 to 13) and 40 for the high school.

The index of lexicon comprehensibility represents an index of presence of words of common use in the text. It is evaluated as the percentage of presence in the text of words of basic vocabulary, which is defined on the lexicon of frequency in Italian (De Mauro et al., 1993). The Lexicon Comprehensibility Index (LCI), which varies between 0 and 100, is made up using the following formula

$$LCI = (N_{pl}/N_p) * 100$$

Where:

N_p = the number of words in the text;

N_{pl} = the number of words in the text contained in the basic vocabulary.

The higher the index, the more comprehensible the text.

Visual Language Indexes

The indexes relative to visual language measure the visible legibility of the messages referring to screen layout of the site (position of the objects on the screen, font and size of characters, and colours contrast). Three indexes proposed by Bernard have been used to measure the recurrence of the equal elements in all the pages and the readability of the characters (Bernard, 2001; Bernard et al., 2002).

The index of legibility measures the average value of the text legibility, as speed of reading (characters/seconds) of a sample text in terms of font and size. Bernard (2002) measured the speed of reading and set out these values in a table. The values can vary from 0 to 4. For example the index value is 2.72 characters / second for the schoolbook 12 and 3.97 characters / second for the Tahoma 12.

The index of positioning. It measures the percentage of correct positioning of the objects, of the text and of the functions of interaction in the area of the page on the basis of a standard layout (Bernard, 2002). According to such layout, an ideal position on the screen is assigned to each object in such a way as to assure a more rapid and simpler access to the system functions.

The index of colour contrast. It is calculated through the numerical representation of the background and the foreground colour in web pages. In HTML language, the colour is identified using an additive representation called RGB (Red – Green – Blue) with three values, which represent the intensity of each fundamental colour (Foley et al. 1990). The index is then calculated as the Euclidean distance between the two colours of background and foreground. Even if such a measure is not necessarily representative of a great contrast, it has been chosen for the simplicity of the calculation. Alternative indexes could

be the distance in the representation CIO XYZ (Cowan et al. 1992) or in the system HSV (Foley et al. 1990). The index varies between 0 and 255.

Digitalisation Indexes

The indexes relative to the digitalisation measure the technical performance of the web site. Also in this case three indexes have been used.

The index of connection speed. It measures the speed of connection of the site in bytes/seconds; it is calculated as the inverse of the average time of “ping”, measured by 13 public Italian “traceroute” servers included in the list of www.traceroute.org. A good value limit for the normalisation is constituted by the time of ping equal to two seconds (time of the timeout) for a packet of 32 bytes ($32/2000 = 0.016$ bytes/s). Therefore, the index is calculated as follows:

$$\text{Connection speed} = 32 * 13 / \sum_{i=1,13} (\text{Tping}_i)$$

Where: Tping_i indicates the average time of the ping relative to the traceroute i .

The index of downloading speed. It measures the speed of downloading of the pages, calculated by dividing the average size in bytes by pages for the value of 7.000 (= 56.000 bit/s, the maximum theoretical speed obtainable by a modem for domestic use). For the calculation of the average size a special program of web analysis has been used.

$$\text{Downloading speed} = \text{average size of the pages} / 7.000$$

Where the average size of a page is measured in Bytes.

The index relative to the unconnected links represents the percentage of links that are not connected with respect to the number of total links present inside the site. The two values are calculated using a tool of web sites analysis.

Digital Communication Indexes

The indexes relative to digital communication measure the quality and the level of interaction between users and the service provider. For this purpose, three indexes have been used.

The index of reachability calculates the average position of the site according to what has been noted by three different search engines: two international (Google, Altavista) and one Italian (Virgilio). The position is evaluated assuming as the search key the full name of the service and analysing the first 100 results. For coherence with the other indexes (all growing with the goodwill of the service) the complement to 100 of the average position has been used.

$$\text{Reachability} = 100 - (\text{PositionGoogle} + \text{PositionAltavista} + \text{PositionVirgilio}) / 3$$

Index of navigability. According to Bernard (2001 and 2002), we propose to evaluate the index of navigability as a percentage of the links present in the first 2 levels of the structure, with respect to the total. The two values are calculated using a special program of web analysis of web sites.

$$\text{Navigability} = 100 * A/B$$

where:

A = number of links present in the first two levels of the structure.

B = the total number of links

Index of the presence of helps and support for navigation. It indicates the presence of tools for the support of the navigation of the site such as internal search engines, on-line help, site map.

In Table 3 the complete list of the attributes and relative indexes is shown with the indication of the unit of measurement, of the scale of measure and of the tools necessary for their calculation.

Table 3 – Attributes and indexes of evaluation

Attributes	Characteristics	Unit of measurement/scale/tools
Textual Language	Syntax comprehensibility	Adimensional value / [0,100] / computation formula
	Lexicon comprehensibility	Adimensional value / [0,100] / dictionary of the basic Italian lexicon
Visual Language	Legibility	Characters / seconds / [0,4] / table of character legibility
	Positioning	Adimensional value / [0,100] / diagram of objects positioning
	Colour contrast	Adimensional / [0,255] / RGB colour representation
Digital communication	Connection speed	Bytes / seconds / [0,1 million] / ping command
	Page download speed	Pages / seconds / [0,50] / utility
	Broken links	Adimensional value / [0,100] / utility
Digitalization	Reachability	Adimensional / [0,100] / public access search engine
	Navigability	Adimensional value / [0,100] / utility
	Presence of help and support for navigation	Adimensional / [0,3] / direct observation

The user priorities

The analysis of the user priorities is based on the human being's ability to structure his perceptions hierarchically, compare pairs of attributes and judge the intensity of the importance of one attribute over the other. The AHP methodology then synthesizes all the judgements to obtain the overall priority of the attributes.

For this reason the model can be performed through the following steps:

- The evaluation of the users perceptions about attributes and characteristics;
- The calculation of the weights;
- The definition of a multi-criteria function for the ranking of alternatives

The first step is to elicit the preferences through pairwise comparisons of the various attributes. First of all a cluster of 10 potential users of e-procurement services was selected. The members of the clusters were chosen on the basis of common peculiarities (age, culture, computer ability) in order to assure homogeneity of the cluster. To each member of the cluster a series of questions were asked to compare the relative importance of one attribute when compared to another attribute according to the scale suggested by Saaty (1980). These pairwise comparisons are summarised in 10 pairwise comparison matrix.

The second step is to complete the evaluations of the attributes relative importance weights by determining a priority vector. This vector, according to the AHP methodology, is computed as the eigenvector of the pairwise comparison matrix. In this case, as we derived a pairwise comparison matrix for each member of the cluster, we obtained 10 different vectors. In order to aggregate the results and to provide a unique priority vector a geometric mean of the obtained values was computed.

These weights are utilized in multi-criteria functions to build the tree of evaluation illustrated in figure 2.

Where

F is the synthetic index representative of the accessibility of the e-procurement service

A_i ($i= 1,..4$) are the values of the 4 attributes in the hierarchy model

c_i ($i= 1,..11$) are the values of the 11 characteristics presented in the model

w_i ($i= 1,..11$) are the values of the 11 weights calculated with the AHP method

k_i ($i= 1,..4$) are the values of the 4 weights associated to each attribute

The tree of evaluation is a powerful tool to analyse the accessibility of e-procurement service. In fact the first level "F" allows for a comparison among different service and synthesizes the accessibility of the service. The second level "A_i" individualizes possible attributes to improve and the professional

skills involved. The third level indicates what kind of intervention must be realised, that is the specific characteristic to increase.

Results

The proposed methodology has been used to evaluate the accessibility of five Italian public e-procurement services:

- Ministry of Finances on-line purchasing (Consip);
- Piemonte Region;
- Province of Florance
- Lombardia and Liguria Regions, which use the applicative supplied by Biztop;
- Trambus (Rome public transport)

Table 4 – The five Italian e-procurement web sites performances

	Consip	Piemonte Region	Province of Florance	Biztop	Trambus
Attribute of the textual language					
Syntax comprehensibility	0.40	0.49	0.39	0.41	0.55
Lexicon comprehensibility	0.82	0.81	0.90	0.88	0.84
Attribute of visual language					
Legibility	0.73	0.90	0.93	0.73	0.73
Positioning	0.80	0.77	0.66	0.57	0.71
Colour contrast	0.73	1.00	0.83	0.94	0.80
Attribute of digitalisation					
Connection speed	0.04	0.06	0.06	0.01	0.05
Page downloading speed	0.01	0.07	0.06	0.03	0.08
Broken links	1.00	0.96	1.00	0.97	0.98
Attribute of digital communication					
Reachability	0.63	0.99	0.68	0.19	1.00
Navigability	0.09	0.82	0.49	0.22	0.18
Navigation help	0.33	0.33	0.33	0.33	0.001

Thanks the first step of the proposed procedure, the selected eleven characteristics of the five e-procurement web site have been measured. Table 4 synthesises the results.

The second step analysis has allowed to weight how user perceives the eleven characteristics and the four attributes. In Table 5 the results of this second step are shown.

Table 5 – Attributes and Characteristics weights

Attribute	Weight	Characteristic	Weight
Textual Language	0.3266	Syntax comprehensibility	0,32
		Lexicon comprehensibility	0,68
Visual Language	0.0863	Legibility	0,25
		Positioning	0,44
		Colour contrast	0,31
Digital communication	0.0896	Connection speed	0,38
		Page download speed	0,38
		Broken links	0,25
Digitalization	0.4975	Reachability	0,88
		Navigability	0,1
		Presence of help and support for navigation	0,02

Finally, on the base of the measured eleven characteristics and the weights the user perceives, for each case study the tree of evaluation has been built. In this way a hierarchical evaluation of the accessibility of the public e-procurement service is possible. The results of this final step are illustrated in figure 3-7.

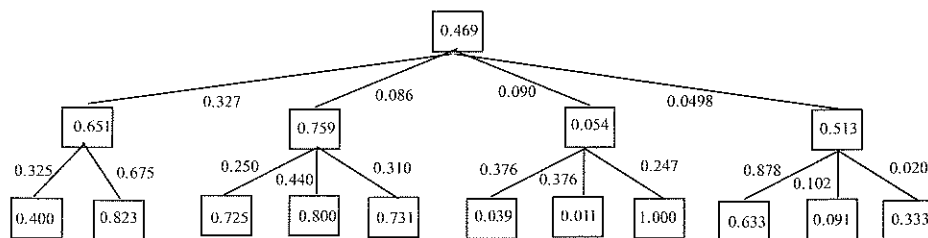


Fig. 3 – Consip.

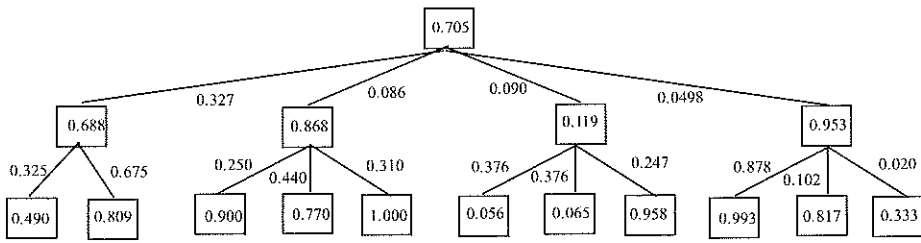


Fig. 4 – Piemonte Region.

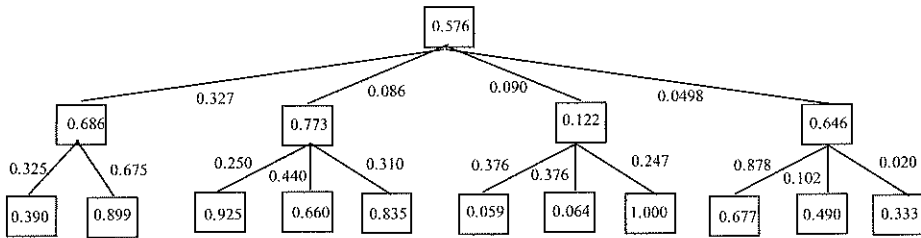


Fig. 5 – Province of Florence.

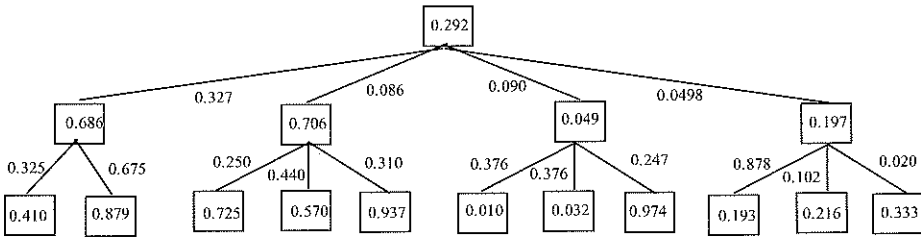


Fig. 6 – Biztop.

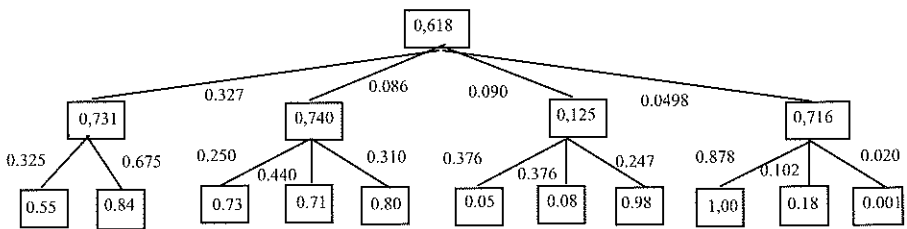


Fig. 7 – Trampus.

The five trees of evaluation highlight that the Piemonte Region e-procurement service is the best, by contrast Biztop is the worst. This latter may improve its service increasing the digital communication attribute. At this purpose a web designer must be involved, with the aim to improve Reachability and Navigability characteristics. Moreover, the five e-procurement services present a high value of textual language and visual language attributes, that is texts are ease to understand and the lay out is clear. Whereas they are characterised by a low level of digitalisation, that is the services are very slow to use. This means that a computer science professional may improve the service performance increasing the connection speed and the page download speed.

Conclusions

This paper has highlighted how one of the primary goals in the design of web site services is to promote accessibility. In particular way, this aspect involves public services and, hence, public e-procurement web services. For this reason the introduction of a methodology, in order to evaluate the accessibility of a given e-procurement service, appears crucial and represents a fundamental aspect in the appraisal of the e-procurement services effectiveness.

In particular, this paper shows some results of a multidisciplinary research whose aim is to identify and test a support model for the improvement of accessibility of public e-procurement services. The specific goal is to specify a group of attributes and characteristics that can be measured using quantitative indicators, which allow for the comparison of e-procurement service. On the basis of these considerations, a model based on a hierarchical system (the tree of evaluation) articulated on three levels has been introduced. The first level represents the accessibility of the e-procurement service that is divided into a set of attributes (second level). Each attribute is defined through a set of characteristics (third level).

According to this approach, four attributes have been singled out:

- textual language which refers to the textual content of the web site with reference to the comprehensibility;
- visual language understood as visual messages legibility with reference to the layout of the site (position of the objects on the screen, type of character, colours contrast);
- digitalisation which measures the technical performance of the web site;
- digital communication which deals with the quality and grade of interaction between users and the e-procurement service.

To evaluate these four attributes eleven characteristics have been introduced: Syntax comprehensibility, Lexicon comprehensibility, Legibility,

Positioning, Colour contrast, Connection speed, Page download speed, Broken links, Reachability, Navigability, and Navigation help.

To build the tree of evaluation a three steps procedure has been proposed:

- firstly, the web site characteristics have been measured. At this purpose a set of indicators measuring web site technical characteristics has been introduced;
- secondly, thanks a structured questionnaire, users have been interviewed and priorities measured;
- thirdly, the tree of evaluation has been built on the base of measured web site characteristics (first step) and users priorities (second step).

The tree of evaluation represents a powerful tool to improve the accessibility of e-procurement services. The first level allows for a comparison among different services and synthesises the accessibility of the service. The second level individualizes possible attributes to improve and the professional skills involved. The third level indicates what kind of intervention must be realised.

The proposed approach has been used, as part of the process of exemplification, to evaluate and compare the characteristics of five Italian public e-procurement services. The experimental results have highlighted the peculiarity of the five analysed services.

Finally, it should be stressed that accessibility could be considered a preliminary aspect for the evaluation of the effectiveness of a public e-procurement service. For this reason the proposed approach should represent a first step in the building process of a more complex model for the evaluation of the global effectiveness of a public e-procurement service.

References

- Adams, D., Nelson, R.R., & Todd, P. (1992). Perceived Usefulness, Ease of Use, and Usage of Information Technology: A replication. *MIS Quarterly*, 16 (2), 227-248.
- Agarwal, R., & Prasad, J. (1997). The Role of Innovation Characteristics and Perceived Voluntariness in the Acceptance of Information Technology. *Decision Science*, 28 (3), 557-582.
- Agarwal, R., Ahuja, M., Carter, P.E., & Gans, M. (1988). Early and Late Adopters of IT Innovations: Extensions to Innovation Diffusion Theory. Mimeo.
- Baskerville, R., & Pries-heje, J. (1998). Information technology diffusion: building positive barriers. *European Journal of Information Systems*, (7), 17-28.
- Bernard, M. L. (2001). Developing schemas for the location of common web objects. *Usability News*, 4 (1). [On line]
http://psychology.wichita.edu/surl/usabilitynews/3W/Web_object.htm.

- Bernard, M. L. (2002). Examining User Expectations for the Location of Common E-Commerce Web Objects. *Usability News*, 4 (1). [On line] http://psychology.wichita.edu/surl/usabilitynews/41/web_object-ecom.htm.
- Bernard, M., Lida, B., Riley, S., Hackler, T., & Janzen, K. (2002). A Comparison of Popular Online Fonts: Which Size and Type is Best?. *Usability News*, 4 (2). [On line] <http://psychology.wichita.edu/surl/usabilitynews/41/onlinetext.htm>.
- Bertelsmann Foundation (2002). E-Government-Connecting Efficient Administration and Responsive Democracy. [On line] www.begix.de.
- Bruno, G., Esposito, E., Mastroianni, M., & Vellutino, D. (2004). A multi-criteria approach to evaluate e-procurement web sites. *Proceedings IPSERA Conference*, Catania, April 2004.
- Burkhardt, M.E. (1990). Changing Patterns or Patterns of Change: The Effects of Change in Technology on Social Network Structure and Power. *Administrative Science Quarterly*, 35, 104-127.
- Byun, D.H. (2001). The AHP approach of selecting an automobile purchase model. *Information and Management* 38, pp 289-2à).
- Commission of the European Communities (2000). eEurope. *European Commission*, Bruxelles 8.3.2000.
- Cowan, W. B., MacIntyre B. (1992). A practical approach to calculating luminance contrast on a CRT. *ACM Transactions on Graphics*, 11, (Issue 4).
- Davis, F.D. (1993). User Acceptance of information technology: system characteristics, user per *International Journal of Man-Machine Studies*, 38, 475-487.
- de Boer, L., Harink, J., Heijboer, G. (2002). A conceptual model for assessing the impact of electronic procurement. *European Journal of Purchasing & Supply Management*, (8), 25-33.
- De Mauro, T., Mancini, F., Vedovelli, M., & Voghera M. (1993). *Lessico di frequenza dell'italiano parlato*. ETASLIBRI, Milan.
- EITO (2002). *European Information Technology Observer 2002*, Millennium Edition, Frankfurt.
- Esposito, E., & Mastroianni, M. (2002). Information technology and personal computers: the relational life cycle. *Technovation*, 22 (1), 41-50.
- Esposito, E., Mastroianni, M., & Vellutino, D. (2003). Evaluation of E-marketplaces: A model proposed for systems operating in and for the Public Sector. *Proceedings IPSERA Conference*, Budapest, April 2003.
- Flesch, R. (1951). *How to test readability*. Harper & Row, New York.
- Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K., & Hughes, J. F. (1990). *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison-Wesley Publishing Company (2nd ed.), New York.
- Forman E. and Peniwati K. (1998). Aggregating individual judgements and priorities with the Analytic Hierarchy Process. *EJOR* Vol 108, pp 165-169.
- G8 member States (2000). *Okinawa Document on the International Information Society*. G8 world-wide summit of Kyushu-Okinawa. Okinawa, July 2000.
- Gunning, R. (1973). *The Technique of Clear Writing*. Mc Graw Hill, New York.

- Halal, W. E. (1993). The Information Technology Revolution. Computer Hardware, Software, and Services into the 21st Century. *Technological Forecasting and Social Change*, 44 (1), 69-86.
- Hardy, M. (2003). Reverse auctions save Navy millions. *Federal Computer Week*, April 28. [On line] <http://www.fcw.com/fcw/articles/2003/0428/pol-auctions-04-28-03.asp>.
- Hauptman, O., Tomeczyk, M.S., & Kiggundu, M. (1998). The emerging Role of Telecommunication: Extrapolation of Novel Applications Around the World. *Technological Forecasting and Social Change*, 57 (1), 1-6.
- Igbaria, M. (1993). User Acceptance of Microcomputer Technology: An Empirical Test. *Omega*, 1 (21), 73-90.
- Kautz, K. and Pries-Heje, J. (eds) (1996). *Diffusion and Adoption of Information Technology*. Chapman and Hall, London.
- Keil, M., Beranek, P.M., & Konsynski, B.R. (1995). Usefulness and Ease of Use: field study evidence regarding task consideration. *Decision Support System*, (13), 75-91.
- Kolence, K.W., & Kiviat, P.J. (1973). Software unit profiles and Kiviat figures. *Performance evaluation review*. 2 (3), 2-12.
- Lengrand, L., & Chatric, I. (1999). *Business network and the knowledge-driven economy*. European Communities, Luxemburg.
- Lucisano, P., & Piemontese, M. E. (1988). Gulpease: una formula per la predizione delle difficoltà dei testi nella lingua italiana. *Scuola e città*, 49 (3), 110-124.
- Mastroianni, M., & Vellutino, D. (2002). DA.MA: A Model for Automatic Evaluation of Public Sector Web Sites. *2nd European Conference On E-Government*, St Catherine's College, Oxford, October 1-2.
- Ngai, E.W.T. (2003). Selection of web sites for online advertising using AHP. *Information and Management* 40, pp 233-242.
- Nielsen, J. (1993). *Usability Engineering*. Academic Press, Boston.
- Nielsen, J. (1994). *Usability Inspection Methods*. John Wiley & Sons, New York.
- Nielsen, J. (2000). *Designing Web Usability*. Mac Millan Computer Publishing, New York.
- O'Hara, C. (2000). Feds buy in to reverse auction. *Federal Computer Week*, August 14, [On line] <http://www.fcw.com/fcw/articles/2000/0814/pol-reverse-08-14-00.asp>.
- OECD (1997). *Information technology outlook 1997*. Organisation for Economic Co-operation and Development, Paris.
- Ratner, J., Grose, E.M., & Forsythe, C. (1996). Characterisation of and Assessment of HTML Style Guide. *Conference on Human Factors in Computer Systems*, (Vol. 2), 115-116.
- RUR (2001). *Le città digitali in Italia – Rapporto 1999-2000*. Franco Angeli, Milano.
- Saaty, T.L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw Hill International, New York.
- Saaty, T.L. (1994). *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*. RWS Publications; Pittsburg PA, pp 204-220.
- Sarkis J. and Talluri S. (2004) Evaluating and selecting e-commerce software and communication systems for a supply chain. *EJOR* Vol 159, pp 318-329.

- Taylor, S. & Todd, P. (1995) Understanding Information Technology Usage: A Test of Competing Models. *Information Systems Research*, 6 (2), 144-259.
- The W3C Consortium (1999). Web Content Accessibility Guidelines 1.0. *W3C Recommendation 5-May*. [On line] <http://www.w3.org/TR/1999/WAI-WEBCONTENT-19990505/>.
- U.S. Department of States (2004). Electronic Commerce at the State Department. [On line] <http://www.statebuy.state.gov/elecocom.htm>.
- Van Weele, A. (1994). *Purchasing Management: Analysis, Planning and Practice*. Chapman & Hall, London.

Giuseppe Bruno, University of Naples Federico II, DIEG, P.le Tecchio, 80 – 80125 Naples (Italy). Phone:+39-81-7683637 e-mail giuseppe.bruno@unina.it

Emilio Esposito, University of Naples Federico II, DIEG, P.le Tecchio, 80 – 80125 Naples (Italy). Phone:+39-81-7682493 e-mail giuseppe.bruno@unina.it

Michele Mastroianni, Second University of Naples, Italy, Viale Benedice, 10 – 81100 Caserta (Italy). Phone: +39-823-274966 e-mail Michele.mastroianni@unina2.it

Daniela Vellutino, University of Salerno, via Ponte don Melillo, 84084 Fisciano (SA), Phone +39-89-962185 e-mail dvellutino@unisa.it

Nonlinear stability for reaction-diffusion Lotka-Volterra predator-prey model equations with Holling Type 2 functional response

Florinda Capone

Università di Napoli Federico II

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Complesso Universitario Monte S. Angelo. Via Cinzia, 80126 Napoli - ITALIA

E-mail: fcapone@unina.it

1 Introduction

The reaction-diffusion predator prey model with U and V prey and predator population densities respectively, are [4], [5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = d_1 \Delta U + U(1 - U) - \omega F(U, V) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial V}{\partial t} = d_2 \Delta V - \gamma V + \sigma F(U, V) & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1)$$

where $\omega, \gamma, \sigma, d_1, d_2$ are positive constants and $F(U, V)$ is the so-called response function. The response function is said to be of Holling Type 2 when [1], [3]-[7]

$$F(U, V) = V F_1(U) \quad (2)$$

with

$$F_1(U) = \frac{U}{\phi + U} \quad (3)$$

$\phi (> 0)$ being the saturation constant.

Recently [5] equations (1) with $F(U, V)$ given by (2)-(3) has been studied under Neumann boundary conditions in the case of the one-dimensional habitat $\Omega = [-2, 2]$. In particular the stability of the biologically meaningful equilibrium state $S = (U^*, V^*)$ given by

$$\begin{cases} U^* = \frac{\gamma \phi}{\sigma - \gamma} < 1 \\ V^* = \frac{(\phi + U^*)(1 - U^*)}{\omega} = \frac{\phi \sigma [\sigma - \gamma(\phi + 1)]}{\omega(\sigma - \gamma)^2} \end{cases} \quad (4)$$

and existing for

$$\sigma > \gamma(\phi + 1), \quad (5)$$

has been studied via the so-called variational matrix criterion.

In the present paper we reconsider the stability problem of S , under the following more general conditions:

- 1) the habitat is a regular smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;
- 2) the boundary data are (Robin type conditions)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dn} = 0 \text{ on } \Sigma_1 \times \mathbb{R}^+, \quad U = U^* \text{ on } \Sigma_1^* \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{dV}{dn} = 0 \text{ on } \Sigma_2 \times \mathbb{R}^+, \quad V = V^* \text{ on } \Sigma_2^* \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (6)$$

with $\partial\Omega = \Sigma_i \cup \Sigma_i^*$, $\Sigma_i \cap \Sigma_i^* = \emptyset$, and $\Sigma_i^* \neq \emptyset$ ($i = 1, 2$).

Our analysis is based on the Liapunov Direct Method, using the functional recently introduced by Rionero in $L^2(\Omega)$ for the binary reaction-diffusion systems [8]-[18]. The plan of the paper is as follows. Section 2 is devoted to some preliminaries. In particular, by introducing some functional spaces, the stability (instability) of S is reduced to the stability (instability) of the zero solution of a suitable system of ODEs. Sufficient conditions for the linear $L^2(\Omega)$ -stability (Section 3) and linear instability conditions (Section 4) are obtained. The last section (Section 5) is devoted to the nonlinear stability.

2 Preliminaries

It easily follows that the perturbation (u, v) to S is governed by

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a_1 u + a_2 v + d_1 \Delta u + f(u, v) \\ v_t = a_3 v + d_2 \Delta v + g(u, v) \end{array} \right. \quad (7)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 - 2U^* - \frac{\omega\phi V^*}{\phi^{*2}}, \quad a_2 = -\frac{\omega U^*}{\phi^*} (< 0) \\ a_3 = \frac{\sigma\phi V^*}{\phi^{*2}} (> 0), \quad \phi^* = \phi + U^* > 0 \\ f(u, v) = -u^2 - \frac{\omega\phi}{\phi^{*2}} \frac{\phi^* uv - V^* u^2}{\phi^* + u} \\ g(u, v) = \frac{\sigma\phi}{\phi^{*2}} \frac{\phi^* uv - V^* u^2}{\phi^* + u}. \end{array} \right. \quad (8)$$

In view of (6), it follows that

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dn} = 0 \text{ on } \Sigma_1 \times \mathbb{R}^+ \quad u = 0 \text{ on } \Sigma_1^* \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{dv}{dn} = 0 \text{ on } \Sigma_2 \times \mathbb{R}^+ \quad v = 0 \text{ on } \Sigma_2^* \times \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (9)$$

Denoting by

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the $L^2(\Omega)$ -scalar product;
- $\| \cdot \|$ the $L^2(\Omega)$ -norm;
- $H_i(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$ the following functional spaces ($i = 1, 2$)

$$H_i(\Omega) = \left\{ \varphi : \varphi^2 + |\nabla\varphi|^2 \in L(\Omega), \frac{d\varphi}{dn} = 0 \text{ on } \Sigma_i \times \mathbb{R}^+, \varphi = 0 \text{ on } \Sigma_i^* \times \mathbb{R}^+ \right\}, \quad (10)$$

we study the stability of S with respect to the perturbations $(u, v) \in H_1(\Omega) \times H_2(\Omega)$.

Remark 1 - We observe that

i) the global existence of (u, v) with $(u_0, v_0) \in H_1(\Omega) \times H_2(\Omega)$ can be proved as in [1];

ii) the infimum

$$\bar{\alpha}_i(\Omega) = \inf_{H_i(\Omega)} \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2}, \quad (11)$$

exists and is a real positive number [1].

Following the methodology introduced in [8]-[18], (7) can be written

$$\begin{cases} u_t = b_1 u + a_2 v + f^*(u) + f(u, v) \\ v_t = a_3 u + b_4 v + g^*(v) + g(u, v) \end{cases} \quad (12)$$

with

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = \min(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) > 0 \\ b_1 = a_1 - d_1 \bar{\alpha}, & b_4 = -d_2 \bar{\alpha} (< 0) \\ f^*(u) = d_1(\Delta u + \bar{\alpha}u), & g^*(v) = d_2(\Delta v + \bar{\alpha}v). \end{cases} \quad (13)$$

Our aim is to show that the stability (instability) of S in the $L^2(\Omega)$ -norm can be reduced to the stability (instability) of the zero solution of the linear O.D.Es.

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = b_1 \xi + a_2 \eta \\ \frac{d\eta}{dt} = a_3 \xi + b_4 \eta. \end{cases} \quad (14)$$

In fact, setting

$$\begin{cases} I = b_1 + b_4 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ A = b_1 b_4 - a_2 a_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{cases} \quad (15)$$

with λ_i ($i = 1, 2$) eigenvalues of $\begin{pmatrix} b_1 & a_2 \\ a_3 & b_4 \end{pmatrix}$, we will show that the conditions

$$\begin{cases} I < 0 \\ A > 0, \end{cases} \quad (16)$$

guaranteeing the stability of the zero solution of (14), guarantee also the stability of S , with respect to the $L^2(\Omega)$ -norm. Moreover, if either

$$I > 0 \quad (17)$$

or

$$A < 0 \quad (18)$$

then the instability of the zero solution of (14) implies the (linear) instability of S .

3 Linear stability

Theorem 1 - Let $b_1 < 0$, i.e.

$$a_1 < d_1 \bar{\alpha}. \tag{19}$$

Then $S = (U^*, V^*)$ is linearly asymptotically exponentially stable with respect to the $L^2(\Omega)$ -norm.

Proof. Let us set

$$u = \beta_1 \bar{u}, \quad v = \beta_2 \bar{v}, \quad \mu = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \tag{20}$$

where the scalings β_i ($i = 1, 2$) are positive constants to be chosen suitably later. In view of (12), it turns out that

$$\begin{cases} \bar{u}_t = b_1 \bar{u} + \frac{a_2}{\mu} \bar{v} + f^*(\bar{u}) + \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \bar{v}_t = \mu a_3 \bar{u} + b_4 \bar{v} + g^*(\bar{v}) + \bar{g}(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} \tag{21}$$

with

$$\begin{cases} \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{\beta_1} f(u, v) \Big|_{\substack{u = \beta_1 \bar{u} \\ v = \beta_2 \bar{v}}} \\ \bar{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{\beta_2} g(u, v) \Big|_{\substack{u = \beta_1 \bar{u} \\ v = \beta_2 \bar{v}}} \end{cases} \tag{22}$$

Furthermore, for any constant $\bar{\varepsilon}$ such that

$$0 < \bar{\varepsilon} < \inf \left\{ \frac{|I|}{2\bar{\alpha}}, \frac{A}{\bar{\alpha}|I|}, \frac{|b_1|}{\bar{\alpha}}, d_1, d_2 \right\} \tag{23}$$

setting

$$\begin{cases} \bar{b}_i = b_i + \bar{\alpha} \bar{\varepsilon} & i = 1, 4 \\ \bar{d}_i = d_i - \bar{\varepsilon} & i = 1, 2 \end{cases} \tag{24}$$

it follows that conditions (16) imply [11]

$$\begin{cases} \bar{I} = \bar{b}_1 + \bar{b}_4 < 0 \\ \bar{A} = \bar{b}_1 \bar{b}_4 - a_2 a_3 > 0, \end{cases} \tag{25}$$

and moreover that

$$\bar{b}_1 < 0, \quad \bar{b}_4 < 0. \tag{26}$$

By virtue of (24), from (21) one obtains

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \bar{b}_1 \bar{u} + \frac{a_2}{\mu} \bar{v} + \bar{f}^*(\bar{u}) + \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \bar{v}_t = \mu a_3 \bar{u} + \bar{b}_4 \bar{v} + \bar{g}^*(\bar{v}) + \bar{g}(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} \tag{27}$$

with \bar{f}, \bar{g} given by (22) and

$$\begin{cases} \bar{f}^*(\bar{u}) = \bar{d}_1(\Delta \bar{u} + \bar{\alpha} \bar{u}) + \bar{\varepsilon} \Delta \bar{u} \\ \bar{g}^*(\bar{v}) = \bar{d}_2(\Delta \bar{v} + \bar{\alpha} \bar{v}) + \bar{\varepsilon} \Delta \bar{v}. \end{cases} \tag{28}$$

The time derivative along the solution of (27), of the Rionero-Liapunov functional [8]-[18]

$$E = \frac{1}{2} \left[\bar{A}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) + \|\bar{b}_1 \bar{v} - \mu a_3 \bar{u}\|^2 + \left\| \frac{a_2}{\mu} \bar{v} - \bar{b}_4 \bar{u} \right\|^2 \right] \tag{29}$$

is given by

$$\frac{dE}{dt} = \bar{A}\bar{I}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) + \Psi^* + \Psi \tag{30}$$

with

$$\begin{cases} \Psi^* = \langle \alpha_1 \bar{u} - \alpha_3 \bar{v}, \bar{f}^* \rangle + \langle \alpha_2 \bar{v} - \alpha_3 \bar{u}, \bar{g}^* \rangle \\ \Psi = \langle \alpha_1 \bar{u} - \alpha_3 \bar{v}, \bar{f} \rangle + \langle \alpha_2 \bar{v} - \alpha_3 \bar{u}, \bar{g} \rangle \\ \alpha_1 = \bar{A} + \mu^2 a_3^2 + \bar{b}_4^2, \quad \alpha_2 = \bar{A} + \bar{b}_1^2 + \frac{a_2^2}{\mu^2}, \\ \alpha_3 = \mu \bar{b}_1 a_3 + \frac{1}{\mu} a_2 \bar{b}_4. \end{cases} \tag{31}$$

Linearizing (27), (30) reduces to

$$\frac{dE}{dt} = \bar{A}\bar{I}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) + \Psi^*. \tag{32}$$

Since $b_4 < 0$ and $a_2 a_3 < 0$, (19) and (23) guarantee that (25), (26) are verified. On choosing

$$\mu = \bar{\mu} = \sqrt{\left| \frac{a_2 \bar{b}_4}{\bar{b}_1 a_3} \right|} \tag{33}$$

it follows that

$$\alpha_3 = 0. \tag{34}$$

By virtue of (28) and (31)₁ one obtains

$$\Psi^* = \langle \alpha_1 \bar{u}, \bar{f}^* \rangle + \langle \alpha_2 \bar{v}, \bar{g}^* \rangle \leq -k^*(\|\nabla \bar{u}\|^2 + \|\nabla \bar{v}\|^2) \tag{35}$$

with

$$0 < k^* = \bar{\varepsilon} \min\{\alpha_1, \alpha_2\}. \tag{36}$$

In view of (35), from (32) one has

$$\frac{dE}{dt} \leq \bar{A}\bar{I}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) - k^*(\|\nabla \bar{u}\|^2 + \|\nabla \bar{v}\|^2). \tag{37}$$

Since $\bar{A} > 0$, it easily follows that E is positive definite and hence there exist two positive constants k_i ($i = 1, 2$) such that

$$k_1(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) \leq E \leq k_2(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2). \tag{38}$$

Therefore, by virtue of (11) and (38), from (37) it follows that

$$\frac{dE}{dt} \leq -k_3 E \tag{39}$$

with

$$k_3 = \frac{1}{k_2} (\bar{A}|\bar{I}| + k^*\bar{\alpha}) (> 0) \tag{40}$$

and hence the linear stability of S , with respect to the E -norm, is obtained.

Remark 2 - As concerns approximate value of $\bar{\alpha}_i(\Omega)$, we refer to [2].

4 Linear Instability

Following [17], in the case $\Sigma_1 = \Sigma_2$ and $\Sigma_1^* = \Sigma_2^*$, let $\{\bar{\alpha}_n\}$, $\{\varphi_n\}$ be respectively the sequence of the eigenvalues of

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \tag{41}$$

and the sequence of the associate eigenfunctions in $H(\Omega) = H_1(\Omega) = H_2(\Omega)$. Let us assume that: i) $\{\varphi_n\}$ is complete and orthogonal in $W^{1,2}(\Omega)$; ii) u, v

and their first and second (spatial) derivatives can be expressed in a Fourier series absolutely and uniformly converging in Ω , according to

$$\begin{cases} u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)\varphi_n \\ v = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t)\varphi_n \end{cases} \quad (42)$$

derivable terms by terms. From the linearized version of (21), we obtain (for $\mu = 1$)

$$\begin{cases} \frac{dX_n}{dt} = b_{1n}X_n + a_2Y_n \\ \frac{dY_n}{dt} = a_3X_n + b_{4n}Y_n \end{cases} \quad (43)$$

with

$$\begin{cases} b_{1n} = a_1 - \bar{\alpha}_n d_1 \\ b_{4n} = -\bar{\alpha}_n d_2 \end{cases} \quad (44)$$

and

$$b_{11} = b_1, \quad b_{41} = b_4.$$

Then

$$I_n > 0 \quad (45)$$

or

$$A_n < 0 \quad (46)$$

implies the linear instability of S . The following theorem holds true.

Theorem 2 - *Let either*

$$a_1 > (d_1 + d_2)\bar{\alpha} \quad (47)$$

or

$$a_1 > d_1\bar{\alpha} + \frac{\gamma[\sigma - \gamma(1 + \phi)]}{\sigma d_2\bar{\alpha}}. \quad (48)$$

Then S is linearly unstable.

Proof. For the sake of concreteness we refer to the case (47). Then for $n = 1$, (43) gives

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = b_1 X_1 + a_2 Y_1 \\ \frac{dY_1}{dt} = a_3 X_1 + b_4 Y_1 \end{cases} \quad (49)$$

with the eigenvalues

$$\lambda_{1,2} = \frac{I \pm \sqrt{I^2 - 4A}}{2}. \quad (50)$$

The condition (47) is equivalent to $I > 0$. Hence if λ_i ($i = 1, 2$) are both reals, at least one is positive; while if λ_i ($i = 1, 2$) are complex they have positive real part, and the linear instability of S is proved.

5 Nonlinear stability

Passing to the nonlinear stability, with the choice (33) of μ , by virtue of (35), (30) gives

$$\frac{dE}{dt} \leq \bar{A}\bar{I}(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) - k^*(\|\nabla\bar{u}\|^2 + \|\nabla\bar{v}\|^2) + \Psi \quad (51)$$

with

$$\Psi = \langle \alpha_1 \bar{u}, \bar{f} \rangle + \langle \alpha_2 \bar{v}, \bar{g} \rangle. \quad (52)$$

Furthermore (8)₃, (8)₄, (20) and (22) imply that

$$\begin{cases} \beta_1 = \bar{\mu} \beta_2 \\ |\bar{f}(\bar{u}, \bar{v})| \leq \beta_2 (c_1 \bar{u}^2 + c_2 |\bar{u} \bar{v}|) \\ |\bar{g}(\bar{u}, \bar{v})| \leq \beta_2 (c_3 \bar{u}^2 + c_4 |\bar{u} \bar{v}|) \end{cases} \quad (53)$$

with c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) positive constants depending only on $\bar{\mu}$. In fact, on considering the biologically meaningful perturbations ($u > -U^*$, $v > -V^*$), one has that

$$\phi^* + \beta_1 \bar{u} > \phi (> 0) \quad (54)$$

and hence

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{u}, \bar{v})| &= \left| -\beta_1 \bar{u}^2 - \frac{\omega \phi}{\phi^{*2}} \frac{\phi^* \beta_2 \bar{u} \bar{v} - V^* \beta_1 \bar{u}^2}{\phi^* + \beta_1 \bar{u}} \right| = \\ &= \left| -\bar{\mu} \beta_2 \bar{u}^2 - \frac{\omega \phi}{\phi^{*2}} \frac{\phi^* \beta_2 \bar{u} \bar{v} - V^* \bar{\mu} \beta_2 \bar{u}^2}{\phi^* + \beta_1 \bar{u}} \right| \leq \beta_2 [c_1 \bar{u}^2 + c_2 |\bar{u} \bar{v}|] \end{aligned} \quad (55)$$

with

$$c_1 = \bar{\mu} \left(1 + \frac{V^* \omega}{\phi^2} \right), \quad c_2 = \frac{\omega}{\phi}. \quad (56)$$

Analogously, it can be easily proved that (53)₃ holds true, with

$$c_3 = \frac{\sigma V^* \bar{\mu}^2}{\phi^2} \quad c_4 = \frac{\sigma \bar{\mu}}{\phi}. \quad (57)$$

Then, by virtue of (52)-(57), it follows that

$$|\Psi| \leq \beta_2 [\eta_1 \langle |\bar{u}|^3 \rangle + \eta_2 \langle |\bar{u}|^2, |\bar{v}| \rangle + \eta_3 \langle |\bar{u}|, |\bar{v}|^2 \rangle] \quad (58)$$

with η_i ($i = 1, 2, 3$) positive constants given by

$$\eta_1 = \alpha_1 c_1, \quad \eta_2 = \alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_3, \quad \eta_3 = \alpha_2 c_4 \quad (59)$$

and hence by the Hölder inequality it turns out that

$$|\Psi| \leq \beta_2 (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)^{1/2} [(\eta_1 + \eta_2) \|\bar{u}\|_4^2 + \eta_3 \|\bar{v}\|_4^2]. \quad (60)$$

From (60), in view of the embedding inequality [19]:

$$\begin{aligned} \|f\|_4^2 &\leq k(\Omega) \|\nabla f\|^2, \quad k(\Omega) = \text{positive constant}, \\ \|f\|_4^2 &= \left(\int_{\Omega} f^4 d\Omega \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (61)$$

one obtains

$$\begin{cases} |\Psi| \leq \beta_2 k M (\|\nabla \bar{u}\|^2 + \|\nabla \bar{v}\|^2) (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)^{1/2} \\ M = \max\{\eta_1 + \eta_2, \eta_3\} > 0. \end{cases} \quad (62)$$

Therefore (38), (51) and (62) imply

$$\frac{dE}{dt} \leq -k_4 E + (\beta_2 k_5 E^{1/2} - k^*) (\|\nabla \bar{u}\|^2 + \|\nabla \bar{v}\|^2) \quad (63)$$

with

$$k_4 = \frac{\bar{A}|\bar{I}|}{k_2}, \quad k_5 = \frac{Mk}{k_1^{1/2}}. \quad (64)$$

By virtue of (11) and recursive argument, it follows that

$$0 < \beta_2 < \frac{k^*}{k_5 E_0^{1/2}} \quad (65)$$

with $E_0 = E(0)$, implies

$$\frac{dE}{dt} \leq -k_6 E \quad \forall t \geq 0 \quad (66)$$

and hence

$$E(t) \leq E_0 e^{-k_6 t}, \quad (67)$$

with

$$0 < k_6 = \frac{1}{k_2} \left[\bar{A}|\bar{I}| + \bar{\alpha}(k^* - \beta_2 k_5 E_0^{1/2}) \right]. \quad (68)$$

The following theorem holds true.

Theorem 3 - *Let (19) holds true. Then $S = (U^*, V^*)$ is nonlinearly asymptotically exponentially stable with respect to the $L^2(\Omega)$ -norm.*

Proof. The proof is immediate on taking into account (38) and (67).

Acknowledgments

This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (P.R.I.N. 2005): "Nonlinear Propagation and Stability in Thermodynamical Processes of Continuous Media". The Author thanks gratefully Prof. S. Rionero for having proposed the research and for his helpful suggestions.

References

1. R.S. Cantrell, C. Cosner, *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, (2004) ISBN 0-471-49301-5.
2. F. Capone, M. Piedisacco, S. Rionero, *Nonlinear stability for reaction-diffusion Lotka-Volterra model with Beddington-De Angelis functional response*, Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, **LXXIII**, pp. 85-97 (2006).
3. D. L. DeAngelis, R. A. Goldstein and R. V. O'Neill, *A model for trophic interaction*, Ecology **56**, 881 (1975).
4. G. W. Harrison, *Comparing predator-prey models to Luckinbill's experiment with Didinium and Paramecium*, Ecology **76**, 357 (1995).
5. I. Kozlova, M. Singh and A. Easton, *Predator-prey models with diffusion based on Luckinbill's experiment with Didinium and Paramecium*, Math. Comp. Modelling **36**, 83 (2002).
6. B. Liu, Z. Teng, L. Chen, *Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy*, J. Comp. Appl. Math. **193**, 347 (2006).

7. Y. Pei, L. Chen, Q. Zhang, C. Li, *Extinction and permanence of one-prey multi predators of Holling type II function response system with impulsive biological control*, J. Theoretical Biology **235**, 495 (2005).
8. S. Rionero, *On the stability of binary reaction-diffusion systems*, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B **119**, no.7-9, 773 (2004) MR2136906.
9. S. Rionero, *A rigorous link between the L^2 -stability of the solutions to a binary reaction-diffusion system of P.D.E. and the stability of the solutions to a binary system of O.D.E.*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **71**, 53 (2004).
10. S. Rionero, *A rigorous reduction of the L^2 -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es. to the stability of the solutions to a linear binary system of O.D.Es.*, Journal of Mathematical Analysis and Application **319**, Issue 2, 377 (2006).
11. S. Rionero, *A nonlinear stability analysis for two-species population dynamics with dispersal*, Math. Biosc. Eng. **3**, n.1, 189 (2006).
12. S. Rionero, *L^2 -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es.*, Rend. Accademia dei Lincei. Fasc.4, 2005 (In press).
13. S. Rionero, *Nonlinear L^2 -stability analysis for two-species population dynamics in spatial ecology under Neumann boundary data*, Rend. Circolo Mat. Palermo, Serie II, Suppl. 78, 273 (2006).
14. S. Rionero, *On the growth and dispersal of two-species populations in spatially heterogeneous ecology* (To appear).
15. S. Rionero, *Global nonlinear L^2 -stability for double diffusive convection in porous media with and without rotation* (To appear).
16. S. Rionero, *Long time behaviour of the solutions to competitive reaction-diffusion systems of P.D.Es.* (To appear).
17. S. Rionero, *Diffusion driven stability and Turing effect under Robin boundary data* (To appear).
18. S. Rionero, *Long time behaviour of competing species and mutualistic communities* (To appear).
19. B. Straughan, *The energy, method, stability and nonlinear convection*, 2nd edition. Springer-Verlag (2004).

Modelli Meccanici nella Realtà Virtuale

di Francesco Caputo¹

1 . Introduzione

La possibilità di sviluppare nuove conoscenze scientifiche e tecniche, quando si rivela promettente e potenzialmente efficace, apre nuovi scenari per soluzioni innovative, rispetto a quelle classiche e consolidate [Valentini], e favorisce, quindi, il progresso. Ciò avviene oggi con l'impiego delle tecniche di Realtà Virtuale nella progettazione.

La Realtà Virtuale, infatti, costituisce un nuovo paradigma che ridefinisce in maniera sostanziale l'interfaccia uomo-macchina, e modifica completamente l'approccio alle tecnologie di progettazione, [Bricken]. La rivoluzione del virtuale, infatti, ha reso disponibile un sistema di distribuzione e di accesso all'informazione di una potenza senza pari e, al tempo stesso, ad un modo nuovo di rappresentare la realtà.

Il termine Realtà Virtuale, da un punto di vista puramente semantico, è un ossimoro. L'aggettivo *virtuale* ed il sostantivo *realtà*, paradossalmente, sembrano elidersi a vicenda. Il primo rimanda a "ciò che non è nel concreto", il secondo invece a "ciò che è nel concreto". Il termine è stato coniato nel 1989 da *Jaron Lanier*, fondatore del VPL² Research. Ma già in precedenza, negli anni '70, agli albori della nuova

¹ Ordinario di Disegno Assistito dal Calcolatore, Università degli Studi di Napoli Federico II, francesco.caputo@unina.it.

² *Virtual Programming Languages*

rivoluzione in atto, *Myron Krueger* iniziava a parlare di *artificial reality* e, nel 1984, *William Gibson* di “Cyberspace”, [Andreolotti]. Solo successivamente, negli anni '90, furono introdotti i concetti di *mondo virtuale* e di *ambiente virtuale*.

L'immagine digitale nella Realtà Virtuale diviene linguaggio e scrittura. Il modello virtuale risulta non essere più partecipe della materialità del reale, bensì appare prodotto di pure operazioni semantiche impartite ad un calcolatore [Queau].

Per quanto riguarda, invece, le peculiarità applicative in ambito tecnologico, occorre rilevare che non esiste della Realtà Virtuale una definizione univoca e ben delimitata, giacché, infatti, questo termine, oggi, è riferito ad una molteplicità di sistemi e di impieghi, tra i quali sono da ricordare, oltre che quelli finalizzati alla progettazione, che qui interessano, anche le simulazioni di sistemi d'arma e di tecnologie militari, l'intrattenimento, la visualizzazione in numerosi settori della ricerca scientifica, l'addestramento allo svolgimento di attività lavorative complesse, la teledidattica. Nell'ambito specialistico della progettazione industriale s'intende per Realtà Virtuale l'insieme delle rappresentazioni che definiscono e riproducono in maniera realistica ambienti, oggetti e fenomeni che ancora non esistono nella realtà, ma che potrebbero, a tutti gli effetti, esistere od essere esistiti. Tali artefatti costituiscono il risultato finale della capacità umana di realizzare tutto ciò che contribuisce a migliorare le condizioni di vita.

Nelle attività di produzione industriale l'uomo è il designer, il progettista o il cliente, mentre l'ambiente virtuale è il modello digitale del prodotto da sviluppare, con tutte le sue funzionalità, inserito nel contesto di utilizzo, che può essere anch'esso virtuale o reale. In altri termini la Realtà Virtuale è costituita dall'interazione di vari ambienti che, stimolando le capacità sensoriali di un essere umano attraverso opportune interfacce, riproducono artificialmente situazioni reali.

2. La dematerializzazione della realtà

Muovendo dalla rappresentazione dei manufatti mediante disegni, dapprima nelle due dimensioni del foglio di carta, quindi nelle tre dimensioni della modellazione solida mediante sistemi CAD, è stato raggiunto un tale livello di sofisticazione nella simulazione degli oggetti da costruire che addirittura la Realtà Virtuale è assunta a dimostrazione della più generale tendenza verso “*la dematerializzazione della nostra realtà*”, [Maldonado 2005]. Senza voler pretendere d'entrare nel merito

della complessa fase evolutiva che [Schrodinger] prospetta come il procedere verso “*uno scenario in cui l’impatto delle tecnologie emergenti (informatica, telecomunicazioni, bioingegneria, robotica e tecnologie dei materiali avanzati), porterebbe alla riconsiderazione del tradizionale concetto intuitivo di materia come cosa semplice, palpabile, resistente, che si muove nello spazio*”, è sufficiente ricordare che l’uomo, da sempre, è stato non solo *homo faber*, impegnato a realizzare artefatti materiali, per ma anche *homo depictor*, per raffigurare, per esprimersi, per tramandare, [Hacking].

Quest’affermazione è suffragata dai tentativi che l’uomo, prima dell’avvento della fotografia e della cinematografia, e quindi impiegando tecniche figurative puramente manuali, ha sempre compiuto nel creare immagini quanto più possibile realistiche, dapprima con la ricerca della prospettiva, quindi con veri e propri effetti di Realtà Virtuale. Basterà ricordare l’effetto plastico dei poderosi glutei del bisonte nelle pitture murali delle grotte di Altamira. O, ancora, il tentativo del Brunelleschi di fondere, in una sorta d’antesignana *augmented reality*, la vista prospettica di un dipinto con l’immagine reale del cielo e delle nuvole. L’artista, infatti, aveva dipinto su una tavoletta il Battistero di Firenze e, sul punto principale della prospettiva, aveva praticato un forellino, in modo che attraverso di esso, dal rovescio dell’opera, si potesse ammirare l’immagine riflessa su uno specchio posto a conveniente distanza: l’argento brunito che sostituiva l’azzurro, contornando l’immagine architettonica, rendeva ancora più realistica la scena, poiché rifletteva anche il cielo, con le nuvole in movimento che lo attraversavano, [Caputo 2005].

Nel *San Gerolamo nello studio* di Antonello da Messina, poi, il Maldonado riconosce un vero e proprio caso di Realtà Virtuale, creata con mezzi pittorici tradizionali e puntualmente ne dimostra, ripercorrendola, la narrazione spaziale, [Maldonado 1999].

Non può mancare, in questa pur concisa rassegna, la citazione di un brano di Giovanbattista della Porta che nel lontano 1589, con incredibile precisione, immaginava ciò che sarebbe stato realizzato dopo quasi tre secoli, [Della Porta]. Scriveva, infatti, lo scienziato di Vico Equense: “*Prima che ci partiamo dal ragionamento di veder l’immagine pendente nell’aria, insegneremo come si possa fare che veggiamo le immagini pendenti nell’aria di qualsivoglia cosa; il che sarà cosa mirabile più di tutte le cose meravigliose, principalmente senza specchio, e senza l’oggetto visibile.... Ma diciamolo, come si veda una immagine nell’aria in mezo una camera, che non si veda lo specchio, né l’oggetto*

della cosa visibile, e camminando intorno vedrai l'immagine da tutte le parti".

Con la prima rivoluzione industriale la crescente complessità dei manufatti rendeva difficile, se non impossibile, di gestirne, con il solo aiuto della memoria, ogni particolare morfologico e costruttivo. L'esigenza di rappresentare oggetti complessi, con l'immediatezza e la sintesi delle immagini per chiarirne sia il funzionamento, sia il processo di fabbricazione, era divenuta esigenza impellente ed irrinunciabile. Solo quando Gaspard Monge con la sua opera sulla geometria descrittiva conferì al Disegno Tecnico, strumento essenziale della progettazione, i requisiti essenziali della completezza e dell'univocità dell'interpretazione, tutto ciò fu reso possibile. Riunendo così le capacità dell'*homo faber* con quelle dell'*homo depictor* nasceva la moderna ingegneria, [Caputo 2003].

Nella Realtà Virtuale l'uomo è immerso in un ambiente artificiale, simulato dal calcolatore, che impartisce sensazioni visive, sonore e tattili [Caputo 2004]. Il concetto stesso di virtualità implica la disponibilità di visualizzazioni tridimensionali e di sistemi interattivi finalizzati alla creazione di ambienti simulati, direttamente fruibili, generati in tempo reale dal calcolatore [Lanier]. Si può, dunque, intendere la Realtà Virtuale come una tecnologia che migliora l'interazione tra l'uomo ed il modello virtuale del prodotto, consentendo di estendere le capacità sensoriali umane, grazie ad un approccio più congeniale ed intuitivo tra uomo e macchina, [Bricken], [Lanier].

L'utente può sperimentare, così, il modello virtuale direttamente in maniera interattiva e multisensoriale, muovendosi intorno ad esso o al suo interno, sollevando oggetti, captando suoni, vivendo, in definitiva, esperienze sensoriali complesse e molto simili alle sensazioni percepibili nel mondo reale. Tale approccio, quando è utilizzato nelle attività di progettazione, incrementa le capacità di comprensione, di analisi, di creatività e di comunicazione, [AA.VV.1].

In questo senso la Realtà Virtuale si configura come strumento tecnologico innovativo e potente per la risoluzione di numerose problematiche tecniche. Per questo motivo essa è apparsa come la tecnologia rivoluzionaria, in grado di contribuire alla soluzione di un serie di problemi, [Cobb].

Risulta evidente che la più rilevante potenzialità della Realtà Virtuale consiste nel fatto che essa, anche nel caso di forme ed organizzazioni spaziali molto complesse, può essere portatrice di valenze e di significati percepibili sia mediante simulazioni di tipo simbolico-ricostruttivo, sia tramite comunicazioni di carattere sensoriale.

In definitiva, l'utente deve poter reagire con l'ambiente virtuale nel modo più naturale possibile, come se visse nella realtà. Egli s'immerge nell'ambiente simulato, generato dal computer e distinto da quello in cui gli oggetti esistono fisicamente, [Ellis], per operare in modo del tutto efficace. La rappresentazione astratta degli oggetti diviene, così, anche strumento di stimolazione per i sensi.

In effetti la difficoltà maggiore è proprio legata alla risposta realistica che il sistema virtuale restituisce all'interazione dell'utente: essa, infatti, non deve comprometterne il senso di presenza, vale a dire l'illusione di sentirsi realmente parte della scena virtuale.

3. La Realtà Virtuale nella Progettazione

La principale potenzialità fornita dalla realtà virtuale nelle attività di sviluppo e di progettazione dei prodotti industriali è quella di prevedere e verificare lo stadio di avanzamento, l'organizzazione e la coerenza formale e sostanziale di qualsiasi *concept*. L'interesse che questa tecnologia suscita nelle comunità accademiche ed industriali è legato alla prospettiva di sostituire, a breve termine, la sperimentazione su *mock up* fisici, o prototipi del prodotto, con quella su oggetti virtuali e digitali equivalenti in termini di caratteristiche geometriche e fisiche, nei loro ambienti d'utilizzo, anch'essi simulati. Si tratta di un processo, in realtà, che già è in atto: si tende, infatti, all'eliminazione, totale o quasi totale, dei prototipi fisici, a vantaggio di quelli virtuali. Quando la fase di transizione sarà completata si realizzerà sia una sostanziale riduzione dei tempi e dei costi di progettazione, sia un sensibile incremento della qualità. Un tale vantaggio, assolutamente non secondario, è legato alla concreta possibilità di valutare un prodotto, fin dagli stadi preliminari dell'iter progettuale, in un ambiente virtuale, interattivo e riconfigurabile, valutando, sul *mock up* digitale, [AA.VV. 2], più soluzioni progettuali, mediante una serie di cicli iterativi di progettazione.

L'obiettivo, quindi, è quello di sostituire la simulazione numerica alla sperimentazione fisica, non solo per le economie ottenibili, ma anche per permettere il raggiungimento di una migliore qualità tecnologica, in tempi sempre più ridotti. In fase di progettazione, quindi, si tende a passare dal tradizionale metodo *Trial and Error* al più sistematico *Continuous Improvement*, tipico della simulazione. L'impiego della realtà virtuale, in definitiva, può coinvolgere, oltre che la fase di progettazione del prodotto, anche quella del processo produttivo, ed incide in maniera sensibile sulla qualità di qualsiasi tipo di manufatto,

migliorandone le caratteristiche estetiche, funzionali, costruttive, nonché economiche e sociali, in termini di utilità e di grado di soddisfazione percepito dal cliente che ne fruisce. Tali vantaggi si rivelano tanto maggiori quando più i prodotti da progettare sono complessi. Tuttavia, perchè una così favorevole prospettiva di progresso nelle tecnologie della progettazione si realizzi in pieno, resta ancora da compiere molto lavoro di sviluppo in cui è necessario coinvolgere ed interagire con una molteplicità di saperi positivi.

4. Modelli Meccanici nella Realtà Virtuale

Per impiegare la Realtà Virtuale nella progettazione di prodotti industriali innovativi e competitivi, i D.M.U., simulacri digitali da visualizzare, debbono possedere tutte le caratteristiche morfologiche, funzionali e prestazionali dei manufatti reali.

A questo punto, quasi paradossalmente, s'impone la necessità di ripristinare, almeno in parte, le caratteristiche fisiche svanite nel processo di dematerializzazione di cui si è detto innanzi. Così, se fosse necessario simulare il processo di smontaggio di un meccanismo per verificare l'accessibilità, la manipolabilità e la smontabilità delle parti che lo compongono, la rimozione dei vincoli e gli spostamenti operati sui modelli solidi degli oggetti richiederebbero anche il ripristino di quelle stesse forze che sono effettivamente presenti, e che potrebbero anche condizionare, fino a renderle impossibili, le operazioni da svolgere nell'ambiente reale. Ad esempio, per simulare un'operazione di smontaggio, non è realistico immaginare che sia possibile rimuovere con una sola mano un oggetto di massa superiore ai 25-30 kg; né sarebbe possibile ignorare i danni che, nella realtà, oggetti costruiti con caratteristiche di precisione dimensionale e geometrica dell'ordine di poche decine di micrometri, potrebbero subire, per effetto di possibili collisioni, durante una fase di smontaggio.

4.1. Realismo visivo nell'interazione

Quando il progettista esegue una simulazione mediante interazione manuale diretta, l'usabilità e, conseguentemente, la fattibilità delle analisi, dipendono dalla velocità di risposta del sistema di V.R.

Altri aspetti, come l'accuratezza nella modellazione e la qualità visiva, influiscono sul livello di realismo con cui l'utente percepisce l'ambiente simulato, ad esempio, in termini di risposta degli oggetti

all'interazione diretta. Appare più sfumata, ed anche difficilmente quantificabile, la valutazione di come il realismo influenzi le informazioni che si possono ricavare dalla simulazione, [Liang 1991].

Le caratteristiche che determinano la maggiore o la minore riuscita in una simulazione in realtà virtuale sono essenzialmente tre: il realismo visivo, il comportamento del mondo simulato e la fruizione di altre percezioni sensoriali, oltre quella visiva.

La presenza delle ombre gioca un ruolo decisivo nel realismo visivo degli ambienti virtuali poiché innalza la soglia di riconoscimento dell'esperienza. In particolare, le ombre si rivelano particolarmente utili per percepire le relazioni spaziali tra gli oggetti della scena, come, ad esempio, la posizione del modello virtuale della mano, controllata attraverso un guanto dotato di sensori, rispetto agli oggetti dell'ambiente con cui si deve interagire.

Per incrementare il realismo nell'interazione occorre che la modellazione del comportamento fisico sia tale che gli oggetti nell'ambiente virtuale reagiscano con modalità, quanto più è possibile aderenti a quelle che si verificherebbero nella realtà, a causa delle forze derivanti o dall'interazione diretta tra le parti, come per urti, o dalla funzionalità dei cinematismi, o anche per gli effetti del campo gravitazionale, figura 1.

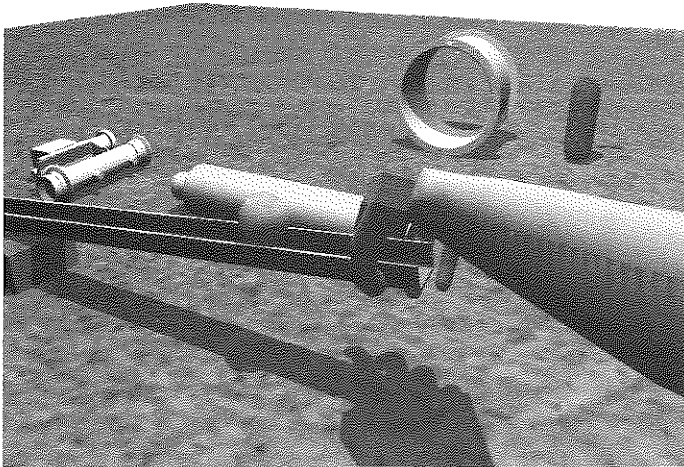


Figura 1. Esempio d'interazione realistica.

Per consentire al progettista di interagire realisticamente con il modello digitale di prodotto in ambiente immersivo di sperimentazione e simulazione, è stato realizzato, presso i Laboratori del CIRA e dell'Università di Napoli Federico II, un sistema VR composto da

dispositivi hardware per la realtà virtuale immersiva e da un software, il VR Viewer, che implementa le funzionalità di dialogo con i dispositivi di simulazione dell'interazione e di visualizzazione stereoscopica, [Di Gironimo 2005].

Come già è stato detto, l'efficacia dell'interazione può trarre giovamento sia dall'incremento del realismo visivo, sia dalla corretta simulazione della dinamica dei corpi rigidi. Il primo effetto si ottiene con l'aggiunta delle ombre alla scena visualizzata. Il calcolo accurato delle ombre è legato tradizionalmente all'impiego di tecniche di *ray-tracing* e *radiosity*, che però possono essere applicate soltanto in modo statico (ombre pre-calcolate) a causa dei lunghi tempi di calcolo. Di recente, però, alcuni hardware grafici offrono potenza ed estensioni OpenGL per accelerare il calcolo delle ombre in tempo reale (aggiornamento per ciascun nuovo frame visualizzato), con tecnica innovativa, basata sull'impiego di informazioni provenienti dalla visualizzazione della scena dal punto di vista della luce. In particolare, la tecnica implementata nel VR Viewer è lo *shadowcasting*, basata su estensioni OpenGL di origine SGI e implementate su schede grafiche nVidia della classe GeForce/Quadro 4 e FX [Heidrich 1999], [Segal 1992]. La figura 2 mostra la ricostruzione virtuale dell'interno di un velivolo della Piaggio Aero Industries, il cui realismo visivo è incrementato dalla presenza delle ombre [Di Gironimo 2004].

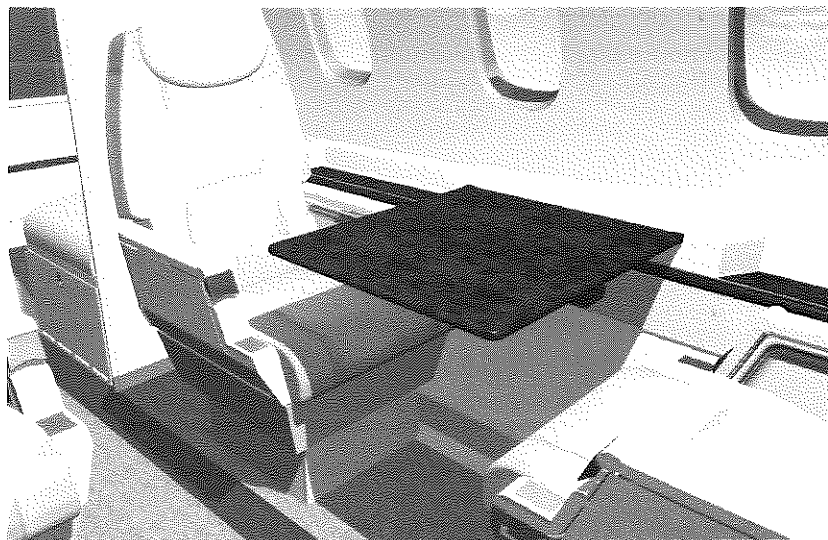


Figura 2. Apertura del tavolino all'interno del velivolo Piaggio Aero Industries P180. L'effetto delle ombre viene ricalcolato ad ogni cambiamento della scena.

4.2. Simulazione della dinamica dei corpi rigidi

La ricerca di un miglior realismo nel comportamento degli oggetti nell'ambiente virtuale di simulazione, è stata attuata integrando, nel *VR Viewer*, il modulo di simulazione della dinamica dei corpi rigidi disponibile la libreria open source *Open Dynamics Engine* (ODE) [<http://ode.org/>].

In generale un sistema di simulazione della dinamica dei corpi rigidi, in accordo con le leggi della fisica classica, calcola lo spostamento di corpi, di cui siano note le proprietà di massa e forma, per l'azione di forze, sia di campo, sia concentrate. ODE è costituito da due moduli principali: un motore di simulazione della dinamica ed un sistema di *collision detection*. Perché la simulazione del comportamento dei modelli virtuali possa avvenire nel rispetto delle leggi della fisica classica occorre far ricorso al motore di dinamica; il sistema di *collision detection* permette di simulare gli effetti delle collisioni tra gli oggetti presenti nell'ambiente virtuale.

Motore di dinamica

Il modulo di simulazione dinamica rende possibile la simulazione del movimento dei corpi virtuali come se fossero corpi rigidi reali. Gli elementi fondamentali che influenzano il moto reale degli oggetti sono: posizione iniziale; velocità iniziale; proprietà di massa; forze applicate. Per assegnare le prime tre caratteristiche ad un corpo è necessario definire in ODE un elemento di tipo "*Body*". Ad esso è possibile associare: un vettore di posizione, che identifica il "*point of reference*" del *Body*; un vettore di velocità lineare; un orientamento (mediante una matrice di rotazione); un vettore di velocità angolare; la massa del *Body*; la posizione del centro di massa nel sistema relativo del *Body* (nella corrente implementazione il centro di massa e il "*point of reference*" devono coincidere); la matrice di inerzia, per descrivere come è distribuita la massa intorno al centro di massa.

Ogni *Body* ha un sistema di riferimento che si muove con il corpo; l'origine coincide con il "*point of reference*", figura 3.

Ai *Body* non è associata alcuna geometria (intesa come forma) poiché questo parametro non influenza direttamente il moto, ma serve unicamente a determinare gli eventuali ingombri e i contatti tra gli oggetti. Per quanto concerne le forze, ne sono state previste diverse tipologie. Infatti, è possibile applicare forze arbitrarie, sia di massa, sia

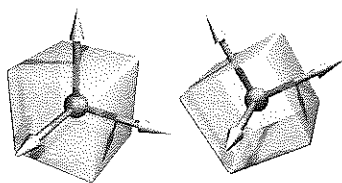


Figura 3. Body.

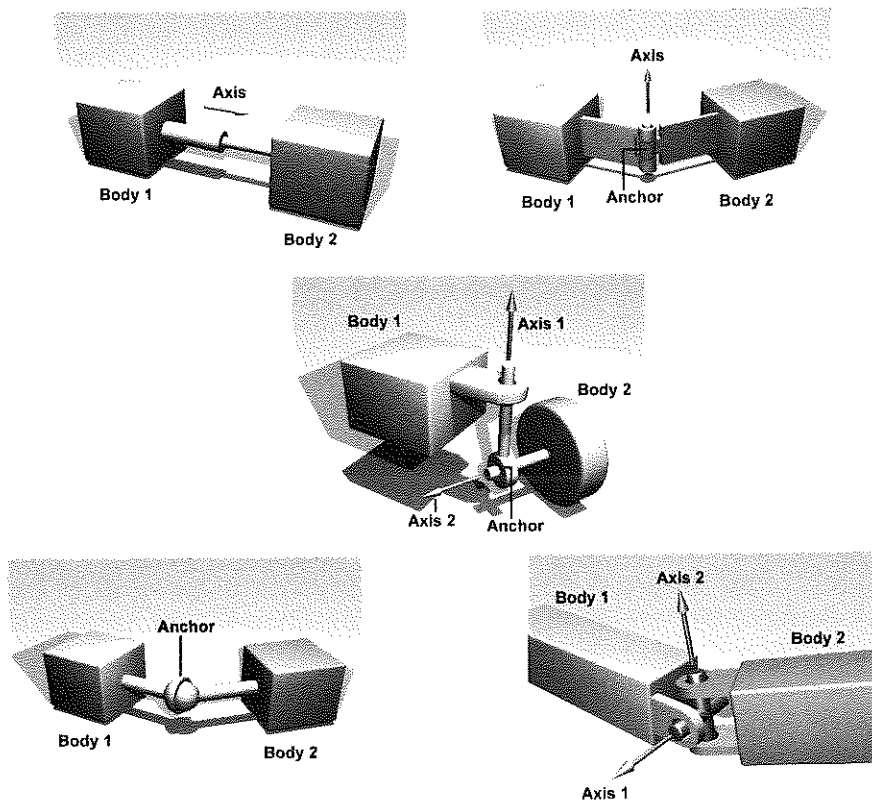


Figura 4. Giunti disponibili nella libreria OpenDE . Da sinistra a destra: slider, hinge, hinge2, ball, universal.

concentrate, per simulare, ad esempio, il campo gravitazionale o un'azione impulsiva. Per simulare le reazioni vincolari, invece, è necessario elementi di giunzione che schematizzino le reali

condizioni di vincolo esistenti tra i corpi e che permettano di calcolare e trasferire le forze ad essi dovute. Tali giunti possono essere di diversa tipologia: assiali lineari (*slider*), assiali angolari (*cerniere* o *hinge*), assiali angolari con doppio asse (*hinge 2*), sferici (*ball*), fissi, cardanici (*universal*), figura 4.

Le forze repulsive di contatto tra i corpi sono anch'esse trattate come reazioni vincolari, mediante la definizione di un particolare tipo di giunto: il *contact joint*, figura 5. Questi giunti impediscono la

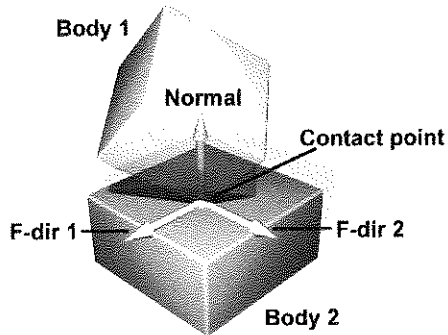


Figura 5. Contact joint.

compenetrazione dei corpi. Essi sono creati durante la simulazione nei punti di contatto tra gli oggetti secondo le informazioni provenienti dall'algoritmo di *collision detection* che fornisce anche alcuni parametri necessari al calcolo delle forze di reazione.

I *contact joints*, consentono di modellare le forze di attrito statico approssimando il modello di attrito di *Coulomb*. Per la schematizzazione di forze di attrito dinamico non è prevista una funzione specifica, ma è necessario implementare di volta in volta un apposito algoritmo in funzione delle proprie esigenze.

4.4. Collision detection

Questo modulo è destinato alla localizzazione dei punti dei punti dove avvengono le collisioni tra i corpi. I parametri necessari in tal caso sono la posizione degli oggetti e la loro forma. Per fornire queste informazioni

è necessario definire in ODE degli oggetti geometrici, denominati “*Geom*”. Ad ogni *Geom* è associato un corpo rigido presente nella scena; questo permette al motore delle collisioni di acquisire i dati di dimensioni, forma, posizione ed orientamento dei *Geom*, dai corpi rigidi ad essi associati. Da quanto detto si evince che un *Geom* è sostanzialmente diverso da un corpo rigido in quanto esso possiede proprietà geometriche quali dimensioni, forma, posizione ed orientamento ma non possiede altre proprietà quali velocità e massa. Si può, a tal fine, associare un *Geom* ad un *Body* in modo che le due strutture, combinate, abbiano tutte le informazioni per schematizzare un oggetto reale. Esistono varie tipologie elementari di *Geom*: cilindri, box, sfere, piani, ma per rappresentare oggetti complessi è necessario utilizzare mesh triangolari degli oggetti grafici. L’output dell’algoritmo è costituito da una struttura che memorizza la posizione del punto di contatto, la normale alla superficie di contatto, la profondità di penetrazione e i corpi che hanno colliso. Tali informazioni vengono poi usate dal motore di dinamica per calcolare i *contact joint* e le forze di repulsione.

4.5. Caratteristiche prestazionali

Le prestazioni del sistema di cui si tratta variano in funzione della complessità dell’ambiente virtuale (numero di corpi, numero di vincoli, complessità geometrica di ciascun corpo) e dell’accuratezza della simulazione. Una simulazione in OpenDE non è *real-time*, nel senso che non garantisce di aggiornare il sistema con una prefissata frequenza, ma è sufficientemente veloce per applicazioni interattive *man-in-the-loop*. Fissata la complessità del mondo a cui si è interessati, si può comunque scegliere la migliore combinazione tra tipo di solutore e passo di integrazione per trovare il giusto bilanciamento tra accuratezza e velocità.

Nella direzione della massima efficienza di calcolo su piattaforme multi-processore il modulo di simulazione della dinamica è stato implementato come *thread* parallelo a quello di visualizzazione, col quale condivide la struttura dati *scene graph* attraverso l’arbitraggio di un mutex. Al piccolo prezzo della sincronizzazione per l’accesso alla struttura dati comune si ha così, su una configurazione almeno bi-processore, il migliore sfruttamento delle risorse sia di calcolo, sia grafiche.

Naturalmente è anche possibile configurare i parametri della simulazione e definire la composizione del mondo simulato, in termini di corpi, relativi oggetti grafici, e giunti di collegamento, attraverso file testuale di semplici e documentate direttive. Questa possibilità mette in grado, anche chi non ne conosca i dettagli implementativi, di configurare un'applicazione che utilizzi la simulazione della dinamica dei corpi rigidi in congiunzione con la visualizzazione immersiva e l'interazione manuale.

4.6. Modellazione dell'interazione manuale diretta

La mano occorrente per l'interazione con gli oggetti da manipolare è stata strutturata in singoli corpi (il palmo e le 15 falangi) e articolata con giunti (sferici tra palmo e le prime falangi, cerniere tra le falangi consecutive) come si vede dalla figura 6 a sinistra. L'interazione è stata

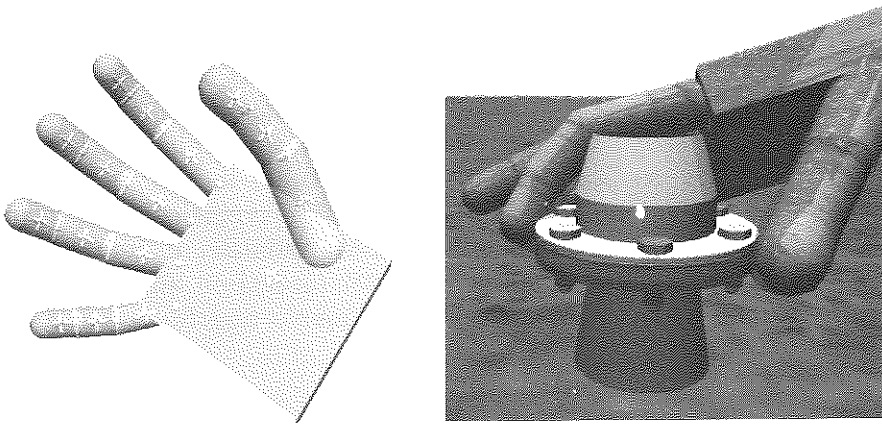


Figura 6. A sinistra, la mano virtuale strutturata per ODE, con i Body e le giunzioni sferiche e assiali. A destra, la differenza tra la mano "reale" (in trasparenza) e quella "mediata" (color carne) dalla simulazione: risulta evidente come della seconda venga limitata la compenetrazione nell'oggetto manipolato.

adeguata al più generale modello di simulazione di OpenDE, dove una parte dei corpi costituiscono la mano, e gli altri sono gli oggetti con cui interagire. Le posizioni dei corpi della mano vengono letti dalla coppia di dispositivi guanto + tracker prima della simulazione. Tuttavia, a valle di essa, in generale, gli elementi che costituiscono la mano possono risultare spostati rispetto alla posizione di input a causa delle collisioni con altri corpi del mondo e della trasmissione delle relative forze repulsive a tutta la catena cinematica falangi-palmo. Tale approccio limita, entro una certa

tolleranza, la compenetrazione tra i corpi della mano e quelli con cui si interagisce (Figura 6 a destra), permettendo altresì un'efficace trasmissione delle forze di contatto: ciò rende del tutto naturale l'afferraggio, in quanto esso viene regolato dalla simulazione della dinamica. Queste capacità permettono di superare in prestazioni e intuitività meccanismi altrove impiegati che interpretano la postura della mano rispetto all'oggetto da manipolare e determinano la condizione di afferraggio secondo criteri meno oggettivi.

4.7. Giunti dinamici per l'assemblaggio guidato

Al fine di facilitare l'assemblaggio di componenti durante la simulazione, quando si tratti, ad esempio, di operazioni di montaggio, è stata messa a punto una famiglia di giunti dinamici che si possono creare tra due corpi al verificarsi di una serie di condizioni. Una volta creati, tali giunti aiutano il completamento dell'operazione di montaggio, guidando il corpo in manipolazione nell'ultima parte della fase di avvicinamento. Questo meccanismo semplifica lo svolgimento di operazioni di montaggio che, nel caso di verifiche di manutenibilità, non vengono eseguite con lo scopo di una loro simulazione dettagliata, ma semplicemente per una verifica della loro realizzabilità in base ai vincoli di accessibilità dell'ambiente, [Marcelino 2002], [Fernando 2001]. I nuovi giunti creati collegano stabilmente le parti montate, e permettono di continuare la procedura di montaggio nel medesimo ambiente, la cui configurazione è stata però arricchita dal nuovo oggetto con il relativo ingombro.

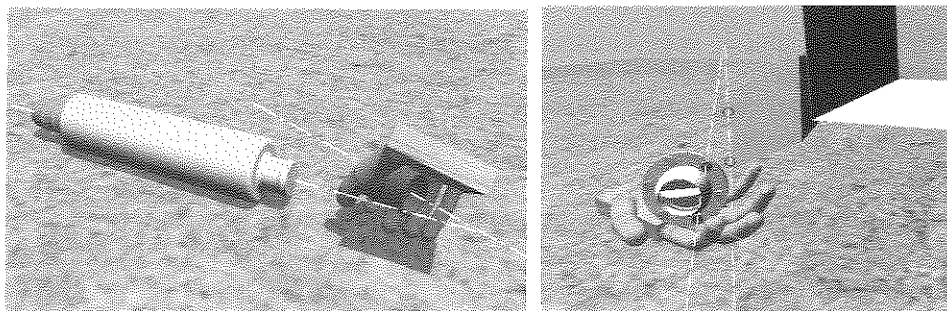


Figura 7. Illustrazione delle condizioni di allineamento tra assi e di distanza tra due punti di riferimento per la creazione dinamica di giunti guida: slider (sinistra) e cerniera (destra).

Per la creazione dinamica di giunti guida devono essere verificate le condizioni che la differenza di allineamento tra gli assi dei due corpi e la distanza tra due punti di riferimento risultino entrambe al di sotto di valori predefiniti, figura 7.

Prima di creare il giunto il sistema esegue l'allineamento del corpo oggetto della manipolazione per portarlo nella configurazione ideale di giunzione. Una volta creato, lo slider permetterà l'avvicinamento soltanto lungo l'asse, mentre la cerniera consentirà soltanto rotazioni intorno ad esso. L'operazione si concluderà con il blocco del giunto, quando i componenti saranno stati portati alla corretta posizione reciproca.

Parametri e tolleranze definibili dall'utente in funzione dell'applicazione permettono di definire la regione di influenza del meccanismo. L'operazione di smontaggio, invece, si avvale della funzionalità opposta, cioè la rimozione del giunto dinamico per "forzatura" da parte dell'operatore.

5. Applicazione: verifica di manutenibilità del sistema di pressurizzazione e condizionamento del Piaggio P180 Avanti

L'approccio descritto per verifiche di manutenibilità è stato sperimentato su un caso applicativo aeronautico, fornito dalla sede di Napoli della Piaggio Aero Industries, relativo al sistema di pressurizzazione e condizionamento del velivolo executive P180 Avanti. Nel corso di una revisione progettuale avente per obiettivo il miglioramento degli aspetti manutentivi, era necessario verificare le possibilità d'installazione, per quanto riguarda i montaggi ed i collegamenti del sottosistema prescelto, figura 8. Le operazioni da compiere, infatti, apparivano particolarmente critiche a causa degli spazi angusti, dei vincoli strutturali ed anche a causa della forma e delle dimensioni dei componenti. In particolare, una volta prescelta una configurazione progettuale, occorre verificare se il montaggio potesse essere eseguito secondo la procedura ipotizzata. Nel corso della sequenza di montaggio, inoltre, era necessario verificare la raggiungibilità di alcuni componenti per il collegamento dei diversi sottosistemi tra loro, individuare i percorsi più opportuni per accedere alle parti da raggiungere manualmente, nonché verificare la possibilità di impiego degli strumenti necessari per attuare il serraggio dei collegamenti.

Per la valutazione delle tecniche proposte, nella prima fase della ricerca, è stata realizzata una semplice simulazione. Le parti componenti l'impianto di condizionamento sono state smontate e sistemate esterna-

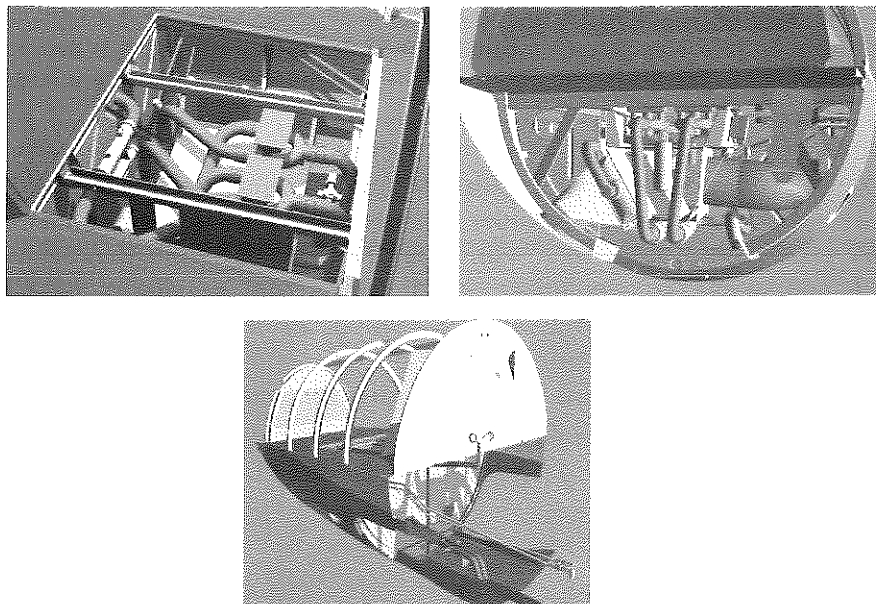


Figura 8. Il sistema di pressurizzazione e condizionamento oggetto della verifica di manutenibilità visto dal portello di accesso in alto (sinistra) e da dietro (centro). A destra la sezione di coda del velivolo che lo ospita.

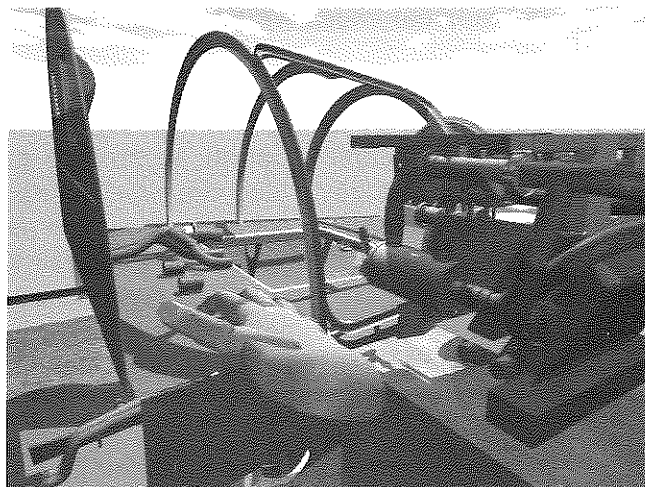


Figura 9. I componenti dell'impianto di condizionamento disposti esternamente alla struttura.

mente alla struttura, figura 9. Quindi, seguendo i suggerimenti e le sequenze di assemblaggio fornite dai progettisti della Piaggio Aeronautica, esse sono state riassemblate definendo dei percorsi liberi da collisioni.

La figura 10 mostra alcuni momenti delle operazioni di assemblaggio; particolare attenzione è stata posta in quelle operazioni giudicate critiche dai progettisti. La presenza delle ombre consente di percepire meglio le distanze tra gli oggetti mentre essi vengono movimentati e tra la mano e gli oggetti quando si sta per effettuare l'afferraggio.

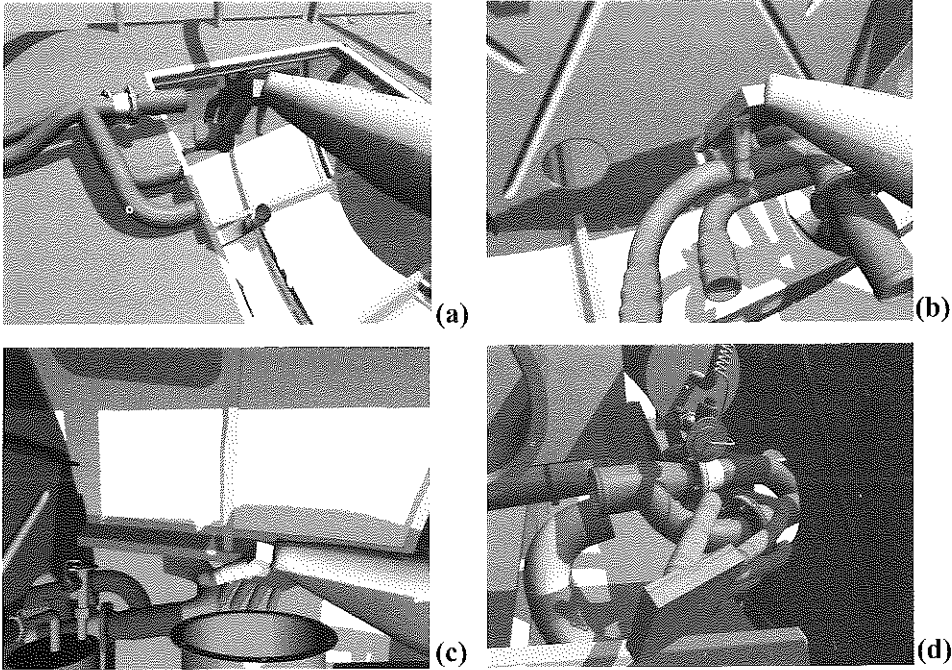


Figura 10. Alcune istantanee tratte dalla simulazione del montaggio dei condotti dell'impianto di condizionamento: (a) pre-montaggio esterno dei manicotti; (b) installazione dei tubi prima dell'arrivo nell'alloggiamento del pacco condizionatore; (c) completamento del montaggio dall'alto con allungamento del braccio per effettuare l'ultimo collegamento; (d) creazione di un giunto dinamico per guidare l'operazione durante la fase finale di avvicinamento delle parti.

Nel caso applicativo considerato, che è risultato piuttosto complesso a causa delle geometrie dei componenti, l'attività di *collision detection* ha impegnato notevolmente il sistema. Per individuare il miglior compromesso tra generalità, livello di dettaglio, accuratezza della simulazione e prestazioni del sistema è stato necessario sviluppare e

verificare diverse configurazioni che hanno riguardato sia la struttura dei modelli 3D, sia il modello dinamico.

6. Considerazioni conclusive

La Realtà Virtuale, per essere uno strumento complesso, che integra una vasta gamma di conoscenze e richiede l'uso di tecnologie anche assai diverse tra loro, può rivelarsi assai utile, solo quando è adeguatamente impiegata e se ne riconoscono i limiti e le difficoltà.

Nella simulazione condotta, ai fini della progettazione, in impianti di Realtà Virtuale occorre che i modelli riproducano, con il massimo della corrispondenza, le funzionalità e le prestazioni di oggetti reali, fisicamente non ancora esistenti, da deliberare, perché possano essere prodotti, solo quando le loro caratteristiche estetiche e funzionali siano state riconosciute perfettamente idonee agli impieghi finali. Tra queste caratteristiche sono importanti, se non addirittura prioritarie, quelle che interessano le prestazioni cinematiche, dinamiche, e di resistenza strutturale. Un esempio, in tal senso, è costituito dalle simulazioni delle prove omologative di resistenza agli urti frontali, laterali e posteriori che le autovetture debbono superare prima di essere immesse sul mercato. Per queste finalità, le case produttrici di automobili effettuano le prove fisiche su modelli reali solo dopo che tutte le necessarie verifiche sono già state favorevolmente superate dai corrispondenti prototipi digitali. Altri campi d'applicazione, in cui le proprietà di massa degli oggetti virtuali divengono essenziali, sono quelli delle simulazioni di montabilità e smontabilità e di mautenibilità degli assiemi complessi.

Per la sperimentazione e la validazione delle caratteristiche funzionali citate i modelli virtuali debbono comportarsi, almeno in parte, proprio con quella materialità di cui, per loro natura, sarebbero assolutamente privi. Per la simulazione virtuale, quindi, può essere indispensabile che gli oggetti si comportino come se fossero soggetti alla gravità, alle forze d'inerzia, ai carichi d'esercizio ed alle reazioni vincolari. Tutto ciò per riprodurre le funzioni di manufatti che, quando saranno fisicamente realizzati, si comporteranno proprio come i loro simulacri digitali avevano consentito di presagire.

Va detto anche che i costi da sostenere per l'impiego della V.R. nella progettazione, sia quelli d'impianto e di gestione, sia quelli occorrenti per l'incessante esigenza d'aggiornamento delle strutture e degli operatori, sono notevoli. Per questo motivo le applicazioni di V.R., fino ad oggi, sono state concretamente attuate solo in comparti industriali, come quello

automobilistico, quello aeronautico, quello aerospaziale e quello degli armamenti che ne hanno potuto o voluto sostenere l'onere.

È opportuno, infine, rilevare che le metodologie di progettazione basate sulla Realtà Virtuale producono altri due, positivi risultati. Il primo di essi è che offrono al progettista l'insperata libertà di inventare soluzioni nuove, anche assai diverse tra loro e da quelle tradizionali, perché lo strumento che hanno a disposizione consente anche la potenzialità della contestuale sperimentazione. Il secondo vantaggio è che la progettazione con l'ausilio della Realtà Virtuale necessariamente richiede l'analisi meticolosa e puntuale sia dei requisiti funzionali, sia delle soluzioni progettuali (o dei parametri di progetto) possibili, sia dei vincoli. Questi approfondimenti, che scaturiscono non solo dalla necessità di modellare ed inventare i prodotti, ma anche da quella di simulare e sperimentarne le funzionalità ed impieghi, di fatto, impegnano i gruppi di lavoro a maturare una conoscenza più approfondita e dettagliata del progetto. Un siffatto vantaggio, da solo, già rappresenterebbe un risultato di tutto rilievo. All'analoga valorizzazione di un tale, favorevole "effetto collaterale" pervennero, a cavallo degli anni cinquanta e sessanta, anche i ricercatori dell'IBM che, rivalutando il trattato sulla teoria dei grafi elaborato da Eulero quasi due secoli prima, svilupparono ed applicarono in modo intensivo le tecniche reticolari PERT alle impellenti necessità di pianificazione e controllo del progetto, assai complesso ed articolato, di armare i sommergibili a propulsione nucleare con missili Polaris. Anche allora, pur se con potenze di calcolo inferiori per molti ordini di grandezza a quelle degli attuali sistemi, l'impiego dell'informatica contribuì a determinare una svolta epocale nelle metodologie di progettazione. Per fortuna, ma anche per convincimento, il nostro odierno, anche se ben più modesto impegno, è finalizzato ad obiettivi pacifici, d'interesse generale, che è ben più facile, ma anche edificante, condividere.

Bibliografia

- [1] Valentini C., “*La realtà sulla Realtà Virtuale*”, sito web:
<http://www.valentiniweb.com/Piermo/documentazione/realta.htm>
- [2] Bricken W., “*Learning in Virtual Reality*”, sito web:
<http://www.hitl.washington.edu/publications/m-90-5/>
- [3] Queau P., “*La Rivoluzione del Virtuale*”, sito web:
<http://www.emsf.rai.it/aforismi/aforismi.asp?d=135>
- [4] Maldonado, T. “*Realtà e Virtuale*”, Feltrinelli editore, Milano 2005.
- [5] Schrodinger, E. *Science et humanisme. La physique de notre temps*. Desclée de Brouwer, Paris, 1994
- [6] Hacking, I. “*Representing and intervening*” Cambridge University Press, 1983
- [7] Caputo, F. “*Prospettiva e Realtà Virtuale*” in *Come alla Corte di Federico II, ovvero parlando e riparlano di scienza, incontri 2003-2004*, Coinor Ed. Università di Napoli Federico II, 2005.
- [8] Maldonado, T. “*Appunti sull’iconicità*” *Telema*, n.6, 1999.
- [9] Della Porta, G.B. “*Magiae Naturalis libri viginti*” Samuel Hempelius, Francoforte, 1607.
- [10] Caputo, F., Martorelli, M.. “*Disegno e progettazione per la gestione industriale*” Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli 2003, ISBN 88-495-0735-6
- [11] Caputo F., Di Gironimo G., Patalano S., “*Specifiche di un centro di realtà virtuale per la progettazione nel campo dei trasporti*”, Convegno Nazionale ADM – XXXIII AIAS Innovazione nella progettazione Industriale, Bari 31 Agosto-2 Settembre 2004
- [12] Lanier J., Interview in: “*Whole Earth Review*”, sito web:
<http://www.storiaeinformatica.it/nume/italiano/nrealta.html>
- [13] AA.VV., “*SGI e la Realtà Virtuale*”, sito web:
<http://info.cadmo.it/grafica/vrc.html>
- [14] Cobb S.V.G., et al., “*Integrated manufacture: a role for VR?*”, In: *International Journal of Industrial Ergonomics* 16, 1995, pp. 411-425
- [15] Andreolotti M., “*Computer, insegnamento, scuola: esperienze e prospettive didattiche multimediali Realtà Virtuale e didattica*” sito web:
<http://www.victorian.fortunecity.com/blake/178/tesi-cap5.html>
- [16] Ellis S.R., *Comp. Sist. Eng.*, 2, 4, 1991, pp. 321. In: Usuh M., Slater M., “*An exploration of immersive virtual environment*”. In: Elsevier Science, Ltd 0160-9327/95/\$09.50, 1995
- [17] AA.VV., “*3D CAD.it : che cos’è la VR?*”, sito web:
<http://www.3dcad.it/realta/index.asp>
- [18] Bonini F., “*Simulazione numerica e realtà virtuale applicate al mondo reale*”. In: *Bollettino del Cilea*, 80, 2001
- [19] AA.VV., “*Sensorama’s Pre-Virtual Reality*”, sito web:
<http://www.retrofuture.com/sensorama.html>
- [20] Sutherland I.E., *Proc .IFIPS Conf.* 2, 506, 1965. In: Usuh M., Slater M., “*An exploration of immersive virtual environment*”. In: Elsevier Science, Ltd 0160-9327/95/\$09.50, 1995

- [21] Sutherland I.E., Proc .Fall Joint Comp. Conf. 33, 757, 1968. In: Usoh M.,Slater M., “An exploration of immersive virtual environment”. In: Elsevier Science, Ltd 0160-9327/95/\$09.50, 1995
- [22] Di Gironimo G., “*Studio e sviluppo di metodologie di progettazione ergonomica in ambiente virtuale*”, Tesi di dottorato, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Novembre 2002
- [23] Marino F., “Specifiche di un sistema di Realtà Virtuale per la progettazione nel campo dei trasporti”, Tesi di laurea, Università degli Studi di Napoli “Federico II”, 2003
- [24] Sanchez-Segura M.I., et al., “*Virtual reality systems estimation vs. traditional systems estimation*”. In: The Journal of Systems and Software, 72, 2004, pp.187-194
- [25] Usoh M.,Slater M., “*An exploration of immersive virtual environment*”. In: Elsevier Science, Ltd 0160-9327/95/\$09.50, 1995
- [26] Stone R., “Virtual Reality for interactive training: an industrial practitioner’s viewpoint”. In: Int.J. Human-Computer Studies, 2001, 55, pp.699-711
- [27] Bao J.S., et al., “*Immersive Virtual product development*”. In: Journal of material processing technology, 129, 2002, pp.592-596
- [28] Loftin R.B., Wang L., Baffes G., Hua G., “*An intelligent agent training system for space shuttle flight controllers*”. In: Telematics Informatics, 1988, 5, 3, pp.61-151
- [29] Vora J., Nair S., Gramopadhye A.K., Duchowski A.T., Melloy B.J., Kanki B., “*Using virtual reality technology for aircraft visual inspection training: presence and comparison studies*”. In: Appl Ergonomics, 2002, 33, pp.70-559.
- [30] Ziegler H., “*vrcom GmbH-Kompetenz in AR und VR*”, sito web:
http://www.inigraphics.net/press/topics/1999/SA_99/SA_99vrcom.pdf
- [31] Sheng Q., et al., “A cooperative virtual prototyping system for mechatronic solution elements based assembly”. In: Advanced Engineering informatics, 19, 2005, pp.169-177
- [32] Kerttula M., Salmela M., Hcikkinen M., “*Virtual reality prototyping – a framework for the development of electronics and telecommunication products*”, Proceedings of the 8th International Workshop on Rapid System Prototyping, 1997.
- [33] Pratt M.J., “Virtual prototypes and product models in mechanical engineering. Virtual prototyping-virtual environments and the product design process”. Chapman and Hall, London 1995, pp. 28–113
- [34] Boothroyd G., Dewhurst P., “*Design for assembly: a designer's handbook*”. In: Technical report, Department of Mechanical Engineering, University of Massachusetts at Amherst, 1983.
- [35] Pratt M.J., “*Virtual prototypes and product models in mechanical engineering*”. In: Rix J., Haas S., Teixeira J., “Virtual prototyping, virtual environments and the product design process”, Chapman & Hall, London 1995, chapter 10, pp.28-113

- [36] Stork A., De Amicis R., “*Sketching Free-Forms in Semi-Immersive Virtual Environments*”, Proceedings of 2000 ASME Design Engineering Technical Conferences, and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland, September 10-13, 2000
- [37] Di Gironimo G., Martorelli M., Monacelli G., Vaudo G., “*Use of virtual mock-up for ergonomic design*”, Proc. of 7th International Conference on “The Role of experimentation in the automotive product development process”-ATA 2001, Florence, 23-24 May 2001
- [38] Caputo F., Di Gironimo G., Patalano S., Biondi A., Maione R., Liotti F., “*Use of ergonomic software in virtual environment for the prevention of muscular-skeletal diseases*”, Proc. of ISCS 2001, Napoli, 6-7 december 2001
- [39] Rezzonico S., Huang Z., Boulic R., Magnenat Thalmann N., Thalmann D., “*Consistent grasping interaction with virtual actors based on the multisensor handmodel*”. In: *Virtual Environment 95*, Springer, Wien, pp.107-118
- [40] Poupirev I., et al., “*Go-Go Interaction Technique: Non-Linear Mapping for Direct Manipulation in VR*”, ACM UIST 96, pp.79-80
- [41] Leoncini P., Di Gironimo G., Allocato A., “*Interazione realistica per verifiche di manutenibilità in Realtà Virtuale*”, 4° Convegno tecnico scientifico, MIMOS, Torino, 25-26-27 ottobre 2004
- [42] Lee W.B., et al., “*Application of virtual manufacturing in materials processing*”. In: *Journal of Materials Processing Technology*, 113, 2001, pp.416-423
- [43] Chedmail P., et al., “*État de l’art sur l’accessibilité e l’étude de l’ergonomie en réalité virtuelle*”. In : *Mécanique & Industries*, 3, 2002, pp.147-152
- [44] Marcelino L., et al., “*A constraint manager to support virtual maintainability*”. In : *Computer & Graphics*, 27, 2003, pp.19-26
- [45] Corbet J., “*Design for Economic Manufacture*”, *Annals CIRP*, 35, 1, 1986, p. 93
- [46] Nevins J.L., Whitney D.E., “*Programmable Assembly System Research and its Applications*”, In: *Machine Intelligence*, 10, pp.249–266
- [47] Martin-Vega L.A., McDuffie E.L., Schneider M., Buoni F.B., Schnaider E., “*Using Scheduling in Flexible Manufacturing Systems*”. In: *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 8, 1995, p. 681
- [48] Hird G., Swift K.G., Bassler R., Seidel U., “*Possibilities for integrated design and assembly planning*”, Proceedings of the 9th International Conference *Assembly Automation*, 1988, pp.155–166
- [49] Lotter B., “*Assembly Robots or Dedicated Automatic Assembly Machines*”. In: *Assembly Automation*, 6, 4, 1986, pp. 195–200
- [50] Warneke H.J., Steinhilper R., Storn H., “*Message from 100 FMS Projects for Industry*”, Proceedings of The International Matador Conference, 1992, p. 213
- [51] Li J.R., et al., “*Desktop virtual reality for maintenance training: an object oriented prototype system (V-Realism)*”. In: *Computers in Industry* 52, 2003, pp.109-125

- [52] Wang Q.H., et al., “*A desktop VR prototype for industrial training application*”. In: Virtual Reality, 2004, 7, pp.187-197
- [53] Caputo F. Monacelli G., “From digital mock-up to virtual reality: automotive design application”. Proc. of International Symposium on Advanced Methodologies for Automotive Product Design and Development, Como, March 23-24, 2000
- [54] Avallone L., Di Gironimo G., Monacelli G., Patalano S., “*Use of digital mock-up for automotive assembly design*”. Proc. of ISCS 2001, Napoli, 6-7 december 2001
- [55] Wang Y., et al., “*Method and algorithms for constraint-based virtual assembly*”. In: Virtual Reality, 2003, 6, pp.229-243
- [56] Srinivasan H., et al., “*Selective disassembly for virtual prototyping as applied to de-manufacturing*”. In: Robotics and Computer Integrated Manufacturing , 15, 1999, pp.231-245
- [57] de Antonio A., et al., “Usability issues in the design of an intuitive interface for planning and simulating maintenance interventions using a virtual environment”. In: Virtual reality, 2004, 7, pp.212-221
- [58] Gomes de Sa A., et al., “Virtual reality as a tool for verification of assembly and maintenance processes”. In: Computer & Graphics, 23, 1999, pp.389-403
- [59] Plante T.G, et al., “*Might virtual reality promote the mood benefits of exercise?*”. In: Computers in human behaviour, 19, 2003, pp.495-509
- [60] Baek S., et al., “Motion retargeting and evaluation for VR-based training of free motions”. In: The Visual Computer, 2003, 19, pp.222–242
- [61] Sun H., et al., “*Direct Virtual-hand interface in Robot assembly programming*”. In: Journal of visual language and computing, 1999, 10, pp.55-68
- [62] Vora J., et al., “Using Virtual Reality technology for aircraft visual inspection training: presence and comparison studies”. In: Applied Ergonomics,33, 2002, pp.559-570
- [63] Soares L.P., et al., “*JINX : An X3D Browser for VR immersive simulation based on clusters of commodity computers*”, sito web: <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=985040.985052>
- [64] Consorzio CETMA, “*Realtà Virtuale*”, sito web: <http://serviziweb.brindisi.enea.it/informatica/default.aspx>
- [65] Crockett T.W., “*An introduction to parallel rendering*”. In: Parallel computing, 23, 1997, pp.819-843
- [66] Blanke J.W, et al., “*Active visualisation in a multidisplay immersive environment* ”. In: Computer & Graphics, 27, 2003, pp.681-691
- [67] Takeda H., Moriya T., Utsugi K., Sato Y., Yamasaki Y., Minakawa T., “*Distributed Video Editing for Array of Projectors*”, sito web: <http://www.actapress.com/Abstract.aspx?paperId=14217>
- [68] Chen Y, et al., “*Software environments for cluster-based display system*”, sito web: <http://csdl2.computer.org/persagen/DLAbsToc.jsp?resourcePath=/dl/proceedin>

- [gs/&toc=comp/proceedings/ccgrid/2001/1010/00/1010toc.xml&DOI=10.1109/CCGRID.2001.923194](http://www.ghostcomputerclub.it/articoli/news/articoligcc.php?titcode=XOYEB-20122005092624)
- [69] Olson E.C., “*Cluster Juggler- PC cluster virtual reality*”, Master of Science, Iowa State University, 2002
- [70] Pellegrinetti G., “*Introduzione alla realtà virtuale*”, sito web: <http://www.ghostcomputerclub.it/articoli/news/articoligcc.php?titcode=XOYEB-20122005092624>
- [71] Mayer T., “New options and considerations for creating enhanced viewing experiences”. In: *Computer & Graphics*, May 1997, pp. 32–34
- [72] Barak A., et al., “*The MOSIX multicomputer operating system for high performance cluster computing*”. In: *Future Generation Computer System*, 13, 1997-1998, pp.361-372
- [73] AA.VV., sito web: <http://www.caesar.de/>
- [74] Caputo F., Di Gironimo G., Capitolato tecnico bando di gara 82/F/03: “Fornitura e posa in opera di un sistema per la realizzazione di un centro di realtà virtuale (Reality Center) per le esigenze del centro regionale di Competenza trasporti-POR Campania 2000-2006-MIS 3.16”, www.unina.it, Napoli, 19/12/2003
- [75] Huang J., et al., “*A Pc Cluster high fidelity mobile crane simulator*”. In: *Tamkang Journal of Science and Engineering*, Vol. 5, No. 1, 2002, pp. 7-20
- [76] Ferrazzin, D., Salsedo, F., Bergamasco, M., “The MORIS Simulator”, Proc. 8th IEEE International Workshop on *Robot and Human Interaction (RO-MAN '99)*, 1999, Pisa, Italy, pp. 135-141
- [77] Park, M. K. et al., “Development of the PNU Vehicle Driving Simulator and its Performance Evaluation”, Proc. IEEE International Conference on *Robotics and Automation (ICRA)*, 2001, Seoul, South Korea, pp. 2325-2330
- [78] Choi E., “Performance test and analysis for an adaptive load balancing mechanism on distributed server cluster system”. In: *Future Generation Computer System*, 20, 2004, pp.237-247
- [79] Huang J., et al., “The frame synchronization mechanism for the multirendering surrounding display environment”. In: *Displays*, 25, 2004, pp.89-98
- [80] Li W.J., et al., “A PC-based distributed multiple display VR system”. In: *Displays*, 22, 2001, pp.177-181
- [81] Büschenfeld A., “Real-time rendering in a PC Cluster environment provided by OpenSG”, Proc. CIPA 2005 XX International Symposium, 26 September – 01 October, 2005, Torino, Italy
- [82] Roth M., “Integration paralleler Rendering-Verfahren für lose gekoppelte Systeme in OpenSG”, sito web: <http://publica.fhg.de/cgi/get.pl?N-9604.pdf>
- [83] Roth M., “Multi-threading and clustering for scene graph systems”. In: *Computer & Graphics*, 28, 2004, pp.63-66
- [84] Samanta R., Zheng J., Funkhouser T., Li K., Singh J.P., “Load balancing for multi-projector rendering systems”, *Proceedings of the SIGGRAPH/EUROGRAPHICS Workshop on Graphics Hardware*, 1999, pp. 107–116

- [85] Held R., Durlach N., "Telepresence, time delay and adaptation". In: Ellis S. (ed.) *Pictorial Communication in Virtual and Real Environments*, Taylor and Francis, 1991, pp.232-246
- [86] Liang K., et al., "Interactive parallel visualization of large particle datasets". In: *Parallel Computing*, 31, 2005, pp.243-260
- [87] AA.VV., "SGI ONYX Family of advanced visualization solutions", sito web: http://www.jrti.com/PDF/onyx_family_ds.pdf
- [88] AA.VV., sito web <http://www.orad.co.il/>
- [89] Pape D, et al., "Ygdrasil-a framework for composing shared virtual worlds". In: *Future Generation Computer System*, 19, 2003, pp.1041-1049
- [90] Yoshida S., et al., "A technique for precise depth representation in stereoscopic display". In: *The Visual Computer*, 2001, 17, pp.46-54
- [91] Canziani T., Spasse S., "Visione stereoscopica", Trieste, 2002, sito web: <http://fc.units.it:16080/ppb/visione/Stereopsi/Stereopsi1.html>
- [92] AA.VV., sito web: <http://www.barco.com/>
- [93] Ware C., Gobrecht C., Paton M.A., "Dynamic adjustment of stereo display parameters". In: *IEEE Trans Syst Man Cybern* 28, 1998, pp.56-65
- [94] AA.VV., "La visione stereoscopica", sito web: <http://www.geosoft.it/>
- [95] De Martino J.M., "Sistemas de informações Graficas", sito web : <http://www.dca.fee.unicamp.br/>
- [96] AA.VV., "Monitor CRT", sito web: <http://www2.ctxeurope.com/italian/knowledge/resolution.asp>
- [97] Bruno P., Orloff E., "Monitor LCD- Cristalli liquidi finalmente per tutti". In: *PC Professionale*, 134, Maggio 2002, sito web: <http://pcpro.mondadori.com/>
- [98] AA.VV., sito web: <http://www.vialattea.net/>
- [99] Llorente A., "Visualizadores de Informacion. Pantallas de Cristal Liquido", sito web: <http://www.datex-ohmeda.es/aula-bioingenieria/numero8.htm>
- [100] AA.VV., sito web: <http://www.dlp.com/>
- [101] AA.VV., sito web: <http://www.sim2.it/>
- [102] AA.VV., sito web: <http://www.audioservicevr.com/>
- [103] AA.VV., sito web: <http://www.techdata.it/>
- [104] AA.VV., sito web: <http://www.welcome.it/>
- [105] AA.VV., sito web: <http://www.fakespace.com/>
- [106] AA.VV., sito web: <http://www.stereographic.com/>
- [107] AA.VV., sito web: <http://www.4d-vision.de/>
- [108] AA.VV., sito web: <http://www.polhemus.com/>
- [109] Colombo C., Del Bimbo A., "Real-time head tracking from the deformation of eye contours using a piecewise affine camera". In : *Pattern Recognition Letters* 20, 1999, pp.721-730
- [110] AA.VV., sito web: <http://www.inition.co.uk/>
- [111] Zaoui M., et al, "A 6 DOF opto-inertial tracker for virtual reality experiments in microgravity". In: *Acta Astronautica* vol.49, No. 3-10, 2001, pp.451-462
- [112] Thalmann N.M., Thalmann D., "Virtual Reality Software and Technology", MiraLab-Centro Universitario d'Informatica Università di Genova, Computer

- Graphics Lab-Swiss Federal Institute of Technology, sito web:
<http://citeseer.nj.nec.com/250321.html>
- [113] AA.VV., sito web: <http://ar-tracking.de/>
- [114] AA.VV., sito web: <http://www.ev1.uic.edu/>
- [115] AA.VV., sito web: <http://www.elumens.com/>
- [116] AA.VV., sito web: <http://www.vr-systems.ndtilda.co.uk/>
- [117] AA.VV., sito web: <http://www.faw.uni-linz.at/>
- [118] AA.VV., sito web: <http://www.vrealities.com/>
- [119] Wenzel E., "Presence: Teleoperators and Virtual Environments", 1, 1, 80, 1992
- [120] Dalisi R., Finizio G., "Creatività, Design e Management", Napoli, 2000
- [121] AA.VV., "Virtual Reality in Car Production", BMW Group Information, Maggio 2003, pp.2-6
- [122] Grandi R., "Virtual process week in the experimental vehicle build at BMW AG", In: Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 17, 2001, pp.65-72
- [123] AA.VV., sito web: <http://www.italdesign.com/>
- [124] Cozzolino G., Gerbino S., Lanzotti A., Patalano S., "Progettazione per la manutenibilità di un carrello di atterraggio mediante sistemi CAD", Actas de XI Congreso Internacional de Ingenieria Grafica, Universidad Publica de Navarra – Universidad de la Rioja, España, Vol. 4, 2-4 de Junio, 1999
- [125] AA.VV., sito web: <http://www.boeing.com/>
- [126] AA.VV., sito web: <http://www.cineca.it/>
- [127] Zananni C., Quadrani P., Goris R., Vicecontis M., Tonis A., "Applicazioni della Realtà Virtuale in medicina: pianificazione e simulazione dell'intervento di protesi d'anca", sito web: <http://www.cineca.it/>
- [128] Monno G., Persiani F., Uva A.E., Liverani A., "La realtà virtuale al servizio dell'ingegnere", International Conference on *Design Tools and Methods in Industrial Engineering*, Palermo, Dicembre 1999
- [129] Knott D., Pai D.K., "Collision and Interference Detection in real-time using graphics hardware", Maggio 2003
- [130] AA.VV., sito web:
<http://geomatica.como.polimi.it/fotogrammetria/lez9a04.doc>
- [131] AA.VV., sito web:
http://www.appuntisuldigitalvideo.it/Guida_video_proiettori_LCD.html
- [132] Barbero M., Shpuza N., "Proiettori a microspecchi", In: *Elettronica e Telecomunicazioni*, 2, Agosto 2002, sito web: <http://www.crit.rai.it/>
- [133] AA.VV., sito web: <http://www.lithium.it/>
- [134] AA.VV., "VRML, Tridimensionalità e Comunicazione in Rete", sito web:
<http://www.ecn.org/>
- [135] Pellegrinetti G., "Introduzione alla realtà virtuale", sito web:
<http://www.ghostcomputerclub.it/articoli/news/articoligcc.php?titcode=XOYE>
[B-20122005092624](http://www.ghostcomputerclub.it/articoli/news/articoligcc.php?titcode=XOYE)
- [136] Schildt H., "Guida al C++" Seconda Edizione, Milano 2000

- [137] AA.VV., “The Inventor Mentor: Programming Object Oriented 3D Graphics with OpenInventor”, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America 1996
- [138] AA.VV., sito web: <http://it.wikipedia.org/>
- [139] AA.VV., sito web: <http://milano.irea.cnr.it/>
- [140] AA.VV., sito web: <http://www.padus.it/>
- [141] AA.VV., sito web: <http://www.isense.com/>
- [142] Encarnação J. L., “Mixed Reality in Product Development”, Workshop sul tema *La realtà virtuale nell'ingegneria dei veicoli*, Caserta, 13 Ottobre 2005
- [143] Andreini N., “Gli aiuti tecnologici sviluppati al PERCRO”, Laboratori PERCRO, Pisa 2002

L'elaborazione matematica e la corrispondente attività del cervello

di Gaetano Caricato

Il mio piccolo contributo a questo Convegno, che si svolge in onore del caro amico e collega Pasquale Renno, riguarda "L'elaborazione matematica e la corrispondente attività del cervello". Tema che, da qualche decennio, attrae soprattutto alcuni neurofisiologi, neurochirurghi e neuropsicologi, ma che richiede anche il contributo, non marginale, dei fisici matematici.

Il ben noto matematico francese Jacques Hadamard nel suo Saggio "Sulla psicologia della invenzione nel campo della Matematica", pubblicato nel 1945, scriveva: " Arriverà il giorno in cui i matematici sapranno a sufficienza sulla fisiologia del cervello, e i neurofisiologi saranno abbastanza al corrente sulle scoperte in Matematica, così da consentire una cooperazione interdisciplinare efficace?"

Premessa la consapevolezza che il cervello delle creature (uomo e donna) è la struttura più complessa che l'evoluzione del Creato mostra a noi, creature terrestri, 100 miliardi di neuroni connessi tra loro, che consentono la memoria, la visione spaziale, l'apprendimento, il pensiero, la coscienza, le diverse forme di memoria, da alcuni decenni neuropsicologi e neurofisiologi, con la collaborazione di alcuni fisici matematici, con esperimenti di vario genere stanno individuando le zone cerebrali attive durante l'esecuzione di operazioni matematiche, e si pongono numerosi problemi che sorgono nelle loro indagini. Accennerò ad alcuni di essi.

- a) Pur limitandosi alla esecuzione di diversi elementari compiti aritmetici (lettura, confronto, addizione, sottrazione, moltiplicazione) quali meccanismi garantiscono la coerenza delle informa-

- zioni numeriche distribuite in alcune aree cerebrali, e destano in noi la sensazione che stiamo effettuando un calcolo?
- b) In qual modo questi meccanismi di calcolo elementari cedono il passo all'educazione matematica e a rappresentazioni cerebrali molto più elaborate degli oggetti matematici?
- c) Quale processo di memorizzazione avviene nel cervello perché sia possibile la riattivazione mnestica?

A proposito del primo dei problemi ora indicati riferisco ciò che Stanislas Dehaene, ricercatore nell'ospedale Frédéric-Joliot di Orsay, ha scritto in un articolo "Come calcola il nostro cervello",* informando dei risultati sperimentali conseguiti da lui medesimo e da altri ricercatori operanti in Francia, negli Stati Uniti d'America e in Danimarca.

Con l'aiuto dei metodi della psicologia cognitiva, della neuropsicologia e con l'acquisizione della capacità di visualizzare immagini del cervello al lavoro, si stanno scoprendo le zone cerebrali attive durante l'esecuzione di operazioni aritmetiche, limitate agli enti più semplici ma fondamentali fra tutti gli oggetti matematici: i numeri interi.

L'analisi del tempo che investiamo nel confronto tra due numeri indica che il nostro cervello esamina le parole o i numeri arabi, espressioni simboliche, secondo una rappresentazione interna delle quantità numeriche analoga a una linea lungo la quale i numeri si succedono in ordine crescente. Per questa rappresentazione e per la manipolazione dei numeri viene utilizzata soprattutto un'area cerebrale: la regione parietale inferiore.

Nonostante ciò, eseguendo un'operazione aritmetica, un confronto, una sottrazione o una moltiplicazione, la regione parietale inferiore si attiva nell'uno o nell'altro dei due emisferi cerebrali, e coordina la sua attività con altre aree specializzate distribuite in tutto il cervello e, in particolare, con quelle che controllano la produzione del linguaggio.

È stato dimostrato che il tempo necessario per confrontare due numeri è tanto maggiore quanto più essi sono vicini: si impiega minor tempo a confrontare ad es. 8 e 2 piuttosto che 5 e 6.

Il medesimo effetto "distanza" si riscontra confrontando numeri di due cifre.

Operando il confronto con il numero fisso 65 si è riscontrato che nella misura in cui il numero da confrontare con 65 si avvicina a questo, il tempo necessario aumenta; quando si valuta la differenza con il numero 65 e il corrispondente tempo di risposta e se ne costruisce una curva ci si accorge che il tempo di risposta è funzione del logaritmo della distanza fra i due numeri. È notevole che una simile relazione logaritmica descri-

va anche il tempo impiegato dalle persone per confrontare due grandezze fisiche, come il peso o la lunghezza di due oggetti.

Sembra pertanto che i numeri, oggetti simbolici astratti, siano trattati dal cervello come grandezze fisiche concrete e continue. Presentati nella forma di cifre arabe, essi vengono convertiti mentalmente in una grandezza interna continua, e successivamente “pesati”. Nel caso dei numeri di due cifre è possibile determinare che ad es. 58 è minore di 65 confrontando solamente le cifre delle decine 5 e 6. Le unità sono prese in considerazione solo quando le cifre delle decine sono identiche. Si verifica che la curva dei tempi di confronto con il numero 65 non presenta discontinuità nel caso che i numeri cominciano col 6; che i tempi di risposta aumentano continuamente tra 51 e 59, ossia avvicinandosi a 65.

L’algoritmo di confronto utilizzato dalla nostra mente non scompone i numeri; il cervello converte i numeri piccoli (quelli a noi più familiari) in rappresentazioni interne su una scala continua di quantità, e confronta in continuazione queste quantità indipendentemente dai simboli che fungono da veicoli. La continuità analogica non viene meno fino a quando non si debbono confrontare numeri di oltre quattro cifre; in tal caso il confronto avviene cifra per cifra, da sinistra a destra, e tanto più rapidamente quanto maggiore è la loro differenza.

Altri esperimenti hanno permesso di definire con maggiore precisione questo “senso della quantità”.

L’effetto della distanza è quasi identico, sia che i numeri vengano presentati in notazione araba, sia che vengano scritti in lettere o espressi con un insieme di punti: queste diverse forme di notazione, per vie differenti, portano a una medesima rappresentazione astratta delle quantità.

Lo stesso effetto continua ad essere osservabile in compiti nei quali non abbiamo (coscienza) consapevolezza che stiamo effettuando un trattamento (semantico) dei numeri.

Quando decidiamo se due cifre sono identiche o differenti-operazione che non sembra implicare altro che un’analisi visuale superficiale – siamo più lenti quando le cifre sono numericamente vicine: tardiamo di più a decidere che 1 è distinto da 2 che non quando dobbiamo decidere che 1 è differente da 9. Anche in questa situazione, infatti, trasformiamo i numeri in quantità interne.

Allo stesso modo quando facciamo un’addizione, siamo tanto più rapidi a rispondere “falso” quanto più il risultato si allontana da quello vero.

Però dopo la presentazione subliminale, ad es. delle parole “tre”, “uno”, “nove” se si esegue il confronto con il numero “cinque” del numero “quattro” questa operazione avviene più rapidamente, ossia la presenta-

zione di un numero, per quanto talmente breve da non lasciare in noi consapevolezza di averlo visto, riduce il tempo di trattamento dei numeri vicini.

Pertanto l'effetto della distanza costituisce una parte integrante della comprensione dei numeri.

Quando percepiamo uno stimolo numerico, sia in forma di cifre che di espressione verbale, sia in forma sonora che scritta, accediamo rapidamente e automaticamente alla quantità corrispondente su una sorta di linea organizzata secondo la prossimità numerica.

È stato anche possibile precisare i contributi dell'emisfero destro e dell'emisfero sinistro del nostro cervello all'attività aritmetica.

Ognuno dei due emisferi è in grado di determinare se due cifre arabe sono identiche o distinte. La forma delle cifre è codificata e riconosciuta in modo indipendente in entrambi gli emisferi.

Ognuno dei due emisferi riconosce se una cifra araba corrisponde o meno a un insieme di punti, ed è in grado di confrontare due cifre e numeri di due cifre; inoltre è in grado di effettuare autonomamente i procedimenti necessari per l'interpretazione di un numero scritto in cifre come una quantità, e anche per il confronto di due quantità.

È stato però rilevato che esiste una chiara asimmetria nel dominio del linguaggio e in quello del calcolo.

L'emisfero sinistro sembra possedere tutte le capacità aritmetiche di un soggetto normale, mentre l'emisfero destro non sa effettuare la lettura ad alta voce e non sa calcolare.

Nella maggior parte delle persone i processi di produzione del linguaggio parlato si svolgono solo nell'emisfero sinistro; e solo l'emisfero sinistro ha accesso alle tabelline, registrate in forma di parole nel caso che il soggetto le abbia imparate recitandole a memoria. Pertanto solo l'emisfero sinistro è capace di enunciare i numeri ad alta voce e di impiegarli in calcoli esatti.

È stato anche rilevato che le tavole di somma e moltiplicazione, che sono imparate a memoria nelle scuole elementari, rimangono impresse in circuiti cerebrali legati a quelli del linguaggio, e sono parzialmente indipendenti dalla rappresentazione quantitativa dei numeri, a cui è preposta la regione parietale. Questa seconda rappresentazione, viceversa, è necessaria per la sottrazione, che non viene appresa a memoria, ed esige il trattamento di quantità.

La regione parietale inferiore contiene, nei due emisferi, una codifica dei numeri in forma di quantità, mentre altri circuiti specializzati contribuiscono alla codifica delle tabelline, delle date, delle ore, e anche dell'algebra.

L'esistenza di tali circuiti e la funzione concreta della regione parietale inferiore nella manipolazione delle quantità sono confermate da osservazioni dirette del cervello impegnato nel calcolo.

Quando un circuito cerebrale entra in attività, dopo alcuni secondi si produce un aumento locale del flusso sanguigno e del tasso di ossigenazione del sangue nei vasi che irrigan le regioni cerebrali attive.

Questo incremento può essere rilevato all'esterno della scatola cranica per mezzo dell'iniezione di un tracciante radioattivo che si accumula di preferenza nelle regioni attive. La distribuzione del tracciante viene ricostruita misurando le radiazioni emesse con una camera a positroni.

È stata osservata l'attività corticale nel caso di sottrazioni ripetute di 3 in 3 ($50 - 3 = 47$; $47 - 3 = 44$; $44 - 3 = 41$, ecc.). Si produce un'intensa attività bilaterale della regione parietale inferiore, accompagnata da attività nei lobi frontali associata alla memorizzazione dei risultati intermedi.

Questi risultati sono stati riprodotti in immagini funzionali di risonanza magnetica, tecnica con cui si misura lo stato di ossigenazione delle molecole di emoglobina nel sangue.

Anche nel caso delle sottrazioni più semplici, come $11 - 4$, si osserva un'attivazione intensa che si estende a vari centimetri di distanza dal solco intraparietale, successivamente al fondo del solco postcentrale, giungendo fino alla regione parieto-occipitale. Pertanto sono diverse le regioni cerebrali attive.

Concentratisi sulla misurazione sistematica dell'attività cerebrale durante diversi compiti aritmetici (lettura, confronto, addizione, sottrazione, moltiplicazione) hanno riscontrato che la corteccia parietale destra si attiva durante il confronto dei numeri; la moltiplicazione dà luogo a un'attività ridotta e quasi esclusivamente localizzata nell'emisfero sinistro, mentre la sottrazione provoca attivazioni bilaterali.

È stato anche dimostrato che un'altra regione, il nucleo lenticolare sinistro, si attiva più intensamente durante i processi di moltiplicazione che durante il confronto degli stessi numeri.

Esperienze varie hanno permesso di formulare l'ipotesi che i numeri piccoli e quelli grandi siano rappresentati in regioni cerebrali parzialmente differenti.

Per comprendere i meccanismi cerebrali relativi al trattamento dei numeri, accanto alla conoscenza della cartografia delle zone cerebrali e delle loro funzioni, occorre conoscere anche lo sviluppo cronologico di questi fenomeni. In quale ordine e con quale velocità si attivano tali regioni?

Stanislas Dehaene ha ricostruito la sequenza cronologica delle attivazioni cerebrali che avvengono durante il confronto di numeri: ha misura-

to l'attività elettrica del cervello durante il confronto del numero 5 con le cifre arabe 1, 4, 6, 9 e con i nomi di questi numeri, uno, quattro, sei, nove mediante 64 elettrodi distribuiti sul cuoio capelluto di una persona che si è prestata a far eseguire tale ricerca.

Dopo circa 100 millisecondi dall'apparizione di un numero sullo schermo di un computer, la presenza di un potenziale elettrico positivo negli elettrodi posteriori indica l'attivazione dell'area visiva primaria. Un istante dopo, a 150 millisecondi, si apprezza una differenza topografica a seconda che sia stata presentata una cifra araba o il nome di un numero: l'identificazione avviene infatti attraverso reti anatomiche diverse: le regioni occipito-temporali ventrali dei due emisferi riconoscono le cifre; per le parole interviene solo la regione sinistra. In questo stadio non è però evidente alcun effetto a distanza; viene riconosciuta l'identità dei simboli, ma non il loro significato.

L'effetto di distanza appare dopo 190 millisecondi. C'è più lentezza con le cifre 4 e 6 che non con le cifre 1 e 9. D'altra parte il potenziale misurato dagli elettrodi situati per esaminare la corteccia parietale inferiore varia in funzione della differenza tra il numero e 5.

La topografia di questo effetto è simile per i numeri scritti in simboli arabi o con tutte le loro lettere, ciò che conferma come la regione parietale inferiore non codifichi i numeri in forma di simboli in una numerazione determinata, bensì in un codice quantitativo astratto e indipendente dal tipo di notazione di entrata.

Seguendo le ulteriori tappe del trattamento dell'informazione, a partire da 250 millisecondi appare la prima differenza significativa tra le risposte "maggiore" e "minore" che il soggetto dà premendo un pulsante. A partire da questo istante il sistema motorio comincia a rendersi conto della risposta corretta. L'attivazione motoria giunge al culmine a 330 millisecondi e la risposta propriamente detta si produce, in media, verso i 400 millisecondi. Successivamente a circa 470 millisecondi si osserva l'attivazione di una nuova area cerebrale, la regione cingolare anteriore che disimpegna un certo ruolo nel controllo di altri circuiti cerebrali. Quando il soggetto commette un errore, questa regione si attiva per rilevarlo e cercare di correggerlo. Si osserva allora un rilancio dell'attività elettrica concomitante alla risposta iniziale.

Questa catena di eventi- identificazione del numero, comprensione da parte della regione parietale inferiore e conseguente risposta motoria- corrisponde a ciò che si può dedurre dalla cartografia delle regioni cerebrali. L'elettroencefalografia permette di precisare la durata delle diverse tappe.

È interessante il fatto che nella moltiplicazione di due cifre, se la moltiplicazione è semplice, come 2×3 , l'attivazione parietale è fortemente lateralizzata a sinistra, ed è di breve durata. Se la moltiplicazione è meno semplice, per esempio 8×7 , l'attivazione sembra mettersi in moto nell'emisfero sinistro prima di estendersi alla regione parietale destra in alcune centinaia di millesecodi. La dimensione dei numeri manipolati e la natura delle operazioni effettuate sarebbero, pertanto, condizionanti per il percorso del calcolo nel nostro cervello.

Potrebbe darsi che esistano fin dalla nascita circuiti cerebrali pre-determinati per la rappresentazione di quantità, indipendentemente dall'educazione matematica. L'apprendimento e la recitazione dei nomi dei numeri (uno, due, tre,.....) e la forma visiva delle cifre arabe (1,2,3,...) permetterebbero l'ulteriore associazione di sistemi di numerazione simbolica a questo "senso delle quantità" con la quale già il bambino e la bambina apprenderebbero a porre in relazione, ad es. la parola "quattro" con il numero 4 e la quantità corrispondente. Affiora, indipendentemente dalla validità di questo schema un principio generale dell'organizzazione cerebrale: "la modularità delle reti".

Senza averne coscienza, decine di aree cerebrali specializzate, ripartite nei due emisferi si attivano quando ci si accinge ad effettuare un calcolo. L'informazione passa senza sforzo dalle rappresentazioni visive, specializzate nell'identificazione delle cifre, alle aree del linguaggio nelle quali i numeri si codificano in forma di catene di parole, e alle aree del "senso quantitativo" nelle quali si opera la corrispondenza con le quantità e "si pesano" le relazioni di prossimità.

Si comincia a riconoscere i nodi principali di questa rete, e affiorano così questioni aperte: quali meccanismi assicurano la coerenza delle informazioni numeriche distribuite, e producono in noi l'impressione soggettiva di essere intenti a effettuare un calcolo? In quale modo questi meccanismi di calcolo elementare cedono il passo all'educazione matematica e a rappresentazioni cerebrali molto più elaborate degli oggetti matematici fino a consentire la grande fluidità di calcolo di tanti matematici?

Un altro problema affascinante, già posto alla fine dell'Ottocento, ma soffocato da coloro che sentenziavano "la memoria è un'attività dello spirito, e come tale è del tutto estranea alla Scienza" si impose all'attenzione degli studiosi quando la genetica molecolare rivelò in modo indiscutibile che i programmi per la sintesi delle proteine, per l'ontogenesi, per il controllo dell'erogazione dell'informazione stessa si trovano registrati su lunghe molecole polinucleotidiche di DNA o di RNA.

Un attento esame semantico convinse così molti studiosi che i termini “memoria”, “programmi”, “messaggi”, “alfabeto dei messaggi”, benchè propri del campo semantico, conservavano intatto il loro valore se applicati sia nel campo della tecnologia, sia nel campo della biologia. Nulla di metaforico, né di abusivo vi è nell'affermare che i polinucleotidi hanno un loro alfabeto nel dire che una lavastoviglie esegue un programma, o nel riconoscere che il DNA è il substrato della memoria genetica.

Pertanto si è avuto un rinnovamento delle concezioni intorno alla memoria, con uno studio molto approfondito dei processi di memorizzazione, sia in apparecchiature costruite dall'uomo, sia nel sistema nervoso di un animale o nella mente della stessa creatura (umana).

In una memoria funzionale ha luogo una fase di “scrittura” durante la quale l'informazione viene registrata in un apposito substrato, in forma di traccia di memoria, e una fase di “lettura” che restituisce l'informazione e la rende operativa.

Di regola il substrato di memoria risponde al semplice requisito di venire organizzato o modificato in modo stabile; per il resto può avere composizione molto varia: può essere un nastro magnetico, o una molecola polinucleotidica, un disco di plastica, una rete di neuroni.

Quanto alla fase di lettura, essa viene effettuata da un adatto flusso di energia che entra uniforme ed esce modulato dai dislivelli del substrato. La natura dell'energia che fluisce cambia da caso a caso: sarà energia meccanica nel caso del fonografo, elettrica nel caso del registratore a nastro, energia di legame chimico nel caso della memoria genetica, energia neuroelettrica (flusso ionico) nel caso della memoria psicologica. Sola condizione per ottenere una corretta lettura è che il flusso di energia sia costante: se il grammofofo perde la carica, la musica risulta distorta, se la creatura è febbricitante, i suoi ricordi si ingarbugliano.

Psicologi e fisiologi distinguono una memoria a lungo termine e una memoria a breve termine. Quest'ultima, a carattere dissipativo, è quella che tiene presente l'informazione per il tempo occorrente ad elaborarla, ovvero per eseguire il programma precisato; si presume che dipenda dall'attività elettrica del cervello e dalla formazione di “circuiti riverberanti” entro i quali continuano a rincorrersi i segnali.

Se l'attività elettrica della corteccia cerebrale viene sospesa o disorganizzata, la memoria non si consolida, e si verifica la cosiddetta “amnesia retrograda”.

Con la fase di consolidamento si organizza la memoria a lungo termine che trattiene l'informazione per l'intera durata della vita. L'effetto del consolidamento – secondo una interpretazione ritenuta molto plausibile –

sarebbe dovuto all'instaurarsi di modifiche permanenti nelle sinapsi della rete neuronica coinvolta nel processo sensoriale e percettivo.

Secondo un'interpretazione alternativa il consolidamento sarebbe dovuto ad una variazione permanente dell'indice di rifrazione-assorbimento del mezzo attraverso il quale viaggiano informazioni trasportate da fenomeni ondulatori di tipo lineare.

È fondamentale comunque chiedersi: Dove e come il cervello immagazzina i propri ricordi a breve e a lungo termine?

Che tipo di processo di memorizzazione dev'esserci nel cervello perché possa prodursi la riattivazione mnestica?

Seguendo il neurochirurgo Karl H. Pribram (della Stanford University) si può avanzare un'ipotesi sulla natura della traccia mnestica, verificabile sperimentalmente: il cervello può sfruttare il più complesso principio di immagazzinamento dell'informazione, il principio dell'ologramma, tecnica che si fonda su integrali di convoluzione e trasformate di Fourier, poiché sembra che nel sistema nervoso centrale possano operare effetti di interferenza.

Com'è noto, in un ologramma l'informazione contenuta in una scena viene registrata su una lastra fotografica sotto forma di una complessa figura di interferenza o di diffrazione, apparentemente priva di significato. Quando però la figura viene illuminata da una luce coerente, si ricostituisce l'immagine originale. Ciò che rende unico l'ologramma come sistema di immagazzinamento è il fatto che ogni elemento dell'immagine originale è distribuito sull'intera superficie della lastra.

Pribram e il suo collaboratore Nico Spinelli hanno dimostrato che gli elementi mnestici sono distribuiti nel cervello, ed hanno precisato le modalità con le quali tali elementi vengono ricollegati tra loro mediante idonei processi mnestici, come frutto di esperimenti compiuti sulle scimmie in processi di ricezione visiva e nell'indagine sulla corteccia visiva, la parte del cervello che riceve l'informazione visiva.

Ciò che vediamo, essi affermano, non è una semplice codificazione delle forme luminose messe a fuoco sulla retina. Fra la retina e la corteccia visiva, in qualche luogo, i segnali in arrivo vengono modificati per fornire un'informazione che risulta legata a una risposta pensata: ciò che raggiunge la corteccia visiva viene evocato dal mondo esterno, ma non è una semplice o diretta riproduzione di esso.

Inoltre l'informazione contenuta nella sensazione viene distribuita in ampie zone della corteccia visiva; e ciò avviene come in un ologramma, nel quale si crea la figura d'interferenza quando un fascio di luce viene diviso in modo che una parte "di riferimento" del fascio possa interagire con un'altra parte del fascio riflesso da una scena o da un oggetto.

Sembra che la tecnica olografica fornisca un modello molto efficace per descrivere ciò che avviene nel cervello, in seguito a una ricezione visiva.

Si deve propriamente alle ricerche di R.W. Rodieck dell'Università di Sidney la dimostrazione che i fenomeni originatisi nel canale visivo, i quali esprimono i rapporti fra l'eccitazione di un recettore retinico e l'attività di punti circostanti, possono essere descritti matematicamente con l'impiego di "integrali di convoluzione". Per esempio la forma del campo di ricezione visiva di un singolo ganglio retinico rappresenta la "convoluzione di una derivata della forma dell'immagine retinica prodotta in quel punto".

Per chiarire come si possano produrre nel cervello questi effetti, Karl H. Pribram (professore di psicologia e psichiatria nella Stanford University) avanza l'ipotesi che quando gli impulsi nervosi giungono alla sinapsi (la connessione tra due cellule nervose), essi producono sull'altro lato della sinapsi fenomeni elettrici che assumono la forma di fronti d'onda in quiete istantanea. Le connessioni di una fibra nervosa sono centinaia; gli impulsi nervosi in arrivo danno probabilmente origine a una microstruttura di fronti d'onda che può interagire con microstrutture analoghe che si formano in corrispondenza di connessioni sinaptiche sovrapposte. Queste altre microstrutture derivano dalle variazioni spontanee del potenziale elettrico che incessantemente si producono nel tessuto nervoso, e da altre fonti all'interno del cervello. Ne risultano immediatamente correlazioni incrociate le quali, a loro volta, contribuiscono a produrre nuove configurazioni di impulsi nervosi.

La totalità del processo ha un effetto più o meno duraturo sulle molecole proteiche, e forse su altre macromolecole che si ritrovano nelle connessioni sinaptiche, e può servire da ologramma nervoso da cui può essere ricostruita un'immagine se giunge la stimolazione appropriata.

L'informazione può essere distribuita in tutto l'ologramma immagazzinato, e può quindi resistere a eventuali tentativi di cancellazione. Quando un ologramma viene illuminato nella maniera appropriata, anche in una sua piccola parte, restituisce l'intera scena originale. Inoltre gli ologrammi possono essere depositati l'uno sull'altro e, in seguito, essere ricostruiti separatamente.

L'ipotesi avanzata da K.H. Pribram sollecita almeno le seguenti domande:

Le espressioni matematiche che interpretano la forma dei campi di ricezione visiva nello strato delle cellule ganglionari della retina, forniscono descrizioni ancora valide per posizioni più centrali dell'apparato visivo?

Qual è il meccanismo nervoso di riferimento che svolge il ruolo della fonte di luce coerente necessaria in olografia a produrre e a rendere visibili gli ologrammi?

Come si produce l'immagazzinamento della traccia mnestica?

Orbene una forma di coerenza analoga a quella del fascio laser può essere fornita dalla constatazione anatomica che retina e corteccia visiva sono collegate da molte migliaia di fibre disposte in parallelo. Oppure le cellule nervose del canale visivo potrebbero acquistare coerenza per una "accensione ritmica".

Oppure la coerenza può derivare dall'azione di vari rivelatori che rispondono ad aspetti semplicissimi di uno stimolo, come l'inclinazione di una linea e il suo movimento nello spazio.

A proposito dell'immagazzinamento della traccia mnestica l'ipotesi olografica pone altri interrogativi; si intravedono due possibilità:

1. Una sintonizzazione dei raggruppamenti cellulari ottenuta variando le caratteristiche sinaptiche in modo che un particolare circuito si ponga in risonanza quando riceve una nota familiare;
2. Un qualche immagazzinamento molecolare che richiede forse un cambiamento di struttura in corrispondenza delle sinapsi.

Altre ricerche hanno dimostrato che le rappresentazioni dell'esperienza vengono distribuite dopo aver raggiunto il cervello.

Un importante gruppo di esperimenti hanno anche mostrato che nel cervello vi sono meccanismi atti a distribuire nel tempo le rappresentazioni dell'esperienza, o a trattenere sufficientemente a lungo l'informazione perché possa essere registrata durevolmente.

È stato chiarito inoltre che codificazione e decifrazione sono operazioni fondamentali sia nel processo di immagazzinamento sia in quello della riattivazione della memoria, che l'immagazzinamento è distribuito in tutto il sistema sensoriale; e, come si è già detto, che le operazioni di codificazione effettuate all'interno dei canali di ricezione sensoriale possono essere descritte in termini di integrali di convoluzione.

È essenziale in queste operazioni che gli elementi neuronali contigui non operino indipendentemente l'uno dall'altro. Grazie alle interazioni laterali gli elementi neuronali sovrappongono nello spazio i potenziali elettrici di eccitazione e di inibizione che hanno origine nelle cellule nervose vicine. Queste trasformazioni generano una microstruttura di fenomeni postsinaptici che può essere considerata alla stregua di fronti d'onda che costruiscono figure d'interferenza con altri fronti d'onda (preesistenti o generati all'interno), producendo nel complesso qualcosa di simile a un ologramma. Dato un meccanismo capace di immagazzinare

questo ologramma, un'immagine potrebbe essere evocata qualche tempo dopo dallo stimolo appropriato.

Per poter fungere da codici, le trasformazioni devono avvenire entro una cornice stabile che può essere fornita, in una certa misura, dalla stessa microstruttura immagazzinata, dalle vie nervose parallele del sistema di ricezione sensoriale, dalla sensibilità di rivelazione specifica delle unità del sistema e dalla effettiva risonanza dell'ambiente esterno.

Tuttavia i risultati sperimentali ottenuti da Pribram e suoi collaboratori suggeriscono che per eventi nuovi e complessi deve intervenire un diverso meccanismo più efficace, che possa interessare le aree di associazione della corteccia cerebrale, pur non risiedendo probabilmente all'interno di queste aree. Pare che le aree di associazione controllino il sistema di ricezione sensoriale per il tramite di strutture più profonde localizzate nel midollo allungato, per cui la funzione delle aree di associazione della corteccia sarebbe quella di fornire una parte fondamentale del processo di organizzazione necessario alla riattivazione dei ricordi: la ricostruzione di un'immagine da elementi mnestici distribuiti.

Una congettura alternativa a quella dell'esistenza di processi nervosi di tipo olografico è stata suggerita da Gabor, molto scettico sull'ipotesi che tra la memoria e l'olografia vi fosse un isomorfismo implicante processi fisici "olografici" comuni.

Gabor prospetta la possibilità che un'opportuna descrizione matematica dei processi olografici coincida con la descrizione dei processi di elaborazione dei segnali nervosi relativi alla memoria. Le uguali proprietà discenderebbero così da una uguale matematica.

Gabor ha provato che una descrizione matematica formale generale dei processi di registrazione e di lettura dell'ologramma può essere data in termini, rispettivamente, delle operazioni di convoluzione e correlazione. Ha mostrato quindi che una sequenza di queste due operazioni può costituire un semplice modello riferito agli aspetti temporali della memoria, la convoluzione descrivendo la fase di memorizzazione, e la correlazione quella di richiamo dell'informazione dalla memoria.

Comunque lo studio della memoria prosegue con il raffinamento delle tecniche sperimentali e dei modelli matematici, che forniranno nuove elaborazioni sempre più approssimate, e senza dubbio un più intenso legame fra neurofisiologi, neurochirurghi, psicologi, psichiatri e fisici matematici contribuirà ad approfondire maggiormente le conoscenze nell'ambito delle varie forme di memoria e del cervello nel suo insieme.

Stanislas Dehaene, "Come calcola il nostro cervello" in Quaderno n.101 di "Le Scienze"

Cfr. Laurent Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, pp. 120, 155, 160.

Cfr. "Le Scienze", Quaderno 19, p. 10.

Cfr. Karl H. Pribram, "La neurofisiologia della memoria" in "Le Scienze" Quaderno n. 19.

Colours in a complex fluid flow

di Giovanni Maria Carlomagno¹

The addition of colours to flow visualization certainly enriches its representative intelligence. In fact, the use of coloured images not only conveys an immediate and exciting impression of the results experienced in the attempt to achieve a better knowledge of the fluid flow, but it may also add a third dimension to the intrinsically two dimensional information rendered by each picture. In this work, the flow field and the wall heat transfer close to a jet in cross-flow is experimentally investigated by making extensive use of coloured images. Tests are carried out in a low turbulence wind tunnel at a jet Reynolds number equal to 8000 and for velocity ratios ranging from 1 to 5. Data are obtained with Particle Image Velocimetry (PIV) and with infrared thermography applied to the steady state heated-thin-foil technique.

1. Introduction

Probably the early methods to be used in experimental fluid mechanics were fluid flow visualization techniques. Nowadays, they are still very useful because, as Prof. Wolfgang Merzkirch says in his famous book *Flow Visualization* [1], “they differ from other experimental methods in that they render certain properties of a flow field directly accessible to visual perception”. The addition of colours to flow visualization allows a third dimension to be added to the intrinsically two-dimensional information rendered by an image.

Employing colours in flow visualization can be very useful as it may provide an immediate and clear imaging of the results which can make their interpretation easier. In particular, the spatial and temporal variation of different parameters which suddenly occur in complex fluid flows can be described accurately by coloured maps of relevant data that allow immediate understanding of the behaviour of the studied phenomenon.

In the past, He-Ne lasers were the most commonly used ones which emit a red light. When these lasers were used in flow visualization techniques (such as schlieren, or interferometry), to capture the red, one had to use panchromatic camera films instead of the most common orthochromatic ones. Thus, many

¹ carmagno@unina.it

researchers preferred to use colour films which, in any case, gave a better contrast. This was the first time the present author used colour for flow visualization in a Schlieren interferometer and obtained images like that represented in Fig. 1 which could be published only in black and white [2]. This figure shows an infinite vertical fringe interferogram of a hydrogen jet in still air obtained with a Wollaston prism interferometer. Actually rather than a jet, the interferogram represents a hydrogen source because, due to the low Reynolds number (of about 46), the buoyancy practically drives the fluid motion. However, it must be stressed that, in this case, colour does not add any supplementary information to the image.

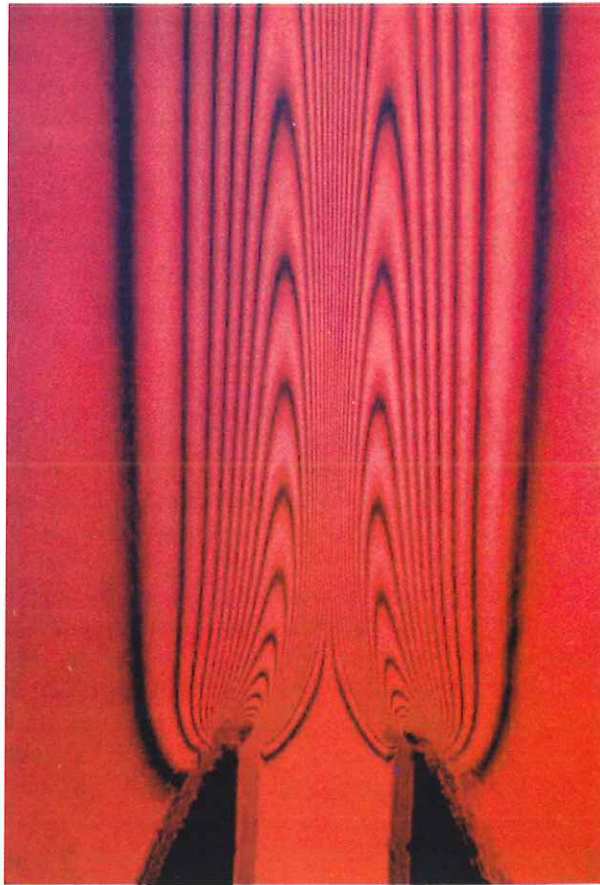


Fig 1. Infinite vertical fringe schlieren interferogram of a hydrogen jet ($Re=46$).

In the 1995 Gharib and Beizaie [3] produced the beautiful image reported in Fig. 2, which appears on the cover of the *Journal of Visualization*: this was one

of the earliest examples of coloured flow visualization where colours reveal quantitative information. In this example, colours really add quantitative data to the image. In fact, this image shows a two dimensional laminar jet in a soap film tunnel where the small variations of the film thickness result in interference patterns. Since the thickness of the film responds to the dynamics of the film motion in a manner similar to shallow water flows, the colour patterns represent isovelocity (isothickness) regions.

The scene reported in Fig. 2 shows colours which are spontaneously generated by light interference but, in order to unveil the two-dimensional behaviour of a particular flow parameter, a coloured pattern can also be added artificially to each image. This procedure can be very useful to describe complex fluid flows and, in this case, one speaks about a false colour picture.

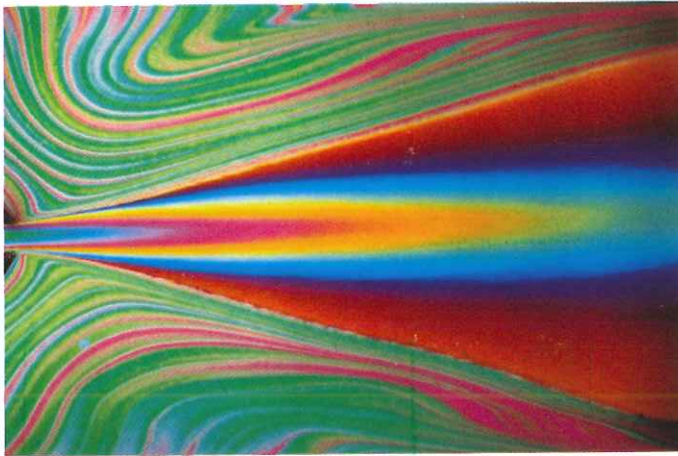


Fig 2. Two-dimensional jet in a soap film tunnel. Variations of film thickness result in coloured interference patterns.

The two images of Fig. 3 represent the same instantaneous temperature map on a flat plate with ramp, which was tested in a hypersonic wind tunnel at Mach number equal to 6 and stagnation temperature of about 1800K. This case shows that, when employing the false colour technique to add useful information, it may be better to use a discrete rather than a continuous colour scale. In fact, the bottom image (Fig. 3b), represented with a discrete colour scale, provides a much better description of the temperature map over the tested model than the top image (Fig. 3a) which makes use of a continuous colour graduation.

The aim of the present work is to describe the velocity domain and the heat transfer at the wall in the near field of a jet in cross-flow by making extensive use of coloured images.

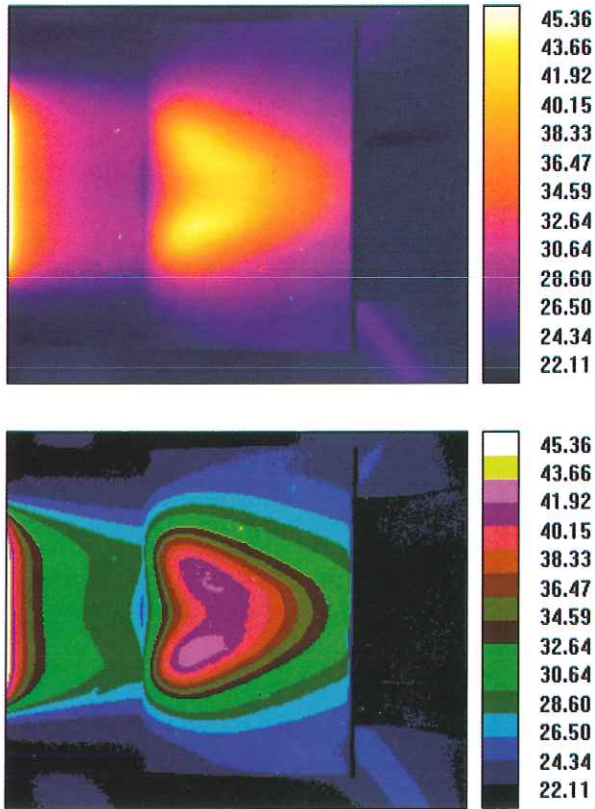


Fig 3. Instantaneous temperature maps of a flat plate with ramp in a hypersonic flow: a) continuous colour scale; b) discrete colour scale.

2. Jets in cross-flow

Several studies have been focused on jets in cross-flow; even so further data are needed to understand their complexity better. This kind of flow is of great relevance in several engineering applications, such as film cooling of turbine blades, lifting jets in V/STOL aircrafts, jets in combustors, and waste disposal into water bodies and atmosphere. Even though several studies have been focused on jets in cross-flow, further knowledge is needed to understand their complexity to a greater extent.

Difficulties of jets in cross-flow are also due to the numerous parameters which influence the jet behaviour, the most important being the *effective velocity ratio* R and the *Reynolds number* Re .

The effective velocity ratio, which is also called *injection ratio*, has a strong influence on the flow field and on the jet curvature and it is commonly defined as the square root of the jet to free stream momentum-flux ratio:

$$R = \left(\frac{\rho_j \bar{v}_j^2}{\rho_\infty \bar{u}_\infty^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

where ρ is the fluid density, \bar{u} and \bar{v} are the x and y mean velocity components (see Fig. 6) and subscripts j and ∞ refer to jet and to free stream, respectively.

For incompressible flow, the velocity ratio reduces to $R = \bar{v}_j / \bar{u}_\infty$.

The Reynolds number, based on the free stream velocity and on the pipe diameter D , mainly influences the vortical structures and the jet shear layer.

Most existing work has been focused on understanding the flow field dynamics with little attention being given to the wall heat transfer problem, even though a jet in cross-flow represents a fundamental aspect of some cooling problems. The investigation of Goldstein and Taylor [4] is one of the first attempts to measure heat transfer coefficients near the wall. They test a row of jets entering a cross-flow at an angle of 35° , for R ranging from 0.2 to 2 and a free stream velocity of 15ms^{-1} . A heat transfer maximum is located on the centreline, at about 0.75 diameters downstream from the nozzle exit plane. Recently, Astarita *et al.* [5] present heat transfer maps for R values ranging from 0.5 to 5 and Re about 5000. They find, for increasing the injection rate, a decrease in size of the jet influence region around the nozzle exit while the wake width tends to enlarge further away.

Many experimental and numerical studies have been carried out to analyse the complex vortical structures originating from the interaction of the jet with the free stream and the main characteristics of the phenomenon, such as the jet trajectory and cross-flow entrainment. Fric and Roshko [6] and Kelso *et al.* [7] observe vortex structures in the jet wake region, the main ones being the *wall vortices* which develop along the wall and the unsteady *upright vortices* vertically oriented. The pattern of the latter vortices bears a similarity to the vortex street downstream of a solid cylinder. Based on their measurements and on the visualization already performed by Foss [8], Andreopoulos and Rodi [9] describe the presence of a number of vortical structures. A steady *horseshoe vortex* is envisaged near the wall, on the upstream side of the jet around the pipe exit, this structure being similar to what is found when a boundary layer bends around an obstacle. A steady *counter-rotating vortex pair* (CVP), which is bound to the lee surface of the jet, originates from the reorientation of the vorticity issuing from the pipe as well as from the vorticity generated at the interface between the cross-flow and the jet. Unsteady *ring-like vortices*, which

originate from the jet shear layer and are typical of free jets, develop around the jet. All the above mentioned vortical structures are sketched in Fig. 4.

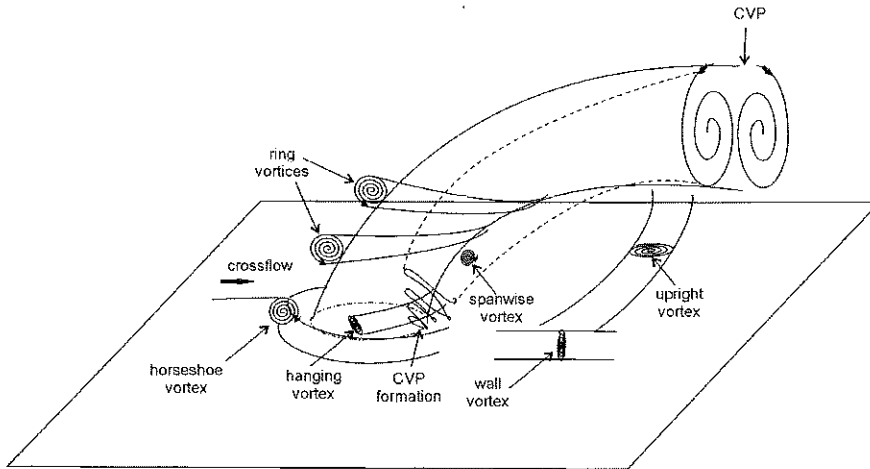


Fig 4. Schematic view of the main vortical structures originating from the interaction of a jet with a cross-flow.

The aim of the present work is to understand the phenomenology of a jet in cross-flow as well as to look for connections between the behaviour of the flow field close to the wall and the convective heat transfer. For this purpose, both the wall convective heat transfer and the velocity field for varying the injection ratio and at a relatively high Reynolds number, are experimentally measured.

3. Experimental set-up and techniques

In Fig. 5 the experimental set-up is sketched; it is composed of a aspirated subsonic open circuit wind tunnel, which has low turbulence intensity level (0.1%) and a rectangular test section of $300 \times 400 \text{ mm}^2$. The jet issues from a cylindrical pipe, having a diameter $D=24 \text{ mm}$, placed on the centreline of the 300 mm side and 240 mm downstream of the nozzle throat. The jet air stream, provided by a compressor, goes sequentially through a pressure-regulating valve, a heat exchanger, a flow-meter, a plenum chamber (where the temperature is measured) and then through the pipe into the wind tunnel section. The heat exchanger allows the jet air to reach the same temperature of free stream air so that equal density flows are achieved.

The experimental tests are carried out at $Re=8000$, therefore the free-stream velocity is set to about 5ms^{-1} and, in order to obtain velocity ratios ranging from 1 to 5, the initial jet velocity is varied from 5 to 25ms^{-1} . The jet flow rate is measured by means of a rotameter. The free-stream velocity is calculated from a differential pressure metered with a transducer. Convective heat transfer measurements are performed by infrared (IR) thermography applied to the steady state *heated-thin-foil* technique [10], while the flow field and turbulent statistics are measured with the Particle Image Velocimetry (PIV) technique.

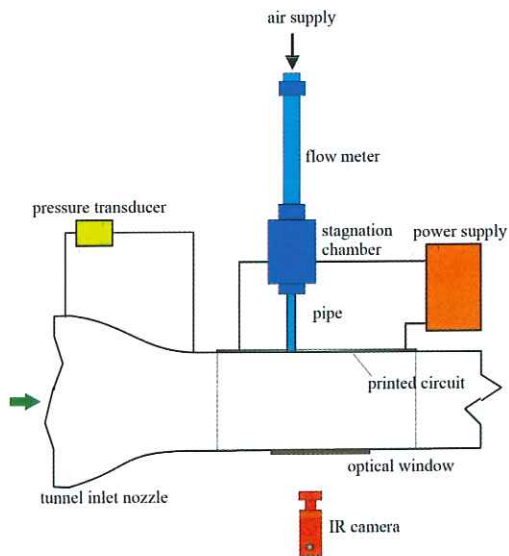


Fig 5. Sketch of the wind tunnel test section.

3.1 Flow field measurements

Fig. 6 shows the positions of the laser arm and of the recording camera as well as the chosen coordinate system. Seeding, injected into both the main and the jet flows, is used in the form of oil droplets, about $1\mu\text{m}$ in diameter [11]. The light sheet, which is generated by a double cavity Nd-YAG laser, has a thickness of about 1mm , pulse duration of 6ns , a wave length of 532nm and a maximum energy per pulse of about 200mJ . The delay time between the two laser pulses ranges from 25 to $200\mu\text{s}$; this variation depends on R and on the free stream velocity. PIV images are recorded with a CCD PCO-Sensicam camera, having a sensor of 1280×1042 pixels, and using an f-number of 2.8.

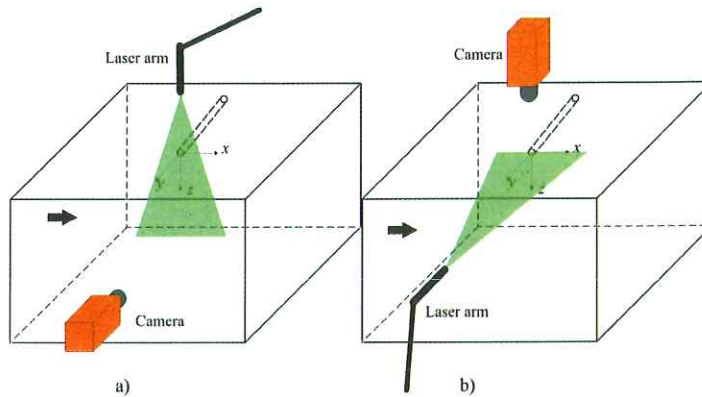


Fig 6. Schematic view of the PIV layout: a) measurements in the planes normal to the jet axis; b) measurements in the symmetry plane. The arrow on the left side of each figure indicates the cross-flow direction.

The acquired images are interrogated with a high accuracy PIV algorithm. This method first calculates the cross-correlation of two homologous windows with the classical FFT method. Once the cross-correlation map is obtained, a peak detection operation is performed over the map to precisely locate the peak through a sub-pixel interpolation. In this way, it is possible to compute a preliminary displacement field that is used to perform translation, rotation and deformation of each interrogation window. In turn, such a displacement is corrected by an iterative procedure. Besides, while iterating, the algorithm allows the reduction of the size of the interrogation areas; in these experiments, the initial linear dimension of the interrogation area is 64 pixels and the final one is 16 pixels. Furthermore, the quality of the measured vectors is controlled with a data validation criterion at each step of the iteration process. This criterion compares each vector with the adjacent ones by means of a statistical method: a vector is considered acceptable if it maintains a fixed degree of continuity with those nearby; otherwise, it has to be substituted by a replacement vector calculated by a bilinear interpolation. In the present tests, the percentage of substituted vectors ranges from 5 to 10 depending on the velocity ratio, out-of-plane velocity component, laser sheet position and thickness, etc. [12].

To obtain valid turbulence statistics, shear stresses and mean values, 500 images are taken at an acquisition rate of $2Hz$. Both instantaneous and mean velocity fields are measured in the symmetry plane, which is $z/D=0$ centre plane (see Fig. 6b), and in planes normal to the jet (Fig. 6a) at $y/D=0.25$, 0.5 , and 1.0 .

The number of vectors computed from a pair of images is 80×60 , while the distance between two adjacent vectors is in the range from 0.4 to 1.8mm (i.e. from 13 to 60 vectors per D), depending on the established spatial resolution. In fact, tests are performed with two different spatial resolutions, in order to clearly describe very small vortical structures.

The maximum error in the velocity evaluation is less than $\pm 4\%$ and is determined by an uncertainties analysis based on the method of Kline and McClintok [13].

3.2 Heat transfer measurements

Fig. 5 shows the position of the infrared camera in the experimental apparatus. Heat transfer measurements, over the wall the jet is issuing from, are carried out by infrared thermography applied to the steady state *heated-thin-foil* technique. The optical access window in the test section used for infrared measurements is made up of bioriented polyethylene, its presence being taken into account during the radiometer calibration. During the tests, particular care was taken to keep the plenum jet temperature equal to that of the free stream.

The investigated wall is composed of a printed circuit board ($300 \times 600\text{mm}^2$), designed in order to ensure a constant heat flux; the printed circuit board starts immediately downstream of the tunnel throat. The copper tracks of the circuit are $5\mu\text{m}$ thick, 1.8mm wide and located at 2mm pitch; the overall thickness of the board is $s=0.5\text{mm}$. A stabilized DC power supplier gives the electric current to the circuit and, by measuring voltage drop and current across the board, it is possible to compute the dissipated power. The surface seen by the IR camera is coated with a thin layer of opaque paint, which has a total emissivity coefficient $\varepsilon=0.95$ in the wavelength of interest.

The infrared thermographic system used is the Agema Thermovision 900LW. Images are scanned in the $8\text{--}12\mu\text{m}$ infrared band with a mercury-cadmium-tellurium (Hg-Cd-Te) detector which has a thermal sensitivity of 70mK at room temperature. Each image is recorded as a 136×272 pixels frame at 12 bits (4096 levels) and, to reduce noise, is time-averaged over 32 frames and is low-pass filtered.

The steady state *heated-thin-foil* technique is chosen to determine the convective heat transfer coefficient h out of wall temperature measurements. In particular, for each pixel of the digitized thermal image, the convective heat transfer coefficient h between the foil and the flow over it is calculated as:

$$h = \frac{\dot{q} - \dot{q}_l}{T_w - T_{aw}} \quad (2)$$

where: \dot{q} is the joule heating; \dot{q}_l are the heat losses; T_w and T_{aw} are the wall and the adiabatic wall temperatures respectively. For the present experimental conditions, T_{aw} practically coincides with the free stream temperature T_a ; \dot{q}_l includes radiative losses \dot{q}_r and tangential conduction losses \dot{q}_c ; losses due to natural convection are negligible. The thermal radiative losses \dot{q}_r are evaluated by:

$$\dot{q}_r = \varepsilon\sigma(T_w^4 - T_a^4) \quad (3)$$

where σ is the Stefan-Boltzmann constant and ε is the total emissivity coefficient. The tangential conduction within the board \dot{q}_c is evaluated by the relation:

$$\dot{q}_c = -\left(\lambda_p \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2}\right)_s \quad (4)$$

where λ_p and λ_n are the bulk thermal conductance coefficients along the tracks and along the direction normal to them, respectively [14].

Convective heat transfer coefficients are expressed in non-dimensional form by means of the local Nusselt number, defined as:

$$Nu = \frac{hD}{k} \quad (5)$$

where, k is the air thermal conductivity evaluated at film temperature and D is the pipe diameter. Actually, heat transfer results are presented in terms of a normalized Nusselt number Nu/Nu_0 where Nu_0 is the Nusselt number measured with the pipe closed, i.e. without jet injection. Owing to its definition, Nu/Nu_0 represents the ratio between the two convective heat transfer coefficients: one with the jet and the other one without it.

The maximum error in the Nu evaluation, determined by an uncertainties analysis based on the method of Kline and McClintok [13] is found to be less than $\pm 5\%$.

4. Flow field results

In this section, PIV measurements are presented and compared with results available in the literature; the following quantities are defined:

$$\begin{aligned}
 u' &= u - \bar{u}, \quad v' = v - \bar{v}, \quad w' = w - \bar{w}; \\
 V &= \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}; \\
 \sigma_z &= \frac{\overline{u'^2 + v'^2}}{u_\infty^2}, \quad \sigma_y = \frac{\overline{u'^2 + w'^2}}{u_\infty^2};
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

where u, v and w are the instantaneous velocity vector components, u_∞ is the cross-stream velocity and the symbol $\bar{}$ denotes a time average; the spatial coordinates are non-dimensionalised by the pipe exit diameter D ; the quantities σ_y and σ_z represent the in-plane non-dimensional turbulent kinetic energy in the planes $y/D=const$ and $z/D=0$ respectively; the quantity V represents the mean total velocity in the plane $z/D=0$; the mean velocity components, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ are non-dimensionalized by the cross-flow velocity u_∞ .

The mechanisms for the formation of the counter rotating vortex pair (CVP) has always been the object of analysis. For this purpose, PIV measurements are performed in planes normal to the jet axis in the vicinity of the wall as well as at higher y/D distances.

The jet trajectory, which is the mean streamline originating from the centre of the nozzle exit section, has a linear dependence on the velocity ratio; for this reason, a comparison between streamline patterns measured at planes located at a distance which is linearly proportional to R is performed.

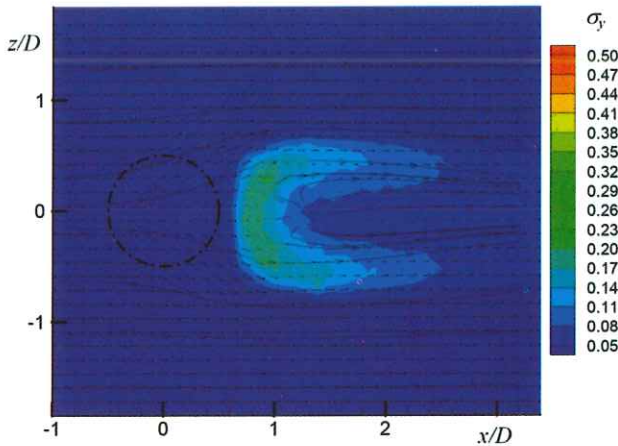


Fig 7. Mean in-plane streamlines pattern, velocity vectors and turbulent kinetic energy maps for $R=1$ and $y/D=0.25$. The dashed and dotted circle indicates the pipe exit section position.

In Figs. 7 to 9, three maps for $y/RD=0.25$ are compared. These maps show both the local mean in-plane velocity vectors and the streamline pattern; the

coloured background gives the in-plane turbulent kinetic energy level σ_y . In this case, it is evident that colours add a third dimension to the images. As shown in figure, the streamline patterns in the downstream side of the jet are quite different: for $R=1$, the jet starts to bend inside the pipe, then there is no evidence of the CVP formation; for $R=2$, a region of reverse motion is more evident, but the bound vortices cannot be detected; for $R=4$, the velocity field exhibits almost a complete formation of CVP.

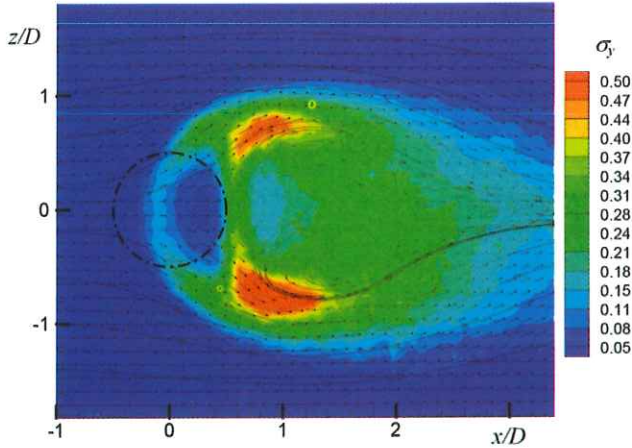


Fig 8. Mean in-plane streamlines pattern, velocity vectors and turbulent kinetic energy maps for $R=2$ and $y/D=0.5$.

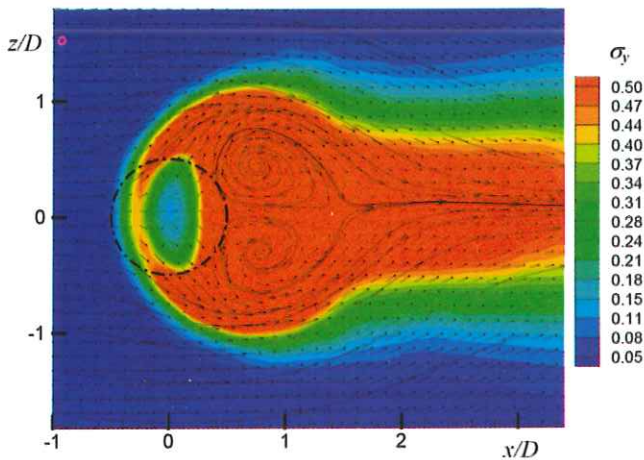


Fig 9. Mean in-plane streamlines pattern, velocity vectors and turbulent kinetic energy maps for $R=4$ and $y/D=1$.

Fig. 10 shows the plane $y/D=0.5$ for $R=5$ where, besides the CVP, there is another vortex on the right side of the jet. This structure is similar to the critical

points shown by Kelso et al. [7] in the composite streamline pattern over the wall and it has been also described by Lim et al. [15]. Since the model of Lim et al. is based on instantaneous flow field measurements, these vortices could disappear in time-averaged images, as in measurements of the present works. This asymmetry of flow field is most probably due to the length scale and to the spatial resolution of the PIV measurements. As one of the vortices on the jet right side is small, on the jet left side the two vortices appear to merge into only one because of relatively limited spatial resolution.

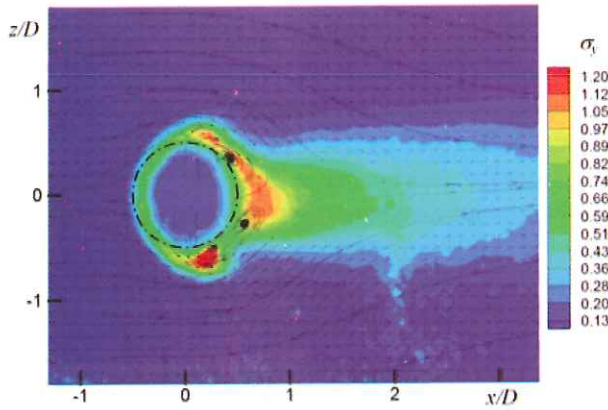


Fig 10. Mean in-plane streamlines patterns, and velocity vectors and turbulent kinetic energy map at $y/D=0.5$ and $R=5$. The dashed and dotted circle represents the pipe exit section position.

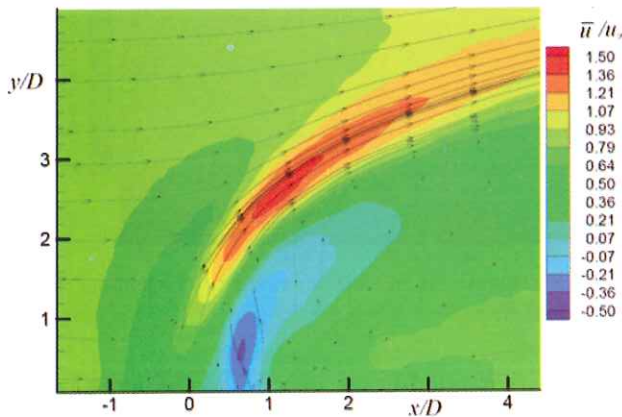


Fig 11. Mean in-plane streamlines of stream wise velocity component \bar{u} map at the centre plane $z/D=0$ and $R=3$.

Since the behaviours of different velocity ratios are very similar, only the case $R=3$ is presented in the following. Fig. 11 shows the streamlines and the

mean stream wise (horizontal) velocity component \bar{u} map in the jet symmetry plane. The map is in good agreement with the results obtained by Yuan *et al.* [16] and by Andreopoulos and Rodi [5]. Near the wall, the cross-flow stagnates at the upstream side of the jet. Following the jet, as the cross-flow deflects over the jet, the flow accelerates. When the jet becomes strongly curved, the \bar{u} velocity component assumes its maximum value in the jet trajectory at $x/D \cong 1$. The blue region indicates negative values of the \bar{u} velocity component; this is justified by the reverse motion, which is created by the entrance of the cross-flow in the jet.

Fig. 12 shows the mean vertical velocity component \bar{v} map on the symmetry plane of the jet. There are two regions, which exhibit high \bar{v} values: the first one begins over the pipe exit and is due to the high vertical momentum which accompanies the jet; the second one is located in the wake region where there is a strong upward motion caused by the breakdown of the hanging vortices generated at the jet exit, according to Yuan *et al.* [16].

Fig. 13 shows the in-plane ($z/D=0$) mean total velocity V map. The velocity components reach the maximum values above the jet trajectory because of the acceleration of the free stream, downstream of the region of curvature.

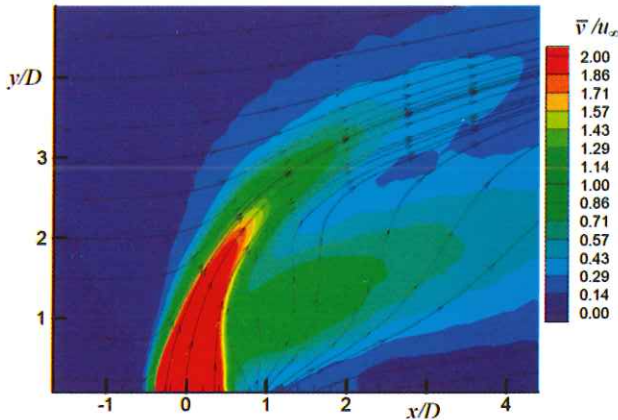


Fig 12. Mean in-plane streamlines of vertical velocity component \bar{v} map at the centre plane $z/D=0$ and $R=3$.

Since the vortices generated in the near wall region are unsteady and move downstream of the jet exit, the time averaged measurements performed in the symmetry plane for $Re=8000$ do not show steady vortical structures. However, the present results are in agreement with those of Kelso *et al.* [7] for the presence of a steady horseshoe vortex upstream of the jet since they indicate a transitional value of $Re=1600$ above which the horseshoe vortex disappears.

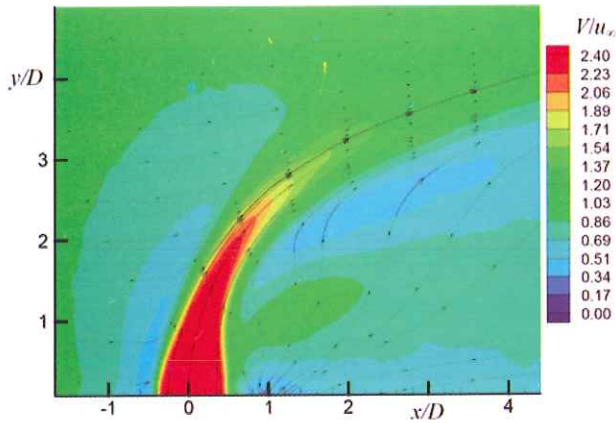


Fig 13. Mean in-plane streamlines of total velocity V map at the centre plane $z/D=0$ and $R=3$.

Fig. 14 shows that maximum value of the turbulent kinetic energy σ_z maps in the centre plane is found nearby the region where the \bar{u} velocity component reaches the highest values. These high values are due to the high turbulence produced by the vortices and by the shear between the jet and the cross-flow. Since the additional contribution to turbulence of the counter rotating vortex pair and the wake vortices, a highly energetic region is located below the mean trajectory, downstream of the jet exit,. The in-plane turbulent kinetic energy maps are in agreement with the contours reported by Yuan et al. [16].

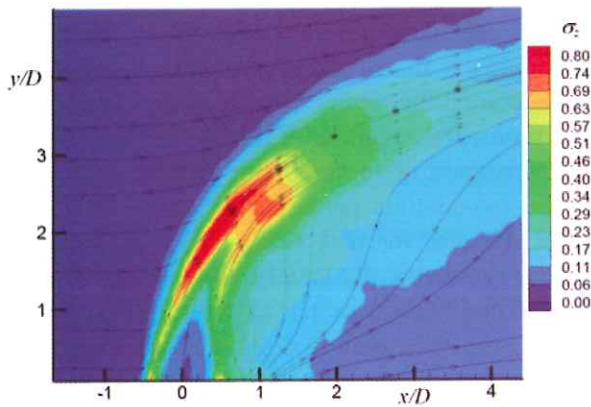


Fig 14. In-plane turbulent kinetic energy map and mean in-plane streamlines at the centre plane $z/D=0$ and $R=3$.

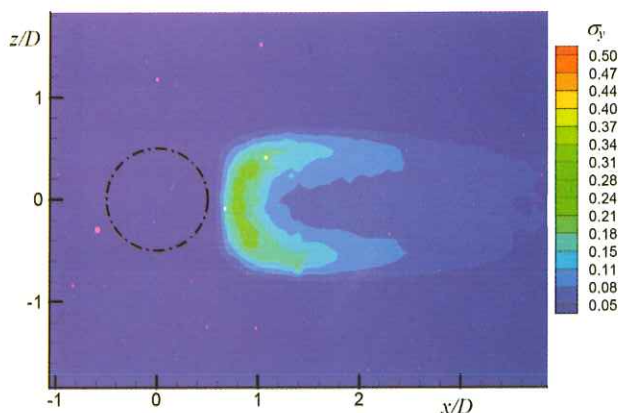


Fig 15. In-plane turbulent kinetic energy σ_y maps at the plane $y/D=0.25$ and $R=1$. The dashed and dotted circle indicates the pipe exit section position.

Figs. 15 to 17 shows the in-plane turbulent kinetic energy σ_y map on the plane $y/D=0.25$, by varying R from 1 to 5. Since at shorter distances, light reflections produce a relatively high noise, $y/D=0.25$ is the closest distance to the nozzle exit plane where measurements were performed. It is calculated that these measurements are carried out just within the free stream wall boundary layer. The white regions close to the nozzle exit section in Figs. 16 and 17 indicate a high out of plane velocity component v which does not allow for reliable data collection. Therefore, the shape of these regions resembles the deformation of the jet section. No white region is present in Fig. 15 because the jet bends over at a short distance from the wall: then, the out of plane velocity component is quite small. In Fig. 16, the jet cross section assumes a shape which is consistent with the simulations reported by Coelho & Hunt [17] while, in Fig. 17, the white region is almost circular and the cross flow does not appear to have a strong influence on the jet deformation at this distance from the wall. By varying velocity ratios, the region with the highest turbulent kinetic energy is always located downstream of the pipe exit section at the beginning of the wake region, but the iso-contour patterns are quite different for the three velocity ratios tested. Indeed, for $R=1$ (Fig. 15), two regions with a higher turbulence level appear symmetrically located downstream of the pipe exit at its lateral edges, their maxima being reached at about 0.9 diameters downstream the pipe axis. For $R=5$ (Fig. 17), only one region with a high turbulent kinetic energy is present, the maximum value being located at $x/D \cong 0.7$, on the centreline of the lee side of the jet. For $R=3$ (Fig. 16), the turbulence pattern shows a configuration intermediate between those of the previous two R values.

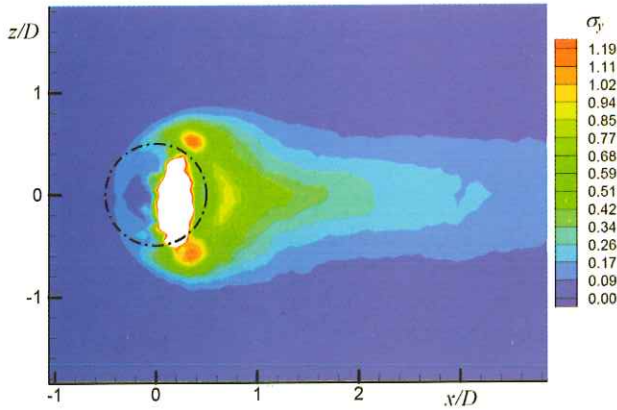


Fig 16. In-plane turbulent kinetic energy σ_y maps at the plane $y/D=0.25$ and $R=3$.

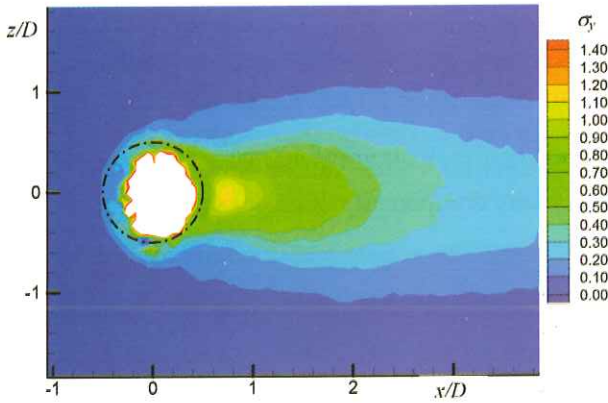


Fig 17. In-plane turbulent kinetic energy σ_y maps at the plane $y/D=0.25$ and $R=5$.

Some typical instantaneous in-plane streamline patterns for some of the velocity ratios tested and Reynolds number equal to 8000 are shown in Figs. 18 to 20; it is verified that results for lower Re are qualitatively similar. In the background of all the reported flow fields, contours of the vorticity component normal to the measurement plane are shown. In particular, for measurements in the symmetry plane and for measurements in planes normal to the jet axis, the vorticity z component Ω_z and the vorticity y component Ω_y are reported, respectively. In both cases, the vorticity components are non-dimensionalized by the free stream velocity u_∞ divided by the jet exit diameter D .

The two vorticity components are defined as:

$$\begin{aligned}\Omega_y &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \Omega_z &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{7}$$

In order to visualise more clearly the vortical structures, measurements are performed with a field of view smaller than that adopted to compute turbulence statistics. Note that it is not possible to see all the structures described by Kelso et al. [7] and found numerically by Yuan et al. [16]. This is because of the higher Reynolds number considered here and since some structures are too small to be detected with the PIV resolution of the present tests.

Fig. 18 shows an instantaneous streamline pattern for $R=1$ in the symmetry plane; regions with a red background denote a positive vorticity component, i.e. counter-clockwise rotation of the vortices, while regions with a blue background indicate clockwise rotation of the fluid. As can be seen from the instantaneous streamlines and from the vorticity contours, only some vortices on the downstream sides of the jet are found. These vortices are referred to as ring-like vortices, or more simply ring vortices, in the literature. On the upstream side of the jet no vortex can be seen probably due to the relatively high horizontal velocity component which does not allow their detection.

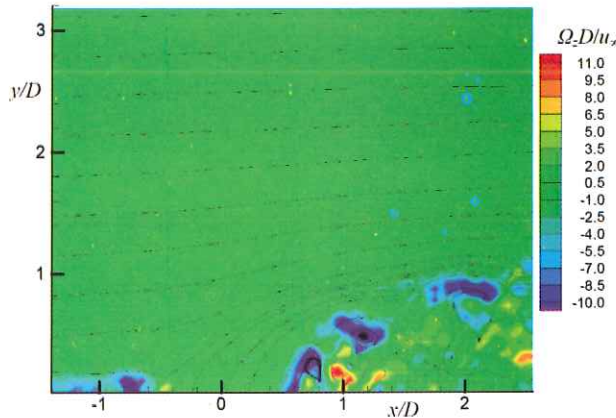


Fig 18. Instantaneous in-plane streamlines pattern at the centreplane for $R=1$ and map of the non-dimensional vorticity $\Omega_z D/u_\infty$.

A plot similar to Fig. 18, but for $R=3$, is depicted in Fig. 19; in this case, the vortex rings can be observed both upstream and downstream of the jet. The vortical structures behave in a different way depending on their position and on the R value. More specifically, for $R=1$ (see Fig. 18), vortices are more evident

in the downstream shear layer, while for $R=3$ (Fig. 19) they are larger at the windward side and appear to form earlier and more regularly. The vortices rotate clockwise upstream and counter-clockwise downstream of the shear layer; in both cases, the rings enlarge along the jet flow. On the upstream edge, the lower stream wise velocities near the wall produce an adverse vertical pressure gradient [16] which causes the shear layer to become unstable soon after issuing from the pipe into the cross-stream. At high R , the velocity gradients are strong and the vortex formation is more evident. At low R , the velocity gradients are low and no vortex rings are distinguishable on the upstream edge while, downstream, the low pressure region is fairly small and vortex rings can form earlier. Furthermore, just above the jet exit, the vorticity contours indicate the shear layer roll-up which, according to many authors, gives rise to the vortex rings.

From the origin of the instantaneous streamline and velocity patterns in planes normal to that of Figs. 18 and 19, it is possible to visualize the unsteady wake vortices observed by other authors. Two main vortical structures are observed in the jet wake; these are wall vortices, which are stream wise oriented and lie close to the wall, and upright vortices, which are vertically oriented and extend down from the jet body to the wall. Only the upright vortices are observed in the present work because of the impossibility of performing tests in the y - z plane.

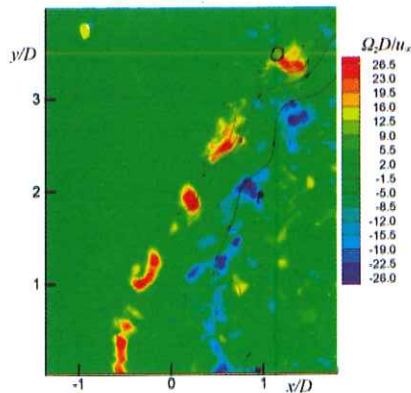


Fig 19. Instantaneous in-plane streamlines pattern at the centreplane for $R=3$ and map of the non-dimensional vorticity $\Omega_z D / u_\infty$.

Fig. 20 shows the vorticity maps and the instantaneous streamline pattern for $R=4$ and $y/D = 0.5$; the vorticity component Ω_y is shown at the background. The flow pattern resembles the Karman vortex street behind a solid cylinder and the wake vortex formation starts just behind the CVP, close to the jet exit. In

Fig. 20, the red zones indicate counter-clockwise (positive) eddy circulation, while the blue zones indicate negative eddy circulation. In agreement with Kelso et al. [7], the upright vortices become more regular, more periodic and larger in scale when the velocity ratio exceeds 3. At low R , upright vortices cannot be observed because the jet bends over too rapidly.

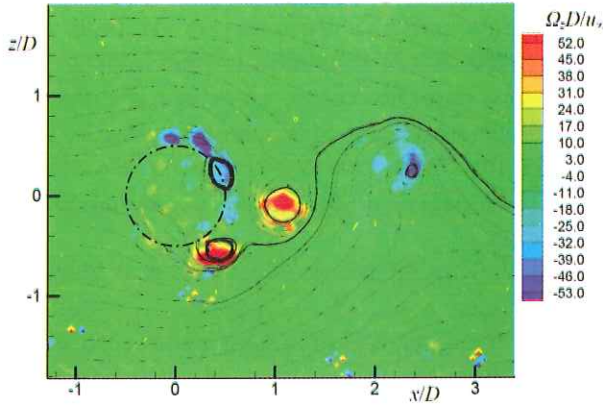


Fig 20. Instantaneous in-plane streamlines patterns for $R=4$ at $y/D=0.5$ and map of the non-dimensional vorticity $\bar{\omega}_y D/u_\infty$.

5. Heat transfer results

The maps reported in Fig. 21 show the normalized Nusselt number Nu/Nu_0 for injection ratios R ranging from 1 to 5 and Reynolds number equal to 8000. Also in this case, the dashed and dotted circles indicate the pipe exit section. Experimental data are reduced by means of eqns. (2) to (5).

In each map, white areas indicate regions where no results are reported because there is either no heating (at the pipe exit), or the results in these zones are affected by edge effects (due to the strong tangential conduction).

For all the R values, there is a high Nusselt number region ahead of the jet. This is most probably due to the strong curvature of the streamlines and to the entrainment of wall boundary layer by the jet. As mentioned above, for the Reynolds number reported, no horseshoe vortex is present around the jet.

For increasing injection ratio, the high convective heat transfer region tends to wrap around the pipe exit section on the upstream side of the jet. This happens because the obstruction of the jet at high velocity ratios rises and then reduces the cross flow velocity more significantly there. However, the entrainment on the wall boundary layer still increases the heat transfer just ahead of the pipe [16].

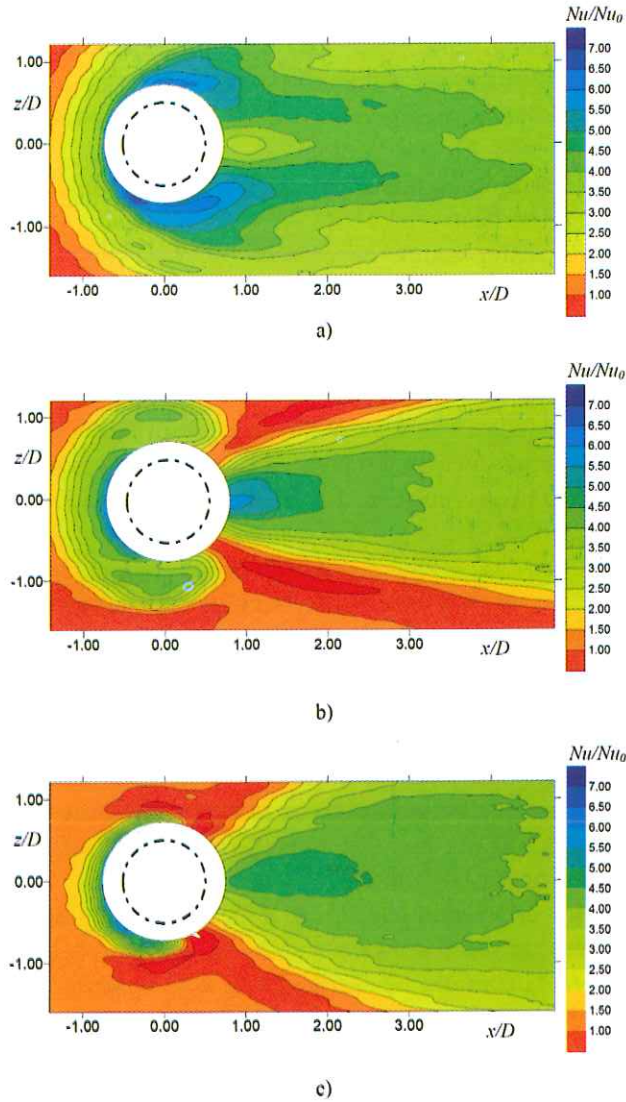


Fig 21. Normalised Nusselt number Nu/Nu_0 maps over the heated plate: (a) $R=1$; (b) $R=3$; (c) $R=5$. The dashed and dotted circle indicates the pipe exit section position. White regions indicate cut-off of data.

Downstream of the pipe, on the centreline at about $x/D=1$, a minimum value of Nu/Nu_0 is evident for $R=1$, and, for increasing injection ratio, it becomes a maximum that weakens and moves slightly downstream for increasing R . This behaviour is accompanied by another change in the wake; in fact, the overall

heat transfer at the wall appears to reduce going from $R=1$ to 3 and then to increase again, for R going from 3 to 5. This latter increase is most probably due to the upward motion in the jet wake which becomes stronger for increasing injection ratio, as the back pressure zone becomes more significant. Present results are in agreement with the findings of Astarita et al. [9] who perform similar heat transfer measurements at a lower Reynolds number value ($Re=5000$) and of Carlomagno et al. [18].

Two high heat transfer zones are present for $R=1$: they extend from the lateral edges of the pipe and elongate downstream and tend to disappear for increasing the injection ratio. These phenomena can be explained through the turbulent kinetic energy map of Fig. 15 which shows two side maxima. Even if these maxima appear to be shifted downstream, it is noted that, for $R=1$, the σ_y measurement plane is located at $0.25 D$ far away from the tunnel wall. Again, for $R=3$ and 5, the region downstream on the centreline, where maximum values of Nu/Nu_0 occur, practically corresponds to the high turbulent kinetic energy regions of Figs. 16 and 17.

The turbulent kinetic energy level maps do not explain the high heat transfer region upstream of the jet exit; this discrepancy may be attributed to two main factors. One is that the out-of-plane velocity component fluctuation was not measured and thus the turbulent kinetic energy does not include the $\overline{v'^2}$ contribution. The other factor is due to the belief that the measurement plane is not fully immersed in the boundary layer, but lies close to its edge. This discrepancy has a particularly strong influence in the upstream region because the jet injection causes the boundary layer to break down at the downstream side. Unfortunately, it was not possible to perform PIV measurements closer to the wall because of problems of access.

At the highest injection ratio tested, i.e. $R=5$, and at the sides of the pipe at about $z/D=\pm 1$, the heat transfer weakens and the values approach those observed without jet injection. This might be ascribed to a kind of free stream separation that is induced by the high momentum of the issuing jet. A similar behaviour is found also for $R=4$ while, this kind of separation is delayed downstream for $R=3$.

6. Conclusions

The results obtained with PIV and heat transfer measurements in the near field of a jet in cross-flow were presented and compared with data present in literature. The PIV measurements were carried out, in the jet symmetry plane and in planes normal to the jet axis, for $Re=8000$ and for velocity ratios ranging from 1 up to 5. Convective heat transfer measurements were performed on the

wall from which the jet issued and at the same testing conditions of PIV measurements.

The instantaneous measurements allowed the visualisation of the vortical structures close to the nozzle exit. As main findings: the vortex position is periodic and, for increasing the velocity ratio, the vorticity increases much more in the upstream side than in the wake region. The upright vortices, detected in the wake region, appear to be similar to the Karman vortex street behind a solid cylinder. Such vortices become more regular, more periodic and larger in scale when the velocity ratio exceeds 3. They disappear at lower R because the jet bends over too rapidly for the wall vortices to be stretched by the vertical jet.

In the measurement planes normal to the jet axis, the steady counter rotating bound vortex pair behind the jet can be clearly seen but only for relatively high velocity ratios. A node with a reversed flow region is present on the centre-line at about one diameter downstream of the jet core for all the tested R values. At high R , the reversed flow zone enlarges and the low pressure region generates a strong upward motion to compensate the velocity deficit in the wake. In the symmetry plane, all the visualized vortices are unsteady and do not appear in the mean flow pattern.

The heat transfer measurements show two different behaviours for $R=1$ and $R>1$. For $R=1$, two high heat transfer zones are present which start from the lateral nozzle edges and elongate downstream. Such zones tend to disappear for increasing injection ratio. A minimum value of Nu/Nu_0 is found for $R=1$ at about $x/D=1$; such minimum becomes a maximum for $R>1$ and it weakens and moves slightly downstream for increasing R . The overall heat transfer at the wall reduces as R changes from $R=1$ to 3 and then increases as R changes from 3 to 5; this increase is most probably due to the upward motion in the jet wake that becomes stronger for increasing injection ratio.

A comparison between heat transfer measurements, expressed in terms of Nu/Nu_0 maps, and the in-plane turbulent kinetic energy maps, computed with PIV close to the wall, shows that the maps are qualitatively similar except than in the region upstream the nozzle exit. This discrepancy may be due to the position of the measurement plane, which is not fully immersed in the wall boundary layer, and to the fact that the out-of-plane velocity component could not be measured.

The obtained results are in good agreement with the data presented by Andreopoulos and Rodi [5], Kelso et al. [7], Astarita et al. [9] and Yuan et al. [16].

References

- [1] Merzkirch, W. 1974. *Flow Visualization*. New York: Academic.
- [2] Carlomagno G.M. 1985. The initial region in a plane two-dimensional jet, *Heat Techn*, **3**: 123-131.
- [3] Gharib M., Beizaie M. 1995. Flow studies of a two-dimensional liquid film jet, *Album Visualization*, **12**: 2.
- [4] Goldstein R.J., Taylor J.R. 1982. Mass transfer in the neighbourhood of jets in cross-flow, *J Heat Transfer*, **104**: 715-721.
- [5] Astarita T., Cardone G., Carlomagno G.M. 2001. On the cooling of gas turbine, *J Flow Visualiz Image Proc*, **8**: 287-302.
- [6] Fric T.F., Roshko A. 1994. Vortical structures in the wake of a transverse jet, *J Fluid Mech*, **279**: 1-47.
- [7] Kelso R.M., Lim T.T., Perry A.E. 1996. An experimental study of round jets in cross-flow, *J Fluid Mech*, **306**: 111-144.
- [8] Foss J. 1980. *Interaction region phenomena for the jet in a cross-flow problem*. Univ. Karlsruhe: SFB 80/E7161.
- [9] Andreopoulos J., Rodi W. 1984. Experimental investigation of jets in a cross flow, *J Fluid Mech*, **138**: 93-127.
- [10] Carlomagno G.M., De Luca L. 2001. Infrared thermography in heat transfer. In *Handbook of Flow Visualization*, W.J. Yang Ed.. New York: Taylor & Francis.
- [11] Somerscales E.F.C. 1980. Fluid velocity measurement by particle tracking, *Flow Meas Control Sci Ind*, **I**: 795-808.
- [12] Raffel M., Willert C., Kompenhans J. 1998. *Particle Image Velocimetry*. Berlin: Springer.
- [13] Kline S.J., McClintok F.A. 1953. Describing uncertainties in single sample experiment, *Mech Engrg*, **75**: 3-8.
- [14] Astarita T., Cardone G. 2000. Thermofluiddynamic Analysis of the Flow in a Sharp 180° Turn Channel, *Exp Thermal Fluid Sci*, **20**: 188-200.
- [15] Lim T.T., New T.H., Luo S.C. 2001. On the development of large-scale structures of a jet normal to a cross flow, *Physics Fluids*, **13**: 770-775.
- [16] Yuan L.L., Street R.L., Ferziger J.H. 1999. Large-eddy simulations of a round jet in cross flow, *J Fluid Mech*, **379**: 71-104.
- [17] Coelho R.M., Hunt J.C.R. 1989. The dynamics of the near field of strong jets in cross flow, *J. Fluid Mech*, **200**: 95-120.
- [18] Carlomagno G.M., Nese F.G., Cardone G., Astarita T. 2004. Thermo-fluid-dynamics of a complex fluid flow, *Infr. Physics Techn*, **46**: 31-39.

Spatial behaviour of solutions for constrained cylinder in linear elasticity

Stan Chiriță¹ and Michele Ciarletta²

¹Faculty of Mathematics, Al. I. Cuza University of Iași,
Blvd. Carol I, no. 11, 700506 – Iași, Romania;
e-mail address: schirita@uaic.ro

²Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata
(DIIMA), Università di Salerno, 84084 Fisciano (SA), Italy;
e-mail address: ciarlett@diima.unisa.it

Abstract

The present paper studies the spatial behaviour of the equilibrium solutions in a constrained cylinder made of a strongly elliptic elastic material. For the case of an isotropic cylinder, we consider two appropriate cross-sectional measures which can furnish information about the spatial behaviour for the whole class of strongly elliptic elastic materials, while for the transversely isotropic cylinder the information upon the spatial behaviour is obtained by means of a family of measures associated with the equilibrium solution.

1 Introduction

For a linearly elastic solid the components C_{ijkl} of the tensor of elastic moduli satisfy the symmetries

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk}, \quad (1.1)$$

while the indices i, j, k, l take values 1, 2, 3.

The strong ellipticity condition states that (see, for example, Gurtin [1])

$$C_{ijkl}n_i n_k m_j m_l > 0 \quad (1.2)$$

for all non-zero vectors $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ and $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, where summation is implied by index repetition. For an isotropic elastic material such condition is equivalent with the fact that the Lamé moduli obey the inequalities

$$\mu > 0, \quad \lambda + 2\mu > 0, \quad (1.3)$$

while for the transversely isotropic material the elastic constants c_{11} , c_{33} , c_{55} , c_{12} and c_{13} satisfy the inequalities

$$c_{11} > 0, \quad c_{33} > 0, \quad c_{55} > 0, \quad c_{11} > c_{12}, \quad |c_{13} + c_{55}| < c_{55} + \sqrt{c_{11}c_{33}}. \quad (1.4)$$

Assuming that the body forces are absent, the equilibrium equations become

$$(C_{jikl}u_{k,l})_{,j} = 0. \quad (1.5)$$

The present paper studies the spatial behaviour of the equilibrium solutions with respect to the axial variable in a constrained elastic cylinder. When the cylinder is isotropic the spatial behaviour of equilibrium solutions is established for the whole class of strongly elliptic materials by means of two appropriate cross-sectional measures, while for the class of transversely isotropic elastic solids the spatial behaviour is obtained by means of a family of measures depending on a specific parameter each one consisting of an appropriate combination of a cross-sectional integral and a volume integral.

We have to outline that the class of strongly elliptic elastic materials includes the special classes of elastic materials characterized by negative Poisson ratio and the auxetic or antirubber materials.

2 Isotropic elastic cylinder

Let Ω denote a prismatic cylinder whose base, supposedly planar, is selected to lie in the x_1Ox_2 coordinate plane of a three-dimensional Cartesian coordinate frame. We suppose that the length of the cylinder is L and that $D_{x_3} \subset \mathbb{R}^2$ represents the uniform bounded cross-section at distance x_3 from the origin.

The boundary ∂D of each cross-section is assumed sufficiently smooth to admit application of the divergence theorem in the plane of the cross-section. The cylinder is occupied by an isotropic and homogeneous linear elastic material maintained in equilibrium under zero body-force. Therefore, the equilibrium equations yield

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

where λ and μ are the constant Lamé moduli. Throughout this section we will consider that the cylinder is maintained in equilibrium by specified displacements over the near plane end with the far end and the lateral sides

of the cylinder held fixed at zero displacement. Further, we assume the existence of a sufficiently smooth displacement vector $u_i(x)$ satisfying the equilibrium equations (2.1) and the following boundary conditions of our problem

$$u_i(x) = 0 \quad \text{for } x \in \partial D_{x_3}, \quad x_3 \in [0, L], \tag{2.2}$$

$$u_i(x) = g_i(x), \quad x \in D_0, \tag{2.3}$$

$$u_i(x) = 0, \quad x \in D_L, \tag{2.4}$$

where $g_i(x_1, x_2)$ are prescribed continuous functions.

The main purpose of this section is to define certain cross-sectional integral measures of solution and then to examine how they evolve with respect to the axial variable in order to describe the spatial behaviour in the whole class of strongly elliptic materials.

2.1 First measure

Throughout this subsection we will assume that

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 4\mu > 0 \tag{2.5}$$

and then a first measure of the solution can be introduced by using the result described by Flavin, Knops and Payne [2]. Thus, we define

$$I_1(x_3) = \int_{D_{x_3}} [\mu u_i u_{i,3} + (\lambda + \mu) u_{j,j} u_3] da, \tag{2.6}$$

so that, by direct differentiation we obtain

$$I'_1(x_3) = \int_{D_{x_3}} [\mu u_{i,3} u_{i,3} + (\lambda + \mu) u_{j,j} u_{3,3} + \mu u_i u_{i,33} + (\lambda + \mu) u_{j,j3} u_3] da. \tag{2.7}$$

It is possible to rewrite previous relation in the following form, by using the equilibrium equations (2.1), the divergence theorem and the boundary conditions (2.2)

$$I'_1(x_3) = \int_{D_{x_3}} [\mu u_{i,j} u_{i,j} + (\lambda + \mu) u_{j,j} u_{i,i}] da. \tag{2.8}$$

Therefore, the relations (2.5) and (2.8) furnish

$$\begin{aligned} I'_1(x_3) = & \int_{D_{x_3}} [(\lambda + 2\mu) (u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,3}^2) + \\ & + 2(\lambda + \mu) (u_{1,1} u_{2,2} + u_{2,2} u_{3,3} + u_{3,3} u_{1,1}) + \\ & + \mu (u_{1,2}^2 + u_{2,1}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,2}^2 + u_{3,1}^2 + u_{1,3}^2)] da \geq \end{aligned}$$

$$\geq m_1 \int_{D_{x_3}} u_{i,j} u_{i,j} da, \quad (2.9)$$

where

$$m_1 = \min(\mu, 3\lambda + 4\mu) > 0. \quad (2.10)$$

We observe that μ and $3\lambda + 4\mu$ are the eigenvalues of the quadratic form

$$(\lambda + 2\mu)(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,3}^2) + 2(\lambda + \mu)(u_{1,1}u_{2,2} + u_{2,2}u_{3,3} + u_{3,3}u_{1,1}). \quad (2.11)$$

A direct consequence of the relation (2.9) is that $I_1(x_3)$ is a non-decreasing function with respect to x_3 on the interval $[0, L]$. Moreover, in view of the boundary condition (2.4), from (2.6) we deduce that $I(L) = 0$ and hence we have

$$I_1(x_3) \leq 0 \quad \text{for all } x_3 \in [0, L], \quad (2.12)$$

that is $-I_1(x_3)$ can be considered as a measure associated with u_i .

We now wish to compute a bound for $I_1(x_3)$ in terms of $I_1'(x_3)$. To this end we require the variational characterization of the first eigenvalue λ_0 in the two-dimensional clamped membrane problem for the cross-section D_{x_3} contained in the well-known inequality

$$\lambda_0 \int_{D_{x_3}} \varphi^2 da \leq \int_{D_{x_3}} \varphi_{,\rho} \varphi_{,\rho} da \quad (\rho = 1, 2), \quad (2.13)$$

where $\varphi(x_1, x_2)$ is an arbitrary Dirichlet integrable function vanishing on ∂D . Furthermore, taking into account (2.6) and by means of the Schwarz and arithmetic-geometric mean inequalities combined with inequality (2.13), we obtain

$$0 \leq -I_1(x_3) \leq M_1 \int_{D_{x_3}} u_{i,j} u_{i,j} da, \quad (2.14)$$

where

$$M_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \max(\lambda + 2\mu + |\lambda + \mu|, \mu + |\lambda + \mu|). \quad (2.15)$$

Consequently, from the relations (2.9) and (2.14) we get the following first-order differential inequality

$$-I_1(x_3) \leq \frac{1}{\nu_1^2} I_1'(x_3) \quad \text{for all } x_3 \in [0, L], \quad (2.16)$$

where

$$\nu_1^2 = \frac{m_1}{M_1}. \quad (2.17)$$

Thus, by an integration we get the following spatial estimate

$$0 \leq -I_1(x_3) \leq -I_1(0) e^{-\nu_1^2 x_3} \quad \text{for all } x_3 \in [0, L]. \quad (2.18)$$

2.2 Second measure

In this subsection we assume that

$$\mu > 0, \quad -2\mu < \lambda < 0 \tag{2.19}$$

and define the following cross-sectional function

$$I_2(x_3) = \int_{D_{x_3}} [\mu u_i u_{i,3} + (\lambda + \mu) u_i u_{3,i}] da. \tag{2.20}$$

By direct differentiation we obtain

$$I_2'(x_3) = \int_{D_{x_3}} [\mu u_{i,3} u_{i,3} + (\lambda + \mu) u_{i,3} u_{3,i} + \mu u_i u_{i,33} + (\lambda + \mu) u_i u_{3,3i}] da. \tag{2.21}$$

Through a technique similar to the one previously used, by means of the equilibrium equations (2.1) and by using the boundary conditions (2.2), we get

$$I_2'(x_3) = \int_{D_{x_3}} [(\lambda + 2\mu) (u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,3}^2) + \mu (u_{1,2}^2 + u_{2,1}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,2}^2 + u_{3,1}^2 + u_{1,3}^2) + 2(\lambda + \mu) (u_{1,2} u_{2,1} + u_{2,3} u_{3,2} + u_{3,1} u_{1,3})] da. \tag{2.22}$$

In view of the hypotheses (2.19), we can conclude that

$$I_2'(x_3) \geq m_2 \int_{D_{x_3}} u_{i,j} u_{i,j} da, \tag{2.23}$$

where

$$m_2 = \min(-\lambda, \lambda + 2\mu). \tag{2.24}$$

Taking into account relation (2.20) and by means of the Schwarz inequality combined with (2.13) we obtain

$$0 \leq -I_2(x_3) \leq M_2 \int_{D_{x_3}} u_{i,j} u_{i,j} da, \tag{2.25}$$

where

$$M_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \max(\lambda + 2\mu + |\lambda + \mu|, \mu + |\lambda + \mu|). \tag{2.26}$$

Concluding, the function $I_2(x_3)$ satisfies the following first-order differential inequality

$$0 \leq -I_2(x_3) \leq \frac{1}{\nu_2^2} I_2'(x_3) \quad \text{for all } x_3 \in [0, L], \tag{2.27}$$

with

$$\nu_2^2 = \frac{m_2}{M_2} \quad (2.28)$$

and hence we have the following spatial decay estimate

$$0 \leq -I_2(x_3) \leq -I_2(0) e^{-\nu_2^2 x_3} \quad \text{for all } x_3 \in [0, L]. \quad (2.29)$$

Remark 1 *The estimates (2.18) and (2.29) can be made fully explicit by obtaining an upper bound for $I_1(0)$ and $I_2(0)$ in terms of the given data. This problem can be handled in a number of ways (see, for example, Flavin [3]).*

Remark 2 *Finally, we have to outline that the above two measures allow us to get information about the spatial behaviour of solutions for the whole class of strong elliptic isotropic elastic materials.*

3 Transversely isotropic materials

Many natural and man-made materials are classified as *transversely isotropic* (or *hexagonal*). Such materials are characterized by the fact that one can find a line that allows a rotation of the material about it without changing its properties. The plane, which is perpendicular to this line (the axis of rotational symmetry) is called a *plane of elastic symmetry* or *plane of isotropy*. A modern example for such a material are laminates made of randomly oriented chopped fibers that are in general placed in a certain plane. The effective material properties for a bundled structure have no profound direction in that plane, which then becomes a plane of elastic symmetry. Hence, each plane that contains the axis of rotation is a plane of symmetry, and therefore, transversely isotropic material admits an infinite number of elastic symmetries.

Necessary and sufficient conditions for strong ellipticity to hold for a transversely isotropic linearly elastic solid are established by Merodio and Ogden [4]. In this connection we recall the standard notation

$$\begin{aligned} c_{ij} &= C_{iijj}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (\text{not summed}) \quad c_{22} = c_{11}, \quad c_{23} = c_{13}, \\ c_{44} &= c_{55} = C_{2323} = C_{1313}, \quad c_{66} = C_{1212} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

corresponding to the direction of transverse isotropy coinciding with the x_3 coordinate axis. Apart from terms obtained by use of the symmetries (1.1), these are the only non-zero components C_{ijkl} . Then the necessary and sufficient conditions for strong ellipticity to hold are [4]

$$c_{11} > 0, \quad c_{33} > 0, \quad c_{55} > 0, \quad c_{11} > c_{12}, \quad (3.2)$$

$$|c_{13} + c_{55}| < c_{55} + \sqrt{c_{11}c_{33}}. \tag{3.3}$$

Moreover, the equilibrium equations (1.5) become

$$\begin{aligned} c_{55}u_{1,33} &= -c_{11}u_{1,11} - (c_{12} + c_{66})u_{2,21} - c_{66}u_{1,22} - (c_{13} + c_{55})u_{3,31}, \\ c_{55}u_{2,33} &= -(c_{12} + c_{66})u_{1,12} - c_{66}u_{2,11} - c_{11}u_{2,22} - (c_{13} + c_{55})u_{3,32}, \\ c_{33}u_{3,33} &= -c_{55}(u_{3,11} + u_{3,22}) - (c_{13} + c_{55})(u_{1,1} + u_{2,2})_{,3}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Then, we can introduce the following function

$$\begin{aligned} J_\kappa(x_3) &= \int_{D_{x_3}} [c_{55}(u_1^2 + u_2^2) + c_{33}u_3^2] da + \\ &+ 2 \int_{\Omega_{x_3}} (c_{55} - c_{13} - 2\kappa)(u_{1,1} + u_{2,2})u_3 dv, \end{aligned} \tag{3.5}$$

where κ is a parameter at our disposal and $\Omega_{x_3} \equiv D \times (x_3, L)$. By direct differentiation, from the relation (3.5) we obtain

$$J'_\kappa(x_3) = 2 \int_{D_{x_3}} [c_{55}u_\rho u_{\rho,3} + c_{33}u_3 u_{3,3} - (c_{55} - c_{13} - 2\kappa)u_3 u_{\rho,\rho}] da. \tag{3.6}$$

Further, the relation (3.6), the equilibrium equations (3.4) and the boundary conditions (2.2) furnish

$$\begin{aligned} J''_\kappa(x_3) &= 2 \int_{D_{x_3}} [c_{11}(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + 2(c_{13} + \kappa)(u_{1,1} + u_{2,2})u_{3,3} + c_{33}u_{3,3}^2 + \\ &+ c_{66}(u_{1,2} - u_{2,1})^2] da + 2 \int_{D_{x_3}} [c_{55}(u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,2}^2) + \\ &+ 2(c_{55} - \kappa)(u_{1,3}u_{3,1} + u_{2,3}u_{3,2})] da. \end{aligned} \tag{3.7}$$

At this instant we note that the relation (3.3) can be written in the following equivalent form

$$-2c_{55} - \sqrt{c_{11}c_{33}} < c_{13} < \sqrt{c_{11}c_{33}}. \tag{3.8}$$

Moreover, for any c_{13} satisfying (3.8) it is possible to determine $\kappa \in (0, 2c_{55})$ so that

$$|\kappa + c_{13}| < \sqrt{c_{11}c_{33}}. \tag{3.9}$$

In fact, in view of the relation (3.8), the choice for κ has to be such that

$$\max(-c_{13} - \sqrt{c_{11}c_{33}}, 0) < \kappa < \min(2c_{55}, -c_{13} + \sqrt{c_{11}c_{33}}). \tag{3.10}$$

Throughout in the remainder of this section we assume that κ satisfies the relation (3.10). With this choice we have

$$|c_{55} - \kappa| < c_{55} \quad (3.11)$$

and hence we can deduce that

$$\begin{aligned} \int_{D_{x_3}} [c_{55} (u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,2}^2) + 2(c_{55} - \kappa) (u_{1,3}u_{3,1} + u_{2,3}u_{3,2})] da &\geq \\ &\geq \omega_1 \int_{D_{x_3}} (u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,2}^2) da, \end{aligned} \quad (3.12)$$

where

$$\omega_1 = \min(\kappa, 2c_{55} - \kappa). \quad (3.13)$$

Furthermore, in view of the relation (3.9) we have

$$\begin{aligned} \int_{D_{x_3}} [c_{11} (u_{1,1} + u_{2,2})^2 + 2(c_{13} + \kappa) (u_{1,1} + u_{2,2}) u_{3,3} + c_{33}u_{3,3}^2] da &\geq \\ &\geq \omega_2 \int_{D_{x_3}} [(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + u_{3,3}^2] da, \end{aligned} \quad (3.14)$$

where

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left[c_{11} + c_{33} - \sqrt{(c_{11} - c_{33})^2 + 4(c_{13} + \kappa)^2} \right]. \quad (3.15)$$

If we use the estimates (3.12) and (3.14) into relation (3.7), then we obtain

$$\begin{aligned} J''_{\kappa}(x_3) &\geq 2m_{\kappa} \int_{D_{x_3}} u_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta} da + 2\omega_1 \int_{D_{x_3}} (u_{3,\alpha}u_{3,\alpha} + u_{\alpha,3}u_{\alpha,3}) da + \\ &+ 2\omega_2 \int_{D_{x_3}} u_{3,3}^2 da, \quad \text{for all } x_3 \in [0, L], \end{aligned} \quad (3.16)$$

where

$$m_{\kappa} = \min(\omega_2, c_{66}). \quad (3.17)$$

Thus, the relation (3.16) proves that $J''_{\kappa}(x_3) \geq 0$ for all $x_3 \in [0, L]$ and hence $J'_{\kappa}(x_3)$ is a non-decreasing function with respect to x_3 on the interval $[0, L]$. Moreover, in view of the boundary condition (2.4), from the relations (3.5) and (3.6), we can conclude that

$$J_{\kappa}(L) = 0, \quad (3.18)$$

$$J'_{\kappa}(L) = 0. \quad (3.19)$$

Furthermore, by successive integration of the relation (3.16) with respect to the x_3 variable over the interval $[x_3, L]$ and by using the relations (3.18) and (3.19) we deduce that

$$-J'_{\kappa}(x_3) \geq 2m_{\kappa} \int_{\Omega_{x_3}} u_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta} dv + 2\omega_1 \int_{\Omega_{x_3}} (u_{3,\alpha}u_{3,\alpha} + u_{\alpha,3}u_{\alpha,3}) dv +$$

$$+2\omega_2 \int_{\Omega_{x_3}} u_{3,3}^2 dv, \quad \text{for all } x_3 \in [0, L] \tag{3.20}$$

and

$$J_\kappa(x_3) \geq 2m_\kappa \int_{x_3}^L d\eta \int_{\Omega_\eta} u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} dv + 2\omega_1 \int_{x_3}^L d\eta \int_{\Omega_\eta} (u_{3,\alpha} u_{3,\alpha} + u_{\alpha,3} u_{\alpha,3}) dv + 2\omega_2 \int_{x_3}^L d\eta \int_{\Omega_\eta} u_{3,3}^2 dv, \quad \text{for all } x_3 \in [0, L]. \tag{3.21}$$

This last relation proves that $J_\kappa(x_3)$ is, indeed, an acceptable measure of the displacement field.

On the other hand, through Schwarz and arithmetic–geometric mean inequalities and by considering the relation (2.13), from (3.5) we obtain

$$0 \leq J_\kappa(x_3) \leq \frac{c_{55}}{\lambda_0} \int_{D_{x_3}} u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} da + \frac{c_{33}}{\lambda_0} \int_{D_{x_3}} u_{3,\alpha} u_{3,\alpha} da + \frac{\sqrt{2} |c_{55} - c_{13} - 2\kappa|}{\sqrt{\lambda_0}} \int_{\Omega_{x_3}} (u_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} + u_{3,\alpha} u_{3,\alpha}) dv. \tag{3.22}$$

Concluding, the relations (3.16), (3.20) and (3.22) yield the following second–order differential inequality

$$J''_\kappa(x_3) - aJ'_\kappa(x_3) - bJ_\kappa(x_3) \geq 0 \quad \text{for all } x_3 \in [0, L], \tag{3.23}$$

where

$$a = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}, \quad b = \frac{1}{\Lambda_1} \tag{3.24}$$

and

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2\lambda_0} \max \left(\frac{c_{55}}{\min(\omega_2, c_{66})}, \frac{c_{33}}{\omega_1} \right), \quad \Lambda_2 = \frac{|c_{55} - c_{13} - 2\kappa|}{\sqrt{2\lambda_0} \min(m_\kappa, \omega_1)}. \tag{3.25}$$

We now proceed to integrate the second–order differential inequality (3.23). To this end we use a well–known Comparison Principle (a generalisation of the curve under chord property for convex functions, see e.g. Flavin and Rionero [5, p. 124]). On this basis we can conclude that $J_\kappa(x_3)$ is bounded above by $Q(x_3)$, the solution of the second–order differential equation corresponding to the differential inequality (3.23) with the same boundary conditions, that is

$$Q''(x_3) - aQ'(x_3) - bQ(x_3) = 0 \quad \text{for all } x_3 \in [0, L], \tag{3.26}$$

and

$$Q(0) = J_\kappa(0), \quad Q(L) = J_\kappa(L). \tag{3.27}$$

On this basis, we obtain that

$$\begin{aligned} J_\kappa(x_3) &\leq \frac{1 - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)(L - x_3)}}{1 - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)L}} J_\kappa(0) e^{-\sigma_2 x_3} + \\ &+ \frac{1 - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)x_3}}{1 - e^{-(\sigma_1 + \sigma_2)L}} J_\kappa(L) e^{-\sigma_1(L - x_3)} \leq \\ &\leq J_\kappa(0) e^{-\sigma_2 x_3} + J_\kappa(L) e^{-\sigma_1(L - x_3)}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 4b} \right), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 + 4b} \right). \tag{3.29}$$

The result may be embodied in the following theorem.

Theorem 3 *For the cylinder consisting of a transverse isotropic linearly elastic material, the function $J_\kappa(x_3)$ as defined by (3.5), with κ satisfying the relation (3.10), represents a measure of the displacement field that satisfies the following decay law*

$$J_\kappa(x_3) \leq J_\kappa(0) e^{-\sigma_2 x_3} \quad \text{for all } x_3 \in [0, L]. \tag{3.30}$$

Remark 4 *The estimate (3.30) can be made fully explicit by obtaining an upper bound for $J_\kappa(0)$ in terms of the given data. To this end we note that the relations (3.5) and (2.3) give*

$$\begin{aligned} J_\kappa(0) &= \int_{D_0} [c_{55}(g_1^2 + g_2^2) + c_{33}g_3^2] da + \\ &+ 2 \int_{\Omega} (c_{55} - c_{13} - 2\kappa)(u_{1,1} + u_{2,2}) u_3 dv, \end{aligned} \tag{3.31}$$

and the second integral term can be bounded above in terms of the strain energy of the cylinder and hence, by means of the procedure devised in [3], it can be estimated in terms of the given data.

4 Concluding remarks

The aim of this paper is to exemplify how the spatial decay estimates for a constrained cylinder can be obtained for the whole class of strongly elliptic elastic materials. To this end the class of isotropic and transversely isotropic elastic materials are considered. For the class of isotropic elastic materials, the evolution of the two cross-sectional measures $I_1(x_3)$ and $I_2(x_3)$, as defined by the relations (2.6) and (2.20), furnish information upon the spatial

behaviour of the displacement field for the whole class of isotropic strongly elliptic materials. For elastic materials with transverse isotropy, the family of measures $J_\kappa(x_3)$, with κ satisfying the relation (3.10), give complete information on the spatial decay of the displacement field, for the whole class of strongly elliptic materials. More information on the spatial decay in anisotropic elastic cylinders can be found in the paper by Chiriță and Ciarletta [6].

It is worth to outline that the class of strongly elliptic materials includes the class of so-called auxetic materials. Thus, our results can be useful in the study of the properties of the auxetic materials, that is materials with extreme and unusual physical properties. Among them, one has polymeric foams with low density, having high capacity of absorption energy and high resistance to flexural deformations, thus leading to a significant loss of acoustic wave propagation.

An idea about the behaviour of such special materials (honeycombs, open-cell polymer foams) under appropriate loads is illustrated in the following two figures by comparison with usual materials (that is materials with Poisson ratio ranging over $(0, \frac{1}{2})$). The figure 1 proves that such special material expands laterally when stretched, in contrast to the usual materials which become substantially thinner under the same tractions (see figure 2).

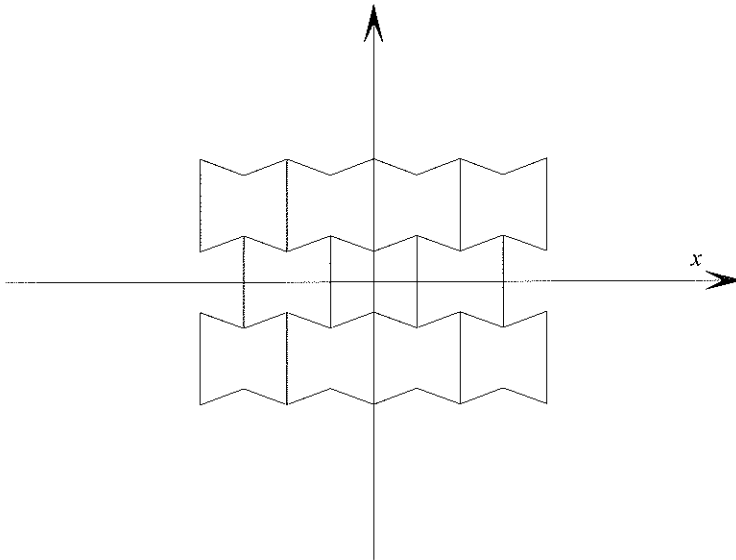


Fig.1

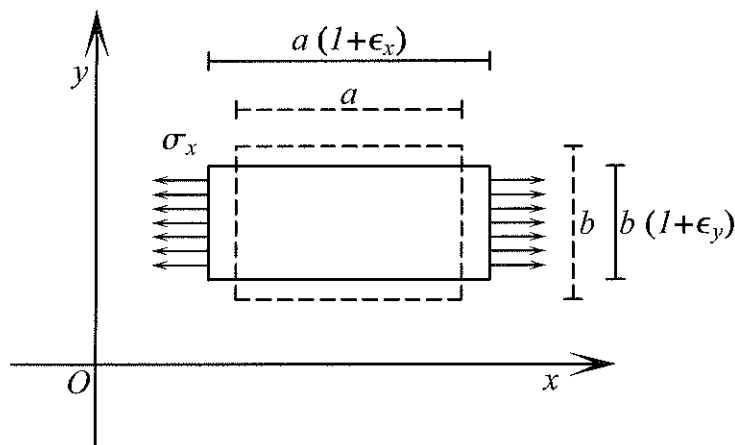


Fig.2

References

- [1] M. E. Gurtin, *The linear theory of elasticity*. In *Handbuch der Physik*, vol. VIa/2, Ed. C. Truesdell, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [2] J. N. Flavin, R. J. Knops and L. E. Payne, Decay estimates for the constrained elastic cylinder of variable cross section. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. **67**, no. 2, (1989), pp. 325–350.
- [3] J. N. Flavin, Spatial–decay estimates for a generalized biharmonic equation in inhomogeneous elasticity. *Journal of Engineering Mathematics*, vol. **46**, (2003), pp. 589–591.
- [4] J. Merodio and R. W. Ogden, A note on strong ellipticity for transversely isotropic linearly elastic solids. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. **56**, no. 4, (2003), pp. 589–591.
- [5] J. N. Flavin and S. Rionero, *Qualitative estimates for partial differential equations: an introduction*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [6] S. Chiriță and M. Ciarletta, Spatial estimates for the constrained anisotropic elastic cylinder. *Journal of Elasticity*, in print.

Front-tracking Numerical Methods in Civil Engineering

B. D'Acunto¹, F. Parente² and G. Urciuoli³

¹ Università di Napoli Federico II, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, via Claudio 21, 80125, Napoli, e-mail dacunto@unina.it

² National Starch and Chemical GmbH, Gruner Deich, Hamburg, e-mail francesco.parente@nstarch.com

³ Università di Napoli Federico II, Dipartimento di Ingegneria Geotecnica, via Claudio 21, 80125, Napoli, e-mail gianurci@unina.it

Abstract

A new front-tracking method for the 3D consolidation equation is developed. Irregular domains are considered and the possibility that the boundaries may also depend on time is discussed. Applications in civil engineering are shown.

Key words: Numerical models, Front-tracking Methods, Free boundary problems, Partial differential equations, Drain trenches, drain pipes.

1 Introduction

Numerical methods for partial differential equations (PDE) have a long history behind them. Although the first scientists who worked on this topic also developed numerical methods, as is proved by the well-known Euler algorithm, only in the early 1920s systematic researches were carried out on finite-difference methods for PDEs. After World War II, following the rapid development of powerful computers, research accelerated on the topic, [1, 2, 3, 4, 5]. In the same years another important family of methods was born: the finite element methods, strictly connected with the variational principles. The Galerkin method has its theoretical

basis in the concept of weak solution, which has been the focus of research in modern functional analysis, [6, 7, 8, 9].

Today numerical methods for PDEs are able to give satisfactory answers to most problems involving PDEs in any field of applied sciences and are widely used in any branch of engineering.

One of the main challenges of modern research into computational methods for PDEs, is the problem of finding solutions on irregular domains and on exterior domains, (domains with 'holes'), which is also of interest in many applications. In Section 2 we provide examples from Civil Engineering where such domains are involved. The first problem has been the focus of recent research, [10, 11, 12]. The second problem will be discussed by the authors in a forthcoming work. In Section 3 a front-tracking method for the classical three-dimensional consolidation equation on curved domains is discussed.

2 Irregular domains. Exterior domains

Numerical solving PDEs on domains with curved boundaries is a problem frequently encountered in Civil Engineering applications. In some situations the boundary may depend on time, as occurs in free-boundary-value problems. In these cases the problem is even more complicated since the curved boundary is itself an unknown. As a first model example consider the mechanical process of slopes stabilized by drain trenches, [13, 14, 15, 16, 17, 18], figures 2.1-2.3. Here,

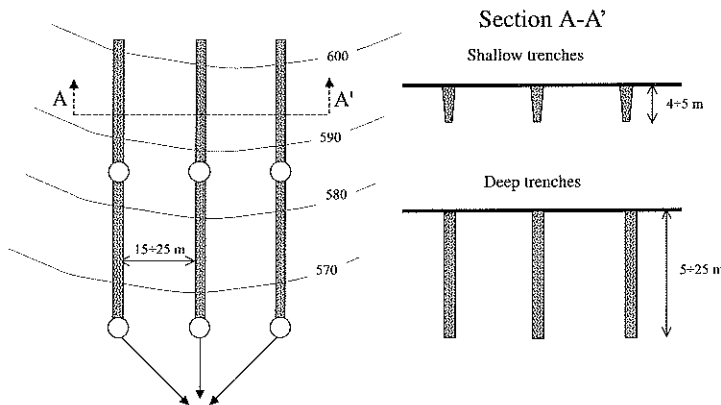


Figure 2.1: Main drain trenches, plan and sections

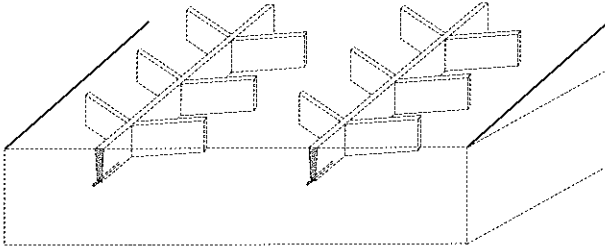


Figure 2.2: Drain trenches: 3D view

the free boundary describes the groundwater level evolution and the solution gives the piezometric head h and hence the pressure U in each point of the drained domain. Due to the importance of the topic, several methods have been developed

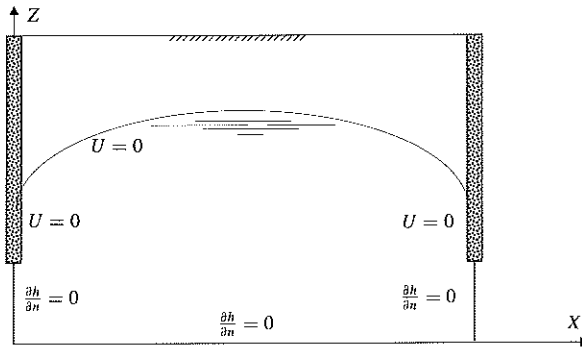


Figure 2.3: Drain trenches: vertical section

and are available in the literature. A well-known method consists in reducing the domain to a rectangular domain by a suitable change of variables. In this way the domain is simplified, but the partial differential equation could be severely complicated, since the nonlinearity of the moving boundary is transferred to the equation's coefficients. Fixed-grid methods can also be applied. Of course, the points close to the boundary should be carefully treated, but the results are generally satisfactory. Front-tracking methods respect the geometry of the domain and use curved grids, fig. 2.4. Hence the physical process can be better described. In this context a new front-tracking method was introduced in [11] with reference to the consolidation equation. Section 3 presents the generalization of the above

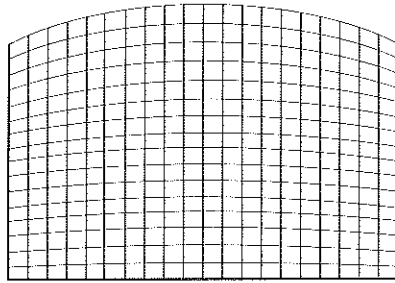


Figure 2.4: Fixed-grid mesh for the problem in fig. 2.3

method to the three-dimensional case.

Consolidating slopes by drain trenches is widely used in civil engineering, since the technique reduces the pore pressure in the soil and increases the soil shear strength. However, in several situations similar effects may be efficiently obtained by drain pipes, fig. 2.5 and fig. 2.6. Drain pipes are laid underground.

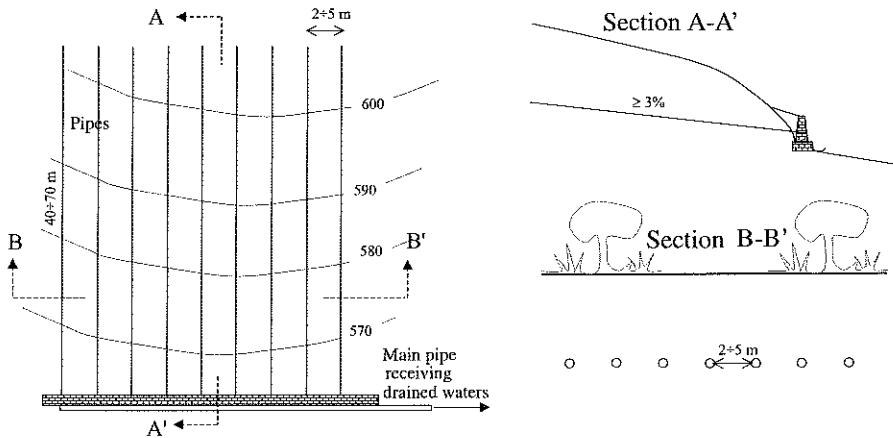


Figure 2.5: Drain pipes: plan and sections

Drained waters flow through them up to the main pipes, which take away the waters. The resulting mathematical model is a free boundary value problem for the 3D consolidation equation on exterior domains. Again the problem can be discussed by using front-tracking methods. An examples of a mesh is shown in

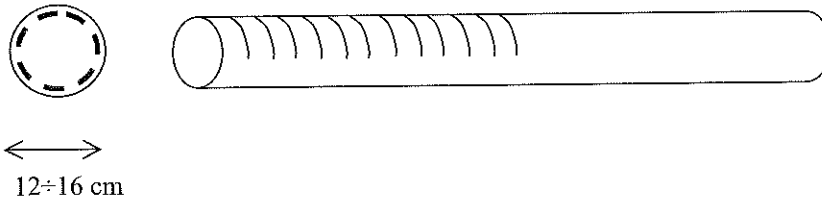


Figure 2.6: Example of drain pipe

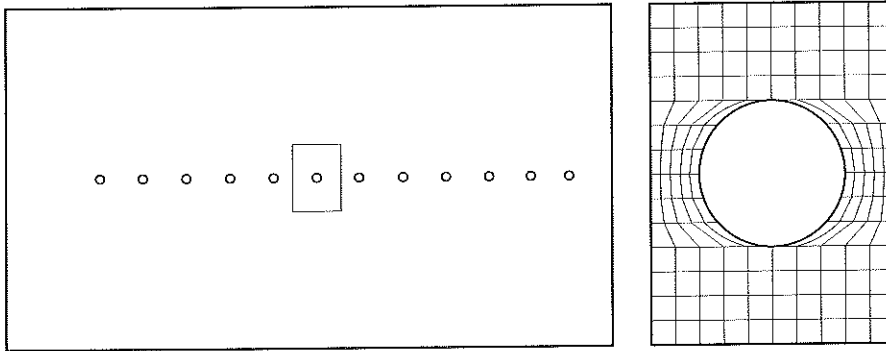


Figure 2.7: Example of mesh in vertical sections

fig. 2.7.

3 Front-tracking method

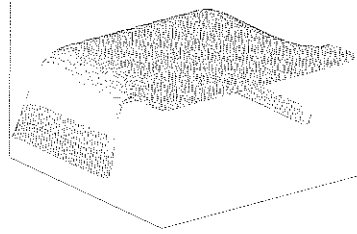
In this section a new front-tracking method is developed for the three-dimensional consolidation equation on irregular domains with boundaries which may also depend on time. Consider the consolidation equation in three space dimensions

$$U_T = c_v(U_{XX} + U_{YY} + U_{ZZ}), \quad (X, Y, Z) \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$\Omega = \{(X, Y, Z) : 0 \leq X \leq L_x, 0 \leq Y \leq L_y, 0 \leq Z \leq S\}, \quad (3.2)$$

where S denotes the surface of equation

$$S = S(X, Y, T). \quad (3.3)$$

Figure 3.1: Example of surface S

The function S may be either a known or unknown function to be determined, as occurs for free-boundary-value problems, fig. 3.1. Surface S is the front in the front-tracking method we are going to present. A zy -section is illustrated in fig. 3.2; zx -sections are similar. The generic grid point at time t_j will be denoted by $(x_i, y_h, z_{i,h,k}^j)$. Note that the z -co-ordinate depends on i, h, j , besides k . Indeed,

$$x_i = i \Delta x, \quad y_h = h \Delta y, \quad z_{i,h,k}^j = k \Delta z_{i,h}^j, \quad (3.4)$$

where

$$\Delta x = L_x/N_x, \quad \Delta y = L_y/N_y, \quad \Delta z_{i,h}^j = s(x_i, y_h, t_j)/N_z, \quad (3.5)$$

$$i = 0, \dots, N_x, \quad h = 0, \dots, N_y, \quad k = 0, \dots, N_z. \quad (3.6)$$

An approximating solution will be denoted by $u_{i,h}^j(z_{i,h,k}^j)$ and, when there is no ambiguous interpretation,

$$u_{i,h,k}^j = u_{i,h}^j(z_{i,h,k}^j). \quad (3.7)$$

The solution u is expressed by

$$\begin{aligned} u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^j) &= u_{i,h}^j(z_{i,h,k}^j) + r_1 \Delta x^2 (u_{xx})_{i,h,k}^j \\ &+ r_2 \Delta y^2 (u_{yy})_{i,h,k}^j + r_{3ih}^j (\Delta z_{i,h}^j)^2 (u_{zz})_{i,h,k}^j, \end{aligned} \quad (3.8)$$

where

$$r_1^j = \frac{c_v \Delta t^j}{\Delta x^2}, \quad r_2^j = \frac{c_v \Delta t^j}{\Delta y^2}, \quad r_{3ih}^j = \frac{c_v \Delta t^j}{(\Delta z_{i,h}^j)^2}. \quad (3.9)$$

The first step consists in proving a relationship between the derivative $(u_{yy})_{i,h,k}^j$ and the values of u on the points: (i, h, k) , $(i, h - 1, k - 1)$, $(i, h - 1, k + 1)$, $(i, h + 1, k - 1)$, $(i, h + 1, k + 1)$, depicted by circles in fig. 3.2. By using the

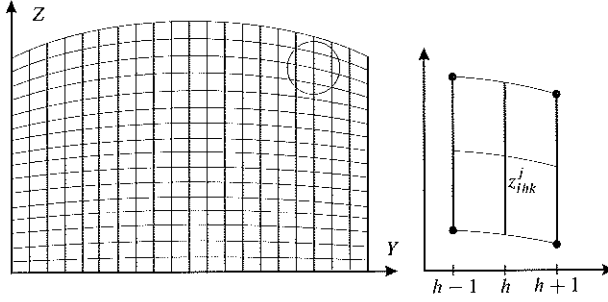


Figure 3.2: Front-tracking mesh for zy -section

positions

$$\delta_{q,h,k}^{i,m,n} = z_{i,m,n}^j - z_{q,h,k}^j, \quad (3.10)$$

from Taylor's series expansion it follows that

$$\begin{aligned} u_{i,h-1,k+1}^j &= u_{i,h,k}^j - (u_y)_{i,h,k}^j \Delta y + (u_z)_{i,h,k}^j \delta_{i,h,k}^{i,h-1,k+1} + (u_{yy})_{i,h,k}^j \frac{\Delta y^2}{2} \\ &\quad - (u_{yz})_{i,h,k}^j \Delta y \delta_{i,h,k}^{i,h-1,k+1} + (u_{zz})_{i,h,k}^j \frac{(\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k+1})^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} u_{i,h-1,k-1}^j &= u_{i,h,k}^j - (u_y)_{i,h,k}^j \Delta y + (u_z)_{i,h,k}^j \delta_{i,h,k}^{i,h-1,k-1} + (u_{yy})_{i,h,k}^j \frac{\Delta y^2}{2} \\ &\quad - (u_{yz})_{i,h,k}^j \Delta y \delta_{i,h,k}^{i,h-1,k-1} + (u_{zz})_{i,h,k}^j \frac{(\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k-1})^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_{i,h+1,k-1}^j &= u_{i,h,k}^j + (u_y)_{i,h,k}^j \Delta y + (u_z)_{i,h,k}^j \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k-1} + (u_{yy})_{i,h,k}^j \frac{\Delta y^2}{2} \\ &\quad + (u_{yz})_{i,h,k}^j \Delta y \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k-1} + (u_{zz})_{i,h,k}^j \frac{(\delta_{i,h,k}^{i,h+1,k-1})^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$u_{i,h+1,k+1}^j = u_{i,h,k}^j + (u_y)_{i,h,k}^j \Delta y + (u_z)_{i,h,k}^j \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k+1} + (u_{yy})_{i,h,k}^j \frac{\Delta y^2}{2}$$

$$+(u_{yz})_{i,h,k}^j \Delta y \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k+1} + (u_{zz})_{i,h,k}^j \frac{(\delta_{i,h,k}^{i,h+1,k+1})^2}{2}. \quad (3.14)$$

Summing equation (3.11) to (3.13) and equation (3.12) to (3.14) we get

$$u_{i,h-1,k+1}^j + u_{i,h+1,k-1}^j = 2u_{i,h,k}^j + (u_z)_{i,h,k}^j (\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k+1} + \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k-1}) + (u_{yy})_{i,h,k}^j \Delta y^2 \\ + (u_{yz})_{i,h,k}^j \Delta y \delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k-1} + \frac{1}{2} [(\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k+1})^2 + (\delta_{i,h,k}^{i,h+1,k-1})^2] (u_{zz})_{i,h,k}^j, \quad (3.15)$$

$$u_{i,h-1,k-1}^j + u_{i,h+1,k+1}^j = 2u_{i,h,k}^j + (u_z)_{i,h,k}^j (\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k-1} + \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k+1}) + (u_{yy})_{i,h,k}^j \Delta y^2 \\ + (u_{yz})_{i,h,k}^j \Delta y \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} + \frac{1}{2} [(\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k-1})^2 + (\delta_{i,h,k}^{i,h+1,k+1})^2] (u_{zz})_{i,h,k}^j. \quad (3.16)$$

Now, the mixed derivative should be eliminated. Multiply (3.15) by $\delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k+1}$ and (3.16) by $\delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k-1}$. Then subtract the two results. It follows that

$$(u_{i,h-1,k+1}^j + u_{i,h+1,k-1}^j) \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} - (u_{i,h-1,k-1}^j + u_{i,h+1,k+1}^j) \delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k-1} \\ = 2\Gamma_{i,h,k} u_{i,h,k}^j + N_{i,h,k} (u_z)_{i,h,k}^j + \Gamma_{i,h,k} (u_{yy})_{i,h,k}^j \Delta y^2 + \frac{1}{2} R_{i,h,k} (u_{zz})_{i,h,k}^j, \quad (3.17)$$

where

$$\Gamma_{i,h,k} = \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} - \delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k-1}, \quad (3.18)$$

$$N_{i,h,k} = (\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k+1} + \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k-1}) \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} - (\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k-1} + \delta_{i,h,k}^{i,h+1,k+1}) \delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k-1}, \quad (3.19)$$

$$R_{i,h,k} = [(\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k+1})^2 + (\delta_{i,h,k}^{i,h+1,k-1})^2] \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} \\ - [(\delta_{i,h,k}^{i,h-1,k-1})^2 + (\delta_{i,h,k}^{i,h+1,k+1})^2] \delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k-1}. \quad (3.20)$$

Solving in (3.17) with respect to $(u_{yy})_{i,h,k}^j$ yields

$$(u_{yy})_{i,h,k}^j = \frac{1}{\Gamma_{i,h,k} \Delta y^2} \left[(u_{i,h-1,k+1}^j + u_{i,h+1,k-1}^j) \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} - R_{i,h,k} (u_{zz})_{i,h,k}^j / 2 \right. \\ \left. - N_{i,h,k} (u_z)_{i,h,k}^j - 2\Gamma_{i,h,k} u_{i,h,k}^j - (u_{i,h-1,k-1}^j + u_{i,h+1,k+1}^j) \delta_{i,h-1,k+1}^{i,h+1,k-1} \right]. \quad (3.21)$$

Lastly, replace $(u_z)_{i,h,k}^j$ in (3.21) by the central approximation

$$(u_{yy})_{i,h,k}^j = \frac{1}{\Gamma_{i,h,k} \Delta y^2} \left[(u_{i,h-1,k+1}^j + u_{i,h+1,k-1}^j) \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} - R_{i,h,k} (u_{zz})_{i,h,k}^j / 2 \right.$$

$$-N_{i,h,k} \frac{u_{i,h,k+1}^j - u_{i,h,k-1}^j}{2\Delta z_{i,h}^j} - 2\Gamma_{i,h,k} u_{i,h,k}^j - (u_{i,h-1,k-1}^j + u_{i,h+1,k+1}^j) \delta_{i,h-1,k+1}^{i+1,k-1} \Big]. \tag{3.22}$$

Likewise, a similar formula for $(u_{xx})_{i,h,k}^j$ is derived

$$(u_{xx})_{i,k}^j = \frac{1}{\gamma_{i,h,k} \Delta x^2} \left[(u_{i-1,h,k+1}^j + u_{i+1,h,k-1}^j) \delta_{i-1,h,k-1}^{i+1,h,k+1} - \rho_{i,h,k} (u_{zz})_{i,h,k}^j / 2 \right. \\ \left. - v_{i,h,k} \frac{u_{i,h,k+1}^j - u_{i,h,k-1}^j}{2\Delta z_{i,h}^j} - 2\gamma_{i,h,k} u_{i,h,k}^j - (u_{i-1,h,k-1}^j + u_{i+1,h,k+1}^j) \delta_{i-1,h,k+1}^{i+1,h,k-1} \right], \tag{3.23}$$

where

$$\gamma_{i,h,k} = \delta_{i-1,h,k-1}^{i+1,h,k+1} - \delta_{i-1,h,k+1}^{i+1,h,k-1}, \tag{3.24}$$

$$v_{i,h,k} = (\delta_{i,h,k}^{i-1,h,k+1} + \delta_{i,h,k}^{i+1,h,k-1}) \delta_{i-1,h,k-1}^{i+1,h,k+1} - (\delta_{i,h,k}^{i-1,h,k-1} + \delta_{i,h,k}^{i+1,h,k+1}) \delta_{i-1,h,k+1}^{i+1,h,k-1}, \tag{3.25}$$

$$\rho_{i,h,k} = \left[(\delta_{i,h,k}^{i-1,h,k+1})^2 + (\delta_{i,h,k}^{i+1,h,k-1})^2 \right] \delta_{i-1,h,k-1}^{i+1,h,k+1} \\ - \left[(\delta_{i,h,k}^{i-1,h,k-1})^2 + (\delta_{i,h,k}^{i+1,h,k+1})^2 \right] \delta_{i-1,h,k+1}^{i+1,h,k-1}. \tag{3.26}$$

Now, insert results (3.22)-(3.23) into equation (3.8) and use the central approximation for $(u_{zz})_{i,h,k}^j$

$$u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^j) = \left[1 - 2r_1^j - 2r_2^j - 2r_{3i}^j + \frac{(\hat{r}_1)_{i,h,k}^j \rho_{i,h,k} + (\hat{r}_2)_{i,h,k}^j R_{i,h,k}}{(\Delta z_{i,h}^j)^2} \right] u_{i,h,k}^j \\ + \left[r_{3ih}^j - \frac{(\hat{r}_1)_{i,h,k}^j \rho_{i,h,k} + (\hat{r}_2)_{i,h,k}^j R_{i,h,k}}{2(\Delta z_{i,h}^j)^2} + \frac{(\hat{r}_1)_{i,h,k}^j v_{i,h,k} + (\hat{r}_2)_{i,h,k}^j N_{i,h,k}}{2\Delta z_{i,h}^j} \right] u_{i,h,k-1}^j \\ + \left[r_{3ih}^j - \frac{(\hat{r}_1)_{i,h,k}^j \rho_{i,h,k} + (\hat{r}_2)_{i,h,k}^j R_{i,h,k}}{2(\Delta z_{i,h}^j)^2} - \frac{(\hat{r}_1)_{i,h,k}^j v_{i,h,k} + (\hat{r}_2)_{i,h,k}^j N_{i,h,k}}{2\Delta z_{i,h}^j} \right] u_{i,h,k+1}^j \\ + (\hat{r}_1)_{i,h,k}^j \delta_{i-1,h,k-1}^{i+1,h,k+1} (u_{i-1,h,k+1}^j + u_{i+1,h,k-1}^j) \\ + (\hat{r}_1)_{i,h,k}^j \delta_{i+1,h,k-1}^{i-1,h,k+1} (u_{i-1,h,k-1}^j + u_{i+1,h,k+1}^j) \\ + (\hat{r}_2)_{i,h,k}^j \delta_{i,h-1,k-1}^{i,h+1,k+1} (u_{i,h-1,k+1}^j + u_{i,h+1,k-1}^j)$$

$$+(\hat{r}_2)_{i,h,k}^j \delta_{i,h+1,k-1}^{i,h-1,k+1} (u_{i,h-1,k-1}^j + u_{i,h+1,k+1}^j), \quad (3.27)$$

where

$$(\hat{r}_1)_{i,h,k}^j = r_1^j / \gamma_{i,h,k}, \quad (\hat{r}_2)_{i,h,k}^j = r_2^j / \Gamma_{i,h,k}. \quad (3.28)$$

Equation (3.18) provides an explicit algorithm, which is also stable under the condition that all coefficients are positive.

If the surface S is independent of time, $z_{i,h,k}$ does not depend on j and applying method (3.18) yields the solution directly. In the other situation, $z_{i,h,k}^{j+1}$ could not be the same as $z_{i,h,k}^j$. A further step is required to derive $u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^{j+1})$ from $u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^j)$. Consider Taylor's series expansion

$$\begin{aligned} u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^j) &= u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^{j+1}) + (u_z)_{i,h,k}^{j+1}(z_{i,h,k}^{j+1})[z_{i,h,k}^j - z_{i,h,k}^{j+1}] \\ &\quad + (u_{zz})_{i,h,k}^{j+1}(z_{i,h,k}^{j+1})[z_{i,h,k}^j - z_{i,h,k}^{j+1}]^2/2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Hence, by using the central approximations for both partial derivatives and the position

$$d_{i,h,k}^j = [z_{i,h,k}^j - z_{i,h,k}^{j+1}] / \Delta z_{i,h}^{j+1}, \quad (3.30)$$

it follows that

$$\begin{aligned} u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k-1}^{j+1})[(d_{i,h,k}^j)^2 - d_{i,h,k}^j]/2 + u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^{j+1})[1 - (d_{i,h,k}^j)^2] \\ + u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k+1}^{j+1})[(d_{i,h,k}^j)^2 + d_{i,h,k}^j]/2 = u_{i,h}^{j+1}(z_{i,h,k}^j). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Solving this system yields the unknown $u_i^j(z_{i,k}^{j+1})$.

Finally, note that for rectangular domains with mesh characterized by

$$r_1 = c_v \Delta t / \Delta x^2, \quad r_2 = c_v \Delta t / \Delta y^2, \quad r_3 = c_v \Delta t / \Delta z^2, \quad (3.32)$$

it is

$$\gamma_{i,h,k} = \Gamma_{i,h,k} = 4\Delta z, \quad \rho_{i,h,k} = R_{i,h,k} = 8\Delta z^3, \quad \nu_{i,h,k} = N_{i,h,k} = 0, \quad (3.33)$$

and method (3.27) reduces to

$$\begin{aligned} u_{i,h,k}^{j+1} &= (1 - 2r_3)u_{i,h,k}^j + (r_3 - r_2 - r_1)(u_{i,h,k-1}^j + u_{i,h,k+1}^j) \\ &\quad + r_1(u_{i-1,h,k-1}^j + u_{i+1,h,k+1}^j + u_{i-1,h,k+1}^j + u_{i+1,h,k-1}^j)/2 \\ &\quad + r_2(u_{i,h-1,k-1}^j + u_{i,h+1,k+1}^j + u_{i,h-1,k+1}^j + u_{i,h+1,k-1}^j)/2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

References

- [1] Crank, J. and Nicolson, P., Two methods for the numerical solution of moving boundary problems in diffusion and heat flow, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **43**, 50-67, (1947).
- [2] Lax, P. D., Weak solutions of nonlinear Hyperbolic Equations and their numerical computations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7**, 159-193,(1954).
- [3] Douglas, J. and Gallie, T. M., On the numerical integration of a Parabolic Differential Equation subject to a moving boundary condition, *Duke Math. J.* **22**, 557-570, (1955).
- [4] Douglas, J. and Racheford, H. H., On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**, 421-439, (1956).
- [5] Crank, J., Two methods for the numerical solution of moving boundary problems in diffusion and heat flow, *J. Mech. Appl. Math.* **10**, 220-231, (1957).
- [6] Ciarlet, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam (1978).
- [7] Lapidus, L. and Pinter, G. F., *Numerical Solutions of Partial Differential Equations in Science and Engineering*, J. Wiley & Sons, New York (1982).
- [8] Strang, G. and Fix, G. J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley (1988).
- [9] Gockenbach, M. S., *Partial Differential Equations. Analytical and Numerical Methods*, Siam, Philadelphia (2002).
- [10] D'Acunto B., Urciuoli G., Groundwater Regime in a Slopes Stabilized by Drain Trenches, *Math. Comput. Modelling*, **43**, 745-765, (2006).
- [11] D'Acunto B., Urciuoli G. and Parente F., Numerical Models for 2D Free Boundary Analysis of Groundwater in Slopes Stabilized by Drain Trenches, *Computer and Mathematics with Applications*, **53**, 1615-1626, (2007).
- [12] Chen J. T., Hsiao C. C., Chiu Y. P. and Lee Y. T., Study of free-surface seepage problems using hypersingular equations, *Commun. Numer. Meth. Engng.* (in press).

- [13] Lambe T. W. and Whitman R. V., *Soil Mechanics*, J. Wiley & Sons Inc., New York, (1969).
- [14] De Boer R., Highlights in the historical development of the pourous media: Toward a consistent macroscopic theory, *Appl. Mech. Rev.*, **49**, 201-262, (1996).
- [15] De Boer R., *Theory of porous media. Highlights in historical development and current state*, Springer-Verlag, Berlin, (2000).
- [16] Battaglio M., Bellomo N., Bonzani I., and Lancellotta R., Non-linear consolidation models of clay which change type, *Int. J. Nonlinear Mechanics*, **38**, 493-500, (2003).
- [17] Bear J., *Dynamics of fluids in porous media*, Elsevier Publishing Company, New York, (1972).
- [18] D'Acunto B., *Computational methods for PDE in Mechanics*, World Scientific, Singapore, (2004).

La Storia del Costruire e la Meccanica Razionale

di Salvatore D'Agostino*

1. Introduzione

Da circa due secoli l'ingegneria strutturale ha posto i suoi fondamenti nella meccanica razionale e ha indotto nella forma mentis di architetti ed ingegneri la concezione moderna di struttura, fondata e progettata nella visione fisico-matematica propria della meccanica razionale.

Nei millenni passati invece la storia del costruire si era fondata su una concezione profondamente diversa, assumendo come fonti ispiratrici le forme naturali e la loro razionalizzazione in forme geometriche.

Questa diversità, pur nella continuità dell'umano operare, ha posto importanti problemi culturali al moderno strutturista chiamato ad intervenire su costruzioni antiche di cui non è in grado di cogliere la concezione costruttiva. Può quindi essere utile ripercorrere, sia pure in maniera estremamente sintetica il rapporto tra storia del costruire e meccanica razionale.

2. L'arte del costruire e la meccanica antica

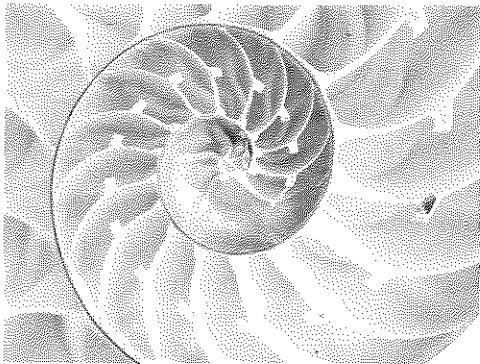
Non vi è dubbio che la nascita della civiltà si sia fondata sull'osservazione delle leggi e delle forme della natura e che il primo prodigioso processo di razionalizzazione si sia manifestato nell'estrazione dalle forme naturali delle forme geometriche che lasciano la fisicità naturale pervenendo all'estrazione razionale.

Ciò è stato emblematicamente espresso da Kubrick in 2001 Odissea nello Spazio, con la prepotente rivelazione del parallelepipedo, poeticamente evidenziato da Paul Valery nel suo celebre scritto sulla conchiglia, elegante e complessa forma geometrica che rivela un'ardita concezione

* Centro Interdipartimentale di Ingegneria per i Beni Culturali (C.I.Be.C.), Università degli Studi di Napoli Federico II – P.le Tecchio 80 – 80125 Napoli

costruttiva e ripreso, in una lucida visione scientifica, in un avvincente scritto di Edoardo Benvenuto[1].

Questa razionalizzazione geometrica era alla base dell'antica concezione del costruire e si ritrova già nei tanti reperti che la preistoria ci offre.



Nautilus, sezione della conchiglia

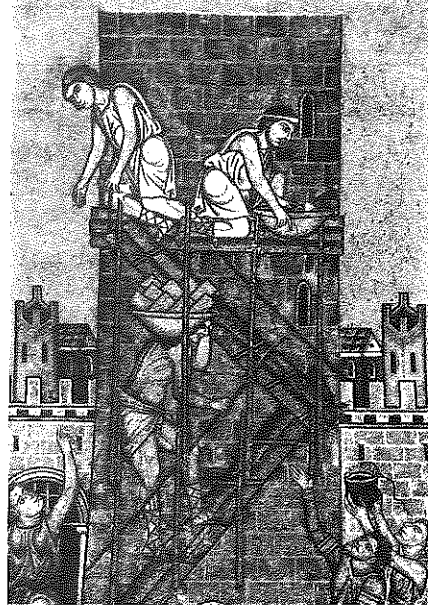


Immagine di cantiere medievale

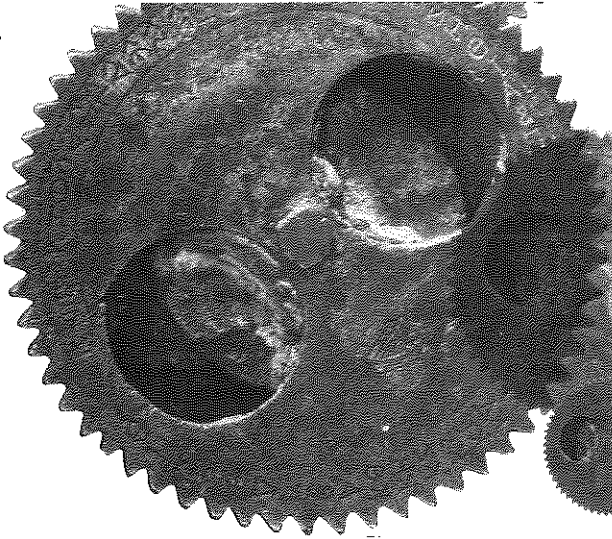
La storia del costruire si è sviluppata, pertanto, per millenni, in un rapporto costante tra costruzione e territorio di cui la costruzione utilizzava i materiali, in una visione artigianale del progetto e del fare che ancora oggi trova industriose applicazioni.



Architettura spontanea

In questo millenario processo la Meccanica aveva svolto un ruolo subalterno e di servizio, in quanto l'antica disciplina si era fondamentalmente sviluppata in osservazioni e principi che hanno trovato le loro applicazioni nei meccanismi. Un po' grossolanamente potremmo dire che la Meccanica antica aveva guardato molto più alla concezione meccanica della macchina che non a quella statica della costruzione.

Un esempio preclaro di tale visione è rappresentato dalla complessità del meccanismo di Anticitera, recentemente esposto alla bella mostra Eureka presso il Museo Archeologico di Napoli[2]; esso è infatti "un oggetto talmente raffinato e complesso che non può essere unico, nè la creazione di un singolo. Dietro quei complicati ingranaggi si cela un universo di sapienti meccanismi, di tornitori, di arti, di tecniche, di matematici ed astronomi che lavorano gomito a gomito. Dove avveniva tutto ciò? In un solo Paese? Competevano gli uni con gli altri?..." [3]. Misteri e meraviglie dell'umano procedere che la ricerca storica e scientifica è chiamata a svelare[4].

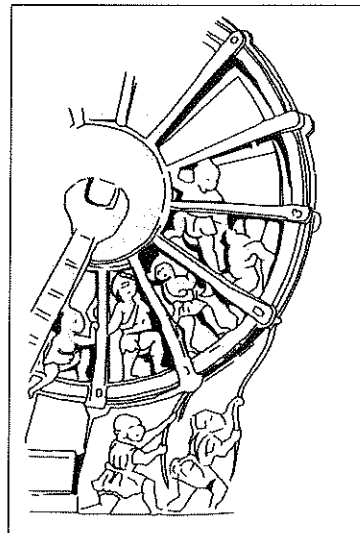
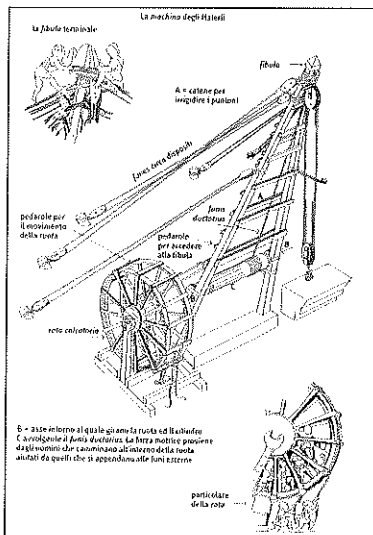


Il meccanismo di Anticitera

Un ruolo importante ma subalterno svolto dalla meccanica per l'arte del costruire è stato quello della creazione di meccanismi per il taglio e la lavorazione delle pietre, per il loro trasporto e sollevamento, mentre il ruolo essenziale di mediazione tra la concezione geometrica e la prassi costruttiva era svolto dalle "regole dell'arte". Nell'antichità queste regole si sedimentavano lentamente tra sperimentazioni, insuccessi ed approdi sicuri, ed hanno costituito da sempre, ieri come oggi, le pratiche diffuse dell'umano operare. Esse si ritrovano nella comune attività agricola, come nel moderno cantiere edile, nella guida diffusa dei mezzi meccanici come nell'utilizzo quotidiano del software. In definitiva la regola

dell'arte può essere riguardata come la pratica quotidiana di un sapere alto, di fatto sconosciuto all'operatore.

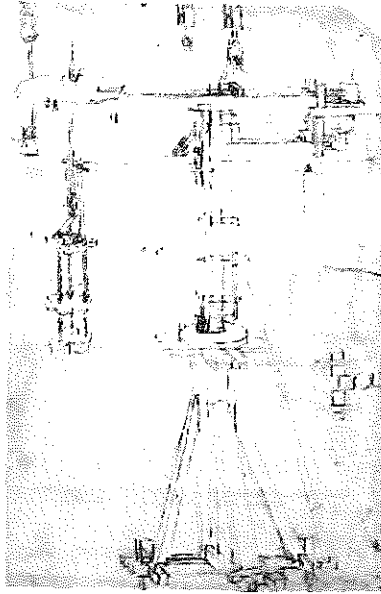
Queste regole hanno caratterizzato e caratterizzano ancora oggi il cantiere edile: con il loro tramite il costruttore romano stabiliva le dimensioni delle arcate di un ponte o la geometria di una sostruzione, con il loro tramite i carpentieri di oggi discettano di travi e solai in cemento armato. I primi erano gli operatori di una cultura tecnica che trasferiva un sapere sperimentato per secoli in regole geometriche, i secondi acquisiscono nella pratica di cantiere una conoscenza artigianale del tutto ignara dei principi della scienza e della tecnica delle costruzioni che l'hanno definita. Purtroppo alla nostra conoscenza sfuggono ancora l'antico alto sapere della concezione costruttiva antica, capace di diffondere per millenni e in maniera capillare il tessuto dell'architettura antica nel quale spiccano numerosi sublimi monumenti. Di conseguenza riusciamo con fatica e non in maniera sistematica ad individuare le regole dell'arte che hanno consentito la realizzazione dell'architettura antica.



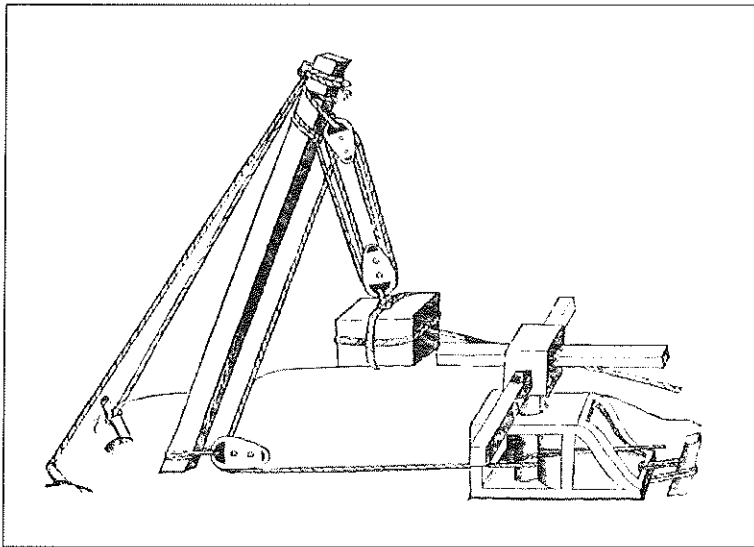
Macchina elevatoria di epoca romana, dettaglio

D'altro canto è ben noto che nella scienza antica l'operazione prodotta e l'operazione somma erano concepite come problemi geometrici, così come non è possibile incolonnare i numeri romani per svolgere le operazioni razionali di somma e sottrazione. Tutto ciò esemplifica una sofferta affermazione di Salvatore Di Pasquale, studioso di scienza delle costruzioni ed ottimo matematico, ma nel contempo attento esegeta dell'arte del costruire[5]: "sono arrivato alla conclusione che non posso leggere appieno una struttura antica e non posso farlo perché per troppo tempo sono stato abituato a leggerla con sistemi matematici che furono estranei

alla sua progettazione”, che tra l’altro è testimonianza rara tra gli accademici di consapevolezza critica.



F. Brunelleschi, Progetto di gru girevole

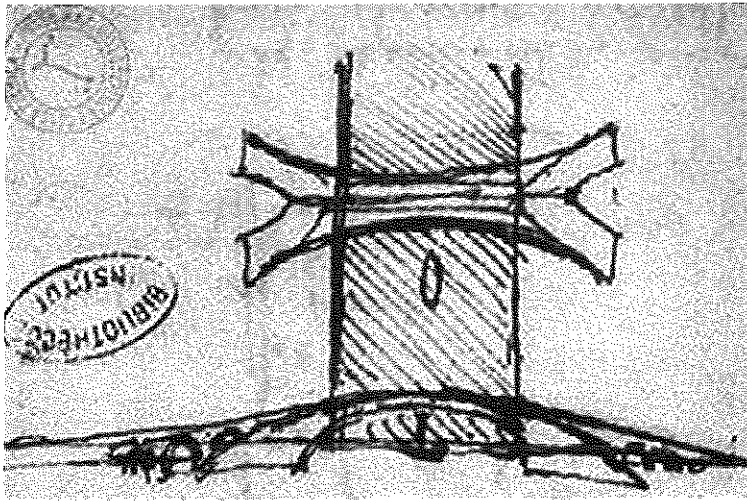


L.B. Alberti, Progetto di dispositivo di sollevamento

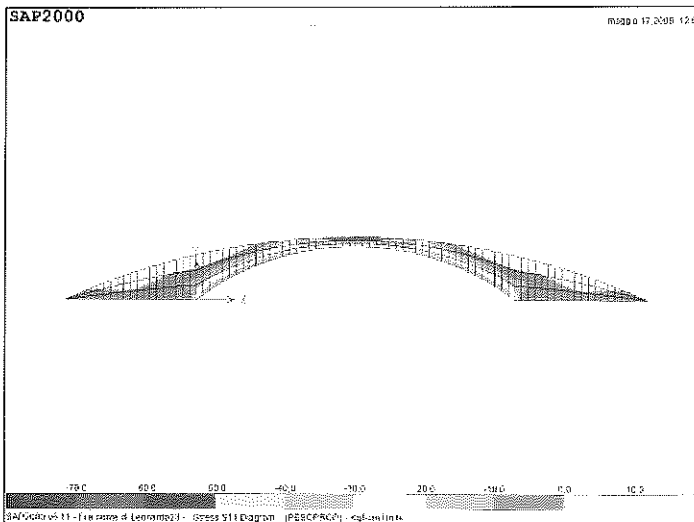
3. La nuova scienza e la Meccanica razionale

L’attenzione ai meccanismi più che alla statica modernamente intesa è ancora viva nella cultura del Rinascimento italiano, ne è testimonianza

la gru girevole concepita da Brunelleschi per la costruzione della cupola di S. Maria del Fiore a Firenze, audace macchina incompresa dai contemporanei e tramandata alla posterità da Leonardo da Vinci. E ancora in linea con l'antica concezione del costruire sono le riflessioni di Leon Battista Alberti che indagano i canoni geometrici che configurano l'archi-tettura del Rinascimento, e l'analisi geometrico-formale dell'architettura antica che ancora in questo periodo raggiunge vertici assoluti, come dimostra la concezione del ponte sul Bosforo di Leonardo da Vinci: un'unica arcata di circa duecentoquaranta metri di luce che moderni calcoli hanno dimostrato perfettamente concepita e realizzabile[6].

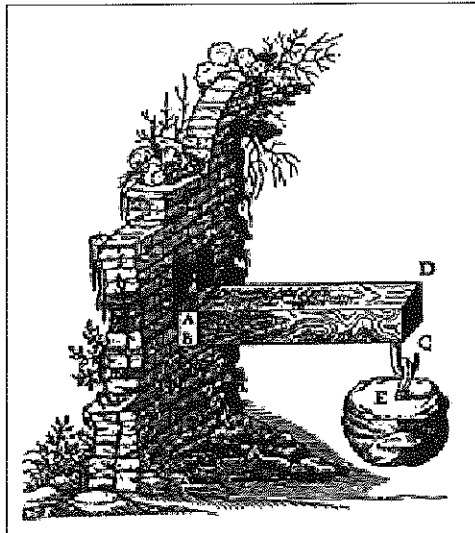


*Leonardo da Vinci, Codice Atlantico Manoscritto L, foglio 66 r.
Pianta e prospetto del ponte sul Bosforo*



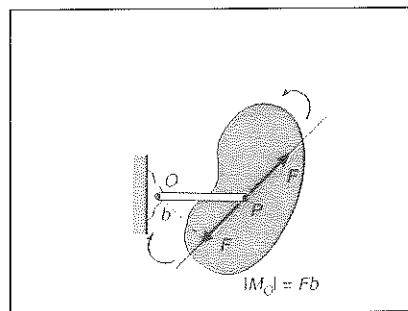
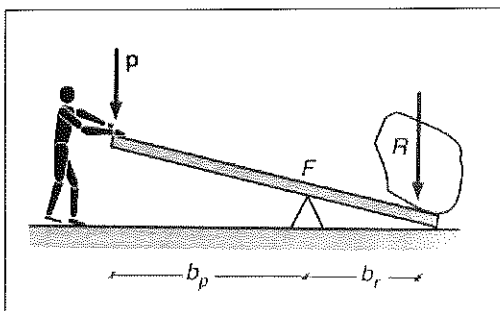
Calcolo strutturale di ponte sul Bosforo

È ben noto invece che l'approccio razionale ed analitico diventa fondativo per la nuova visione scientifica dell'universo, ed esso si dipana nella Meccanica Razionale. Quest'approccio invade fin dall'inizio il mondo del costruire, ed infatti, agli esordi della scienza nuova, lo stesso Galilei affronta il complesso problema della flessione che sarà pienamente risolto sul piano analitico circa due secoli dopo.



Galilei, Analisi della flessione

Da quel momento l'interesse della Meccanica per l'analisi del costruito storico si sviluppa in maniera costante e tenace, come ha dimostrato nei suoi indimenticabili trattati Edoardo Benvenuto[7], il quale ha aperto la strada ad una grande riflessione storica che continua, attraverso i suoi allievi[8], a dare importanti risultati.



Così, in circa due secoli, attraverso il contributo di molti eminenti e celebri scienziati, i cui nomi sarebbe improprio quanto immodesto citare, prende corso e sostanza la Meccanica Razionale in una sistematizzazione

disciplinare che ha pochi confronti anche nell'ambito delle scienze esatte. Essa diviene l'asse portante della tecnica moderna e forgia con i suoi modelli fisico-matematici la concezione stessa dell'Ingegneria, concezione che si manifesta, nelle sue molteplici accezioni, in tutto lo sviluppo scientifico, tecnologico e industriale del secolo appena trascorso.

Questa nuova concezione, tiene sullo sfondo le leggi della natura, interpretandole sul piano razionale affinché si pervenga alla formulazione analitica dei problemi. Ciò comporta notevoli quanto utili astrazioni quali: il corpo rigido, l'assenza di attrito, le condizioni di equilibrio e la loro stabilità. Ben presto questo processo si trasfonde in un impressionante bagaglio analitico del quale si ricordano emblematicamente il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali della statica, queste ultime sempre rispettate ma mai formulate nella concezione antica del costruire.

Lo sviluppo della Meccanica Razionale ben presto si riversa in ricchi percorsi che caratterizzano l'ingegneria moderna: la meccanica applicata alle costruzioni, la meccanica applicata alle macchine, la meccanica dei fluidi, per citare solo le prime e più significative derivazioni.

Sulla base di questo universo razionalizzato si è sviluppata una visione analitica che attraverso l'elaborazione numerica giungerà ad investire la visione del progetto e a formulare, in parallelo, l'esigenza della verifica. Gli strumenti sul campo sono l'analisi matematica e la geometria.

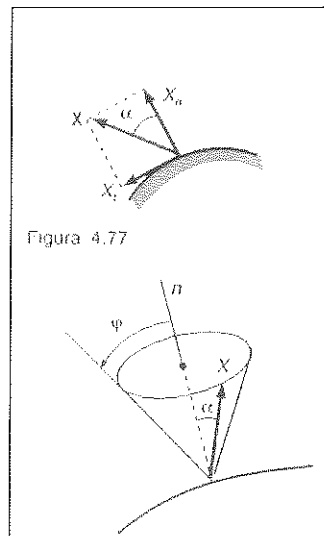
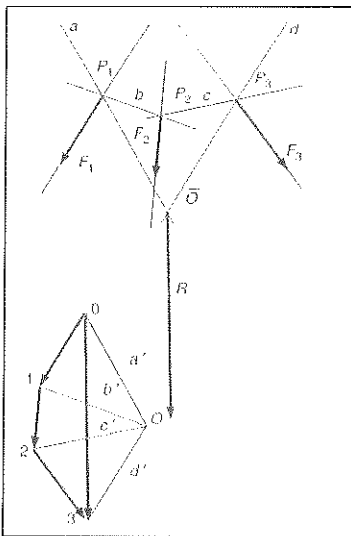
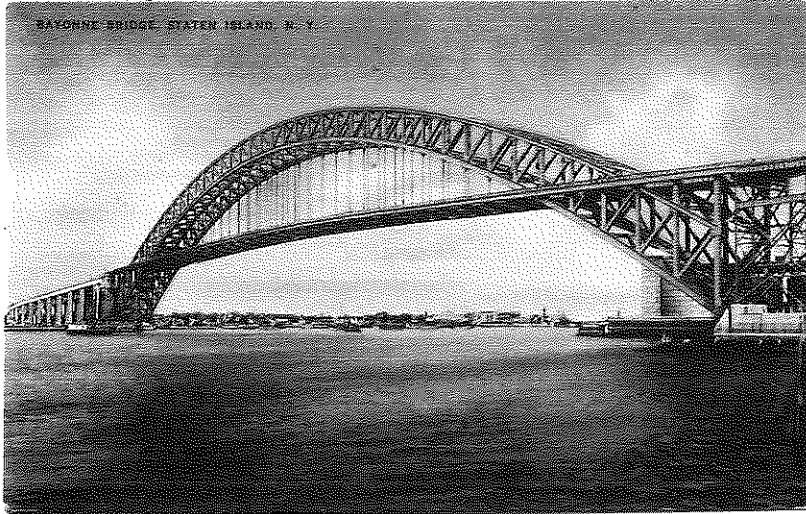


Figura 4.77

Proprio nel campo della meccanica applicata alle costruzioni, la geometria è prevalsa a lungo dando luogo al complesso edificio della statica grafica, mentre negli ultimi decenni si è assistito, attraverso lo sviluppo del calcolo numerico prima, e dell'informatica poi, al trionfo definitivo del calcolo automatico.

4. La statica grafica

Nella storia del costruire, la Statica grafica, con l'avvento dei materiali industriali, ferro e calcestruzzo, ha consentito l'inizio di una rivoluzione costruttiva che non ha precedenti nella storia dell'umanità. Essa, con le sue schematizzazioni, ha prodotto la nascita del concetto di struttura, ha elaborato nuove tipologie strutturali ed ha consentito la nascita del progetto strutturale e della sua verifica. La formulazione sistematica della Statica grafica fu pubblicata da K. Culman tra il 1864 e il 1865.



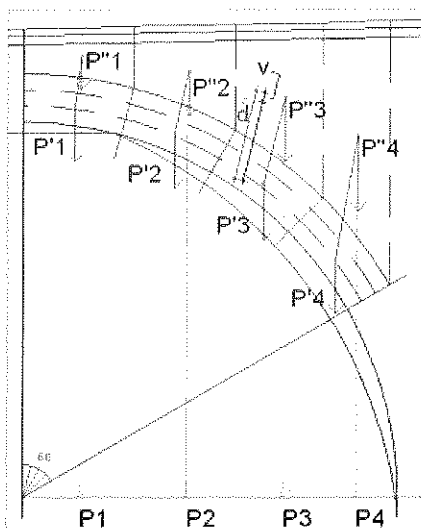
New York, *Bayonne bridge*, 1931

Invero le prime formulazioni risalgono al XVII secolo, infatti Varignon aveva già introdotto nella sua *Nouvelle Mécanique* del 1687, il poligono funicolare, traduzione grafica di una doppia integrazione, contributi rilevanti si sono avuti inoltre con lo sviluppo dell'analisi vettoriale che ha consentito la determinazione grafica di risultanti e componenti, permettendo, tra l'altro, il rapido sviluppo del metodo dei nodi e quindi delle travi reticolari.

Voler sommariamente riassumere lo sviluppo della statica grafica sarebbe improprio ai fini di questa breve nota. Un'ampia visione di questo processo si ritrova nell'opera di E. Benvenuto, *La Scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, e nell'opera dei Suoi allievi[8]. Qui si vuole sottolineare come la statica grafica abbia contribuito nei secoli XIX e XX a far evolvere le forme strutturali e di conseguenza la concezione stessa dell'architettura moderna.

La schematizzazione teorica dei vincoli, e le equazioni di equilibrio, rilette graficamente, sono alla base dell'invenzione del calcolo delle travi reticolari, dalle capriate semplici e composte, alle travi Warren, Howe, Wierendel, etc., fino alle grandi strutture reticolari ad arco, alle tante coperture industriali, e più recentemente alle coperture spaziali.

La teoria dei poligoni funicolari, tramite il contributo di Mery, e la teorizzazione del modello teorico di materiale non resistente a trazione, ha consentito il progetto e la verifica delle arcate dei ponti in muratura che si sono dipanate dal sec. XIX lungo le nuove reti stradali e ferroviarie.



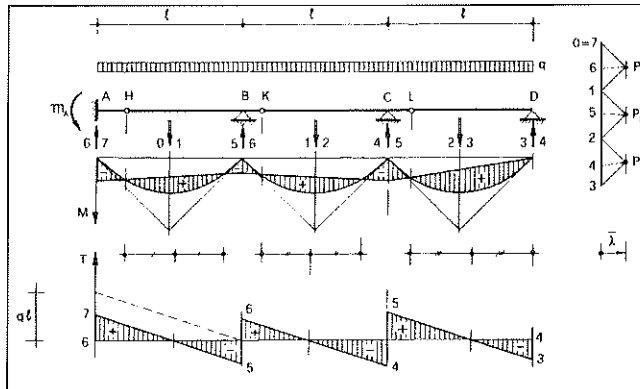
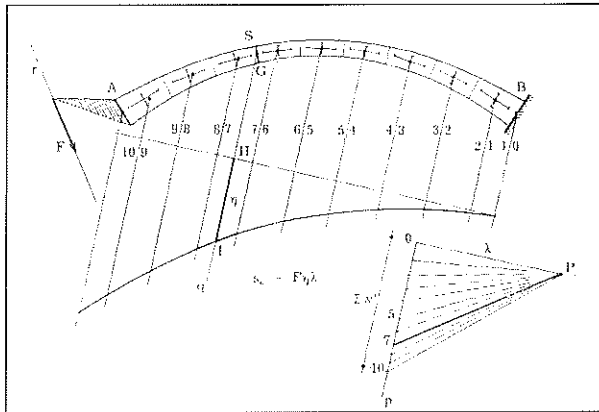
Verifica di Mery

La graficizzazione delle equazioni differenziali e l'interpretazione geometrica delle condizioni ai limiti ha consentito a generazioni di ingegneri di calcolare e diagrammare sollecitazioni e deformate che hanno accompagnato per oltre un secolo il calcolo strutturale.

La statica grafica in definitiva ha consentito una semplice ed evidente schematizzazione del progetto strutturale, dalle applicazioni di geometria delle masse a quelle ben più complesse della teoria dell'ellisse di elasticità che nel contesto scientifico della scienza delle costruzioni utilizza ancora una volta l'apporto metodologico della statica grafica. Così per circa un secolo la Statica grafica è stata l'ossatura portante della Scienza delle Costruzioni e del Calcolo strutturale e il suo insegnamento ha formato generazioni di Ingegneri, come attestano poderosi testi di esercizi[9].

Ancora negli ultimi decenni del secolo scorso i manuali di ingegneria riportavano verifiche grafiche di strutture in calcestruzzo armato, ma ormai la Statica grafica aveva fatto il suo corso e ben presto il suo complesso edificio sarebbe stato sostituito dal calcolo numerico. Ciò fu prontamente intuito ad esempio da Tullio Renzulli che già nel 1965 abolì, nel

suo insegnamento di Scienza delle Costruzioni presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli, gli esercizi di Statica grafica ritornando al calcolo analitico.

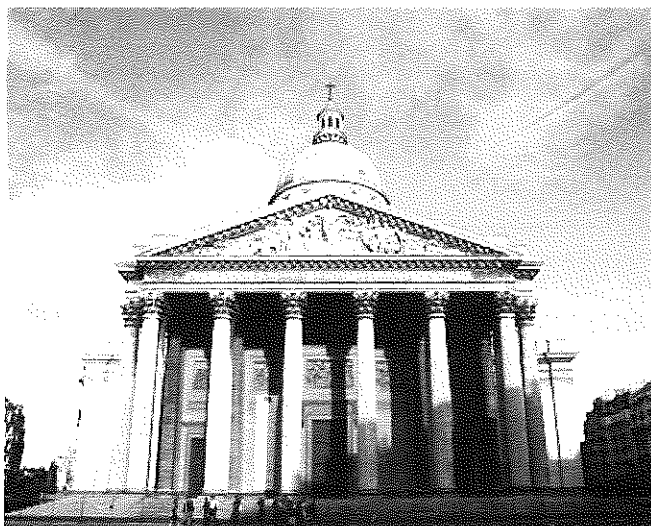


5. Il progetto strutturale

Le brevi considerazioni esposte evidenziano come il progetto strutturale nato dalla Meccanica razionale e sviluppatosi poi nella Scienza del costruire costituisca uno spartiacque tra la concezione costruttiva del mondo antico e la visione scientifica della moderna ingegneria strutturale. In effetti durante tutto il secolo XIX si assiste alla costruzione di un poderoso edificio scientifico che partendo dalla Meccanica razionale si articola nella Statica grafica e si consolida nella Meccanica applicata alle costruzioni che più tardi assumerà il nome di Scienza delle Costruzioni.

La soluzione del problema di De Saint Venant consente di costruire in tutta la sua limpida coerenza la teoria tecnica della trave, e questo complesso processo appare già sostanzialmente compiuto e professionalmente acquisito nel Manuale dell'Ingegnere Civile che Alberto Castigliano pubblica tra il 1882 e il 1885[10]

In questo lungo processo la storia del costruire si svolge su due percorsi pressoché paralleli. Mentre infatti la produzione industriale della carpenteria metallica e i nuovi strumenti scientifici consentono il rapido progredire di una architettura che si sviluppa prevalentemente nei grandi ponti e nelle costruzioni industriali e ferroviarie, l'architettura monumentale così come l'edilizia civile hanno continuato il loro percorso tradizionale basato sulle regole dell'arte e sui materiali tradizionali, realizzando la maggior parte dei centri storici che caratterizzano ancora il tessuto edilizio europeo.



Parigi, *Pantheon*

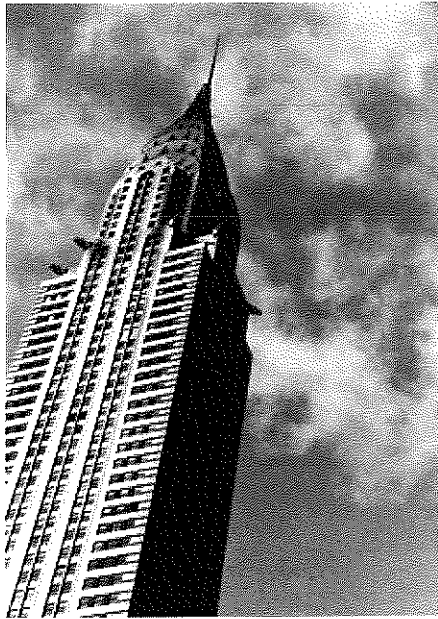
Intanto il nuovo ingegnere si forma con una concezione tutta analitica e razionale, lontana dalla prassi di cantiere. Il comportamento dei nuovi materiali è interpretato da leggi analitiche suffragate da ricerche sperimentali in laboratorio che danno luogo a prescrizioni normative. Prende quindi forma il progetto strutturale scorporato dal progetto architettonico. Esso è completamente progettato e verificato secondo teorici modelli di calcolo, individuando la struttura, organismo portante dell'edificio, completamente definito e disegnato in ogni dettaglio esecutivo prima dell'inizio dei lavori. Il progetto strutturale perde così ogni rapporto con la fase esecutiva e la sua validità è sancita dalla relazione di calcolo redatta nel rispetto delle normative strutturali vigenti.

È evidente che lo strutturista del XX secolo ha perso ogni rapporto con l'antica concezione costruttiva e con la conoscenza delle regole dell'arte che si arricchiva nella pratica del cantiere.

L'antica concezione costruttiva si presenta così come altro da sé rispetto alla nuova scienza, relegando nell'oblio tutta l'antica cultura.

D'altro canto il nuovo strutturista è l'unico tecnico competente nel campo della sicurezza statica ed a lui corre l'obbligo di curare la conser-

vazione dell'antico patrimonio. È naturale quindi che egli tenda ad intervenire secondo la nuova visione tecnico-scientifica e ciò spesso con grave danno per la salvaguardia dell'identità dell'architettura antica[11]



New York, *Chrysler building*

Solo recentemente, ed ancora in maniera embrionale, si è sviluppata negli studi di ingegneria una maggiore consapevolezza critica della propria storia.

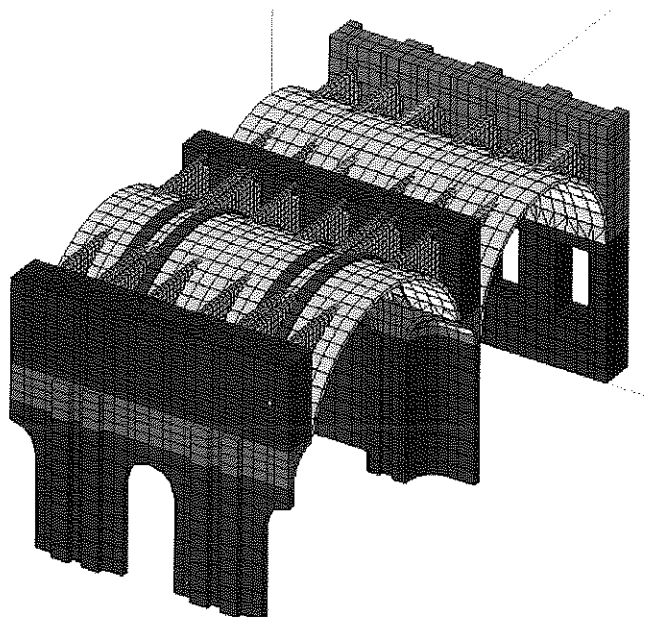
Nel complesso campo della conservazione dell'architettura antica un ruolo decisivo potrà essere svolto dall'Ingegneria per i Beni culturali che assume il costruito storico come archivio di storia materiale, secondo una visione storico-scientifica della conservazione.

6. L'avvento del calcolo numerico e la nuova didattica

Nella seconda metà del secolo scorso, l'avvento dei primi calcolatori e l'enorme sviluppo del calcolo numerico hanno reso obsoleto, come si è detto, il grande patrimonio culturale della statica grafica. In tal modo lo strutturista non ha più seguito passo dopo passo, anzi sarebbe il caso di dire linea dopo linea, il processo di calcolo, perdendo quell'intima conoscenza dei diagrammi delle sollecitazioni e delle deformate che consentono di rendere consapevole il progettista in ogni fase di calcolo. Ben presto la produzione di software specifici per ogni esigenza dell'ingegnere, ed in particolare del calcolo strutturale, ha reso possibile affrontare

qualsiasi analisi strutturale in tutta la sua complessità, eliminando molte semplificazioni dei precedenti modelli sia grafici, sia analitici.

Ovviamente più progredisce la produzione di software specialistici e meno è facile comprendere la struttura degli algoritmi che sono alla base del processo. Ciò implica la loro utilizzazione da parte dell'utente attraverso mere regole e prescrizioni d'uso, e un necessario controllo dei risultati ottenuti. Questo controllo richiede una capacità di analisi strutturale che poco si sposa con la formazione culturale e scientifica dei nuovi ingegneri, tendente a penalizzare proprio i corsi di Meccanica razionale, limitando fortemente la formazione concettuale, a tutto vantaggio di una formazione più spiccatamente tecnologica e applicativa.



Calcolo agli elementi finiti

La formazione culturale risulta indispensabile per comprendere, unitamente alla conoscenza storica, le ragioni culturali di una corretta conservazione che oggi comincia ad investire non solo il patrimonio storico ma anche e talvolta ancora più, l'architettura moderna.

Conclusioni e prospettive

La succinta analisi del complesso rapporto tra la storia del costruire e la meccanica razionale evidenzia innanzitutto la dicotomia profonda tra l'antica concezione del costruire, fondata sulle regole dell'arte, e la moderna visione della Scienza delle costruzioni fondata sulla Meccanica razionale. Questo indubbio progresso scientifico ha trasformato l'antico

processo costruttivo concepito ed attuato in cantiere in forme artigianali, in un progetto tecnico-scientifico, sviluppato secondo modelli teorici guidati da normative specialistiche, la cui realizzazione si articola in uno schematico processo sempre più industrializzato.

Purtroppo però, come la storia dell'ultimo secolo dimostra, la nuova visione non ha contribuito ad una conservazione consapevole dell'architettura antica, in quanto i nuovi strutturisti, del tutto ignari dell'antica concezione costruttiva, hanno indotto nel patrimonio storico una cementificazione diffusa che oggi comincia a manifestare sempre più la sua incompatibilità concettuale e materiale con l'antico tessuto costruttivo, realizzato con materiali e leganti tradizionali.

Mentre sul piano culturale e scientifico si è riusciti negli ultimi decenni ad individuare i principi di una corretta conservazione, la pratica edilizia corrente è ancora ben lontana dall'applicare nel restauro costruttivo tali principi, in ciò anche sospinta da processi industriali che tendono ad introdurre anche nella conservazione del patrimonio storico sempre nuovi materiali di dubbia reversibilità e di incerta durabilità, spesso non sufficientemente sperimentati.

Bibliografia

- [1] E. Benvenuto, S. D'Agostino, La ricerca di una continuità perduta nella scienza del costruire, Atti 1° Convegno Nazionale ARCo "Manutenzione e recupero nella città storica - Analisi e interpretazione storica", Roma, pp.15-30, 1993.
- [2] Eureka: il genio degli antichi, Electa, Napoli, 2005.
- [3] E. Lo Sardo, in Eureka: il genio degli antichi, Electa, Napoli, pg. 13, 2005
- [4] Una TAC svela i segreti di Anticytera, Repubblica, 30 novembre 2006.
- [5] S. Di Pasquale, L'arte del costruire, tra conoscenza e scienza, Marsilio, Venezia, 1996.
- [6] Leonardo da Vinci, Codice Atlantico, Manoscritto L, foglio 66r., Biblioteca Ambrosiana di Milano.
- [7] E. Benvenuto, La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico, Sansoni, Firenze, 1981.
E. Benvenuto, An Introduction to the History of Structural Mechanics, Springer, New York, 1991.
- [8] A. Becchi, F. Foce, Degli archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia, Marsilio, Venezia, 2002.
A. Becchi, M. Corradi, F. Foce, O. Pedemonte, Towards a History of Construction, Birkhauser Verlag, Berlin, 2002.
A. Becchi, M. Corradi, F. Foce, O. Pedemonte, Construction History. Research Perspectives in Europe, KWB, Firenze, 2004.
- [9] E. Giangreco, Esercizi di Scienza delle Costruzioni, Liguori, Napoli, vol. 2, 1954.
- [10] A. Castigliano, Manuale di Ingegneria civile, Hoepli, Milano, vol. III, 1884.
- [11] S. D'Agostino, Dalle regole dell'Arte alla Scienza delle Costruzioni, in Dalla Scuola di Applicazione alla Facoltà di Ingegneria, Hevelius, Napoli, pg 209-225, 2002.

Existence and uniqueness results for a class of non linear models

Nota di M. De Angelis, A. Maio, E. Mazziotti

Facoltà di Ingegneria, Dip. Mat.e Appl., via Claudio 21, 80125, Napoli, Italy.

e-mail modeange@unina.it

Abstract - The qualitative analysis of the initial value problem \mathcal{P} related to a *non linear* third order parabolic equation typical of diffusive models is discussed. Some basic properties of the the fundamental solution of a related linear operator are determined and are applied to an equivalent integro differential formulation of the problem. By the fixed point theorem, existence and uniqueness results are obtained.

Key words: Diffusion models, Partial and integro differential equations, Laplace transform

1 Introduction

Several mathematical models in applied sciences - as Biochemistry, Epidemiology, Population dynamics - deal with higher order parabolic equations typical of diffusive phenomena. The results of experimental analysis show that the diffusion coefficients are generally *small* and this requires too much time in the transmission of signals. As consequence it necessary to correct the diffusive models by means of reaction-diffusion systems. So, one obtains non linear hyperbolic equations perturbed by viscous terms of higher order.

A typical example is given by equations as

$$(1.1) \quad Lu \equiv (\varepsilon \partial_t + c^2) u_{xx} - (\partial_t + a) u_t = F(x, t, u, u_x),$$

which are object of an extensive literature [1]- [5].

When F is linear, numerous contributions are already known [6] - [15]. In particular the fundamental solution K of the operator L has been obtained in [16] where some basic properties has been discussed too.

In this paper, the non linear case of (1.1) will be considered and existence and uniqueness results for the initial value problem \mathcal{P} in all of the space will be obtained.

For this, the equivalence between the problem \mathcal{P} and an integro - differential equation with kernel K is deduced and the fixed point theorem is applied by means of appropriate estimates for K .

This analysis can be also applied to obtain the dependence continuously upon the data, stability properties and boundary - layer estimates. More, the study of other boundary value problems (semi infinite or finite media) with Dirichlet or Neumann conditions could be achieved too.

2 Fundamental solution and its properties

If $D = \{(x, t) : x \in \mathfrak{R}, 0 < t \leq T\}$, let $r = |x|/\varepsilon$, $b = c^2/\varepsilon$. As one can verify, the fundamental solution of the L - operator is simbolically defined by

$$(2.1) \quad \hat{K}(r, s) = \frac{e^{-|x| \sqrt{s(s+a)/(\varepsilon s + c^2)}}}{2 \sqrt{s(s+a)(\varepsilon s + c^2)}}.$$

If one puts

$$(2.2) \quad \hat{G}(r, s) = \frac{e^{-r \sqrt{s(s+a)/(s+b)}}}{2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{(s+a)(s+b)}},$$

obviously one has:

$$(2.3) \quad \hat{K}(r, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{G}(r, s) \Rightarrow K(r, t) = \int_0^t G(r, \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

where $G(r, t)$ is the inverse tranform of $\hat{G}(r, s)$ given by (2.2).

If $I_n(z)$ denotes the modified Bessel function of the first kind, the explicit expression of $G(r, t)$ is given by :

$$(2.4) \quad G(r, t) = \frac{r}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4v}}}{v\sqrt{v}} e^{-b(t-v)} I_0(r\sqrt{(b-a)(t-v)/v}) dv,$$

and the following theorem holds:

Theorem 2.1- For all $r > 0$, the Laplace integral $\mathcal{L}_t G(r, t)$ converges absolutely in the half-plane $\Re s > \max(-a, -b)$, and one has:

$$(2.5) \quad \mathcal{L}_t G(r, t) = \hat{G}(r, s) = \frac{e^{-r\sqrt{s(s+a)/(s+b)}}}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{(s+a)(s+b)}}.$$

■

According to the results established in [16], for the function K the following properties hold :

Theorem 2.2- The function K defined by (2.3), (2.4) is a $C^\infty(D)$ solution of the equation $Lu = 0$. When $a < b = c^2/\varepsilon$, K is never negative in D and more it results:

$$(2.6) \quad 0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(|x - \xi|, t) d\xi = \left(\frac{1}{a}\right) (1 - e^{-at}) \leq 1/a,$$

$$(2.7) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \partial_r K(r, t) = -\frac{e^{-bt}}{2\varepsilon}.$$

■

Moreover, one has:

Corollary 1.2 - By means of the Laplace transforms, it's easy to verify the following formulae:

$$(2.8) \quad \int_{\mathfrak{R}} (\partial_t + a)K(x, t) dx = 1,$$

$$(2.9) \quad \int_{\mathfrak{R}} (\partial_t + b)K(x, t) dx = e^{-at} + b(1 - e^{-at})/a ,$$

$$(2.10) \quad \int_{\mathfrak{R}} (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2)K(x, t) dx = 1 - e^{-bt} .$$

■

3 Initial value problem and explicit solution in the linear case

Let consider now the initial value problem \mathcal{P} in D :

$$(3.1) \quad \begin{cases} Lu \equiv (\varepsilon \partial_t + c^2) u_{xx} - (\partial_t + a)u_t = F(x, t, u, u_x), & (x, t) \in D, \\ u(x, 0) = f_0(x), \quad u_t(x, 0) = f_1(x), & x \in \mathfrak{R}, \end{cases}$$

where the initial data f_0 and f_1 are arbitrary specified functions.

If $g(x)$ is a continuous function on \mathfrak{R} , consider the convolution:

$$(3.2) \quad u_g = \int_{\mathfrak{R}} g(\xi) K(x - \xi, t) d\xi = K * g.$$

Then, owing to the properties of $K(x, t)$, it's possible to prove the following theorem:

Theorem 3.1- *If α, β, γ are three positive constants such that*

$$(3.3) \quad |g(x)| < \alpha e^{\beta|x|^{\gamma+1}} \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

then the function u_g is a $C^\infty(D)$ solution of the equation $Lu = 0$, such that

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} u_g(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t u_g(x, t) = g(x) ,$$

uniformly for all x in a compact subset of $-\infty < x < \infty$. ■

Observe now that the convolution $K * g$ is infinitely differentiable in D and, according to the results of section 2, one has:

$$(3.5) (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2) u_g = e^{-bt} g(x) + \int_{\mathbb{R}} g(\xi) (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2) K(x - \xi, t) d\xi$$

and (2.10) implies:

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2) K(x - \xi, t) d\xi = 0.$$

Consequently, one has :

Theorem 3.2 - *If $g(x)$ verifies the hypotheses of Theorem 3.1, then the function*

$$(3.7) \quad u_g^* = (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2) u_g$$

represents a smooth solution of the equation $Lu = 0$, such that

$$(3.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0} u_g^*(x, t) = g(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t u_g^*(x, t) = 0$$

uniformly for all x in a compact subset of $-\infty < x < \infty$. ■

Remark 3.1 - When $F \equiv 0$, the results of Theorems 3.1 - 3.2 allow to assert that the function

$$(3.9) \quad u(x, t) = u_{f_1} + (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2) u_{f_0}$$

represents a smooth solution of the homogeneous initial - value problem (3.1). ■

Consider now the case that F is not vanishing but it is a *linear known* function $F = f(x, t)$ and let u_f the *volume potential*

$$(3.10) \quad u_f = \int_0^t K * f d\tau = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} f(\xi, \tau) K(x - \xi, t - \tau) d\xi .$$

It's possible to prove the following

Theorem 3.3 - *When the source term $f(x, t)$ is continuous and everywhere bounded function in the set $-\infty < \xi < \infty$, $0 < \tau < T$, then u_f represents a smooth solution of the problem $Lu_f = -f(x, t)$ with vanishing initial conditions.*

Proof - If $\|f\|_T = \sup_D |f(x, t)|$, by (2.6) one has:

$$(3.11) \quad |u_f(x, t)| \leq a^{-1} t \|f\|_T \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} u_f = 0 .$$

Further it results:

$$(3.12) \quad |K * f| \leq a^{-1} [1 - e^{-a(t-\tau)}] \|f\|_T$$

and so

$$(3.13) \quad \lim_{\tau \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow 0} \partial_t u_f = 0$$

More, by means of estimates similar to (3.6), one deduces that:

$$(3.14) \quad \lim_{\tau \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}} f(\xi, \tau) (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2) K(x - \xi, t - \tau) d\xi = 0,$$

and this, together with the properties of K (theorem 2.2), implies $Lu_f = -f(x, t)$.

Further, theorems 3.1 - 3.2 imply that $u_f(x, 0) = 0$, $\partial_t u_f(x, 0) = 0$. ■

At last, by (3.9) and theorem 3.3, it follows:

Theorem 3.4 - *When $F = f(x, t)$ and the data f , f_0 , f_1 verify the hypotheses specified in theorems 3.1 - 3.3, then an explicit smooth solution of the problem (3.1) is given by*

$$(3.15) \quad u(x, t) = -u_f + u_{f_1} + (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}^2) u_{f_0}$$
■

4 Integro differential formulation of the non linear problem

Consider now the non linear case of the problem (3.1), where $F = F(x, t, u, u_x)$ is defined on the set

$$\Omega = \{ (x, t, u, p) : (x, t) \in D, \quad -\infty < u < \infty ; \quad -\infty < p < \infty \},$$

with $D = \{ (x, t) : x \in \mathfrak{R}, \quad 0 < t \leq T \}$.

From now on we shall assume for $F = F(x, t, u(x, t), u_x(x, t))$ the following **Hypotheses H:**

- The function $F(x, t, u, p)$ is defined and continuous on Ω and it's bounded for all u and p .
- For each $k > 0$ and for $|u|, |p| < k$, the function F is Lipschitz continuous in x and t for each compact subset of D .
- There exists a constant β_F such that:

$$|F(x, t, u_1, p_1) - F(x, t, u_2, p_2)| \leq \beta_F \{ |u_1 - u_2| + |p_1 - p_2| \}$$

holds for all $(u_i, p_i) \quad i = 1, 2$.

Let u be a smooth solution of the problem (3.1) and, referring to the function $K(x - \xi, t - \tau) u(\xi, \tau)$, consider the operators $\mathcal{M}(x, t, \xi, \tau)$, $\mathcal{N}(x, t, \xi, \tau)$ defined by:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}(x, t, \xi, \tau) &= \varepsilon K u_{\xi\xi} - K u_{\tau} + u K_{\tau} - a K u \\ \mathcal{N}(x, t, \xi, \tau) &= u (\varepsilon \partial_{\tau} - c^2) K_{\xi} - u_{\xi} (\varepsilon \partial_{\tau} - c^2) K \end{aligned}$$

Further, let \tilde{L} be the adjoint operator of L :

$$(4.2) \quad \tilde{L} K = -\varepsilon K_{\xi\xi\tau} + c^2 K_{\xi\xi} - K_{\tau\tau} + a K_{\tau}$$

in order to have:

$$(4.3) \quad K L u - u \tilde{L} K = K F.$$

As consequence, one has

$$(4.4) \quad \partial_\tau \mathcal{M} + \partial_\xi \mathcal{N} = K F.$$

If u_F denotes the non linear potential volume

$$(4.5) \quad u_F = \int_0^t d\tau \int_{\mathfrak{R}} K(\xi - x, t - \tau) F(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_\xi(\xi, \tau)) d\xi,$$

it suffices to integrate (4.4) on D in order to have

$$(4.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{M}(x, t, \xi, t) - \mathcal{M}(x, t, \xi, 0)] d\xi = u_F$$

where the term with $\partial_\xi \mathcal{N}$ doesn't contribute because $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{N} = 0$.

Let assume that $f_0 \in C^2(\mathfrak{R})$, $f_1 \in C^1(\mathfrak{R})$, and more f_0, f_0', f_0'', f_1 let bounded on \mathfrak{R} . Then, by means of (3.4) - (3.6) and estimates similar to (3.13), (3.14), by (4.6) one obtains the following representation

$$(4.7) \quad u(x, t) = -u_F + \int_{\mathfrak{R}} f_1(\xi) K(\xi - x, t) d\xi + \\ + (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}) \int_{\mathfrak{R}} f_0(\xi) K(\xi - x, t) d\xi$$

Viceversa, suppose that the integral differential equations (4.7) has a solution $u = u(x, t)$ such that u and u_x are continuous and bounded for $x \in \mathfrak{R}$ and $0 < t \leq T$. Then the terms depending on the initial data f_0, f_1 are differentiable for $t > 0$ with bounded derivatives for $t > 0$. The properties of the fundamental solution K and the hypotheses H allow to prove that also the volume potential u_F and its derivatives are Lipschitz continuous. Then the function u characterized by (4.7) verifies the problem (3.1) everywhere in D .

The complete equivalence between the problem \mathcal{P} and the integro differential equation (4.7) confirms the existence and uniqueness of the solution of (3.1) as soon as when this will be demonstrate for (4.7).

5 Existence and uniqueness

Consider now a time - interval $[0, \eta]$, with $\eta < T$. At first we will show that the solution of the integral differential equation (4.7) exists and is unique for $t \in [0, \eta]$ and then we will extend this for any finite T .

For $\eta > 0$, let

$$(5.1) \quad D_\eta = \{(x, t) : x \in \mathfrak{R}, t \in [0, \eta] \}$$

and let \mathcal{B}_η the space

$$(5.2) \quad \mathcal{B}_\eta = \{v(x, t) : v, v_x \in C(D_\eta)\}$$

equipped with the norm

$$(5.3) \quad \|v\|_\eta = \sup_{D_\eta} |v(x, t)| + \sup_{D_\eta} |v_x(x, t)| < \infty.$$

The set \mathcal{B}_η is a Banach space. The arguments discussed previously allow to state that the mapping

$$(5.4) \quad \mathcal{F}v(x, t) = \int_{\mathfrak{R}} f_1(\xi)K(\xi - x, t)d\xi + (\partial_t + a - \varepsilon\partial_{xx}) \int_{\mathfrak{R}} f_0(\xi)K(\xi - x, t)d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi, t - \tau) F(\xi, \tau, v(\xi, \tau), v_\xi(\xi, \tau)) d\xi$$

maps \mathcal{B}_η into \mathcal{B}_η .

Estimate now the continuity of \mathcal{F} . For all $t \in [0, \eta]$, owing to (2.6) and hypotheses H , it results

$$(5.5) \quad |\mathcal{F}v_1(x, t) - \mathcal{F}v_2(x, t)| \leq \beta_F a^{-1} t \|v_1 - v_2\|_\eta \leq \beta_F a^{-1} \eta \|v_1 - v_2\|_\eta.$$

As for the x - derivative, by means of $\hat{K}_r(z, t)$, one can prove that:

$$(5.6) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}v_1(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}v_2(x, t) \right| \leq \beta_F a^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(b-a)}} \eta \|v_1 - v_2\|_\eta.$$

As consequence, by (5.3), (5.5), (5.6) it follows

$$(5.7) \quad \|\mathcal{F}v_1(x, t) - \mathcal{F}v_2(x, t)\|_\eta \leq \beta_F \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(b-a)}} \right) \eta \|v_1 - v_2\|_\eta.$$

If we select η such that

$$(5.8) \quad \beta_F \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(b-a)}} \right) < 1,$$

then \mathcal{F} is a contraction of \mathcal{B}_η into \mathcal{B}_η and so \mathcal{F} has a unique fixed point $u(x, t) \in \mathcal{B}_\eta$.

In order to show the existence and uniqueness of the solution in all $[0, T]$ we proceed by induction.

Let assume that the equation (4.7) admits a unique solution u which is bounded for $0 \leq t \leq k\eta$ together with u_x .

For $k\eta \leq t \leq (k+1)\eta$, let consider the space

$$(5.9) \quad \tilde{\mathcal{B}}_\eta = \{v(x, t) : v(x, t - k\eta) \in \mathcal{B}_\eta\}$$

and the mapping

$$(5.10) \quad \mathcal{F}_1 v(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(\xi) K(\xi - x, t) d\xi + (\partial_t + a - \varepsilon \partial_{xx}) \int_{\mathbb{R}} f_0(\xi) K(\xi - x, t) d\xi + \\ + \int_0^{k\eta} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi, t - \tau) F(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_x(\xi, \tau)) d\xi +$$

$$+ \int_{k\eta}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi, t - \tau) F(\xi, \tau, v(\xi, \tau), v_x(\xi, \tau)) d\xi,$$

which maps $\tilde{\mathcal{B}}_\eta$ into $\tilde{\mathcal{B}}_\eta$. Moreover, also the mapping \mathcal{F}_1 satisfies estimates like (5.7).

As consequence, for all $t \in [0, (k + 1)\eta]$ the mapping \mathcal{F}_1 is a contraction and hence admits an unique fixed point $u \in \tilde{\mathcal{B}}_\eta$.

We remark that, as (5.10) shows, the functions u and u_x are continuous also on the junction $t = K\eta$.

In conclusion, the results in sections 4 and 5 allow to state the following theorem:

Theorem 5.1 - *Let the initial data such that $f_0 \in C^2(\mathfrak{R})$, $f_1 \in C^1(\mathfrak{R})$. Let f_0, f'_0, f''_0, f_1 bounded on \mathfrak{R} . Further, let F verify the hypotheses H . Then, the non linear problem (3.1) admits a unique regular solution in D .*

■

References

- [1] E. Allman, J. Rhodes *Mathematical Models in biology. an Introduction* Cambridge 2004
- [2] J.D. Murray, *Mathematical Biology. II. Spatial models and biomedical applications*, Springer-Verlag, N.Y 2003
- [3] J.D. Murray, *Mathematical Biology. I. An Introduction*, Springer-Verlag, N.Y 2002
- [4] A. Okubo, Levin *Diffusion and Ecological Problems . Modern Perspectives* Springer 2000.
- [5] F. Hoppenstadt, E. Izhikevich *Weakly connected neural networks* Springer 1997
- [6] Ali Nayfeh, *A comparison of perturbation methods for nonlinear hyperbolic waves* in Proc. Adv. Sem. Wisconsin 45, 223-276 (1980).
- [7] P.Renno, *On some viscoelastic models*, Atti Acc. Lincei Rend. 75 (6) 1-10, (1983).
- [8] Morro, A.; Payne, L. E.; Straughan, B. *Decay, growth, continuous dependence and uniqueness results in generalized heat conduction theories*. Appl. Anal. 38 (1990), no. 4.

- [9] A.I. Kozhanov, N. A. Lar'kin, *Wave equation with nonlinear dissipation in non-cylindrical Domains*, Dokl. Math 62, 2,17-19 (2000)
- [10] V.P. Maslov, P. P. Mosolov, *Non linear wave equations perturbed by viscous terms* Walter deGruyher Berlin N. Y. 329 (2000).
- [11] Y.Shibata *On the Rate of Decay of Solutions to linear viscoelastic Equation*, Math.Meth.Appl.Sci.,23 203-226 (2000)
- [12] M.M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, *Existence and uniform decay for a non linear viscoelastic equation with strong damping*, Math. Meth. Appl.Sci (2001) 24 1043-1053
- [13] A. D'Anna , M. De Angelis, G. Fiore, *Towards solitons solution of a perturbed sine -Gordon equation* Rend. Acc. Sc Fis Mat Napoli, vol LXXII (2005) 95-110
- [14] M. De Angelis, G. Fiore, P. Renno ,*Non linear problems in dissipative models* Rend. Acc. Sc Fis Mat Napoli, vol LXXII (2005) 81-94
- [15] M. De Angelis, G. Fiore, E. Mazziotti, *Fenomeni di propagazione e diffusione in superconduttività* presentato al 101 Convegno Nazionale AEIT 2006 - in corso di stampa
- [16] M. De Angelis, E. Mazziotti, *Non linear travelling waves with diffusion* Rend. Acc. Sc Fis Mat Napoli, vol LXXIII (2006) pp 23-36

Meccanica applicata alle macchine e Meccanica razionale: una testimonianza

Lelio Della Pietra*

1 Premessa

Questo mio intervento vuole essere una testimonianza sull'origine lontana degli stretti rapporti che, nella formazione degli ingegneri, ci sono stati fra la Meccanica Razionale e la Meccanica applicata alle Macchine, e vuole anche rappresentare una giustificazione *a posteriori* della scelta, fatta dal CdL di Ingegneria Meccanica dell'Università di Napoli Federico II, di mantenere ancora (per quanto possibile) quegli stessi rapporti fra i due insegnamenti, anche dopo l'introduzione della laurea triennale. E' infatti sotto gli occhi di tutti coloro che praticano l'Università che l'introduzione delle nuove lauree triennali ha portato, nelle diverse Facoltà, a grandi cambiamenti, che hanno riguardato non solo l'organizzazione degli studi ma l'ampiezza e la qualità degli insegnamenti, nonché i rapporti fra essi. L'esperienza da me vissuta mi fa dire che in alcuni casi i cambiamenti sono stati operati più che in base a fatti oggettivi, o a convincimenti condivisi, in base a convenienze di tipo personale, anche laddove l'esistenza di insegnamenti di lunga tradizione avrebbe suggerito una certa cautela.

Prima però di esporre le notizie da me raccolte, desidero esprimere il mio ringraziamento ai colleghi della (ex) Meccanica Razionale che insegnano ad Ingegneria della Federico II da moltissimi anni, per l'amicizia che mi hanno mostrato invitandomi a questo incontro; in particolare al prof. Pasquale Renno, la cui conoscenza risale ai primi anni '80 del Novecento.

La mia attività di ricerca, per gran parte dedicata allo studio delle vibrazioni meccaniche (argomento tipico nell'insegnamento della M.A.M. dalla seconda metà del Novecento), è stata quasi esclusivamente di tipo sperimentale, nel senso che, nei problemi affrontati, l'aspetto sperimentale era quello prevalente. Senza la base teorica, però, le esperienze non avrebbero avuto portato ad alcun risultato; questa base teorica era costituita fondamentalmente dalla Meccanica Razionale. Ma non è dell'attività scientifica che intendo parlare, bensì, come dicevo in precedenza, dei rapporti fra gli

*Dipartimento di Ingegneria Meccanica per L'Energetica, Università di Napoli "Federico II", Via Claudio 21, 80125 Napoli. E-mail: lelio.dellapietra@unina.it

insegnamenti della Meccanica Razionale e della Meccanica applicata alle Macchine, cominciando da aspetti di carattere personale.

Nel novembre del 1981, a seguito della prematura morte del prof. Mario Taddei, il prof. Angelo R. Guido (allora ordinario di Teoria e Tecnica delle Vibrazioni), col quale collaboravo sia nella ricerca che nella didattica, cominciò ad insegnare la Meccanica applicata alle Macchine. E' a partire da quel periodo che risalgono i miei ricordi di contatti e scambi di idee del prof. Guido (e di conseguenza miei) col prof. Renno (titolare dell'insegnamento di Meccanica razionale per gli allievi di Ingegneria meccanica), che avevano lo scopo di portare nei due insegnamenti integrazioni o modifiche utili al miglioramento della didattica; contatti e scambi di idee che sono stati presupposto e conseguenza di reciproca stima ed amicizia.

2 Introduzione

L'insegnamento che ho svolto (dal 1986 come titolare) e che in parte continuo a svolgere, in Italia, nel Novecento, a mia memoria, aveva due denominazioni: *Meccanica applicata alle Macchine* (la più frequente) e *Meccanica delle Macchine*; la prima è la traduzione letterale della *Mécanique appliquée aux machines* della Scuola francese degli inizi dell'Ottocento; la seconda o è originale, oppure deriva dalla Scuola inglese: i testi inglesi del novecento che trattano gli stessi argomenti hanno per titolo "*Mechanics of Machines*." Invece, nella Scuola tedesca, che dalla seconda metà dell'Ottocento pur aveva un importante posto nello studio delle macchine (basti pensare a Franz Reuleaux¹, fondatore della teoria delle macchine e dei meccanismi²), non appaiono, per quanto mi risulta, insegnamenti e quindi testi con denominazione e contenuti corrispondenti alla M.A.M. italiana, francese o inglese.

Ho richiamato le due diverse denominazioni perché ad esse possono corrispondere modi di vedere ed, eventualmente, anche contenuti differenti: la prima fa pensare che nel problema meccanico si guarda più dal punto di vista della Meccanica Razionale, o anche della Fisica, e le macchine sono prese in considerazione solo in quanto esempi, ovvero come una delle possibilità di applicazione; la seconda appare invece voler considerare come oggetto principale dello studio le macchine in quanto tali, e quindi esaminare i problemi

¹Franz Reuleaux (1829-1905) - Nato in Germania, ad Eschweiler (un sobborgo di Aachen) ai confini col Belgio. Segui sia gli studi tecnici che quelli filosofici, di scienze naturali e di logica. A 27 anni fu chiamato come professore di ingegneria meccanica all'Istituto federale svizzero di Zurigo, e nel 1864 a Berlino per sviluppare un programma di ingegneria meccanica presso la Reale Accademia Industriale, della quale fu Direttore dal 1868 al 1879. Questa Accademia divenne poi la Reale Scuola Superiore Tecnica di Berlino.

²Vedi ad es. Francis C. Moon, "Franz Reuleaux: Contributions to 19th Century Kinematics and Theory of Machines", Appl. Mech Rev vol 56, no.2, March 2003; T. Koetsier, *Mechanism and machine science: its history and identity* - International Symposium on History of Machines and Mechanisms - Proceedings HMM2000

che si presentano nel loro funzionamento con gli strumenti che forniscono la Meccanica Razionale e la Fisica. I testi a me noti, sia antichi che contemporanei, svolgono gli argomenti prendendo per oggetto la macchina ed il suo funzionamento, tuttavia, almeno tra i manuali universitari italiani, un esempio del primo modo di intendere la Meccanica applicata alle Macchine lo si riscontra nel relativamente recente libro dei proff. Carlo Ferrari ed Ario Romiti: *Meccanica Applicata alle Macchine* - UTET, 1966³.

In ogni caso, indipendentemente da quale dei punti di vista prevalga, è indubbio che alla base dello studio cinematico e dinamico delle macchine c'è fondamentalmente la Meccanica Razionale.

3 La Meccanica razionale

Se prescindiamo dall'esatta denominazione dell'insegnamento, possiamo dire che la Meccanica razionale, nella formazione degli ingegneri, esisteva già agli inizi dell'Ottocento sia in Francia che in Italia. Nella Prefazione del *Traité élémentaire des Machines*, edito nel 1811, J.N.P. Hachette⁴ scrive: "*Quant a la Mécanique rationelle, le traité le plus complet et le plus méthodique sur cette science, est actuellement entre les mains des élèves de l'École Polytechnique. Cet ouvrage, digne de la réputation de son auteur, M. Poisson, fait époque comme monument des progrès de l'enseignement des sciences mathématiques*". Il libro del Poisson⁵, il cui contenuto nella citazione di Hachette è indicato come Meccanica razionale, è anch'esso del 1811 ed è intitolato semplicemente: "*Traité de mécanique*".

Prima del Poisson, all'École Polytechnique, la Meccanica è insegnata da Louis B. Francœur⁶, che nel 1800 pubblica il *Traité de mécanique*

³Vedi L. Della Pietra: *La Meccanica Applicata alle Macchine*, a Napoli - Atti del I Convegno nazionale italiano di Storia dell'Ingegneria, Napoli, 8-9 marzo 2006.

⁴Jean Nicolas Pierre Hachette (Mézières 1769 - Parigi 1834) nel 1792 vinse la cattedra di idrografia a Collioure e Port Vendres; nel 1793 fu assunto all'École Royale du Génie di Mézières come insegnante di matematica. Ebbe un ruolo attivo nel costituire l'École Polytechnique usando la sua esperienza a Mézière. Egli fu nominato professore assistente per la geometria descrittiva nel novembre del 1794 e nel 1799 fu promosso professore titolare. La Scuola cominciò ad operare dal giugno 1795. Hachette lavorò nel campo della geometria descrittiva, collezionò i lavori di Monge e ne curò la *Géométrie descriptive* che fu pubblicata nel 1799. Egli pubblicò anche su un'ampia gamma di argomenti tratti dai suoi lavori nella geometria, nella meccanica applicata, nella teoria delle macchine, pubblicando anche un interessante lavoro sulla storia della macchina a vapore.

⁵E' molto probabile che Hachette si riferisca proprio al testo di Poisson pubblicato nel 1811, piuttosto che ad un precedente libro di lezioni dello stesso Poisson, del 1809, tenute all'École Polytechnique e presente nel catalogo dei testi universitari della Biblioteca dell'École; quest'ultimo libro ha il titolo: "*Cours de mécanique de la première division, comprenant la suite de la dynamique, l'hydrostatique*".

⁶Louis Benjamin Francœur (1773-1849) fece sia una carriera militare, che accademica. Entrò a far parte dell'École Polytechnique in 1794, nel 1802 fu fatto teoricamente luogotenente di artiglieria e nel 1804 divenne professore di matematica all'École Polytechnique, poi nel 1805 al Lycée Charlemagne. Nel 1808 fu fatto professore di matematica alla Faculté

élémentaire, à l'usage des élèves de l'École polytechnique. Come si legge nella 4a edizione del 1807⁷, l'opera è “[...] quella che il governo ha adottato per l'insegnamento nei licei imperiali e che i celebri professori dell'École Impériale Polytechnique hanno posto fra i libri classici il cui studio è imposto agli alunni di questa scuola”.

Per Francoeur, la meccanica è la “*scienza dell'equilibrio e del movimento*”; il suo trattato è diviso in quattro parti, due di “*meccanica propria: la statica e la dinamica*” e due di idraulica: “*l'idrostatica e l'idrodinamica*”. I primi due “libri” di statica e di dinamica occupano i 4/5 circa del volume, i due di idrostatica ed idrodinamica il rimanente quinto. Gli argomenti dei primi due libri (v.App.1) mostrano un contenuto (tenendo ovviamente conto della diversità delle epoche) corrispondente a quello di libri “classici” recenti di Meccanica razionale, nei quali lo spazio dedicato alla “*meccanica propria*” è ancora più ampio rispetto a quello dedicato all'idraulica⁸.

Nella Scuola di Ponti e Strade, istituita a Napoli nel 1811 da Gioacchino Murat, il trattato del Francoeur entra a far parte dei libri di testo nella formazione degli ingegneri. In data 17 ottobre 1812⁹ il Direttore della Scuola di Ponti e Strade, Pietro Colletta, scrive le “*Istruzioni dirette all'esecuzione del R. decreto del 4 marzo 1811 e del regolamento a quello annesso, relativi alla Scuola di Applicazione del R. Corpo dei Ponti e Strade*”, nelle quali tra l'altro si legge: *L'Ingegnere in Capo Sig. Ruggiero proseguirà il Corso di Meccanica Applicata. Egli darà l'istituzione di Francoeur.* Nel detto Regolamento, al Titolo II leggiamo: *Art.3) Il Professore di Meccanica Applicata prenderà per scopo delle sue lezioni del corrente anno la Dinamica e la Statica. Egli imprenderà a spiegare l'istituzione di Francoeur. F.to Colletta.* A conferma, con lettera del 13 ottobre 1812, Borel e Richard, librai di Sua Maestà il Re delle Due Sicilie, comunicano al Direttore Colletta che invieranno la *Mécanique* di Francoeur.

Trattandosi di una scuola di applicazione, il solo trattato del Francoeur, anche se con alcune parti di carattere applicativo (come si può verificare nell'appendice), non è però ritenuto sufficiente, essendo tale trattato essenzialmente Meccanica razionale, e quindi nel programma del corso di Meccanica Applicata della suddetta Scuola, per l'anno 1812, troviamo scritto: “*Per questo primo anno, non avendosi ancora un trattato di Meccanica applicata*

des Sciences, un posto che tenne in aggiunta agli altri fino al 1845. Dopo l'apparizione di una cometa, nel 1811, che destò un grande interesse pubblico, Francoeur si dedicò all'astronomia. Entrò anche nella Società che promuoveva l'insegnamento elementare nelle scuole e per la sua parte si dedicò alla scrittura di libri. Francoeur è noto come scrittore di testi di meccanica. Nel 1845, a causa di una malattia, lasciò la sua cattedra nella Facoltà di Scienze (Da Indexes of biographies, sito internet)

⁷Biblioteca Nazionale di Napoli

⁸Vedi ad es. T. Levi-Civita e U. Amaldi: *Compendio di Meccanica Razionale*, ristampa 1986 della 2a ed. 1938 ; B. Finzi: *Meccanica Razionale*, 3a ed. 1987

⁹Archivio di Stato di Napoli - Documenti relativi alla Scuola di Ponti e Strade: Busta 136

che convenga ad una scuola di servizio pubblico, ed a tutte le altre circostanze che debbono determinarne il metodo ed i limiti, servirà come di nocciolo, quello elementare del Francoeur compilato ad uso dei licei e della scuola Politecnica di Parigi. Questo libro elementare, mentre riunisce alla brevità e sublimità di metodi tutta la chiarezza che può aversi in un'opera di questa natura, non presenta un'istituzione completa per gli allievi di una scuola di travagli pubblici. Sarà perciò supplito a tutt'occiò che manca, ricavandolo dalle opere nelle quali è stato approfondito particolarmente ciascuno degli articoli da aggiungersi. Le opere che particolarmente serviranno a somministrare questi materiali rispettivamente saranno: 1) Per le applicazioni alle macchine l'architettura idraulica di Belidoro, la nuova architettura idraulica di Prones, l'opera su i Mulini di Fabre, le lezioni sulle macchine della Scuola politecnica di Parigi & C. Per questa parte saranno passati dal professore di Meccanica de' cartolari a quello di architettura e disegno che serviranno ad esercitare gli allievi nel disegno delle macchine.

E' interessante osservare che fra i libri di studio c'è anche la Meccanica di Poisson.; sempre nei documenti dell'Archivio di Stato di Napoli si legge infatti che, in data 28 novembre 1812, il Ministro dell'Interno scrive al Sig. Direttore Generale di P. e S. “Signore, uniformemente alla proposta fattami con i suoi rapporti de' 17 e 19 dell'andante, trovo regolare l'acquisto per uso di codesta Scuola d'Applicazione dell'opera di Poisson: *Mécanique*. “

In Italia, prima che venisse istituito un corso universitario con la denominazione *Meccanica Razionale*, troviamo riportata tale denominazione nel libro di G. Venturoli¹⁰ *Elementi di Meccanica e di Idraulica* (v. App. 2) , quanto meno nella sua terza edizione in due volumi (Milano 1817); si legge nella prefazione: “La Meccanica, per ciò che riguarda il modo di trattarla, può comodamente dividersi così che altra sia la Meccanica Speculativa o Razionale, altra la Meccanica Istrumentale o Pratica. La qual divisione, essendo piaciuta all'incomparabile Neuton, non temerò che possa essere da altri disapprovata”. Infine vi si aggiunge: “La Meccanica considerata sotto

¹⁰Giuseppe Venturoli: Bologna 1768 - 1846. A 23 anni fu nominato aggregato all'Accademia delle Scienze di Bologna. Nel 1795 gli venne assegnata la “lettura onoraria” di Matematiche nell'Università di Bologna, tre anni dopo quella “stipendiaria”. Nel 1791 divenne segretario aggiunto dell'Accademia e nel 1797 professore sostituto di Storia naturale. Nel 1802 gli fu assegnata la cattedra di Matematiche applicate nella rinnovata Università di Bologna. Infine fu chiamato a Roma da Papa Pio VII, che il 23 ottobre 1817 lo nominò Presidente del Consiglio idraulico e Direttore della Scuola degli Ingegneri; qui rimase fino alla morte. L'opera più celebre di Venturoli è il trattato *Elementi di meccanica e d'idraulica*, di cui furono pubblicate in vita tre edizioni (1806-1807, 1809, 1817). Su consiglio di C. Babbage e J. F. Herschel ne fu curata una traduzione inglese, apparsa nel 1822 e nel 1823. Fu membro delle Accademie delle Scienze di Bologna, di Torino, di Napoli, dei Lincei, dell'Istituto Lombardo, dei XL. Vedi “www.dm.unito.it/sism/m_italiani/biografie/altri/venturoli”. Una sua biografia tecnica è presentata nel *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 102, No. 10, October 1976, pp. 1533-1540.

questo aspetto appartiene alla Matematica pura, e non ha men salde basi, né meno chiara evidenza di quella che abbiassi la Geometria stessa”.

Più tardi, nella premessa alla traduzione del libro di Louis-Marie-Henry Navier - *Riassunto delle lezioni date alla scuola di Ponti e Strade su l'Applicazione della Meccanica allo stabilimento delle costruzioni e delle macchine; tradotta sulla seconda edizione, corredata di note ed aggiunte e di un'appendice sui ponti sospesi*, da C. D'Andrea - edita a Napoli nel 1836, Carlo D'Andrea¹¹, per sottolineare l'importanza dell'opera di Navier dal punto di vista applicativo scrive: “La scienza dunque della resistenza de' solidi fece pochi passi, ed alla fine del passato secolo era ancora bambina. La Meccanica Razionale considerando ne' corpi la impenetrabilità e l'inerzia, o per dir meglio riguardando i corpi o perfettamente rigidi e incompressibili o perfettamente flessibili e inestensibili, non somministra i mezzi di determinare le dimensioni delle spranghe o de' fili che legano i diversi punti di un sistema, e in molti casi lascia indeterminate le tensioni sostenute da questi corpi o le pressioni esercitate su' punti fissi.”

Del 1843 è invece il testo di F. O. Mossotti¹² *Lezioni elementari di Fisica matematica date nell'Università di Corfu nell'anno scolastico 1840-41* (vedi App. 3), i cui primi due capitoli del Tomo primo sono intitolati “Principi di meccanica razionale o teoria del movimento”.

Passando ai testi che riportano l'esatta denominazione “Meccanica razionale”, non sembra che ne siano stati pubblicati prima degli anni 50 dell'Ottocento; questo è almeno quanto a me risulta da una ricerca nei cataloghi “in rete” di molte biblioteche universitarie, tra le quali quella dell'École Polytechnique. I più antichi da me trovati sono i seguenti:

1855 Jullien P.P.M., *Problèmes de mécanique rationnelle disposés pour servir d'application aux principes enseignés*;

1855 A. Timmermans, *Traité de mécanique rationnelle* – Bruxelles Gand Gand;

1856 Delaunay, Charles E., *Traité de mécanique rationnelle*;

1857 M. Zannotti - *Elementi di Meccanica Razionale*;

1859 Beynac, Fortune Aime, *Cours de mécanique rationnelle : a l'usage*

¹¹Carlo d'Andrea, ingegnere del Corpo di Acque e Strade, professore nella Scuola di Applicazione di Acque e Strade dello stesso Corpo, e professore di Algebra superiore nel R. Collegio Militare

¹²Fabrizio Ottaviano Mossotti (Novara 1791 - Pisa 1863) - Nel 1835 era stato nominato direttore dell'Osservatorio astronomico di Bologna, ma l'Austria ottenne dal Papa l'annullamento della nomina (con un indennizzo). Nel 1839 andò ad insegnare Matematica superiore e Fisica matematica a Corfù. Finalmente nel 1841 fu nominato professore di Meccanica Celeste e Fisica Matematica all'Università di Pisa, ove restò sino alla morte. Nel 1848 comandò, come Maggiore, il battaglione universitario toscano che combatté a Curtatone e Montanara. (Per una biografia e una bibliografia su Mossotti, vedi ad esempio “<http://liberti.dhs.org/liberti/maths-history/mossotti/mossotti.html>”; voce “Mossotti” su “<http://biblio.adm.unipi.it/>”)

des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé conformément au programme d'admission a ces écoles; Paris : J. Delalain.

Per quanto riguarda l'insegnamento della Meccanica razionale, nella Storia dell'Università di Napoli scritta da Francesco Torraca ed altri, pubblicata nel 1924¹³, è detto (a pag.495) che una cattedra avente questa precisa denominazione, oltre ad una di Meccanica applicata, è istituita nella Facoltà di Scienze Matematiche con l'ultima riforma del periodo borbonico approvata il 6 marzo 1850. La cattedra, che nel 1823 aveva il nome di "Fisica Matematica", è affidata, nel dicembre del 1850, a Michele Zannotti¹⁴ noto per un Trattato di Fisica pubblicato nel 1841.

Nello stesso anno 1850, la Meccanica Razionale era insegnata anche a Torino, come si deduce dal *Programma del corso di meccanica razionale e macchine nella R. Università di Torino per l'anno scolastico 1850-1851*¹⁵, redatto da C. Ignazio Giulio¹⁶. Nel *Programma*, sinteticamente riportato in App.4, si legge che delle 140 lezioni (poche, secondo quanto scrive nell'Avvertenza il Giulio) solo 35 erano riservate alle macchine.

¹³Istituto Italiano per gli Studi Storici - Ristampe anastatiche : Storia dell'Università di Napoli scritta da Francesco Torraca, Gennaro Maria Monti, Riccardo Filangieri di Candida, Nino Cortese, Michelangelo Schipa, Alfredo Zazo, Luigi Russo - Società Editrice il Mulino MCMXLIII

¹⁴Il giudizio espresso da Tricomi su Zannotti (Foggia 1803 - Napoli 1874), nel 1962, non è propriamente lusinghiero (vedi "www.dm.unito.it/sism/m_italiani/biografie/tricomi/zannotti")

¹⁵Il corso avrebbe dovuto avere inizio nel 1847. Si legge nell'AVVERTENZA che precede il programma vero e proprio: Prima del R. Biglietto del 4 di ottobre 1847 l'insegnamento del professore di Meccanica nella R. Università di Torino abbracciava, oltre alla Meccanica Razionale, ed ai primi lineamenti della Scienza delle Macchine, anche la Statica Architettonica, ossia il trattato della Stabilità delle fabbriche L'articolo 18 del citato R. Biglietto avendo affidato al Professore di costruzioni l'insegnamento della Statica Architettonica e mantenuto quello della Scienza delle Macchine nel corso del Professore di Meccanica, questo si apparecchiava fin d'allora a dare una maggiore ampiezza a questa parte del suo insegnamento. Le vicende politiche impedirono che avesse effetto negli anni scolastici 1847-48 e 1848-49 questo suo divisamento... L'anno scolastico 1850-51 sarà dunque il primo in cui il Professore di Meccanica avrà campo di procurare l'adempimento di quanto prescrive il R. Biglietto del 4 ottobre 1847.

¹⁶Carlo Ignazio Giulio (Torino 1803 - 1859) si laurea nel 1823 in Matematica ed Idraulica teorica e sperimentale nell'Università torinese, dove diventa presto dottore aggregato al Collegio di Matematica e docente di Meccanica razionale. È ricordato soprattutto per il suo apporto al progresso economico e sociale del Piemonte e per l'impegno profuso nell'intensificare l'istruzione tecnico-professionale. Attento all'aspetto applicativo e sperimentale, nei suoi lavori Giulio si occupa di idraulica, di fisica e di meccanica. Per le sue capacità pratiche e per le sue doti diplomatiche e di economista Giulio fu insignito di numerose cariche: membro della Commissione di Statistica (1840), preside di Facoltà, rettore dell'Università (1844), relatore centrale nell'Esposizione industriale di Torino (1844), membro della Camera di Commercio, della Commissione dei pesi e delle misure (1845) e del Consiglio superiore del Ministero della pubblica istruzione, senatore del Regno, commissario all'Esposizione Universale di Parigi (1855) e consigliere di Stato (1856). Fu pure socio di numerose Accademie e Società (Dalla biografia a cura di C.S. Roero, "www.torinoscienza.it/personaggi/")

Ancora prima, F. O. Mossotti intitola: *Lezioni di Meccanica Razionale* la “Prolusione detta all’apertura del Corso di Fisica Matematica e Meccanica Celeste nell’Università di Pisa: 15 Novembre 1841”.

Dalla lettura del Regolamento della Scuola di Applicazione di Ponti e Strade del 1853, quindi nello stesso periodo della riforma del 1850, ricaviamo che anche in detta Scuola c’era una cattedra di Meccanica Razionale, oltre ad una di Meccanica Applicata; la prima era tenuta dal Prof. Annibale Corrado, la seconda dal Prof. Carlo d’Andrea, che successivamente fu anche professore di Meccanica Razionale nella Facoltà di Scienze.

4 La Meccanica applicata

Prima della istituzione della Meccanica razionale e della Meccanica applicata alle Macchine, in Italia, viene insegnata la Meccanica e/o la Meccanica Applicata; dove non c’erano le Scuole specificamente dirette alla formazione degli ingegneri, la si insegna nelle Università. Ma anche laddove era stata istituita una Scuola di Applicazione per Ingegneri, la Meccanica poteva essere quella insegnata all’Università, anche se con opportune integrazioni.

Nel foglio 144 dei documenti relativi alla Scuola di Ponti e Strade dell’Archivio di Stato di Napoli, nella lettera del Ministro dell’Interno al Sig. Direttore Generale di P. e S. (Pietro Colletta), datata 29 febbraio 1812, si legge: *Signore, il Sig. Luigi de Ruggiero professore di Meccanica in codesta Scuola di Applicazione, mi ha esposto che la lezione giornaliera della scienza medesima che è tenuta a dare nella Università degli Studi, e le occupazioni del Ministero, lo mettevano nella impossibilità di continuare l’istruzione degli alunni di Ponti e Strade e mi ha proposto per conciliare l’uno e l’altro servizio di disporre che i nominati alunni assistano alla sua lezione dell’Università serbandosi di esercitarli separatamente nelle applicazioni di arte che non sono comuni colle lezioni della Università medesima.*

Almeno nei primi decenni dell’Ottocento, la Meccanica applicata era fondamentalmente, o in buona parte, *Meccanica Razionale*, soprattutto nelle Università, in quanto nelle Scuole di applicazione per ingegneri, come si è visto, si impartivano nozioni integrative sulle macchine.

All’Università di Bologna, il professore di Matematica Applicata Giuseppe Venturoli, nella terza edizione (1817) del suo libro in due volumi: *Elementi di Meccanica e di Idraulica*, nel rivolgersi “*Agli studiosi*”, scrive di voler fornire “*un compiuto trattato di Meccanica teorica e formare ed istruire così il giovane allievo, onde potesse poi da sé stesso, e senz’altra introduzione, passare alla lettura delle sublimi Meccaniche di Lagrange e di Laplace, e così poggiare alle più alte cime della scienza*”. Venturoli scrive ancora: “*Riordinandosi la parte teorica si è voluto del pari avvantaggiare la parte pratica con l’aggiunta di molti insegnamenti utili agli Ingegneri, particolarmente nel trattato delle macchine*”. Gli argomenti di meccanica (v. App.2)

che egli espone nel primo dei due volumi, suddivisi in “*libri*”, sono tipici della Meccanica Razionale, in particolare quelli dei primi due “*libri*”.

Nella Scuola di Ponti e Strade di Napoli, abbiamo già richiamato come venisse indicato il testo *Mecanique* di Francoeur, al quale bisognava però aggiungere altri argomenti riguardanti le macchine; ma c’era anche la “*Mecchanica*” di Poisson, almeno come testo di consultazione. Diamo uno sguardo alle opere di questi due autori francesi:

Il trattato di Francoeur si divide in quattro Libri: *La Statica e la Dinamica*, che costituiscono la meccanica propria, ed hanno per oggetto l’equilibrio ed il movimento dei corpi solidi, e l’Idrostatica e l’Idrodinamica, che hanno per oggetto il movimento dei corpi fluidi. I primi due libri si estendono per circa 400 pagine, il terzo ed il quarto per circa 100 pagine. Gli argomenti dei primi due capitoli della statica e tutti quelli della dinamica sono tipici della Meccanica Razionale, il terzo ed il quarto della statica sono più vicini alla Meccanica applicata alle Macchine.

Il testo di Poisson¹⁷ “*Traité de mécanique*” (v. App.5), molto più ampio di quello del Francoeur, è invece completamente Fisica Matematica; era stato pubblicato nel 1811 in due volumi. La seconda edizione, del 1833, è suddivisa in sei libri, nell’ordine: Statica, Dinamica, Statica, Dinamica, Idrostatica, Idrodinamica; nel complesso, la parte preponderante riguarda argomenti di dinamica. Nelle “*Avvertenze*” di questa edizione si legge: “*Poiché quest’opera può servire all’insegnamento, sono dovuto entrare spesso in dettagli minuziosi e seguire, nell’esposizione della materia, l’ordine migliore per facilitarne la comprensione. L’ordine che ho adottato è quello che si segue ora nei corsi di Meccanica dell’Ecole Polytechnique.*” Nell’introduzione il Poisson scrive che la destinazione principale del testo “*è di servire d’introduzione ad un trattato di Fisica Matematica*”.

¹⁷Siméon-Denis Poisson (1781 - 1840). Matematico, fisico ed astronomo. Di origini modeste, incoraggiato dai suoi insegnanti superò l’esame di ingresso nell’*École Polytechnique*, dove nel 1798 iniziò gli studi di matematica. Laplace e Lagrange ne notarono subito il talento e gli diedero un forte sostegno in diversi modi. Per la qualità di un suo lavoro sulla teoria delle equazioni e sul teorema di Bézout gli fu consentito di laurearsi nel 1800 senza sostenere l’esame finale. Dopo un periodo come ripetitore, nel 1802 divenne docente di questa scuola e nel 1806 succedette a Fourier. Nel 1816 ottiene una cattedra di meccanica alla Sorbona e viene eletto all’Accademia delle Scienze di Parigi. Ha esteso la teoria della meccanica utilizzando la meccanica analitica. Ha inoltre applicato la matematica all’elettricità e al magnetismo, formulando l’estensione dell’equazione di Laplace, la ora ben nota equazione di Poisson. Altre sue importanti osservazioni riguardano la costanza del potenziale elettrico sulla superficie di un conduttore; ha formulato la teoria sulla corrente superficiale e sul volume di magnetizzazione. Ha anche contribuito allo sviluppo della statistica con la distribuzione di Poisson, introdotta come distribuzione limite della distribuzione di Pascal e della distribuzione binomiale. Il nome di Poisson è legato ad una grande varietà di idee, quali l’integrale di Poisson, l’equazione di Poisson nella teoria del potenziale, il modulo di Poisson nella teoria dell’elasticità, la costante di Poisson in elettricità. Più che dei matematici francesi, Poisson ebbe la stima da parte di quelli stranieri, che seppero riconoscere l’importanza delle sue idee. (Sintesi da Wikipedia e Indexes of Biographies)

5 La Meccanica applicata alle macchine

Certamente la Meccanica applicata alle macchine, come insegnamento specifico, esisteva in Francia già nell'anno 1825-26; è quanto si deduce dal titolo del libro di Jean Victor Poncelet (1788-1867), pubblicato in seconda edizione nel 1828: *Cours de mécanique appliquée aux machines, professé en 1825 et 1826 à l'école royale de l'Artillerie e du Génie*.

Poncelet¹⁸, uno dei fondatori della moderna geometria proiettiva, dal 1815 al 1825 fu ingegnere militare a Metz (Francia); nel 1824 fu incaricato dal Ministro della Guerra di creare un corso sulla scienza delle macchine, presso la scuola di Applicazione di Metz. Fu professore di Meccanica applicata alle macchine, sempre a Metz, dal 1825 al 1835 e, secondo una delle biografie, fu il primo a proporre l'uso della matematica nella progettazione delle macchine; come ingegnere, Poncelet applicò la meccanica per migliorare il rendimento delle turbine e delle ruote idrauliche. Nella nostra biblioteca di Facoltà c'è un'edizione del 1874 del suo libro, che è una riproduzione a stampa di quella litografata del 1836, con qualche cambiamento di dettaglio (come viene affermato nell'introduzione). Gli argomenti ivi esposti (qui riportati nell'appendice 4 come traduzione dell'indice) sono tipici della Meccanica applicata alle macchine (M.A.M) impartita anche attualmente nelle nostre Facoltà di Ingegneria, e non è difficile riconoscere che li ritroviamo ancora oggi, praticamente tutti, nei testi di M.A.M., testi disponibili nelle biblioteche di Ingegneria. E' interessante osservare che nel testo di Poncelet mancano argomenti di idraulica che invece, nell'insegnamento che verrà impartito in Italia, troviamo aggiunti ancora verso la fine dell'Ottocento.

Si è detto in precedenza che prima che in Italia la Meccanica applicata alle macchine venisse introdotta come insegnamento specifico, così come si era fatto in Francia, le nozioni sulle macchine erano impartite nell'ambito dei corsi di Meccanica o di Meccanica applicata; ma tali nozioni erano certamente molto limitate rispetto a quanto veniva svolto in Francia nei corsi specifici.

Un esempio di corso nel quale, nello studio delle macchine, appare un tentativo di andare al di là di semplici applicazioni di meccanica razionale, è quello già citato di *Meccanica razionale e Macchine nella R. Università di Torino per l'anno scolastico 1850-1851*, tenuto da C. Ignazio Giulio. Infatti il "Programma" del corso (v. App.4) prevede una specifica sezione dedicata alle macchine, indicando così una precisa attenzione allo studio delle macchine in quanto tali; per quanto riguarda i contenuti, anche se non si ha a disposizione il testo delle lezioni e ci si deve limitare ai soli titoli degli argomenti, è possibile dire che alcuni sono tipici della Meccanica applicata alle macchine.

¹⁸Vedi vedi in internet le voci: École Polytechnique - Bibliothèque Centrale ; Biographies Index

Soltanto col R.D. del 17 ott. 1860, in Italia, l'insegnamento della M.A.M. fu introdotto nella formazione degli ingegneri, e precisamente nella *Scuola di applicazione per gli Ingegneri in Torino*; era materia obbligatoria al primo dei due anni del ciclo di studi, insieme all'Idraulica pratica. A Napoli invece, la M.A.M. fu introdotta nel 1863, dopo l'abolizione della Scuola speciale per gli Ingegneri di Ponti e Strade (o anche di Acque e Strade) e la creazione della nuova Scuola di Applicazione per gli Ingegneri. Infine, col R. Decreto del 3 settembre 1865 fu disposto che per essere ammessi alle Scuole di Ingegneria gli studenti dovevano aver compiuto gli studi del primo biennio della Facoltà di Matematica ed avere conseguito il diploma in Scienze Fisiche e Matematiche.

Concludo queste note storiche osservando che gli insegnamenti della Meccanica Applicata alle Macchine e della Meccanica Razionale, che avevano certamente molto maggiori differenze fra loro che non la Meccanica applicata e la Meccanica, potevano essere svolti dalla stessa persona. Ad esempio, Fortunato Padula, già docente di Idrometria pratica (dal 1853) presso la vecchia Scuola di Applicazione per gli Ingegneri, e Direttore della stessa dal 1860, tenne l'insegnamento della Meccanica Applicata alle Macchine dal 1863 al 1881. Lo stesso Fortunato Padula, certamente nell'anno 1862-63, risulta professore ordinario di Meccanica Razionale nella Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, nonché incaricato di Meccanica Applicata nella stessa Facoltà.

6 La situazione odierna

La riforma del 1865, che prevedeva per la formazione degli ingegneri un biennio di studi nella Facoltà di Scienze matematiche, si è protratta sostanzialmente fino all'entrata in vigore dell'attuale ordinamento degli studi di Ingegneria, che ancora non è arrivato ad una definizione stabile e che sembra anzi destinato a breve a cambiare ulteriormente.

Dopo centoquaranta anni, da una ricognizione nel labirinto delle lauree triennali di un certo numero di Facoltà, per l'Ingegneria Meccanica è emerso il quadro riportato nella tabella.

La tabella mostra che la Meccanica applicata alle macchine ha mantenuto la stessa denominazione in moltissime università ed anche laddove il nome è cambiato, i contenuti dell'insegnamento (come è emerso dall'esame dei programmi) sono ascrivibili a quelli tipici della MAM. Per quanto riguarda la Meccanica razionale, in alcune università essa ha mutato il nome in quello più generale di Fisica matematica, in non poche è invece scomparsa del tutto. In qualche caso alla scomparsa dell'insegnamento specifico si sopperisce parzialmente nell'insegnamento applicativo, in altri non è chiaro come vengano fornite le indispensabili nozioni teoriche di base.

Sede	Mecc. Appl. M.	Fondam. Mecc.	Mecc. Raz.	Fisica Mat.
Bologna	6 CFU		6	
Catania	9		6	
Firenze	9		6	
Pisa	11		6	
Roma 1	6		6	
Roma 3	10		4	
Trieste	6		6	
Napoli	6			6
Palermo	9			3
Salerno	6	6 Circa 1/4 del corso è dedicato alla cinem. del corpo rigido		10 (Matem. III)
Milano		5 Corso integrato con M.R. →	5 (statica)	
Torino	10			
Cagliari	6	6 (ING/IND 13, ma è mecc. raz.)		
Calabria	5	5		
Udine	5	6		
Genova	6			
Padova		7 (Non c'è quasi nulla di cinem. e din. raz.)		
Roma 2	5			

Tabella 1: Crediti formativi di Meccanica applicata alle Macchine e di Meccanica razionale nella Laurea Triennale

7 Conclusioni

Le notizie riportate mostrano il notevole legame che storicamente c'è stato, nella formazione degli ingegneri, fra la Meccanica razionale e la Meccanica applicata alle macchine, che dalla prima ha assunto l'apparato teorico necessario all'avanzamento nello studio del comportamento delle macchine. Poiché crediamo che di questo apparato teorico non si possa fare a meno, anche nella limitatezza dei programmi che la nuova laurea triennale ha costretto ad adottare, riteniamo che lo si debba comunque mantenere come

insegnamento svolto da un matematico, anche se ridotto rispetto al passato, e che sia sbagliato condensarlo in un programma di Meccanica applicata alle macchine, svolto da un ingegnere.

8 Appendice

1) L.B. Francoeur, *Traité élémentaire de mecanique* - Quatrième édition. - Paris: chez Bernard, (H.L. Perrouneau), 1807.

LIBRO I – STATICA

Cap. I: Equazioni di equilibrio - 1) Proposizioni generali; 2) Parallelogramma delle forze; 3) Forze che concorrono in uno stesso punto, momenti; 4) Forze parallele, momenti; 5) Forze di direzioni qualsiasi agenti su un corpo solido; 6) Sforzi su punti ed assi fissi

Cap. II: Centri di gravità - 1) Proposizioni generali; 2) Corpi delimitati da rette e piani; 3) Curve, aree, volumi; 4) Metodo di Guldino.

Cap. III: Macchine - 1) Poligono funicolare; Equilibrio su una superficie, piano inclinato; 3) Leva, bilancia, stadere; 4) Pulegge, sistemi di pulegge; 5) Argano, cabestano, ruote per strade; 6) Ruote dentate, orologi a pendolo, orologi portatili; 7) Cric; 8) Vite; Cuneo; Vite senza fine, gru ed altre macchine composte.

Cap. IV: Resistenze che incontrano le forze che agiscono sulle macchine - Riflessioni generali; 2) Attrito; 3) Rigidezza delle corde; 4) Attrito di una corda avvolta su un cilindro

LIBRO II – DINAMICA

Cap. I: Movimento di un punto in rettilineo

Cap. II: Movimento di un punto su una traiettoria curva - 1) Equazioni generali, principio delle aree e delle forze vive; 2) traiettorie dei corpi pesanti nel vuoto e nei mezzi resistenti; 3) Forze centrali; 4) Movimento dei pianeti, attrazione mutua dei corpi; 5) Movimento di un corpo pesante in un canale; 6) Pendolo semplice, durata delle oscillazioni, lunghezza del pendolo; 7) Proprietà meccaniche della cicloide; 8) Movimento su una curva piana, principio delle forze vive, forza centrifuga; 9) Movimento su una superficie curva, pendolo conico.

Cap. III: Movimento di un sistema - 1) Urto dei corpi rigidi, forze proporzionali ai prodotti delle masse per le velocità, forze vive, pressioni, pesi; 2) Resistenza dei mezzi; Urto dei corpi elastici; 4) Principio di d'Alembert, applicazioni, macchina di Atwood; 5) Momenti d'inerzia, assi principali; 6) Corpi urtati, sostenuti da un asse fisso, centro di percussione; 7) Movimento angolare non uniforme, pendolo composto; 8) Percussione, avendo riguardo alla forma dei corpi; 9) Movimento di un sistema, conservazione delle forze vive e del centro di gravità, piano invariabile, movimento di un solido; 10) Corde vibranti.

2) G. Venturoli, *Elementi di Meccanica e di Idraulica* - III ed. Milano 1817.

Vol. I – LIBRO I: *Dell'equilibrio* (Nozioni preliminari; della composizione delle forze; formule che esprimono la risultante, date le componenti, e viceversa; risoluzione di una forza in altre ad essa parallele; del centro delle forze parallele; del centro di gravità; ricerca del centro di gravità delle linee e figure più semplici; formule pel centro di gravità delle superficie e de' solidi di rivoluzione; uso del centro di gravità per la misura delle superficie e de' solidi di rivoluzione; modo di trovare per approssimazione le superficie, le solidità e i centri di gravità delle figure delle quali non

abbiasi l'equazione; equilibrio delle forze concorrenti in un punto; del momento di rotazione; proprietà principali de' momenti di rotazione; equilibrio d'un sistema di forma invariabile; pressioni sugli appoggi d'un sistema rigido equilibrato; equilibrio d'un sistema rigido animato da forze parallele; dei sistemi di forma variabile; del poligono funicolare; del poligono funicolare carico di pesi; della curva funicolare; della catenaria; delle curve elastiche)

LIBRO II : *Del moto* - Sezione I : del moto d'un punto o elemento materiale (Del moto equabile e del moto vario; del moto equabilmente accelerato; del moto verticale de' gravi; moto de' gravi ne' mezzi resistenti; del moto curvilineo; de' gravi proiettati; via de' proiettati nell'aria; modo di descrivere per approssimazione la traiettoria de' proiettati nell'aria; del moto sopra una data curva o sopra una data superficie; discesa de' gravi ne' piani inclinati; discesa de' gravi per la cicloide; discesa de' gravi per archi circolari; del pendolo semplice; moto de' pendoli ne' mezzi resistenti) - Sezione II: del moto de' sistemi di forma invariabile (Del moto de' sistemi in generale; del momento d'inerzia; degli assi principali; del moto d'un sistema rigido attorno ad un asse immobile; del centro di percossa; del centro d'oscillazione; movimento iniziale d'un sistema rigido e libero sollecitato da una data forza; della composizione de' moti rotatori; del movimento d'un corpo libero sollecitato da più forze; della rotazione d'un corpo libero attorno agli assi principali) - Sezione III: del moto cagionato dalla percossa (Della percossa diretta e centrale; della percossa de' corpi elastici; della percossa eccentrica; della percossa obliqua)

LIBRO III: *Delle forze moventi e resistenti* (Qualità meccaniche de' corpi; della gravità; dell'elasticità; elasticità dell'aria; elasticità de' vapori acquei; forza della polvere d'archibugio; forze degli agenti animati; della forza assoluta dell'uomo; della forza permanente dell'uomo; del rapporto fra le forze e la velocità; della forza delle bestie; dell'attrito; seconda specie dell'attrito; terza specie dell'attrito; della rigidità de' canapi; resistenza assoluta de' solidi; resistenza rispettiva de' solidi; resistenza de' solidi sostenuti nelle estremità; resistenza de' solidi alla compressione)

LIBRO IV: *Dell'equilibrio delle fabbriche* (Nozioni generali; dell'equilibrio de' piedritti; rinfranchi de' piedritti; della spinta de' terrapieni; dell'equilibrio e della spinta de' poligoni; dell'equilibrio degli archi e della cupola; degli archi di grossezza finita; delle volte piane o piattabande; delle cupole di grossezza finita; dell'equilibrio delle volte avendo riguardo alla resistenza d'attrito; dell'equilibrio delle volte avendo riguardo alla tenacità de' cementi; della fermezza e' modelli)

LIBRO V: *Delle macchine* - Sezione I: delle macchine in equilibrio (della leva; della bilancia; altre maniere e combinazione di leve; dell'asse nella ruota; della troclea e della taglia; del piano inclinato; della vite e del cuneo); Sezione II: delle macchine prossime al moto (Equazione dello stato prossimo al moto; applicazione alla leva ed all'asse nella ruota; applicazione alle ruote dentate; applicazione alla troclea e alla taglia; applicazione al piano inclinato ed alla vite; applicazione ad altre macchine composte); Sezione III : delle macchine in moto (Del moto equabilmente accelerato delle macchine; del moto variabilmente accelerato; del moto uniforme delle macchine; de' veri vantaggi delle macchine)

APPENDICE: *Sul principio delle velocità virtuali e suoi usi nella meccanica* (Equazione e dimostrazione del principio delle velocità virtuali; teoremi statici dedotti dal principio delle velocità virtuali; come dal principio delle velocità virtuali si deducono le condizioni e le equazioni dell' equilibrio; principio delle velocità virtuali applicato ai corpi in moto; teoremi dinamici per lo stesso principio dimostrati; come dal medesimo principio si ricavano le equazioni del moto)

Vol. II - LIBRO I : *Dell'equilibrio dei fluidi*; LIBRO II: *Del moto dei fluidi*; LIBRO III: *Della resistenza dei fluidi*; LIBRO IV: *Delle opere idrauliche*; LIBRO V: *Delle macchine idrauliche*.

3) F. O. Mossotti: Il libro di Mossotti: "*Lezioni elementari di Fisica Matematica, date nell'Università di Corfù nell'anno scolastico 1840-41*" (Piatti - Firenze - Tomo I, 1843; Tomo II, 1845) è suddiviso in due volumi. Nel primo Tomo le lezioni sono raggruppate sotto i seguenti titoli: Principi di meccanica razionale o teoria del movimento (I e II) - Gravitazione universale (III-VI) - Elementi di statica (VII-X) - Meccanica (XI-XII) - Elementi d'idrostatica (XIII-XVI) - Pneumatica (XII-XIX). Il secondo tomo si suddivide in Acustica ed Ottica.

Nell'Avviso dell'Autore, il Mossotti scrive: "*Le Lezioni di Fisica matematica che vengono alla luce in questi due volumi sono quelle che manoscritte furono date per testo agli studenti dell'Università di Corfù nel corso dell'anno scolastico 1840-41. L'estensione che ha preso la scienza Fisica in questi ultimi tempi rendendone impossibile l'esposizione completa nel corso di un anno, il Governo Ionio, sulla proposizione dell'esimio mio Collega il Professore Orioli e di me, ordinò al primo, come professore di Fisica Sperimentale, di trattare quelle parti della scienza che riguardano il calore, l'elettricità ed il magnetismo, ed a me di esporre le altre parti che spettano più propriamente alla teoria dell'equilibrio e del movimento, e che perciò parti matematiche sono dette. Queste lezioni contengono quindi la Teoria generale del movimento, quella della Gravitazione universale, i Principi di Statica, e di Meccanica, le Leggi della comunicazione del moto, i Principi di Idrostatica e d'Idrodinamica, la Pneumatica, l'Acustica e l'Ottica.[...]. Quantunque abbia dovuto riprodurre in queste lezioni una gran parte di materie note già da molto tempo, non ho trascurato d'introdurvi le novità della Scienza, con alcune addizioni che mi appartengono. La Fisica Matematica ha fatto in questi ultimi tempi, principalmente per opera del celebre Poisson, dei progressi notabili nell'azione delle forze molecolari, che non è più lecito allo studente d'ignorare..."*

4) C. I. Giulio: R. Università di Torino - Classe di Matematiche - *Programma del corso di Meccanica razionale e Macchine, per l'anno scolastico 1850-51*

Il programma vero e proprio occupa 22 pagine; qui si riporta il solo riepilogo, integrato in qualche caso con dettagli ripresi dal programma esteso, allo scopo di precisarne il contenuto.

RIEPILOGO

PARTE PRIMA - MECCANICA RAZIONALE, *Lezioni 105*

Sezione prima - Statica. *Lezioni 45*

1. *Nozioni preliminari e definizioni (Lez. 4)*
2. *Composizione e risoluzione delle forze (Lez.5)*
3. *Centri di gravità (Lez.7)*
4. *Equilibrio d'un punto (Lez.3)*
5. *Momenti di rotazione (Lez.4)*
6. *Equilibrio di un sistema di forze parallele (Lez.3)*
7. *Riduzione delle forze, ed equilibrio de' sistemi rigidi in generale (Lez.4)*
8. *Poligoni funicolari (Lez.4)*

9. *Curve funicolari, Catenarie (Lez.5)*
10. *Curve elastiche (Lez.2)*
11. *Equilibrio tenendo conto dell'attrito (Lez.4)*
- Sezione seconda – Dinamica. *Lezioni 60*
12. *Moto equabile di un punto (Lez.1)*
13. *Moto equabilmente accelerato e ritardato (Lez.4)*
14. *Moto vario in generale (Lez.4)*
15. *Lavoro dinamico (Lez.3)*
16. *Moto curvilineo di un punto libero (Lez.7)*
17. *Moto sopra una curva o sopra una superficie (Lez.4)*
18. *Moto dei Pendoli (Lez.4)*
19. *Moto di un sistema di masse animate da un moto comune di progressione (Lez.3)*
20. *Del momento d'Inerzia (Lez.4)*
21. *Degli Assi principali (Lez.3)*
22. *Moto di rotazione intorno ad un asse fisso (Lez.4)*
23. *Moto dei Pendoli composti (Lez.3)*
24. *Moto di un sistema rigido e libero, animato da forze operanti nel piano di due assi principali condotti pel Centro di Gravità (Lez.2)*
25. *Teoremi geometrici sul moto d'un sistema rigido (Lez.4)*
26. *Equazioni differenziali del moto di un corpo intorno un punto fisso, e del moto di un corpo libero (Lez.3)*
27. *Della Percossa (Lez.7)*

PARTE SECONDA – DELLE MACCHINE, *Lezioni 35*

28. *Equilibrio delle macchine, astrazion fatta dagli attriti (Lez.8)* (Leva, applicazioni della leva, combinazioni di più leve, bilancie e stadere composte, bilancia di Roberval, ponti a bilico. Asse nella ruota, burbera, verricello, ruota a pivoli, ruota a timpano, argano, corde e corregge continue, ruote dentate, ritmo dei rotismi, forme più convenienti pei denti delle ruote, ...)

29. *Equilibrio delle macchine, tenendo conto dell'attrito, o stato prossimo al moto (Lez.4)*

30. *Digressione sui motori più impiegati nelle arti (Lez.8)* (Dinamometri, Odometri, Dinamodometri, Ergometri, Gravità, elasticità delle molle, elasticità dell'aria, ... elasticità dei vapori, ... elasticità dell'aria mista con vapori, sperienze sull'elasticità del vapore acqueo. ... , forza degli agenti animati, forza assoluta, forza permanente, o del lavoro giornaliero dell'uomo...)

31. *Moto equabile delle macchine (Lez.1)*

32. *Moto vario delle Macchine (Lez.4)*

33. *Perdita di forza viva nelle Macchine – Avvertenze principali nello stabilimento delle Macchine (Lez.4)*

34. *Organi direttori del movimento delle Macchine (Lez.3)* (Tachimetri, freni, volanti od accumulatori della forza viva, regolatori o governatori)

35. *Veri vantaggi delle Macchine (Lez.3)*

5) S.D. Poisson: Il *Traité de Mécanique* (Bachelier 1833) si compone di 2 volumi. Ciascuno dei due volumi ha un indice molto dettagliato, occupando il primo 30 pagine, il secondo 35; se ne riporta una breve sintesi:

Libro primo (pp. 43-202) – Statica 1a Parte

- Cap. 1° : Composizione ed equilibrio delle forze applicate ad uno stesso punto
- Cap. 2° : Equilibrio della leva
- Cap. 3° : Composizione ed equilibrio delle forze parallele
- Cap. 4° : Considerazioni generali sui corpi pesanti e sui centri di gravità
- Cap. 5° : Determinazione dei centri di gravità
- Cap. 6° : Calcolo dell'attrazione dei corpi

Libro secondo (pp. 203-496) – Dinamica 1a Parte

- Cap. 1° : Sul movimento rettilineo e la misura delle forze
- Cap. 2° : Esempi di movimento rettilineo
- Cap. 3° : Sul movimento curvilineo
- Cap. 4° : Sulla forza centrifuga
- Cap. 5° : Esempi del movimento di un punto materiale su una curva o su una superficie data
- Cap. 6° : Esempi del movimento di un mobile completamente libero
- Cap. 7° : Digressione sull'attrazione universale

Libro terzo (pp. 497-696) – Statica 2a Parte

- Cap. 1° : Equilibrio di un corpo solido
- Cap. 2° : Teoria dei momenti
- Cap. 3° : Esempi dell'equilibrio di un corpo flessibile
- Cap. 4° : Principio delle velocità virtuali

Libro quarto (pp. 1-502) – Dinamica 2a Parte

- Cap. 1° : Principio generale e della dinamica
- Cap. 2° : Determinazione dei momenti d'inerzia e degli assi principali
- Cap. 3° : Movimento di un corpo solido intorno ad un asse fisso
- Cap. 4° : Sul movimento di un corpo solido intorno ad un punto fisso
- Cap. 5° : Sul movimento di un corpo solido completamente libero
- Cap. 6° : Sul movimento di un corpo solido pesante su un piano dato
- Cap. 7° : Sull'urto dei corpi di forma qualsiasi
- Cap. 8° : Esempi del movimento di un corpo flessibile (vibrazioni di una corda)
- Cap. 9° : Equazioni e proprietà generali del movimento di un sistema di corpi

Libro quinto (pp. 503-662) – Idrostatica

- Cap. 1° : Nozioni preliminari
- Cap. 2° : Equazioni generali dell'equilibrio dei fluidi
- Cap. 3° : Equilibrio dei fluidi pesanti
- Cap. 4° : Sull'equilibrio e sul movimento dei corpi galleggianti
- Cap. 5° : Sulla misura dell'altezza mediante l'osservazione del barometro
- Cap. 6° : Sulla forza elastica e sul calore dei gas

Libro sesto (pp. 663-782) – Idrodinamica

- Cap. 1° : Equazione generale del moto dei fluidi
- Cap. 2° : Sulla propagazione del suono
- Cap. 3° : Sul movimento dei fluidi in una particolare ipotesi

Appendice relativa all'uso del principio delle forze vive nel calcolo delle macchine in movimento

6) J.V. Poncelet: *Cours de Mécanique appliquée aux machines* Paris, Gauthier-Villars 1874 (riproduzione, a stampa, dell'edizione del 1836, con qualche cambiamento di dettaglio)

INDICE:

Sezione prima - Considerazioni generali sulle macchine in movimento:

I) Nozioni e principi sui quali si fonda la scienza dei motori e delle macchine (Lavoro dei motori e delle macchine; teoremi relativi alla quantità di moto ed alla forza viva). II) Applicazione del principio delle forze vive al movimento delle macchine (condizioni speciali che presentano le macchine; equazione generale del moto delle macchine; discussione delle equazioni generali). III) Circostanze principali del movimento delle macchine (Leggi generali del movimento; mezzi generali di regolarizzare il movimento delle macchine). IV) Costruzione delle macchine industriali (Condizioni della migliore costruzione; indicazioni generali sulla costruzione; condizioni pratiche della costruzione).

Sezione seconda - Dei principali mezzi per regolarizzare l'azione delle forze nelle macchine e di trasmettere le velocità in rapporti determinati.

I) I moderatori (I diversi generi di moderatori; i freni; i volani ad alette). II) I regolatori (I diversi generi di regolatori; i regolatori a pompa e a galleggiante; i regolatori a forza centrifuga; nuovo regolatore a molla ed istantaneo). III) Le manovelle (Nozioni preliminari sulle manovelle; considerazioni dinamiche sugli effetti delle manovelle; manovelle che conducono parti rettilinee in moto alternativo; manovelle che conducono un bilanciere in moto alternativo; il giunto brisé o universale). IV) Applicazioni particolari della teoria dei volani (considerazioni generali sull'impiego e sulla costruzione dei volani; calcolo del volano di manovelle a semplice ed a doppio effetto nelle ipotesi più semplici; calcolo del volano tenendo conto del peso e dell'inerzia dei membri oscillanti). V) Mezzi geometrici per trasmettere le velocità tra corpi, in un rapporto assegnato (trasmissione del moto per semplice contatto di ruote; trasmissione del moto con cinghie o catene; trasmissione del moto con ingranaggi; camme). Aggiunta relativa ai valori dei diversi momenti d'inerzia.

Sezione terza - Calcolo delle resistenze passive nei corpi in moto uniforme e soggetti ad azioni sensibilmente invarianti.

I) Considerazioni preliminari. II) I diversi tipi di resistenza (la resistenza diretta d'attrito e l'aderenza dei corpi in contatto; resistenza dovuta al rotolamento dei corpi, rigidità delle corde e delle cinghie; attrito delle corde e delle cinghie intorno a cilindri immobili. III) Applicazione alle macchine semplici (Attrito di un corpo su un piano inclinato; attrito del cuneo; attrito di corpi mantenuti in direzione invariabile da guide, coulisse, ecc. attrito dei perni dei corpi in rotazione; attrito delle cerniere, degli spallamenti degli alberi; resistenza delle ruote e delle rullette; equilibrio degli argani avendo riguardo all'attrito ed alla rigidità delle corde; calcolo delle resistenze nelle pulegge; l'argano dei cinesi ed il cabestano; argani su alberi rotanti mossi da corde e cinghie senza fine; paranchi o pulegge mobili; la resistenza delle catene; modo di tener conto del peso delle corde e delle cinghie nelle equazioni di equilibrio, attrito della vite a filetto quadrato; attrito della vite a filetto triangolare; attrito negli ingranaggi).

Sezione quarta - Influenza delle variazioni di velocità sulle resistenze.

I) Le resistenze nei corpi a moto variabile periodico o permanente. II) Influenza dei cambiamenti bruschi di velocità: principi generali. III) Applicazioni (l'urto delle camme e dei piloni; l'urto delle camme e dei martelli; macchine per forare, per stampare e battere le monete).

Models for flows in porous media

L.M.de Socio

Dipartimento Meccanica e Aeronautica, Via Eudossiana 18, I-00184 Roma
Università "La Sapienza"

Nomenclature

The main symbols are

A = Area

c_f = dimensionless form drag constant

d, D = microscopic and macroscopic diameters, respectively

\mathbf{F} = Forchheimer correction factor

k, \mathbf{K} = permeability and permeability tensor, respectively

l, L = microscopic and macroscopic lengths, respectively

p = pressure

Re = Reynolds number

Kn = Knudsen number

$(0, x, y, z)$ = set of Cartesian co-ordinates

t^* = characteristic process time.

\mathbf{v} = velocity

\mathcal{V} = REV representative elementary volume

ϵ = porosity, $\mathcal{V}_\beta/\mathcal{V}$

λ = mean free path

μ = viscosity

ρ = density

φ = tortuosity

Super - and sub-scripts

p = pore

β = fluid phase

σ = solid phase

Introduction.

The history of the mathematical models for flows in porous media goes back in time to the very origin of the physical investigation of these natural phenomena. This old interest is understandably referable to the practical applications of a correct knowledge of the bases

of the underground hydrology. In spite of the noticeable capabilities of the ancient times technicians, it took up to the beginning of the ninetieth century before a solid scientific consideration could be paid to the characteristics of the percolative fluid motions and the work of Henry Darcy (1803-1858), a Roads and Bridges Engineer, appeared. Since that time civil engineers have relayed on Darcy's celebrated papers on flows in porous media, not to say of his scientific activities in other mostly experimental areas of fluid dynamics. At the present time new technological developments require that, not only conventional permeable media, but also porous matrices, foams and beds of granular materials be reconsidered from the point of view of the physics of fluids. We just cite here cases as applications in microtechnology, boundary layer control by wall suction, transpiration cooling, controlled combustion, and so on, where the old Darcy's model equation loses its validity which was widely accepted in the past. For instance a gas flowing through a porous solid medium is very often in more or less rarefied conditions when considering that the free molecular path of the fluid is of the same or of a higher order of magnitude with respect to the mean diameter of the pores.

In this presentation I will report a few considerations about some recent mathematical models which describe the fluid motion through a permeable medium and, in particular, I will refer to two extreme situations, namely a viscous incompressible flow and a more or less rarefied gas flow, and address the attention of the reader more to the open questions and related possibilities of solutions than to the actual ways of dealing with them. The considerations which follow should give what, I suppose, is a clear impression that a deep, detailed study of the mathematical models of the percolative motions is still far from being well established.

Before ending this introduction, which is recognized to be far from being exhaustive, a synthetic list of models which refer to the evolution of Darcy law is given below, from his times up to now. The first preliminary notes - Step 1 - concern the situations based on the hypothesis of a continuous, even incompressible fluid. We are, in those cases, on rather *classic* tracks from which we will derail in favour of a compressible gas, from its continuum approach to the actual molecular behaviour (Step 2).

Step 1. From the definition of porosity and the concept of REV (Representative Elementary Volume), the actual medium is substituted by a fictitious continuum in which one can assign values of any property to any mathematical point in it (Bear 1988). Following Hubbert (1956) one can show that a Representative Elementary Area and a Representative Elementary Line can be defined, and that volumetric, areal and linear porosities are all equivalent.

Let \mathbf{v} and p be the local velocity and pressure, respectively, in the fluid phase. A volume averaging can be performed to obtain superficial averages $\langle \cdot \rangle$ and intrinsic averages $\langle \cdot \rangle^\beta$ following the rules

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} (\cdot) dV$$

$$\langle \cdot \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} (\cdot) dV$$

so that $\langle \cdot \rangle = \epsilon \langle \cdot \rangle^\beta$.

The Darcy equation is then

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{v}$$

As I said, it took about two centuries from Darcy's times to arrive at a sound physical and mathematical representation of the flow of a continuous fluid through a homogeneous porous medium. The most representative models, which are all relative to a viscous incompressible fluid, are then the Brinkman equation

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

the Forchheimer equation

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{v} - c_f k^{-1/2} \rho |\mathbf{v}| \mathbf{v}$$

and the Brinkman-Forchheimer-Boussinesq equation

$$\nabla p = -\frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - c_f k^{-1/2} \rho |\mathbf{v}| \mathbf{v} - \rho \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \right]$$

These last models extended the original Darcy law to take care of the macroscopic wall boundary conditions (Brinkman), and to take into account the experimentally observed non linearities and the inertial effects (Forchheimer, Boussinesq).

In this framework we will first make reference to the rigorous Whitaker treatment, where the analysis of a continuum fluid flow, subjected to the Navier-Stokes equation, is based on the recognition of two scales, namely the pore scale l and the observer scale L . The volume averaging procedure and a velocity decomposition lead to a couple of equations for a spatial mean velocity and its local deviation, which can be solved provided that appropriate initial and boundary conditions are imposed and a closure problem is dealt with. In particular, the decomposition of \mathbf{v} and p gives

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle^\beta + \tilde{\mathbf{v}} \text{ and } p = \langle p \rangle^\beta + \tilde{p}$$

where $\langle \mathbf{v} \rangle^\beta$ and $\langle p \rangle^\beta$ are the intrinsic velocity and pressure, respectively.

Step 2. We turn now to the second approach and to the modelling of the flow through a porous medium, which concerns the gas flows and stems from the molecular kinetics. Here we are in a field where it is not that simple to walk around. Many different procedures have been adopted in order to find a mathematically rigorous model of an extremely complex phenomenology. Just to cite a few of them, the Boltzmann equation and its many approximations - as, for instance, the various BGK models, the discrete velocities models and so on - have been extended to a *dusty gas* (Mason and Malinauskas, 1983) made of light and heavy molecules. In some cases the hydrodynamic limit of the resulting models was able to recover the Darcy equation, justify the so called porous medium equation introduced by Muskat

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \text{const.} \left(\frac{\partial^2 p^m}{\partial x^2} \right), \quad m \in \mathbb{R}^+$$

and provide the model equation for the wave propagation (de Socio *et al.*, 2001 and 2003). In this framework of basic, more tractable models, a rather usual model for a gas flow in

a permeable medium is the somehow simple scheme of a matrix made of a cluster of more or less ordered spheres. For a rarefied gas flow in a bed of spheres the model I will later talk about stems from reconsidering the celebrated paper by Knudsen (1909) on capillary flows. Although simple the model is very meaningful from the physical point of view. Just to introduce it we anticipate here that Knudsen carried out many experiments concerning the gas flow in capillary tubes, and showed that the flow rate through the capillaries, normalized with respect to the value in the free molecular regime, firstly decreases, reaches a minimum and thereafter increases with the pressure drop between the two ends of the tube. The minimum normalised flow rate, at increasing pressure drops, could be argued as the situation, occurring at relatively low pressure, where the flow through the tube ceases to be a stream of free molecules which only hit against the wall, and undergoes the increasing effects of the collisions between the molecules.

About fifty years after Knudsen's observations, attention was paid to the possibility that similar phenomena might be present in flows through porous media where the mean free path of the streaming molecules is comparable with the mean diameter of the pores (Wicke & Vollmer 1952). In this context, a model for treating the more or less rarefied gas flow through a porous medium and followed by a numerical MonteCarlo simulation has been recently presented together with its very satisfactory comparisons with the experimental results (de Socio and Marino 2006).

More about the Whitaker model and the molecular kinetic approach.

Step 1. The initial Whitaker equations are the Navier-Stokes equation

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

and its averaged form

$$\rho \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \rho \langle \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) \rangle = - \langle \nabla p \rangle + \mu \langle \nabla^2 \mathbf{v} \rangle .$$

An analysis of the order of magnitude, based on the micro-porous scale l and a macro-observer scale L provides the equations

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle^\beta}{\partial t} + \rho \langle \mathbf{v} \rangle^\beta \cdot \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta + \rho \epsilon^{-1} \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \\ - \nabla \langle p \rangle^\beta + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle^\beta + \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{I}\tilde{p} + \mu \nabla \tilde{\mathbf{v}}) dA \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} + \rho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta = \\ - \nabla \tilde{p} + \mu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} - \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{I}\tilde{p} + \mu \nabla \tilde{\mathbf{v}}) dA + \rho \epsilon^{-1} \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \rangle . \end{aligned} \quad (2)$$

where the area integral is relative to the actions of the solid on the gas at the boundary $A_{\beta\sigma}$ between the two phases. To the model equations above the mass continuity equation and the initial/boundary conditions shall be associated. Equations 1 and 2 present a closure problem which has to be solved and which somehow recalls another closure problem which appears in the turbulence modelling.

The way to the closure, which was originally proposed by Whitaker, is based on a spatially periodic model of the medium with

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i) &= \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}), & \tilde{p}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i) &= \tilde{p}(\mathbf{r}) \\ i &= 1, 2, 3 \\ \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle^\beta &= 0 \end{aligned}$$

where \mathbf{r} is the position vector and \mathbf{e}_i are the unit Cartesian vectors. Without entering into further details, the final form of the volume averaged momentum equation is

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -(\mathbf{K}/\mu)(\nabla \langle p \rangle - \mathbf{F} \langle \mathbf{v} \rangle), \tag{3}$$

where the unsteady term $\partial \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle / \partial t$ does not appear, provided that one imposes the time scale constraint $t^* \mu / \rho l^2 \ll 1$. This last, rather strict, in some sense, assumption will be held, in the present circumstance, but must be let, of course, in cases where typical unsteady situations have to be considered, as, for instance, the wave propagation or the time depending wall conditions.

The disappearance of the diffusive Brinkman term from Eq. 3 deprives the model of the possibility of imposing the correct no-slip condition at a wall. However, from the practical point of view, such a condition can be neglected without any significant consequence (see, for instance, Faghri and Zhang, 2006).

In Eq. 3, \mathbf{K} and \mathbf{F} are the Darcy law permeability tensor and the Forchheimer correction tensor, respectively. In particular \mathbf{F} is of the order $[Re]$, for $Re \ll 1$ and of the order $[2Re]$ for $Re \gg 1$, with $Re = \rho \langle v \rangle^\beta l / \mu$. Furthermore \mathbf{F} is a linear function of $\langle \mathbf{v} \rangle$ as is in the Joseph *et al.* form of the Forchheimer equation given in the Introduction.

Remark 1: Other authors have proposed different ways to the closure. We will not discuss their works, for conciseness sake and since they do not add too much to our presentation.

Remark 2: The method of spatial homogenization has been followed by a number of authors for dealing with the differential problem represented by the Navier-Stokes equation for the fluid phase and related continuity equation and boundary conditions. Their approach yields a first inertial correction to the Darcy law which is a cubic rather than a quadratic function, as is in the Forchheimer term reported above. For the homogenization techniques we cite a couple of reference books by A. Bensoussian *et al.* and Sanchez-Palencia.

Remark 3: Those who are familiar to the turbulence models immediately recognize analogies and differences between the closure problem in the theory of turbulence and that in the porous media theory. Surprisingly enough no real attempt has been yet carried out to transfer somehow elements of the vast - although incomplete - scientific knowledge in turbulence to the modelling of percolative motions.

Step 2. We move now to the realms of the molecular kinetics and recall that a widely accepted definition of the permeability of a porous medium to compressible gases can be expressed in the form

$$K_c = \mathbf{v}p/(|\nabla p|),$$

where \mathbf{v} and p are the local values of the percolating velocity and of the pressure, respectively. With that definition, Beavers and Sparrow (1971) were able to analyze the continuum compressible flow through a matrix. In particular, the equation above gives the isothermal mass flow rate per unit pressure gradient and can be interpreted more as the conductance of the medium rather than its permeability. Actually, the medium permeability to incompressible isothermal fluids, as defined by Darcy, is

$$k = -u/(|\nabla p|/\mu)$$

where μ is the viscosity, and its meaning can be easily recovered from the expression for K_c if we follow, for instance, the recent demonstration by Wu *et. al* (1998).

A few years later than the Wicke and Vollmer research cited in the Introduction, a first study (Derjagin & Bakanov 1957) of gas flows through porous matrices was based on the Boltzmann equation to predict the existence of a minimum of the permeability K_c versus the mean pressure in the medium. Derjagin & Bakanov, in particular, considered the medium as a mixture of gas and solid particles, according to a procedure of the type *dusty gas* (Muskat 1937).

In the case of a bed of spheres it is not immediate to predict the existence of a Knudsen effect, while - to my best knowledge - no experimental evidence had been yet presented in the literature before the paper (de Socio and Marino 2006). The model proposed in that paper assumes that the particles crossing the medium proceed while either colliding or not colliding against the spheres.

A fraction α of the total number of molecules in each volume element strikes the spheres and a fraction $(1-\alpha)$ does not. In the second case they possibly collide with other particles. In both cases they can hit against the external wall if the proper conditions are verified. The two types of collisions depend upon the geometry of the matrix (porosity, tortuosity of the flow path) and on the characteristics of the interaction between gas and solid.

The numerical simulations and the computations were carried out according to the Direct Simulation MonteCarlo method (DSMC) which is a well established numerical approach for the analysis of gas dynamics phenomena at a molecular level (Bird 1994, Alexander *et. al* 1997). The microscopic state of the system is defined by the position $\mathbf{x}(x, y, z)$ and velocity $\mathbf{u}'(u', v', w')$ of a set of representative particles which move in the physical domain. All the flows are computed as unsteady while the physical time is the parameter of the simulation.

One of the most important aspects of the DSMC is to uncouple the molecular motion from the intermolecular collisions. In particular the physical domain is discretized in cells and during each time step the particles move in each cell and through its borders under the proper boundary conditions and collide following a stochastic process where momentum and energy are invariants. At the end of each step a new macroscopic state of the system is evaluated from the microscopic state of each cell according to the laws of the classical kinetic theory (Bird 1994, 1998). The procedure adopted to assign these boundary conditions follows the analysis presented by Wu *et al.* (2001). In particular an iterative algorithm is followed to calculate the streamwise component of the velocity which satisfy the conservation of the particle fluxes both at the inlet and at the outlet boundary surfaces.

To better explain the assumptions, Figure 1 shows a sketch of the model. In particular Figure 1(a) shows, at the time t , a discrete volume element of the material close to an element of the external wall and a few representative gas particles are shown as stars. The problem of the collisions between gas particles and spheres is then split in two parts. The surfaces of the spheres are considered in Figure 1(b) as homogeneously distributed in the domain, where a fraction α of the n_m representative particles is trapped. These particles may lose their energy against the distributed wall and gain a new kinetic state according to a Maxwellian distribution function at the temperature of the solid phase. The remaining $(1 - \alpha)n_m$ representative molecules move freely in space (Figure 1(c)) and may collide according to the usual rules which take into account their relative speed, the collision cross section and so on. Possible collisions against the external wall are treated according to the usual rule of diffusive re-emission. Figure 1(d) refers to the updated microscopic state at $t + \Delta t$.

One assumes that the local flow through the pores occurs as through a long microtube at the same Kn value and thus the fraction of molecules α which arrive, on the average, from the wall of spheres directly on a sphere without encounters with other molecules is

$$\alpha = \exp[-\sinh^{-1}(Kn^{-1})]. \quad (4)$$

Moreover the sorted fraction $1 - \alpha$ of the total number of molecules in each cell is dealt with according to the collision laws for hard spheres in an empty space following a standard MonteCarlo procedure. The results of the previously described model were shown to match very favourably the experimental data in a large range of Reynolds and Knudsen numbers.

Conclusions

The number of works which concern the flow of fluids through porous media is extremely great but the theories and their connected algorithms cover only a relatively small part of a wide and intriguing research area. Very few are, for instance, the works, that appeared in the pertinent literature, which refer to the molecular gasdynamics. Attention has been recently paid, for example, to evaluate the velocity slip between fluid and solid, or to justify the presence of non linear terms in the extended forms of the Darcy law. The privileged point of view of most of the investigations remains that of the continuum fluid mechanics although the interest in the gas flow through the microchannels of a permeable medium is increasing. Just think, in this framework, of the applications in micro- and nano-devices. It is then worth of attention the study of the problem by the experimental techniques and the theories of the molecular kinetics. When one deals with problems where the Knudsen number, evaluated on a microscopic basis, is such that the flow regimes span from the free molecular to the transitional flow, then models founded on the MonteCarlo simulations can prove the viability of the kinetic approach.

To conclude this rather concise and, I am afraid, largely incomplete presentation, let us refer to possible research fields where new results are mostly needed. The global stability of flows through media of great porosity, where the inertial and the non linear effects can play a definite role, is still an open problem. New models are needed for flows through fibrous materials due to the importance of this subject in the technological developments of new textile materials. Finally it should not be too difficult to imagine that an analogue to the discrete velocity models of the molecular kinetics or to the turbulent direct simulation model be constructed to provide an answer to the Whitaker model.

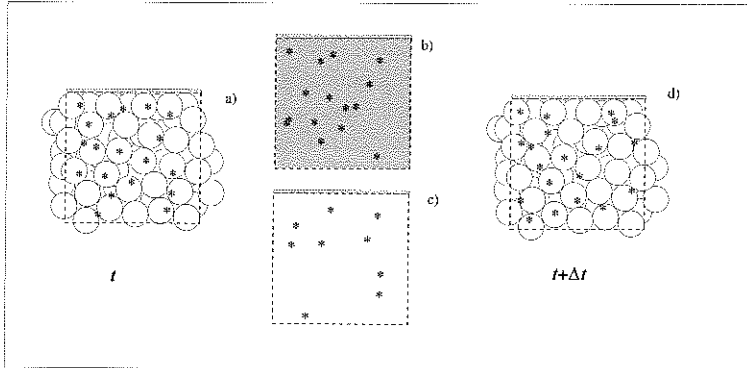


Figure 1: Sketch of the physical model for the gas flow through a bed of spheres.

Acknowledgments

This work was partially supported by the Minister of Education, University and Research. Thanks are extended to my old friends and teachers E.R.G.Eckert, D.D. Joseph and E.M.Sparrow who introduced me into the realms of Fluidynamics.

References

- [1] ALEXANDER, F.J., GARCIA, A.L. 1997 The Direct simulation Monte Carlo method *Comp. in Physics* **11**, 588–593.
- [2] BEAR J. 1988 *Dynamics of fluids in porous media*, Dover, New York.
- [3] BEAVERS ,G. S., SPARROW,E. M. 1971 Compressible Gas Flow through a Porous Material *Int. J. of Heat Mass Transfer* **14**, 1855–1859.
- [4] BENSOUSSAN A., LIONS J.L., AND PAPANICOLAOU G. 1978 *Asymptotic Analysis for Periodic Structures* , Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 5, NorthHolland, New York.
- [5] BIRD, G. A. 1994 *Molecular gas dynamics and direct simulation of gas flows*, Oxford University Press.
- [6] BIRD, G. A. 1998 Recent advances and current challenges for DSMC *Computers Math. Applic.* **35**, 1–14.
- [7] CHASTANET, J., ROYER, P., AURIAULT, J.-L. 2004 Does Klinkenberg’s law survive upscaling? *Trans. in Porous Media* **56**, 171–198.
- [8] DERJAGIN, B.B., BAKANOV, S.P. 1957 Theory of gas flow in a porous body near the Knudsen region. Pseudomolecular flow *Sov. Phys. Dokl.* **2**, 326–331.
- [9] DE SOCIO, L. M., IANIRO, N., MARINO, L. 2001 A Model for the Compressible Flow through a Porous Medium. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **11**, 1273–1283 .
- [10] DE SOCIO, L. M., IANIRO, N., PONZIANI, D. 2003 Kinetic Models for a Gas Filled Porous Matrix. Wave Propagation *Trans. in Porous Media* **52**, 95–109.
- [11] DE SOCIO, L. M., MARINO, L. 2006 Gas Flow in a Permeable Medium *JFM* **557**, 119–133.

- [12] DULLIEN, F.A.L. 1991 *Porous media, fluid transport and porous structure*, 2-nd Ed., Academic Press, Inc.
- [13] EROFEEV, A.I., FREEDLENDER, O.G., PERMINOV, V.D., SVISCHEV, S.V. 1995 Hypersonic rarefied gas flow over a porous plate. In *Proc. of the 19-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, vol.2, pp 1263–1269, Oxford University Press.
- [14] FAGHRI, A., ZHANG Y. 2006 *Transport phenomena in multiphase systems*, Elsevier Academic Press, Amsterdam.
- [15] EROFEEV, A.I., FREEDLENDER, O.G., KOGAN, M.N. 1998 Rarefied gas flow through a porous layer. In *Proc. of the 21-st International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, Cépaduès-Editions, pp 639–646.
- [16] GORELIK, G., PAYLYUKEVICH, N., ZALENSKIY, S. RADEV, S., STEFANOV, S. 1993 Kinetics of intense evaporative mass transfer through a porous layer *Int. J. of Heat Mass Transfer* **36**, 3369–3374.
- [17] GROVE, D.M., FORD, M.G. 1958 Evidence for permeability minima in low-pressure gas flow through porous media *Nature* **182**, 999–1000.
- [18] HUBBERT, M.K.. 1956 Darcy law and the field equations of the flow of underground fluids *Trans. Amer. Inst. Min. Metal. Eng.* **207**, 222–239.
- [19] JOSEPH D. D., NIELD D. A., AND PAPANICOLAOU G., 1982 Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium *Water Resources Res.* **18**, 1049–1052.
- [20] KARNIADAKIS, G.M., BESKOK A. 2001 *Micro flows*, Springer-Verlag, Berlin.
- [21] KLINKENBERG, L.J. 1941 The permeability of porous media to liquid and gases *Drilling and Production Practice. American Petroleum Inst.*, 200–213.
- [22] KNUDSEN, M. 1909 Die Gesetze der Molekularströmung und der innern Reibungsströmung der Gase durch Röhren *Ann. Physik* **28**, 75–130.
- [23] MARSCHALL, J., MILOS, F.S. 1998 Gas permeability of rigid fibrous refractory insulations *J. of Thermophys. Heat Transfer* **12**, 528–535.
- [24] MASON E. A., MALINAUSKAS A. P. 1983 *Gas Transport in Porous Media: The Dusty-Gas Model*, Elsevier Science Publ. B. V., Amsterdam
- [25] MUSKAT M. 1937 *The flow of homogeneous fluids through porous media*, McGraw-Hill, New York.
- [26] SANCHEZ-PALENCIA E. 1980 Non Homogeneous Media and Vibration Theory *Lecture Notes in Physics* **127**, Springer Verlag, Berlin.
- [27] SCOTT, D.S., DULLIEN, F.A.L. 1962 The flow of rarefied gases *A.I.Ch.E. Journal* **8**, 293–297.
- [28] SKJETNE, E., AURIAULT, J.-L. 1999 Homogenization of wall slip in the Darcy flow through porous media *Trans. in Porous Media* **36**, 293–306.
- [29] STEFANOV, S., FREZZOTTI, A., LEVDANSKY, V. LEITSINA, V., PAYLYUKEVICH, N. 1999 Direct statistical simulation of gas mixture mass transfer in a porous layer with condensation of one of the components and adsorption of another *Int. J. of Heat Mass Transfer* **42**, 2063–2069.

- [30] WICKE, E. AND VOLLMER, W. 1952 Flow of gases through micropores *Che. Eng. Sciences* **1**, 282–291.
- [31] WHITAKER S. 1996 The Forchheimer equation: A theoretical Development. *Trans. in Porous Media* **25**, 27–61 .
- [32] WU, J.-S, LEE, W.-S, LEE, F., WONG, S.-C. 2001 Pressure boundary treatment in internal gas flow at subsonic speed using the DSMC method. In *Rarefied Gas Dynamics: Proceedings of the 22nd International Symposium*, (ed T.J. Bartel & M.A. Gallis), vol.585, pp 408–416, American Institute of Physics.

On linear viscoelastic fluids: free energy and asymptotic behavior

Mauro Fabrizio and Barbara Lazzari

Dipartimento di Matematica - Università di Bologna

1 Introduction

In this paper we consider isotropic, homogeneous, incompressible viscoelastic fluids, for which the constitutive equation for the symmetric stress tensor is a local functional of the relative history of the strain. The restrictions imposed by the thermodynamic principles on the constitutive equation have been studied in [11], where existence, uniqueness and stability theorems for the boundary-initial value problem are also proved (see [18], [21], [22], [23] too).

Recently some results about the definition of state and the representation of the free energies for an incompressible viscoelastic fluid are shown in [1]-[3].

Free energies of materials with memory have been investigated by many authors over the years. It was recognized that free energies are not in general uniquely defined for materials with memory. In fact, the free energies associated to a material with memory form a bounded, convex set (see, for example [9]) with a maximum and a minimum element. By virtue of general theorems, the minimum free energy has been shown to be equal to the maximum recoverable work [17], [16]. Explicit formulae for the maximum and various intermediate free energies have been given for linear models.

In this paper we recall the definition of minimal state for an incompressible fluid and examine certain expressions for the free energy.

Furthermore, it is well known in linear viscoelasticity, that the dissipation effects due to memory lead to results of stability and decay of the energy under the hypothesis that the constitutive equations satisfy the thermodynamic restrictions. This property allows to prove existence, uniqueness and asymptotic stability for the evolutive problem [13].

To obtain the exponential decay of the energy further hypotheses must be required. These hypotheses ask the positive definiteness of suitable linear combinations of the memory kernel with its derivatives that imply the convexity and the exponential decay of the kernel [11] and [3].

In this paper we give a sufficient condition on the relaxation function to get the exponential decay of the energy, furthermore, we shall prove that the exponential decay of the kernel is a necessary condition for the exponential decay of the solution. The method used here is based on the study of the

Laplace transform of the solution.

We end this paper with an application to a model of viscoelastic material proposed in [7], which kernel is given by a sum of exponential functions. We show that for this model the minimal state is represented through a n tensor-value variables. This example presents clearly the opportuneness to represent the material system in terms of minimal states instead of using the classical representation through the history of the strain tensor, because this approach reduces the complexity of the system.

2 States, equivalent states and processes.

We are concerned with the linear theory of viscoelasticity for a viscoelastic fluid of the kind examined in [4], [18], [22], [23], [26], [27]. The fluid is supposed isotropic and incompressible. For such a material the linearization of the constitutive equation of Boltzmann's type yields the following hereditary law

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + 2 \int_0^{+\infty} \mu'(\mathbf{x}, s) \mathbf{E}_r^t(\mathbf{x}, s) ds, \quad (2.1)$$

which states that the symmetric stress tensor \mathbf{T} is determined by the infinitesimal strain $\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$, where \mathbf{u} is the displacement, through its relative history \mathbf{E}_r^t , defined by

$$\mathbf{E}_r^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{E}^t(\mathbf{x}, s) - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad s > 0, \quad (2.2)$$

where $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \in \text{Sym}$ is the instantaneous value of the strain and $\mathbf{E}^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - s)$, $s > 0$ denotes its past history. p is a scalar function, which yields the constitutively indeterminate reaction pressure due to the constraint of incompressibility and \mathbf{I} is the identity second order tensor. The memory kernel μ' is a material function, such that the shear relaxation function

$$\mu(\mathbf{x}, s) = - \int_s^{+\infty} \mu'(\mathbf{x}, \xi) d\xi \quad \forall s \geq 0,$$

belongs to $L^1(\mathbb{R}^+)$ for all position vector \mathbf{x} . In these relations \mathbf{x} belongs to a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with a smooth boundary $\partial\Omega$. Later on the dependence on \mathbf{x} will be omitted.

A fluid characterized by the constitutive equation (2.1), is a simple material, and its behaviour can be described by using the concepts of state and process [8], [5], [20].

For this material the state σ is represented by the relative strain history (2.2), i.e. $\sigma(t) = \mathbf{E}_r^t(s)$ and Σ denotes the state space. A mechanical process of duration d is a piecewise continuous map $P : [0, d] \rightarrow \text{Lin}$, the set of the second order tensors, given by

$$P(\tau) = \mathbf{L}_P(\tau) \quad \tau \in [0, d], \quad (2.3)$$

where the subscript P denotes the segment of the values of the velocity gradient \mathbf{L} corresponding to the time interval $[0, d)$. Let Π be the set of mechanical processes. For any process $P \in \Pi$, the restriction $P_{[\tau_1, \tau_2)}$ of P to $[\tau_1, \tau_2) \subset [0, d)$ belongs to Π ; furthermore, also the composition of the processes $P_j \in \Pi$ of duration d_j ($j = 1, 2$), defined by

$$P_1 * P_2(\tau) = \begin{cases} P_1(\tau) & \forall \tau \in [0, d_1) \\ P_2(\tau - d_1) & \forall \tau \in [d_1, d_1 + d_2) \end{cases} ,$$

belongs to Π .

Finally, the state transition function $\rho : \Sigma \times \Pi \rightarrow \Sigma$ maps the initial state $\sigma^i \in \Sigma$ and the process $P \in \Pi$ into the final state $\sigma^f = \rho(\sigma^i, P)$. If $\sigma^i = \sigma^f$ the pair (σ^i, P) is said a cycle.

The process P of duration d , defined by (2.3), can be expressed in terms of the strain rate tensor $\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$. Since $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$, the process can be expressed by

$$P(\tau) = \dot{\mathbf{E}}_P(\tau) \quad \tau \in [0, d).$$

the derivative of the strain tensor over the time segment with duration d .

Let $t \geq 0$ be the instant of the application of P to the state is $\sigma(t) = \mathbf{E}_r^t(s)$ and $\dot{\mathbf{E}}_P(\tau) = \dot{\mathbf{E}}(t + \tau)$. Then, the extra stress

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + p\mathbf{I},$$

can be written in the following manner

$$\tilde{\mathbf{T}}(t + \tau) = 2 \int_0^\tau \mu(s) \dot{\mathbf{E}}^{t+\tau}(s) ds - \check{\mathbf{I}}^t(\tau, \mathbf{E}_r^t),$$

where

$$\check{\mathbf{I}}^t(\tau, \mathbf{E}_r^t) = -2 \int_0^{+\infty} \mu'(\xi + \tau) \mathbf{E}_r^t(\xi) d\xi, \quad \tau \geq 0.$$

We observe that the extra stress vanishes in correspondence of constant history $\mathbf{E}^t(s) = \mathbf{E}^\dagger(s) = \mathbf{E}$, $\forall s \in \mathbb{R}^+$. Moreover, let

$$\mathbf{E}_{r_c}^{t+\tau}(s) = \begin{cases} \mathbf{0} & \forall s \in (0, \tau] \\ \mathbf{E}_r^t(s - \tau) & \forall s > \tau \end{cases} ,$$

be the static continuation of duration $\tau \in \mathbb{R}^{++}$ of the relative strain history. The extra stress associated the static continuation of duration τ is

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{r_c}^{t+\tau}) = 2 \int_0^{+\infty} \mu'(\xi + \tau) \mathbf{E}_r^t(\xi) d\xi = -\check{\mathbf{I}}^t(\tau, \mathbf{E}_r^t),$$

so $\check{\mathbf{I}}^t$ coincides with the opposite of the extra stress corresponding to the static continuation of the relative strain history; moreover

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{r_c}^{t+\tau}) = \mathbf{0}.$$

By introducing the vector space of the admissible relative strain histories

$$\Gamma_r = \left\{ \mathbf{E}_r^t : \mathbf{R}^{++} \rightarrow \text{Sym}; \left| \int_0^{+\infty} \mu'(\xi + \tau) \mathbf{E}_r^t(\xi) d\xi \right| < +\infty, \quad \forall \tau \geq 0 \right\}, \quad (2.4)$$

it is possible to give the following equivalence relation.

Definition 2.1 Two states $\sigma_j(t) = \mathbf{E}_{r_j}^t$, ($j = 1, 2$) are said to be equivalent, if the subsequent states $\sigma_j(t + \tau) = \mathbf{E}_{r_j}^{t+\tau}$ ($j = 1, 2$) satisfy the equality

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{r_1}^{t+\tau}) = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_{r_2}^{t+\tau}) \quad \forall \tau \in [0, d] \quad (2.5)$$

for all $P \in \Pi$ of duration d .

Definition 2.1 characterizes the states which are indistinguishable, because give the same extra stress. Let $\Sigma_{\mathcal{R}}$ be the quotient space defined by the equivalence relation (2.5), whose elements are the equivalence classes denoted by $\sigma_{\mathcal{R}}$ and named minimal states of the fluid.

In [2] it has been proved the following theorem.

Theorem 2.1 *For a viscoelastic fluid of type (2.1), two states σ_j , ($j = 1, 2$) are equivalent if and only if*

$$\int_0^{+\infty} \mu'(\xi + \tau) [\mathbf{E}_{r_1}^t(\xi) - \mathbf{E}_{r_2}^t(\xi)] d\xi = \mathbf{0}, \quad \forall \tau > 0. \quad (2.6)$$

Since Theorem 2.1 assures that (2.6) is an equivalent form of (2.5), recalling the definition of $\check{\mathbf{I}}^t$, relation (2.5) can be rewritten in the following manner:

$$\check{\mathbf{I}}^t(\tau, \mathbf{E}_{r_1}^t) = \check{\mathbf{I}}^t(\tau, \mathbf{E}_{r_2}^t), \quad \forall \tau > 0.$$

Therefore $\check{\mathbf{I}}^t$ characterizes the equivalence class $\sigma_{\mathcal{R}} \in \Sigma_{\mathcal{R}}$ and hence is the minimal state.

3 Thermodynamics and free energies.

Since in this paper we are concerned only with isothermal processes, the Second Law of Thermodynamics reduces to the Dissipation Principle.

Let us define the mechanical work along the process P , of duration d , starting from the initial state σ , as follows

$$W(\sigma, P) = \int_t^{t+d} \mathbf{T}(\mathbf{E}_r^\xi) \cdot \dot{\mathbf{E}}(\xi) d\xi = \int_0^d \mathbf{T}(\mathbf{E}_r^{t+\tau}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_P(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Dissipation Principle. *The work done on a cycle (σ, P) is non-negative, i.e.*

$$W(\sigma, P) = \oint_0^d \mathbf{T}(\mathbf{E}_r^{t+\tau}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_P(\tau) d\tau \geq 0,$$

the equality sign being referred to reversible processes [12], [21].

Let us introduce the notion of free energy.

Definition 3.1 A function $\Psi : \mathcal{D}_\Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a free energy if

1. the domain \mathcal{D}_Ψ is invariant under ρ ; namely, for any $\sigma_i \in \mathcal{D}_\Psi$ and $P \in \Pi$, the state $\sigma = \rho(\sigma_i, P) \in \mathcal{D}_\Psi$,
2. for any $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{D}_\Psi$ and process $P \in \Pi$, such that $\sigma_2 = \rho(\sigma_1, P)$,

$$\Psi(\sigma_2) - \Psi(\sigma_1) \leq W(\sigma_1, P). \tag{3.2}$$

The existence of a free energy was proved as consequence of the Dissipation Principle in [5].

In order to introduce the *maximum free energy*, we give the following

Definition 3.2 A state σ is *attainable* from σ^\dagger if there exists a process $P \in \Pi$ such that $\sigma = \rho(\sigma^\dagger, P)$.

If any σ is attainable from every other state, the simple material system is attainable.

Let Σ_{σ_0} be the set of the state attainable from σ_0 and

$$N(\sigma_0; \sigma) = \{w(\sigma_0, P) \text{ for any } P \in \Pi; \sigma = \tilde{\rho}(\sigma_0, P)\}$$

for any $\sigma \in \Sigma_{\sigma_0}$.

Theorem 3.1 The functional $\Psi_M : \Sigma_{\sigma^\dagger} \rightarrow \mathbb{R}^+$, where σ^\dagger is the zero state, defined by

$$\Psi_M(\sigma) = \inf N(\sigma^\dagger; \sigma)$$

is a free energy in the sense of Definition 3.1.

Moreover Ψ_M is called *maximum free energy* because, for any free energy $\Psi : \mathcal{D}_\Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\Psi(\sigma^\dagger) = 0$, then $\Sigma_{\sigma^\dagger} \subset \mathcal{D}_\Psi$ and

$$\Psi(\sigma) \leq \Psi_M(\sigma), \quad \forall \sigma \in \Sigma_{\sigma^\dagger}$$

Proof. See [9]

This formulation of Dissipation Principle requires that the simple material system is attainable, however, for a simple material system with fading memory, not all states are attainable; therefore, it is necessary to give a more restrictive formulation of the Second Law. To this aim, let

$$\mathcal{W}(\sigma) = \{W(\sigma, P); P \in \Pi\}$$

the set of the works done by all the possible processes $P \in \Pi$ applied to a given state $\sigma \in \Sigma$. A strong formulation of dissipation principle can be formulated in the following manner:

Strong Dissipation Principle. The set $\mathcal{W}(\sigma)$ is bounded below for all $\sigma \in \Sigma$ and there exists a state σ^\dagger , said zero state, such that

$$\inf \mathcal{W}(\sigma^\dagger) = 0.$$

The assumption of the Strong Dissipation Principle compels that the set of the admissible states is constituted by the relative strain histories (2.4) which satisfy the following condition:

$$\Sigma = \{ \sigma = \mathbf{E}_r^t \in \Gamma_r; \inf \mathcal{W}(\sigma) > -\infty \}. \quad (3.3)$$

In fact, if the condition assumed in (3.3) does not hold, then $-W(\sigma, P)$, which represent the work yielded by the material, is unbounded from above. Consequently, as P varies, we could extract infinite energy, thus generating a perpetual motion.

Definition 3.3 A functional Ψ_m is said the minimum free energy if

1. Ψ_m is a free energy in the sense of Definition 3.1 with domain $S_{\Psi_m} = \Sigma$,
2. the zero state $\sigma^\dagger \in \Gamma_*$ and $\Psi_m(\sigma^\dagger) = 0$,
3. for any free energy $\Psi : S_\Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$, with $\sigma^\dagger \in S_\Psi$ and $\Psi(\sigma^\dagger) = 0$, we have

$$\Psi(\sigma) \geq \Psi_m(\sigma) \quad \forall \sigma \in S_\Psi. \quad (3.4)$$

Remark 3.1 Inequality (3.4) allows us to prove that the minimum free energy (if it exists) is unique

About the existence of the minimum free energy, the following theorem is proved in [9].

Theorem 3.2 *The functional*

$$\Psi_m(\sigma) = -\inf \mathcal{W}(\sigma) \quad (3.5)$$

is the minimum free energy.

Since the right-hand side of (3.5) is the maximum recoverable work, i.e. the maximum quantity of work we can obtain from the material at a given state, the minimum free energy represents the amount of energy that is available at a given state [9], [16], [17].

A different equivalence relation between states, based on the work was given in [8]. Recently [2] this equivalence relation has been studied for viscoelastic fluids.

Definition 3.4 Two states $\sigma_j(t) = \mathbf{E}_{r_j}^t$ ($j = 1, 2$) are said w-equivalent if for every $P : [0, \tau) \rightarrow Sym$ and for every $\tau > 0$ they satisfy

$$W(\sigma_1, P) = W(\sigma_2, P).$$

Thus, two states are w-equivalent when continued with the same process P , yield the same work. Always in [2] it has been shown the following result for a viscoelastic fluid.

Lemma 3.1 *For every fluid, characterized by the constitutive equation (2.1), two states are w-equivalent if and only if they are equivalent in the sense of Definition 2.1.*

As a consequence of Lemma 3.1 we have that if $\sigma \in \sigma_{\mathcal{R}}$ then $W(\sigma, P) = W(\sigma_{\mathcal{R}}, P)$ for all $P \in \Pi$, hence

$$\psi_m(\sigma) = \inf \mathcal{W}(\sigma) = \inf \mathcal{W}(\sigma_{\mathcal{R}}) = \psi_m(\sigma_{\mathcal{R}}). \tag{3.6}$$

Equation (3.6) allows us to consider the minimum free energy independent of definition of state.

We conclude this section observing that the relation (3.1) and (3.2) give

$$\dot{\psi}(t) \leq \mathbf{T}(\mathbf{E}_r^t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t). \tag{3.7}$$

at any time t where $\dot{\mathbf{E}}$ is continuous. As a consequence (3.7) we have

$$\dot{\psi}(t) + D_{\psi}(t) = \mathbf{T}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t),$$

where the function $D(t)$, called the internal dissipation, must be non-negative.

3.1 Examples of free energies

An important example is given by the Graffi-Volterra functional

$$\psi_G(t) = - \int_0^{+\infty} \mu'(s) \mathbf{E}_r^t(s) \cdot \mathbf{E}_r^t(s) ds. \tag{3.8}$$

which is a free energy if

$$\mu \in L^2(\mathbb{R}^+), \quad \mu'(s) \leq 0, \quad \mu''(s) \geq 0 \quad s \in \mathbb{R}^+. \tag{3.9}$$

These conditions coincide with those assumed by Slemrod in [22] to study the stability of the evolutive problem.

The time derivative of (3.8) is

$$\dot{\psi}_G(t) = \mathbf{T}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) - \int_0^{+\infty} \mu''(s) \mathbf{E}_r^t(s) \cdot \mathbf{E}_r^t(s) ds,$$

so that the dissipation function is

$$D_{\psi_G}(t) = \int_0^{+\infty} \mu''(s) \mathbf{E}_r^t(s) \cdot \mathbf{E}_r^t(s) ds.$$

A general representation of free energies in viscoelasticity for the scalar case is given by

$$\psi(t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mu_{12}(s, u) \mathbf{E}_r^t(s) \cdot \mathbf{E}_r^t(u) ds du, \tag{3.10}$$

where

$$\mu_{12}(s, u) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} \mu(s, u), \quad \mu_{12}(+\infty, u) = \mu_{12}(s, +\infty) = 0$$

and μ_{12} must give a non-negative value of the same integral for all histories. Moreover, by imposing the conditions

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \mu(0, s) = \mu(s, 0), & \mu(s, +\infty) &= \mu(+\infty, u) = 0. \\ \mu_1(s, +\infty) &= \mu_2(+\infty, u) = 0 & \mu_1(s, 0) &= \mu_2(0, s) = \mu'(s), \end{aligned}$$

the time derivative is

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [\mu_1(s, u) + \mu_2(s, u)] \dot{\mathbf{E}}^t(u) \cdot \dot{\mathbf{E}}^t(s) ds du \\ &\quad + 2 \int_0^{+\infty} \mu'(s) \mathbf{E}_r^t(s) ds \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) \end{aligned}$$

and the dissipation function is

$$D_\psi(t) = - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K_{12}(s, u) \mathbf{E}_r^t(s) \cdot \mathbf{E}_r^t(u) ds du,$$

where

$$K(s, u) = \mu_1(s, u) + \mu_2(s, u), \quad K_{12}(s, u) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} K(s, u).$$

Another functional, which use the minimal representation of the state,

$$\psi_F(t) = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu'(\tau)} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) \cdot \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) d\tau, \quad (3.11)$$

where

$$\check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) = \frac{d}{d\tau} \check{\mathbf{I}}^t(\tau, \mathbf{E}_r^t) = -2 \int_0^{+\infty} \mu''(\xi + \tau) \mathbf{E}_r^t(\xi) d\xi,$$

is a free energy if the kernel μ satisfies the property (3.9).

The domain of the functional ψ_F is

$$H'_F(\mathbb{R}^+) = \left\{ \check{\mathbf{I}}^t; \left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu'(\tau)} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) \cdot \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) d\tau \right| < +\infty \right\},$$

which is a very much larger space than that for the definition of ψ_G .

The free energy ψ_F can be rewritten in terms of the relative strain history \mathbf{E}_r^t in the following manner:

$$\psi_F(t) = - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu'(\tau)} \mu''(s_1 + \tau) \mu''(s_2 + \tau) \mathbf{E}_r^t(s_1) \cdot \mathbf{E}_r^t(s_2) ds_1 ds_2 d\tau,$$

so that ψ_F is a free energy of type (3.10) with

$$\mu(s, u) = - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu'(\tau)} \mu'(s + \tau) \mu'(u + \tau) d\tau,$$

moreover the function K becomes

$$K(s, u) = \frac{1}{\mu'(0)} \mu'(s) \mu'(u) - \int_0^{+\infty} \frac{\mu''(\tau)}{[\mu'(\tau)]^2} \mu'(s + \tau) \mu'(u + \tau) d\tau$$

and the assumptions on μ' , μ'' assure that the dissipation is non-negative.

To obtain a more direct proof of the fact that ψ_F is a free energy, we consider the derivative of (3.11) with respect to time,

$$\dot{\psi}_F = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu'(\tau)} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) \cdot \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) d\tau.$$

Since

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) &= \frac{d}{dt} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) = -2 \int_0^{+\infty} \mu''(\xi + \tau) \dot{\mathbf{E}}^t(\xi) d\xi - 2\mu'(\tau) \dot{\mathbf{E}}(t) \\ &= \frac{d}{d\tau} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) = \check{\mathbf{I}}_{(2)}^t(\tau) - 2\mu'(\tau) \dot{\mathbf{E}}(t) \end{aligned}$$

and

$$\int_0^{+\infty} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) d\tau = 2 \int_0^{+\infty} \mu'(\xi) \mathbf{E}_r^t(\xi) d\xi = \mathbf{T}(t) + p(t) \mathbf{I}$$

by virtue of the constraint of incompressibility, we have

$$\dot{\psi}_F(t) = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \left| \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) \right|^2 d\tau + \mathbf{T}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t).$$

An integration by parts gives

$$\dot{\psi}_F(t) = \mathbf{T}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) + \frac{1}{4} \frac{1}{\mu'(0)} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(0) \cdot \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(0) + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\mu'(\tau)} \right] \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) \cdot \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) d\tau.$$

so that the dissipation is given by

$$D_{\psi_F}(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\mu'(0)} \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(0) \cdot \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(0) - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{\mu'(\tau)} \right] \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) \cdot \check{\mathbf{I}}_{(1)}^t(\tau) d\tau \geq 0.$$

At last, if there exists $\alpha > 0$ such that

$$\mu''(\tau) + \alpha \mu'(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^+,$$

then

$$D_{\psi_F}(t) \geq \alpha \psi_F(t).$$

4 Evolutive problem and exponential decay

Let Ω a bounded domain in \mathbb{R}^3 with smooth boundary $\partial\Omega$.

The linear approximation of the equations of motion for the initial boundary value problem with Dirichlet boundary conditions are:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot [-p(\mathbf{x})\mathbf{I} + \int_{\mathbb{R}^+} \mu(s) \nabla \cdot \mathbf{v}^t(\mathbf{x}, s) ds], \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^0(\mathbf{x}, s) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, -s) \end{cases}, \quad (4.1)$$

For later convenience we introduce the following notations: let $L_s^2(\Omega)$ and $H_{s_0}^1(\Omega)$ be the Hilbert spaces obtained by the completion of solenoidal vector fields $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ in the L^2 and H^1 norm respectively. Moreover, let $L_\pi^2(\Omega)$ be the Hilbert space obtained by the completion of irrotational vector fields $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ in the L^2 norm. Then we have $L^2(\Omega) = L_s^2(\Omega) \oplus L_\pi^2(\Omega)$.

In [3] existence and uniqueness of solution of (4.1) are proved moreover, through the semigroup theory, the exponential decay of the energy has been obtained when the memory kernel μ satisfies the following conditions:

$$\mu'(s) < 0, \quad \mu''(s) \geq 0, \quad \mu'(s) + \kappa\mu''(s) \leq 0 \text{ with } \kappa > 0.$$

In this section, we assume different conditions on the memory kernel and use Laplace transform method to study the exponential stability.

To this end, we recall some properties on Fourier and Laplace Transforms.

4.1 Some remarks about Fourier and Laplace Transforms

Let $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function, then for any complex number $z = \zeta + i\omega$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z) &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-zs} g(s) ds = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\zeta s} \cos \omega s g(s) ds - i \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\zeta s} \sin \omega s g(s) ds \\ &= \tilde{g}_c(z) - i\tilde{g}_s(z), \end{aligned}$$

denotes the Laplace transform of g , while, for any real number ω .

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-i\omega s} g(s) ds = \int_{\mathbb{R}^+} \cos \omega s g(s) ds - i \int_{\mathbb{R}^+} \sin \omega s g(s) ds \\ &= \hat{g}_c(\omega) - i\hat{g}_s(\omega), \end{aligned}$$

denotes the half range Fourier transform of g .

Remark 4.1 (Relations between Laplace and Fourier transforms) For any complex $z = \zeta + i\omega \in \mathbb{C}^{++}$, ($\zeta \in \mathbb{R}^{++}$, $\omega \in \mathbb{R}$) the Laplace transform $\tilde{\mu}$ is related to the cosine Fourier transform $\hat{\mu}_c$ by the following relation

$$\tilde{\mu}(\zeta + i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\mu}_c(\tau)}{\zeta + i(\omega - \tau)} d\tau. \quad (4.2)$$

As a consequence of (4.2), under assumptions \mathcal{P}_1 and \mathcal{P}_2 , for any $z \in \mathbb{C}^{++}$ we have:

$$\zeta \tilde{\mu}_c(\zeta + i\omega) \geq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}_c(\tau) d\tau = M > 0, \tag{4.3}$$

Lemma 4.1 For any $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ such that $\tilde{\mu}(\zeta_0 + i\omega)$ is well defined we have

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega \widehat{\mu}_s(\zeta_0 + i\omega)] = \mu_0. \tag{4.4}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega^2 \tilde{\mu}_c(\zeta_0 + i\omega)] = \zeta_0 \mu_0 - \mu_1. \tag{4.5}$$

Proof. To estimate the limits (4.4) and (4.5) we introduce the function

$$\phi_{\zeta_0}(s) = e^{-\zeta_0 s} \mu(s).$$

The hypothesis on μ assures that ϕ_{ζ_0} , ϕ'_{ζ_0} and ϕ''_{ζ_0} are Fourier transformable, moreover

$$\widehat{\phi}_{\zeta_0}(\omega) = \tilde{\mu}(\zeta_0 + i\omega).$$

The properties of the Fourier transform yield

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega (\widehat{\phi}_{\zeta_0})_s(\omega) &= \phi_{\zeta_0}(0) = \mu_0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 (\widehat{\phi}_{\zeta_0})_c(\omega) &= -\dot{\phi}_{\zeta_0}(0) = \zeta_0 \mu_0 - \mu_1 \end{aligned}$$

4.2 Exponential decay: sufficient conditions

The following assumptions on the relaxation function hold:

\mathcal{P}_1 – $\mu \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $\mu' \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap H^1(\mathbb{R}^+)$,

\mathcal{P}_2 – The constitutive equations satisfy the thermodynamic restrictions for a linear viscoelastic fluid. In particular,

$$\mu(0) = \mu_0 > 0,$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_c(\mathbf{x}, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^+} \cos \omega s \mu(s) ds > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \\ -\infty < \mu'(0) &= \mu_1 < 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

\mathcal{P}_3 – the function μ has the following exponential decay property: there exists $\lambda > 0$ so that

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{\lambda t} |\mu(t)| dt < \infty. \tag{4.7}$$

We consider the problem (4.1) and require that the initial history satisfies the following conditions:

i) $\mathbf{v}^0(\cdot, s) \in H_0^1(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}^+$;

ii) the function

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \int_t^\infty \mu(s) \nabla \mathbf{v}^0(\mathbf{x}, s - t) ds$$

belongs to $H^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ and there exists $\nu > 0$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{\nu t} (\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2}^2 + \|\dot{\mathbf{f}}(t)\|_{L^2}^2) dt < \infty.$$

Under these hypotheses, we rewritten the problem (4.1) the following manner

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \left[-p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + \int_0^t \mu(s) \nabla \cdot \mathbf{v}^t(\mathbf{x}, s) ds \right] + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (4.8)$$

moreover we require¹

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.9)$$

Let

$$\begin{cases} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, z) = 0 \\ z \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, z) = -\nabla \tilde{p}(\mathbf{x}, z) + \nabla \cdot [\tilde{\mu}(z) \nabla \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, z)] + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, z) \\ \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, z)|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.10)$$

be the Laplace transform of problem (4.8). The hypotheses on μ and f assure that the system is well defined for every complex number $z \in \mathbb{C}_\gamma = \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\{z\} > -\gamma\}$, with $\gamma = \min\{\lambda, \nu\}$.

Now we consider the variational formulation of the linear differential system (4.10) and recall the definition of a weak solution.

Definition 4.1 A function $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z) \in H_{s_0}^1(\Omega)$ is a weak solution to (4.10) if

$$z < \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z), \mathbf{u} > + \tilde{\mu}(z) < \nabla \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z), \nabla \mathbf{u} > = < \tilde{\mathbf{f}}(\cdot, z), \mathbf{u} > \quad (4.11)$$

¹The conditions on the initial values are not restrictive. In fact, if \mathbf{v} is a solution of (4.8)_{1,2,3} with initial data $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ and source \mathbf{f} with $\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x})$, then we introduce a smooth function \mathbf{u} with the following properties:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\cdot, t) = \mathbf{0} \text{ for } t > t_0.$$

The function $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ a problem formally equal to (4.8) with source

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \left[\int_0^t \mu(s) \nabla \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, s) ds \right]$$

and

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \left[\int_{t-t_0}^t \mu(s) \nabla \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, s) ds \right], \quad \forall t > t_0.$$

Moreover, the relation

$$\int_{t_0}^{+\infty} e^{\nu s} \int_{t-t_0}^t \mu(s) ds dt = \frac{e^{\nu t_0}}{\nu} \int_0^\infty e^{\nu s} \mu(s) ds - \frac{e^{\nu t_0}}{\nu} \int_0^{t_0} \mu(s) ds - \frac{1}{\nu} \int_{t_0}^\infty e^{\nu s} \mu(s) ds$$

assures that \mathbf{g} has the same exponential behavior of \mathbf{f} .

for every complex vector $\mathbf{u} \in H_{s_0}^1(\Omega)$, where $\langle \mathbf{v}(\cdot, z), \mathbf{u} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, z) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \, dx$ and \mathbf{u}^* denotes the conjugate of \mathbf{u} .

Following Temam ([24], Lemma 2.1) it is possible to prove that if $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z)$ satisfies (4.11), then there exists a scalar field $\tilde{p}(\cdot, z) \in L^2(\Omega)$ such that the pair $(\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z), \tilde{p}(\cdot, z))$ is solution of (4.10) in distributional sense.

By denoting with $\mathcal{L}(z)$ the operator

$$\mathcal{L}(z)\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z) = z\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z) - \nabla \cdot (\tilde{\mu}(z)\nabla\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z)),$$

we prove the following

Theorem 4.1 *If the kernel μ satisfies the hypotheses $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3$, then there exists a constant $\beta > 0$ so that $\mathcal{L}(z)$ has an inverse $\mathcal{L}^{-1}(z)$ for all $z \in \mathbb{C}_\beta$ and the variational problem (4.10) has a unique solution. Moreover the application $z \rightarrow \mathcal{L}^{-1}(z)$ is holomorphic for $z \in \mathbb{C}_\beta$ and there exists a constant C , independent on z such that*

$$\|\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{H^1}^2 \leq C \left[\|z\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2}^2 \right] \quad \forall z \in \mathbb{C}_\beta. \tag{4.12}$$

By general theorems on elliptic systems (see [15], [24], [25]) the coerciveness of

$$a_z(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = z \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \tilde{\mu}(z) \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle \tag{4.13}$$

assures existence and uniqueness of a weak solution to (4.10). Our aim is to show that the uniform coerciveness of a_z for $z \in \mathbb{C}_\beta$ (with β a suitable positive number) is a consequence of the hypotheses $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3$ on the relaxation function and of the requirements i)– ii) on the past history. To the end we pose $z = \zeta + i\omega$ and consider the real part of (4.13)

$$\text{Re}[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] = \zeta \|\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 + \tilde{\mu}_c(z) \|\nabla\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2. \tag{4.14}$$

If $\zeta > 0$, the thermodynamic condition (4.6) and relation (4.3) yields

$$\zeta \text{Re}[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] \geq M \|\nabla\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2. \tag{4.15}$$

Let $-\gamma < \zeta \leq 0$ and $|\omega| < K$. The continuity of a_z with respect to z , assures that there exists κ'_K such that if $|\zeta| < \kappa'_K < \gamma$ and $|\omega| < K$ then

$$\tilde{\mu}_c(z) > \frac{1}{2} \inf_{|\omega| < K} \hat{\mu}_c(\omega) = M_K$$

By choosing

$$|\zeta| < \min\left\{\kappa'_K, \frac{M_K}{C_\Omega}\right\} = \kappa_K,$$

where C_Ω is the Poincaré constant, i.e. $\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \leq C_\Omega \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2$, we obtain

$$\text{Re}[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] \geq M_K \|\nabla\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 \tag{4.16}$$

When $|\omega|$ tends to ∞ we introduce the imaginary part of a_z

$$\mathcal{I}m[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] = \omega \|\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 - \tilde{\mu}_s(z) \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 \quad (4.17)$$

and observe that (4.14) and (4.17) given

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathcal{R}e[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] - \zeta \omega \mathcal{I}m[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] \\ = [\omega^2 \tilde{\mu}_c(z) + \zeta \omega \tilde{\mu}_s(z)] \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

By (4.4) and (4.5) it is possible to find M_∞ , such that

$$\omega^2 \tilde{\mu}_c(z) + \zeta \omega \tilde{\mu}_s(z) > \zeta \mu_0 - \frac{1}{2} \mu'_0, \quad \forall \zeta + i\omega \in \mathbb{C}_\gamma, \quad \text{with } |\omega| > M_\infty.$$

By choosing $\zeta > \frac{\mu_1}{4\mu_0}$, we obtain

$$\omega^2 \mathcal{R}e[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] - \zeta \omega \mathcal{I}m[a_z(\tilde{\mathbf{v}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(z))] > \frac{\mu'_0}{4} \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2. \quad (4.18)$$

As a consequence of (4.15), (4.16) and (4.18) we obtain

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 \leq \alpha_1 \left[\|z\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2} \|z\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2} + \|\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2} \|\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2} \right] \quad (4.19)$$

where α_1 does not depend on z . On the other hand, if $\tilde{\mathbf{v}}(z)$ is a solution to (4.10) it is easy to show that

$$\|z\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 \leq (|z\tilde{\mu}(z)| + \frac{C_\Omega}{2}) \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 + \frac{C_\Omega}{2} \|z\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2}^2, \quad (4.20)$$

substituting (4.19) in (4.20), we obtain

$$\|z\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 \leq (|z\tilde{\mu}(z)| + \alpha_2) \|z\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2}^2, \quad (4.21)$$

where α_2 does not depend on z . Recalling that $|z\tilde{\mu}(z)|$ is bounded on \mathbb{C}_γ , (4.19) and (4.21) assures that (4.12) holds in \mathbb{C}_β with $\beta = \min\{K_\kappa, -\frac{\mu_1}{\mu_0}\}$.

The previous Theorem 4.1 with classic results on elliptic systems depending on a parameter (see [25] Lemma 23.2) allows us to state the following

Theorem 4.2 *Under the hypothesis of Theorem 4.1, for any $z \in \mathbb{C}_\beta$ the problem (4.10) has one and only one solution $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z) \in H_{s_0}^1(\Omega)$. Moreover the functions $\|\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{H_{s_0}^1}^2$ and $\|z\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2$ are analytic in \mathbb{C}_β and goes to zero when z goes to infinity.*

Recalling the relations between the Laplace transform and the Fourier transform of a causal function, Theorem 4.2 allows us to conclude that $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, z)$ is the Fourier transform of the causal function $e^{\zeta t} \mathbf{v}(\cdot, t)$ for any $\zeta > -\beta$, where \mathbf{v} solution of the problem (4.8) with data that satisfy (4.9). Also, as a consequence of the estimation (4.12) on the Laplace transform we have

$$\|\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{H^1}^2 + \|z\tilde{\mathbf{v}}(z)\|_{L^2}^2 \leq M \left[\|\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2}^2 + \|z\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2}^2 \right]$$

and the Parseval relation assures for $\zeta > -\delta$

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{\zeta t} \left[\|\mathbf{v}(t)\|_{H^1}^2 + \|\dot{\mathbf{v}}(t)\|_{L^2}^2 \right] dt \leq M \int_{\mathbb{R}^+} e^{\zeta t} \left[\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2}^2 + \|\dot{\mathbf{f}}(t)\|_{L^2}^2 \right] dt < \infty.$$

4.3 Exponential decay: necessary condition

The following theorem shows that the exponential decay of μ is a necessary condition for the exponential decay of \mathbf{v} .

Theorem 4.3 *Let us consider the problem (4.8) under the assumptions $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ and $\mu(s) \geq 0$. If for any source \mathbf{f} with*

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{\gamma t} \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2}^2 dt < \infty, \quad \gamma > 0$$

the solution of the problem (4.1) satisfies the exponential decay property

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{\eta t} \left[\|\mathbf{v}(t)\|_{H_{s_0}^1}^2 + \|\dot{\mathbf{v}}(t)\|_{L_s^2}^2 \right] dt < \infty,$$

for some positive constant η , then μ has the exponential decay property (4.7).

The proof is founded on the following result (see [14], [19])

Lemma 4.2 *Let $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ be a neighborhood of 0 and $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ a holomorphic function. If $\mu \in L^1(\mathbb{R}^+)$ is a nonnegative function such that $\tilde{\mu}(z) = g(z)$ for every $z \in \mathcal{U} \cup \mathbb{C}^+$, then μ has the exponential decay property (4.7).*

Proof of Theorem 4.3. Let $\delta = \min\{\gamma, \eta\}$. The hypotheses on \mathbf{f} and \mathbf{v} assure that the Laplace transform of $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \nabla \mathbf{v}$ and \mathbf{f} are defined for any $z \in \mathbb{C}_\delta$, moreover, for any $z \in \mathbb{C}^+$, $\tilde{\mathbf{v}}(z)$ is a weak solution of (4.10). Rewriting (4.11) for $z = 0$, we obtain

$$\tilde{\mu}(0) \langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}(0), \nabla \mathbf{u} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{f}}(0), \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in H_{s_0}^1.$$

If $\|\tilde{\mathbf{f}}(0)\|_{L^2} > 0$, then $\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}(0)\|_{L^2} > 0$ and the function

$$g(z) = \langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}(z), \nabla \tilde{\mathbf{v}}(0) \rangle$$

is non zero in a suitable neighborhood \mathcal{U} of 0. In addition, for the properties of Laplace transform, g is holomorphic in \mathcal{U} . By using in (4.11) as a test function $\tilde{\mathbf{v}}(0)$, we obtain

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{\langle \tilde{\mathbf{f}}(z), \tilde{\mathbf{v}}(0) \rangle}{g(z)}. \tag{4.22}$$

Note that the right side hand of (4.22) is holomorphic in \mathcal{U} , then Lemma 4.2 assures that μ has the exponential decay property (4.7).

If $\|\tilde{\mathbf{f}}(0)\|_{L^2} = 0$, but $\|\mathbf{f}(t)\|_{L^2}$ is not identically null in t (because we do not consider the trivial solution), then $\|\tilde{\mathbf{f}}(z)\|_{L^2}$ is not identically null. Because \mathbf{f} is a holomorphic function, we have

$$\tilde{\mathbf{f}}(z) = z^k \varphi(z) \quad \forall z \in \mathcal{U}$$

where φ is a holomorphic function and $\|\tilde{\varphi}(z)\|_{L^2} > 0$ in some neighborhood \mathcal{U} of 0. It is easy to show that it is possible to give a similar representation for the solution $\tilde{\mathbf{v}}$ of (4.11), i.e.

$$\tilde{\mathbf{v}}(z) = z^k \mathbf{w}(z),$$

where \mathbf{w} is a holomorphic function. This positions allow to rewrite (4.11) in the following manner

$$\tilde{\mu}(z) \langle \nabla \tilde{\mathbf{w}}(z), \nabla \mathbf{u} \rangle = -z \langle \tilde{\mathbf{w}}(z), \mathbf{u} \rangle + \langle \tilde{\varphi}(z), \mathbf{u} \rangle$$

and to replay the previous proof.

5 An example

A family of kernels μ that has the exponential property (4.7) is given by relaxation functions that are finite sum of exponentials, i.e.

$$\mu(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-a_i s} \tag{5.1}$$

where α_i and a_i , $i = 1, \dots, n$ are strictly positive.

For these materials the minimal state is given by n tensor-value variables \mathbf{e}_i , in fact

$$\check{\mathbf{T}}^t(\tau) = - \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mathbf{e}_i(t) e^{-\alpha_i \tau}$$

where

$$\mathbf{e}_i(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha_i s} \mathbf{E}_\tau^t(s) ds.$$

Several authors [7], [10] have proved that a linear viscoelastic solid with relaxation function of type (5.1) has a behavior of *rate type* and the stress-strain relation can be rewritten in differential form. It is easy to extend this result to a linear viscoelastic fluid obtaining the constitutive equation

$$\sum_{i=0}^n \beta_i \frac{d^i}{dt^i} \bar{\mathbf{T}}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \frac{d^i}{dt^i} \mathbf{D}(t),$$

where the constants β_i and λ_i are functions of α_i and a_i , moreover it is possible to assume $\beta_0 = 1$ and, for physical reasons, $\beta_n \neq 0$.

The evolutive problem (4.8), can be rewritten substituting to equation (4.8)₂ the following equation

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^i}{dt^i} \left[\beta_{i+1} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \lambda_i \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] + \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ = \sum_{i=0}^n \beta_i \frac{d^i}{dt^i} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla p(\mathbf{x}, t)]. \end{aligned}$$

Acknowledgements

Research performed under the auspices of G.N.F.M. - I.N.d.A.M. and partially supported by Italian M.I.U.R. within the project "Modelli e metodi matematici nella fisica del continuo" and by the University of Bologna within the project "Modelli matematici di transizione di fase per sistemi complessi".

References

- [1] G. Amendola, The minimum free energy for incompressible viscoelastic fluids, *Math. Meth. Appl. Sci.* **29** (2006) 2201–2223.
- [2] G. Amendola, M. Fabrizio, The maximum recoverable work for incompressible viscoelastic fluids, *Differential Integral Equation* **20** (2007) 445–466.
- [3] G. Amendola, M. Fabrizio, M. Golden, Maximum recoverable work and free energies for incompressible viscoelastic fluids with applications to PDEs, *Ukrainian Mathematical Journal* in press
- [4] B.D. Coleman, W. Noll, Foundation of linear viscoelasticity, *Rev. Mod. Phys.* **33** (1961) 239–249.
- [5] B.D. Coleman, D.R. Owen, A mathematical foundation of Thermodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **54** (1974) 1–104.
- [6] W.A. Day, Reversibility, recoverable work and free energy in linear viscoelasticity, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **23** (1970) 1–14.
- [7] M. De Angelis, P. Massarotti, P. Renno, Wave hierarchies in viscoelasticity, *Mathematical and computer modelling* **40** (2004) 883–890.
- [8] M. Fabrizio, C. Giorgi, Sulla termodinamica dei materiali semplici, *Boll. U.M.I.* (6) **5-B** (1986) 441–464.
- [9] M. Fabrizio, C. Giorgi, A. Morro, Free energies and dissipation properties for systems with memory, *Arch. Rational Mech. Anal.* **125** (1994) 341–373.
- [10] M. Fabrizio, D. Graffi, On the notion of state for viscoelastic material of "rate" type, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **83** (1990) 201–208.
- [11] M. Fabrizio, B. Lazzari, On asymptotic stability for linear viscoelastic fluids, *Differential Integral Equation* **6** (1991) 139–152.
- [12] M. Fabrizio, A. Morro, Reversible processes in thermodynamics of continuous media, *J. Nonequil. Thermodyn.* **16** (1991) 1–12.
- [13] M. Fabrizio, A. Morro, *Mathematical problems in linear viscoelasticity*, SIAM, Philadelphia, 1992.

- [14] M. Fabrizio, S. Polidoro, Asymptotic decay for some differential systems with fading memory *Applicable Analysis* **81** (2002) 1245–1264.
- [15] G. Fichera, Existence Theorems in Elasticity, *Handbuch der Physik*, vol. VI. Springer Verlag, Heidelberg 347-389, 1972.
- [16] G. Gentili, Maximum recoverable work, minimum free energy and state space in linear viscoelasticity, *Quart. Appl. Math.* **LX** (2002) 153–182.
- [17] J.M. Golden, Free energy in the frequency domain: the scalar case, *Quart. Appl. Math.* **LVIII** (2000) 127–150.
- [18] D.D. Joseph, *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, Springer Verlag, New York, 1990.
- [19] S. Murakami, Exponential asymptotic stability of scalar linear Volterra equations, *Differential Integral Equations* **4** (1991) 519–525.
- [20] W. Noll, A new mathematical theory of simple materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **48** (1972) 1–50.
- [21] J. Serrin, An outline on thermodynamical structure, Article in *New Perspective in Thermodynamics*, ed. Serrin J., Springer, Berlin, 1986.
- [22] M. Slemrod, An hereditary partial differential equation with applications in the theory of simple fluids, *Arch. Rational Mech. Anal.* **62** (1976) 303–332.
- [23] M. Slemrod, An Energy stability method for simple fluids, *Arch. Rational Mech. Anal.* **68** (1978) 1–18.
- [24] R. Temam, *Navier Stokes equations*, North - Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.
- [25] F. Trèves, *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1976.
- [26] C. Truesdell, The meaning of viscometric in fluid dynamics, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **6** (1974) 111–137.
- [27] C. Truesdell, W. Noll, *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*, in *Handbuch der Physik III/3*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1964.

An Allelopathic Competition Model with an External Toxicant¹

Paolo Fergola^{*}, Jianquan Li^{**}, Catello Tenneriello^{*}, Zhien Ma^{***}

A mathematical model of an allelopathic competition in a chemostat-like environment with an external toxicant is studied. The global stability of a boundary meaningful equilibrium (corresponding to the extinction of one of the two competing species) has been proved by using both the theory of asymptotic autonomous systems and LaSalle invariance principle. Numerical simulations have shown that the dynamical behaviour of system is complex and rich.

1. Introduction

The chemostat, a laboratory apparatus used for the continuous culture of microorganisms, has played an important role in microbiology and population

¹ Supported by the Nature Science Foundation of China (10531030, 10471040), China Ministry of Science and Tecnology (2004BA719A01).

Gruppo Nazionale della Fisica Matematica and the Italian Ministry of University and Research.

^{*} Paolo Fergola and Catello Tenneriello. Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Cintia, 80126 Napoli, Italy. E-mail: fergola@dma.unina.it, catello.tenneriello@unina.it

^{**} Jianquan Li. Department of Mathematics, Yuncheng College, Yuncheng Shanxi 044000, China. Department of Applied Mathematics and Physics Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China. E-mail: jianq_li@263.net

^{***} Zhien Ma. Department of Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China. E-mail: zhma@mail.xjtu.edu.cn

dynamics [1]-[5]. It is the simplest idealization of a biological system where the parameters are measurable, the experiments are reasonable, and the mathematics is tractable [4]. Experiment verification of the match between theory and experiment in the chemostat can be found in [6]. A detailed mathematical description of competition in the chemostat may be found in [4].

For competition for a limiting resource in a chemostat between two populations in the presence of an external toxicant several papers have been written as, for instance, [7]-[14]. When the toxicant inhibits only one of the populations, Lenski and Hattingh [15] consider a model as follows:

$$\begin{aligned} S' &= (S^{(0)} - S)D - e^{-\mu p} \frac{m_1 x S}{a_1 + S} - \frac{m_2 y S}{a_2 + S}, \\ x' &= x(e^{-\mu p} \frac{m_1 S}{a_1 + S} - D), \\ y' &= y(\frac{m_2 S}{a_2 + S} - D), \\ p' &= (p^{(0)} - p)D - \frac{\delta y p}{K + p}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$S(t)$ denotes the nutrient concentration at time t in the culture vessel, $x(t)$ and $y(t)$ the concentration of the competitors, and $p(t)$ the concentration of the inhibitor against the competitor (x).

$S(0)$ is the input concentration of the nutrient; $p(0)$ is the input concentration of the inhibitor; D is the dilution rate of the chemostat. $S(0)$, $p(0)$ and D are under the control of the experimenter.

m_i , a_i , $i = 1, 2$ are the maximal growth rates of competitors without an inhibitor and the half saturation constants, respectively. These parameters are measurable in the laboratory. δ and K play similar roles for the pollutant, δ being the uptake by y , and K being a half saturation parameter. $e^{-\mu p}$ represents the degree of inhibition of p on the growth rate (or uptake rate) of x .

For (1.1), some local stability results are obtained in [15]. In [16] Hsu and Waltman reduce the model (1.1) to a three-dimensional competitive system, apply the theory of monotone flows to get several global results, find the case of oscillatory coexistence by numerical simulation.

Model (1.1) describes a purely exploitative competition. But we know that in nature microorganisms can produce chemical compounds against their rivals. In [17] Hsu and Waltman consider a model of competition in the chemostat of two competitors for a single nutrient where one of the competitors can produce a toxin against its opponent at some cost to its reproductive abilities. By assuming that this toxicant is of lethal type, the model considered in [17] takes the form

$$\begin{aligned} S' &= (S^{(0)} - S)D - \frac{m_1 S}{a_1 + S} \frac{x}{\eta_1} - \frac{m_2 S}{a_2 + S} \frac{y}{\eta_2}, \\ x' &= x(\frac{m_1 S}{a_1 + S} - D - \gamma p), \\ y' &= y((1 - k) \frac{m_2 S}{a_2 + S} - D), \\ p' &= k \frac{m_2 S y}{a_2 + S} - D p. \end{aligned} \quad (1.2)$$

The meanings of $S^{(0)}$, D , m_i and a_i ($i = 1, 2$) are the same as model (1.1). Here, $p(t)$ is the concentration of toxin produced at time t by the competitor (y), η_i , $i = 1, 2$, the yield constants, γ the coefficient of the interaction between the toxin and the competitor (x), k the fraction of potential growth devoted to producing the toxin. $k = 0$ implies that model (1.2) is asymptotic to the standard chemostat, and $k = 1$ implies that all uptake of micro-organism (y) is devoted to toxin production and results in no growth and thus extinction. The complete characterization of the outcome of this competition is given in terms of the relevant parameters in the hyperbolic cases.

Braselton and Waltman [18] substitute the constant fraction k in (1.2) into a function fraction $k(x, y)$, which reflects that the toxin production relates to the concentrations $x(t)$ and $y(t)$. In [18], a few rigorous analytical results have been obtained for a general $k(x, y)$ and two special cases are considered. In contrast to the constant case, a much wider set of outcomes is possible including interior, stable rest points and stable limit cycles.

In [19]-[22] several further results have been obtained about the allelopathic competitions between both algal and bacterial species, by considering, in particular, the influence on the dynamical behaviours of instantaneous or delayed quorum sensing phenomena.

In this paper, we consider a model of the chemostat with toxin production and an external toxicant of inhibitory type. The model discussed here is as follows:

$$\begin{aligned}
 S' &= (S^{(0)} - S)D - e^{-\mu C} \frac{m_1 S}{a_1 + S} \frac{x}{\eta_1} - \frac{m_2 S}{a_2 + S} \frac{y}{\eta_2}, \\
 x' &= x \left(e^{-\mu C} \frac{m_1 S}{a_1 + S} - D - \gamma p \right), \\
 y' &= y \left((1 - k) \frac{m_2 S}{a_2 + S} - D \right), \\
 p' &= k \frac{m_2 S}{a_2 + S} y - Dp, \\
 C' &= (C^{(0)} - C)D - \frac{\delta C y}{a + C}.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Here, $p(t)$ denotes the concentration of toxin produced at time t by the competitor (y), $C(t)$ the concentration of the external toxicant. The meanings of other parameters are the same as model (1.1) or (1.2).

The organization of this paper is as follows. In the next section, model (1.3) is simplified, and some preliminary results are given. In Section 3, the existence and the stability of boundary equilibria are obtained and the global asymptotic stability of a boundary meaningful equilibrium is proved. Finally, a discussion (Section 4) gives a biological interpretation of our main result.

2. Preliminary results

Let

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{S}{S^{(0)}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\eta_1 S^{(0)}}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\eta_2 S^{(0)}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\eta_2 S^{(0)}}, \quad \bar{C} = \frac{C}{C^{(0)}}, \\ \bar{t} &= Dt, \quad \bar{\mu} = \mu C^{(0)}, \quad \bar{m}_i = \frac{m_i}{D}, \quad \bar{a}_i = \frac{a_i}{S^{(0)}}, \quad i = 1, 2, \\ \bar{\gamma} &= \frac{\gamma S^{(0)} \eta_2}{D}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta \eta_2 S^{(0)}}{D C^{(0)}}, \quad \bar{a} = \frac{a}{C^{(0)}}, \quad ' = \frac{d}{dt}, \end{aligned}$$

and make these changes for (1.3), then dropping the bars yields the non-dimensional model

$$\begin{aligned} S' &= 1 - S - e^{-\mu C} \frac{m_1 S}{a_1 + S} x - \frac{m_2 S}{a_2 + S} y, \\ x' &= x \left[e^{-\mu C} \frac{m_1 S}{a_1 + S} - 1 - \gamma p \right], \\ y' &= y \left[(1 - k) \frac{m_2 S}{a_2 + S} - 1 \right], \\ p' &= k \frac{m_2 S}{a_2 + S} y - p, \\ C' &= 1 - C - \frac{\delta C}{a + C} y. \end{aligned} \tag{2.1}$$

System (2.1) is the model to be analyzed here.

Based on the background of system (2.1), we assume the following initial conditions:

$$S(0) \geq 0, x(0) > 0, y(0) > 0, p(0) \geq 0, C(0) \geq 0.$$

We have

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [S(t) + x(t) + y(t) + p(t)] \leq 1 \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} C(t) \leq 1$$

due to $(S+x+y+p)' \leq 1 - (S+x+y+p)$ and $C' \leq 1 - C$. Notice that both of $x=0$ and $y=0$ are the hyperplane of solution of system (2.1), then the region

$$\Omega = \{(S, x, y, p, C) : S > 0, x \geq 0, y \geq 0, p \geq 0, 0 < C \leq 1, S + x + y + p \leq 1\}$$

is a positively invariant set of (2.1) since $S'|_{S=0} = 1 > 0$ and $C'|_{C=0} = 1 > 0$.

Define $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_1$ and $\hat{\lambda}_1$ as solutions of equations

$$\begin{aligned} e^{-\mu} \frac{m_1 \lambda_1}{a_1 + \lambda_1} &= 1, & (1 - k) \frac{m_2 \lambda_2}{a_2 + \lambda_2} &= 1, \\ e^{-\mu C_2} \frac{m_1 \bar{\lambda}_1}{a_1 + \bar{\lambda}_1} - 1 &= \gamma k (1 - \bar{\lambda}_1), & \frac{e^{-\mu C_2} m_1 \hat{\lambda}_1}{a_1 + \hat{\lambda}_1} &= 1, \end{aligned}$$

respectively, where C_2 is the positive root of equation

$$(1 - z) = \frac{\delta z}{a + z}(1 - k)(1 - \lambda_2).$$

If $e^{-\mu}m_1 \leq 1$, denote $\lambda_1 = +\infty$. If $(1 - k)m_2 \leq 1$, denote $\lambda_2 = +\infty$.

For $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_1, \hat{\lambda}_1$ and C_2 , we easily have

Lemma 2.1 The following statements are true:

- (1) $0 < C_2 < 1$ if and only if $0 < \lambda_2 < 1$.
- (2) When $C_2 < 1, \hat{\lambda}_1 < \lambda_1$ and $1 < \bar{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_1$ or $\hat{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_1 < 1$.
- (3) When $C_2 < 1, \lambda_1 < \bar{\lambda}_1$ if $\lambda_1 < 1 - \frac{e^{\mu(1-C_2)} - 1}{k\gamma}, \lambda_1 > \bar{\lambda}_1$ if $\lambda_1 > 1 - \frac{e^{\mu(1-C_2)} - 1}{k\gamma}$.

Lemma 2.2 ([23]) Let α be a finite number and $f: [\alpha, \infty) \rightarrow R$ a differential function. If $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ exists (finite) and the derivative function f' is uniformly continuous on (α, ∞) , then $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$.

Lemma 2.3 If $\lambda_2 < 1, -2a_2 + 2\sqrt{a_2^2 + a_2} < k < 1$ and

$$\frac{(2 - k) - \sqrt{(2 - k)^2 - 4(1 - k)(1 + a_2)}}{2(1 - k)} < m_2 < \frac{(2 - k) + \sqrt{(2 - k)^2 - 4(1 - k)(1 + a_2)}}{2(1 - k)}$$

then $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ exists, where $y(t)$ is the y -component of the solution of system (2.1).

Lemma 2.4 Under the condition of Lemma 2.3 $\liminf_{t \rightarrow \infty} C(t) \geq C_2$.

3. The existence and the stability of the boundary equilibria

In this section, we shall consider the boundary equilibria of (2.1) and compute their stability.

It is easy to see that $x = 0$ and $y = 0$ are two invariant subspaces. We first consider the dynamical systems generated by (2.1) restricted to these sets.

Consider the set $y = 0$. System (2.1) becomes

$$\begin{aligned} S' &= 1 - S - e^{-\mu C} \frac{m_1 S}{a_1 + S} x, \\ x' &= x \left[e^{-\mu C} \frac{m_1 S}{a_1 + S} - 1 - \gamma p \right], \\ p' &= -p, \\ C' &= 1 - C. \end{aligned} \tag{3.1}$$

It is obvious that $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 1$. Hence, for the limiting system

$$\begin{aligned} S' &= 1 - S - e^{-\mu} \frac{m_1 S}{a_1 + S} x, \\ x' &= x \left[e^{-\mu} \frac{m_1 S}{a_1 + S} - 1 \right], \end{aligned}$$

we have easily that $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), x(t)) = (\lambda_1, 1 - \lambda_1)$ if $\lambda_1 < 1$, and that $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), x(t)) = (1, 0)$ if $\lambda_1 > 1$.

Consider the set $x = 0$. System (2.1) becomes

$$\begin{aligned} S' &= 1 - S - \frac{m_2 S}{a_2 + S} y, \\ y' &= y \left[(1 - k) \frac{m_2 S}{a_2 + S} - 1 \right], \\ p' &= k \frac{m_2 S}{a_2 + S} y - p, \\ C' &= 1 - C - \frac{\delta C}{a + C} y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

From the first two equations of (3.2), we obtain easily that $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), y(t)) = (\lambda_2, (1 - \lambda_2)(1 - k))$ if $\lambda_2 < 1$, and that $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), y(t)) = (1, 0)$ if $\lambda_2 > 1$.

Thus, for (3.2) we have $\lim_{t \rightarrow \infty} (p(t), C(t)) = (k(1 - \lambda_2), C_2)$ if $\lambda_2 < 1$, by the theory of asymptotic autonomous systems [24].

Therefore, we have

Theorem 3.1

- 1) In the invariant subspace $y = 0$ of (2.1), equilibrium $E_1(S, x, p, C) = (\lambda_1, 1 - \lambda_1, 0, 1)$ is globally asymptotically stable if $\lambda_1 < 1$.
- 2) In the invariant subspace $x = 0$ of (2.1), equilibrium $E_2(S, y, p, C) = (\lambda_2, (1 - \lambda_2)(1 - k), k(1 - \lambda_2), C_2)$ is globally asymptotically stable if $\lambda_2 < 1$.

About the existence of the boundary equilibria, we obtain easily

Theorem 3.2 For system (2.1), $E_0 = (1, 0, 0, 0, 1)$ always exists; $E_1 = (\lambda_1, 1 - \lambda_1, 0, 0, 1)$ exists if $0 < \lambda_1 < 1$; $E_2 = (\lambda_2, 0, (1 - \lambda_2)(1 - k), k(1 - \lambda_2), C_2)$ exists if $0 < \lambda_2 < 1$.

The Jacobian matrix of system (2.1) at $E_0 = (1, 0, 0, 0, 1)$ takes the form

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -1 & -e^{-\mu} \frac{m_1}{a_1+1} & -\frac{m_2}{a_2+1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu} \frac{m_1}{a_1+1} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k) \frac{m_2}{a_2+1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \frac{m_2}{a_2+1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta}{a+1} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

From the structure of the matrix $J(E_0)$, one can see that E_0 is asymptotically stable if both of inequalities $e^{-\mu} \frac{m_1}{a_1+1} - 1 < 0$ and $(1-k) \frac{m_2}{a_2+1} - 1 < 0$ hold, and unstable if one of them is reversed.

That is, E_0 is asymptotically stable if $\lambda_1 > 1$ and $\lambda_2 > 1$, unstable if one of $\lambda_1 > 1$ and $\lambda_2 > 1$ does not hold.

From the Jacobian matrix of system (2.1) at $E_1 = (\lambda_1, 1-\lambda_1, 0, 0, 1)$ it is easy to show that E_1 is asymptotically stable if $(1-k) \frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - 1 < 0$ and unstable if $(1-k) \frac{m_2 \lambda_1}{a_2 + \lambda_1} - 1 > 0$. That is, E_1 is asymptotically stable if $\lambda_1 < \lambda_2$ and unstable if $\lambda_1 > \lambda_2$.

From the Jacobian matrix of system (2.1) at $E_2 = (\lambda_2, 0, (1-\lambda_2)(1-k), k(1-\lambda_2), C_2)$ one can see that E_2 is asymptotically stable if $e^{-\mu C_2} \frac{m_1 \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} - 1 - \gamma k(1-\lambda_2) < 0$ and unstable if $e^{-\mu C_2} \frac{m_1 \lambda_2}{a_1 + \lambda_2} - 1 - \gamma k(1-\lambda_2) > 0$.

That is, E_2 is asymptotically stable if $\lambda_2 < \bar{\lambda}_1$ and unstable if $\lambda_2 > \bar{\lambda}_1$.

Therefore, according to Theorem 3.2, we have

Theorem 3.3 For system (2.1), E_0 is asymptotically stable if $\lambda_1 > 1$ and $\lambda_2 > 1$; E_1 is asymptotically stable if $\lambda_1 < \lambda_2$ and $\lambda_1 < 1$; E_2 is asymptotically stable if $\lambda_2 < \bar{\lambda}_1$ and $\lambda_2 < 1$.

Theorem 3.4 Under the conditions of Lemma 2.3 and if $\hat{\lambda}_1 \geq 1$, E_2 is globally asymptotically stable.

Proof Define

$$V(S, x, y) = (1-k) \int_{\lambda_2}^S \left(1 - \frac{a_2 + u}{(1-k)m_2 u} \right) du + \alpha x + \int_{(1-\lambda_2)(1-k)}^y \frac{u - (1-\lambda_2)(1-k)}{u} du,$$

where α is a positive number to be chosen below, then

$$\begin{aligned}
 V' &= \left[\frac{(1-k)m_2S}{a_2+S} - 1 \right] \left[\frac{a_2+S}{m_2S} (1-S) - (1-\lambda_2)(1-k) \right] \\
 &\quad + x \left[\alpha \left(e^{-\mu C} \cdot \frac{m_1S}{a_1+S} - 1 - \gamma p \right) - (1-k)e^{-\mu C} \frac{m_1S}{a_1+S} \left(1 - \frac{1}{1-k} \cdot \frac{a_2+S}{m_2S} \right) \right] \\
 &=: A(S) + xB(S, C, p).
 \end{aligned}$$

Due to $(1-k)\frac{m_2\lambda_2}{a_2+\lambda_2} = 1$, we have $A(S) = -\frac{[(1-k)m_2-1][S+m_2(1-k)-1]}{m_2S(a_2+S)}(S-\lambda_2)^2$.

Therefore, $A(S) \leq 0$ since $\lambda_2 < 1$ implies $m_2(1-k) > 1$.

$$B(S, C, p) = \alpha \left(e^{-\mu C} \cdot \frac{m_1S}{a_1+S} - 1 - \gamma p \right) - e^{-\mu C} \cdot \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{a_2+S}{a_1+S} \cdot \left[\frac{(1-k)m_2S}{a_2+S} - 1 \right],$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial B}{\partial S}(S, C, p) &= \frac{e^{-\mu C} m_1}{m_2} \cdot \frac{\alpha m_2 a_1 - \{a_1[(1-k)m_2-1] + a_2\}}{(a_1+S)^2} \\
 &= \frac{e^{-\mu C} m_1}{m_2} \cdot \frac{\alpha m_2 a_1 - [(1-k)m_2-1](a_1+\lambda_2)}{(a_1+S)^2}.
 \end{aligned}$$

Choose $\alpha = \frac{e^{-\mu C_2} m_1 a_2 + [(1-k)m_2-1](\lambda_2+a_1)}{2m_2 a_1}$, then

$$\frac{\partial B}{\partial S}(S, C, p) = \frac{e^{-\mu C} m_1}{m_2} \cdot \frac{e^{-\mu C_2} m_1 a_2 - [(1-k)m_2-1](a_1+\lambda_2)}{2(a_1+S)^2}.$$

Since $\lambda_2 < 1$ implies that $a_1[(1-k)m_2-1] + a_2 > a_2(a_1+1)$, and $\hat{\lambda}_1 \geq 1$ implies that $e^{-\mu C_2} m_1 \leq a_1+1$, then

$$e^{-\mu C_2} m_1 a_2 \leq a_2(a_1+1) < a_1[(1-k)m_2-1] + a_2 = [(1-k)m_2-1](a_1+\lambda_2).$$

Therefore, $\frac{\partial B}{\partial S}(S, C, p) < 0$, it is followed that $B(S, C, p) < B(0, C, p)$.

Due to $e^{-\mu C_2} m_1 a_2 < a_1[(1-k)m_2-1] + a_2$, then there exists $\epsilon > 0$ small enough such that

$$\begin{aligned}
 -\alpha + \frac{m_1 a_2}{m_2 a_1} e^{-\mu(C_2-\epsilon)} &= -\alpha + e^{-\mu C_2} \frac{m_1 a_2}{m_2 a_1} + \frac{m_1 a_2}{m_2 a_1} [e^{-\mu(C_2-\epsilon)} - e^{-\mu C_2}] \\
 &= \frac{e^{-\mu C_2} m_1 a_2 - \{a_1[(1-k)m_2-1] + a_2\}}{2m_2 a_1} + \frac{m_1 a_2}{m_2 a_1} [e^{-\mu(C_2-\epsilon)} - e^{-\mu C_2}] < 0.
 \end{aligned}$$

By means of Lemma 2.4, for this $\epsilon > 0$, there exists $T > 0$ such that $C(t) > C_2 - \epsilon$ for $t > T$.

Then, for $t > T$,

$$B(0, C, p) = -\alpha(1 + \gamma p) + e^{-\mu C} \cdot \frac{m_1 a_2}{m_2 a_1} < -\alpha + e^{-\mu(C_2-\epsilon)} \frac{m_1 a_2}{m_2 a_1} < 0.$$

Therefore $V' \leq 0$ as $t > T$. It is easy to see that $V' = 0$ if, and only if, $S = \lambda_2$ and $x = 0$ because $B(S, C, p) < B(0, C, p) < 0$, and, when $S = \lambda_2$, $x = 0$, from the first equation of the system (2.1) we know that

$$y = (1 - \lambda_2) \frac{\alpha_2 + \lambda_2}{m_2 \lambda_2} = (1 - \lambda_2)(1 - k).$$

But from the last two equations of the system (2.1) we can see that there are some non-trivial orbits in the region $D0 = \{(\lambda_2, 0, (1 - \lambda_2)(1 - k), p, C) \mid V' = 0\}$ which is in the superplane $x = 0$.

Now we will prove that every orbit $f_P(t)$ starting from any point $P \in \Omega$ tends to the equilibrium E_2 as $t \rightarrow \infty$. In fact, by Theorem 3.3 we know that E_2 is locally asymptotically stable if $\lambda_2 < \bar{\lambda}_1$ and $\lambda_2 < 1$, hence there exists a ε -neighbourhood of E_2 , $U(E_2, \varepsilon) \subseteq \Omega$, such that every orbit must tend to E_2 as long as it enters in the neighborhood $U(E_2, \varepsilon)$. On the other hand, according to the LaSalle's invariance principle, the limit set Ω_P of the orbit $f_P(t)$ must belong to region $D0$, which is in the superplane $x = 0$. If Ω_P only contains equilibria then the orbit $f_P(t)$ must tend to E_2 because E_0 is unstable when $\lambda_2 < 1$. In this case, the conclusion has been proved. If Ω_P also contains a regular point M_1 , then M_1 is in the superplane $x = 0$. Due to Theorem 3.1, the equilibrium E_2 is globally asymptotically stable in the superplane $x = 0$, so the orbit $f_{M_1}(t)$ must tend to E_2 as $t \rightarrow +\infty$.

Now, let M_2 be a point on the orbit $f_{M_1}(t)$ belonging to $U(E_2, \varepsilon)$ and let $U(M_2, \varepsilon')$ be a neighborhood of M_2 in the five-dimensional space such that $U(M_2, \varepsilon') \subset U(E_2, \varepsilon)$ and $E_2 \notin U(M_2, \varepsilon')$. For this neighbourhood $U(M_2, \varepsilon')$ by the continuity of the solution with respect to the initial values, there exists a neighborhood of M_1 in the five-dimensional space $U(M_1, \delta) \subseteq \Omega$ such that the orbits starting from any point which belongs to $U(M_1, \delta)$ must enter into the neighborhood $U(M_2, \varepsilon')$ within a finite time. Notice that M_1 is a ω -limit point of the orbit $f_P(t)$, therefore, the orbit $f_P(t)$ will enter into $U(M_1, \delta)$ in a finite time and then into $U(M_2, \varepsilon')$ also in a finite time and finally will tend to the equilibrium E_2 as $t \rightarrow +\infty$, since we have already proved that E_2 is locally asymptotically stable. Therefore, the equilibrium E_2 is globally asymptotically stable.

4. Discussion

We observe that Theorem 3.1 of this paper can be useful in applications. In fact, suppose we are interested in the elimination of a noxious species X living in a chemostat-like environment polluted by a toxicant C which has an inhibitory effect on X . We can get our aim by generating an allelopathic

competition through the insertion in the environment of another species Y chosen with the following characteristics:

1. Y gives rise to an allelopathic competition with X because it competes with X for the nutrient and furthermore it is able to produce a chemical compound p which has a lethal effect on X .
2. Y is able to take up the environmental toxicant C without any damage.
3. The biological parameters of the species Y (as the growth rate and the saturation constant) are in a suitable relationship with the corresponding ones of the species X .
4. The fraction k of the potential growth of the species Y devoted to the production of the toxicant p has a suitable value with respect to the growth rate and saturation constant of species Y .

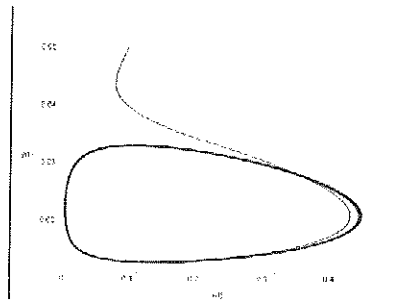


Figure 1: Parameters are: $\mu = 5.0$, $m_1 = 5.45$, $a_1 = 0.5$, $m_2 = 6.2$, $a_2 = 3.52$, $\gamma = 0.45$, $k = 0.17$, $\delta = 50.0$, $a = 0.1$.

We also point out that under suitable conditions ($\min\{\lambda_1, \hat{\lambda}_1\} < \lambda_2 < \max\{\lambda_1, \hat{\lambda}_1\}$ and $\lambda_2 < 1$) the existence of an interior equilibrium E^* (corresponding to the coexistence of the two species) can be shown (for sake of brevity we omit the proof). When the interior equilibrium E^* there exists, we find by numerical simulations that the dynamical behaviour of system (2.1) is rich and complex. For example if we assume for the relevant parameters the following values $\mu = 5.0$, $m_1 = 5.45$, $a_1 = 0.5$, $m_2 = 6.2$, $a_2 = 3.52$, $\gamma = 0.45$, $k = 0.17$, $\delta = 50.0$, $a = 0.1$, then system (2.1) has two boundary equilibria: $E_0 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $E_2 = (0.8490, 0, 0.1253, 0.0257, 0.1260)$, and the interior equilibrium $E^* = (0.8490, 0.1425, 0.0223, 0.0046, 0.2461)$. Since $\lambda_1 = +\infty$, $\lambda_2 = 0.8490$, and $\bar{\lambda}_1 = 0.1260$ for this case, that is, $\bar{\lambda}_1 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$, then both of E_0 and E_2 is unstable. And the computation indicates that E^* is also unstable. The competitors must coexist, and both of their concentrations are oscillatory. System has an attracting limit cycle. (See Figure 1).

References

- [1] T. Egli, 1995. The ecology and physiological significance of the growth of heterotrophic microorganisms with mixtures of substrates, in *Advances in Microbial Ecology*, Vol. 14, G. Jones, ed., Plenum Press, New York, 305-386.
- [2] D. Herbert, R. Elsworth, R.C. Telling, 1956. The continuous culture of bacteria: A theoretical and experimental study, *J. Gen. Microbiol.*, 14, 601-622.
- [3] A. Novick, L. Sziliard, 1950. Description of the chemostat, *Science* 112, 715-716.
- [4] H. Smith, P. Waltman, 1995. *The Theory of the Chemostat*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [5] P.A. Taylor, J.L. Williams, 1975. Theoretical studies on the coexistence of competing species under continuous-flow conditions, *Canadian J. Microbiol.*, 21, 90-98.
- [6] S.R. Hansen, S.P. Hubbell, 1980. Single nutrient microbial competition: agreement between experimental and theoretical forecast outcomes, *Science*, 20, 1491-1493.
- [7] H.L. Smith, P. Waltman, 1995. *The Theory of the Chemostat – Dynamics of Microbial Competition*. Cambridge.
- [8] S.B. Hsu, P. Waltman, 1992. Analysis of a model of two competitors in a chemostat with an external inhibitor, *SIAM J. Appl. Math.* 52; 528-540.
- [9] S.B. Hsu, P. Waltman, 1997. Competition between Plasmid-Bearing and Plasmid-Free organisms in Selective Media. *Chem. Eng. Sci.*, 52, 23.
- [10] T.K. Luo, S.B. Hsu, 1995. Competition between plasmid-bearing, plasmid-free organisms in a chemostat with an inhibitor. *J. Math. Biol.*, 34, 225.
- [11] P. Fergola, C. Tenneriello, Z. Ma, X. Wen, 1994. Effects of toxicants on chemostat model, *Cybernetics and system '94*, Vienna, April 5-8.
- [12] P. Fergola, C. Tenneriello, Z. Ma, X. Wen, 1997. Effects of toxicants on chemostat model with n-population competing for a critical nutrient, *Dynamical System and Application*.
- [13] P. Fergola, C. Tenneriello, Z. Ma, X. Wen, 1996. Polluted chemostat model with periodic nutrient and fluctuating toxicant input, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl.* 43, 231-252.
- [14] P. Fergola, C. Tenneriello, Z. Ma, M. Cerasuolo, 2005. On Polluted Chemostat Models. *Rend. Acc. Sc. Fis. mat. Napoli Vol. LXXII*, 139-157.
- [15] R. E. Lenski, S. Hattingh, 1986. Coexistence of two competitors on one resource and one inhibitor: a chemostat model based on bacteria and antibiotics, *J. Theoret. Bio.*, 122, 83-93.
- [16] S.B. Hsu, P. Waltman, 1992. Analysis of a model of two competitors in a chemostat with an external inhibitor, *SIAM J. Appl. Math.*, 52, 528-540.
- [17] S.B. Hsu, P. Waltman, 1998. Competition in the chemostat when one competitor produces a toxin, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 15, 471-490.
- [18] J.P. Braselton, P. Waltman, 2001. A competition model with dynamically allocated inhibitor production, *Math. Biosci.*, 173, 55-84.
- [19] P. Fergola, F. Aurelio, M. Cerasuolo, A. Noviello, 2004. Andrews Nutrient Uptake and linear Quorum Sensing in Allelopathic Competition Models, *Proceedings "WASCOM 2003" 12th Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, pp. 191-203, Cagliari.
- [20] P. Fergola, M. Cerasuolo, 2005. An algal allelopathic competition with internal and external toxic compounds. In press on the *Proceedings of MathEverywhere*, Milano.

- [21] P. Fergola, M. Cerasuolo, 2006. An allelopathic competition with an external toxicant input. Proceedings "WASCOM 2005" 13th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, pp. 210-219, Catania 2006.
- [22] P. Fergola, E. Beretta and M. Cerasuolo, 2006. Some New Results on an Allelopathic Competition Model with Quorum Sensing and Delayed Toxicant Production. *Nonlinear Analysis – Real World Application* 7, pp. 1081-1095.
- [23] K. Gopalsamy, 1992. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [24] H. R. Thieme, 1992. Convergence results and a Poincaré-Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations, *J. Math. Biol.*, 30, 755-763.

Sui Neutrini in Teoria di Maxwell-Rainich

Giorgio Ferrarese¹ e Maria Clara Fanigliulo²

A Pasquale Renno, con l'Amicizia di sempre

Abstract- We give a relativistic approach to the neutrino field, in the Rainich-Maxwell gravito-electromagnetic theory. In this framework, we consider, first of all, the *neutrino particle scheme*, which is characterized by a *new scalar function*; and, then, the *neutrino field*, which is defined by a *pair of congruences*, respectively timelike (*frame of reference*) and null-geodesic (*neutrino flux*). For both congruences, the geometric properties, such rigidity and normality, are developed by *anholonomic techniques* [9], *real variants* of the null tetrad methods.

1. Introduzione e generalità

L'indubbio successo della *teoria unificata di Rainich* [1], in Elettromagnetismo di Maxwell, fece sperare (siamo nel 1962 [2]) che i tre campi fondamentali: *gravitazionale, elettromagnetico e neutrino, potessero essere unificati* in un medesimo contesto geometrico. A sostegno di tale presunzione c'era il successo della geometrizzazione tout-court delle particelle cariche, in campo gravitazionale; problema che ovviamente si riduceva all'osso, nel caso di una *particella carica limite, cioè priva di massa propria e di carica*, come avviene per il neutrino.

Questa introduzione alla problematica del neutrino, che sarà inserita in un Volume sulle *teorie unitarie*, di prossima pubblicazione, si ispira, in gran parte, ad un articolo di Kuchowicz ([3],1974, con una estesa bibliografia), e soprattutto alla "geometrizzazione del neutrino" di Wheeler ([2],1962); tuttavia, a mio avviso, gli approcci citati non sono sufficientemente illuminanti, dal punto di vista Fisico- matematico, per metodi e assunti assiomatici. Di qui la motivazione del presente approccio, in cui il neutrino è visto sia come *particella con struttura*, sia come *campo, nell'ambito della gravitazione einsteiniana e dell'elettromagnetismo di Maxwell-Rainich* [3], all'interno della Relatività generale.

Riassumiamo, innanzitutto, l'insieme delle *condizioni algebrico-differenziali di Rainich* [1], le quali partono dall'*idea fondamentale di sostituire il campo E.M. $F_{\alpha\beta}$ con il corrispondente tensore energetico $T_{\alpha\beta}$* (una trattazione analoga

¹ Dipartimento Matematico "G.Castelnuovo" Università di Roma;

² I° Liceo Artistico di Roma.

vale anche per l'elettromagnetismo di Born-Infeld); si tratta di condizioni che possono essere tradotte mediante il *tensore di Ricci* $R_{\alpha\beta}$ dello spaziotempo V_4 . Infatti, essendo il *tensore energetico* $T_{\alpha\beta}$ a *traccia nulla*, nelle equazioni gravitazionali si annulla anche lo *scalare di curvatura*: $R \stackrel{def}{=} R_{\alpha}^{\alpha} = 0$, sì che le equazioni di Einstein equivalgono alla *proporzionalità dei due tensori*: $R_{\alpha\beta}$ e $T_{\alpha\beta}$. Ne discende il quadro seguente che, ripetiamo, *non contiene il campo E.M., determinato a posteriori*:

$$(1) \quad \begin{cases} R_{\alpha}^{\alpha} = 0, R_{\alpha}^{\rho} R_{\rho}^{\beta} = \Lambda^2 \delta_{\alpha}^{\beta}, 4\Lambda^2 \stackrel{def}{=} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}, R_{00} \geq 0 \\ R_{\alpha\beta} = -\chi T_{\alpha\beta}, \nabla^{\beta} T_{\alpha\beta} = 0, \partial_{\alpha} \Upsilon_{\beta} - \partial_{\beta} \Upsilon_{\alpha} = 0; \end{cases}$$

in queste, il campo Υ_{α} è esso stesso definito a partire dal tensore $R_{\alpha\beta}$:

$$(2) \quad 4\Lambda^2 \Upsilon_{\beta} \stackrel{def}{=} \eta_{\beta\alpha\mu\nu} \nabla^{\mu} R^{\nu\rho} R_{\rho}^{\alpha}, \quad (4\Lambda^2 \equiv R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}),$$

e il tensore di Ricci, a sua volta, deriva dal *tensore di curvatura* dello spaziotempo:

$$(3) \quad R_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} R_{\rho\alpha\beta}^{\rho} \stackrel{def}{=} \partial_{\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - \partial_{\alpha} \Gamma_{\rho\beta}^{\rho} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\beta}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho}.$$

Naturalmente, le condizioni (1) comprendono sia le *equazioni gravitazionali* che quelle di *conservazione*; queste, sullo schema di Rainich, *sostituiscono, unitamente alle (2), le otto equazioni di Maxwell*. Per contro, il *tensore energetico* $T_{\alpha\beta}$ è *assegnato a priori*, attraverso la sua legge, subordinatamente alla struttura del campo E.M. $F_{\alpha\beta}$. Così la geometria dello schema (1) *fa capo al solo tensore di Ricci*.

Va tuttavia rilevato che, nel quadro (1), compare la condizione $R_{00} \geq 0$, la quale non ha carattere tensoriale, sì che la formulazione di Rainich non è invariante rispetto alla scelta delle coordinate, cioè *non rispetta il principio di Relatività generale*; cioè la condizione $R_{00} \geq 0$ è limitata ad un ben determinato riferimento, e *invariante solo per trasformazioni interne a questo*. Lo schema considerato non è invece efficace nel caso del neutrino, inteso come campo E.M. singolare, cioè ad invarianti nulli:

$$(4) \quad \mathcal{F} = 0, \mathcal{G} = 0 \sim F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0, F_{\alpha\beta} F^{*\alpha\beta} = 0;$$

l'asterisco indica *aggiunzione*, mediante il *tensore di Ricci* $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$:

$$(5) \quad F_{\alpha\beta}^* \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Più precisamente, nel caso singolare, dato il *legame generale*:

$$(6) \quad \frac{1}{4} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \mathcal{F}^2 + 4\mathcal{G}^2,$$

le condizioni (4) implicano $T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \sim R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = 0$, e pertanto il *coefficiente* Λ è *nullo*:

$$(7) \quad 4\Lambda^2 \equiv R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = 0;$$

con la conseguenza che, nella (2), il campo Υ_β appare indeterminato.

Tuttavia, cade qui opportuno il confronto tra il neutrino e il fotone liberamente gravitante; invero, per il fotone, con ovvie considerazioni di limite, è nulla la massa propria, ma non quella relativa ad un qualunque riferimento fisico; proprietà fondamentale, ai fini del carattere osservativo del fotone (effetto fotoelettrico).

Così, anche lo schema singolare (4) può essere recuperato, ai fini della sua validità, se, nella (2), si ammette che il prodotto $\eta_{\beta\alpha\mu\nu}\nabla^\mu R^{\nu\rho}R_\rho^\alpha$ (il quale coinvolge il tensore di Ricci e il suo derivato), sia infinitesimo dello stesso ordine di Λ^2 ; è di qui che, in sostanza, comincia la storia dei neutrini, e soprattutto la loro teoria geometrica.

2. Ancora sul campo elettromagnetico.

A questo punto, sono opportune alcune considerazioni sul campo E.M., nello schema tradizionale, che fa capo alle variabili $F_{\alpha\beta}$ (campo E.M.) e alle equazioni di Maxwell. Nel caso singolare, supponendo che lo spaziotempo V_4 sia fissato e svincolato dall'elettromagnetismo, le equazioni di campo sono le seguenti (condizioni di singolarità ed equazioni di Maxwell):

$$(8) \quad \begin{cases} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0 & , \quad F_{\alpha\beta}F^{*\alpha\beta} = 0 \\ \nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 0 & , \quad \nabla_\beta F^{*\alpha\beta} = 0 ; \end{cases}$$

naturalmente, avendo di mira i neutrini, si è supposto l'assenza di cariche e correnti.

In ogni modo, indipendentemente dal carattere singolare di $F_{\alpha\beta}$, si può riconoscere che ogni campo E.M. si comporta come uno spinore [4]. Si tratta di una proprietà generale, che vale a precisare la struttura spinoriale di un neutrino; tuttavia, in vista di evidenziare gli aspetti geometrici e di struttura di un fascio di neutrini, conviene utilizzare il tensore complesso $\omega_{\alpha\beta}$, definito in modo standard, a partire da un campo $F_{\alpha\beta}$ generale:

$$(9) \quad \omega_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} F_{\alpha\beta} + iF_{\alpha\beta}^* \sim \bar{\omega}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} F_{\alpha\beta} - iF_{\alpha\beta}^* .$$

Esso determina univocamente il campo E.M., e viceversa:

$$(10) \quad 2F_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \bar{\omega}_{\alpha\beta} \sim 2iF_{\alpha\beta}^* = \omega_{\alpha\beta} - \bar{\omega}_{\alpha\beta} ,$$

cioè il tensore complesso $\omega_{\alpha\beta}$ può rappresentare, a tutti gli effetti, il campo E.M. $F_{\alpha\beta}$; in ambito complesso, si può stabilire una corrispondenza tra $\omega_{\alpha\beta}$ e uno spinore (φ_1, φ_2) , al modo seguente [4]:

$$(11) \quad \begin{cases} \omega_{01} = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 , \quad \omega_{02} = -i(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) , \quad \omega_{03} = -2\varphi_1\varphi_2 \\ \omega_{12} = 2i\varphi_1\varphi_2 , \quad \omega_{13} = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 , \quad \omega_{23} = -i(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) . \end{cases}$$

L'uso degli spinori $\varphi_{1,2}$, in luogo del campo E.M. $F_{\alpha\beta}$, è interessante e costruttivo, e tuttavia qui preferiamo seguire una via diversa da quella spinoriale, *in quanto interessati al carattere tensoriale della teoria*; carattere che si rifà alla *decomposizione canonica* del campo E.M., già utilizzata in [6], per *l'esame spettrale* del campo $F_{\alpha\beta}$ e del tensore energetico associato $T_{\alpha\beta}$. Tale approccio vede, in generale, *l'esistenza di due piani principali ortogonali*: π e π' , iperbolico ed ellittico rispettivamente; le rette isotrope del primo piano, diciamo \mathbf{l} e \mathbf{k} , segnano *le sole autodirezioni reali* del campo $F_{\alpha\beta}$.

3. Primo approccio al neutrino

Riprendiamo il caso singolare, *supponendo*, come già detto, *che lo spazio-tempo V_4 sia fissato (campo E.M. puro)*, e che le equazioni di campo (8) del neutrino siano espresse mediante il campo E.M.. Dal punto di vista geometrico, i due vettori \mathbf{l} e \mathbf{k} , distinti nel caso generale, vengono a coincidere nel caso singolare, e danno luogo ad un *vettore isotropo* l_α (definito a meno di un fattore moltiplicativo); vettore comune ai due piani ortogonali π e π' . Questi, a loro volta, divengono *entrambi parabolici, e contenuti in un iperpiano dello stesso tipo*. Pertanto, *il campo E.M. è necessariamente un bivettore parabolico* $\epsilon \pi$, e può essere posto nella forma ([5], 253):

$$(12) \quad F_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha \quad , \quad u_\alpha \stackrel{def}{=} \xi l_\alpha \quad ,$$

ove $v_\alpha \in \pi$ è *ortogonale* a u_α (come tutti i vettori di π e π'), e di *tipo spaziale*; vettore che non è restrittivo supporre *unitario*:

$$(13) \quad v^2 \equiv v_\alpha v^\alpha = 1.$$

Ciò premesso, torniamo ai due tensori (9), e consideriamo il loro prodotto:

$$(14) \quad \omega_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{\rho\beta} \sim \bar{\omega}_{\alpha\beta} \omega^{\rho\beta} \quad ;$$

esso è necessariamente *reale*, come risulta direttamente dalla decomposizione (9) e, più precisamente *non differisce dal prodotto $2u_\alpha u^\rho$* , essendo u_α il vettore isotropo di cui alla (12):

$$(15) \quad \omega_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{\rho\beta} = 2u_\alpha u^\rho \quad .$$

Per provare l'asserto, possiamo seguire due vie; l'una fa capo alla decomposizione (12), mentre l'altra utilizza il contenuto del prodotto (14), e cioè *il legame generale, in teoria di Maxwell*:

$$(16) \quad \omega_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{\rho\beta} = T_\alpha{}^\rho \quad ,$$

essendo $T_\alpha{}^\rho$ il *tensore energetico del campo E.M.* Di qui, tenuto conto della *forma canonica* del tensore $T_\alpha{}^\rho$, nel caso singolare:

$$(17) \quad T_\alpha{}^\rho = 2u_\alpha u^\rho \quad ,$$

si ha una prima conferma della (15). Allo stesso risultato si perviene mediante la (12); osserviamo innanzitutto che, accanto alla forma canonica

di $F_{\alpha\beta}$, vale una decomposizione analoga per il tensore aggiunto: si tratta di scambiare π con il piano ortogonale π' e $\mathbf{v} \in \pi$ con $\mathbf{w} \in \pi'$. Pertanto, fermo restando il vettore isotropo $\mathbf{u} = \xi \mathbf{I}$, analogamente alla (12) si ha:

$$(18) \quad F_{\alpha\beta}^* = u_\alpha w_\beta - u_\beta w_\alpha ;$$

naturalmente valgono le condizioni:

$$(19) \quad \begin{cases} u_\alpha u^\alpha = 0, & u_\alpha v^\alpha = 0, & u_\alpha w^\alpha = 0 \\ v_\alpha w^\alpha = 0, & v_\alpha v^\alpha = 1, & w_\alpha w^\alpha = 1, \end{cases}$$

e si hanno così tutti gli elementi per calcolare il prodotto *reale* (14):

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{\rho\beta} &= F_{\alpha\beta} F^{\rho\beta} + F_{\alpha\beta}^* F^{*\rho\beta} = \\ &= (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)(u^\rho v^\beta - u^\beta v^\rho) + (u_\alpha w_\beta - u_\beta w_\alpha)(u^\rho w^\beta - u^\beta w^\rho), \end{aligned}$$

si che, in virtù delle (19), il prodotto è pari a $2u_\alpha u^\rho$, cioè vale la (15), cdd.

La (15) è tipica del campo E.M. singolare, nel senso che, a meno di passaggi al limite, essa non ha alcun riscontro nella teoria generale; per convincersene, basta riflettere che, nel caso generale, la geometria del campo E.M. è totalmente differente da quella singolare in quanto i piani principali π e π' sono disgiunti, nel caso generale, ed esistono *due (e non una) autodirezioni isotrope distinte*. Possiamo esaminare brevemente quest'ultimo caso, partendo dalla decomposizione standard del campo E.M.:

(20) $F_{\alpha\beta} = \lambda A_{\alpha\beta} + \mu A_{\alpha\beta}^*$, $A_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(l_\alpha k_\beta - k_\alpha l_\beta)$, $A_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma} l^\rho k^\sigma$,
 ove λ e μ sono gli *autovalori (distinti) del tensore $F_{\alpha\beta}$* , $\mathbf{l} \neq \mathbf{k}$ i *vettori isotropi corrispondenti*, e valgono le identità:

$$(21) \quad \begin{cases} A_{\alpha\rho} A^{\beta\rho} = -S_\alpha^\beta, & A_{\alpha\rho} A^{*\beta\rho} = A_{\alpha\rho}^* A^{\beta\rho} = 0 \\ A_{\alpha\rho}^* A^{*\beta\rho} = A_{\alpha\rho} A^{\beta\rho} + \delta_\alpha^\beta, & S_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(l_\alpha k_\beta + k_\alpha l_\beta). \end{cases}$$

A partire dalla decomposizione (20), il prodotto reale (14) è dato da:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{\rho\beta} &= F_{\alpha\beta} F^{\rho\beta} + F_{\alpha\beta}^* F^{*\rho\beta} = (\lambda A_{\alpha\beta} + \mu A_{\alpha\beta}^*)(\lambda A^{\rho\beta} + \mu A^{*\rho\beta}) + \\ &+ (\lambda A_{\alpha\beta}^* - \mu A_{\alpha\beta})(\lambda A^{*\rho\beta} - \mu A^{\rho\beta}) = -\lambda^2 S_\alpha^\rho + \mu^2 (-S_\alpha^\rho + \delta_\alpha^\rho) + \\ &+ \lambda^2 (-S_\alpha^\rho + \delta_\alpha^\rho) - \mu^2 S_\alpha^\rho = -2(\lambda^2 + \mu^2) S_\alpha^\rho + (\lambda^2 + \mu^2) \delta_\alpha^\rho, \end{aligned}$$

cioè vale la seguente *formula generale e intrinseca*:

$$(22) \quad \omega_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{\rho\beta} = \rho (\delta_\alpha^\rho - 2S_\alpha^\rho), \quad \rho \stackrel{def}{=} \lambda^2 + \mu^2 > 0;$$

essa costituisce il *riscontro della (15) nel caso generale*, e tuttavia la (22) non è compatibile con la (15). Si vuol dire che non è possibile determinare un vettore isotropo: $D_\alpha \neq 0$ che soddisfi la condizione:

$$(23) \quad \delta_\alpha^\rho - 2S_\alpha^\rho = D_\alpha D^\rho, \quad D_\alpha D^\alpha = 0,$$

fatta eccezione per il vettore nullo.

Infatti, per il carattere isotropo di D_α , la (23) implica l'uguaglianza:

$$(24) \quad (\delta_\alpha^\rho - 2S_\alpha^\rho)D^\alpha = 0,$$

e pertanto D_α deve soddisfare un *sistema lineare ed omogeneo*, il cui *determinante vale uno*, da cui $\mathbf{D} = 0$. Del resto, data l'identità:

$$(25) \quad S_{\alpha\beta}S^{\rho\beta} = S_\alpha^\rho,$$

conseguenza diretta della (21)₄, il prodotto della (24) per S_ρ^β dà:

$$S_\rho^\beta(\delta_\alpha^\rho - 2S_\alpha^\rho)D^\alpha = (S_\alpha^\beta - 2S_\alpha^\beta)D^\alpha = -S_\alpha^\beta D^\alpha = 0,$$

ciò che riduce la (24) a $D^\rho = 0$. Possiamo controllare anche il risultato (22), attraverso la (16); si tratta di partire dal caso generale, tenendo conto che il tensore energetico è dato dalla *formula generale*: $T = \rho (-\mathbf{d}_0 \otimes \mathbf{d}^0 - \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}^1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}^2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}^3)$, espressa secondo una *base ortonormale* $\{\mathbf{d}_\alpha\}$, adattata ai piani principali del campo *E.M.*, la quale non differisce da: $T = \rho [-2(\mathbf{d}_0 \otimes \mathbf{d}^0 + \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}^1) + \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}^\alpha]$. Di qui, ponendo:

$$(26) \quad 2\mathbf{d}_0 = \mathbf{l} - \mathbf{k}, \quad 2\mathbf{d}_1 = \mathbf{l} + \mathbf{k} \sim \mathbf{l} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{k} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0,$$

si ottiene la *forma intrinseca del tensore energetico* [6]:

$$(27) \quad T = \rho[-(\mathbf{l} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{l}) + \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}^\alpha] \sim T_\beta^\alpha = \rho[-(l^\alpha k_\beta + l_\beta k^\alpha) + \delta_\beta^\alpha];$$

essa conferma la (22), tenuto conto del legame (16) e del significato del tensore $S_{\alpha\beta}$ di cui alla (20)₄. Ciò premesso, torniamo al caso singolare, ed esaminiamo il prodotto di $F_{\alpha\beta}$ per il gradiente di $u_\rho = \xi l_\rho$; utilizzando la decomposizione (12), nonché le (19), si ha l'identità: $F_{\alpha\beta} \nabla_\rho u^\beta \equiv (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \nabla_\rho u^\beta$, ove l'ultimo termine è nullo, essendo $u_\beta \nabla_\rho u^\beta = 0$. Ne risulta la seguente *espressione formale*:

$$(28) \quad F_{\alpha\beta} \nabla_\rho u^\beta = -u_\alpha H_\rho,$$

ove si è posto:

$$(29) \quad H_\rho \stackrel{def}{=} u^\beta \nabla_\rho v_\beta.$$

Il legame (28), valido nel caso ingolare, mette in evidenza la *separazione delle derivate di u da quelle di v*, e tuttavia il *determinante dei coefficienti* $F_{\alpha\beta}$ è nullo; infatti, il quadrato di $F_{\alpha\beta}$, a norma della (12), è del tipo: $F_{\alpha\beta} F^{\rho\beta} = u_\alpha u^\rho$, e dà luogo alla limitazione: $\det |F_{\alpha\beta}|^2 = 0$. Pertanto, la (28) non è risolvibile rispetto al gradiente di \mathbf{u} ; inoltre tale legame ha solo *efficacia formale*, in quanto *diviene una identità*, se si esplicita $F_{\alpha\beta}$ secondo la (12). Naturalmente la (28) è *invariante per trasformazioni della forma*:

$$(30) \quad v_\alpha = v'_\alpha + \zeta u_\alpha,$$

essendo ζ una *funzione arbitraria*.

4. Geometria del campo dei neutrini

L'equazione (28) è alla base della trattazione quantistica del neutrino (Dirac [2], 95); tuttavia il nostro approccio è di tipo classico, e segue una filosofia diversa. In ogni modo, in vista di geometrizzare il campo dei neutrini,

riprendiamo le condizioni generali di Rainich (1); nel caso *singolare*, valgono, per il tensore di Ricci, le *relazioni algebriche*:

$$(31) \quad R = 0 \quad , \quad R_{\alpha}{}^{\rho} R_{\rho\beta} = 0 \quad , \quad R_{00} \geq 0,$$

le quali condizionano la geometria dello spaziotempo, unitamente alle *equazioni gravitazionali* (si prescinde, per brevità, dalla costante $-\chi$):

$$(32) \quad R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \quad , \quad T_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} 2F_{\alpha}{}^{\rho} F_{\beta\rho} .$$

Pertanto, tenuto anche conto della (17), il tensore di Ricci è del tipo:

$$(33) \quad R_{\alpha\beta} = 2u_{\alpha}u_{\beta} \quad ,$$

ove il *vettore isotropo* u_{α} è definito a meno di un fattore ξ :

$$(34) \quad u_{\alpha} \equiv (-\xi, \xi, 0, 0) \quad , \quad u^2 \equiv u_{\alpha}u^{\alpha} = 0;$$

in altri termini, un campo E.M. *singolare*, nello spaziotempo, equivale ad un *fluido di fotoni disgregato, di densità propria unitaria*. A sua volta, il campo E.M. *singolare* $F_{\alpha\beta}$ si esprime, mediante u_{α} , secondo la (12):

$$(35) \quad F_{\alpha\beta} = u_{\alpha}v_{\beta} - u_{\beta}v_{\alpha} \quad ,$$

ove v_{α} è un *vettore spaziale unitario* ($v^2 = 1$) e *ortogonale a u* ($v^{\alpha}u_{\alpha} = 0$).

Si noti che, nella decomposizione (35) del tensore $F_{\alpha\beta}$, \mathbf{u} è definito a meno di un fattore moltiplicativo, mentre il vettore v_{α} non è determinato, ma subordinato alla trasformazione (30). Supponiamo ora che v_{α} sia fissato, e che il campo E.M. $F_{\alpha\beta}$ soddisfi le equazioni di Maxwell del vuoto (8):

$$(36) \quad \nabla_{\beta}F^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \nabla_{\beta}F^{*\alpha\beta} = 0.$$

Queste danno luogo, mercè le (35) e (18), a ben determinati legami differenziali per i vettori u_{α} , v_{α} e w_{α} ; viceversa, le due condizioni: $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0$, $F_{\alpha\beta}F^{*\alpha\beta} = 0$, che traducono il *carattere singolare* del campo E.M., sono automaticamente soddisfatte, come è naturale, in virtù delle (19). Per esaminare il contenuto delle equazioni di Maxwell, consideriamo dapprima la (36)₁; si ha, in virtù della (35), l'equazione vettoriale:

$$(37) \quad \nabla_{\beta}F^{\alpha\beta} \equiv v^{\beta}\nabla_{\beta}u^{\alpha} + u^{\alpha}\nabla_{\beta}v^{\beta} - v^{\alpha}\nabla_{\beta}u^{\beta} - u^{\beta}\nabla_{\beta}v^{\alpha} = 0 .$$

Di qui, moltiplicando per u_{α} e v_{α} rispettivamente, e utilizzando la notazione (29), si ricavano le due condizioni scalari:

$$(38) \quad u^{\beta}H_{\beta} = 0 \quad , \quad \nabla_{\beta}u^{\beta} = -v^{\beta}H_{\beta} \quad , \quad H_{\beta} \stackrel{def}{=} u^{\alpha}\nabla_{\beta}v_{\alpha} .$$

La seconda di queste consente di eliminare, nella (37), la divergenza $\nabla_{\beta}u^{\beta}$, con che si ottiene:

$$(39) \quad \partial u^{\alpha} = u^{\beta}\nabla_{\beta}v^{\alpha} - u^{\alpha}\nabla_{\beta}v^{\beta} - v^{\alpha}v^{\beta}H_{\beta} \quad ,$$

avendo introdotto, per semplicità, la *derivata direzionale secondo v*:

$$(40) \quad \partial \stackrel{def}{=} v^{\alpha}\nabla_{\alpha} .$$

Nella veste (39), è *inclusa solo la prima delle condizioni* (38), che si ottiene previa moltiplicazione per u_{α} ; invece, moltiplicando per v_{α} , si ha una

identità. In ogni modo, la (39), pur priva della (38)₂, vale ad esprimere la derivata direzionale del campo $u_\alpha : \partial u^\alpha$, in funzione di \mathbf{u}, \mathbf{v} e del gradiente di \mathbf{v} , come la originaria (37). Moltiplichiamo ora l'equazione di Maxwell (36)₁ per $F_{\alpha\rho}$, e vediamo il suo contenuto, a fronte della (28). Si ha identicamente:

$$F_{\alpha\rho} \nabla_\beta F^{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\rho} \partial u^\alpha + F_{\alpha\rho} (u^\alpha \nabla_\beta v^\beta - v^\alpha \nabla_\beta u^\beta - u^\beta \nabla_\beta v^\alpha) = 0 ,$$

ovvero, tenuto conto della decomposizione (35):

$$(41) \quad F_{\alpha\rho} \nabla_\beta F^{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\rho} \partial u^\alpha - v_\rho u^\beta H_\beta + u_\rho \nabla_\beta u^\beta = 0 .$$

Pertanto, in virtù della (38), si ha infine l'equazione:

$$(42) \quad v^\beta (F_{\alpha\rho} \nabla_\beta u^\alpha - u_\rho H_\beta) = 0 ,$$

la quale è *contenuta nella più generale (28)* (a due indici, anzichè uno):

$$(43) \quad F_{\alpha\rho} \nabla_\beta u^\alpha = u_\rho H_\beta \quad , \quad H_\beta \stackrel{def}{=} u^\alpha \nabla_\beta v_\alpha ;$$

infatti la (42) si ottiene dalla (43), saturando questa con v^β .

In conclusione, le equazioni (41), depurate delle due condizioni (38), *rientrano nella (43)*, sia pure formalmente, nel senso che l'accostamento tra le due equazioni è puramente indicativo; infatti, a differenza delle (39), le quali provengono dalle equazioni di Maxwell, la (43) proviene da una identità.

Per quanto riguarda le (38), esse hanno invece un ruolo diverso: la prima non è compresa nella (41) e, in particolare, traduce l'ortogonalità di \mathbf{H} e \mathbf{u} :

$$(44) \quad u^\beta H_\beta = 0 ;$$

di qui *il carattere spaziale di \mathbf{H}* (il parallelismo di \mathbf{H} e \mathbf{u} non è compatibile con l'arbitrarietà di \mathbf{v}); la seconda:

$$(45) \quad \nabla_\beta u^\beta = -v^\beta H_\beta ;$$

è contenuta nella (43) (basta moltiplicare questa per v^β).

Una volta riconosciuto il rapporto tra le equazioni (39) e (43), resta da chiarire la connessione tra le equazioni di Maxwell, depurate delle (38), e la (39) stessa. In pari tempo, occorre tener conto del ruolo del 2° gruppo delle equazioni di Maxwell, qui non considerate; tuttavia, quanto precede mette bene in evidenza che, ai fini dell'approccio al neutrino, inteso come campo E.M. singolare, l'intervento diretto di $F_{\alpha\beta}$ crea qualche difficoltà. Le difficoltà diminuiscono, come vedremo, nello schema di Rainich che, come già detto, evita il ricorso diretto al campo singolare $F_{\alpha\beta}$, a favore del tensore energetico.

5. Neutrini in Relatività generale: premesse e generalità

A parte l'aspetto assoluto, nello spaziotempo V_4 (che geometrizza solo il campo gravitazionale), dal punto di vista relativo, cioè in un riferimento arbitrario $\Gamma(\gamma)$, l'equazione di moto di una particella carica è notoriamente:

$$(46) \quad \frac{\perp}{d} \mathbf{p} / dT = m \mathbb{G} + e \mathbf{L} ,$$

essendo $\frac{1}{d}$ la derivata vincolata c T il tempo relativo di Cattaneo [8]:

$$(47) \quad \frac{1}{d} \mathbf{p} / dT \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \gamma \gamma, \quad () \stackrel{def}{=} d / dT (), \quad dT \stackrel{def}{=} -\frac{1}{c} \gamma \cdot dE,$$

nonchè $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ l'impulso relativo, m la massa, e la carica, \mathbb{G} il campo gravitazionale:

$$(48) \quad \mathbb{G} \stackrel{def}{=} -c \dot{\gamma},$$

e infine \mathbf{L} la forza di Lorentz:

$$(49) \quad \mathbf{L} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}.$$

Ciò premesso, in ambito particellare (approccio di prima istanza), un neutrino è una particella priva sia di massa propria che di carica propria, ovvero è collocata alla base della gerarchia delle particelle cariche: si tratta pertanto di un problema dinamico che investe le teorie unitarie; d'altra parte, essendo la carica invariante: $e = e_0 = inv.$, una particella limite quale il neutrino rientra anche nella gerarchia dei fotoni (cfr. ad es. [5], 110); questi sono caratterizzati da una linea oraria nulla, e da un campo di vettori \mathbf{P} , tangente alla linea (e quindi nullo), salvo eventuale struttura interna; di qui i due caratteri fondamentali: la velocità relativa \mathbf{v} (di norma c^2), e la frequenza relativa ν , da cui la massa relativa $m = \frac{1}{c^2} h\nu$, e l'impulso:

$$(50) \quad \mathbf{p} = \frac{1}{c^2} h\nu \mathbf{v}.$$

Naturalmente il moto del fotone dipenderà, nell'ambito della Relatività generale, dal tipo di spaziotempo presupposto e, beninteso, dal riferimento scelto Γ . Si tratta, in ogni modo, di uno schema limite che, come già detto, dato l'intervento della carica, ha la sua collocazione più naturale nelle teorie unitarie, ove l'equazione di moto (46) non è più rappresentativa.

In ogni modo, pur in ambito non quantistico, allo schema particellare si affianca lo schema di campo, più completo e significativo; si tratta di un approccio di 2° livello, con struttura vettoriale, efficace, per contenuto ed estensione, in ambito gravito-elettromagnetico. Esso rafforza l'idea che il neutrino corrisponda ad un campo E.M. singolare, e ovviamente può essere esaminato sia in termini di Maxwell, attraverso il campo E.M. (come abbiamo visto), sia in teoria di Rainich (aspetti assoluti e relativi), mediante il tensore energetico $T_{\alpha\beta}$. Da questo punto di vista, scatta innanzitutto la decomposizione canonica del tensore energetico [6]; essa mette in evidenza nel caso singolare, un campo di vettori del genere luce, quindi una congruenza nulla e geodetica, con le proprietà geometrico-cinematiche [10]. Naturalmente non c'è effetto di carica, perchè questa non è stata inserita nello schema considerato; tuttavia, il quadro di Rainich potrebbe essere allargato alle cariche e alle correnti, in uno schema più ampio, anche se, nel caso del neutrino, la

carica è inefficace per definizione.

6. Schema limite: Esistenza del campo di Rainich

Il quadro generale della teoria gravito-E.M.di Rainich è il seguente:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha\beta} = -\chi T_{\alpha\beta} \quad , \quad \nabla_{\beta} R_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad , \quad R_{\alpha}^{\alpha} = 0 \\ R_{\alpha}^{\rho} R_{\rho}^{\beta} = \Lambda^2 \delta_{\alpha}^{\beta} \quad , \quad 4\Lambda^2 \stackrel{def}{=} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \quad , \quad R_{00} \leq 0 \\ \partial_{\alpha} \Upsilon_{\beta} = \partial_{\beta} \Upsilon_{\alpha} \quad , \quad M \Lambda^2 \Upsilon_{\beta} = \eta_{\beta\alpha\mu\nu} \nabla^{\mu} R^{\nu\rho} R_{\rho}^{\alpha} , \end{array} \right.$$

essendo $R_{\alpha\beta}$ il *tensore di Ricci*, condizionato dalle equazioni gravitazionali (51)₁, $T_{\alpha\beta}$ il *tensore energia-impulso elettromagnetico (sorgente)*, e le *equazioni di conservazione* (51)₂; completano il quadro le *relazioni algebriche di Rainich* (51)_{3,4} e le *equazioni di irrotazionalità* (51)₆ del *vettore di Rainich* Υ , tradotto in funzione di $R_{\alpha\beta}$ e derivate prime, mercè la (51)₇. Si tratta di un quadro abbastanza complicato, che fa capo al tensore di Ricci: personaggio chiave, funzione della metrica dello spaziotempo; invece, il problema del neutrino ha una facile risoluzione, mercè il metodo di Rainich. Innanzitutto, la sorgente E.M. $T_{\alpha\beta}$ può essere tradotta *in termini canonici*, e si possono sviluppare le (5)₆, mediante le *derivate seconde di $R_{\alpha\beta}$* ; ne consegue un quadro generale ($\Lambda \neq 0$) che, assegnata la legge di sorgente $T_{\alpha\beta}$, *si esprime in termini delle variabili $R_{\alpha\beta}$* , le quali sono ovviamente subordinate alle condizioni di irrotazionalità (51)₅. In particolare, possiamo considerare, nel quadro (51), il caso limite $\Lambda = 0$, nell'ipotesi che il rapporto:

$$(52) \quad f_{\beta} \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Lambda^2} \eta_{\beta\alpha\mu\nu} \nabla^{\mu} R^{\nu\rho} R_{\rho}^{\alpha} ,$$

sia finito per $\Lambda \rightarrow 0$; analogamente a quanto accade per un fotone, in ambito particellare, cioè senza struttura: *la massa relativa $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ è finita*, per $m_0 \rightarrow 0$ e $v \rightarrow c$, cioè le due grandezze: m_0 e $v - c$, sono *infinitesime dello stesso ordine*, a partire da $m_0 \succ 0$ e $v \prec c$. Ciò premesso, fissiamo l'attenzione sul problema del neutrino, inteso come supporto di un campo E.M. singolare, cioè con tensore E.M del tipo:

$$(53) \quad T_{\alpha\beta} = 2 u_{\alpha} u_{\beta} ,$$

essendo u_{α} *isotropo*; la (5)₁ implica allora:

$$(54) \quad R_{\alpha\beta} = -2\chi u_{\alpha} u_{\beta} ,$$

e configura, attraverso il campo u_{α} , un *flusso fotonico disgregato*, ove il fattore -2χ può essere assorbito dal prodotto $u_{\alpha} u_{\beta}$:

$$(55) \quad R_{\alpha\beta} = u_{\alpha} u_{\beta} \Rightarrow 4\Lambda^2 = u_{\alpha} u_{\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = (u_{\alpha} u^{\alpha}) = 0 .$$

A questo punto, data l'arbitrarietà di u_{α} , facciamo *il limite del rapporto* (52), per $\Lambda \neq 0$, supponendo che tale parametro sia del tipo: $\Lambda = u_{\alpha} u^{\alpha} \neq 0$,

essendo u_α non nullo: $|\mathbf{u}| \neq 0$; si ha allora:

$$(56) \quad u_\alpha = u n_\alpha, \quad n_\alpha n^\alpha = \varepsilon = \pm 1, \quad u^2 = u_\alpha u^\alpha \neq 0,$$

con che Λ^2 risulta dell'ordine di u^4 :

$$(57) \quad \Lambda^2 = u^4.$$

Al tempo stesso, per quanto riguarda il rapporto (52), si ha:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu R^{\nu\rho} R_\rho^\alpha &= \nabla^\mu (u^\nu u^\rho) u_\rho u^\alpha = \nabla^\mu (\Lambda n^\nu n^\rho) \Lambda n_\rho n^\alpha = \\ &= \varepsilon \Lambda \nabla^\mu \Lambda n^\nu n^\alpha + \Lambda^2 \nabla^\mu (n^\nu n^\rho) n_\rho n^\alpha, \end{aligned}$$

onde la (52) diviene, essendo $\nabla^\mu n^\rho n_\rho = 0$:

$$f_\beta = \frac{\varepsilon}{\Lambda^2} (\Lambda^2 \nabla^\mu n^\nu n^\alpha + \Lambda \nabla^\mu \Lambda n^\nu n^\alpha) \eta_{\beta\alpha\mu\nu};$$

si vede bene di qui che sia il numeratore che il denominatore, sono infinitesimi, per $\Lambda \rightarrow 0$, comunque sia scelto il vettore unitario n_α . Più precisamente, si tratta di infinitesimi dello stesso ordine, in quanto, essendo nullo il limite del prodotto $\frac{1}{\Lambda} \partial_\mu \Lambda = \partial_\mu \log \Lambda$, il campo limite f_β è del tipo:

$$(58) \quad f_\beta = \varepsilon \nabla^\mu n^\nu n^\alpha \eta_{\beta\alpha\mu\nu},$$

con l'intervento del tensore aggiunto di n^α :

$$(59) \quad \overset{*}{n}_{\beta\mu\nu} = n^\alpha \eta_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \stackrel{def}{=} -\sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Ne consegue che, per $\Lambda = 0$, il campo fondamentale Υ_β , lungi dall'essere indeterminato, è ancora ben definito, come nel caso generale, e del tipo:

$$(60) \quad \Upsilon_\beta = \frac{1}{4} \varepsilon \nabla^\mu n^\nu \overset{*}{n}_{\beta\mu\nu},$$

ove n^ν è un campo vettoriale unitario e, a priori, del tutto arbitrario (come Υ_β da cui è derivato). Esso è subordinato alle condizioni di irrotazionalità (5)₅, e attribuisce al neutrino una struttura vettoriale, che esamineremo tra un momento. Consideriamo dapprima il quadro (51), prescindendo dal campo di Rainich (60), e dalla identità $R_{00} \geq 0 \sim u_o^2 \geq 0$:

$$(61) \quad R_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta, \quad \nabla^\beta R_{\alpha\beta} = 0, \quad u_\alpha u^\alpha = 0;$$

si tratta delle equazioni gravitazionali corrispondenti ad un fluido fotonico disgregato, e delle equazioni di conservazione, le quali contengono, come incognite, la metrica $g_{\alpha\beta}$ e il campo u_α . Le equazioni di conservazione: $\nabla^\beta (u_\alpha u_\beta) \equiv \nabla^\beta u_\alpha u_\beta + u_\alpha \nabla^\beta u_\beta = 0$, danno luogo all'equazione dei raggi:

$$(62) \quad \partial u_\alpha + u_\alpha \nabla^\beta u_\beta = 0, \quad \partial \stackrel{def}{=} u^\beta \nabla_\beta \text{ (derivata direzionale)}.$$

Si vede bene di qui che il derivato ∂u_α è parallelo a u_α , cioè i raggi sono geodetici; d'altra parte, essendo ε inessenziale ai fini della (60), il campo Υ_β è lo stesso, in entrambi i casi $\varepsilon = \pm 1$, e pertanto non è restrittivo supporre che il campo di Rainich n_α sia del genere tempo: $\mathbf{n} = \gamma$ ($\varepsilon = -1$). Nasce così un ben determinato riferimento generale Γ e, in corrispondenza, l'equazione di moto (62) si può interpretare in termini di decomposizione naturale [8], ovvero in

modo intrinseco, mediante la tecnica delle *coppie di congruenze* ([11], 133 e seg.). Di queste, una è costituita dal riferimento Γ di Rainich, e l'altra, *isotropa e geodetica*: \mathcal{N} , è associata al campo \mathbf{u} di cui al flusso neutrino, il quale viene a costituire una *struttura vettoriale per* Γ . Naturalmente il ruolo delle due congruenze non è intercambiabile.

7. Dinamica relativa del neutrino e scalare caratteristico

Nel caso attuale, il riferimento Γ è subordinato alle condizioni (5)₅ :

$$(63) \quad \nabla_{\mu} \gamma_{\nu} \overset{*}{\gamma}_{\beta}^{\mu\nu} = \partial_{\beta} \varphi \quad , \quad \overset{*}{\gamma}_{\beta}^{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \gamma^{\alpha} \eta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} ,$$

indipendenti dal riferimento \mathcal{N} . Pertanto, supposto che le coordinate y^{α} siano *adattate a* Γ (cioè che non è restrittivo), vale la decomposizione naturale sia per il gradiente di γ , sia per il tensore di Ricci, cioè:

$$(64) \quad \nabla_{\mu} \gamma_{\nu} = H_{\mu\nu} - \gamma_{\mu} C_{\nu} ,$$

essendo $H_{\mu\nu}$ un *tensore spaziale, riassuntivo delle velocità angolare e di deformazione proprie* del fluido di Rainich Γ :

$$(65) \quad H_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} ;$$

inoltre, per quanto riguarda il *tensore dispari di Ricci*:

$$(66) \quad \eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \gamma_{\alpha} \eta_{\beta\mu\nu} - \gamma_{\beta} \eta_{\alpha\mu\nu} + \gamma_{\mu} \eta_{\alpha\beta\nu} - \gamma_{\nu} \eta_{\alpha\beta\mu} ;$$

esso è costruito mediante il *tensore spaziale analogo*: $\eta_{\beta\mu\nu}$, a tre indici, *antisimmetrico* ed efficace solo per $\beta, \mu, \nu = 1, 2, 3$:

$$(67) \quad \eta_{\beta\mu\nu} = \sqrt{\gamma} \varepsilon_{\beta\mu\nu} \quad , \quad \gamma \stackrel{def}{=} \det | \gamma_{\alpha\beta} | ,$$

funzione della metrica indotta $\gamma_{\alpha\beta}$ e dell'*indicatore di Levi-Civita* $\varepsilon_{\beta\mu\nu}$.

Naturalmente, se si assume una *base anolonoma adattata* alla struttura $\Gamma \otimes \Sigma$, le componenti dei tensori caratteristici di Γ : $\Omega_{\mu\nu}$, C_{ν} e $K_{\mu\nu}$ si semplificano, nel senso che valgono le *formule generali* [8, 106]:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Omega}_{ik} = \frac{1}{2} \gamma_0 [\tilde{\partial}_i (\gamma_k / \gamma_0) - \tilde{\partial}_k (\gamma_i / \gamma_0)] \quad , \quad \tilde{C}_i = \gamma_0 [\tilde{\partial}_i \gamma^0 + \partial (\gamma_i / \gamma_0)] \quad , \quad \tilde{K}_{ik} = \frac{1}{2} \partial \gamma_{ik} \\ \tilde{\eta}_{0\alpha ikl} = -\tilde{\eta}_{\alpha ikl} \quad , \quad \tilde{\eta}_{\alpha ikl} \stackrel{def}{=} \sqrt{\gamma} \varepsilon_{ikl} \quad , \quad \gamma_0 \gamma^0 = -1 , \end{array} \right.$$

con l'intervento del campo γ_{α} e delle *derivate pfaffiane* $\tilde{\partial}_{\alpha}$ così definite:

$$(69) \quad \partial \stackrel{def}{=} \gamma^0 \partial_0 \quad , \quad \tilde{\partial}_i \stackrel{def}{=} \partial_i - \gamma_i / \gamma_0 \partial_0 \quad , \quad \partial_{\alpha} \stackrel{def}{=} \partial / y^{\alpha} .$$

Al tempo stesso, tenuto conto degli *shifters* ω_{β}^{α} :

$$(70) \quad \omega_0^{\alpha} = \gamma^{\alpha} \quad , \quad \omega_i^{\alpha} = \delta_i^{\alpha} - \gamma_i / \gamma_0 \delta_0^{\alpha} \quad \sim \quad \omega_{\beta}^{\alpha} = \delta_i^{\alpha} \delta_{\beta}^i - \gamma_{\beta} \delta_0^{\alpha} ,$$

la decomposizione naturale trova la più *immediata formalizzazione*; in particolare, si ha, come è naturale:

$$(71) \quad \tilde{\gamma}_i = \omega_i^{\alpha} \gamma_{\alpha} = 0 \quad , \quad \tilde{\gamma}_0 = \omega_0^{\alpha} \gamma_{\alpha} = -1 .$$

Ciò premesso, esaminiamo la *dinamica del neutrino*, cioè il contenuto relativo dell'equazione di moto (39), nel riferimento Γ associato al campo di Rainich \mathbf{n} , già introdotto in precedenza. Innanzitutto, la derivata direzionale $\partial_{\mathbf{u}}$, secondo la linea oraria generica del flusso neutrino \mathbf{u} , si può mettere in relazione con il *tempo standard T di Cattaneo*, essendo $\gamma_\alpha dy^\alpha/dT \neq 0$:

$$(72) \quad dT \stackrel{def}{=} -\frac{1}{c}\gamma_\alpha dy^\alpha \sim 1 = -\frac{1}{c}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad , \quad \nu^\alpha \stackrel{def}{=} dy^\alpha/dT ;$$

si ha allora la condizione:

$$(73) \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu} = -c,$$

valida per ogni tipo di vettore $\boldsymbol{\nu}$ e, in particolare, se $\boldsymbol{\nu}$ è isotropo. Con la (73), la decomposizione naturale di $\boldsymbol{\nu}$: $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}$, assume la forma standard, tipica di una particella materiale ([8],148):

$$(74) \quad \boldsymbol{\nu} = \mathbf{v} + c\boldsymbol{\gamma} \quad , \quad \nu^\alpha \stackrel{def}{=} dy^\alpha/dT,$$

essendo \mathbf{v} la *velocità relativa del neutrino*.

La (74) vale naturalmente anche per il campo \mathbf{u} , il quale è definito a meno di un fattore m ; fattore che possiamo interpretare come *massa relativa del neutrino* (la massa propria è invece nulla). Si ha allora, come per una particella materiale, la decomposizione:

$$(75) \quad \mathbf{u} = m \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p} + \frac{1}{c}\mathcal{E} \boldsymbol{\gamma} \quad , \quad \mathbf{p} \stackrel{def}{=} m \mathbf{v} \quad , \quad \mathcal{E} \stackrel{def}{=} mc^2,$$

e l'acquisizione (62): $u^\alpha \partial_\alpha \mathbf{u} + \text{Div} \mathbf{u} = 0 \sim m \dot{\mathbf{u}} + \partial_\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^\alpha = 0$,
 ($\dot{\cdot} \stackrel{def}{=} d/dT$), essendo $m \neq 0$, assume la forma equivalente:

$$(76) \quad \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{c}\mathcal{E} \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \frac{1}{c}\dot{\mathcal{E}} \boldsymbol{\gamma} + \widehat{H} (\mathbf{v} + c\boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

ove si è posto:

$$(77) \quad \widehat{H} \stackrel{def}{=} \partial_\alpha (\mathbf{p} + \frac{1}{c}\mathcal{E} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{e}^\alpha.$$

Come per una particella gravitante ([8], 149), la (76) riassume i *teoremi della quantità di moto e dell'energia*: $\dot{\mathbf{p}}_\Sigma + mc \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \widehat{H} \mathbf{v} = 0$, $-\dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{c}\dot{\mathcal{E}} + c\widehat{H} = 0$, ovvero:

$$(78) \quad \dot{\mathbf{p}}_\perp = m\mathbf{G} - \widehat{H} \mathbf{v} \quad , \quad \dot{\mathcal{E}} = m\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} - c^2 \widehat{H},$$

con l'intervento della *derivata vincolata del campo vettoriale \mathbf{p}* (per un tensore cfr. [8] , 151) e del *campo gravitazionale relativo \mathbf{G}* :

$$(79) \quad \dot{\mathbf{p}} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{p}}_\Sigma \equiv \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{p} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma} \quad , \quad \mathbf{G} \stackrel{def}{=} -c \dot{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Rispetto alla dinamica di una particella, la (78) presenta, come *caratteristica del neutrino*, il termine $\widehat{H} \mathbf{v}$, che si riscontra naturalmente anche nel teorema dell'energia, ove

$v^2 = c^2$. Esplicitiamo ora il contenuto dello scalare \widehat{H} , come dalla (76), assumendo una *base anolonoma adattata a Γ* ; si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\alpha \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^\alpha = \tilde{\partial}_\alpha \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^\alpha = -\partial \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \tilde{\partial}_i \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{C} + \tilde{\partial}_i \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^i \\ \partial_\alpha \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}^\alpha = -\partial \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \tilde{\partial}_i \boldsymbol{\gamma} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^i = \tilde{H}_{ik} \boldsymbol{\gamma}^{ik} = K; \end{array} \right.$$

pertanto \widehat{H} è del tipo:

$$(80) \quad \widehat{H} = K + \frac{1}{c} \partial \mathcal{E} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{C} + \tilde{\partial}_i \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^i, \quad K \stackrel{def}{=} \tilde{K}_{ik} \boldsymbol{\gamma}^{ik},$$

ovvero dipende dal riferimento Γ sia attraverso la *velocità di deformazione*

cubica K , sia attraverso il *vettore di curvatura* \mathbf{C} . Al tempo stesso, \widehat{H} è funzione ben determinata *dell'energia \mathcal{E} del neutrino, e della sua quantità di moto \mathbf{p}* , onde costituisce un *termine di accoppiamento* per il sistema (78). Infine, il *campo gravitazionale* \mathbf{G} si decompone al modo seguente ([8],152):

$$(81) \quad \mathbf{G} \stackrel{def}{=} -c \boldsymbol{\gamma} = -c^2 \mathbf{C} - c v^k \tilde{H}_{ki} \tilde{\mathbf{e}}^i,$$

cioè contiene tutte e tre le caratteristiche del riferimento Γ : *curvatura e velocità angolare e di deformazione*; si ha così la *fusione* dei campi apparenti della Meccanica classica (di trascinamento, di Coriolis e di deformazione), in accordo con il *principio di equivalenza (unificazione gravitazionale)*.

8. Proprietà cinematiche della congruenza di riferimento Γ

Le equazioni (78) si riferiscono al moto del fascio neutrino, *rispetto al riferimento Γ* , desunto, per via di limite, dal campo di Rainich Υ ; naturalmente Γ è subordinato al *carattere conservativo* del campo Υ . Si tratta pertanto di indagare in due distinte direzioni: a) *nell'ambito del riferimento Γ* , per le restrizioni del campo Υ ; b) *nell'ambito della congruenza neutrinica \mathcal{N} : nulla e geodetica*, per ricavare le sue *proprietà caratteristiche*, eventualmente con il metodo delle coppie di congruenze [9].

Cominciamo dall'approccio a), e riprendiamo l'espressione (60) del campo Υ , per $\varepsilon = -1$, tenendo conto che abbiamo assunto $\mathbf{n} = \boldsymbol{\gamma}$; si ha: $-4 \Upsilon_\beta = \boldsymbol{\gamma}^\rho \eta_{\rho\beta\mu\nu} \nabla^\mu \boldsymbol{\gamma}^\nu$, con l'intervento della parte antisimmetrica del tensore $\nabla_\mu \boldsymbol{\gamma}_\nu$, il quale, come dalle (64) e (65), è del tipo:

$$(82) \quad \nabla_\mu \boldsymbol{\gamma}_\nu \equiv H_{\mu\nu} - \boldsymbol{\gamma}_\mu C_\nu, \quad H_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \Omega_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}.$$

Pertanto, Υ_β è funzione del vortice $\Omega_{\mu\nu}$ e del prodotto $\boldsymbol{\gamma}^\rho \eta_{\rho\beta\mu\nu}$:

$$(83) \quad -4\Upsilon_\beta = \Omega^{\mu\nu} \boldsymbol{\gamma}^\rho \eta_{\rho\beta\mu\nu};$$

di qui la condizione di irrotazionalità del vettore Υ_β , calcolando dapprima la derivata covariante ∇_α , e poi commutando gli indici α e β . La derivata $\nabla_\alpha \Upsilon_\beta$, a parte il fattore inessenziale -4 , è data dalla somma:

$$(84) \quad D_{\alpha\beta} = (\nabla_\alpha \gamma^\rho \Omega^{\mu\nu} + \gamma^\rho \nabla_\alpha \Omega^{\mu\nu}) \eta_{\rho\beta\mu\nu},$$

ove il tensore $\nabla_\mu \gamma_\nu$, è definito dalla (82), in termini delle *caratteristiche* di Γ : $\Omega_{\mu\nu}$, $K_{\mu\nu}$ e C_ν . Inoltre, a norma della (66), la saturazione di $\eta_{\rho\beta\mu\nu}$ con γ^ρ dà luogo al *tensore di Ricci spaziale*:

$$(85) \quad \gamma^\rho \eta_{\rho\beta\mu\nu} = -\eta;$$

si che la (83) non differisce da:

$$(86) \quad -2\Upsilon_\beta = \omega_\beta,$$

essendo ω_β l'*aggiunto* di $\Omega^{\mu\nu}$ in Σ :

$$(87) \quad \omega_\beta \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \eta_{\beta\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}.$$

Pertanto Υ_β , a priori funzione del *vortice* $\Omega^{\mu\nu}$ del riferimento Γ e del *determinante* della metrica spaziale γ_{ik} (attraverso il tensore $\eta_{\beta\mu\nu}$), *dipende solo dal tensore aggiunto* (87), e le condizioni di irrotazionalità divengono:

$$(88) \quad \nabla_\alpha \omega_\beta - \nabla_\beta \omega_\alpha = 0;$$

in termini anolonomi, esse equivalgono ai due gruppi di limitazioni:

$$(89) \quad \tilde{\nabla}_i \tilde{\omega}_0 - \tilde{\nabla}_0 \tilde{\omega}_i = 0 \quad , \quad \tilde{\nabla}_i \tilde{\omega}_k - \tilde{\nabla}_k \tilde{\omega}_i = 0,$$

ove si deve intendere:

$$(90) \quad \tilde{\omega}_0 = 0 \quad , \quad \tilde{\omega}_i = \frac{1}{2} \tilde{\eta}_{ilk} \tilde{\Omega}^{lk}.$$

Il 1° gruppo delle (89) si scrive:

$$(91) \quad \partial \tilde{\omega}_i = 0;$$

risulta infatti: $\tilde{\nabla}_i \tilde{\omega}_0 = -\mathcal{R}_{i0}^\alpha \tilde{\omega}_\alpha = -\tilde{H}_i^j \tilde{\omega}_j$ e, analogamente:

$\tilde{\nabla}_0 \tilde{\omega}_i = \partial \tilde{\omega}_i - \tilde{H}_i^j \tilde{\omega}_j$, mentre il 2° gruppo implica l'*irrotazionalità del campo spaziale* $\tilde{\omega}_i$. Quest'ultimo, a sua volta, invariante rispetto al tempo, a norma della (91), *ammette una funzione potenziale* $\varphi(y^1, y^2, y^3)$:

$$(92) \quad \tilde{\omega}_i = \tilde{\partial}_i \varphi \equiv \partial_i \varphi \quad , \quad \varphi = \varphi(y^i).$$

Naturalmente le condizioni (91)-(92) si possono tradurre in termini di $\tilde{\Omega}_{ik}$, il quale è legato al campo fondamentale γ_α dalla *formula generale* (68):

$$(93) \quad \tilde{\Omega}_{ik} = \frac{1}{2} \gamma_0 (\tilde{\partial}_i \gamma_k / \gamma_0 - \tilde{\partial}_k \gamma_i / \gamma_0);$$

pertanto, le *condizioni di irrotazionalità* (88) si riflettono sul campo base γ_α , cioè si ha: $\tilde{\omega}_i = \frac{1}{2} \gamma_0 \tilde{\eta}_i^{jk} \tilde{\partial}_j w_k \equiv \frac{1}{2} \gamma_0 \tilde{\nabla}_j (\tilde{\eta}_i^{jk} w_k)$, $w_k \stackrel{def}{=} \gamma_k / \gamma_0$, ovvero:

$$(94) \quad \tilde{\nabla}_i \varphi = \frac{1}{2} \gamma_0 \tilde{\nabla}_j (\tilde{\eta}_i^{jk} \gamma_k / \gamma_0).$$

D'altra parte, mediante una *trasformazione interna* a Γ , si può rendere $\gamma_0 = -1$, onde la (94) assume la *forma conservativa*:

$$(95) \quad \tilde{\nabla}_j (\delta_i^j \varphi - \frac{1}{2} \tilde{\eta}_i^{jk} \gamma_k) = 0.$$

La (94) è una condizione per la determinazione dello scalare φ (e quindi di ω), a partire da γ_α , subordinatamente alle condizioni di compatibilità (essendo φ indipendente dal tempo, le derivate $\tilde{\nabla}_{ji} \varphi$ sono commutabili ([8], 118):

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nabla}_l \gamma_0 \tilde{\nabla}_j (\tilde{\eta}_i^{jk} \gamma_k / \gamma_0) - \tilde{\nabla}_i \gamma_0 (\tilde{\eta}_l^{jk} \gamma_k / \gamma_0) + \\ \gamma_0 [\tilde{\nabla}_{ji} (\tilde{\eta}_i^{jk} \gamma_k / \gamma_0) - \tilde{\nabla}_{ji} (\tilde{\eta}_l^{jk} \gamma_k / \gamma_0)]. \end{array} \right.$$

Se $\gamma_0 = -1$, si ha, più semplicemente:

$$(97) \quad \tilde{\nabla}_{ji} \Gamma_i^j - \tilde{\nabla}_{jl} \Gamma_i^j = 0 \quad , \quad \Gamma_i^j \stackrel{def}{=} \tilde{\eta}_l^{jk} \gamma_k;$$

ciò che mette bene in evidenza come la compatibilità della (92), per $\gamma_0 = -1$, comporti precise limitazioni per le derivate 2^e delle γ_k .

In definitiva, l'irrotazionalità del campo di Rainich equivale alla condizione che il vortice associato a Γ sia conservativo e indipendente dalla variabile temporale; pertanto, il campo fondamentale γ_α non è più libero, ma subordinato a condizioni differenziali del 2^o ordine, come dalla (96), le quali si riflettono anche sul vettore di curvatura, senza intaccare la velocità di deformazione.

9. Proprietà geometrico-cinematiche del flusso neutrino

Fissiamo ora l'attenzione sulla congruenza \mathcal{N} dei neutrini, la quale è nulla e geodetica; come tale, essa non può costituire un riferimento ma, associata a Γ , mette in evidenza le sue proprietà; si può operare per via anolonomica ([9], 210), assumendo $\mathbf{u} \equiv \boldsymbol{\eta}$ e la base canonica ([9], 135):

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{e}}_0 = \boldsymbol{\gamma} \quad , \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \delta_i^a \boldsymbol{\eta} + \delta_i^a (\mathbf{c}_a - \eta_a / \eta_0 \mathbf{c}_0) \\ \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\eta} = -1 \quad , \quad \boldsymbol{\eta}^2 = 0 \quad (a = 2, 3), \end{array} \right.$$

essendo $\{\mathbf{c}_\alpha\}$ una base naturale arbitraria, adattata a Γ :

$$(99) \quad \gamma^i = 0 \quad , \quad \gamma^0 = -1/\gamma_0 > 0 \quad , \quad \eta_0 = \gamma_0 < 0.$$

Indicando con $\hat{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}^\rho$ coefficienti di Ricci della base (98), le derivate pfaffiane del campo $\boldsymbol{\eta}$ (nullo) sono espresse dalle formule ([9], 210):

$$(100) \quad \partial \boldsymbol{\eta} = -\hat{\mathcal{R}}_{00}^0 \boldsymbol{\eta} + \hat{\mathcal{R}}_{0i}^0 \hat{\mathbf{e}}_i \quad , \quad \hat{\partial}_i \boldsymbol{\eta} = -\hat{\mathcal{R}}_{i0}^0 \boldsymbol{\eta} + \hat{\mathcal{R}}_{ik}^0 \hat{\mathbf{e}}^k,$$

da cui i prodotti caratteristici $\mathcal{R}_{ik} \stackrel{def}{=} \hat{\mathcal{R}}_{ik}^0$:

$$(101) \quad \mathcal{R}_{ik} = \hat{\partial}_i \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k;$$

tali coefficienti sono indipendenti da Γ (avendo carattere anolonomo), e

danno le *velocità angolare e di deformazione assolute del flusso* $\boldsymbol{\eta}$:

$$(102) \quad \widehat{\omega}_{i k} = \mathcal{R}_{[i k]} \quad , \quad \widehat{k}_{i k} = \mathcal{R}_{(i k)}.$$

Dato il carattere isotropo di $\boldsymbol{\eta}$, tali *ingredienti non sono liberi*, ma soddisfano necessariamente le *relazioni generali*:

$$(103) \quad 2 \widehat{\gamma}^i \widehat{\omega}_{i k} = \widehat{\gamma}^i \mathcal{R}_{ik} \sim \widehat{\gamma}^i \widehat{\omega}_{i k} = \widehat{\gamma}^i \widehat{k}_{i k},$$

ove il vettore $\widehat{\gamma}$ costituisce il *divario locale tra le due congruenze*:

$$(104) \quad \widehat{\gamma}_i \stackrel{def}{=} \boldsymbol{\gamma} \cdot \widehat{e}_i = \delta_i^1 + \delta_i^\alpha (\gamma_\alpha - \eta_\alpha).$$

A parte l'interpretazione cinematica di $\mathcal{R}_{i k}$, i coefficienti che figurano nella equazione (100) sono tratti dalla *tabella generale* [9], 163 :

$$(105) \quad \widehat{\mathcal{R}}_{00}^0 = C_i \widehat{\gamma}^i, \quad \widehat{\mathcal{R}}_{0i}^0 = C_i - \widetilde{\partial} \widehat{\gamma}_i + \widehat{H}_{i k} \widehat{\gamma}^k, \quad \widehat{\mathcal{R}}_{i0}^0 = \widehat{H}_{i k} \widehat{\gamma}^k,$$

ove C_i è la *curvatura di Γ* , e $\widehat{H}_{i k}$ riassume le *velocità angolare e di deformazione totali*, riferendosi ad entrambi i campi: $\boldsymbol{\gamma}$ e $\boldsymbol{\eta}$; inoltre $\boldsymbol{\eta}$ diviene una *struttura vettoriale di Γ* e la derivazione $\widetilde{\partial}$ è una *estensione tensoriale della derivazione ∂* , ottenuta mediante la *connessione anolonomo Γ_i^k* ([9], 151):

$$(106) \quad \Gamma_i^k \stackrel{def}{=} -\delta_i^1 A^k, \quad A^k \stackrel{def}{=} \eta^1 \partial [1/\eta^1 (\delta_1^k - \eta^\alpha \delta_\alpha^k)].$$

Per quanto riguarda l'equazione differenziale del flusso $\boldsymbol{\eta}$, essa si ottiene dalla (100), introducendo un parametro sul raggio generico; se questo è il tempo relativo di Cattaneo (47), *il quale ha senso anche per una curva nulla*, detta equazione si scrive nella forma ([9], 211):

$$(107) \quad d\boldsymbol{\eta}/d\Gamma = \widehat{\gamma}^i (\widehat{\mathcal{R}}_{i0}^0 \boldsymbol{\eta} - \mathcal{R}_{i k} \widehat{e}^k).$$

Si tratta di *risultati generali*, validi per una qualunque congruenza nulla \mathcal{N} ; in particolare, se \mathcal{N} è geodetica, dalla (107) segue la condizione $\widehat{\gamma}^i \mathcal{R}_{i k} = 0$, e viceversa. Pertanto, tenuto anche conto della (103), \mathcal{N} è *geodetica se e solo se sono soddisfatte le due condizioni equivalenti*:

$$(108) \quad \widehat{\gamma}^i \widehat{\omega}_{i k} = 0 \sim \widehat{\gamma}^i \widehat{k}_{i k} = 0.$$

Di qui la seguente *proprietà*: *Ogni congruenza nulla e geodetica (come \mathcal{N}), è parzialmente rigida e irrotazionale*:

$$(109) \quad \widehat{\omega}_{1k} = 0, \quad \widehat{k}_{1k} = 0.$$

Naturalmente nel caso geodetico, caratterizzato dalla (109), i coefficienti A e B_α del riferimento anolonomo ([9], 151):

$$(110) \quad A \stackrel{def}{=} \eta_\alpha \partial \eta^\alpha - \partial_1 \log(-\gamma_0), \quad B_\alpha \stackrel{def}{=} \eta_\alpha \partial_\alpha \eta^\alpha + \eta_0 \partial_1 (\eta_\alpha / \eta_0),$$

si semplificano; infatti, dal *legame generale*:

$$(111) \quad \widehat{\gamma}^i \widehat{\omega}_{i k} = -\frac{1}{2} \delta_k^a B_a,$$

segue direttamente la condizione $B_a = 0$, la quale si riassume nel seguente sistema differenziale del 1° ordine, nelle variabili η_i :

$$(112) \quad \eta^i \widehat{\partial}_a (\eta_i / \eta_0) - \widehat{\partial}_1 (\eta_a / \eta_0) = 0 \sim B_a = 0.$$

A sua volta, lo scalare A , che ha l'espressione generale:

$$(113) \quad A = -\widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k (\widehat{k}_{i k} + \widehat{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k),$$

nel caso geodetico assume la forma:

$$(114) \quad A = -\widehat{\gamma}^i \widehat{\gamma}^k \widehat{\nabla}_i \widehat{\gamma}_k.$$

Si noti che il parametro T di Cattaneo *non ha generalmente carattere affine*. Infatti, una volta soddisfatte le (103) (\mathcal{N} geodetica), perchè T sia affine, occorre e basta che sia nullo il coefficiente di $\boldsymbol{\eta}$ nella (107): $\widehat{\gamma}^i \widehat{\mathcal{R}}_{i 0}^0 = 0$, ovvero $A = 0$, dato il legame generale:

$$(115) \quad A = -\widehat{\gamma}^i \widehat{\mathcal{R}}_{i 0}^0.$$

In definitiva, valgono le due proprietà: a) *il parametro T è affine se e solo se i coefficienti A e B_a sono tutti nulli*; b) *ogni flusso \mathcal{N} normale, cioè del tipo $\widehat{\omega}_{i k} = 0$, è necessariamente geodetico*: vedi (108) o Sachs [29]. Pertanto, se una congruenza nulla \mathcal{N} ammette *fronti d'onda normali*, i raggi hanno necessariamente carattere geodetico; ciò accade, nel vuoto, per le *onde gravitazionali e le onde elettromagnetiche*, le quali, se il flusso è normale, si propagano secondo *geodetiche nulle* ([8], 333).

Si noti infine che l'ultimo vettore di cui alla (107):

$$(116) \quad \mathbf{C} \stackrel{def}{=} -\widehat{\gamma}^i \mathcal{R}_{i k} \widehat{\mathbf{e}}^k \equiv B_a \widehat{\mathbf{e}}^a,$$

può interpretarsi come *vettore di curvatura della generica curva \mathcal{N}* : la condizione $\mathbf{C} = 0$ *caratterizza infatti le geodetiche nulle*. Così, nella (107), il coefficiente A ha, a norma della (115), *il significato di fattore di parallelismo*, mentre il vettore $\mathbf{C} = B_a \widehat{\mathbf{e}}^a$ si può interpretare, per le curve nulle, come *curvatura geodetica*. Naturalmente \mathbf{C} è *normale a $\boldsymbol{\eta}$* ma, diversamente dalle curve ordinarie, *non è indipendente dalla velocità angolare $\widehat{\omega}_{i k}$, nè dalla velocità di deformazione $\widehat{k}_{i k}$* ; a norma della (103), si ha infatti:

$$(117) \quad \widehat{C}_k = -2 \widehat{\gamma}^i \widehat{\omega}_{i k} \equiv -2 \widehat{\gamma}^i \widehat{k}_{i k}.$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Rainich G. Y (1925), Trans. Amer. Math. Soc., 27,106;
- [2] Wheeler J. A. (1964), *Geometrodynamics and the Issue of the Final State*, Relativity, Groups and Topology, (eds.), DeWitt, C. and B., Gordon and Breach, New York;
- [3] Kuchowicz B.(1974), *Neutrinos in General Relativity: Four level (?) of approach*, GRG 5,2 (1974), 201-234;
- [4] Whittaker E.T. (1937), Proc. Roy. Soc.A,158, 38;
- [5] Ferrarese G.(1985), *Lezioni di Meccanica relativistica*, Pitagora Editrice Bologna;
- [6] Stazi L.(2006), *On the canonical form of the electromagnetic field*, Annali della Università di Ferrara, 2006
- [7] Cattaneo C. (1958), *General Relativity: Relative Standard Mass, Momentum, Energy and Gravitational Field in a General System of Reference*, Il Nuovo Cimento, **X**,10, 318-37;147-153-383;
- [8] Ferrarese G. (2001), *Lezioni di Relatività generale*, Pitagora Editrice Bologna;
- [9] Ferrarese G. (2004), *Riferimenti generalizzati in Relatività e applicazioni*, Pitagora Editrice Bologna;
- [10] Cattaneo C.(1959), *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, *Ann. Matematica Pura e Appl.*, **V**,48,361-86;
- [11] Sacs R. (1961) *Gravitational waves in general relativity: VI, The outgoing radiation condition*, Proc. Roy. Soc. (London), A, 264, 309

Some explicit travelling-wave solutions of a perturbed sine-Gordon equation

Gaetano Fiore

Dip. di Matematica e Applicazioni, Università "Federico II",
V. Claudio 21, 80125 Napoli

Abstract

We present in closed form some special travelling-wave solutions (on the real line or on the circle) of a perturbed sine-Gordon equation. The perturbation of the equation consists of a constant forcing term γ and a linear dissipative term, and the equation is used to describe the Josephson effect in the theory of superconductors and other remarkable physical phenomena. We determine all travelling-wave solutions with unit velocity (in dimensionless units). For $|\gamma| \leq 1$ we find families of solutions that are all (except the obvious constant one) manifestly unstable, whereas for $|\gamma| > 1$ we find families of stable solutions describing each an array of evenly spaced kinks.

1 Introduction and preliminaries

The scope of this communication is the determination in closed form of some special solutions of the class of partial differential equations

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi + \alpha \varphi_t + \gamma = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

parametrized by constants $\alpha > 0, \gamma \in \mathbb{R}$, more precisely the determination of the travelling-wave solutions $\varphi(x, t) = \tilde{g}(x - vt)$ with velocity $v = \pm 1$.

This equation (here written in dimensionless units) has been used to describe with a good approximation a number of interesting physical phenomena, notably Josephson effect in the theory of superconductors [6], which is at the base [1] of a large number of advanced developments both in fundamental research (e.g. macroscopic effects of quantum physics, quantum computation) and in applications to electronic devices (see e.g. Chapters 3-6 in [2]), or more recently also the propagation of localized magnetohydrodynamic modes in plasma physics [9]. The last two terms are respectively a dissipative and a forcing one; the sine-Gordon equation (sGe) is obtained by setting them equal to zero.

The sGe describes also the dynamics of the continuum limit of a sequence of neighbouring heavy pendula constrained to rotate around the same horizontal x -axis and coupled to each other through a torque spring [8] (see fig. 1); $\varphi(x, t)$ is the deviation angle from the lower vertical position at time t of the pendulum having position x . One can model also the dissipative term $-\alpha\varphi_t$ of (1) by immersing the pendula in a linearly viscous fluid, and the forcing term γ by assuming that a uniform, constant torque distribution is applied to the pendula. This mechanical

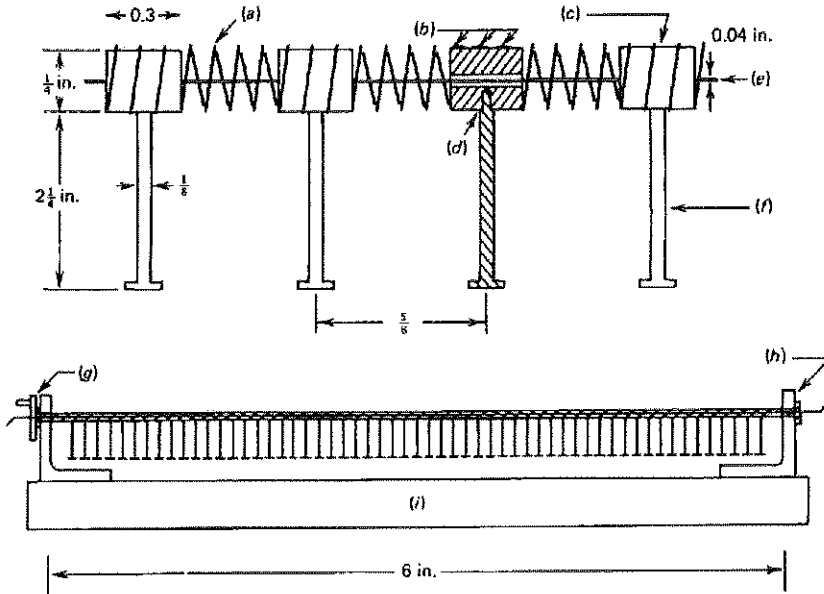


Figure 1: Mechanical model for the sine-Gordon equation. (a) Spring, (b) solder, (c) brass, (d) tap and thread, (e) wire, (f) nail, (g) and (h) ball bearings, (i) base (After A. C. Scott [8], courtesy of A. Barone, see [1])

analog allows a qualitative comprehension of the main features of the solutions, e.g. of their instabilities. The constant solutions of (1) exist only for $|\gamma| \leq 1$ and are, mod 2π ,

$$\varphi^s(x, t) \equiv -\sin^{-1} \gamma, \quad \varphi^u(x, t) \equiv \sin^{-1} \gamma + \pi. \quad (2)$$

If $|\gamma| < 1$ the former is stable, the latter unstable, as they yield respectively local minima and maxima of the energy density

$$h := \frac{\varphi_t^2}{2} + \frac{\varphi_x^2}{2} + \gamma\varphi - \cos \varphi. \quad (3)$$

In the mechanical analog they respectively correspond to configurations with all pendula hanging down or standing up. If $\gamma = \pm 1$ $\varphi^s = \varphi^u = \mp\pi/2 \pmod{2\pi}$, which is unstable because it is an inflection point for h .

In [5] we have performed a detailed analysis of travelling-wave solutions of (1). We briefly recall the framework adopted there and some of the results. Without loss of generality we can and shall assume $\gamma \geq 0$: if originally $\gamma < 0$, we just need to replace $\varphi \rightarrow -\varphi$. Moreover, space or time translations transform any solution into a two-parameter family of solutions, so one can choose any of them as the family representative element; for travelling-wave solutions this reduces to translation of the only independent variable. In agreement with the conventions adopted in [5], we specify our travelling-wave Ansatz as follows:

$$\xi := \pm x - t, \quad \varphi(x, t) = g(\xi) - \pi. \tag{4}$$

Replacing the Ansatz in (1) one obtains the first order ordinary differential equation

$$\alpha g' = \gamma - \sin g. \tag{5}$$

We have already recalled the constant solutions. If g' is not identically zero, by integrating $d\xi = \alpha dg / (\gamma - \sin g)$ one finds

$$\xi - \xi_0 = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi = \alpha \int_{g_0}^g \frac{ds}{\gamma - \sin s}$$

separately in each interval in which g' keeps its sign. This allows to determine the solution implicitly, namely the inverse $\xi(g)$.

If $\gamma \leq 1$, as g approaches respectively $\sin^{-1}\gamma$ or $\pi - \sin^{-1}\gamma \pmod{2\pi}$ the denominator of the integrand goes to zero (linearly if $\gamma < 1$, quadratically if $\gamma = 1$) while keeping the same sign, and therefore the integral diverges, implying that the corresponding ξ respectively goes either to $\pm\infty$, or to $\mp\infty$ [5]. In either case the range of $\xi(g)$ is the whole \mathbb{R} , implying that by taking the inverse one obtains $g(\xi)$ already in all the domain. If $\gamma > 1$ the denominator of the integrand is positive for all $s \in \mathbb{R}$, so that the solution g is strictly monotonic and linear-periodic, i.e. the sum of a linear and a periodic function, and

$$g(\xi + \Xi) = g(\xi) + 2\pi, \quad \Xi := \alpha \int_0^{2\pi} \frac{ds}{\gamma - \sin s}. \tag{6}$$

Denoting as φ^\pm the corresponding solutions with $\xi := \pm x - t$, by (4) this implies

$$\varphi^\pm(x + \Xi, t) = \varphi^\pm(x, t) \pm 2\pi. \tag{7}$$

This behaviour is illustrated in fig. 2 by a picture of the corresponding configuration for the mechanical model of fig. 1.

φ^\pm can be interpreted also as solutions of (1) on a circle of length $L = m\Xi$, for any $m \in \mathbb{N}$. The integer m parameterizes different topological sectors: in the m -th the pendula chain twists around the circle m times.

2 Explicit travelling-wave solutions with unit velocity

The purpose of this work is to determine in closed form the travelling-wave solutions (4) just described. We first transform eq. (5), with the help of the identities (18), into

$$4\alpha \frac{F'}{1+F^2} = \gamma - 4 \frac{F(1-F^2)}{(1+F^2)^2}$$

by looking for g in the form $g = 4 \tan^{-1} F$ and then into

$$2\alpha y' = 2y + \gamma(1+y^2) \quad (8)$$

by looking for F in the form $F = y + \sqrt{1+y^2}$. Note that diverging of $|y|$ at some point ξ_0 does not affect the continuity (and smoothness) of g at ξ_0 , even if the right limit is ∞ and the left one is $-\infty$, or viceversa: $y \rightarrow \pm\infty$ respectively implies $F \rightarrow \infty, 0$ while $g \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ in either case, which is compatible with a continuous g .

Below we solve for $y(\xi)$ explicitly. Putting all redefinitions together, we shall find solutions φ through the formula

$$\varphi^\pm(x, t) = 4 \tan^{-1} \left[y(\pm x - t) + \sqrt{1+y^2(\pm x - t)} \right] - \pi. \quad (9)$$

Only if $\gamma \leq 1$ the solutions $y_\pm = -\gamma^{-1} \pm \sqrt{\gamma^{-2} - 1}$ of the second degree equation $y^2 + y2/\gamma + 1 = 0$ are real and therefore give (real) constant solutions $y(\xi) \equiv y_\pm$ of (8), where the already mentioned constant solutions φ^s, φ^u of (1). For nonconstant solutions (8) is equivalent to

$$d\xi = \frac{2\alpha}{\gamma} \frac{dy}{y^2 + \frac{2}{\gamma}y + 1} \quad (10)$$

separately in each interval where y' keeps its sign. The discussion of (10) depends now on the value of the discriminant $\Delta = 4/\gamma^2 - 4$ of the equation $y^2 + y2/\gamma + 1 = 0$.

If $\gamma < 1$, then $\Delta > 0$, y_\pm are real and different and (10) can be written as

$$d\xi = \frac{2\alpha}{\gamma} \frac{dy}{(y - y_+)(y - y_-)} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left[\frac{dy}{y - y_+} - \frac{dy}{y - y_-} \right],$$

which is integrated to give the two families of solutions

$$y_1(\xi) = \frac{y_+ + y_- e^{A(\xi-\xi_0)}}{1 + e^{A(\xi-\xi_0)}}, \quad y_2(\xi) = \frac{y_+ - y_- e^{A(\xi-\xi_0)}}{1 - e^{A(\xi-\xi_0)}}, \quad (11)$$

where $A := (\sqrt{1-\gamma^2})\alpha^{-1}$ and ξ_0 is an integration constant. One easily checks that y'_1, y'_2 (and therefore also g'_1, g'_2) are respectively negative-, positive-definite; and that $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} y_i(\xi) = y_\mp$ for both $i = 1, 2$. Using formulae (23-24) shown in the Appendix we thus find

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} F[y_i(\xi)] = F(y_-) = \tan \theta, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} F[y_i(\xi)] = F(y_+) = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right).$$

for both $i = 1, 2$, and mod 2π on one side a strictly decreasing $g_1(\xi)$ with

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} g_1 = \pi - \sin^{-1} \gamma, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} g_1 = \sin^{-1} \gamma,$$

and on the other a strictly increasing $g_2(\xi)$ with

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} g_2 = \pi - \sin^{-1} \gamma, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} g_2 = 2\pi + \sin^{-1} \gamma.$$

As already noted, the singularity of y_2 at $\xi = \xi_0$ does not affect the continuity (and smoothness) of g_2 . Correspondingly, mod 2π

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \varphi_1^\pm = -\sin^{-1} \gamma \equiv \varphi^s, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_1^\pm = -\pi + \sin^{-1} \gamma \equiv \varphi^u, \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \varphi_2^\pm = -\sin^{-1} \gamma \equiv \varphi^s, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_2^\pm = \pi + \sin^{-1} \gamma \equiv \varphi^u, \quad (13)$$

therefore $\varphi_1^\pm, \varphi_2^\pm$ are unstable solutions, as noted in [5].

If $\gamma = 1$, then $\Delta = 0$, $y_\pm = -1$ and (10) can be written as

$$d\xi = 2\alpha \frac{dy}{(y+1)^2} = -2\alpha d\left[\frac{1}{y+1}\right],$$

which is integrated to give

$$y(\xi) = -\left[1 + \frac{2\alpha}{\xi - \xi_0}\right]. \quad (14)$$

This implies, with the help of (25),

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} y(\xi) = -1, \quad \Rightarrow \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} F[y(\xi)] = \sqrt{2} - 1 = \tan \frac{\pi}{8},$$

whereas again the singularity of y at $\xi = \xi_0$ does not affect the continuity of g . As y' , and therefore also F', g' , are positive-definite, one finds mod 2π

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} g = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} g = \frac{5\pi}{2}$$

and, correspondingly,

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \varphi^\pm = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi^\pm = \frac{3\pi}{2}; \quad (15)$$

also this φ^\pm is unstable, as noted in [5].

Finally, if $\gamma > 1$, then $\Delta < 0$, y_\pm are complex conjugate and the denominator of (10) does not vanish for any value of y . Setting $w := (y\gamma + 1)/\sqrt{\gamma^2 - 1}$ (10) can be written as

$$d\xi = \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \frac{dw}{1 + w^2},$$

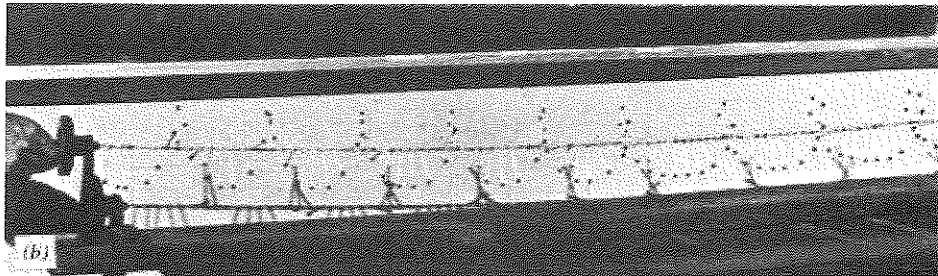


Figure 2: Photographs of the mechanical model of fig. 1: evenly spaced array of kinks (After A. C. Scott [8], courtesy of A. Barone, see [1])

which is integrated to give $\xi - \xi_0 = 2\alpha \tan^{-1} w / \sqrt{\gamma^2 - 1}$, whence

$$y(\xi) = -\gamma^{-1} + \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^{-2}}} \tan \left[\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{2\alpha} (\xi - \xi_0) \right], \tag{16}$$

where ξ_0 is an integration constant. This is a periodic function with period

$$\Xi := \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\gamma^2-1}}, \tag{17}$$

and the latter is also the period occurring in (6). In fact, choosing $\xi_0 = 0$ for simplicity, we see that as ξ varies from $-\Xi/2$ to $\Xi/2$ $y(\xi)$ varies from $-\infty$ to ∞ , $F(\xi)$ varies from 0 to ∞ , $g(\xi)$ varies from 0 to 2π . By continuity of g (which again is not affected by the singularity of y at $\xi = \Xi(k+1/2)$ ($k \in \mathbb{Z}$), we thus find the behaviour (6). The corresponding solutions $\tilde{\varphi}^\pm$ fulfill (7), describe arrays of evenly-spaced kinks (see fig. 2) moving with velocity ± 1 and are stable [5] (see also [7, 3]).

Appendix

We first recall the trigonometric identities

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin 4\alpha = \frac{4 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2}. \tag{18}$$

Given $\gamma \in [0, 1]$, let $\theta := \frac{1}{4} \sin^{-1} \gamma \in [0, \frac{\pi}{8}]$. Then $\gamma = \sin 4\theta$, $\sqrt{1-\gamma^2} = \cos 4\theta$ and, using the bisection formulae,

$$\sqrt{1 + \sqrt{1-\gamma^2}} = \sqrt{1 + \cos 4\theta} = \sqrt{2} \cos 2\theta, \tag{19}$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{1-\gamma^2}} = \sqrt{1 - \cos 4\theta} = \sqrt{2} \sin 2\theta, \tag{20}$$

whence in turn

$$\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{1-\gamma^2}} = \sqrt{2}(1-\cos 2\theta) = 2\sqrt{2} \sin^2 \theta, \tag{21}$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{1-\sqrt{1-\gamma^2}} = \sqrt{2}(1-\sin 2\theta) = \sqrt{2} \left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right] = 2\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right). \tag{22}$$

Hence, using also the sinus duplication formula, we end up with

$$\begin{aligned} F(y_+) &= \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\gamma^2}}}{\gamma} \left[\sqrt{2}-\sqrt{1-\sqrt{1-\gamma^2}}\right] = \frac{4 \sin 2\theta \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin 4\theta} \\ &= \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos 2\theta} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$F(y_-) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-\gamma^2}}}{\gamma} \left[\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{1-\gamma^2}}\right] = \frac{4 \cos 2\theta \sin^2\theta}{\sin 4\theta} = \frac{2 \sin^2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta. \tag{24}$$

If we choose $\gamma = 1$ in (21) and use the sinus duplication formula we find as another consequence

$$\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \tan\frac{\pi}{8}. \tag{25}$$

References

- [1] A. Barone, G. Paternó, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley-Interscience, New-York, 1982; and references therein.
- [2] P. I. Christiansen, A. C. Scott, M. P. Sorensen, *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*, Lecture Notes in Physics 542, Springer, 2000.
- [3] See e.g.: A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin, *The soliton: a new concept in applied science*, Proc. IEEE **61** (1973), 1443-1483.
- [4] A. D’Anna, M. De Angelis, G. Fiore, *Towards soliton solutions of a perturbed sine-Gordon equation*, *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli* **LXXII** (2005), 95-110. math-ph/0507005
- [5] G. Fiore, *Soliton and other travelling-wave solutions for a perturbed sine-Gordon equation*, Preprint 05-49 Dip. Matematica e Applicazioni, Univ. “Federico II”, e DSF/42-2005. math-ph/0512002.
- [6] Josephson B. D. *Possible new effects in superconductive tunneling*, Phys. Lett. **1** (1962), 251-253; *The discovery of tunneling supercurrents*, Rev. Mod. Phys. **B 46** (1974), 251-254; and references therein.
- [7] A. C. Scott, *A nonlinear Klein-Gordon Equation*. Am. J. Phys. **37** (1969), 52-61.

- [8] A. C. Scott, *Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics*. Wiley-Interscience, New-York, 1970, Chapters 2,5.
- [9] J.L. Shohet, B.R. Barmish, H.K. Ebraheem, and A.C. Scott, *The sine-Gordon equation in reversed-field pinch experiments*, *Physics of Plasmas* **11** (2004), 3877-3887.

Communicating science today

di Mauro Francaviglia^{1,2,3}
Marcella Giulia Lorenzi³
Pietro Pantano^{3,4}

Abstract: In the era of Informatics and of Digital Art a skillful use of Web and Computer Technologies, alongwith Multimediality, offers new challenging ways to introduce, visualize and communicate Science (e.g., Mathematics or Physics) to non-specialists. This need is especially felt in view of the fact that Science today cannot develop and interact with Society without answering to its “external demands” for a constructive dialogue. Among some recent experiences of ours we review here a few: 1) the short video and multimedia “ $E=mc^2$ ”, aimed at visualizing Special Relativity, that conjugates scientific quality and a rigorous technical frame with a palatable realization enriched by special effects; 2) an innovative teaching project based on the WebPortal “MARS”, where the deep interrelationship between Art and Mathematics is used to extract mathematical concepts out of classical and modern pieces of Art.

1. Why and How Communicating Science in the XXI Century...?

Divulging, Communicating and Visualizing the fundamental achievements of modern Science is by no means a simple task (see [1]). Although it is relatively easier to do this for the Physics of the past (say, up to

¹ Department of Mathematics, University of Torino, Via C. Alberto 10, 10123, Torino, Italy

² INFN, Section of Torino, Iniziativa Specifica NA12, Italy

³ ESG (Evolutionary Systems Group), University of Calabria, Via P. Bucci, Cubo 17b, 87037, Arcavacata di Rende CS, Italy

⁴ Department of Mathematics, University of Calabria, Via P. Bucci, Cubo 30b, 87037, Arcavacata di Rende CS, Italy

most of XIX Century included) it is much harder to adequately visualize and communicate the Physics of the immediate past and of the present. In days in which Communication and Multimediality have a great impact on the Society, in fact, some of the most impressive experimental achievements – e.g., Large Particle Colliders, Atomic Physics, Space Stations, as well as all the astrophysical mysteries of the Universe – are good candidates for a far-reaching and “emotional” Visualization, based on exotic and coloured images, sensational news, large numbers and high energies, sometimes with the aid of narration schemes analogous to the patterns of Science Fiction. But if one really wants to penetrate deeply into the subtler theoretical sides of this delicate matter, it is easy to realize that the great themes of XX Century Physics are hardly suited to a Communication which is more than a vulgarization and to a Visualization able to transcend their more superficial aspects and to grasp their true scientific meaning, which the non-specialist public still largely ignores (see [2]).

Also Mathematics – that is the basic language of any form of abstract thinking – suffers the same difficulties. Even if Mathematics is present in most products of human experience (Social Sciences and Humanities included) still it tends to be considered as a sort of “Science for Few”, requiring special abilities to be understood and perceived by many as a rather tedious discipline. This happened in the recent past because of a too strong abstractization process of mathematical teaching, but new revitalizing tendencies are finally arising, aimed at introducing Mathematics without renouncing to rigour and, at the same time, to its more aesthetic and directly intuitive aspects: “*In medio stat virtus*”, as we already declared in [2].

Nevertheless, divulgating, communicating and visualizing Mathematics – from its most classical aspects to its newer achievements – is definitely a fascinating challenge. Something which is not only an interesting and stimulating exercise for the “experts” in the field, but rather an impellent necessity dictated by the new trends of our Society. We would like here to mention a couple of points that deserve some particular attention.

First, we recall the proposal for an innovative and more adequate teaching of Mathematics recently launched by the Italian Mathematical Union (UMI) by means of the booklet [3], that indicates a revolutionary pathway for teaching Mathematics to “external” users. The booklet was the result of an extended consulting with the Italian mathematical community, which ended up in a “decalogous” that systematically presents a coherent structure for Mathematics in “non-scientific Faculties” so to make it more palatable out of its most traditional and natural frameworks (say, “exact sciences”).

On the other hand, we have also to mention that the Italian Ministry of Research, University and Education (M.I.U.R.) has recently felt the need of

helping “non-specialists” to approach Science in order to better understand and evaluate its fundamental impact on everyday’s life. The Italian “Web Portal for Research” [4] has therefore been launched under the supervision of CTNECA (www.ricercaitaliana.it) with the explicit aims, among others, of reviewing research initiatives in Italy and of presenting them in a fresh and attractive way.

We first quote from [3], page xvi in the Preface:

“Mathematics is universally recognized as a powerful language to describe the World, to construct models, to calculate and forecast. Because of this it is considered to be a very useful tool, often indispensabile, for a lot of disciplines. [...] Also in various disciplines pertaining to Human Sciences, as e.g. the Science of Cultural Heritage and Archaeology. [...] The teaching and understanding of Mathematics is therefore a relevant cultural and didactical problem, that each year concerns thousands of University Teachers and hundreds of thousands of Students [...] To reach the type of knowledge indicated it is not necessary to insist too much on formalism, since it often obscures the meaning of mathematical objects and puts a brake on the development of modelling abilities. The specific competences [...] are better exploited through [...] the following abilities: * reading and interpretation of texts; * writing and, more generally, Communication; * organization, storage and retrieving of knowledge [...] also by means of informatic devices”.

In a sense, this “mathematical philosophy” called “*mattoncini*” (“*little bricks*”) means that a coherent teaching project should consist of cleverly constructed sets of small basic pieces to be combined together according to specific needs.

On the other hand, the Web Portal on Italian research activities [4] offers what can be considered as an emblematic “manifesto” for the Communication of Science. Writes in it Stefano Fantoni, Director of SISSA:

“Scientists, nowadays more than before, are facing new challenges in the field of Communication. [...] Communicating Science has nowadays become an absolute necessity. [...] Scientists cannot avoid to interact with a plurality of groups, informing Society and listening to its instances. If on one side they have to better communicate, on the other hand the operators of Communication have to become more critical, more informed about Science together with its mechanisms [...] The European Union considers the «Dialog between Science and Society» one of the fundamental steps towards the construction of a European space for research. [...] The themes related with Communication of Science have therefore to become an essential part in the formation of young researchers [...] since there is no deterministic relation between communication activities and the role played by Science in Society and, in any case, there is no Science without Communication. [...] Scientists have nothing else to do than

discovering and understanding the challenge of complexity in Communication” (see [5]).

In more details, Pietro Greco – responsible for the Master in Communication of Science at SISSA – offers there a description of the new character: the “Science Communicator”. We quote:

“A Dwarf. A Dwarf who moves among the tall Titans who possess specialistic knowledge [...] A Dwarf able to climb the shoulders of those Giants, to look farther [...] This Dwarf is the “Communicator of Science”, an intellectual character who might be still unexisting. However the new Society of Knowledge needs him more and more to tell herself her own fresh origin and her fast becoming. [...] The tall Titans, of course, are mathematicians, natural scientists, historians, philosophers, antropologists, sociologists who “make” and/or interpret Science, that is the most relevant part of the new knowledge that informs our Society about herself. [...] The old walls of the “Turrus Eburnea” are definitely falling down and the world of Science finds itself to be completely open towards Society. [...] Communicating Science is becoming a more and more diffuse social need. [...] We are therefore facing a two-fold necessity. Independent but convergent. Scientists have to communicate with non-experts, to share with them decisions that have a great impact on their own work. [...] The world of Science is a complex system with several dimensions. [...] The multilayered complexity of the scientific world is interacting with social complexity [...] this mutual relation is modifying our way of doing Science as much as the evolutive dynamics of Society as a whole. [...] The system of Mass Communication is evolving and articulating in a such a way not to require and privilege rigid specializations, but rather requiring and privileging flexibility. [...] These consequences define the unalienable characters of the Dwarf who is obliged to climb the shoulders of Giants to tell the story of the Society of Knowledge: an intellectual figure who is not lost in the complexity of Science, of Society and of their growing compenetration; someone who, at the same time, is able to «govern media», i.e. to master the fastly evolving and diversifying means of Mass Communication” (see [6]).

We are in full sinthony with those ideas. It seems to us, in fact, that Mathematics (as well as other “less theoretical” scientific disciplines) is facing, at the turn of the Third Millennium, a two-fold need. One one side, the need of renewing its basic teaching, so to attract students to the beautifulness and the pervasiveness of Mathematics, as well as to contribute to a much larger diffusion of “basic mathematical thinking” in Mankind. On the other hand, the need to create in its interior a “task force” of specialists who not only know the discipline in depth but are also able to communicate its structure and achievements to large portions of the Society. As Greco points out in [6], a clever person who – besides having a sufficiently broad and deep knowledge of

the discipline, together with its lines of development – can help in promoting the dissemination of its specific culture with the aid of rigorously constructed presentations. As we already pointed out in another paper of ours (see [2]) a lot can be done by relying on the new tools offered by the technologies of the Digital Era. Digital Art is certainly well suited for Scientific Communication and Visualization (see [7, 8]), since it allows to conjugate scientific quality together with rigorous technical frameworks.

2. Communicating Special Relativity

We first describe shortly a recent experience of ours, concerning a video and multimedia aimed at visualizing Einstein's Theory of Special Relativity. They were in fact stimulated by the World Year of Physics (WYP; [9]) proclaimed by UNESCO in 2005 to celebrate the "Annus Mirabilis" 1905, that drastically revolutioned Physics and Mathematics of XX Century. This happened to be a fascinating and rather difficult task (see [10]) because of the fact that Relativity Theory is rather far from everyday's life and experience: "Space" and "Time" are no longer separate entities, that have to be replaced by the single notion of "Spacetime".

As already stated in [10] let us stress that Scientific Divulcation makes part of Science (see also [5] and [6]); one has therefore to avoid drastic simplifications but, at the same time, mantain absolute rigour and full scientific coherence. The natural question that arises is thence the following: *is it possibile to divulgate complex topics and give pieces of authentic information without transforming users in technicians and without renouncing to precision and scientific exactness...?* Scientific Divulcation can profitably use the new media to this purpose, provided the "book paradigm" is suitably reconsidered and replaced by the "laboratory paradigm". In a laboratory one can forecast and investigate "pure knowledge", allowing mental models to be confronted with reality. In a sense Science *is* this relationship and Scientific Divulcation lies between a technical treatise and laboratory research (see [10] and [11]).

As we said above, Special Relativity is not easy to be explained to large audiences. Its scientific validity is essentially concerned with electromagnetic phenomena (light propagation, in particular) and in a "mechanical framework" – definitely more familiar to our current experience – it is sensibly different from "Galilean effects" whenever particles move at rather high speeds, near to the velocity of light in vacuum. The first postulate of Special Relativity deals with the way in which light propagates in vacuum: at a finite constant velocity, independently on the velocity and the direction of motion of the emitting source. This is a first axiom that strongly conflicts with our common

experience. At a first sight it seems to be even paradoxical, since it requires a drastical change in the whole of our common perception about the World. We are in fact used to detect and observe phenomena that happen at small velocities, for which the laws of Galilean Physics hold and for which it would be useless to invoke a more complicated Mathematics. It puts in doubt the very notion of contemporaneity between two events, so to change also the very notions of space and time. It entails a different attitude towards “*causality*” – the relationship between cause and effect; it obliges observed phenomena to acquire a “relative” meaning; it states that all moving objects are seen to be shorter along the direction of motion (“*length contraction*”), as well as clocks tick slower when in motion (“*time dilatation*”); it finally tells that mass and energy are substantially homogeneous quantities, not only predicting that mass is a container for a huge energy (such as the celebrated formula $E = mc^2$) but also that the mass of a particle increases with velocity, up to become infinite in the limit of light speed, which turns eventually to be an unpenetrable barrier for the propagation of physical phenomena.

The independency of the velocity of light (in vacuum) on the motion of the source (that has generated it) obliges contemporaneity to loose its original and absolute meaning to acquire a new one which depends on the observer: different observers are “obliged” to see the same phenomenon at different times. This new “relative” character of “contemporaneity” inevitably brings about the necessity of reconsidering the familiar notions of Galilean and Newtonian space and time – both absolute and objective – to replace them with a relativistic “spacetime, a new mental scheme in which space and time live together, both with a “relative” and subjective meaning. Here, the role of the observer changes from the “passive” one of Galilean Physics (i.e., an observer limited to observe a World with an absolute nature) to the more active role required by the new Physics. A somewhat devastating prediction tells then that different observers have to perceive differently the physical World. For instance, as we said, a moving bar is shortened longitudinally along its motion, when it is perceived by an observer at rest (the shortening is not real “in an absolute sense” since the bar remains of the same length when seen by co-moving observers, but this is nevertheless a “real effect” from the experimental viewpoint, since any experiment will in fact measure a shorter bar). Analogously, Special Relativity implies also the dual phenomenon of “time dilatation”, according to which moving clocks tick faster than identical clocks at rest. Velocities – that in Galilean Physics just compose linearly – in the new Physics of Einstein obey a much more complicated composition formula, compatible with the fact that nothing can be added or subtracted from the velocity of light, that has to be independent on the source.

All these aspects conflict with our common experience (our senses tell to us of a Galilean World...) and this makes it rather difficult to obtain a simple presentation far enough from the danger of becoming a kind of "Science Fiction". When one communicates and visualizes the Theory of Special Relativity one should moreover keep into due account the fact that it has "de facto" opened a whole series of new frontiers in XX and XXI Century Physics, as well as a different attitude towards "reality". Think of the "*Theory of General Relativity*" (that provides grounds for understanding the structure of our Solar System, the galactic and extra-galactic structure of the Universe up to its large-scale structure in Relativistic Cosmology). But also particle theory (the so-called "Standard Model") is essentially based on Special Relativity. And eventually this is also true for the most modern theories of contemporary Physics: "unified" field theories, "Gauge Theories" and "String Theories".

We provide here a short description of our video; more details can be found in [10, 11, 12] and also in [13]. An exploding "Supernova" gives the hint to speak of the velocity of light and of its constancy. The main characters of the video are three: two teen-agers, a boy and a girl, who argue about the Universe, together with a computer, the interface of which assumes the human aspect of Albert Einstein. Having seen the exploding star, the two teen-agers wonder what is the extremely brilliant object that has attracted their attention and Einstein himself informs them that the light emitted by the exploded star has arrived on Earth only after a long delay. After explaining what a light year is, Einstein gives a sharp hint: "*No signal can travel faster than light*", since otherwise one could travel backward in time and come back into his own past. A young woman appears suddenly in the room and meets herself in the past, as a little girl. At this point one could easily introduce the successive elements necessary to understand Relativity by means of short movies and animations (some were presented at the audience during the Conference to which this note refers). A longer and more complete version of the video will here attach an interactive didactical path, through which the user might "interview" its own computer to learn more and also to play directly with animations and questions concerning the ideal experiments and the theoretical foundations of Special Relativity.

Our video proceeds then to visualize the relativistic prediction that time has to suffer a "dilatation", so that elementary particles having a "mean life" at rest of just a few seconds should have a much longer observable life when they travel at speeds near enough to the speed of light. So-called "muons" (represented as little fishes) are accelerated and "*become heavier and heavier*". The fact that the particle mass grows with speed is emphasized through a progressive fattening of the fish, that grows more and more up to becoming a small whale. The total conversion of mass into energy is impossible and this

fact is here visualized under the form of a violent “explosion” of the particle: *“Nobody has energy enough to push it further”*, as Einstein tells to the two teen-agers.

“Relativity of motion” can thence be visualized, as the possibility of interchanging the reference frame: *“But does it realize that it has gained weight...?”* – asks the girl – and the boy answers: *“No, for him you have become fatter as you are moving while he is at rest”*. The fish and the whale, of different reciprocal colours, move in opposite directions, so that the two reference frames can be confronted “in parallel”. In a less limited space longer animations can be used for a more effective explanation; some of them were presented at the Conference and will be inserted into future extensions of our work.

Finally convinced, the girl understands that a “new Physics” has to be invoked to describe the World, even if Special Relativity modifies our perceptions only for extremely fast phenomena: *“what we learn at school is almost correct whenever speeds are not comparable with the speed of light”*. Special Relativity is however an incomplete theory, since it cannot describe gravitational phenomena. This new scientific challenge did in fact occupy Einstein’s mind for long years (*“I will need ten more years of investigations”*), from 1905 to 1915, eventually leading at the beginning of 1916 to the final version of the “Theory of General Relativity”. A calendar flows from 1905 to 1915; the movie goes then backward in time, until the age of Galilei, who experimented the fall of weights from the top of the famous Tower in Pisa. Einstein’s voice claims that *“an ancestor of mine begun this whole story”*. Conclusions are again in Pisa, where the famous interferometric experiment called “Virgo” tries to detect the existence of “gravitational waves”. This ends up the video.

The video is “embedded” into an interactive multimedia, named “**E=mc²**”, that consists of a “container” in which the video flows, cut into eleven separate parts (each one corresponding to specific parts of its scientific path). The eleven chapters are accompanied by scientific texts that can be recalled by suitable buttons in each single section; these contain questions and answers referring to the specific topics covered in each segment. The multimedia allows one to interrupt the vision of each section at its very beginning, in order to profit of the scientific explanations relative to it, possibly also by freely jumping from each section to each other, backward or forward. One can thus come back repeatedly, if one so desires, to understand in greater depth some specific parts of the video (which, of course, can be seen without any undesired interruption). Once the last section has been finally reached the multimedia proposes in any case the reading of the whole set of textual in-depth explanations, as a series of eleven

questions and answers. There is also a section of “credits”, together with links to appropriate Web Pages.

A few words on the innovative design we used, which tried its best to remain also faithful to historical or geographical keypoints. First of all, the idea of using two real characters, appropriately virtualized, together with a really virtual character (the avatar of an expert man). A particular importance refers to the choices adopted to represent Einstein. First the choice of creating for Einstein a face realized by means of 3D-graphics (based on preliminary investigation on photographic archives, to obtain a virtual character as faithful as possible with respect to the original pictures). Secondly, the choice of background musics, that follow well known artistic inclinations of Einstein (who preferred, among others – and also liked to play – the “ViolinenKonzerten” of Johann Sebastian Bach). Finally, an analogous deep investigation has been devoted to the recorded voice of Einstein; dialogs in the video have been read and recorded by a professional actor (Adolfo Adamo), who reached a faithful vocal performance for Einstein’s voice.

To produce the video some special effects have been used in order to make it more interesting (wave effects on images, several sound effects, explosions). Also the night background with stars have been realized as simulations of real images of the Universe, as seen from the town of Ulm (where Einstein was born).

3. Mathematics and Art: a Parallel Development – the Web Portal “MArs”

What was said in the Introduction (Section 1) and the innovative approach described in Section 2 apply also to the broader field of “Applications of Mathematics to Cultural Industry” (i.e., the set of all applications of Mathematics to “non traditional” frameworks that do not belong to the scientific sector). Mathematics, in fact, intersects transversally all forms of “Cultural Industry”. In relatively recent years this was fully recognized and a number of “fora of discussion” have provided good bases to discuss about these deep interrelationships (e.g., the periodical series of conferences on “Mathematics and Culture” organized by M. Emmer [14]) and the MAIC Conferences organized by us [15, 16]). A widespread literature exists on the subject and may be easily found by relying on quotations from the refs. above (see also the bibliography of [2]), or in papers published by the journal “Nexus” [17] explicitly devoted to the field of “Mathematics in Architecture” (and Art in general).

As we have already discussed in [2] – and as we shall shortly discuss below – History of Arts and History of Science tell us that Mathematics and Painting have developed along parallel tracks (see [18, 19]); an analogous pathway is recognizable in other forms of Visual Art (e.g. in Architecture; see [20, 21]), as well as in the evolution of Music. In our days Mathematics even plays a direct and explicit role in several forms of Art (visual, plastic and musical), not to speak of methods to generate Art and Music by means of computers and electronic devices. It follows that Mathematics is not only an essential tool for Science and Technology, but also for Humanities and, in particular, for Art. Pushing this analysis a little bit further, we may say that Mathematics gains of Art one of its main reasons of development and change alongwith time. Mathematics – in fact – contributes to our way of conceiving and shaping the World we live in, while Art develops the means to harmonise, describe, represent aesthetically, or even to transcend and transfigure, the World of our sensations and perception.

With exactly this in mind we have realized a new teaching experience about “Mathematics and Art”; a Ph.D course given in 2003-2004 and also in 2005-2006 at the University of Calabria, in the framework of the Ph.D School on “Psychology of Programming and Artificial Intelligence”. A written text [22] accompanies the pedagogical path (see also [18], [19], [23], [24]) which is in full agreement with the directives of [3]. The path starts from Euclidean Geometry and ends up with Riemannian Geometry, peeling off one by one the different geometrical structures that enter our understanding of the Euclidean and sensible World. Geometry is first introduced as the “art of measurement” together with its logical-deductive structure (as it was followed by ancient Greeks to describe, analyse and understand extended objects in space). Synthetic Geometry is consequently introduced at different levels of abstraction and understanding (Set Theory, abstract and structured Spaces, Morphisms and Transformations between Spaces, Topology, Erlangen’s programme and Klein’s work, in which Geometry is defined as the study of the invariant properties with respect to a characterizing Group of Transformations). It is then shown how and why Symmetry plays a dominant role in understanding Mathematics through Art (or Art through Mathematics). Topics covered include of course Curves and Surfaces, Euclidean Optics, Projective Spaces and Perspective, Tassellation of Surfaces (together with Penrose’s and Escher’s work), Fractals, Knots, Crystallographic Groups, Curvature and non-Euclidean Art.

As we already mentioned, Mathematics and Art have developed in a parallel paths. The transition from Greek’s Euclidean Geometry to the Geometry of Perspective in Renaissance, to non-Euclidean Geometry in the XVIII and XIX Centuries, up to the development of Geometry of “topological forms” in the XX

Century, can and should be seen as a counterpart to the static paradigms of Arts and Architecture in the antiquities, to the conception of “beautiful painting” of Pier della Francesca, to the evolution of artistic shapes in the eighteenth Century (Divisionism, Expressionism, Impressionism) up to the complete destruction of symmetry in the modern, contemporary and avant-garde forms of Art (Cubism, Fractal Painting). Whence the “rettangolo aureo” and the theory of proportions were at the basis of Greek Science and Geometry, in Renaissance the artist was a complete man: painter, sculptor, architect, mathematician and also scientist. Artist of that time felt the need to represent faithfully the 3-dimensional world in just two dimensions and this eventually led to Projective Geometry. Debates about the validity of Euclid’s fifth postulate lead later to Hyperbolic Geometry that, on the artistic side, opened the way to Impressionism. Our visual space, in fact, is hyperbolic rather than Euclidean: artists in the middle of XIX Century begun then to represent what the eye actually sees rather than what the eye is pretended to see in a fully Euclidean world. The late XIX and XX Century have finally seen the introduction of time as a fourth “sensible” dimension on an equal footing with the three sensible dimensions of space (in a sense, Einstein’s Theory of General Relativity is at the top of this line of thought and should not be surprising that Einstein had influence on Picasso and Dali). Effective dynamism in Modern Art can be achieved only through the moving camera (Cinema) or by means of modern technologies (Computer Graphics). Still the idea of using lower-dimensional representations to describe objects with (at least) one dimension more has been also used in figurative Arts (think of the four dimensional hypercube opened up in 3-dimensional space that enters a rather famous painting of Dali). The new Mathematics of the XX Century (Manifoldness, Curvature, Discreteness, Fractals and Chaos) is also reflected in Art (Picasso, Pollock); and it is rather well known that the famous artist Escher, the great Dutch inventor of impossible objects and imaginary worlds, was influenced by Mathematics (Poincarè, Penrose) in creating his striking pieces of Art (see, e.g., [25]). The connection existing between Art and Mathematics is therefore universally recognized and needs no more examples (see [26]).

Taking this for granted, we have the strong opinion that a new way of teaching, communicating and visualizing Mathematics can and should be envisaged. A way which deeply requires the understanding of all the mentioned profound intertwining between Mathematics and Art and, at the same time, which rejects the dogmatic way of teaching Mathematics in a classical and somewhat “static” manner, only occasionally and incidentally recognizing its relations with Art. In other words, we suggest a way in which Art is the central theme that comes first, out of which the existence of mathematical structures is recognized as an essential part of the object and only later understood and developed at a deeper level. To be more explicit, we believe that one should

extract and understand structures, symmetries and broken symmetries out of their more or less evident appearance within the structure, symmetry or apparently broken symmetry of a piece of Art. One of the explicit aims is of course to revitalize the understanding of the central role that Mathematics plays in everyday's life, starting not from "astonishing" scientific results but from the emotional and aesthetic side of our consciousness and perception. We believe that such an attitude will profoundly contribute to a better spreading of Mathematics among non-specialists in the field, as well as to promote a broader attention to the beautifulness of Mathematics (creating new pathways for introducing deep mathematical concepts in an easier, more intuitive, more sensible and more palatable way).

In spite of a growing sensibility of Society to Science (see [5, 6]), we have to remark that Mathematics is less and less known by young generations. One of the major problems is the low appeal that Mathematics exerts on new generations: against a Society that privileges images and motion, the teaching standard of Mathematics seem to be still attached to traditional schemes that have a scarce appeal on students. Because of this, we believe that new teaching schemes – more broadly based on sound and images, as well as multimediality and new communication tools – might help to drastically invert such a negative tendency. Art – in force of its multi-layered aspects and emotional power – can play a central role in helping Mathematics to find new pathways (see a broader discussion in [2]).

The Ph.D Course and the Book [22] that we mentioned above have revealed themselves to be precious tools along the lines indicated. But a much broader project has to be developed, that completely changes the viewpoint, using Art as a "first theme" to develop a modern Communication, Visualization, Divulgateion and Teaching of Mathematics. This innovative "full teaching project" (see [2]) is strongly associated with an innovative Web Portal "MArs", explicitly dedicated to "Art & Mathematics". The central idea is – as we said – to let a progressive understanding of Mathematics (at progressive levels of reasoning and abstraction) spring up from a path in which Art comes first and touches the emotions, thus stimulating the need and the desire to penetrate more intimately into the structures which underly Art itself. The Web Portal [27, 28] will therefore present Art as an alternative way to approach Mathematics, in order to enjoy the beautifulness of the patterns existing in our vision and representation of the World and eventually to reconstruct the theoretical tools that are necessary to understand and elaborate their structures, as well as to show or stimulate interdisciplinary further applications to other fields in which Mathematics plays a key role.

The Portal will first propose artistic objects to be later analyzed and used to understand their (hidden or more evident) mathematical richness. It will contain

a large selection of links to other similar websites, as well as information about initiatives in the field of Art & Mathematics (Conferences, Exhibitions, Courses). The Portal will also exhibit collections and galleries of multimedia explicitly produced for the Visualization of Mathematics (and, more generally, of Science). We also envisage an Electronic NewsLetter (where innovative and/or more traditional ways of communicating Mathematics through Art will find an appropriate forum) and hopefully also a “less conventional” space dedicated to “work in progress” (presentations of multimedia and/or innovative ideas; generative approaches to “Mathematical Art”; digital technologies to produce Art through Mathematics or to understand Mathematics through Art; new frontiers in Mathematics stimulated by Digital Art, Artificial Life and Augmented Reality).

The project – that is being developed with the help of an International Scientific Committee under formation – will allow to reach at least three main goals: (1) to broadly cover a wide range of interests; (2) to give adequate space to new tendencies and new problems generated by web-technology; (3) to open up a new real and not episodic dialectic between Mathematics and Humanities (Art, Architecture, Music) – thus creating an interactive dialogue between different “poles”, something that is becoming of strict actuality.

A preferential attention will be therefore given to the most stimulating, innovative and interdisciplinary products, allowing a larger space to critical discussions about the infinitely many relations between Art, Architecture, Mathematics and Humanities, rather than to sterile demonstrations or to self-referential artistic performances. The Portal “MArs” will therefore strongly re-propose new ways of interaction between Art, Science and Technology. The key role of “open minded” mathematicians will be crucial, alongwith the role of “mathematically inclined” artists, since only out of a fruitful interaction between these two kinds of communities new and innovatives approaches to Communication, Visualization and Teaching will be eventually able to emerge.

In a sense, our goal can be seen as an attempt to try to re-create that fruitful “constructive and internal interaction” that existed between Mathematics and Art in Renaissance and in the Dutch painting of XVII Century – a liaison between Mathematics and Art that was at the basis of their mutual development at that times. A liaison that, unfortunately, has been later interrupted and replaced by “external” interactions between Art and Mathematics, so that in more recent times a dialogue still continued to exist but only at a marginal, secondary and definitely less promising level of efficiency.

4. Acknowledgements

This work was partially supported by: GNFM-INdAM (MF); PRIN 2004-2005 “Metodi Geometrici in Fisica Matematica” (MF); PRIN 2005-2006

“Modellazione Matematica del Comportamento Naturale ed Artificiale” (both authors). We acknowledge fruitful discussions with several friends and colleagues, among which we should at least mention the following: F. Arzarello, M. Bartolini Bussi, E. Bilotta, L. Fatibene, P. Greco, M. Manaresi, S. Mercadante, P. Pantano. We are grateful to E. Musso for a number of suggestions about the structure and aims of “MArs”.

5. References

- [1] Carrada G. 2005. *Comunicare la Scienza (Kit di Sopravvivenza per Ricercatori)*, Milano: Sironi Editore –(in Italian)
- [2] Francaviglia M., Lorenzi M.G., Pantano P. 2006. *Art & Mathematics – A New Pathway*, in: Proceedings of the Conference “Communicating Mathematics in the Digital Era” (CMDE), Aveiro, 15-18 September 2006; E. Rocha et al. Eds.; A.K. Peters Ltd. (Wellsley, Mass. – USA –(to appear)
- [3] Accascina G., Anichini G., Anzellotti G., Rosso F., Villani V., Zan R. 2006. *La Matematica per le Altre Discipline – Prerequisiti e Sviluppi Universitari*, Notiziario U.M.I., Anno XXXIII, 1 114 pages –(in Italian)
- [4] Storino A. (Web Editor), WebSite www.ricercaitaliana.it, under the supervision of S. Rago – CINECA – (in Italian)
- [5] Fantoni S. 2006. master document of “*Comunicare la Scienza*”, “Speciali Divulgativi” in the WebSite www.ricercaitaliana.it, Ref. [4], CINECA – (in Italian)
- [6] Greco P. 2006. *Il Nuovo Comunicatore*, in: “*Comunicare la Scienza*”, “Speciali Divulgativi” in the WebSite www.ricercaitaliana.it, Ref. [4], CINECA– (in Italian)
- [7] Drioli A. 2004. *Linguaggi elettronici nell’arte contemporanea italiana e strumenti per la loro documentazione e valorizzazione – Interactive Art*, Ph.D Thesis at SUN – Seconda Università di Napoli, Ph.D Course in “Metodologie Conoscitive per la Valorizzazione e Conservazione dei Beni Culturali”, XVII Cycle, – (in Italian)
- [8] Lorenzi M.G. 2005. *Arte Digitale nella Visualizzazione scientifica: Nuove Frontiere*, Ph.D Thesis at the University of Calabria, Ph.D Course in “Psicologia della Programmazione e Intelligenza Artificiale”, XVII Cycle, – (in Italian)
- [9] WebSites of the World Year of Physics 2005: www.physics2005.org; see also <http://www.wyp2005.org/activities.html>
- [10] Fatibene L., Francaviglia M., Lorenzi M.G., *Faster than Light: Visualizing Relativistic Spacetime*, a booklet accompanying a CD-ROM with a video and multimedia “ $E=mc^2$ ” aimed at divulging the Theory of Special Relativity; Cosenza: University of Calabria Press –(to appear)
- [11] Fatibene L., Francaviglia M., Lorenzi M.G. 2007. *$E=mc^2$: a Video and Multimedia to Visualize Relativity*, in: “Proceedings of the 42nd Karpacz School on Theoretical Physics (Ladek Zdròj, February 2006)”, Special Volume of Intern.

- Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 4(1) (Singapore); Allemandi G., Borowiec A., Francaviglia M. Eds. – (to appear)
- [12] **Fatibene L., Francaviglia M., Lorenzi M.G., Mercadante S.** 2006. *Visualizzare la Relatività – Più Veloce della Luce...?*, poster presented at the Conference “L’Università: Ponte tra Scienza e Società” (organized by Agorà Scienze, University of Torino, 15-16 September) – (in Italian)
- [13] **Fatibene L., Francaviglia M., Lorenzi M.G., Mercadante S.** 2006. “Una Sfida – Divulgare la Relatività”, “Speciali Divulgativi” in the WebSite www.ricercaitaliana.it, CINECA – (in Italian)
- [14] **Emmer M.** 2001. (Ed.), *Matematica e Cultura 2000*, Milano: Springer-Verlag; 2002. *Matematica e Cultura 2001*, Milano: Springer-Verlag; 2003. *Matematica e Cultura 2002*, Milano: Springer-Verlag; 2004. *Matematica e Cultura 2003*, Milano: Springer-Verlag; 2005. *Matematica e Cultura 2004*, Milano: Springer-Verlag; Emmer M., Manaresi M. (Eds.) 2001. *Matematica, Arte, Tecnologia, Cinema*, Milano: Springer-Verlag
- [15] **Bilotta E., Francaviglia M., Pantano P.** (Eds.), *Applications of Mathematics to Cultural Industry*, Proceedings of the Minisymposium “Applications of Mathematics to Cultural Industry”, held in occasion of the Conference “SIMAI 2004”, Venice, Italy, 23-24 September, 2004; (CD-Rom by M.G. Lorenzi), Cosenza: AVR S.r.L
- [16] **Bertacchini P.A., Bilotta E., Francaviglia M., Pantano P.** (Eds.) 2005. *Mathematics, Art and Cultural Industry*, Proceedings of the National Conference on “Matematica, Arte e Industria Culturale”, Cetraro, 19-21 maggio 2005; (CD-Rom by M.G. Lorenzi), Cosenza: ESG – University of Calabria
http://galileo.cincom.unical.it/convegni/cd_ma&ic/start.htm
<http://galileo.cincom.unical.it/convegni/WSArte/>
- [17] **Williams K.** 1996. *Nexus – Architecture and Mathematics*, Gli Studi 2, Firenze: Dell’Erba; 1998. *Nexus II – Architecture and Mathematics*, Gli Studi 5, Firenze: Dell’Erba; and subsequent numbers. The Journal will continue under Birkhauser’s editorship.
- [18] **Faraco G., Francaviglia M.** 2004. *A course of Mathematics in Art*, in: Proceedings of the Minisymposium “Applications of Mathematics to Cultural Industry”, at the Conference “SIMAI 2004”, Venice, Italy, 23-24 September; (CD-Rom by M.G. Lorenzi) – Ref. [15]; E. Bilotta, M. Francaviglia, P. Pantano Eds. 2004. Cosenza: AVR S.r.L., 8 pp. (not numbered)
- [19] **Faraco G., Francaviglia M.** 2004. *Mathematical Structures in Art: a Pathway for Cultural Industry*, in: “Creativity and Sciences, Vol. 4 and 5 – Proceedings of 4th Understanding and Creating Music 2004 Conference” (Caserta, November 23-26.); E. Bilotta et al. eds. 2005. (CD-Rom) Caserta: Seconda Università di Napoli, pp. 65-69
- [20] **Sala N., Cappellato G.** 2003. *Viaggio Matematico nell’Arte e nell’Architettura*, Milano: Franco Angeli Editore – (in Italian)

- [21] **Cappellato G., Sala N.** 2004. *Architettura della Complessità: la Geometria Frattale tra Arte, Architettura e Territorio*, Milano: Franco Angeli Editore – in Italian
- [22] **Faraco G., Francaviglia M.**, *La Matematica dell'Arte – Visione, Enumerazione, Misurazione, Rappresentazione ed Astrazione: dagli Oggetti alle Forme* (book, in preparation)
- [23] **Faraco G., Francaviglia M.** 2005. *La Geometria: Una Chiave di Lettura per l'Arte – Prospettiva e Simmetria*, in Ref. [29], Proceedings of the National Conference “Matematica, Arte e Industria Culturale”, Cetraro, 19-21 maggio 2005; P.A. Bertacchini, E. Bilotta, M. Francaviglia, P. Pantano Eds.(CD-Rom by M.G. Lorenzi), Cosenza: EGS – Università della Calabria, 12 pp. (not numbered) – (in Italian)
- [24] **Faraco G., Francaviglia M.** 2005. *Using Art for Mathematics Teaching*, in: “Proceedings 4th International Conference APLIMAT 2005” (Bratislava, February 1-4, 2005); M. Kovacova Ed.; Bratislava: Slovak University of Technology, pp. 134-152 – ISBN 80-969264-3-8 (book and CD-Rom) – abstract in: “Book of Abstracts, ibidem”, p. 25 – ISBN 80-969264-4-6
- [25] **Schattschneider D.** 1992. *Visioni della Simmetria – i Disegni Periodici di M.C. Escher*, Bologna: Zanichelli – (in Italian)
- [26] **Emmer M.** (Ed.) 1994. *The Visual Mind: Art and Mathematics*, Cambridge Mass.: The MIT Press
- [27] WebSite of the Portal “MArs”: <http://mars.unical.it/>
- [28] **Bilotta E., Francaviglia M., Lorenzi M.G., Mercadante S., Pantano P.** 2006. *MArs – il Portale di Arte e Matematica*, poster presented at the Conference “L'Università: Ponte tra Scienza e Società” (organized by Agorà Scienze, University of Torino, 15-16 September 2006) – (in Italian)

On the Convergence of Many-Particles Dynamics towards the Hartree and Vlasov Evolutions¹

Sandro Graffi²

Abstract

A new proof is described of the convergence of the N -particle Schrödinger dynamics for bosons towards the dynamics generated by the Hartree equation in the mean-field limit. For a restricted class of two-body interactions, convergence estimates uniform in \hbar are obtained, up to an exponentially small remainder. For $\hbar = 0$, the classical dynamics in the mean-field limit is given by the Vlasov equation.

1 Introduction and statement of results

Quantum mechanics is a linear theory by its very nature. However, nonlinearities emerge in the attempt of reducing the evolution of a very large number of particles, say N , to a single particle evolution via some sort of mean field equation at the limit $N \rightarrow \infty$. In other words, the linear dynamics of N quantum particles (bosons, in the case considered here) tends to the nonlinear single-particle dynamics described by the nonlinear Hartree's equation as the particle number N tends to infinity. This result is well known since long ago (see the references listed after Theorem 1.1). In the recent work [?], whose results are recalled here, a different proof is provided which allows for a direct comparison with the corresponding classical problem, namely in which the dynamics of N point particles tends to the dynamics defined by the Vlasov equation as $N \rightarrow \infty$.

To formulate the problem and the results, consider the Schrödinger operator

$$H_N = H_N^0 + V_N \tag{1.1}$$

$$H_N^0 = -\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2} \Delta_i, \quad V_N = \frac{1}{N} \sum_{i < j}^N v(x_i - x_j) \tag{1.2}$$

where v is a two-body potential *independent* of N . The operator H_N acts on $\mathcal{H}^{(N)} := L^2_S(\mathbb{R}^{3N})$, the totally symmetric part of $L^2(\mathbb{R}^{3N})$, which is the Hilbert space of pure state vectors for a system of N nonrelativistic bosons. We propose to study the dynamics described by the N -body Schrödinger equation

$$i\hbar \partial_t \Psi_N(t) = H_N \Psi_N(t), \tag{1.3}$$

¹Work in collaboration with J.Fröhlich and S.Schwarz, Institut für Theoretische Physik, ETH Zürich, Switzerland

²Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italy. (graffi@dm.unibo.it)

for an initial condition $\Psi_N(t = 0) = \Psi_{N,0} \in L^2_S(\mathbb{R}^{3N})$. Under assumptions specified below, H_N , defined on the symmetrized Sobolev space $H^2_S(\mathbb{R}^{3N})$, is a self-adjoint operator. Hence the unitary group $U_N(t) = e^{-iH_N t/\hbar}$, $t \in \mathbb{R}$, exists. Let $p \leq N$, and let $a^{(p)}$ be a bounded operator on $L^2_S(\mathbb{R}^{3p})$. It defines an operator $A_N^{(p)}$ acting on $\mathcal{H}^{(N)}$ in the following way:

$$\begin{aligned} (A_N^{(p)}\Psi)(x_1, \dots, x_N) &= \frac{N(N-1)\cdots(N-p+1)}{N^p} (P_S a^{(p)} \otimes I^{(N-p)} P_S \Psi)(x_1, \dots, x_N), \\ \Psi(x_1, \dots, x_N) &\in L^2_S(\mathbb{R}^{3N}), \end{aligned} \tag{1.4}$$

where P_S is the projection onto the symmetric subspace $L^2_S(\mathbb{R}^{3N})$ of $L^2(\mathbb{R}^{3N})$. The operator $A_N^{(p)}$ may be viewed as an operator acting on p particles; the numerator on the right side of (1.4) is a combinatorial factor motivated by "second quantization"; the denominator is the correct scaling factor to take the $N \rightarrow \infty$ limit.

We are interested in the asymptotics of certain expectation values of the Heisenberg-picture operators $e^{iH_N t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N t/\hbar}$, as $N \rightarrow \infty$. If H_N is chosen as in (1.1), (1.2), and $A_N^{(p)}$ is chosen as in (1.4), the limit $N \rightarrow \infty$ is the usual *mean-field limit*; see [He, Sp1].

Our first main result is the following

Theorem 1.1 . *Let $\hbar > 0$ and $t \geq 0$ be fixed, and let $v \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. If $\Psi_{N,0}(x_1, \dots, x_N) = \psi(x_1) \cdots \psi(x_N)$ is a normalized "coherent" (i.e., product) initial state, then*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_{N,0}, e^{iH_N t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N t/\hbar} \Psi_{N,0} \rangle &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_{N,t}, A_N^{(p)} \Psi_{N,t} \rangle &= \langle \Psi_{p,t}, a^{(p)} \Psi_{p,t} \rangle =: a^{(p)}(\psi_t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Here $\Psi_{N,t}$ is again a coherent state, i.e., $\Psi_{N,t}(x_1, \dots, x_N) = \psi_t(x_1) \cdots \psi_t(x_N)$, and $\Psi_{p,t} = \Psi_{N=p,t}$, where ψ_t is a solution of the Hartree equation

$$i\hbar \partial_t \psi_t = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi_t + (v * |\psi_t|^2) \psi_t \tag{1.6}$$

with initial condition $\psi_{t=0} = \psi$.

Remarks

1. For large N , the quantum evolution $e^{-iH_N t/\hbar} \Psi_{N,0}$ can be replaced by the *nonlinear* single-particle evolution $\Psi_{N,t}(x_1, \dots, x_N)$. Particle interaction effects are translated into the nonlinearity of this evolution. This justifies interpreting the limit $N \rightarrow \infty$ as a mean-field limit.

2. For sufficiently short times the corrections to the limit in (1.5) are $O(1/N)$. Theorem 1.1 can be extended to yield a systematic expansion in powers of $1/N$ that converges for small enough $|t|$.
3. Since $\lim_{N \rightarrow \infty} N(N-1) \cdots (N-p+1)/N^p = 1$, the second equality in (1.5) follows easily from (1.4), because

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_{N,t}, A_N^{(p)} \Psi_{N,t} \rangle = \langle \Psi_{p,t}, a^{(p)} \Psi_{p,t} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{3p})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{2(N-p)}$$

4. Theorem 1.1 was first proven in [He], see also [GiVe]. A new proof was given in [Sp1] and extended to more general classes of two-body potentials, including the Coulomb potential, in [EY], [BGM], [BEGMY]. The proof in our paper is quite different. It enables us to tackle the problem of obtaining convergence estimates uniform in Planck's constant \hbar , as we now proceed to discuss.

It is well known that, for $V_N \in C^2$, the classical dynamics of N particles tends to the dynamics defined by the Vlasov equation, in the limit $N \rightarrow \infty$. More precisely, if ρ_N denotes the empirical distribution, namely

$$\rho_N(dx, d\xi; t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)) \delta(\xi - \xi_i(t)) dx d\xi$$

where $(x_1(t), \dots, x_N(t); \xi_1(t), \dots, \xi_N(t))$ is a solution of the classical equations of motion, then, in the limit $N \rightarrow \infty$, ρ_N tends weakly to $f_t(x, \xi) dx d\xi$, where $f_t(x, \xi)$ is a solution of the Vlasov equation:

$$\partial_t f_t = -\xi \cdot \nabla_x f_t + \nabla_x V_{eff} \cdot \nabla_\xi f_t \tag{1.7}$$

$$V_{eff}(x, t) = \int v(x-y) f_t(y, \xi) dy d\xi, \tag{1.8}$$

see [BH]. It is natural to ask whether this convergence result is related to that of Theorem 1.1. Our next result provides, under very restrictive assumptions on the two-body interactions, a partial answer to this question. First, we define a restricted class of interactions. For $\sigma > 0$, $p = 1, 2, \dots$ we define the spaces

$$L_{\sigma,p}^1 := \{f \in L^1(\mathbb{R}^{6p}) \mid e^{\sigma|z|} f \in L^1(\mathbb{R}^{6p})\}, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{A}_{\sigma,p} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^{6p}) \mid e^{\sigma|s|} \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^{6p})\}, \tag{1.10}$$

We denote

$$\|f\|_{\sigma,p} := \|e^{\sigma|s|} \widehat{f}\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^{6p}} |e^{\sigma|s|} \widehat{f}(s)| ds.$$

Here $x_j \in \mathbb{R}^3$, $\xi_j \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, \dots, p$, and

$$z := (X_p, \Xi_p) \in \mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p}; \quad X_p := (x_1, \dots, x_p), \quad \Xi_p := (\xi_1, \dots, \xi_p),$$

$$|z| := \sum_{j=1}^p (|x_j| + |\xi_j|);$$

$\widehat{f}(s)$, $s := (S, \Sigma) \in \mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p}$ is the Fourier transform of f . We further denote by $\Phi_t^N : (X_N; \Xi_N) \mapsto (X_N(t); \Xi_N(t))$ the flow generated by H_N^c , where H_N^c is the classical Hamilton function corresponding to the operator H_N .

Definition 1.1 *We define by:*

1.

$$W_N^{\Psi_N}(X_N, \Xi_N; h, t) = (2\pi)^{-3N} \int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{i(Y_N, \Xi_N)} \Psi_N(X_N + \hbar Y_N/2, t) \overline{\Psi_N}(X_N - \hbar Y_N/2, t) dY_N \tag{1.11}$$

the Wigner distribution of the N -particle normalized wave function $\Psi_N(X_N, t)$;

2.

$$W_j^{\Psi_N}(X_j, \Xi_j; h, t) = \int_{\mathbb{R}^{3(N-j)}} W_N^{\Psi_N}(X_N, \Xi_N; t) dX_{N-j} d\Xi_{N-j}, \tag{1.12}$$

the j -particle Wigner function ($(N-j)$ -marginal distribution of the N -particle Wigner distribution).

3.

$$W_h(\psi)(x, \xi; t) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(y, \xi)} \psi_t(x + \hbar y/2) \overline{\psi_t}(x - \hbar y/2) dy, \tag{1.13}$$

the Wigner distribution of the solution $\psi_t(x)$ of the Hartree equation.

Consider now a velocity-dependent two-body potential $v(x, \xi) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$. Our second main result is

Theorem 1.2 . *Let $v \in \mathcal{A}_{\sigma,1}$, for some $\sigma > 0$. Let $\Psi_{N,0}$ be a product state. Then, for fixed p and $t \geq 0$, there is a constant $C_p > 0$ independent of h such that, as an equality between tempered distributions,*

$$W_p^{\Psi_N}(X_p, \Xi_p; h, t) = \prod_{j=1}^p W_h(\psi)(x_j, \xi_j; t) + \frac{C_p}{N} + O\left(e^{-1/\sqrt{\|v\|_{\sigma,1} t}}\right), \tag{1.14}$$

as $N \rightarrow \infty$.

Remarks

1. (1.14) shows that, up to an exponentially small error independent of \hbar , the mean-field convergence towards a single-particle nonlinear dynamics holds *uniformly* in \hbar . The dependence of the potential on the velocity is here a critical assumption. The extension of this result to the N -body Schrödinger operators considered in Theorem 1.1 appears to be out of reach of the semiclassical microlocal analysis techniques employed in this paper.
2. It is known since some time that $W_{\hbar}(\psi)(x, \xi; t)$ converges in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^6)$ to a solution $f_t(x, \xi)$ of the Vlasov equation, as $\hbar \rightarrow 0$ (see e.g.[NS],[Sp2],[LP]). Under the additional scaling assumption $\hbar = N^{-1/3}$ one also has [NS]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_p^{\Psi_N}(X_p, \Xi_p; \hbar, t) = \prod_{j=1}^p f_t(x_j, \xi_j) \tag{1.15}$$

if v is a local two-body potential with Fourier transform \hat{v} of compact support. Moreover, in the case of the Kac potentials, (1.15) holds whenever $N \rightarrow \infty$ entails $\hbar \rightarrow 0$ [GMP]. Under the above scaling assumption $\hbar = N^{-1/3}$, the same result has been proved also for fermions [EESY]. More precisely, the validity of (1.14) without the error term has been proved for the corresponding Husimi functions.

3. The classical limit is equivalent to the limit of heavy particles. We set $\hbar = 1$ in (1.2), but let the particle mass m become large. We impose the condition that the kinetic energy per particle be independent of m , namely $mv_i^2 = O(1)$, i.e., $|v_i| = O(1/\sqrt{m})$, for all i . This suggests to rescale time as $t = \sqrt{m}\tau$. Then the Schrödinger equation becomes

$$\frac{i}{\sqrt{m}} \partial_{\tau} \Psi_N = \sum_{j=1}^N -\frac{\Delta_j}{2m} \Psi_N + \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N v(x_i - x_j) \Psi_N,$$

which is equivalent to (1.1)-(1.3), for $\hbar = 1/\sqrt{m}$.

In the following sections all auxiliary results are listed leading to the proof of Theorems 1.1 and 1.2. For the proofs, the reader is referred to [FGS].

2 The $N \rightarrow \infty$ limit: convergence estimates

2.1 Kinematical algebra of “observables”

The above systems can be described by a kinematical algebra of operators, the quantum mechanical analog of the algebra of functions on phase space of a classical system.

Let $\mathcal{H}^{(p)} := L^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{3p})$, $0 < p < N$, $N \in \mathbb{N}$. Let $a^{(p)}$ be a bounded operator on $\mathcal{H}^{(p)}$, and $\alpha^{(p)}(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_p) := \alpha^{(p)}(X_p; Y_p)$ the tempered distribution kernel in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p})$ associated to $a^{(p)}$ by the nuclear theorem:

$$(a^{(p)} \varphi^{(p)})(X_p) = \int_{\mathbb{R}^{3p}} \alpha^{(p)}(X_p; Y_p) \varphi^{(p)}(Y_p) dY_p \tag{2.1}$$

where $\varphi^{(p)}(Y_p) \in L^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{3p})$. Then $(a^{(p)})^*$ has the distribution kernel $\overline{\alpha^{(p)}(Y_p; X_p)}$.

To $a^{(p)}$ we associate the operator $A_N^{(p)}$ on $L^2_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{3N})$ specified in (1.4). The operators $A_N^{(p)}$ span the algebra of all bounded operators on $\mathcal{H}^{(N)}$.

If $a^{(p)}$ is bounded on $\mathcal{H}^{(p)}$ then $A_N^{(p)}(a^{(p)})$ is bounded on $\mathcal{H}^{(N)}$. Since $\|P_{\mathcal{S}}\| = 1$ and $\binom{N}{p} \frac{p!}{N^p} \leq 1$, we have that

$$\begin{aligned} \|A_N^{(p)} \varphi^{(N)}\|_{\mathcal{H}^{(N)}}^2 &\leq \|a^{(p)}\|_{\mathcal{H}^{(p)}}^2 \int_{\mathbb{R}^{3(N-p)}} \left(\int_{\mathbb{R}^{3p}} |\varphi^{(N)}(Y_p; X_{N-p})|^2 dY_p \right) dX_{N-p} \\ &= \|a^{(p)}\|_{\mathcal{H}^{(p)}}^2 \|\varphi^{(N)}\|_{\mathcal{H}^{(N)}}^2 \end{aligned}$$

The following statement is easily verified.

Proposition 2.1 . *The map $a^{(p)} \mapsto A_N^{(p)}(a^{(p)})$ is linear, and:*

$$(A_N^{(p)}(a^{(p)}))^* = A_N^{(p)}((a^{(p)})^*), \tag{2.2}$$

$$\|A_N^{(p)}(a^{(p)})\|_{B(\mathcal{H}^{(N)})} \leq \|a^{(p)}\|_{B(\mathcal{H}^{(p)})}. \tag{2.3}$$

2.2 The Schwinger-Dyson expansion

Given an operator $A_N^{(p)} = A_N^{(p)}(a^{(p)})$, with $a^{(p)} \in B(\mathcal{H}^{(p)})$, $p \leq N$, we denote by $A_{t,N}^{(p)}$ the corresponding Heisenberg-picture operator with respect to the free time evolution $e^{iH_N^0 t/\hbar}$, i.e.,

$$A_{t,N}^{(p)} = e^{iH_N^0 t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N^0 t/\hbar} \tag{2.4}$$

We further denote by $A_N^{(p)}(t)$ the corresponding operator with H_N^0 replaced by H_N , namely

$$A_N^{(p)}(t) := e^{iH_N t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N t/\hbar}, \tag{2.5}$$

and by $A_{I,N}^{(p)}(t, s)$ the two-parameter operator family

$$A_{I,N}^{(p)}(t, s) := e^{iH_N t/\hbar} e^{-iH_N^0 t/\hbar} A_{s,N}^{(p)} e^{iH_N^0 t/\hbar} e^{-iH_N t/\hbar} \tag{2.6}$$

Then we obviously have

$$A_N^{(p)}(t) = A_{I,N}^{(p)}(t, s) \Big|_{s=t} \tag{2.7}$$

We denote V_N by V . Iterating the identity:

$$A_{I,N}^{(p)}(t, s) = A_{s,N}^{(p)} + \frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{iH_N t_1/\hbar} e^{-iH_N^0 t_1/\hbar} [V_{t_1}, A_{s,N}^{(p)}] e^{iH_N^0 t_1/\hbar} e^{-iH_N t_1/\hbar} dt_1 \tag{2.8}$$

we get that

$$A_{I,N}^{(p)}(t, s) = A_{s,N}^{(p)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n [V_{t_n}, \dots, [V_{t_1}, A_{s,N}^{(p)}] \dots] \tag{2.9}$$

and finally, setting $s = t$, we obtain the Schwinger-Dyson expansion

$$A_N^{(p)}(t) = A_{I,N}^{(p)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} [V_{t_n}, \dots, [V_{t_1}, A_{t,N}^{(p)}] \dots] dt_n \dots dt_1 \tag{2.10}$$

From now on, we drop the index N in the Heisenberg-picture operators with respect to the free evolution, i.e., we use the abbreviation: $A_{t,N}^{(p)} := A_t^{(p)}$.

2.3 The $N \rightarrow \infty$ limit

We exploit the structure of the commutators on the right-hand side of (2.10), the symmetry of wave functions in $L_S^2(\mathbb{R}^{3N})$, and the fact that each term in $A_N^{(p)}$ only acts on p arguments of a wave function, so that many commutators will vanish. Note that

$$V_t = \frac{1}{N} \sum_{i < j}^N e^{-iH_N^0 t/\hbar} v^{ij} e^{iH_N^0 t/\hbar} = \frac{1}{N} \sum_{i < j} v_t^{ij}, \tag{2.11}$$

where

$$v_t^{ij} = e^{i(\Delta_i + \Delta_j)t\hbar/2} v^{ij} e^{-i(\Delta_i + \Delta_j)t\hbar/2}, \quad v^{ij} = v(x_i - x_j). \tag{2.12}$$

Therefore

$$\begin{aligned} [V_s, A_N^{(p)}] &= \frac{1}{N} \sum_{i < j}^N [v_s^{ij}, A_N^{(p)}] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^N A_N^{(p+1)}([v_s^{ij}, a^{(p)}]) + \frac{1}{N} \sum_{i < j}^p A_N^{(p)}([v_s^{ij}, a^{(p)}]) = \\ &= \frac{N-p}{N} \sum_{i=1}^p A_N^{(p+1)}([v_s^{i(p+1)}, a^{(p)}]) + \frac{1}{N} \sum_{i < j}^p A_N^{(p)}([v_s^{ij}, a^{(p)}]) \end{aligned} \tag{2.13}$$

In more precise terms, the expression

$$[V_s, A_N^{(p)}(a^{(p)})] = \frac{N-p}{N} \sum_{i=1}^p A_N^{(p+1)}([v_s^{i(p+1)}, a^{(p)}]) + \frac{1}{N} \sum_{i < j}^p A_N^{(p)}([v_s^{ij}, a^{(p)}]), \quad (2.14)$$

holds as an operator identity on $\mathcal{H}^{(N)}$. In second-quantization language, the first sum in (2.14) corresponds to *tree graphs*, the second one to *loop graphs*. Next, we insert (2.14) in (2.8) and perform a second step, but only for the first sum in (2.14), leaving the second one unchanged. To keep our notation compact, it is useful to introduce the notion of *tree amplitudes* of n -th order, recursively defined in the following way

$$g^{(0,p)} = a_t^{(p)}; \quad g_{t_1, \dots, t_n}^{(n,p)} = \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{p+n-1} [v_{t_n}^{i(p+n)}, g_{t_1, \dots, t_{n-1}}^{(n-1,p)}], \quad n \geq 1 \quad (2.15)$$

Then expression (2.14) becomes

$$\frac{i}{\hbar} [V_s, A_N^{(p)}] = \frac{N-p}{N} A_N^{(p+1)}(g_s^{(1,p)}) + \frac{i}{N\hbar} \sum_{i < j}^p A_N^{(p)}([v_s^{ij}, g^{(0,p)}]).$$

The first term is $O(1)$, while the second one is of order $p(p-1)/N$ (for fixed \hbar) and is therefore suppressed by a factor $1/N$. This is the basic observation leading to the

Proposition 2.2 . Let $|t| < \left(\frac{4}{\hbar} \|v\|_\infty\right)^{-1}$. Then

$$e^{iH_N t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N t/\hbar} = A_t^{(p)} + \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} A_N^{(p+n)}(g_{t_1, \dots, t_n}^{(n,p)}) dt_n \dots dt_1 + O(1/N) \quad (2.16)$$

Remark It can be proved (see [FGS], Section 2.4) that the above convergence is actually global in time.

2.4 Control of the expansion, uniformity with respect to \hbar

In this subsection, we set $(X_p, \Xi_p) =: (x, \xi)$.

Given a symbol $\tau(x, \xi) \in \mathcal{A}_{\sigma,p}$, we denote by T the corresponding Weyl operator. Its action on vectors $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3p})$ is given by

$$(T\psi)(x) = \frac{1}{h^{3p}} \int_{\mathbb{R}^{3p}} \int_{\mathbb{R}^{3p}} \tau((x+y)/2, \xi) e^{i((x-y), \xi)/\hbar} \psi(y) dy d\xi \quad (2.17)$$

In general, T is a semiclassical pseudodifferential operator. Let us recall some relevant results (see e.g. [Ro]).

1. If $\widehat{\tau} \in L^1(\mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p})$ then T extends to a continuous operator on $L^2(\mathbb{R}^{3p})$ with $\|T\| \leq \|\widehat{\tau}\|_{L^1}$; hence $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|T\|_\sigma := \|\tau\|_\sigma$, where $\widehat{\tau}$ is the Fourier transform of τ , and

$$\|\tau\|_\sigma := \int_{\mathbb{R}^{6p}} |\widehat{\tau}(s)| e^{\sigma|s|} ds = \|\tau\|_{\sigma,p}.$$

Obviously, $\|\widehat{\tau}\|_{L^1} \leq \|\tau\|_\sigma$. We have dropped here the index p to simplify the notation.

2. If $v \in \mathcal{A}_{\sigma,p}, g \in \mathcal{A}_{\sigma,p}$, then the symbol of the commutator $[V, G]/i\hbar$ is the Moyal bracket $\{v, g\}_M$. Hence the multiple commutator $[V, [V, \dots [V, G] \dots]/(i\hbar)^n$ has as its symbol the multiple Moyal bracket $\{v, \{v, \dots, \{v, g\}_M \dots\}_M$.

We recall that, given $g, g' \in \mathcal{A}_{\sigma,p}$, their Moyal bracket $\{g, g'\}_M$ is defined as

$$\{g, g'\}_M = g \# g' - g' \# g,$$

where $\#$ is the composition of Weyl symbols. In the Fourier transform representation the explicit expression of the Moyal bracket is (see e.g. [Fo],§3.4):

$$(\{g, g'\}_M)^\wedge(s) = \frac{2}{\hbar} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{g}(s^1) \widehat{g'}(s - s^1) \sin [\hbar(s - s^1) \wedge s^1/2] ds^1, \quad (2.18)$$

where, given two vectors $s = (v, w)$ and $s^1 = (v^1, w^1)$, $s \wedge s^1 := \langle w, v_1 \rangle - \langle v, w_1 \rangle$.

3. If the observable T has symbol $\tau(x, \xi)$, then the Heisenberg observable T_t has symbol $(\tau \circ \Phi_t^0)(x, \xi)$. Here $\Phi_t^0(x, \xi) = (x + \xi t, \xi)$ is the free flow with initial conditions (x, ξ) . In particular, $(\tau \circ \Phi_t^0)(x, \xi) \in \mathcal{A}_{\sigma,p}$ whenever $\tau \in \mathcal{A}_{\sigma,p}$.

Under the present assumptions, it can be proven, starting from the expression (2.18) (see [BGP], Lemma 3.2), that the following estimate on the Moyal bracket holds:

$$\|\{g, g'\}_M\|_{\sigma-\delta} \leq \frac{1}{e^{2\delta^2}} \|g\|_\sigma \|g'\|_\sigma, \quad 0 < \delta < \sigma \quad (2.19)$$

Let now $g_r := \{g_{r-1}, v\}_M, r > 1; g_1 = \{g, v\}_M$. Then, applying (2.19) r times, we can write:

$$\|g_r\|_{\sigma-r\delta} \leq \left(\frac{1}{e^{2\delta^2}}\right)^r \|v\|_\sigma^r \|g\|_\sigma \quad (2.20)$$

These results immediately yield the following bound.

Lemma 2.1 . *Let the operator $a^{(p)}$ be the Weyl quantization of a symbol $\tau_a(x, \xi) \in \mathcal{A}_{\sigma,p}$ for some $\sigma > 0$. Then there is $L(p) > 0$ independent of \hbar such that*

$$\|A_N^{(p+n)}(g_{t_1, \dots, t_n}^{(n,p)})\|_{\mathcal{T}(N)} \leq L^n n!^3 (2\|v\|_\sigma)^n \|a^{(p)}\|_\sigma \quad (2.21)$$

This Lemma is the starting point for the desired uniform estimate with respect to \hbar :

Proposition 2.3 . Let $\epsilon := \|v\|_{\sigma}$. Then, under the same assumption on the operator $a^{(p)}$ made in Lemma 2.1, there exists $k = k(\epsilon)$, $\Lambda = \Lambda(\epsilon)$ such that

$$e^{iH_N t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N t\hbar} = A_{t,N}^{(p)} + B_{t,N}^{(p),k} + R_{t,N}^{(p),k} + \frac{\Lambda}{N}, \tag{2.22}$$

where

$$B_{t,N}^{(p),k} = \sum_{n=1}^k \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} A_N^{(p+n)}(g_{t_1, \dots, t_n}^{(n,p)}) dt_n \dots dt_1. \tag{2.23}$$

Here $B_{t,N}^{(p),k}$ fulfills the majorization (??), and

$$\|R_{t,N}^{(p),k}\|_{\mathcal{H}^{(N)}} \leq M_3 e^{-L_3/\sqrt{\epsilon}} \tag{2.24}$$

3 Connection with the Hartree equation and proof of the theorems

The representation of the evolution obtained in Proposition 2.2 coincides with the evolution generated by the Hartree equation in the limit $N \rightarrow \infty$.

For this purpose, we recall that the Hartree equation is Hamiltonian. We define the functional

$$\mathcal{H}(\psi, \bar{\psi}) = -\frac{\hbar^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x)|^2 dx + \mathcal{V}(\psi, \bar{\psi}), \tag{3.1}$$

for $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, where

$$\mathcal{V}(\psi, \bar{\psi}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} v(x-y) \psi(x)\psi(y) dx dy \tag{3.2}$$

If $\psi(x), \bar{\psi}(y)$ are considered as canonical variables with Poisson brackets

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = i\hbar\delta(x-y), \quad \{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0,$$

then (3.1) is the Hamiltonian functional generating a time evolution of functionals on phase space equivalent to the Hartree equation. Namely, if $\mathcal{A}(\psi)$ is a functional and $\mathcal{A}(t)$ denotes its time evolution, one has that

$$\partial_t \mathcal{A}(t, \psi) = \frac{1}{\hbar} \{\mathcal{H}, \mathcal{A}(t)\}(\psi)$$

Choosing $\mathcal{A} = \langle \phi, \psi \rangle$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, then $\mathcal{A}(t, \psi) = \mathcal{A}(\psi_t)$, where ψ_t is a solution of the Hartree equation

$$i\hbar\partial_t\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi_t + (v * |\psi_t|^2)\psi_t \tag{3.3}$$

Define the free flow $\Phi_t^0(\mathcal{A}) := \mathcal{A}_t$ of \mathcal{A} by

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(e^{i\Delta t/\hbar}\psi)$$

and denote by $\Phi_t(\mathcal{A})$ the interacting flow. Formally, the interacting flow is given by the Lie expansion in the interaction representation (analogous to the Schwinger-Dyson expansion of Section 2.2). Indeed we have the following result:

Lemma 3.2 . $\Phi_t(\mathcal{A})$ admits the formal expansion

$$\Phi_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_t + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{\hbar}\right)^n \int_0^t \dots \int_0^{t_n} \{\mathcal{V}_{t_n} \dots \{\mathcal{V}_{t_1}, \mathcal{A}_t\} \dots\} dt_n \dots dt_1 \tag{3.4}$$

This Lemma yields the desired identification:

Proposition 3.4 . Let $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, and let Ψ be a product state, i.e.

$$\Psi(x_1, \dots, x_l) = \prod_{s=1}^l \psi(x_s)$$

Then, for all $N \geq p$,

$$g_{t_1, \dots, t_n}^{(n;p)}(\psi) := \frac{(p+n)^{p+n}}{(p+n)!} \langle \Psi_{n+p}, A_{p+n}^{(p+n)}(g_{t_1, \dots, t_n}^{(n;p)}) \Psi_{n+p} \rangle_{\mathcal{H}^{(n+p)}} = \left(\frac{1}{\hbar}\right)^n \{\mathcal{V}_{t_n} \dots \{\mathcal{V}_{t_1}, \mathcal{A}\} \dots\}(\psi), \tag{3.5}$$

where

$$\mathcal{A} = \alpha^{(p)}(\psi) := \int \overline{\psi(x_1)} \dots \overline{\psi(x_p)} \alpha^{(p)}(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_p) \psi(y_1) \dots \psi(y_p) \prod_{k=1}^p dx_k dy_k$$

In turn, this identification yields the main results.

Proof of Theorem 1.1

Consider the expectation value of the expansion (2.16) in a coherent (i.e., product) state:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_N, e^{iH_N t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N t/\hbar} \Psi_N \rangle_{\mathcal{H}^{(N)}} &= \langle \Psi_N, A_{t,N}^{(p)} \Psi_N \rangle_{\mathcal{H}^{(N)}} + \\ \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} \langle \Psi_N, A_N^{(p+n)}(g_{t_1, \dots, t_n}^{(n;p)}) \Psi_N \rangle_{\mathcal{H}^{(N)}} dt_n \dots dt_1 &+ O(1/N). \end{aligned}$$

By definition of Ψ_N ,

$$\begin{aligned} & \frac{N^p}{N(N-1)\dots(N-p+1)} \langle \Psi_N, e^{iH_N t/\hbar} A_N e^{-iH_N t/\hbar} \Psi_N \rangle_{\mathcal{H}^{(N)}} = \langle \Psi_p, a_i^{(p)} \Psi_p \rangle_{\mathcal{H}^{(p)}} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} \langle \Psi_{n+p}, g_{t_1, \dots, t_n}^{(n;p)} \Psi_{n+p} \rangle_{\mathcal{H}^{(n+p)}} dt_n \dots dt_1 + O(1/N). \end{aligned}$$

Since the series is norm-convergent, the limits $N \rightarrow \infty$ and $n \rightarrow \infty$ can be interchanged.

Then

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_N, e^{iH_N t/\hbar} A_N e^{-iH_N t/\hbar} \Psi_N \rangle_{\mathcal{H}^{(N)}} &= \langle \Psi_p, a_i^{(p)} \Psi_p \rangle_{\mathcal{H}^{(p)}} + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} \langle \Psi_{n+p}, g_{t_1, \dots, t_n}^{(n;p)} \Psi_{n+p} \rangle_{\mathcal{H}^{(n+p)}} dt_n \dots dt_1 = a^{(p)}(\psi_t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

where the last equality follows from formula (3.5).

Proof of Theorem 1.2

If, instead of (2.16), the representation (2.22) is considered, the above argument yields

$$\begin{aligned} & \frac{N^p}{N(N-1)\dots(N-p+1)} \langle \Psi_N, e^{iH_N t/\hbar} A_N^{(p)} e^{-iH_N t/\hbar} \Psi_N \rangle = \langle \Psi_p, a_i^{(p)} \Psi_p \rangle + \langle \Psi_N, R_{i,N}^{k,p} \psi_N \rangle \\ & + \sum_{n=1}^{k(\epsilon)} \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} \langle \Psi_{n+p}, g_{t_1, \dots, t_n}^{(n;p)} \Psi_{n+p} \rangle dt_n \dots dt_1 = a^{(p)}(\psi_t) + O(e^{-1/\sqrt{\epsilon}}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Given any bounded operator A on $L^2(\mathbb{R}^{3l})$ with (Weyl) symbol $\sigma_A(x, \xi) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{6l}) \rightarrow \mathbb{R}$, where \mathcal{S} is the Schwartz space of rapidly decreasing functions, its matrix elements can be expressed in terms of the symbol and of the Wigner function by the following well known formula (see e.g. [Fo]):

$$\langle \Psi, A \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{3l} \times \mathbb{R}^{3l}} \sigma_A(x, \xi) W_{\Psi}(x, \xi) dx d\xi \tag{3.8}$$

where $W_{\Psi}(x, \xi)$ is the Wigner function of the state Ψ . Therefore, in our case

$$\frac{N^p}{N(N-1)\dots(N-p+1)} \langle \Psi_N, A_N(t) \Psi_N \rangle = \int_{\mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p}} \sigma_A(X_p, \Xi_p) W_N^{\Psi_N}(X_p, \Xi_p, t) dX_p d\Xi_p,$$

where $W_N^{\Psi_N}(X_p, \Xi_p, t)$ is the Wigner function corresponding to the time evolution, $e^{iH_N t/\hbar} \Psi_N$, of the product state $\Psi_{N,0} = \psi(x_1) \dots \psi(x_N)$. The $N-p$ variables (X_{N-p}, Ξ_{N-p}) are integrated out. By (3.7) and (1.13), we can take the $N \rightarrow \infty$ limit and write

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p}} \sigma_A(X_p, \Xi_p) W_N^{\Psi_N}(X_p, \Xi_p, t) dX_p d\Xi_p = \\ & \int_{\mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p}} \sigma_A(X_p, \Xi_p) \prod_{l=1}^p W_{\psi}(x_l, \xi_l; t) dX_p d\Xi_p + O(e^{-1/\sqrt{\epsilon}}). \end{aligned}$$

Since this formula holds for any $\sigma_A(X_p, \Xi_p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{3p}) \cap \mathcal{A}_{\sigma,p}$, the assertion is proved.

References

- [BGM] C. Bardos, F. Golse, N. Mauser *Weak coupling limit of the N-particle Schrödinger equation*, Methods Appl. Anal. **2**, 275-293, 2000
- [BEGMY] C. Bardos, L. Erdős, F. Golse, N. Mauser and H-T Yau *Derivation of the Schrödinger-Poisson equation from the quantum N-body problem* C.R. Acad. Sci. Paris **334** no. 6, 515-520, 2002
- [BGP] D. Bambusi, S. Graffi, T. Paul, *Normal Forms Estimates and Quantization Formulae* Comm. Math. Phys. **207**, 173-195, 1999
- [BH] W. Braun, K. Hepp, *The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles*, Comm. Math. Phys. **56**, 101-113, 1977
- [Do] R. L. Dobrushin, *Vlasov equations*, Sov.J.Funct.An. **13**, 115-119, 1979
- [EESY] A. Elgart, L. Erdős, B. Schlein, H.-T. Yau, *Nonlinear Hartree equation as the mean field limit of weakly coupled fermions*, J.Math.Pures Appl. **83**, 1241-1273 (2004)
- [EY] L. Erdos and H.-T. Yau, *Derivation of the nonlinear Schrödinger equation from a many body Coulomb system*, Adv.Theor.Math.Phys. **5**, 1169-2005, 2001
- [FGS] J. Fröhlich, S. Graffi, S. Schwarz, *Mean field and classical limit of many-body Schrödinger dynamics for bosons*, to appear on Comm. Math.Phys. 2007
- [Fo] G. Folland *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press 1989
- [GMP] S. Graffi, A. Martinez, M. Pulvirenti, *Mean field approximation of quantum systems and classical limit*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences **13**, 55-63, 2003
- [GiVe] J. Ginibre, G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction*, Math. Z. **170**, 109-136, 1980
- [He] K. Hepp, *The classical limit for quantum mechanical correlation functions*, Comm.Math.Phys **35**, 265-267, 1974
- [LP] P.L. Lions, T. Paul, *Sur les mesures de Wigner*, Revista Matematica Ibero Americana **9**, 553-618, 1993.
- [NS] H. Narnhofer, G. Sewell *Vlasov hydrodynamics of a quantum mechanical model*, Comm.-Math.Phys, **79**, 9-24, 1981
- [Ro] D. Robert, *Autour de l'approximation semiclassique*, Birkhäuser Verlag, 1987
- [Sp1] H. Spohn, *Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits*, Rev.Mod.Phys. **53**, 569-615, 1980
- [Sp2] H. Spohn, *On the Vlasov hierarchy*, Mathematical Methods and Models in Applied Sciences **3**, 445-455, 1981

Uniform flow of an elastic material of Korteweg type

G. Lauro

Architecture Faculty, II University of Naples,
I-81031 Aversa (CE) Italy,
Email: giuliana.lauro@unina2.it

Abstract

We consider a three dimensional model of a compressible, isothermal, inviscid fluid endowed with internal capillarity. The resulting conservation equations for the density and velocity consist of a system of third order nonlinear partial differential dispersive equations. In the case of uniform flow, a family of solitary waves, parametrized by the wave speed, are shown to satisfy such a system.

1 Introduction

The formulation of the theory of capillarity with diffuse interface models was first introduced by Korteweg in 1901 [1], and derived rigorously by Dunn and Serrin [2]. Such models have been used to understand physical and hydrodynamic phenomena that occur near a fluid's critical point [8]. The diffuse interface models apply both above and below the critical point and the density has the role of an order parameter. Moreover, the surface tension is intrinsically incorporated in these models. The diffuse interface is represented as a transition zone of rapid but smooth density variation and density gradients appear in a capillary tensor, or Korteweg stress term, in the momentum equation.

In [2] it has been proved that, for an isothermal elastic material of grade 3, the form of the capillary tensor compatible with the fundamental laws of thermodynamics is:

$$\mathbf{T} = -\sigma \nabla \rho \otimes \nabla \rho + \left(-p(\rho) + \rho \sigma \Delta \rho + \frac{1}{2} (\rho \sigma)_\rho (\nabla \rho)^2 \right) \mathbf{I} \quad (1)$$

where $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ is the density, \mathbf{x} in R^3 the position and t in R^+ the time variables and I the identity matrix.

The subscript means the operation of derivative with respect to the indicated variable.

The coefficient σ is called the surface tension coefficient and is defined by

$$\sigma = \sigma(\rho, \gamma) = 2\rho f_\gamma(\rho, \gamma) \text{ with } \gamma = (\nabla\rho)^2$$

where $f(\rho, \gamma)$ is the Helmotz free energy (objective under a frame change)that can be decomposed into a standard part and an excess term due to gradients of density:

$$f(\rho, \gamma) = f_0(\rho) + f_1(\rho, (\nabla\rho)^2), \text{ with } p(\rho) = \rho^2 f_0(\rho)_\rho$$

and where $p(\rho)$ is the thermodynamic pressure.

The choice of the free energy, then, will determine the fluid equations as it is shown in the next section.

2 The capillary model

Let us consider a compressible, isothermal, inviscid fluid endowed with a capillary stress of form (1), where the free energy f has the following form :

$$f = \frac{\beta^2}{8} \frac{\gamma}{\rho^2} - \frac{p_c}{\rho} - \alpha \log \rho \quad (2)$$

with β suitable positive constant, $p_c = k_B \Theta_c \rho_c$, $\alpha = k_B \Theta$, k_B Boltzmann constant, Θ_c and ρ_c some critical value of temperature and density and Θ the temperature of the isothermal process.

Hence, by means of the standard part of the free energy, (2), we have that $p(\rho) = \rho^2 f_0(\rho)_\rho = (p_c - \alpha\rho)$. Then, inserting (2) in relation (1), we obtain:

$$\mathbf{T} = -\frac{\beta^2}{4\rho} \nabla\rho \otimes \nabla\rho + \left(-(p_c - \alpha\rho) + \frac{\beta^2}{4} \Delta\rho \right) \mathbf{I} \quad (3)$$

The classical conservation equations of mass and momentum for an inviscid and isothermal fluid, in absence of external forces, are :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \quad (4)$$

$$\partial_t \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (5)$$

If we use in (5) the equation (4) and insert the stress tensor given by (3), then the conservation equation of momentum becomes:

$$\partial_t \mathbf{u} + [\mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} = \nabla \left(\alpha \log \rho + \frac{\beta^2}{2} \left[\frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right] \right) \tag{6}$$

Let us note that if we define, as in [2], the chemical potential μ as

$$\mu = -div(\rho f)_{\nabla \rho} + (\rho f)_{\rho} \tag{7}$$

then the choice (2) for the free energy furnishes:

$$\nabla \mathbf{T} = -\rho \nabla \mu \tag{8}$$

in agreement with the result found in [2] for an isothermal elastic material of grade 3.

Moreover, it is interesting to note that Antanovskii [3] has found an analogous relation to (8) in modelling the capillarity of a liquid-vapor diffuse interface.

3 Uniform flow: travelling wave solution.

We now show that, in the case of uniform flow, the capillary fluid (4),(6) admits a family of soliton solutions parametrized by the wave speed. Namely, we show that, under suitable assumptions, the momentum equation of the uniform flow is governed by 3 nonlinear third order differential equations whose connecting orbit is homoclinic.

Let us set:

$$\sqrt{\rho}(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \tag{9}$$

where

\mathbf{v} = constant vector, with components v_1, v_2, v_3 .

Then, in the case of a uniform flow of the fluid, with constant velocity field given by \mathbf{v} , system (4)-(6) becomes :

$$\partial_t \rho = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho \tag{10}$$

$$\alpha \nabla \log \rho + \frac{\beta^2}{2} \nabla \left[\frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right] = 0 \tag{11}$$

In order to determine function F we assume that it owns the property of separation of variables, namely

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) = F_1(x_1 - v_1t)F_2(x_2 - v_2t)F_3(x_3 - v_3t) \quad (12)$$

Moreover, we require that the travelling wave F is in the form of a soliton, that is we require that the end states at infinity are equal to the same constant value, namely we assume that:

1) $F_i(z_i)$ tend to zero as z_i tends to plus or minus infinity together with $F_i'(z_i), F_i''(z_i)$.

2) Further, we assume that also $F_i(z_i)\log F_i(z_i)$ tend to zero as z_i tend to plus or minus infinity.

Where $z_i = x_i - v_it$, $i = 1, 2, 3$ and we have denoted with the "prime" the differentiation with respect to z_i .

Then, the travelling wave F satisfying the assumptions 1) , 2) has the shape of a Gaussian, namely we get:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = k \exp[-(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)^2/l^2] \quad (13)$$

with $l^2 = \beta^2/(2\alpha)$ and k suitable constant.

In fact, by means of the property of separation of variables, we obtain that equation (11) is equivalent to 3 nonlinear third order differential equations of similar form, namely:

$$\alpha(\log F_i^2(z_i))' + (\beta^2/2)\left[\frac{1}{F_i(z_i)}(F_i(z_i))''\right]' = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

By following standard technique, we now proceed to solve equation (14).

We integrate once to get

$$2\alpha \log F_i + (\beta^2/2)\frac{1}{F_i}F_i' = c_i \quad (15)$$

where c_i is a constant of integration.

Multiplying (15) by $F_i F_i'$, and integrating a second time we get

$$2\alpha \left[(1/2)F_i^2 \log F_i - (1/4)F_i^2 \right] + (\beta^2/4)F_i'^2 - (1/2)c_i F_i^2 = a_i \quad (16)$$

By the assumptions 1), 2) it follows that the constant a_i must be equal to zero.

Hence, by solving for $F_i'^2$ and by making a rational substitution, we integrate a third time :

$$F_i = \exp \left[(1/2)(1 + c_i/2\alpha) \right] \exp \left[- (1/2)g_i^2 \right] \quad (17)$$

where

$$g_i = -\frac{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\beta} z_i + b_i \tag{18}$$

Then, in order to satisfy the assumptions, the constant b_i must be equal to zero.

Hence, we can write

$$F_i(z_i) = k_i \exp[-(x_i - v_i t)^2 / (2l^2)] \tag{19}$$

where the constant k_i is equal to $\exp[1 + c_i / (2\alpha)]$ with c_i determined by assigned boundary conditions.

So, we have shown that a family of solitons, (13), with parameter v , is solution of (11), with $k = (k_1 k_2 k_3)^2$.

Finally, it is easy to check that (13) satisfies the continuity equation (10).

4 Conclusions

We have derived an explicit solution for a Korteweg model of the uniform flow of a capillary fluid, described by equations (10)- (11), in the form of one-parameter family of solitons (homoclinic waves), where the parameter is the speed of the wave. The action of the dispersive term, $\nabla[\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}]$, that tends to broaden the wave, is compensated by the nonlinear term, $\alpha\nabla\log\rho$, allowing the moment equation to support solitary waves. We remark that this paper improves the result and corrects some mistakes (in the expressions of the Korteweg tensor and of the free energy) contained in [6]. Uniqueness and stability problems of such a solution will be subjects of further papers.

Finally, it is interesting to note that, as shown in [4], the form (2) of the free energy, linked to capillarity, allows the reduction of the hydrodynamic equations to a nonlinear Schrödinger equation. In fact, equations (4),(6) are the hydrodynamic form [5] of a nonlinear Schrödinger equation with logarithmic non-linearity [7], when we replace the constant β with the fundamental unit of action \hbar and α suitable constant.

References

- [1] D. Korteweg, Sur la forme que prennent les equations du mouvement des fluides si l'ou tient compte des forces capillaires causees par des variations de densite, Arch.Neerl. Sciences Exactes et Naturelles, Series II, **6**, 1-24 , 1901

- [2] J.E. Dunn, J.B. Serrin, On the Thermomechanics of interstitial working, Arch. Rat. Mech. Anal. **88**, 1985
- [3] L.K. Antanovskii, Microscale theory of surface tension, Phys. Rev. E, **54**, 6, 1996
- [4] L.K. Antanovskii, C. Rogers, W.K. Schief, A note on a capillarity model and the nonlinear Schrödinger equation, J. Phys. A Math. Gen. **30**, L555, 1997
- [5] E. Madelung, Quantentheorie in hydrodynamischer form, Zeitschr. f. Physik, **40**, 332 (1926)
- [6] S. DeMartino, G. Lauro, Soliton-like solution for a capillary model, Proc. WASCOM XII (World Scientific, Singapore), 2003
- [7] I. Bialynicki-Birula, J. Mycielski, Gaussons: Solitons of the logarithmic Schrödinger equation, Physica Scripta **20**, 1979
- [8] D.M. Anderson, G.B. McFadden, A.A. Wheeler, Diffuse-interface methods in fluid mechanics, Annual review of fluid mechanics, **30**, 1998

Nonlinear stability of an epidemic model of the spatial spread of rabies among foxes via the canonical reduction method

S. Lombardo, G. Mulone and M. Trovato

Dipartimento di Matematica e Informatica, Città Universitaria

Viale A. Doria, 6, 95125, Catania, Italy

lombardo@dmi.unict.it, mulone@dmi.unict.it, trovato@dmi.unict.it

Dedicated to Prof. Pasquale Renno on the occasion of his 70th birthday

Abstract

The canonical reduction method [1, 2, 3, 4] is applied to studying the nonlinear stability of the constant solutions (disease-free and endemic equilibria) of a three-species (SIR) model for the spatial spread and control of rabies among foxes considered in Murray [5]. The coincidence of the linear and nonlinear stability regions is obtained and a known radius of attractivity is given.

1 Introduction: the canonical reduction method

In the study of the zero solution to linear and nonlinear ordinary differential systems, the “canonical reduction method”, which transforms a linearized system in an uncoupled system or in a canonical (Jordan) form, plays a fundamental role. Let us consider the ODE system

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + N(\mathbf{x}), \quad (1)$$

where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, A is a constant $n \times n$ matrix and N is a nonlinear vector which vanishes for $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. It is easy to see that, if we study the stability of the zero solution with respect to the *classical energy*

$$E_0 := \frac{1}{2}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2],$$

in general, we *do not reach* the stability results of linearized instability (eigenvalues) method.

In order to study the stability of the zero solution and reach the stability results of the classical linearized method, we transform the system in an equivalent one with the *canonical reduction method*. We introduce a *transformation matrix* Q : it is a non singular matrix of eigenvectors and/or generalized eigenvectors or vectors [2], Q^{-1} is its inverse. We then define the change of variables $\mathbf{x} = Q\mathbf{X}$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, to obtain the new system

$$\dot{\mathbf{X}} = Q^{-1}AQ\mathbf{X} + Q^{-1}N(Q\mathbf{X}), \quad (2)$$

where $Q^{-1}AQ$ is *similar* to the matrix A . By defining the new *optimal Lyapunov function*

$$E := \frac{1}{2}[X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2],$$

we reach, in the nonlinear case, the optimal stability results of linearized (eigenvalues) method.

By using the definition of the *principal eigenvalue* of an elliptic operator, this method can be applied to some PDEs systems which include reaction-diffusion systems and convection problems in fluid dynamics [1, 2, 6]. In particular, in the case of nonlinear *reaction-diffusion systems*, we consider the perturbation equations of a given constant (or steady) solution \bar{U} of the system

$$U_{i,t} = D_{ik}\Delta U_k + L_{ik}U_k + N_i(U_1, \dots, U_n), \quad U_i(x, 0) = U_{i0}(x) \quad (3)$$

where $i = 1, 2, \dots, n$, the perturbation $U(x, t) = (U_1, \dots, U_n)^T$ is an element of $L^2(\Omega)$, and Ω is the space-domain of motion, $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times \dots \times (0, l_m)$, (we denote with $(,)$ and $\|\cdot\|$ the scalar product and norm). $U_0 \in L^2(\Omega)$, $D = D_{ik}$ and $L = L_{ik}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, are constant matrices (depending on some *physical* parameters), D is positive definite, Δ is the m -dimensional Laplacian and $N = (N_1, \dots, N_n)^T$ represents the nonlinearities, $N(0) = 0$, see [5, 7]. We suppose that the initial value problem (3) with *suitable* (Dirichlet or Neumann) boundary conditions, is well posed and the solutions exist globally at least for small initial data (see e.g. [7, 8] and the reference therein).

We now recall the *main steps to construct an optimal Lyapunov function* for the reaction-diffusion system (3) with Dirichlet or Neumann boundary conditions (for more details, see [1, 2, 3, 4]). We first linearize the system and denote by ξ the *principal eigenvalue* of the linear operator $\mathcal{L} = D\Delta + L$ with the appropriate boundary conditions and we compute the eigenvalues of the matrix $A_\xi = -\xi D + L$. We then introduce the new field variables $V = Q^{-1}U$ and write the (nonlinear) *reaction-diffusion system* equivalent to (3), (see also Murray [5], pag. 53):

$$V_{i,t} = F_{ik}\Delta V_k + G_{ik}V_k + \bar{N}_i(V), \quad V(0) = V_0, \quad (4)$$

where

$$F = Q^{-1}DQ, \quad G = Q^{-1}LQ, \quad \text{and} \quad \bar{N}(V) = Q^{-1}N(QV).$$

We define the optimal Lyapunov function

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \|V(t)\|^2$$

and write its balance equation:

$$\dot{E}_1(t) = (GV, V) - (F\nabla V, \nabla V) + (\bar{N}(V), V).$$

We observe that, whenever $(GV, V) \leq 0$ for any V , we have always stability. Otherwise, we study the *maximum* problem

$$M = \max_{\mathcal{S}} \frac{(GV, V)}{(F\nabla V, \nabla V)}, \tag{5}$$

where \mathcal{S} is the space of the *admissible* functions (other equivalent maximum problems can also be introduced). M is obtained by solving the equation $\det(T_{ij}) = 0$, where

$$T_{ij} = \begin{cases} 2(G_{ij} - M(p)\xi_p F_{ij}) & \text{if } i = j, \\ G_{ij} + G_{ji} - M(p)\xi_p (F_{ij} + F_{ji}) & \text{if } i \neq j, \end{cases} \tag{6}$$

and maximizing the generic eigenvalue $M(p)$ with respect to the integer p . We control the nonlinear terms by adding (if necessary) a suitable complementary energy $E_2(t)$. Finally, we show that the condition $M < 1$ is the *nonlinear stability condition*, and $M = 1$ gives the *critical Lyapunov number* R_{E_1} which coincides with the critical linear instability parameter R_c . We also obtain a *computable* value for the radius of attraction of the initial data.

In next Section, we apply this general method to study nonlinear stability of the constant solutions (disease-free and endemic equilibria) of an epidemic model for the spatial spread of rabies among foxes [5].

2 A three-species model for the spatial spread and control of rabies among foxes

We study a three-species model for the spatial spread and control of the rabies epidemic among foxes where the rabid foxes are considered the main cause of the spatial spread. The basic model assumptions and biological meanings are given in Murray [5], Chap. 13, see also [9, 10, 11, 12]).

Let us consider the three-component reaction - diffusion system (system (13.73) of Murray [5])

$$\begin{cases} S_t = (a - b)(1 - \frac{N}{K})S - \beta RS + D_1 \Delta S \\ I_t = \beta RS - \sigma I - [b + (a - b)\frac{N}{K}]I + D_1 \Delta I \\ R_t = \sigma I - [b + (a - b)\frac{N}{K}]R - \alpha R + D \Delta R \\ N = S + I + R \end{cases} \tag{7}$$

in $\Omega \times (0, +\infty)$, with $\Omega = (0, L) \times (0, L)$, $L > 0$. The populations densities (fox/Km²) S, I, R , represent susceptible foxes, infected, but noninfectious, foxes and rabid (infectious) foxes, respectively. N is the total population. The positive parameters $a, b, \alpha, \beta, \sigma, K, D_1, D$ are: the average birth rate, the average intrinsic death rate, the average rabies death rate ($1/\alpha$ is the average duration of clinical disease), the disease transmission coefficient, the average infected \rightarrow infectious per capita rate ($1/\sigma$ is the average incubation time), the carrying capacity, the diffusion coefficient of susceptibles and infected, the diffusion coefficient of infectious individuals.

We adimensionalize the system by means of the transformation

$$S = sK, \quad I = qK, \quad R = rK, \quad N = nK, \quad t = \frac{t^*}{K\beta}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \sqrt{\frac{D_1}{K\beta}},$$

$$\epsilon = \frac{a-b}{K\beta}, \quad \mu = \frac{\sigma}{K\beta}, \quad \delta = \frac{b}{K\beta}, \quad d = \frac{\alpha+b}{K\beta}, \quad \vartheta = \frac{D}{D_1} \text{ (we note that } d > \delta).$$

On dropping the asterisks for notational simplicity, we have

$$\begin{cases} s_t = \epsilon(1-n)s - rs + \Delta s \\ q_t = rs - (\mu + \delta + \epsilon n)q + \Delta q \\ r_t = \mu q - (d + \epsilon n)r + \vartheta \Delta r \\ n = s + q + r. \end{cases} \tag{8}$$

The constants solutions of this system are (see [5]) the trivial solution, the *disease-free equilibrium*

$$(s, q, r)^T = (1, 0, 0)^T,$$

and the *endemic equilibrium*

$$(s_0, q_0, r_0)^T = \left(\frac{\epsilon - r_0}{\epsilon} - q_0 - r_0, \frac{(d + \epsilon - r_0)r_0}{\mu}, \frac{\epsilon[\mu - (d + \epsilon)(\mu + \delta + \epsilon)]}{\mu - \epsilon(\epsilon + \delta)} \right)^T.$$

We note that the disease-free equilibrium exists for any positive parameters ϵ, δ, μ, d ($d > \delta$) while the endemic equilibrium exists if

$$d > \delta, \quad \epsilon + d < 1, \quad \mu > \frac{\epsilon(\delta + \epsilon)}{1 - \epsilon}, \quad \delta < d < \frac{\mu}{\mu + \delta + \epsilon} - \epsilon,$$

and moreover $r_0 < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}, q_0 < \frac{\epsilon - (1 + \epsilon)r_0}{\epsilon}$.

The perturbation $\mathbf{u} = (U_1(\mathbf{x}, t), U_2(\mathbf{x}, t), U_3(\mathbf{x}, t))^T$ to the endemic equilibrium is given by

$$\begin{cases} U_{1t} = -\epsilon s_0 U_1 - \epsilon s_0 U_2 - (\epsilon + 1)s_0 U_3 + \Delta U_1 - N_1 \\ U_{2t} = (r_0 - q_0\epsilon)U_1 + [r_0 - q_0\epsilon - (\mu + \delta + \epsilon)]U_2 + (s_0 - \epsilon q_0)U_3 + \Delta U_2 - N_2 \\ U_{3t} = -r_0\epsilon U_1 + (\mu - \epsilon r_0)U_2 - [d + \epsilon + (\epsilon - 1)r_0]U_3 + \vartheta \Delta U_3 - N_3, \end{cases} \tag{9}$$

where

$$\begin{aligned} N_1 &= \epsilon U_1^2 + \epsilon U_1 U_2 + (\epsilon + 1)U_1 U_3 \\ N_2 &= \epsilon(U_1 U_2 + U_2^2 + U_2 U_3) - U_1 U_3 \\ N_3 &= \epsilon(U_1 + U_2 + U_3)U_3, \end{aligned} \tag{10}$$

and $\Omega = (0, \tilde{L}) \times (0, \tilde{L})$, with $\tilde{L} = L\sqrt{\frac{K\beta}{D_1}}$. We note that the perturbation to the disease-free equilibrium can be formally obtained from (9) by putting there $s_0 = 1, q_0 = 0, r_0 = 0$.

To this system we add zero Dirichlet or Neumann boundary conditions, respectively. More general domain Ω and boundary conditions (of Dirichlet type in a part of the boundary $\partial_1\Omega \subseteq \partial\Omega$ and of Neumann type in $\partial_2\Omega \subseteq \partial\Omega$) can be considered.

The stability of the disease-free equilibrium (in the case of Dirichlet boundary conditions) has been studied in [2]: we have linear stability whenever $d > d_{2c}$, with the *critical value* d_{2c} given by

$$d_{2c} = \frac{\mu}{\epsilon + \mu + \delta + \xi} - \epsilon - \vartheta\xi,$$

where $\xi = \frac{2\pi^2}{\tilde{L}^2}$ for Dirichlet b.c. and $\xi = 0$ for Neumann b.c. We have instability if $\delta < d < d_{2c}$, in particular a necessary condition of the onset of an epidemic wave is given by

$$\delta < d < \frac{\mu}{\epsilon + \mu + \delta} - \epsilon,$$

see [5]. We note that, by introducing the basic reproduction number [10],

$$R = \frac{\sigma\beta K}{(\sigma + \alpha)(\alpha + a)} = \frac{\mu}{(\mu + \epsilon + \delta)(\epsilon + d)}$$

the last inequality is equivalent to $R > 1$.

We observe that, in the case of the disease-free equilibrium the linearized system associated to (9) (where now $s_0 = 1, q_0 = 0$ and $r_0 = 0$) has two equations uncoupled from the other. Moreover, the sub-system of the equations $(9)_{2-3}$ is symmetrizable, see [13], and we can find optimal Lyapunov parameters in the classical energy to obtaining the coincidence of linear and nonlinear stability regions (in the case of 2×2 systems we can also apply the method of [14]). In [2], we have used our procedure (the canonical reduction method) by observing that it is more general than the best coupling parameters method (i.e. the classical energy with optimal Lyapunov parameters) and it contains the results of the symmetrization method, [13], as a particular case.

We now study the stability problem of the endemic equilibrium. For this, we begin with the *kinetic system* associated to (9) (formally obtained by putting the Laplacian identically zero). We have (see [9, 10]):

- i) if $d_{1c} < d < d_{2c}$ the endemic equilibrium is stable (linearly and at least locally nonlinear),
- ii) if $\delta < d < d_{1c}$ limit cycle solutions exist.

Figure 1 shows the numerical solutions of the *kinetic system* associated to (9) and of its transformed system for given values of d, δ, ϵ, μ and different initial

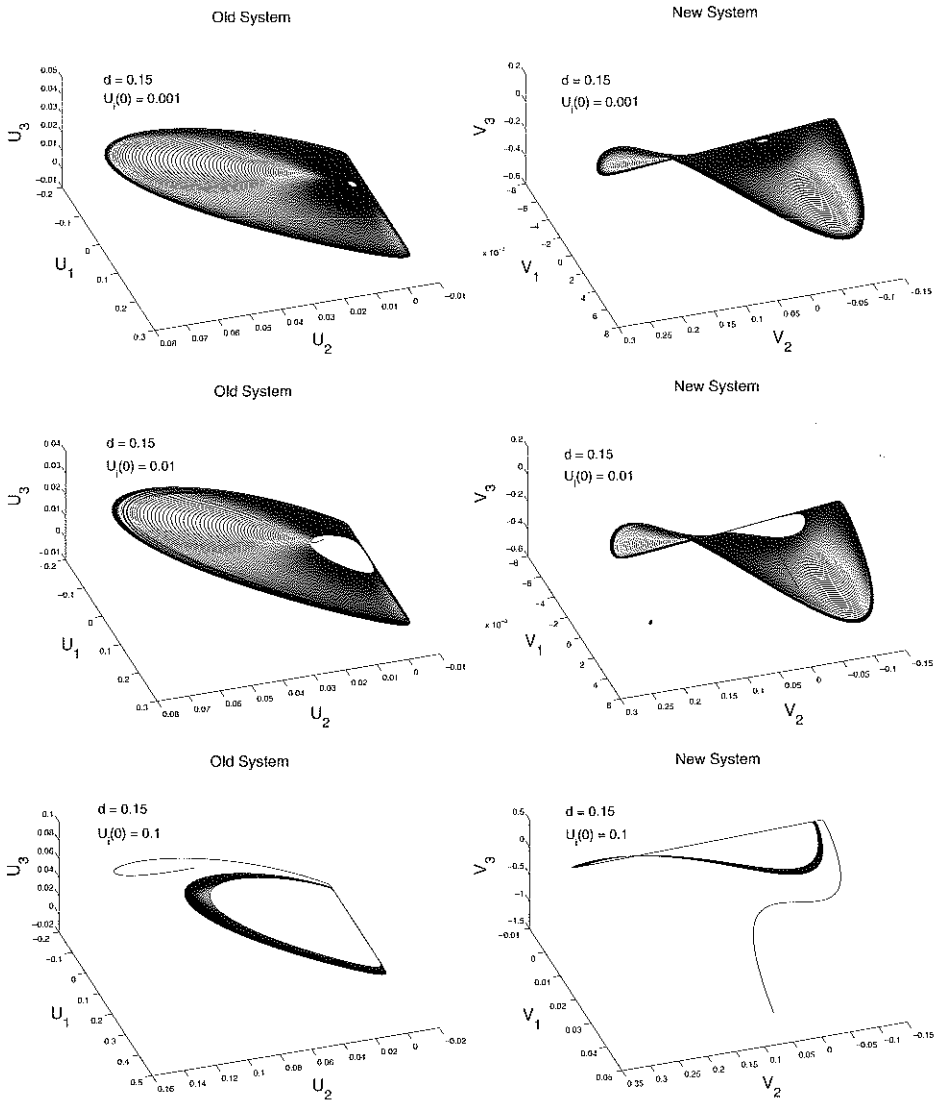


Figure 1: Phase portraits of the solutions of the kinetic system associated to system (9) and its transformed system for $\delta = \epsilon = 0.003$, $\mu = 0.08$, $d = 0.15$ and different initial conditions.

conditions. The topological equivalence of the systems is evident. Figure 1 also emphasizes the presence of cycles in agreement with the results of paper [10]. For some values of d , $d < d_{1c}$, the presence of other attractors may not be excluded. In Figure 2 we report the numerical results of instability-stability regimes for the physical *kinetic system* associated to (9) as a function of the d parameter. In particular, on the left of Figure we report the results of linear stability showing the spectrum of the matrix L where, in the case of complex values, we represent with continuous lines the real part and with dashed lines the imaginary part of the eigenvalues $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. For $d < d_{1c}$ we find the system in the instability regime, in fact the spectrum of L shows a pair (λ_1 and λ_2) of complex conjugate eigenvalues with positive real parts (see inset) and a third (λ_3) real negative eigenvalue. The regime remains unstable until d reaches a certain critical threshold $d_{1c} \approx 0.166096$. In correspondence, we find that the real parts of two complex eigenvalues (λ_1, λ_2) are approximately zero. An increase of $d > d_{1c}$ causes stability according to item i). For $d_{1c} < d < 1.9185$ two eigenvalues are complex with negative real parts and for $1.9185 < d < d_{2c} \approx 0.9272$ all the eigenvalues are real and negative, for $d > d_{2c}$ the eigenvalues are reals (one is positive) but the endemic solution is not a biological solution (q_0 and r_0 are negative). In fact, on the right of Figure 2 we report the endemic solution s_0, q_0, r_0 as function of d .

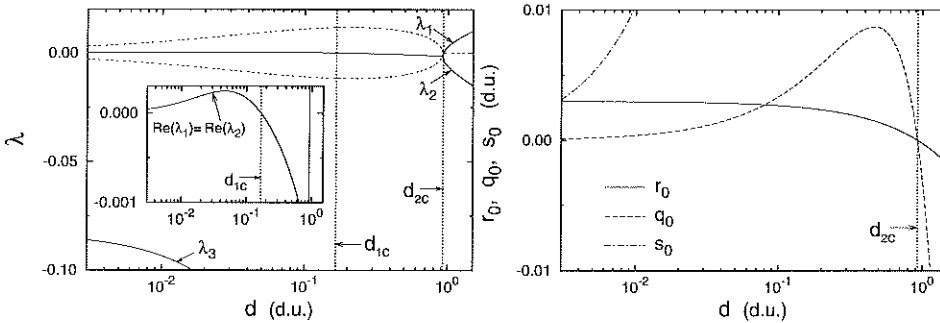


Figure 2: On the left we report the real part (continuous lines) and the imaginary part (dashed lines) of eigenvalues $\{\lambda_i\}$ of matrix L for $\delta = \epsilon = 0.003$, $\mu = 0.08$, as a function of the d parameter. On the right we report the endemic solution $\{s_0, q_0, r_0\}$ as a function of d .

In the PDE case, the linearized perturbation equations system about the endemic equilibrium, system (9) with $n_i = 0$, *has not* uncoupled sub-systems and *is not* symmetrizable. So the classical energy (with optimal Lyapunov parameters) does not give the coincidence of the linear, d_{1c} , and nonlinear, d_{1E} , stability parameters. Instead, we apply the general procedure of Section 1. We first consider the linearized system and the linear operator $\mathcal{L} = D\Delta + L$, where

$D = D_{ik}$, with $D_{11} = D_{22} = 1$, $D_{33} = \vartheta$ and $D_{ik} = 0$ if $i \neq k$, and

$$L = \begin{pmatrix} -\epsilon s_0 & -\epsilon s_0 & -(\epsilon + 1)s_0 \\ r_0 - q_0\epsilon & r_0 - q_0\epsilon - (\mu + \delta + \epsilon) & s_0 - \epsilon q_0 \\ -r_0\epsilon & \mu - \epsilon r_0 & -d - \epsilon - (\epsilon - 1)r_0 \end{pmatrix}.$$

We then compute the eigenvalues of the matrix $A_\xi = -\xi D + L$, where ξ is the principal eigenvalue of \mathcal{L} with the appropriate boundary conditions (for Dirichlet boundary conditions $\xi = \frac{2\pi^2}{\bar{L}^2}$, for Neumann boundary conditions $\xi = 0$). They are obtained by solving the cubic equation in λ : $\lambda^3 - P_1\lambda^2 + P_2\lambda - P_3 = 0$, where $P_1 = \text{Tr}(A_\xi)$, P_2 is the second principal invariant of A_ξ and $P_3 = \det(A_\xi)$. Since A_ξ depends on six parameters, we have to solve the problem numerically by considering suitable biological values. For this, we have chosen (see also [5, 9, 10]) $\epsilon = \delta = 0.003$, $\mu = 0.08$, $\vartheta = 2$, $\xi = \frac{2\pi^2}{10^4}$ and give different values of d in the interval (δ, d_{2c}) . In the case of Neumann boundary conditions we find the same results as in the kinetic system: $d_{1c} = 0.166096$, $d_{2c} = 0.9272$, while in the case of Dirichlet boundary conditions, the endemic equilibrium is always stable (for the given value of $\bar{L} = 10^2$, otherwise, for \bar{L} very large, we can have a critical value $d_{1c}(\xi)$ in the interval $(0.003, 0.166096)$). We consider the case of Dirichlet boundary conditions, and fix d in the interval $(0.003, 0.9272)$. For example, by choosing $d = 0.1$, we easily obtain a transformation matrix Q :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.9859 & 0 & 0.3646 \\ 0.0138 & -0.1312 & -0.6708 \\ -0.0003 & -0.1029 & 0.6458 \end{pmatrix}.$$

The transformed system is system (4) where G_{ij} , F_{ij} and \bar{N}_i are given by

$$\begin{aligned} G_{11} &= -0.0003, G_{12} = 0.0110, G_{13} = -0.0004, G_{21} = -0.0109, G_{22} = 0.0006, \\ G_{23} &= -0.0055, G_{31} = -5.3037, G_{32} = -0.0001, G_{33} = -0.1843, F_{11} = 1, \\ F_{12} &= 0.0323, F_{13} = -0.2031, F_{21} = 0.0014, F_{22} = 1.4505, F_{23} = -2.8290, \\ F_{31} &= -0.0002, F_{32} = -0.0874, F_{33} = 1.5493 \text{ and} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= -0.1799V_3^2 + 0.0782V_1V_2 + 0.02866V_2V_3 - 0.4875V_1V_3 - 0.0027V_1^2 \\ \bar{N}_2 &= 0.0007V_2^2 - 0.9993V_3^2 + 0.4273V_1V_2 + 0.1581V_2V_3 - 2.7016V_1V_3 + 0.0013V_1^2 \\ \bar{N}_3 &= -0.1602V_3^2 + 0.06857V_1V_2 + 0.02606V_2V_3 - 0.4335V_1V_3 + 0.0002V_1^2. \end{aligned}$$

By introducing the new Lyapunov function

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \|V\|^2,$$

and by computing the maximum associated to its balance equation, we easily obtain $M = 0.2211$; we therefore have linear stability. It can also be proved that we have nonlinear stability. In fact, from the energy identity

$$\dot{E}_1(t) = (GV, V) - (F\nabla V, \nabla V) + (\bar{N}(V), V)$$

we obtain the inequality

$$\dot{E}_1(t) \leq (M - 1)\|\nabla V\|^2 + |(\bar{N}(V), V)|.$$

We now observe that the nonlinear term $(\bar{N}(V), V)$ is the sum of cubic terms of the type $\int_{\Omega} fgh \, d\Omega$. By using the Hölder and Poincaré inequalities, and the

well known inequalities $\|f\|_6^2 \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\pi^2}}\|\nabla f\|^2$, $\|f\|_{3/2} \leq |\Omega|^{1/6}\|f\|$, we easily find a known positive constant C_1 such that the inequality

$$\dot{E}_1(t) \leq 2\xi[(M - 1) + C_1 E_1^{1/2}]E_1,$$

holds. From this, by assuming that $E_1(0) < \frac{(1 - M)^2}{C_1^2}$, by a recursive argument, [13], we obtain an exponential decay.

As concerns *other* values of d , it can be seen that the *sup* of the ratio $\frac{(GV, V)}{(F\nabla V, \nabla V)}$ is 0 if $d \in (0.166096, 0.9272)$ while the maximum M over the set of the admissible perturbations is always less than 1 when d is in the interval $(0.003, 0.166096)$. We thus see that in the case of Dirichlet boundary conditions we have a larger stability region.

We finally note that it can be proved that the system (7) has an invariant region, see [7]. The system (7) therefore admits a *maximal compact attractor* [8].

Acknowledgments

Research partially supported by the University of Catania under a local contract, by the Italian Ministry for University and Scientific Research, PRIN: “*Problemi matematici non lineari di propagazione e stabilità nei modelli del continuo*”, and by GNFM of INDAM.

References

- [1] Lombardo, S., Mulone, G. and Trovato, M. 2006. A general analytical procedure to obtain optimal Lyapunov functions in reaction-diffusion systems, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, ser. II, Sppl. **78**: 173–185.
- [2] Lombardo S., Mulone, G. and Trovato, M. 2006. An operative method to define optimal Lyapunov functions in ODEs and in reaction-diffusion systems via the canonical reduction method (submitted).
- [3] Mulone, G. and Straughan, B. 2006. An operative method to obtain necessary and sufficient stability conditions for double diffusive convection in porous media, *ZAMM*, **86** (7): 507-520.

- [4] Mulone, G., Straughan, B. and Wang, W. 2006. Stability of Epidemic Models with Evolution, *Stud. Appl. Math.* (to appear).
- [5] Murray, J. D. 2003. *Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications*. Third edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, 18. New York: Springer-Verlag.
- [6] Lombardo, S. and Mulone, G. 2005. Necessary and Sufficient Stability Conditions via the Eigenvalues - Eigenvectors Method: an Application to the Magnetic Bénard Problem, *Nonlinear Anal.* **63** /5-7: e2091-e2101.
- [7] Smoller, J. 1994. *Shock waves and reaction-diffusion equations*, 2nd Ed. New York: Springer-Verlag.
- [8] Temam, R. 1988. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag.
- [9] Murray, J. D., Stanley, E.A. and Brown, D.L. 1986. On the spatial spread among foxes, *Proc. R. Soc. Lond. B*, **229**: 11–150.
- [10] Anderson, R.M., Jackson, H.C., May, R.M. and Smith, A.M. 1981. Population dynamics of fox rabies in Europe, *Nature*, **289**: 765-771.
- [11] Murray, J.D. and Seward, W.L. 1992. On the spatial spread of rabies among foxes with immunity, *J. Theor. Biol.*, **156**: 327–348.
- [12] Yachi, S., Kawasaki, K., Shigesada, N. and Teramoto, E. 1989. Spatial patterns of propagating waves of fox rabies, *Forma*, **4**: 3–12.
- [13] Straughan, B. 2004. *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, 2nd Ed. New-York: Springer-Verlag.
- [14] Rionero, S. 2006. A rigorous reduction of the L^2 -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction - diffusion system of PDE's to the stability of the solutions to a linear binary system of ODE's, *J. Mat. Anal Appl.* **319**, 377-397.

Evolution of Slow Rotating Viscous Liquid.

Part 1. Model of the Process.

GIOVANNI MATARAZZO
University of Salerno*

A Pasquale con affetto e stima, memore degli anni in cui egli fu valida guida per tutti noi nel fondare la Scuola di Matematica della Facoltà di Ingegneria.

Problems of dynamics of rotating liquid represent one of the classical object of investigations in hydrodynamics.

In the present paper we shall describe the effective model for investigation of dynamics of viscous liquid with a free surface under relatively small rotation of a reservoir with respect to the longitudinal axis. The model is aimed at determination of influence of non-steady rotational motion of liquid on behavior of a free surface.

1 Development of the mathematical model of the system tank with rotating liquid with a free surface.

Let us consider the tank of cylindrical shape partially filled by liquid. We assume that initially the system is in the quiescent state. The longitudinal axis of the cylindrical tank is in parallel with the gravity force. Initially the tank starts its rotational motion around its longitudinal axis.

We accept the following denotations for description of the system dynamics: $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega(t)\}$ is the angular velocity of rotation, t is time, S and S_0 are perturbed and non-perturbed free surfaces of liquid, Σ is the moisten boundary of the tank (a part of lateral walls and the bottom of the tank), τ and τ_0 are domains occupied by liquid in perturbed and non-perturbed states; \vec{v}_0 is the velocity of translational motion of the carrying body; \vec{v} and \vec{u} are absolute and relative (relative to the reference frame steadily fixed with the tank) velocities of motion of particles of liquid. The system is under action of surface \vec{p}^n and volume \vec{F} forces. We assume liquid to be viscous incompressible. Its rheological relation is presented as

$$({}^2\vec{P})_{ij} = p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - P\delta_{ij},$$

where ${}^2\vec{P}$ is the tensor of pressure, x_i are coordinates of particles of liquid, μ and $\nu = \mu/\rho$ are the dynamical and the kinematical coefficients of viscosity, ρ is density, δ_{ij} is the Kronecker symbol.

Rotational motion of viscous liquid is described by the Navier – Stokes equations. However, there is a problem of correct formulation of dynamic boundary conditions on the free surface

*matarazz@diima.unisa.it

of liquid. In order to formulate correctly the boundary problem and, in particular, boundary conditions on the rotating free surface of liquid, we make use of the Hamilton variational relation [5], for which the motion equations and dynamic boundary conditions are natural. Peculiarity of this variational relation consists in its potential to be applied to non-conservative continuum systems, for example, to problems of dynamics of viscous liquid. We write down this variational relation in the following form [5]

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\tau} (\delta T^* + \delta' A^{e*} + \delta' A^{i*}) d\tau + \int_{S+\Sigma} \vec{p}^n \cdot \delta \vec{u} dS \right] dt = 0. \tag{1}$$

Here $T^* = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2$ is the specific density of the kinetic energy of liquid, $\delta' A^{e*} = \rho \vec{F} \cdot \delta \vec{u}$ is the specific density of the elementary work of external volume forces on virtual displacements $\delta \vec{u}$ of particles of liquid, $\delta' A^{i*} = -2 \vec{P} \cdot \text{grad} \delta \vec{u}$ is the specific density of the elementary work of internal forces on virtual displacements of particles of liquid, \vec{p}^n are external surface forces.

In order to obtain motion equations it is necessary to single out independent variations in the relation (1). We define small deviations of points of the system, which do not contradict constraints at the given time instant, as the variations $\delta \vec{u}$. The following kinematic restrictions, which arise from the physical content of the problem, are superimposed on the system.

1. Isochronism: $\delta \vec{u} = 0$ at $t = t_1$ and $t = t_2$.
2. Nonflowing through the rigid boundary: $\delta \vec{u} = 0$ on Σ .
3. Condition of incompressibility: $\text{div} \delta \vec{u} = 0$ in the domain τ .
4. Restrictions on the free surface of liquid S , i.e., for the surface set by the equation $z = \xi(r, \theta, t)$ (because of cylindrical shape of the domain it is possible to resolve this equation with respect to z). These restrictions are equivalent to determination of interrelation between values $\delta \xi$ and $\delta \vec{u}$ on S , which it is possible to get from the condition of nonflowing of liquid through the free boundary. These interdependence is obtained from the condition of equality of normal components of velocities of perturbations of a free surface of liquid and particles of liquid on it, i.e. $\delta u_n = \delta \xi / [1 + (\nabla \xi)^2]^{1/2}$.

Let us adduce termwise transformations of the relation (1). For transformation of the kinetic energy we make use of the formula

$$\int_{\tau} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \delta \vec{u} d\tau = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{u} d\tau - \int_{\tau} \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} d\tau,$$

which is valid for motion of incompressible liquid.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \delta \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right) d\tau dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} d\tau dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \delta \vec{u} d\tau dt + \int_{\tau} \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{u} d\tau \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Reasoning from isochronism of variations the last term in the relation (2) vanishes. The second term of the variational relation (1) does not need transformations. The third term gives

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \left(2 \vec{P} \cdot \text{grad} \delta \vec{u} d\tau \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} P_{ij} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} d\tau dt = \\
 & = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (P_{ij} \delta u_j) - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j \right] d\tau dt.
 \end{aligned}$$

Here and then we realize summation over repeated indexes from 1 to 3. We apply the Gauss - Ostrogradsky theorem to the underlined term. Then, further transformation of the third term of the relation (1) gives

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j d\tau dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S+\Sigma} P_{ij} \delta u_j n_i dS dt = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \text{Div}^2 \vec{P} \cdot \delta \vec{u} d\tau dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (P_{nn} \delta u_n + P_{nr} \delta u_r) dS dt. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Here n_i are components of the unit normal to a surface, vectors \vec{P}_n and $\delta \vec{u}$ are represented for convenience in the form of sums of normal and tangent components. The last term of the relation (1) connected with external surface forces, for the present mechanical system takes the form of $-\int_{t_1}^{t_2} \int_S p_0 \delta u_n dS dt$ and does not need transformations. Here p_0 is pressure in gas over liquid. The sign minus appears due to the property that the vector of pressure forces is directed in opposition to the vector of external normal to the free surface S .

Taking into account the mentioned transformations (2), (3) the relation (1) can be reduced to the form

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \left[-\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \vec{F} + \text{Div}^2 \vec{P} \right] \cdot \delta \vec{u} d\tau dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_S (P_{nn} \delta u_n + P_{nr} \delta u_r + P_0 \delta u_n) dS dt = 0. \tag{4}
 \end{aligned}$$

In view of the fact that variations in the domain and on the free surface of liquid are independent, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \text{Div}^2 \vec{P} \quad \text{in } \tau, \tag{5} \\
 & P_{nn} = -P_0; \quad P_{nr} = 0 \quad \text{on } S. \tag{6}
 \end{aligned}$$

The relations (5) represent a form of the Navier-Stokes equations. Physical sense of dynamic boundary conditions on the free surface of liquid S is the following: tangent stresses on elementary plane areas tangent to the free surface are equal to zero, and the corresponding normal components become balanced by pressure in gas.

Motion equations of bounded volume of viscous liquid with a free surface of liquid in the reference frame connected with the tank in cylindrical parameters take the form of

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} + 2(\vec{\omega} \times \vec{u})_r = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \\
 & + \nu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right)_r - \\
 & - \left(\frac{d\vec{v}_0}{dt} \right)_r - (\vec{\omega} \times \vec{v}_0)_r - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})_r; \\
 & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} + 2(\vec{\omega} \times \vec{u})_\theta = F_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\
 & + \nu \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right)_\theta - \\
 & - \left(\frac{d\vec{v}_0}{dt} \right)_\theta - (\vec{\omega} \times \vec{v}_0)_\theta - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})_\theta; \\
 & \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2(\vec{\omega} \times \vec{u})_z = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \\
 & + \nu \Delta u_z - \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right)_z - \left(\frac{d\vec{v}_0}{dt} \right)_z - \\
 & - (\vec{\omega} \times \vec{v}_0)_z - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})_z;
 \end{aligned} \tag{7}$$

Kinematic boundary conditions take the form of

$$\vec{v} = 0 \text{ on } \Sigma; \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{v} = u_z. \tag{9}$$

Dynamic boundary conditions on the free surface are presented in the general form by relations (6).

For obtaining the specific form of dynamic boundary conditions we make use of the normal vector of the free surface in the form

$$\vec{n} = \left[1 + (\vec{\nabla} \xi)^2 \right]^{-1/2} \left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial r}; -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}; 1 \right\}$$

and two independent tangent vectors

$$\vec{\tau}^1 = \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1, 0, \frac{\partial \xi}{\partial r} \right\};$$

$$\vec{\tau}^2 = \left[1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 0, 1, \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right\}.$$

After realization of the corresponding transformations we obtain

$$\begin{aligned}
 P_{nn} = & -P + \frac{2\mu}{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) = -P_0. \tag{10}$$

$$P_{nr}^1 = \mu \left[\left(1 + (\vec{\nabla} \xi)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right) \right]^{-1/2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right\} = 0. \tag{11}$$

$$P_{nr}^2 = \mu \left[\left(1 + (\vec{\nabla} \xi)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right]^{-1/2} \left[\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \xi}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right] = 0. \tag{12}$$

The equations (7) in the aggregate with the kinematic boundary conditions (8), (9), the dynamic boundary conditions (10)–(12) and initial conditions represent complete statement of the problem about motion of viscous liquid with a free surface in tank, which rotates with respect to its longitudinal axis.

The system of equations (7) with the boundary conditions (8), (9) and (10)–(12) is sufficiently complex for both analytical and numerical solving, therefore, we accept some supplementary simplifying assumptions, which follow from physical sense of the problem, with the purpose of further simplification of the mathematical model of the problem.

2 Transformation of the initial statement of the problem on the basis of the concept of motions separation.

It is well-known that for steady mode of axial rotation of the tank with the angular velocity ω and for accelerating force g the free surface of liquid is determined by the following equation

$$\xi = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{R^2}{g} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \right]. \tag{13}$$

We consider such a case of motion of the structure, when the magnitude

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{g} \tag{14}$$

is small, i.e. we consider the case of relatively slow rotation of the tank. At the same time the initial velocity of rotation of liquid in connected reference frame $u_\theta = -\omega r$ is a finite value. On the basis of the analysis of the motion equations and boundary conditions on the free surface it is possible to introduce conventional separation of motion with respect to order of smallness of values.

1. We suppose that $\vec{u} = u_\theta \vec{\theta}^0$ has the order of ϵ^0 , i.e., it is finite value. Pressure P_s , which corresponds to this motion, also has the order of ϵ^0 .

2. We suppose other kinematic and dynamic parameters to be of such type that they have order of ε and we denote them in equations by the prime $u'_r, u'_\theta, u'_z, \xi', P'$.
3. We neglect values, which have order of smallness higher than ε .

Therefore, the initial problem (2)–(9), (10)–(12) disintegrated into the zero and the first approximations. Motion equations in the connected cylindrical reference frame for the zero approximation takes the form of

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) - \frac{d\omega}{dt} r \quad \text{in } \tau, \quad (15)$$

$$u_\theta = 0 \quad \text{on } \Sigma, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0 \quad \text{on } S, \quad (17)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \text{in } \tau, \quad (18)$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial r} = \frac{\rho}{r} (\omega r + u_\theta) \quad \text{in } \tau, \quad (19)$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = -\rho g \quad \text{in } \tau, \quad (20)$$

$$P_s = -P_0 \quad \text{on } S. \quad (21)$$

We note that the kinematic conditions (9) and (11) degenerate within the frame of the zero approximation.

Statement of the problem for the first approximation can be presented as

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} + \nu \left(\Delta u'_r - \frac{u'_r}{r^2} \right) + 2\omega u'_\theta, \quad \text{in } \tau; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + u'_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u'_r u_\theta}{r} + 2\omega u'_r = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta u'_\theta - \frac{u'_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} \right), \quad \text{in } \tau; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z} + \nu \Delta u'_z, \quad \text{in } \tau; \quad (24)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} + \frac{u'_r}{r} = 0, \quad \text{in } \tau; \quad (25)$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi'}{\partial \theta} u_\theta = u'_z, \quad \text{on } S; \quad (26)$$

$$P' = 2\mu \left[\frac{\partial u'_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u'_\theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right], \quad \text{on } S; \quad (27)$$

$$\mu \left[\frac{\partial u'_z}{\partial r} - \frac{\partial u'_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u'_\theta}{r} \right) \right] = 0, \quad \text{on } S; \quad (28)$$

$$\mu \left[\frac{\partial u'_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} - \frac{\partial \xi'}{\partial r} \left(\frac{\partial u'_\theta}{\partial r} - \frac{u'_\theta}{r} \right) \right] = 0, \quad \text{on } S; \quad (29)$$

$$u'_r = u'_\theta = u'_z = 0, \quad \text{on } \Sigma. \quad (30)$$

Let us note that if statement of the problem of the zero approximation describes solution of evolutionary type, which slowly changes in time, the statement of the problem of the first approximation is aimed at description of small oscillations of viscous liquid with a free surface relative to the evolutionary solution, i.e., motions of liquid described by the fields u' and P' is fast relative to motions, which are characterize by the fields u and P obtained from the solution of the problem for the zero approximation. This spacing of frequency parameters of solutions of the problem in the zero and the first approximations, smallness of liquid viscosity, as well as estimates obtained in [101] make it possible to neglect in the first approximation effects connected with viscosity in statement of the problem of dynamics of viscous rotating liquid. In other words in this case it is possible to pass from the problem statement on the basis of the Navier – Stokes equation to the problem statement based on the Euler equations. This results in the property that some boundary conditions (28)–(29) degenerate, and the rest of equations and boundary conditions become slightly simpler. application of this supplementary hypothesis transforms the problem of the first approximation to the form

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} + 2\omega u'_\theta \text{ in } \tau; \tag{31}$$

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + u'_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + u'_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u'_r u_\theta}{r} + 2\omega u'_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P'}{\partial \theta} \text{ in } \tau; \tag{32}$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z} \text{ in } \tau; \tag{33}$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_z}{\partial \theta} + \frac{u'_r}{r} = 0 \text{ in } \tau; \tag{34}$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi'}{\partial \theta} u_\theta = u'_z \text{ in } S; \tag{35}$$

$$P' = 0 \text{ in } S; \tag{36}$$

$$u'_n = 0 \text{ on } \Sigma; \tag{37}$$

where u'_n is the normal component of the vector of velocity on the surface Σ .

The solution of the problem of the zero approximation u_θ is present in the statement of the problem of the first approximation.

From the analysis of the way of separation of motions in the problem under consideration it follows, that the statement of the problem of zero approximation is aimed at investigation of character of entraining of liquid into rotation during rotational motion of the reservoir with respect to the longitudinal axis, determination of the field of pressures and distortion of the free surface of liquid for this type of rotational motion of viscous liquid. The statement of the problem of the first approximation is aimed at specification of the solution of the problem in the zero approximation and investigation of small oscillations of vortex flow of liquid with a free surface relative to the solution of the problem in the zero approximation. These small oscillations of liquid with a free surface can be caused by action of transverse forces and torques on the reservoir and by kinematic perturbations. Solving the problem of the first approximation will in addition make it possible to determine more exactly perturbations of the free surface and the field of pressure in liquid. In this connection supplementary terms will have first order of smallness (they are proportional to ε). Realization of this model will be done in Part 2 of the present article.

References

- [1] Chernousko F.L. *Motion of a rigid body with empties containing viscous liquid*, Moscow, Computer Center of Academy of Sciences of USSR, 1968, 230 p. [in Russian].
- [2] Dokuchaev L.V. *Nonlinear dynamics of spacecrafts with deformable elements*, Moscow: Mashinostroenie, 1987, 232 p. [in Russian].
- [3] Krymov V.A. *On liquid spin-up in a cylinder of small height*, Izvestiya AN SSSR. Mechanics of Liquid and Gas, 1990, N 6, pp. 43–48.
- [4] Limarchenko O.S. *Variational principle for non-stationary multi-component continuum systems*, Soviet Applied Mechanics, 1978, **14**, N 10, pp. 28–34.
- [5] Limarchenko O.S., Pakhomov I.I. *Numerical investigation of transient mode of rotation of viscous liquid with a free surface in a cylindrical tank*, Mathematical methods of investigation of applied problems of dynamics of bodies carrying liquid, Kiev, Institute of Mathematics AS of Ukrainian SSR, 1992, pp. 34–42.
- [6] Ranganathan R., Rakheya S., Sankar S. *Steady turning stability of partially filled tank vehicles with arbitrary tank geometry*, Trans. ASME. J. Dyn. Syst., Meas. and Contr., 1989, **111**, N 3, pp. 481–489.
- [7] Ribindo R.J., Palmer J.L., Scott J.E. *Flow in a partially filled rotating tapered cylinder*, J. Fluid Mech., 1989, **203**, pp. 541–555.
- [8] Slyozkin N.A. *Dynamics of viscous incompressible liquid*, Moscow: Gostekhizdat, 1955, 519 p. [in Russian].
- [9] Van Heijst G.J.F. *Spin-up phenomena in non-axis-symmetric containers*, Fluid Mech., 1989, N 206, pp. 171–191.

Evolution of Slow Rotating Viscous Liquid.

Part 2. Numerical Results.

L. BUONANNO, G. MATARAZZO, M. PECORARO
University of Salerno*

1 Construction of the algorithm of the problem of the zero approximation.

Fundamentals of the suggested algorithm for solving the problem of dynamics of viscous rotating liquid with a free surface within the zero approximation are based on results of papers and books [1–3], where mainly the cases of motion of viscous liquid, which completely fills reservoirs, were considered. On the basis of these results in the first part of this article we derive the following model of slow rotating liquid in vertical cylindrical reservoir

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) - \frac{d\omega}{dt} r \quad \text{in } \tau, \quad (1)$$

$$u_\theta = 0 \quad \text{on } \Sigma, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0 \quad \text{on } S, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \text{in } \tau, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial r} = \frac{\rho}{r} (\omega r + u_\theta) \quad \text{in } \tau, \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = -\rho g \quad \text{in } \tau, \quad (6)$$

$$P_s = -P_0 \quad \text{on } S. \quad (7)$$

Let us note that the system of equations of the zero approximation (1)–(7) disintegrates into two subsystems, i.e., the system of equations (1)–(4) for determination of u_θ , which does not include pressure and the system of equations (5)–(7) for determining the field of pressure P_s based on the known solution for u_θ .

The system of equations similar to (1)–(7) was the object of studying in works [2, 3]. According to methods of these publications we look for the solution of the problem (1)–(4) in the following form

$$u_\theta = \sum_k q_k(t) A_k(r, z), \quad (8)$$

where A_k is determined as a solution of the boundary problem with the parameter

*matarazz@diima.unisa.it

$$\lambda A + \nu(\Delta A - A/r^2) = 0 \text{ in } \tau; \quad A = 0 \text{ on } \Sigma; \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \text{ on } S. \quad (9)$$

Moreover, it follows from the condition (4) that u_θ and A are functions of only r and z (u_θ is also a function of time t), but it does not depend on θ . We supplement the boundary problem with the parameter λ by normalization requirements, which will be selected below.

We shall look for a solution of the problem (9) on the basis of the method of separation of variables. To this end we represent the function $A(r, z)$ as $A(r, z) = R(r)Z(z)$. Realization of this procedure of separation of variables gives

$$\frac{R'' + R'/r + (\lambda/\nu - 1/r^2)R}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \alpha,$$

where α is the separating parameter. Further we analyze variants $\alpha = \pm\mu^2$.

1. For $\alpha = \mu^2$ the boundary problems for determination of R and Z take the form of $R'' + R'/r + (\lambda/\nu - 1/r^2 - \mu^2)R = 0$; $R(R_\delta) = 0$, $R(0)$ is bounded;

$$Z'' + \mu^2 Z = 0; \quad Z(-H) = 0; \quad Z'(0) = 0,$$

where $R_\delta = R$ is the radius of the tank.

The solution of the problem with respect to R is $R(r) = J_1(\varkappa_k r/R)$, where $J_1(x)$ is the Bessel function of a real argument of the first order, \varkappa_k is the k -th root of the equation $J_1(\varkappa_k) = 0$. The solution with respect to z is $\sin \pi(z+H)(2l+1)/2H$, $l = 0, 1, \dots$

Thus, with taking into account the normalization multiplier selected similar to [2], the boundary eigenvalue problem (9) has a discrete set of nontrivial solutions

$$A_{km} = \frac{J_1(\varkappa_k r/R)}{J_0(\varkappa_k)} \sin \frac{\pi}{2H}(2m-1)(z+H), \quad (10)$$

which correspond to the eigenvalues

$$\lambda_{km} = \frac{\nu}{R^2} \left[\varkappa_k^2 + \frac{\pi^2 R^2}{4H^2} (2m-1)^2 \right]. \quad (11)$$

2. For $\alpha = -\mu^2$ boundary problems for determination of the function A take the form of $R'' + R'/r + (\lambda/\nu - 1/r^2 + \mu^2)R = 0$; $R(R_\delta) = 0$, $R(0)$ is bounded;

$$Z'' + \mu^2 Z = 0; \quad Z(-H) = 0; \quad Z'(0) = 0.$$

However, at that there are no nontrivial solutions with respect to z , which satisfy the mentioned boundary conditions.

Thus, the solution of the boundary problem with the parameter (9) is represented by the set of functions (10), and these solutions take place for values of the parameter λ , which are determined by the relations (11).

By substituting the series (8) into the relation (1) and by assuming potential of its termwise differentiation and integration we multiply the relation (1) by $\rho A_n d\tau$ and integrate it over τ_0 . After this we substitute similar expansion for u_θ into equations of rotation of a body relative to its longitudinal axis [2]. As a result we obtain the following infinite system of ordinary differential equations

$$\dot{q}_n + \lambda_n q_n + c_n/b_n \dot{\omega} = 0 \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(J_T + J_f)\dot{\omega} + \sum_n c_n \dot{q}_n = M_T. \tag{12}$$

Here the coefficients of equations are expressed through quadratures of eigenfunctions of the boundary problem A_k

$$c_n = \rho \int_{\tau_0} r A_n d\tau; \quad b_n = \rho \int A_n^2 d\tau; \quad d_n = c_n^2/b_n; \quad J_f = \sum_{n=1}^{\infty} d_n. \tag{13}$$

The value M_T is the moment of external forces, which are applied to tank relative to its longitudinal axis (the axis has direction opposite to the accelerating force), J_T and J_f are moment of inertia relative to the longitudinal axis of the rigid body and the "solidified" mass of liquid. For calculation of J_f we can use both the relation (12) and immediate calculation as for the rigid body, which is obtained by consequence of "freezing" of liquid. In the case of the cylindrical tank analytical calculation of quadratures gives

$$c_{nm} = -\frac{4\rho H R^3}{\varkappa_n(2m-1)}; \quad b_n = \frac{1}{2}\pi\rho H R^2; \\ d_n = 32\rho H R^4/\pi\varkappa_n^2; \quad J_f = \pi\rho H R^4/2. \tag{14}$$

We note also that the ratio entering the equation (12)

$$c_{nm}/b_n = -8R/\pi/\varkappa_n/(2m-1) \tag{15}$$

does not depend on the depth of filling.

2 Determination of the field of pressure for unsteady rotation of viscous liquid.

In order to determine the field of pressure in viscous liquid for its unsteady rotation, which is caused by rotation of the tank with respect to the longitudinal axis, we present the desired function of pressure P as

$$P_s = -P_0 - \rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - R^2/2) - \rho g \sum_n P_n(t) \frac{J_0(\varkappa_n r/R)}{J_0(\varkappa_n)}. \tag{16}$$

The following reasons became premises for selection of this form of the solution for P_s as a series by the Bessel functions. The first term of this representation is caused by the boundary condition (7), the second term is predetermined by the condition (6). Third and fourth terms according to the relations (6) must depend only on r . For convenience the solution of the problem about steady rotation is singled out separately, i.e. this is the third addend in (16). The last addend in (16) is determined from the relations (5) and represents the dynamic component of liquid pressure. In addition we dwell on substantiation of selection of the Bessel functions of zero order as coordinate functions. It follows from the boundary condition (7), which is valid on S , i.e. for $z = \xi$ that

$$\xi = \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) - \sum_n P_n(t) \frac{J_0(\varkappa_n r/R)}{J_0(\varkappa_n)}. \tag{17}$$

Here the first addend represents the steady solution. Selection of the Bessel functions of zero order as a component of the solution, which corresponds to the unsteady component of the

solution, is connected with creation of additional convenience for realization of the condition, which is set by the equation (5), as well as with their completeness.

For determination of the function of pressure and, in particular, of coefficients P_n we make use of the equation (5). By substituting the decompositions u_θ in the series with respect to the functions A_j after multiplying by A_k and integration over τ_0 we obtain from the equation (5)

$$P_k = \frac{\pi R(2p-1)}{\nu k g} \left(\omega q_{kp} + \sum_{n,m,i,j} q_{nm} q_{ij} \gamma_{nik}^r \gamma_{mjp}^z \right), \tag{18}$$

where denotations with indexes are quadratures of known functions.

Relations (18) set dependencies P_k on q_k . Since at that q_k has order of ω , it is possible to draw conclusion that P_k has order of ω^2 .

Thus, on the basis of the solution of the problem of the zero approximation (1)-(7) the coefficients P_k are uniquely determined from the relation (17). After this on the basis of the relations (17), (18) we determine the field of pressure and perturbations of the free surface of rotating viscous liquid.

3 Fundamentals of software support of the algorithm of solving the problem of the zero approximation.

In accordance with the mentioned above dynamics of the system rotating tank – viscous liquid is described by the following system of differential equations

$$\dot{q}_{nm} + \lambda_{nm} q_{nm} + c_{nm}/b_{nm} \dot{\omega} = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \tag{19}$$

$$(J_T + J_f) \dot{\omega} + \sum c_{nm} \dot{q}_{nm} = M_T. \tag{20}$$

The system of ordinary differential equations (19), (20) represents the system of equations of the first order. Equations (19), (20) are not reduced to the Cauchy form, namely supplementation of the equation (19) violates the Cauchy form. From mechanical point of view this means that in the case when rotational motion of the rigid body is given, i.e. the dependence $\omega = \omega(t)$ is known, the system of equations (19) is given in the Cauchy form and it is not necessary to reduce it to the Cauchy form numerically. If the law of rotation of the carrying body is subject to determination, but the moment of external forces acting on the body is given, then the system requires transformation to the Cauchy form at every step of calculations. It will be shown below that for exact solving the problem (19), (20) it is necessary to keep about 200–300 equations. Therefore, numerical transformation of the system of equations to the Cauchy form at every step of changing time is laborious and this essentially increases time of calculation. However, taking into account that c_{nm} and $J_f = \pi \rho R^4 H/2$ are proportional to H , the value of the coefficient at q_{nm} in the motion equations (19) can be presented as

$$\frac{c_{nm}/J_f}{1 + J_T/J_f},$$

where only the ratio J_T/J_f depends on depth. For some practically significant cases this ratio is a small value, which can be accepted as a small parameter. Let us note that in the particular case, when motion of the tank is given and the level of filling $H = \text{const}$, the system of equations

(19) admits the analytical solution by the method of variation of arbitrary constants

$$q_{nm} = \left[q_{nm}^0 - \frac{c_{nm}}{b_{nm}} \int_0^t \dot{\omega} e^{\lambda_{nm}s} ds \right] e^{-\lambda_{nm}t}. \tag{21}$$

In the case, when outflowing occur according to the given linear law $H(t) = H_0 + \Delta Ht$, the system of equations also can be integrated analytically

$$q_{nm} = q_{nm}^0 \exp \left(-\frac{\nu}{R^2} \left[\varkappa_n^2 + \frac{\pi^2 R^2}{4\Delta H H_0} \frac{(2m-1)^2}{1 + \Delta Ht/H_0} \right] \right) - \frac{c_{nm}}{b_{nm}} \times \int_0^t \dot{\omega} \exp \left(\frac{\nu}{R^2} \left[\varkappa_n^2 + \frac{\pi^2 R^2}{4H_0^2} \frac{(2m-1)^2}{1 + \frac{\Delta Hs}{H_0}} \frac{1}{1 + \Delta Ht/H_0} \right] (s-t) \right) ds. \tag{22}$$

The analytical solution of the system (22) can be obtained also for some other variants of laws of outflowing.

For numerical integration of the system of motion equation it is necessary to set initial conditions. For determination of initial conditions q_{km}^0 of the system (19) we make use of the fact that for $t = 0$ distribution of the field of velocities of particles of liquid in the connected system is $u_{\theta}^0 = -\omega_0 r$, where ω_0 is the initial value of the angular velocity. If we equate the series (8) to the initial value u_{θ}^0 , we obtain

$$-\omega_0 r = \sum_{km} q_{km}^0 J_1(\varkappa_k r/R) / J_0(\varkappa_k) \sin \frac{\pi}{2H} (2m-1)(z+H).$$

Let us multiply this equality by A_{km} and after integrating it over τ_0 , we obtain the initial conditions for the system (21)

$$q_{km}^0 = \frac{8R}{\pi \varkappa_k (2k-1)} \omega_0. \tag{23}$$

Thus, the system of ordinary differential equations (19), (20) can be integrated numerically on the basis of the Runge – Kutta method with the initial conditions (23).

It is possible also to construct the solution on the basis of the analytical expressions for solutions of the equations (19). Taking into account that the integration element in (21) depends on time and this produces inconvenience on realization of numerical integration, we change the relation (22) to the following form

$$q_{nm} = \exp \left(-\frac{\nu t}{R^2} \left[\varkappa_n^2 - \frac{\pi^2 R^2}{4\Delta H H_0} \frac{(2m-1)^2}{1 + \Delta Ht/H_0} \right] \right) \times \left\{ q_{nm}^0 \exp \left(-\frac{\nu \pi^2 t}{4H_0 \Delta H} \right) + -\frac{c_n}{b_n} \int_0^t \dot{\omega} \exp \left(\frac{\nu s}{R^2} \left[\varkappa_n^2 - \frac{\pi^2 R^2}{4H_0 \Delta H} \frac{(2m-1)^2}{1 + \frac{\Delta Hs}{H_0}} \right] \right) ds \right\} \tag{24}$$

In this representation of the solution quadratures do not contain the parameter t in the integration element.

We shall consider both variants of investigation of the system of equations (19), (20), i.e., numerical and analytical. It is necessary to note that the numerical variant possesses higher

generality, however, gives considerably greater errors. The analytical variant is grounded on particular cases of laws of outflowing, however, it makes it possible to obtain significantly more accurate result with lesser computational burden.

Table 1

R	Z= -0.05	Z= -0.2	Z= -0.4	Z= -0.6	Z= -0.8	Z= -0.95 0.12
0.12	0.602E-8	0.665E-8	0.676E-8	0.703E-8	0.784E-8	0.440E-6
0.24	0.269E-7	0.282E-7	0.284E-7	0.289E-7	0.305E-7	0.896E-6
0.36	0.553E-7	0.572E-7	0.575E-7	0.583E-7	0.607E-7	0.136E-5
0.48	0.837E-7	0.862E-7	0.866E-7	0.877E-7	0.909E-7	0.182E-5
0.60	0.524E-7	0.556E-7	0.561E-7	0.575E-7	0.615E-7	0.222E-5
0.72	-0.855E-8	-0.477E-8	-0.412E-8	-0.250E-8	0.233E-8	0.260E-5
0.84	-0.695E-7	-0.651E-7	-0.644E-7	-0.625E-7	-0.568E-7	0.297E-5
0.96	0.216E-3	0.216E-3	0.216E-3	0.216E-3	0.216E-3	0.219E-3

Results of numerical determination of the velocity profile are presented in Table 1 – Table 3 (viscosity corresponds to water). Tables show distribution of the dimensionless velocity by the radius R and height Z . At that Table 1 corresponds to time instant $t = 10^{-3}$; Table 2 and Table 3 correspond to $t = 10^{-1}$ and $t = 1$ (for values of velocities after letter E the decimal exponent of the number is indicated).

Table 2

R	Z= -0.05	Z= -0.2	Z= -0.4	Z= -0.6	Z= -0.8	Z= -0.95 0.04
0.04	0.200E-8	0.200E-8	0.311E-8	0.849E-5	0.256E-2	0.257E-1
0.16	0.803E-8	0.803E-8	0.124E-7	0.339E-4	0.102E-1	0.102E+0
0.20	0.174E-7	0.174E-7	0.230E-7	0.424E-4	0.128E-1	0.128E+0
0.32	0.463E-7	0.463E-7	0.552E-7	0.679E-4	0.204E-1	0.205E+0
0.44	0.395E-6	0.395E-6	0.407E-6	0.937E-4	0.281E-1	0.283E+0
0.56	0.612E-4	0.612E-4	0.612E-4	0.180E-3	0.359E-1	0.360E+0
0.68	0.367E-2	0.367E-2	0.367E-2	0.381E-2	0.469E-1	0.438E+0
0.80	0.712E-1	0.712E-1	0.712E-1	0.714E-1	0.117E+0	0.540E+0
0.92	0.477E+0	0.477E+0	0.477E+0	0.477E+0	0.505E+0	0.762E+0

Numerical results show the character of liquid entraining in rotation owing to interaction of liquid with lateral walls of the reservoir and its bottom. As it follows from table values, velocities change by radius and by depth monotonically except for the case $t = 10^{-3}$ (Table 1).

Table 3

R	Z= -0.05	Z= -0.2	Z= -0.4	Z= -0.6	Z= -0.8	Z= -0.95 0.12
0.12	0.173E-1	0.185E-1	0.247E-1	0.415E-1	0.742E-1	0.107E+0
0.24	0.442E-1	0.466E-1	0.583E-1	0.904E-1	0.152E+0	0.217E+0
0.36	0.920E-1	0.953E-1	0.111E+0	0.155E+0	0.240E+0	0.328E+0
0.48	0.172E+0	0.176E+0	0.195E+0	0.245E+0	0.343E+0	0.443E+0
0.60	0.297E+0	0.301E+0	0.319E+0	0.369E+0	0.465E+0	0.564E+0
0.72	0.470E+0	0.473E+0	0.488E+0	0.529E+0	0.609E+0	0.690E+0
0.84	0.684E+0	0.686E+0	0.696E+0	0.721E+0	0.770E+0	0.821E+0
0.96	0.920E+0	0.921E+0	0.923E+0	0.930E+0	0.942E+0	0.955E+0

Table 4

r	t		
	50 s	100 s	150 s
0.400	0.4000D+00	0.4000D+00	0.4000D+00
0.415	0.3145D-02	0.2387D-01	0.4939D-01
0.430	0.4990D-07	0.6822D-04	0.8485D-03
0.445	-0.1046D-07	-0.1888D-10	0.1653D-05
0.460	0.2067D-08	-0.5219D-09	-0.8100D-09
0.475	0.3826D-08	0.5152D-08	0.4835D-08
0.490	0.1122D-08	-0.1632D-08	-0.2211D-08
0.505	-0.1121D-07	-0.7261D-08	-0.5229D-08
0.520	0.7863D-08	0.7387D-08	0.6223D-08
0.535	0.9891D-08	0.5100D-08	0.3082D-08
0.550	-0.1889D-07	-0.1218D-07	-0.8361D-08
0.565	0.1005D-07	0.5147D-08	0.3065D-08
0.580	0.6613D-08	0.6359D-08	0.5153D-08
0.595	-0.1424D-07	-0.9768D-08	-0.7288D-08
0.610	0.3524D-08	0.2964D-10	-0.8368D-09
0.625	0.6638D-08	0.8358D-08	0.7859D-08
0.640	0.2631D-08	-0.1031D-08	-0.1857D-08
0.655	-0.1500D-07	-0.9981D-08	-0.7330D-08
0.670	0.8457D-08	0.7982D-08	0.6583D-08
0.685	0.1146D-07	0.5480D-08	0.2973D-08
0.700	-0.2403D-07	-0.1548D-07	-0.1063D-07
0.715	0.1391D-07	0.7556D-08	0.4845D-08
0.730	0.9884D-08	0.9442D-08	0.7833D-08
0.745	-0.1741D-07	-0.1172D-07	-0.8628D-08
0.760	0.3393D-08	-0.9006D-09	-0.1920D-08
0.775	0.6879D-08	0.9032D-08	0.8482D-08
0.790	0.2566D-08	-0.1903D-08	-0.2892D-08
0.805	-0.1823D-07	-0.1199D-07	-0.8727D-08
0.820	0.1156D-07	0.1093D-07	0.9148D-08
0.835	0.1529D-07	0.7851D-08	0.4705D-08
0.850	-0.2918D-07	-0.1880D-07	-0.1291D-07
0.865	0.1553D-07	0.7995D-08	0.4803D-08
0.880	0.1074D-07	0.1026D-07	0.8386D-08
0.895	-0.2114D-07	-0.1435D-07	-0.1064D-07
0.910	0.4712D-08	-0.4790D-09	-0.1731D-08
0.925	0.9422D-08	0.1198D-07	0.1126D-07
0.940	0.3913D-08	-0.1455D-08	-0.1738D-08
0.955	-0.2194D-07	0.4363D-08	0.4464D-05
0.970	0.1279D-06	0.1796D-03	0.2233D-02
0.985	0.8071D-02	0.6125D-01	0.1267D+00
1.000	0.1000D+01	0.1000D+01	0.1000D+01

In order to determine values of distortion of free surface of rotated viscous liquid it is possible to make use of the relation (17). Realization of this approach is laborious, since it foresees summing of a large number of terms of the series and calculation of quadratures of (21) type with wide range of change of indexes. However, because of the property that the considered values of the angular velocity are such that we suppose distortions of the free surface to be small, then for practice it is possible to carry out determination of perturbations of the free surface according to the upper bound of ξ , which is obtained as perturbation of the free surface of liquid in the steady regime.

On the basis of determination of kinematic characteristics of motion of viscous liquid with a free surface it is possible to determine from the relation (20) the value of the main moment of forces of viscous friction of liquid (dynamic moment response of liquid) by the formula $M = -\sum_n c_n \dot{\eta}_n$.

Results of calculations of the field of velocities in the case of the coaxial cylindrical tank with the ratio of the inner radius to the external radius 0.4 are given in Table 4.

The analysis of the obtained results makes it possible to draw conclusion that the most complicated problem is to construct solution for small values of time with high accuracy.

The suggested algorithm makes it possible to determine with high accuracy distribution of velocities for non-steady rotation of the tank with liquid with a free surface, perturbations of the free surface and force interaction of liquid with the rotating tank.

References

- [1] Chernousko F.L. *Motion of a rigid body with empties containing viscous liquid*, Moscow, Computer Center of Academy of Sciences of USSR, 1968, 230 p. [in Russian].
- [2] Dokuchaev L.V. *Nonlinear dynamics of spacecrafts with deformable elements*, Moscow: Mashinostroenie, 1987, 232 p. [in Russian].
- [3] Slyozkin N.A. *Dynamics of viscous incompressible liquid*, Moscow: Gostekhizdat, 1955, 519 p. [in Russian].

An identity for the material time derivative of gradients of any orders

A. Morro

University of Genoa, DIBE, Via Opera Pia 11a, 16145 Genoa, Italy

morro@dibc.unige.it

Abstract

In continuum mechanics the material (or total) time derivative often occurs because balance laws involve the time evolution at a material point of the body. Spatial gradients occur both in balance laws (surface terms) and in constitutive laws (nonlocality effects). There are then many calculations where the material time derivative and spatial gradients of any order occur simultaneously and in different order. It is the purpose of this paper to prove an identity which relates the material time derivative of the n -th order gradient, of a smooth function in a space-time domain, to the n -th order gradient of the material time derivative.

1 Introduction

The purpose of this paper is to derive an identity for gradients of any orders. Apart from the interest per se, the identity is of basic importance in the thermodynamic analysis of models with internal variables governed by constitutive equations with higher-order gradients.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be the space domain occupied by a continuous body; Ω is allowed to be time dependent. The functions under consideration are defined on the space-time domain $\Omega \times \mathbb{R}$. For quite a general setting, assume that the constitutive equations of the continuous body involve a set of variables Γ_0 (e.g. the mass density, the velocity gradient, and their space and time derivatives) and a variable (or a set of variables) φ along with the gradients up to order n . Hence the set Γ of independent variables is

$$\Gamma = (\Gamma_0, \varphi, \nabla\varphi, \dots, \underbrace{\nabla \dots \nabla}_{n} \varphi) \quad (1.1)$$

where ∇ denotes the gradient operator. It may happen that φ is the pair $\varphi = (\theta, \phi)$ of two variables θ, ϕ . One (or some) of them, θ , satisfies a balance equation

$$\dot{\theta} = \nu(\Gamma), \quad (1.2)$$

with an appropriate function ν . The evolution in time of ϕ is assumed to be governed by a differential equation of the form

$$\dot{\phi} = f(\Gamma) \quad (1.3)$$

where f is a constitutive function to be determined. In both cases the superposed dot stands for the material (or total) time derivative. This is a standard scheme in thermodynamics: in (1.1) we consider the spatial gradient of the Eulerian description, in (1.2) and (1.3) we use the time derivative of the Lagrangean description, that is the time derivative at a fixed material particle.

In the analysis of thermodynamic restrictions we need to evaluate the material time derivative of a potential such as, e.g., the entropy or the free energy. Now, for a function

$$\psi = \Psi(\Gamma)$$

we have

$$\dot{\psi} = \Psi_{\Gamma_0} \cdot \dot{\Gamma}_0 + \Psi_{\varphi} \dot{\varphi} + \Psi_{\nabla\varphi} \cdot \overline{\dot{\nabla\varphi}} + \dots + \Psi_{\nabla\dots\nabla\varphi} \cdot \overline{\dot{\nabla\dots\nabla\varphi}}$$

where the subscripts $\Gamma_0, \varphi, \dots, \nabla\dots\nabla\varphi$ denote partial differentiations and the dot means inner product. To account for the evolution equation (1.3) we need an identity which relates $\overline{\dot{\nabla\varphi}}, \dots, \overline{\dot{\nabla\dots\nabla\varphi}}$ to $\nabla\dot{\varphi}, \dots, \nabla\dots\nabla\dot{\varphi}$. It is the derivation of such an identity that is the purpose of this paper.

It is worth observing that this question is in order in any model of materials with internal variable. That is why the problem is not new. Indeed, the identity is known for $n = 1$ and reads [1]

$$\overline{\dot{\nabla\varphi}} = \nabla\dot{\varphi} - \mathbf{L}^T \nabla\varphi \quad (1.4)$$

where \mathbf{L} is the velocity gradient and the superscript T means transpose. It follows from (1.4) that

$$\overline{\dot{\nabla\varphi}} = \nabla\dot{\varphi}$$

if $\mathbf{L} = 0$ namely for bodies at rest. It seems that the identity has not been determined for $n > 1$.

Though the internal variable model is applied in many contexts [2], a renewed interest has arisen recently in connection with models of phase transition. Roughly, phase transition models involve an order parameter, ϕ say, with values in $[0, 1]$ (or $[-1, 1]$). If $\phi = 0$ only one phase occurs, if $\phi = 1$ the other phase occurs. As $\phi \in (0, 1)$ we can regard the body as a mixture of the two phases. The gradient $\nabla\phi$ is considered to account for nonlocality of the process; the energy changes smoothly rather suffering a jump discontinuity as is the case in a sharp phase transition surface. Accordingly, within a transition the order parameter, at a point, changes in time and a crucial question is how do determine the time evolution or rather the value of the time derivative $\dot{\phi}$.

There are various approaches for the determination of the evolution equation within a thermodynamic setting. In [3] the evolution equation is derived as a thermodynamic restriction. The view is made more precise and general in [4] where the order parameter is regarded as an internal variable and a model for the ice-water transition is established which allows also for superheating and supercooling. The occurring of a mass flux (diffusion) or of an extra entropy flux and the consistency of the constitutive scheme require that higher-order gradients are involved. This is shown e.g. in [5]. Further thermodynamic approaches to phase transitions are given in [6]-[10].

With this motivation we now derive the identity of higher-order gradients. Next we show how the identity enters the thermodynamic analysis.

2 The identity

It is convenient to proceed by first deriving preliminary results about n -th order partial derivatives of the product of functions f, g on Ω .

Let k_1, \dots, k_n be a permutation of $1, \dots, n$. The symbol $\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n$ means summation over all permutations k_1, \dots, k_n of $1, \dots, n$. Hence we have

Lemma 1. For any pair of C^n function f, h on Ω , the derivative $\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n}(fh)$ can be written as

$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n}(fh) = \sum_{i=0}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{1}{i!(n-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} h) \tag{2.1}$$

Proof. We prove (2.1) by induction. The representation (2.1) holds for $n = 1$. This follows at once because $n = 1$ implies $i = 0, 1$ and hence $i! = 1, (n - i)! = 1$. Accordingly $k_1 = 1$ and

$$\partial_{j_1}(fh) = f\partial_{j_1}h + (\partial_{j_1}f)h.$$

Now assume that (2.1) holds and show that the same representation holds for $n + 1$, namely

$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \partial_{j_{n+1}}(fh) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{k_1, \dots, k_n, k_{n+1}=1}^{n+1} \frac{1}{i!(n+1-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_{j_{k_{n+1}}} h) \tag{2.2}$$

We can write (2.2) by observing that $\partial_{j_{n+1}}$ may be applied to h or to f and hence

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{k_1, \dots, k_n, k_{n+1}=1}^{n+1} \frac{1}{i!(n+1-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_{j_{k_{n+1}}} h) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{n+1-i}{i!(n+1-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_{j_{n+1}} h) \\ &+ \sum_{i=0}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{i+1}{(i+1)!(n-i)!} (\partial_{j_{n+1}} \partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} h) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \left[(\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} \partial_{j_{n+1}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} h) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_{j_{n+1}} h) \right] \end{aligned}$$

By use of (2.1) it follows that

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{k_1, \dots, k_n, k_{n+1}=1}^{n+1} \frac{1}{i!(n+1-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_{i+1}}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_{j_{k_{n+1}}} h) \\ &= \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} [f\partial_{j_{n+1}}h + (\partial_{j_{n+1}}f)h] = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_{n+1}}(fh). \end{aligned}$$

As a consequence, (2.2) holds for every natural n . □

Corollary 1. For any pair of C^n functions f, h on Ω the following relation holds,

$$f\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} h = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n}(fh) - \sum_{i=1}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{1}{i!(n-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} f) (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_n}} h) \tag{2.3}$$

Proof. The $i = 0$ term in (2.1) gives

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{1}{n!} f(\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_n}} h) = f(\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} h).$$

Hence (2.1) provides the identity (2.3). \square

Corollary 2. *For any pair of C^n, C^{n+1} functions v_p, g on Ω the following relation holds,*

$$v_p \partial_p \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} (v_p \partial_p g) - \sum_{i=1}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{1}{i!(n-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} v_p) (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_p g) \quad (2.4)$$

Proof. The result follows by identifying v_p with f and $\partial_p g$ with h of Corollary 1. \square

For any function g on $\Omega \times \mathbb{R}$ the total time derivative \dot{g} is defined by

$$\dot{g} = \partial_t g + \mathbf{v} \cdot \nabla g$$

or, in Cartesian components,

$$\dot{g} = \partial_t g + v_p \partial_p g,$$

the summation over the repeated index p being understood.

Later on we need a relation for the total time derivative $\overline{\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g}$ in terms of spatial derivatives. The relation is given by the following

Proposition 1. *For any C^{n+1} function g on $\Omega \times \mathbb{R}$ and C^n functions v_p on Ω the derivative $\overline{\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g}$ is given by*

$$\overline{\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g} = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \dot{g} - \sum_{i=1}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{1}{i!(n-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} v_p) (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_p g). \quad (2.5)$$

Proof. By definition,

$$\overline{\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g} = \partial_t \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g + v_p \partial_p \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \partial_t g + v_p \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \partial_p g.$$

By Corollary 2 we have

$$\overline{\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g} = \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} (\partial_t g + v_p \partial_p g) - \sum_{i=1}^n \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n \frac{1}{i!(n-i)!} (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_i}} v_p) (\partial_{j_{k_1}} \dots \partial_{j_{k_n}} \partial_p g).$$

Since $\partial_t g + v_p \partial_p g = \dot{g}$ the result (2.5) follows. \square

As a comment to (2.5), if $n = 1$ then

$$\overline{\partial_{j_1} g} = \partial_{j_1} \dot{g} - (\partial_{j_1} v_p) (\partial_p g)$$

which is the component form of (1.4).

Also for later applications, we observe that if $n = 2, 3$ then (2.5) becomes

$$\overline{\partial_{j_1} \partial_{j_2} g} = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \dot{g} - (\partial_{j_1} \partial_{j_2} v_p) \partial_p g - (\partial_{j_1} \partial_p g) (\partial_{j_2} v_p) - (\partial_{j_1} v_p) (\partial_{j_2} \partial_p g), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \overline{\partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} g} &= \partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} \dot{g} - (\partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_{j_3} v_p) \partial_p g \\ &- (\partial_{j_1} \partial_p g) (\partial_{j_2} \partial_{j_3} v_p) - (\partial_{j_2} \partial_p g) (\partial_{j_1} \partial_{j_3} v_p) - (\partial_{j_3} \partial_p g) (\partial_{j_1} \partial_{j_2} v_p) \\ &- (\partial_{j_1} \partial_{j_2} \partial_p g) (\partial_{j_3} v_p) - (\partial_{j_1} \partial_{j_3} \partial_p g) (\partial_{j_2} v_p) - (\partial_{j_2} \partial_{j_3} \partial_p g) (\partial_{j_1} v_p) \end{aligned} \quad (2.7)$$

3 Application to thermodynamics

The phase transition is described by letting the body occur in two phases but regarding the phases as a single body to which an additional scalar variable, the phase field or order parameter ϕ , is ascribed. The balance equations for mass, momentum and energy are taken in the classical forms

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{3.1}$$

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}, \tag{3.2}$$

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r. \tag{3.3}$$

The nonlocal description inherent in the phase field model suggests that the entropy flux is not merely the ratio \mathbf{q}/θ of the heat flux \mathbf{q} over the absolute temperature θ . Accordingly we state the second law of thermodynamics, in differential form, as follows.

Second law. *The inequality*

$$\rho \dot{\eta} \geq -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} + \mathbf{k} \right) + \frac{\rho r}{\theta} \tag{3.4}$$

must hold, at each point $\mathbf{x} \in \Omega$ and time $t \in \mathbb{R}$, for all fields $\Lambda = (\rho, \mathbf{v}, \mathbf{T}, e, \mathbf{q}, \theta, \mathbf{k}, \mathbf{b}, r)$, of \mathbf{x} and t , compatible with the balance equations (3.1)-(3.3).

The extra-flux \mathbf{k} is regarded as unknown and has to be determined so that the second law holds. It is subject to the boundary condition

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

so that the second law for the whole body takes the standard form

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \eta \, dv \geq - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\Omega} \frac{\rho r}{\theta} \, dv.$$

Letting $\psi = e - \theta \eta$ we can write the inequality (3.4) in the form

$$-\rho(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta + \theta \nabla \cdot \mathbf{k} \geq 0. \tag{3.5}$$

To one of the two phases we associate a phase field ϕ which, at any point $\mathbf{x} \in \Omega$ and time t , provides the concentration of the phase. The constitutive properties of the material are expressed by choosing $\Gamma_0 = \rho$ and φ the pair (θ, ϕ) . Hence we let $\mathbf{T}, \mathbf{q}, \psi, \eta, \mathbf{k}$, in (3.5), be functions of Γ .

The generalization to M phases, and hence to M order parameters ϕ_1, \dots, ϕ_M can be made by formal changes and the constraint $\phi_1 + \dots + \phi_M = 1$.

3.1 Thermodynamic restrictions

The relations (1.4), (2.6), (2.7) are now applied to prove the following statement.

Proposition 2. *The functions $\psi(\Gamma), \eta(\Gamma), \mathbf{T}(\Gamma), \mathbf{q}(\Gamma), \mathbf{k}(\Gamma)$ are compatible with the second law in the form (3.5) if and only if*

$$\eta = -\psi_{\theta}, \quad \psi_{\nabla\theta} = 0, \quad \psi_{\nabla\nabla\theta} = 0, \quad \psi_{\nabla\nabla\nabla\theta} = 0, \tag{3.6}$$

$$\psi_{\nabla\nabla\phi} = 0, \quad \psi_{\nabla\nabla\nabla\phi} = 0, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{T} = -\rho^2\psi_p\mathbf{1} - \rho\nabla\phi \otimes \psi_{\nabla\phi}, \tag{3.8}$$

$$-\rho\psi_{\phi f} - \rho\psi_{\nabla\phi} \cdot \nabla f - \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta + \theta\nabla \cdot \mathbf{k} \geq 0. \tag{3.9}$$

Proof. We evaluate $\dot{\psi}$ through the chain rule for $\psi(\Gamma)$, replace $\dot{\rho}$ with $-\rho\nabla \cdot \mathbf{v}$ in view of (3.1), and apply (1.4) and (2.6) with $g = \theta, \phi$. Hence we can write (3.5) as

$$\begin{aligned} &-\rho(\psi_{\theta} + \eta)\dot{\theta} + (\mathbf{T} + \rho^2\psi_p\mathbf{1}) \cdot \mathbf{L} - \rho \sum_{\alpha} \psi_{\phi f} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta + \theta\nabla \cdot \mathbf{k} \\ &\quad - \rho\psi_{\nabla\theta} \cdot \overline{\nabla\dot{\theta}} - \rho\psi_{\nabla\nabla\theta} \cdot \overline{\nabla\nabla\dot{\theta}} - \rho\psi_{\nabla\nabla\nabla\theta} \cdot \overline{\nabla\nabla\nabla\dot{\theta}} \\ &\quad - \rho\psi_{\nabla\phi} \cdot \overline{\nabla\dot{\phi}} - \rho\psi_{\nabla\nabla\phi} \cdot \overline{\nabla\nabla\dot{\phi}} - \rho\psi_{\nabla\nabla\nabla\phi} \cdot \overline{\nabla\nabla\nabla\dot{\phi}} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

The values of $\dot{\theta}, \overline{\nabla\dot{\theta}}, \overline{\nabla\nabla\dot{\theta}}, \overline{\nabla\nabla\nabla\dot{\theta}}$ occur linearly and can be taken arbitrarily. This implies that (3.10) holds only if the relations (3.6) hold. Now by (2.6) and (2.7) applied to $g = \phi$ we see that

$$\overline{\nabla\nabla\dot{\phi}} = -(\nabla\nabla v_p)\partial_p\phi + \dots, \quad \overline{\nabla\nabla\nabla\dot{\phi}} = -(\nabla\nabla\nabla v_p)\partial_p\phi + \dots,$$

the dots denoting the remaining terms. The arbitrariness and linearity of $\nabla\nabla v_p$ and $\nabla\nabla\nabla v_p$ allows us to conclude that (3.10) holds only if the relations (3.7) holds. Apply (1.4) to $g = \phi$ and observe that

$$\overline{\nabla\dot{\phi}} = \nabla f - \mathbf{L}^T\nabla\phi.$$

Substitution in the inequality (3.10) gives

$$(\mathbf{T} + \rho^2\psi_p\mathbf{1} + \rho\nabla\phi \otimes \psi_{\nabla\phi}) \cdot \mathbf{L} - \rho\psi_{\phi f} - \rho\psi_{\nabla\phi} \cdot \nabla f - \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta + \theta\nabla \cdot \mathbf{k} \geq 0.$$

The arbitrariness and linearity of \mathbf{L} requires that (3.8) hold. The remaining inequality is just (3.9).

Conversely, the validity of (3.6) to (3.9) is sufficient for the validity of (3.5). \square

The analysis of (necessary) restrictions placed by (3.9) can be performed by evaluating $\nabla \cdot \mathbf{k}$ and examining the occurrence of arbitrary quantities. An interesting set of results follows by looking for sufficient conditions which are based on the assumption

$$\mathbf{k} = \frac{\rho}{\theta}\psi_{\nabla\phi f}.$$

This view is followed in [4, 11] and can be generalized to the dependence on gradients of order n .

4 Conclusions

The identity (2.5) shows that, unless the field \mathbf{L} is identically zero, as we might have expected

$$\underbrace{\overline{\nabla\dots\nabla\dot{\phi}}}_n \quad \text{and} \quad \underbrace{\nabla\dots\nabla\dot{\phi}}_n$$

are unequal. What is more, (2.5) provides the difference between the two expressions and that is quite involved. The application shows how the identity is essential whenever gradients occur along with the material time derivative, which is a standard case in continuum mechanics.

References

- [1] Gurtin M. E., Polignone D., Vinals J. 1996, Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 6, 815-831.
- [2] Maugin G.A. 1990, Internal variables and dissipative structures, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 15, 173-192.
- [3] Wang S.-L., Sekerka R.F., Wheeler A.A., Murray B.T., Coriell S.R., Braun R.J., McFadden G.B. 1993, Thermodynamically-consistent phase-field models for solidification, *Physica D* 69, 189-200.
- [4] Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. 2006, A thermodynamic approach to non-isothermal phase-field evolution in continuum physics, *Physica D* 214, 144-156.
- [5] Ván P. 2005, The Ginzburg-Landau equation as a consequence of the second law, *Continuum Mech. Thermodyn.* 17, 165-169.
- [6] Gurtin M.E. 1996, Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance, *Physica D* 92, 178-192.
- [7] Brokate M., Sprekels J. 1996, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Berlin.
- [8] Fried E., Gurtin M.E. 1993, Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter, *Physica D* 68, 326-343.
- [9] Frémond M. 2001, *Non-smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin.
- [10] Alt H.W., Pawlow I. 1992, A mathematical model of dynamics of non-isothermal phase separation, *Physica D* 59 (1992) 319-409.
- [11] Morro A. 2006, Non-isothermal phase-field models and evolution equation, *Arch. Mech.* 58, 207-221.

ON WEAK $W^{1,1}$ CONVERGENCE OF PLANAR HOMEOMORPHISMS

G. MOSCARIELLO AND C. SBORDONE

ABSTRACT. Let $f_j : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ be a sequence of homeomorphisms having finite distortion and converging weakly in $W_{loc}^{1,1}$. In this paper we study the convergence of the inverse mappings $f_j^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ in $W_{loc}^{1,1}$.

1. INTRODUCTION

Let $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ be a homeomorphism in the Sobolev class $W_{loc}^{1,1}(\Omega; \Omega')$, where $\Omega, \Omega' = f(\Omega)$ are bounded domains. Assume further that $Df(x)$ vanishes almost everywhere in the zero set of the Jacobian determinant $J_f(x) = \det Df(x)$. Since classically f is almost everywhere differentiable in Ω ([1]) then either $J_f(x) \geq 0$ or $J_f(x) \leq 0$ a.e.. Hence, under previous assumptions, inequality

$$(1.1) \quad |Df(x)|^2 \leq K(x)J_f(x)$$

holds a.e. $x \in \Omega$, where $1 \leq K(x) < \infty$ a.e. For simplicity, we then say that f is a planar homeomorphism of finite distortion according to a recent terminology (see [3], [5], [8]). The smallest function for which (1.1) holds is called the *distortion* of f . We will identify it with the following Borel function

$$(1.2) \quad K_f(x) = \begin{cases} \frac{|Df(x)|^2}{J_f(x)} & \text{if } f \text{ is diff. in } x \text{ and } J_f(x) > 0, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A result from [3] shows that, if $f \in W_{loc}^{1,1}(\Omega; \Omega')$ is a homeomorphism of finite distortion, then also the inverse f^{-1} belongs to $W_{loc}^{1,1}(\Omega'; \Omega)$ and it has finite distortion. Moreover in [2] the distortion of the inverse f^{-1} has been identified as

$$K_{f^{-1}}(y) = K_f(f^{-1}(y))$$

for a.e. $y \in \Omega'$.

This identity is specific of the bidimensional case $n = 2$.

Now, let $f_j \in W_{loc}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ be a sequences of homeomorphisms of finite distortion, such that $f_j \rightharpoonup f$ in $W_{loc}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2)$. In this paper, assuming that also f is a homeomorphism, we prove the weak convergence of the inverse mappings (f_j^{-1}) to f^{-1} .

In the sequel we will denote by $\text{Hom}(\Omega, \Omega')$ the set of all homeomorphisms $f : \Omega \rightarrow \Omega' = f(\Omega)$.

The main result is the following:

Theorem 1. *Let $f_j, f \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap \text{Hom}(\Omega, \Omega')$, with $f_j \rightharpoonup f$ weakly in $W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ and $f_j \rightarrow f$ uniformly. Assume that*

$$(1.3) \quad |Df_j(x)|^2 \leq K(x)J_{f_j}(x) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega,$$

where $K : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ is a Borel. Then the maps (f_j^{-1}) converge weakly in $W_{loc}^{1,1}(\Omega'; \mathbb{R}^2)$ to a function $g \in W_{loc}^{1,1}(\Omega'; \mathbb{R}^2)$ such that

$$f(g(y)) = y \quad \text{for a.e. } y \in \Omega.$$

If, in addition, $f \in \text{Hom}(\Omega, \Omega')$ then

$$f_j^{-1} \rightarrow g = f^{-1} \quad \text{locally uniformly}$$

2. NOTATIONS AND PRELIMINARY RESULTS

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a domain. Every continuous mapping $f \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ has finite partial derivatives almost everywhere (because it is absolutely continuous on almost every line parallel to the coordinate axes, see e.g. [1]) and therefore we have the following

Theorem 2. *Let $f \in W_{loc}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ be a homeomorphism. Then f is differentiable almost everywhere.*

If $A \subset \Omega$ is a measurable set and g is a homeomorphism, such g is differentiable at every point of A , then

$$(2.1) \quad \int_A \eta(g(x)) |J_g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \eta(y) dy$$

for every nonnegative Borel function $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Here J_g is the determinant Jacobian of g . Inequality (2.1) is a consequence of the area formula for Lipschitz mappings ([?], [7]).

Let us remark that even the inverse of a Lipschitz homeomorphism f can fail to belong to $W_{loc}^{1,1}$. Indeed, let us briefly discuss the one-dimensional case. Consider the usual Cantor ternary function u is continuous, non decreasing, constant on each complementary interval of the ternary Cantor set and fails to be absolutely continuous. Let now $g(x) = x + u(x)$ on $(0, 1)$. Then also g fails to be absolutely continuous and so g does not belong to $W_{loc}^{1,1}((0, 1); \mathbb{R}^2)$. On the other hand, the Lipschitz function $h = g^{-1}$ maps $(0, 2)$ homeomorphically onto $(0, 1)$. If we analyze the situation more carefully, we notice that the crucial fact here is that the differential of h vanishes in a set of positive measure.

In two dimension, the mapping $f(x_1, x_2) = (h(x_1), x_2)$, where h is as above, provides us with a Lipschitz homeomorphism whose inverse fails to belong to $W_{loc}^{1,1}$.

Notice that the Jacobian $J_f(x)$ of f vanishes in a set of positive area, whereas $|Df(x)|$ is positive a.e..

As we state in the introduction, in the sequel we will denote by $\text{Hom}(\Omega, \Omega')$ the set of all homeomorphisms $f : \Omega \rightarrow \Omega' = f(\Omega)$.

Definition 3. *A map $f \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap \text{Hom}(\Omega, \Omega')$ has finite distortion if $Df(x)$ vanishes almost everywhere in the zero set of J_f .*

Notice that, if $f \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap \text{Hom}(\Omega, \Omega')$, by Theorem 2 either $J_f(x) \geq 0$ or $J_f(x) \leq 0$ a.e..

For simplicity, let us assume from now on that $J_f(x) \geq 0$ a.e.. Then Definition 3 implies that

$$(2.2) \quad |Df(x)|^2 \leq K(x) J_f(x) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega,$$

where

$$(2.3) \quad K_f(x) = \begin{cases} \frac{|Df(x)|^2}{J_f(x)} & \text{if } J_f(x) > 0, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Combining Theorem 1.2 of [3] and Theorem 2.1 of [2] we can state the following result

Theorem 4. *If $f \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap \text{Hom}(\Omega, \Omega')$ has finite distortion, then also $f^{-1} \in W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ has finite distortion and*

$$(2.4) \quad |Df^{-1}(y)|^2 \leq K_f(f^{-1}(y))J_{f^{-1}}(y)$$

a.e..

Notice that, since f is a homeomorphism, $K_f(x)$ and $K_f(f^{-1}(y))$ defined at (2.2) and (2.4) respectively, are Borel functions. Finally, let us recall the following

Lemma 5. *Let $f_j, f \in \text{Hom}(\Omega, \Omega')$ be such that $f_j \rightarrow f$ uniformly in Ω . Then $f_j^{-1} \rightarrow f^{-1}$ locally uniformly in Ω' .*

3. PROOF OF THEOREM 1

Proof of Theorem 1. We divide the proof in 2 steps.

Step 1

Let us first prove that the sequence $\{Df_j^{-1}\}$ is equi-integrable. For any $j \in \mathbb{N}$ by Theorem 4, $f_j^{-1} \in W_{loc}^{1,1}(\Omega'; \Omega)$ and

$$(3.1) \quad |Df_j^{-1}(y)|^2 \leq K(f_j^{-1}(y))J_{f_j^{-1}}(y)$$

Consider, for $n \in \mathbb{N}$, the measurable set $F_n = \{x \in \Omega : K(x) > n\}$. For any measurable set $E \subset \Omega'$, we have

$$(3.2) \quad \int_E |Df_j^{-1}(y)| dy = \int_{E \setminus f_j(F_n)} |Df_j^{-1}(y)| dy + \int_{E \cap f_j(F_n)} |Df_j^{-1}(y)| dy = I_1 + I_2.$$

If $y \in E \setminus f_j(F_n)$, then $K(f_j^{-1}(y)) \leq n$, hence, by (3.1) and Hölder inequality

$$(3.3) \quad I_1 \leq \sqrt{n} \int_E \sqrt{J_{f^{-1}}(y)} dy \leq \sqrt{n} \sqrt{|E|} \sqrt{|\Omega|}.$$

To estimate I_2 , define for $j, n \in \mathbb{N}$

$$E_{j,n} = \{y \in E \cap f_j(F_n) : J_{f_j^{-1}}(y) > 0\},$$

and let $A_{j,n} \subset E_{j,n}$ be a Borel set such that $|A_{j,n}| = |E_{j,n}|$. Then

$$(3.4) \quad I_2 = \int_{A_{j,n}} \frac{|Df_j^{-1}(y)|}{J_{f_j^{-1}}(y)} J_{f_j^{-1}}(y) dy \leq \int_{A_{j,n}} \psi_j(f_j^{-1}(y)) J_{f_j^{-1}}(y) dy$$

where

$$\psi_j(x) = \frac{|Df_j^{-1}(y)|}{J_{f_j^{-1}}(y)}$$

is a non negative Borel function. Thus by a change of variable, since $f_j^{-1}(A_{j,n}) \subseteq f_j^{-1}(E_{j,n}) \subseteq F_n$, we have by (3.4)

$$(3.5) \quad I_2 = \int_{f_j^{-1}(A_{j,n})} \psi_j(x) dx = \int_{f_j^{-1}(A_{j,n})} |\text{adj } Df_j(x)| dx \leq \int_{F_n} |Df_j(x)| dx,$$

Then by (3.2), (3.3) and (3.5), we conclude that for any measurable set $E \subset \Omega'$ and for any $j, n \in \mathbb{N}$

$$\int_E |Df_j^{-1}(y)| dy \leq \sqrt{n} \sqrt{|E|} \sqrt{|\Omega|} + \int_{F_n} |Df_j(x)|^{n-1} dx.$$

We recall that $K(x) < \infty$ a.e. in Ω and then $|F_n| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Moreover, the equiintegrability of the sequence $\{|Df_j|\}$ yields

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_{F_n} |Df_j(x)| dx = 0.$$

Then the result follows if, fixed $\varepsilon > 0$, we choose $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \int_{F_{n_\varepsilon}} |Df_j(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

and $\delta > 0$ such that

$$\sqrt{n_\varepsilon} \sqrt{|\Omega|} \sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Step 2

By the equiintegrability of the sequence $\{|Df_j^{-1}|\}$, for a subsequence we have

$$f_{j_r}^{-1}(y) \rightarrow g(y) \quad \text{for a.e. } y \in \Omega'$$

for a function $g \in W_{loc}^{1,1}(\Omega', \Omega)$, hence the uniform convergence of f_j to f implies

$$f(g(y)) = y \quad \text{for a.e. } y \in \Omega'.$$

In particular, if f is a homeomorphism we obtain

$$f_{j_r}^{-1} \rightarrow f^{-1} \quad \text{uniformly}$$

and also by compactness reasons the whole sequence f_j^{-1} satisfies

$$f_j^{-1} \rightarrow f^{-1} \quad \text{uniformly}$$

and weakly in $W_{loc}^{1,1}(\Omega', \Omega)$. □

REFERENCES

- [1] F. W. Gehring & G.J. Lehto, *On the total differentiability of functions of a complex variable*, An. Acad. Sci. Fenn. AI, **272** (1959),
- [2] L. Greco, C. Sbordone & C. Trombetti, *A note on planar homeomorphisms* (submitted)
- [3] S.Hencl and P.Koskela, *Regularity of the Inverse of a Planar Sobolev Homeomorphism*, Arch. Rational Mech. Anal. **180** (2006), 75–95.
- [4] S.Hencl, P.Koskela and J.Malý, *Regularity of the Inverse of a Sobolev Homeomorphism in Space*, (2006) preprint.
- [5] S.Hencl, P.Koskela and J.Omminen, *A note on extremal mappings of finite distortion*, Math. Research Letter **12** (2005), 231–238.
- [6] T.Iwaniec and G.Martin, *Geometric function theory and nonlinear analysis*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxfors, 2001.
- [7] J. Maly, *Lectures on change variables in integral*, Preprint 305, Dept. Math. Univ. of Helsinki (1984).
- [8] J. Omminen, *Regularity of the Inverse of spatial mappings of finite distortion*, Calc. Var. **26**(3) (2006), 331–341.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA ED APPLICAZIONI, VIA CINTIA, 80126 NAPOLI
E-mail address: gmoscari@unina.it

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA ED APPLICAZIONI, VIA CINTIA, 80126 NAPOLI
E-mail address: sbordone@unina.it

.....
.....

ELASTIC AND POST-ELASTIC MECHANICAL RESPONSE OF FGMC APPLICATIONS TO EMERGING TECHNICAL PROBLEMS

L.Nunziante*, M.Fraldi*, F.Carannante†, M.C.Pernice*

* Dept. Structural Engineering-University of Napoli Federico II - via Claudio 21, 80125 NAPOLI

† Dept. of Aerospace Engineering - II University of Napoli:- via Roma 29, Aversa, NAPOLI.

Acknowledgment

Se si potesse godere in ogni facoltà e raggruppamento, di pilastri solidi come la didattica e la ricerca avanzata che Pasquale Renno ci ha fatto sempre conoscere con signorilità modestia e discrezione per diversi decenni, potremmo essere più fiduciosi nell'avvenire di questa Università.

L.Nunziante

Summary.

Mathematical physics and mechanics are nowadays fundamental tools in tackling and solving advanced problems. In this paper, some modern engineering open problems related to Functionally Graded Materials (FGM) will be summarised. The results shown below were obtained by the research staff of the Department of Structural Engineering, University of Napoli Federico II, in recent years, with international collaborations, too. A couple of applications to outstanding technical problems of modern engineering are finally summarised.

1) FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL

The Functionally Graded Material, FGM, are composite materials where the composition or the microstructure are locally varied so that a certain variation of the material properties is achieved. They are often met in many biological tissues, as well as fabricated by continuously or piece-wise assembled composite changing volume fractions and elastic moduli of two or more basic materials in several directions. As examples of some natural materials (Fig.1), the hard structure of bone tissue or the soft tissue of arterial walls, or also the wood, can be regarded as FGM.

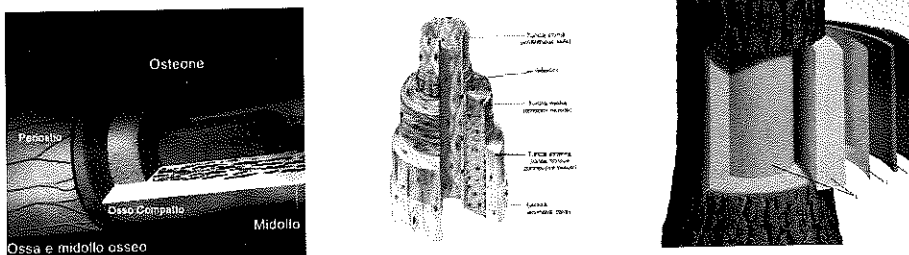


Fig.1

In the framework of the Theory of Elasticity, FGMCs are mostly treated as non-homogeneous materials with material constant that vary continuously or in a piece-wise continuous manner (*laminated composites*) along one spatial direction.

In the following, it will be shown a general approach to construct exact elastic solutions for FGMC cylinders, which are particular types of FGMC materials, made by a central core and by n surrounding cylindrical hollow homogeneous and isotropic phases (Fig.2). The central core is a homogeneous and isotropic material [38]. The n surrounding phases are made of homogeneous isotropic or anisotropic materials. The anisotropy here considered refers to cylindrical orthotropy [36].

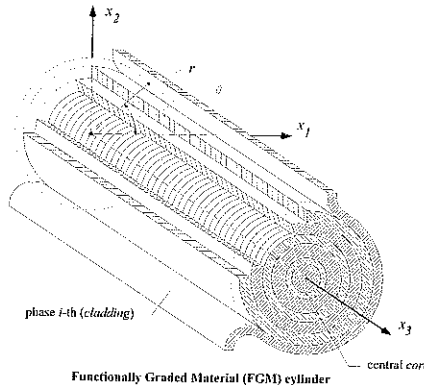


Fig.2

Special attention will be given in the following to particular types of solutions for the FGMC, which present *no-decaying* of selected mechanical quantities and in particular of the axial strain ϵ_{33} , being x_3 the axis of the laminated cylinder. As matter of fact, these solutions are of outstanding importance in a few of modern engineering applications, as that of the new optical fibre distributed strain sensors, and that of compressed columns restored by means of fibre reinforced polymers sheets.

It will be furnished a mathematical procedure for obtaining analytical elastic solutions for the above mentioned axis-symmetrical n -plies-Functionally Graded Material Cylinders (n -FGMCs). With reference to the generic i -th phase of the material, the classical *Boussinesq-Somigliana-Galerkin* vector [16-37] is specialized to torsionless composite cylinders, also characterized by *no-decaying* of the axial strain: following this way, a special form [13] of the bi-harmonic Love's function $\chi^{(i)}(r, x_3)$ is finally obtained. It is also demonstrated that – for these problems – is always possible to reduce the differential boundary value problem (BVP) to an equivalent linear algebraic one, first solving an *in cascade* one-dimensional Euler-like differential system (*field equations*) and then writing the *boundary conditions* through a $(6n + 4)$ -order square matrix \mathbb{P} [14].

1.1 FGMC's analytical solutions

The solution for an isotropic and homogeneous linearly elastic material, here representing the generic phase of the FGMC when isotropic, in absence of body forces and under axis-symmetrical boundary conditions, can be written in terms of the Love's function $\chi = \chi(r, x_3)$ [10-13-14-16], by referring to a cylindrical coordinate system $\{r, \vartheta, x_3\}$, where x_3 is the axis of the FGMC cylinder. The displacement can be reduced to the form:

$$u_r = u_r(r, x_3), \quad u_\theta = 0, \quad u_3 = u_3(r, x_3) \quad (1)$$

while the stresses become

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}(r, x_3), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r, x_3), \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}(r, x_3), \quad \sigma_{r3} = \sigma_{r3}(r, x_3), \\ \sigma_{\theta 3} &= \sigma_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Introducing the superscript (i) for recalling the i -th phase constituting the n -plies FGM cylinder, we will denote with $\nu^{(i)}$ and $E^{(i)}$ the Poisson's ratio and Young's modulus. By writing $u_r^{(i)} = U^{(i)}$ and $u_3^{(i)} = W^{(i)}$, being $u_\theta^{(i)} = V^{(i)} = 0$ due to axis-symmetrical symmetry condition, compatibility equations take the form:

$$\varepsilon_{rr}^{(i)} = U_{,r}^{(i)}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{U^{(i)}}{r}, \quad \varepsilon_{33}^{(i)} = W_{,3}^{(i)}, \quad \varepsilon_{r3}^{(i)} = \frac{1}{2}(U_{,3}^{(i)} + W_{,r}^{(i)}), \quad \varepsilon_{\theta 3}^{(i)} = \varepsilon_{r\theta}^{(i)} = 0. \quad (3)$$

Finally, with reference to the generic “ i -th” phase of the FGM cylinder, we can express the displacements as function of the Love's function as follows

$$U^{(i)} = -\frac{1}{2\mu^{(i)}} \chi_{,r3}^{(i)}, \quad W^{(i)} = \frac{1}{2\mu^{(i)}} \left[\frac{\mu^{(i)}}{(\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})} \nabla^2 \chi^{(i)} + \chi_{,rr}^{(i)} + r^{-1} \chi_{,r}^{(i)} \right] \quad (4)$$

and the no vanishing stresses are therefore

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)} &= (\nu^{(i)} \nabla^2 \chi^{(i)} - \chi_{,rr}^{(i)})_{,3}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = (\nu^{(i)} \nabla^2 \chi^{(i)} - r^{-1} \chi_{,r}^{(i)})_{,3}, \\ \sigma_{33}^{(i)} &= [(2 - \nu^{(i)}) \nabla^2 \chi^{(i)} - \chi_{,33}^{(i)}]_{,3}, \quad \sigma_{r3}^{(i)} = [(1 - \nu^{(i)}) \nabla^2 \chi^{(i)} - \chi_{,33}^{(i)}]_{,r}, \end{aligned} \quad (5)$$

where, for our convenience, we use the elastic moduli $E^{(i)}$ and $\nu^{(i)}$ as functions of the Lamé coefficients, by invoking the well-known relations:

$$E^{(i)} = \frac{\mu^{(i)}(2\mu^{(i)} + 3\lambda^{(i)})}{(\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})}, \quad \nu^{(i)} = \frac{\lambda^{(i)}}{2(\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})}. \quad (6)$$

The hypothesis of *no decaying* of the ε_{33} passing from one phase to another (no variation in the radius direction) yields to choose the bi-harmonic Love's function $\chi^{(i)}$ with a selected mathematical form. In particular, in order to obtaining axis-symmetrical elastic solutions for cylindrical piece-wise homogeneous FGM characterized by no decaying of the axial strain ε_{33} along the radius direction, only combination of *axial forces* at the object's ends, *radial pressures* that vary linearly along the x_3 axis and uniform *shear tractions* whose direction is x_3 , are admissible [26-27-36]. In particular, it was proved that the Love's function for this case assumes the form

$$\chi^{(i)} = \sum_{k=0}^4 x_3^k f_k^{(i)}(r), \quad (7)$$

in which $f_k^{(i)}(r)$ are scalar functions to determine.

Firstly, the differential conditions required for $f_k^{(i)}(r)$ to satisfy the field equation in the generic FGMC phase have to be established. To obtain this, we can apply the fourth-order differential operator ∇^4 to $\chi^{(i)}$ and, by collecting the terms in x_3^k , we can write in a compact form:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \chi^{(i)}(r, x_3) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^5 \{x_3^k [(f_{k,r}^{(i)} - r f_{k,rr}^{(i)} + 2r^2 f_{k,rrr}^{(i)} + r^3 f_{k,rrrr}^{(i)}) + \\ + \frac{2(k+2)!}{k!} (\sum_{j=4}^5 (1-\delta_{jk})) r^2 (r f_{k+2,r}^{(i)})_r + (k+4)! (\sum_{m=2}^5 (1-\delta_{mk})) r^3 f_{k+4}^{(i)}]\} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

where δ_{jk} and δ_{mk} are the usual Kronecker delta operators. It was already proved that the solution can be obtained as follows

$$f_k^{(i)}(r) = h_k^{(i)}(r) + p_k^{(i)}(r), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

where $h_k^{(i)}(r)$ is the homogeneous solution and $p_k^{(i)}(r)$ represents the particular solution related to the specific differential problems. As reported in detail in [14], some algebraic coefficients appear in the expression of $f_k^{(i)}(r)$, say $C_{n/k}^{(i)}$, that must be read in this manner: the superscript (i) is referred to the material phase i -th, the first subscript n tells us the number of the constant, the second subscript k is related to the corresponding function $f_k^{(i)}(r)$ and therefore to the power in x_3^k .

With reference to the *no-decaying* case, in which $\varepsilon_{33}^{(i)} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 x_3, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, it is possible to prove that the final expression of the displacement field in the generic hollow phase of the FGMC reduces to

$$\begin{aligned} U^{(i)} = \frac{1}{\mu^{(i)} r} \left[-\frac{C_{1/1}^{(i)}}{2} - C_{1/2}^{(i)} x_3 + \frac{x_3^2 (2\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})}{\mu^{(i)}} \left(C_{3/1}^{(i)} + \frac{2}{3} C_{3/2}^{(i)} x_3 \right) \right] + \\ - \frac{r}{\mu^{(i)}} \left[C_{2/1}^{(i)} + C_{3/1}^{(i)} \left(\log r + \frac{1}{2} \right) + x_3 \left(2C_{2/2}^{(i)} + C_{3/2}^{(i)} + 2C_{3/2}^{(i)} \log r \right) \right], \\ W^{(i)} = \varepsilon_0 x_3 + \frac{\varepsilon_1 x_3^2}{2} + \left[\frac{C_{1/2}^{(i)} \mu^{(i)} + 2C_{3/0}^{(i)} (2\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})}{(\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})} + \frac{C_{3/2}^{(i)} (\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})}{2\mu^{(i)}} r^2 \right] \frac{\log r}{\mu^{(i)}} + \\ + \left[\frac{4C_{2/2}^{(i)} (\mu^{(i)} + \lambda^{(i)}) - \varepsilon_1 \mu^{(i)} (2\mu^{(i)} + \lambda^{(i)})}{4\mu^{(i)2}} \right] r^2 + u_0^{(i)} \quad i \equiv \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{9}$$

while, for the solid phase, we obtain

$$\begin{aligned} U^{(0)} = -\frac{r}{\mu^{(0)}} \left(C_{2/1}^{(0)} + 2x_3 C_{2/2}^{(0)} \right), \\ W^{(0)} = \varepsilon_0 x_3 + \frac{\varepsilon_1 x_3^2}{2} + \left[\frac{4C_{2/2}^{(0)} (\mu^{(0)} + \lambda^{(0)}) - \varepsilon_1 \mu^{(0)} (2\mu^{(0)} + \lambda^{(0)})}{4\mu^{(0)2}} \right] r^2. \end{aligned} \tag{10}$$

where the superscript “(0)” stands for the *core*.

Strains and stresses can be then written by using the classical compatibility and constitutive equations, respectively.

The complete set of solutions producing invariance of axial strain among the different phases of the FGMC can be reduced to an algebraic problem, governed by a $(6n + 4) \times (6n + 4)$ coefficient matrix and then it can be solved by means of an analytical or numerical matrix-based procedure. Indeed, we can collect the known terms in the *load* vector \mathbf{L}

$$\mathbf{L}^T = \{0, \dots, p_0, p_1, \tau_0, N\} \tag{11}$$

where N is the total axial force applied at $x_3 = 0$ and the terms p_0, p_1, τ_0 represent the possible lateral uniform pressure, the slope of a linear distribution of lateral pressure and anti-plane shear stresses applied on the external boundary of the FGMC, respectively.

The unknown parameters $C_{n/k}^{(i)}$, here renamed as $A_k^{(i)}$, can be collected in the vector \mathbf{X} as follows

$$\mathbf{X}^T = \{A_4^{(0)}, A_5^{(0)}, A_1^{(1)}, A_2^{(2)}, \dots, A_6^{(1)}, \dots, A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, A_3^{(i)}, A_4^{(i)}, A_5^{(i)}, A_6^{(i)}, \dots, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_6^{(n)}, \varepsilon_0, \varepsilon_1\} \tag{12}$$

so that the problem becomes

$$\mathbb{P} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{L} \tag{13}$$

where \mathbb{P} is a $(6n + 4) \times (6n + 4)$ square matrix containing the coefficients $P_{n/m}$, which are functions of both the radii and the elastic moduli of the phases.

The analytical solutions obtained for the stress and strain fields, are of great theoretical interest and practical importance, because they may serve as guide in design optimization problems as well as in the interpretation of the mechanical behaviour of multi-layered tubes and micro-structures [1/9], [11-14-15].

In particular, the solutions obtained are utilized for interpreting the dispersion phenomena and the mechanical behaviour of the interaction between *optical fibres*, their coatings and the material support, when these fibres are attached to the structures for determining continuous profiles of strain measurements by means of optic-electronic techniques based on the Brillouin Scattering Effect (BSE), [17/36], as shown in the follow.

2. APPLICATION TO OPTICAL FIBRES

In the light of the above mentioned results, the mechanical characterization of the response of optical fibre can be regard as an application to the proposed solving strategy for axis-symmetrical n -FGMCs to the case of three-phases laminated composite, made by a glass central core, a cladding hollow polymeric phase and an external hollow cylindrical material support, in order to interpret some dispersion phenomena appearing in the mechanical interaction between an optical fibre (core and cladding) and a structural material, when the fibre is used as distributed strain sensor by means of optic-electronic techniques based on the Brillouin Scattering Effect (BSE), [17/28].

All the structures of civil, mechanical, transport or aerospace engineering, need both the assessment at the end of the building process, and the monitoring of safety and efficiency conditions over their whole life time. Assessment and monitoring require mainly experimental readings of strains and displacements under design loads, to be compared with the theoretical forecasts. Usually the experimental measurements are read onto a discrete set of selected points on the structure, whose overall response should be obtained by means of interpolation of the point-wise set of sampling data. It is worth to note that efficiency and safety should be continuously assessed during the whole lifetime of any work of strategic significance, especially for structures as bridges, pipes, high-rise buildings, dams and tunnels.

The experimental measurements of strains over the whole structure, has been possible in recent years thanks to distributed optical fibre (OFS) measurements based on the Brillouin scattering effect [17/26]. The principle on which Brillouin distributed optical fibre sensors are based is the occurrence of light wave scattering into the optical fibre, when two counter-propagating incident waves encounter within the fibre itself (Fig.3). The two light-waves exchange energy each-other, and the energy transfer depends on the wavelength difference and on the sound velocity into the fibre around the point where the waves collide. This effect, called Brillouin scattering, is resonant when the wavelength difference between the two light-waves matches the so-called Brillouin frequency shift. This latter is proportional to the fibre strain, as effect of the induced deformation in the fibre that produces a variation of density and then a changing of the sound transmission properties into the medium.

The experimental procedure based on this type of OFS consists of durable devices placed on the structure at an early stage of the building process. Distributed optical fibre sensors can measure strain at any point along the structure on which the fibre is deployed, so that the continuous distribution of the strain can be obtained. The very low attenuation loss of light-waves in optical fibres renders it possible to perform distributed measurements along sensing lengths in the kilometre range. By means of this procedure it is also possible to detecting and to identificating a damage in the structure [14-26-27-28-36].

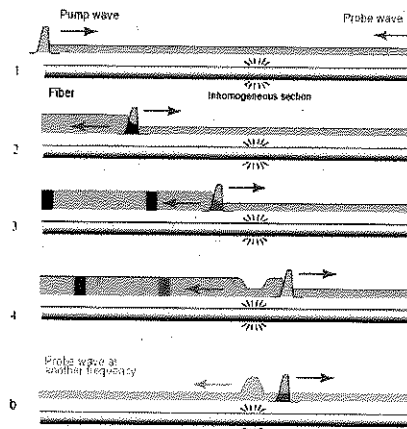


Fig.3

Brillouin scattering has been proposed for one dimensional strain measurements along large structures [26]. It is well known that the correlation between electro optical effects and their mechanical counterparts depends on variables that should be experimentally calibrated. Several Authors showed that the accuracy of measurements is strongly affected by the spatial resolution of sensors [17-18-19-20]. It was also pointed out that the spatial resolution of the measurement apparatus influences the accuracy around certain areas where high strain gradients are present. Such is the case of e.g. bending beams near the supports or in the presence of a localised modification of either the shape or the beam stiffness. Such changes may depend on technical reasons or may result from a localized damage occurring in the beam. This latter interesting case was also treated with a sensitivity analysis, in the framework of a new technique [26-27] for defects identification in bending steel beams. The distributed strain readings obtained with optical fibre sensor based on

time-domain Brillouin shift were utilised in a defect gap-functional [28], allowing the identification of the small defect placement and the related amount.

In the following it will also recalled the characterization of distributed strain readings of rods subjected to axial forces, by means of optical fibre sensor, showing the comparison between theoretical and experimental results, too.

The theoretical results are obtained using the theory of *no-decaying* solution in FGMCs, that ensure the possibility of obtaining no decaying of the axial strain in the optical fibre radius direction, when the fibre is embedded in the structure and when around a small region in which it is fixed an axis-symmetrical strain state is encountered.

It was considered a linearly elastic aluminium rod whose length is L , with square cross-section whose dimension is a .

In the rod it is carved a cylindrical channelling, lodging an optical fibre, covered by a solidifying paste whose mechanical properties are similar to that of the rod. This situation allows us to defining the optical fibre as “*embedded*” in the supporting rod. Fig.4 shows the rod’s geometry with its cross section and the optical fibre lodging.

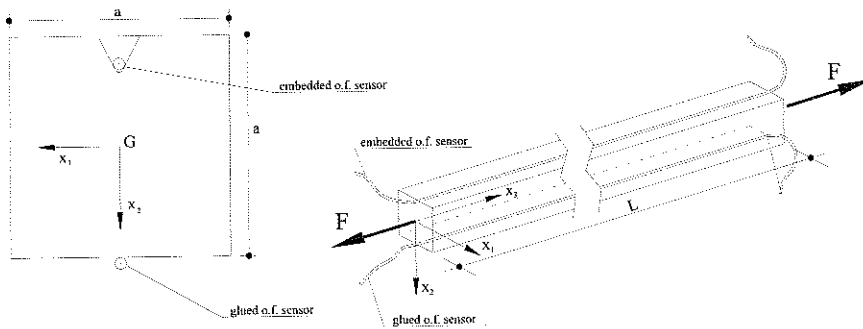


Fig.4

Using the general elastic solutions for the core and the hollow phases reported in equations (9) and (10), where apex ($i=j$) indicates the jacket and apex ($0=c$) indicates the core, and imposing a particular boundary condition on the displacement of optical fibre jacket, coming from the leading deformation of the rod, the strain components for core and jacket are obtained:

$$\varepsilon_{rr}^{(c)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} = \frac{(R^{(j)2} - R^{(c)2})(\lambda^{(c)} - \lambda^{(j)})}{2Q} \varepsilon_3^{(s)} - \frac{(2\mu^{(j)} + \lambda^{(j)})R^{(j)2}}{Q} \varepsilon_r^{(s)}$$

$$\varepsilon_{33}^{(c)} = \varepsilon_3^{(s)}$$

$$\gamma_{r\theta}^{(c)} = 0, \quad \gamma_{r3}^{(c)} = 0, \quad \gamma_{\theta 3}^{(c)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(j)} &= \left(1 + \frac{R^{(j)2}}{r^2}\right) \frac{\varepsilon_3^{(s)} R^{(e)2} (\lambda^{(j)} - \lambda^{(e)})}{2Q} + \frac{R^{(j)2} \varepsilon_r^{(s)}}{Q} \left[(\mu^{(e)} + \mu^{(j)} - \lambda^{(e)}) - \frac{R^{(e)2}}{r^2} (\lambda^{(e)} - \lambda^{(j)} + \mu^{(e)} - \mu^{(j)}) \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(j)} &= \left(1 - \frac{R^{(j)2}}{r^2}\right) \frac{\varepsilon_3^{(s)} R^{(e)2} (\lambda^{(j)} - \lambda^{(e)})}{2Q} + \frac{R^{(j)2} \varepsilon_r^{(s)}}{Q} \left[(\lambda^{(e)} - \lambda^{(j)} + \mu^{(e)} - \mu^{(j)}) \frac{R^{(e)2}}{r^2} - (\mu^{(e)} + \mu^{(j)} - \lambda^{(e)}) \right] \\ \varepsilon_{33}^{(j)} &= \varepsilon_3^{(s)} \\ \gamma_{r\theta}^{(j)} = 2\varepsilon_{r\theta}^{(j)} &= 0, \quad \gamma_{r3}^{(j)} = 2\varepsilon_{r3}^{(j)} = 0, \quad \gamma_{\theta 3}^{(j)} = 2\varepsilon_{\theta 3}^{(j)} = 0. \end{aligned}$$

On the other hand, a laboratory test on strain readings by means of optical fibre sensor on an aluminium bar subjected to axial force, was designed and carried out in the Structural Engineering Laboratory of the University of Napoli Federico II-Italy.

The aluminium bar, whose length is $L = 546 \text{ cm}$, with square cross section whose dimension is $a = 1.6 \text{ cm}$, was hanged up vertically at its tip. At the foot of the bar it was applied a weight increasing until the maximum value of $F = 721 \text{ kg}$, causing the tensile axial load $N = F$ in the rod.

The dead loads are realised with pig-steel directly applied at the foot of the bar (Fig.7). A mechanical dynamometer was utilised for the load reading (Fig.6). Mechanical transducers were also utilised for displacement readings.

On one side of the bar it was carved a cylindrical channel with equilateral triangular cross section whose side length is 2.5 mm (Fig.4). Into the channel one optical fibre sensor was placed and covered by a mastic polyester (sintofer) exhibiting, after solidification, the same behaviour of the aluminium.

With this technique it was realised the embedding of the optical fibre sensor into the bar.

Another optical fibre was bonded by means of cyanoacrylate glue on one side of the rod, parallel to the bar's axis. By means of the optical fibres it was acquired the axial strain ε_{33} profile present all over the rod.

The glass core of the optical fibre is of $125 \mu\text{m}$ diameter, the external jacket coating the core is of polymeric material with $900 \mu\text{m}$ external diameter. The bar was also equipped with electric strain-gauges (SG), as shown in Fig.6, for directly controlling of strain in discrete points.

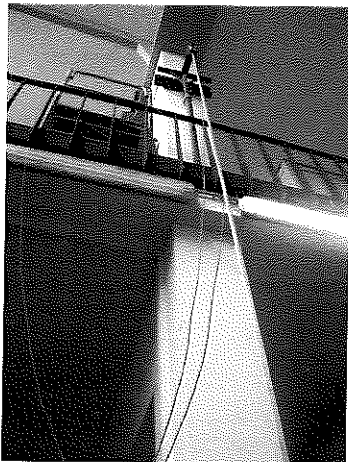


Fig.5



Fig.6

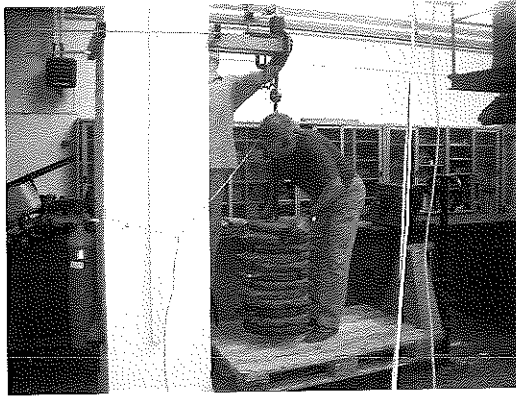


Fig.7

The analysis of experimental readings and comparison with theoretical expectations is collected in a paper submitted for publication on a Specialised International Journal on the subject. But it is important to note here that the proposed new theory and technique for strain readings by means of optical fibre sensors utilising the Brillouin effect, show a very good accuracy for the embedded fibre. Moreover, very reliable correlation curves based on the no-dacaying effect of strains, were shown.

The optic-fibre sensors were also used [26] for detecting the presence of localized defects in the structures. In particular, some of the Authors successfully employed in laboratory tests a distributed Brillouin strain sensor for detecting the presence of localized defects in bending beams for which the Euler-Bernoulli theory applies (Fig.11). Error estimating utilising Finite Elements numerical simulations for the defected beam, whose experimental readings are measured by means of optical fibre readings, is shown (Fig.8).

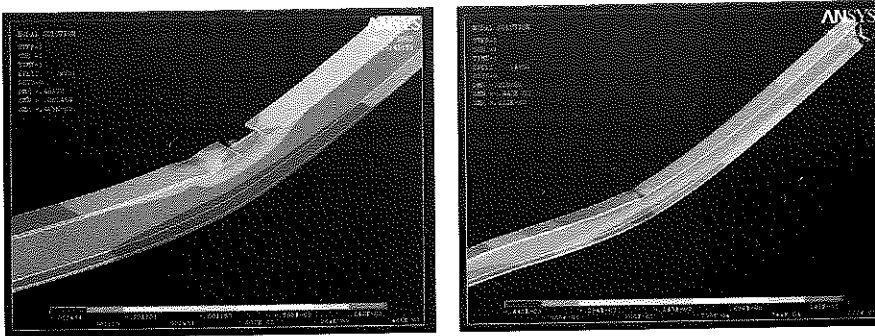


Fig.8

Finally, it was also shown, by means of an experimental campaign performed in the above cited Structural Engineering Laboratory of the University of Napoli Federico II, that readings on bending

beams utilising external bonded OFS, allowed the detection of strains with good “qualitative accuracy” (Figs.9-10-11). Quality and accuracy of strain readings allowed the clear detection of small defects present in structural members, too.

The comparison between the strain measurements obtained through OFS and the electrical strain gauges showed some differences (Fig.9), however these differences seem to depend, for the sensor glued by cyanoakrylate to the supporting beam, on the mechanical transmission of the strain from the beam to the glass fibre core.

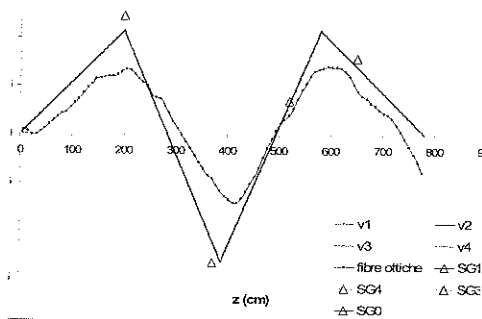


Fig.9

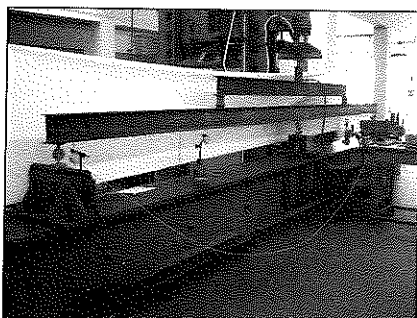


Fig.10



Fig.11

3. APPLICATION TO CONCRETE COLUMNS RESTORED BY MEANS OF FIBER REINFORCED POLIMERS

The structural response of beam and columns reinforced by means of Fiber Reinforced Polymers Composites (FRP) can also be treated in the framework of Functionally Graded Materials. For example, a concrete column wrapped up by an FRP sheet can be regarded as a two-phases laminated composite, made by a concrete central core, and an external hollow cylinder constituted by the Fibre Reinforced Polymer sheet [39/48]. Obviously, an homogenization procedure must be applied to the reinforced concrete – made of concrete and steel bars – which allows to treat the whole reinforced concrete column as an homogeneous and isotropic material.



Fig.12

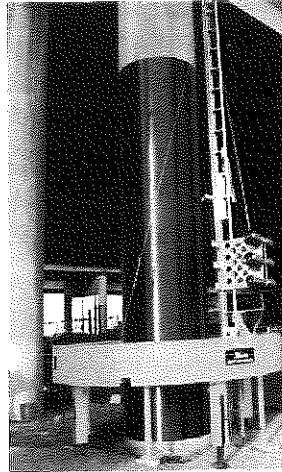


Fig.13

In recent works [36-48] the Authors formulated the theoretical bases and the technical procedure for obtaining the response both in the elastic and in the post-elastic ranges of concrete cylindrical columns (Fig.12) restored by means of FRP sheets (Fig.13). In particular, the hypothesis of axis-symmetrical boundary conditions leads to obtain for the elastic part of the response, closed-form solutions when the FGMC is loaded by self-equilibrated axial compressive forces applied at the bases.

The concrete column was modelled into the elastic range as an isotropic and homogeneous linearly elastic material.

The elastic response of the surrounding FRP sheet is modelled a homogeneous linearly elastic cylindrically orthotropic material.

A general strategy for the FGMC composed by any number of phases, previously formulated, allowed to obtain closed form elastic solutions for the general case of anisotropic cladding phases.

By recalling some previous results and by using an approach due to Ting, the elastic solution is determined by means of a mathematical procedure that allows the reduction of the differential anisotropic boundary value problem (BVP) to an equivalent linear algebraic one, following an *in cascade* strategy based on the Complex Potential Theory for anisotropic materials [10-12-16-37].

The study then focused on the post-elastic response of the two phases FGMC, representing the concrete column reinforced by means of sheets of Fiber Reinforced Polymers.

By means of the step-by-step strategy of Limit Analysis, the evolution of the solutions into the post-elastic range, until the element collapse, was followed. In this framework, with reference to the case of axial load applied at the bases of the FGMC, non linear closed-form solutions are obtained also for the elastic-plastic range, under the assumption of the Schleicher-like yield criterion for the isotropic core phase and of the elastic-brittle Tsai-Hill anisotropic yield criterion, for the surrounding cylindrically orthotropic phase.

Application to cylindrical concrete columns reinforced with Carbon Fiber Reinforced Polymers (CFRP) were presented, showing also a predictive formula for estimating the column ultimate compressive strength, and a design formula for the design of the reinforcing FRP thickness.

It is important to note here, that the limit load of such type of column element, usually utilised in structural engineering, if restored by means of sheets of FRP tissue, exhibits a great increasing of the limit compressive load. This kind of effect is already well known from the qualitative point of view and was confirmed by several laboratory tests. The approach here proposed, based on a complete and mechanically consistent treatment of both the elastic and the non-elastic responses,

leads to analytically predict the whole load path of the loaded element, as well as the increase of the ultimate strength. Moreover, the proposed formula constitutes a new rational design and assessment tool in the treatment of such important technological problem.

4. CONCLUSIONS

The principal goal of the present Paper was to show, from the practical point of view, that mathematical physics and mechanics are still fundamental tools in tackling and solving several kinds of advanced problems in the modern science and technology. In the paper, some modern engineering open problems related to Functionally Graded Materials (FGM) were summarised. The Functionally Graded Material, are composite materials where the composition or the microstructure is locally varied so that a certain variation of the local material properties is achieved. Their structure is present in many biological tissues (bones, muscular tissues, wood), as well as fabricated in the modern technological processes, by continuously or piece-wise assembled composite changing volume fractions and elastic moduli of two or more basic materials in several directions. . The results here summarised were obtained by the Authors in recent years, working in the framework of an international research program.

A general approach to construct exact elastic solutions for FGM cylinders, which are particular types of FGM materials, made by a central core and by n surrounding cylindrical hollow homogeneous and isotropic phases was firstly developed. Special attention was given to particular types of solutions for the FGMC, which present *no-decaying* of selected mechanical quantities and in particular of the axial strain ε_{33} , being x_3 the axis of the laminated cylinder. As matter of fact, these solutions are of outstanding importance in a few of modern engineering applications, as that of the new optical fibre distributed strain sensors, and that of compressed columns restored by means of fibre reinforced polymers sheets.

It was summarised a mathematical procedure for obtaining analytical elastic solutions for the above mentioned axis-symmetrical n -plies-Functionally Graded Material Cylinders (n -FGMCs). With reference to the generic i -th phase of the material, the classical *Boussinesq-Somigliana-Galerkin* vector was specialized to torsionless composite cylinders, also characterized by *no-decaying* of the axial strain: following this way, a special form of the bi-harmonic Love's function $\chi^{(i)}(r, x_3)$ was finally obtained. For these problems it was already shown that it is always possible to reduce the differential boundary value problem (BVP) to an equivalent linear algebraic one, first solving an *in cascade* one-dimensional Euler-like differential system (*field equations*) and then writing the *boundary conditions* through a $(6n+4)$ -order square matrix \mathbb{P} .

A first application of the found solution was implemented for the study of the mechanical response of new micro optical fibre sensors, particularly useful into the distributed strain measurements based on the Brillouin frequency shift. The optical fibre sensors were successfully utilised in two experimental laboratory tests for detecting localised defects on a Euler-Bernoulli beam, and for assessment purpose of strain on a rod.

A second application was shown concerning the theoretical bases and the technical procedure for obtaining the response both in the elastic and in the post-elastic ranges of concrete cylindrical columns restored by means of FRP sheets. The concrete column was modelled into the elastic range as an isotropic and homogeneous linearly elastic material. The elastic response of the surrounding FRP sheet is modelled a homogeneous linearly elastic cylindrically orthotropic material. The evolution of the solutions into the post-elastic range of the two phases FGMC, representing the concrete column reinforced by means of sheets of Fiber Reinforced Polymers was obtained by means of a step-by-step strategy of Limit Analysis, until the element collapse was followed. With reference to the case of axial load applied at the bases of the FGMC, non linear closed-form solutions were obtained also for the elastic-plastic range, under the assumption of the Schleicher-like yield criterion for the isotropic core phase and of the elastic-brittle Tsai-Hill anisotropic yield criterion, for the surrounding cylindrically orthotropic phase.

Application to cylindrical concrete columns reinforced with Carbon Fiber Reinforced Polymers (CFRP) were presented, showing also a predictive formula for estimating the column ultimate compressive strength, and a design formula for the design of the reinforcing FRP thickness.

The theory here expounded, and the applications to two important problems of modern engineering, show with great evidence the persistent utility of the mathematical-physics modelling into the advance of several branches of modern engineering science.

REFERENCES

- [1] Liew, K.M., Kitipornchai, S., Zhang, X.Z., Lin, C.W., (2003), Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders, *International Journal of Solids and Structures*, vol. **40**, 2355-2380.
- [2] Shao, Z. S., (2005), Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. **82**, 155-163.
- [3] Mian, M., Abid, Spencer, A. J. M., (1998), Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 46, n. 12, 2283-2295.
- [4] Fraldi, M., Cowin, S. C., (2004), Inhomogeneous elastostatic problem solutions constructed from stress-associated homogeneous solutions, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **52**, 2207-2233.
- [5] Alshits, V. I., Kirchner, O. K., (2001). Cylindrically anisotropic, radially inhomogeneous elastic materials. *Proc. Roy. Soc. Lond.* A457, 671-693.
- [6] Chouchaoui, C. S., Ochoa, O. O. (1999), Similitude study for a laminated cylindrical tube under tensile, torsion, bending, internal and external pressure. Part I: governing equations, *Composite Structures*, **44**, 221-229.
- [7] Chen, T., Chung, C. T., Lin, W. L., (2000), A revisit of a cylindrically anisotropic tube subjected to pressuring, shearing, torsion, extension and a uniform temperature change, *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 5143-5159.
- [8] Tarn, J. Q., (2001), Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 8189-8206.
- [9] Tarn, J. Q., Wang, Y. M., (2001), Laminated composite tubes under extension, torsion, bending, shearing and pressuring: a state space approach, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 9053-9075.
- [10] Lekhnitskii, S. G., (1981), *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir, Moscow.
- [11] Huang, C. H., Dong, S. B., (2001), Analysis of laminated circular cylinders of materials with the most general form of cylindrical anisotropy. I. Axially symmetric deformations. *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 6163-6182.
- [12] Ting, T. C. T., (1999), Pressuring, shearing, torsion and extension of a circular tube or bar of cylindrically anisotropic material, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A452, 2397-2421.
- [13] Love, A. E. H., (1944), *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, Inc, New York.
- [14] Fraldi, M., Nunziante, L., Carannante, F., (2007), Axis-symmetrical Solutions for n-ply Functionally Graded Material Cylinders under Strain no-Decaying Conditions, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, N.14, 3-2007, pp.151-174.
- [15] Christensen, R. M., (1997), Stress based Yield/Failure criteria for fiber composites, *International Journal Solid and Structures*, vol. **34**, No. 5, pp. 529-543.
- [16] Gurtin, M. E., (1972), *The Linear Theory of Elasticity*, Handbbuch der Physik, Springer, Berlin.

- [17] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Boston, p. 372, 1989.
- [18] T. Horiguchi, T. Kurashima and M. Tateda, "Tensile strain dependence of Brillouin frequency shift in silica optical fibers," *IEEE Photon. Tech. Lett.*, vol. 1, no. 5, pp. 107-108, May 1989
- [19] T. Horiguchi, K. Shimizu, T. Kurashima, M. Tateda and Y. Koyamada, "Development of a distributed sensing technique using Brillouin scattering", *J. Lightwave Technol.* vol. 13, pp. 1296-1302, 1995
- [20] R. Bernini, L. Crocco, A. Minardo, F. Soldovieri, L. Zeni, *All frequency domain distributed fiber optic Brillouin sensing*, *IEEE Sensors Journal*, 3 (1), 36-43 (2003).
- [21] A. Minardo, R. Bernini, L. Zeni, L. Thevenaz, F. Briffod, *A reconstruction technique for long-range Stimulated Brillouin Scattering distributed fiber-optic sensors: experimental results*, *Measurement Science and Technology*, 16, 900-908 (2005).
- [22] X. Bao, M. DeMerchant, A. Brown, and T. Bremner, *Tensile and Compressive Strain Measurement in the Lab and Field With the Distributed Brillouin Scattering Sensor*, *Journal of lightwave technology*, 19 (11), 1698-1704 (2001).
- [23] H. Murayama, K. Kageyama, H. Naruse, A. Shimada, *Distributed strain sensing from damaged composite materials based on shape variation of the Brillouin spectrum*, *Journal of intelligent material system and structures*, 15, (1), 17-25 (2004).
- [24] Sang-Hoon Kim, Jung-Ju Lee, Il-Bum Kwon, *Structural monitoring of a bending beam using Brillouin distributed optical fibre sensors*, *Smart Materials and Structures*, 11, 396-403 (2002).
- [25] L. Zou, G. A. Ferrier, V. Shahraam Afshar, Q. Yu, L. Chen, and X. Bao, *Distributed Brillouin scattering sensor for discrimination of wall-thinning defects in steel pipe under internal pressure*, *Applied Optics*, 43 (7), 1583-1588 (2004).
- [126] R. Bernini, M. Fraldi, A. Minardo, V. Minutolo, F. Carannante, L. Nunziante, L. Zeni. "Damage detection in bending beams through Brillouin distributed optic-fibre sensor". *BRIDGE STRUCTURES- Assessment, Design and Construction*. Vol. I, N.3, September 2005. (355-363). Taylor&Francis. E189110. ISSN 1573-2487.
- [27] R. Bernini, M. Fraldi, A. Minardo, V. Minutolo, F. Carannante, L. Nunziante, L. Zeni. "Identification of defects and strain error estimation for bending steel beams using time domain Brillouin distributed optical fiber sensors". *Smart Materials and Structures*. 15 (2006) 1-11.
- [28] L. Nunziante, A. Gesualdo, F. Guarracino, V. Mallardo, V. Minutolo. (1997). *Flaw Identification in Elastic Solids: Theory and Experiments*. *EXTRACTA MATHEMATICAE* . Vol.12, No.1, Junio 1997, (61-86).
- [29] H.D. Bui, M. Tanaka et al. *Inverse Problems in Engineering Mechanics - ISIP'94*, Ed., Balkema, Rotterdam (1994).
- [30] M. Tanaka, K. Hotate, *Application of Correlation-Based Continuous-Wave Technique for Fiber Brillouin Sensing to Measurement of Strain Distribution on a Small Size Material*, *IEEE Photonics Technology Letters*, 14 (5), 675-677 (2002).
- [31] K. Hotate, M. Tanaka, *Distributed Fiber Brillouin Strain Sensing With 1-cm Spatial Resolution by Correlation-Based Continuous-Wave Technique*, *IEEE Photonics Technology Letters*, 14 (2), 179-181 (2002).
- [32] R. Bernini, A. Minardo, L. Zeni, *Accuracy Enhancement in Brillouin Distributed Fiber-Optic Temperature Sensors Using Signal Processing Techniques*, *IEEE Photonics Technology Letters*, 16 (4), 1143-1145 (2004).
- [33] L. Thevenaz, M. Nikles, A. Fellay, M. Facchini and Ph. Robert, *Truly distributed strain and temperature sensing using embedded optical fibers*, *Conf. on Smart Structures and materials*, SPIE Proc. 3330, 301-14, San Diego, USA (1998).
- [34] L. Thevenaz, M. Facchini, A. Fellay and Ph. Robert, D. Inaudi, B. Dardel *Monitoring of large structure using distributed Brillouin fiber sensing*, *SPIE vol. 3746, OFS-13*, 13th International Conference on Optical Fibers Sensors, April 12-16 1999, Kyongju Korea, W 3-5, pag. 345-348.

- [35] F.Matta, F.Bastianini, N.Galati, P.Casadei, A.Nanni, *In-situ load testing of Bridge A6358 Osage Beach, MO*, Report UTC R124-3, Center for Infrastructure-Engineering Studies, Missouri Department of Transportation, University of Missouri-Rolla.(2005).
- [36] Nunziante,L., Fraldi, M.,Carranante,F., Pernice,M.C.- On elastic-plastic functionally graded cylinders-theory and application to concrete column restored with FRP. *Proceedings of the International Symposium on Recent Advances in Mechanics, Dynamical Systems and Probability Theory.MDP – 2007*. Palermo, Italy. June 3-6, 2007.
- [37] Ting, T.C.T., (1996), *Anisotropic Elasticity- Theory and Applications*. Oxford University Press.
- [38] Cowin, S. C., Fraldi, M., (2005), On singularities associated with the curvilinear anisotropic elastic symmetries, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **40**, 361–371.
- [39] Wu, G., Lu, Z.T., Wu, Z.S., (2006), Strength and ductility of concrete cylinders confined with FRP composites, *Construction and Building Materials*, vol. **20** , pp. 134–148.
- [40] Wu, G., Wu, Z.S., Lu, Z.T., (2007), Design-oriented stress–strain model for concrete prisms confined with FRP composites, *Construction and Building Materials* , vol. **21**, pp. 1107–1121.
- [41] Xiao, Y., Wu, H., (2000), Compressive behaviour of concrete confined by carbon fiber composite jackets, *Journal of materials in Civil Engineering* , pp. 139-146.
- [42] Green, M. F., Bisby, L. A., Fam, A. Z., Kodur, V. K. R., (2006), FRP confined concrete columns: Behaviour under extreme conditions, *Cement & Concrete Composites*, vol. **28** , pp. 928–937.
- [43] Karabinis, A.I., Rousakis, T.C., (2002), Concrete confined by FRP material: a plasticity approach, *Engineering Structures*, vol. **24**, pp. 923–932.
- [44] Li, G., (2006), Experimental study of FRP confined concrete cylinders, *Engineering Structures*, vol. **28**, pp. 1001–1008.
- [45] Debotton, G., (1995), The effective yield strength of fiber-reinforced composites, *International Journal Solids and Structures*, vol. **32**, No. 12, pp. 1743-1757.
- [46] Voyiadjis, G.Z., Thiagarajan, G., (1995), An anisotropic yield surface model for directionally reinforced metal-matrix composites, *International Journal of Plasticity* , vol. **11**, No.8 , pp. 867-894.
- [47] Nanni, A., (2003), North American design guidelines for concrete reinforcement and strengthening using FRP: principles, applications and unresolved issues, *Construction and Building Materials*, vol. **17**, pp. 439–446.
- [48] Nunziante,L., Fraldi,M. Elastic and Post-Elastic Solutions for FGM Cylinders: Application to FRP Concrete. *International Journal of Plasticity*. Submitted, 2007.

.....

La stabilità dell'equilibrio elastico in regime viscoso

di M. Pasquino, A. de Majo

Viene studiato in regime elastico-viscoso il caso della stabilità dell'equilibrio per un'asta caricata assialmente non perfettamente rettilinea. Si sviluppa il caso di trave alta a sezione variabile in conglomerato con regime viscoso alla Withney.

Si ammette implicitamente di poter prescindere dagli effetti dell'intervento della deformazione viscosa (dovuto al "fluage del materiale" e proporzionale in ogni istante allo sforzo normale agente nel punto considerato) che ha nelle condizioni di sollecitazione nelle varie parti; ci siamo posti cioè nelle condizioni di applicabilità dei teoremi sulla unicità e sulla stabilità della soluzione dell'equilibrio.

L'entità ragguardevole che le deformazioni viscose raggiungono talvolta (nel calcestruzzo possono risultare tre o anche quattro volte maggiori di quelle elastiche) potrebbe invece far pensare che, in regime viscoso, il campo entro il quale si debbano prevedere fenomeni di instabilità dell'equilibrio sia più esteso che in regime puramente elastico.

Bisogna ricordare che le deformazioni viscose hanno la caratteristica essenziale di svilupparsi lentamente sotto l'azione prolungata del carico. Ne segue che, se il fenomeno viscoso non modifica sostanzialmente la forma del solido, ciò che noi ammettiamo sempre implicitamente quando fondiamo lo studio sulle proprietà delle deformazioni piccolissime, l'intervento di tali deformazioni lente non ha l'effetto sul comportamento del solido supposto temporaneamente allontanato dalla sua posizione di equilibrio.

La possibilità o meno di ritornare alla posizione è infatti regolata soltanto dal variare della sollecitazione esterna e dall'entità della reazione elastica istantanea del corpo.

Queste considerazioni riguardano soltanto il valore teorico del carico per cui si verifica l'instabilità dell'equilibrio e non la effettiva condizione di resistenza del solido (nei riguardi del raggiungimento del limite elastico) le quali sono notevolmente influenzate in misura non trascurabile anche da piccole variazioni di forma.

Bisogna poi aggiungere che il notevole aumento dell'entità della deformazione che è determinato dall'intervento della viscosità può, in molti casi, far uscire dal campo di applicabilità dell'ipotesi di deformazioni piccolissime. Tanto che, a priori, non si può escludere che il gioco combinato delle deformazioni viscosi e delle conseguenti variazioni delle condizioni di sollecitazione non possa talvolta far crescere gradualmente, ma indefinitamente, la deformazione del solido per carichi inferiori a quelli per cui si sarebbe verificata la instabilità istantanea.

Si esamina il caso di un prisma rettilineo incernierato agli estremi e compresso da due forze uguali e contrarie secondo la retta che congiunge le due cerniere. Si ammette di poter rappresentare una deviazione dell'asse della congiungente rettilinea con una espressione della forma

$$u_0 = a \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$$

Per effetto della viscosità l'ordinata generica u_0 varierà nel tempo. All'istante t sarà u il suo valore.

Viene attribuita una legge sforzo-deformazione

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t \frac{\sigma d \overline{\varepsilon_0}}{dt} dt$$

dove ε è la deformazione unitaria totale in senso longitudinale, E è il modulo elastico, σ la sollecitazione normale unitaria agente secondo l'asse, $\overline{\varepsilon_0}$ è la viscosità specifica.

Si accetta l'ipotesi, per la linearità della relazione sollecitazione normale e deformazione viscosa, che in regime elastico viscoso le sezioni si conservano piane.

Si caratterizza la deformazione che il prisma subisce per effetto viscoso attraverso due parametri

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{A} \int \varepsilon dA \qquad \bar{\mu} = \frac{1}{I} \int \varepsilon y dA$$

Per precisare i valori di ε , $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ si può scrivere

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pu}{I} y$$

quindi,

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \left(\frac{P}{A} + \frac{Pu}{I} y \right) \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} dt$$

dunque

$$\bar{\varepsilon} = \frac{P}{A} \bar{\varepsilon}_0 + \frac{Py}{I} \int_0^t \mu \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} dt$$

Con $\bar{\varepsilon}_0 = \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt}$ si avrà perciò

$$\lambda = \frac{P}{A} \bar{\varepsilon}_0 \qquad \bar{\mu} = \frac{P}{I} \int_0^t u \bar{\varepsilon}_0 dt$$

Si prescinde dall'effetto dell'accorciamento assiale.

L'equilibrio del concio elementare, sommando curvatura elastica μ e curvatura viscosa $\bar{\mu}$,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \mu + \bar{\mu} = -\frac{Pu}{EI} - \frac{P}{I} \int u \bar{\varepsilon}_0 dt$$

derivando rispetto al tempo

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{P}{EI} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{I} u \varepsilon_0 = 0 \quad (a)$$

Con le condizioni ai limiti

$$z = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$z = l \Rightarrow u = 0$$

per $t = 0$ ($\varepsilon_0 = 0$) l'equazione dell'asse geometrico assume la forma che deve avere in regime puramente elastico e cioè

$$u = \frac{P_E}{P_E - P} a \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$$

L'equazione (a) è un'equazione differenziale lineare alle derivate parziali del terzo ordine che si può risolvere per variabili separate e cioè:

$$u = \varphi(0) \psi(t)$$

con la condizione iniziale

$$\varphi(0) = \frac{P_E}{P_E - P} a \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$$

mentre $\psi(t)$ è definita dall'equazione

$$\psi'(t) \left(\frac{P}{EI} + \frac{\pi^2}{l^2} \right) + \frac{P}{I} \varepsilon_0 \psi(t) = 0$$

e dalla condizione

$$t = 0 \Rightarrow \psi(t) = 1$$

si deduce

$$\psi(t) = e^{\frac{E \bar{\varepsilon}_0 P}{P_E - P}}$$

In definitiva

$$u = \frac{P_E}{P_E - P} a \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} e^{\frac{E \bar{\varepsilon}_0 P}{P_E - P}}$$

Applicazione

Viene ipotizzato un errore della linea d'asse fornito dall'espressione

$$V^*(z) = \sum_i V_i^* \left(1 - \cos \frac{i \pi z}{2l} \right)$$

Se con $V_e(z, t) + V_\mu(z, t)$ indichiamo gli spostamenti elastici e viscosi si pone

$$\bar{V}(z, t) = V_e(z, t) + V_\mu(z, t) = \sum_i V_i(t) \left(1 - \cos \frac{i \pi z}{l} \right)$$

Se $A(z)$ rappresenta l'area della sezione retta alla sezione z e γ il peso specifico del materiale, il momento flettente $M(z)$ ha l'espressione

$$M_z(z) = -F[V(l) - V(z)] - \gamma \int_z^l A(z') [V(z') - V(z)] dz'$$

essendo $V(z) = V^*(z) + \bar{V}(z, t)$

In ipotesi di piccoli spostamenti

$$\frac{1}{R} = -\frac{M(z, t)}{EI(z)} - \mu(z, t)$$

Se caratterizziamo il comportamento del conglomerato con un nucleo alla Withney possiamo scrivere

$$\frac{1}{R} = -\frac{M}{EI} - \mu = \frac{d^2 \bar{V}(z,t)}{dz^2} = \frac{\pi^2}{4l^2} \sum_i i^2 V_i \cos \frac{i\pi z}{l} \quad (a)$$

$$\mu(z,t) = -\alpha\beta \frac{1}{EI(z)} \int_0^t M(z,t) e^{-\beta t} dt$$

Se trascuriamo il peso proprio del materiale la (a) si scrive

$$\begin{aligned} & \frac{F}{EI(z)} [V^*(l) + \bar{V}(l,t) - V^*(z) - \bar{V}(z,t)] + \frac{\alpha\beta}{EI(z)} \int_0^t F [V^*(l) + \bar{V}(l,t) - V^*(z) - \bar{V}(z,t)] dt = \\ & = \sum_i V_i \cos \frac{i\pi z}{2l} i^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \end{aligned} \quad (b)$$

Se deriviamo la (b) rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{F}{EI(z)} \sum_i \frac{dV_i(t)}{dt} \cos \frac{i\pi z}{2l} + \frac{\alpha\beta e^{-\beta t}}{EI(z)} F + \sum_i \frac{dV_i(t)}{dt} \cos \frac{i\pi z}{2l} = \sum_i \frac{\pi^2 i^2}{4l^2} \frac{dV_i(t)}{dz} \cos \frac{i\pi z}{2l}$$

Il sistema (c) è nelle incognite $V_i(t)$, i valori iniziali al tempo $t=0$ sono le soluzioni del sistema (b) scritto in assenza di viscosità.

Un esempio numerico

Si esamina il caso della figura 1.

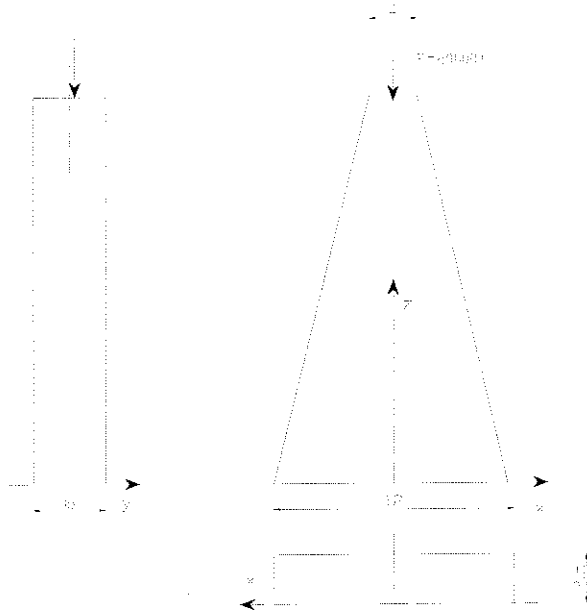


Fig.1

Il momento di inerzia minimo varia con legge lineare

$$I(\xi) = i_0 + i(\xi) \quad \text{con} \quad \xi = \frac{z}{l}$$

$$\text{Ponendo} \quad \frac{1}{EI(\xi)} = \rho(\xi)$$

Il sistema (b) diventa

$$F\rho(\xi_i) \sum_i V_i \cos \frac{i\pi\xi_i}{2} - \sum_i V_i \frac{i^2 \pi^2}{4l^2} \cos \frac{i\pi\xi_i}{2} = -V^* F\rho(\xi_i) \cos \frac{\pi\xi_i}{2}$$

(d)

Assumendo

$$i_0 = 15.625m^4 \quad z = 0 \rightarrow a_0 = 30m^2$$

$$i_l = 10.417m^4 \quad z = l \rightarrow a_l = 10m^2$$

Con nota simbologia

$$\gamma = 2.5tm^{-3}$$

$$R_{bk} = 400Kgcm^{-2}$$

Con il metodo semiprobabilistico si ha:

$$\sigma_c = \frac{400}{1.5} = 266.67kgcm^{-2}$$

$$E_c = 2.4 * 10^6 tm^{-2}$$

Si impone un coefficiente amplificativo $\gamma_n = 1.5^3$ e si assume la curva di errore di forma:

$$V^* = 0.01l \left(1 - \cos \frac{\pi \varepsilon}{2} \right) = 0.03 \left(1 - \cos \frac{\pi \varepsilon}{2} \right)$$

Il sistema (d) risolto per 4 sezioni viene soddisfatto per $F = 77.250tn$

Viene rappresentato il diagramma F-Vmax asintotico alla retta $F_c = 77.250tn$

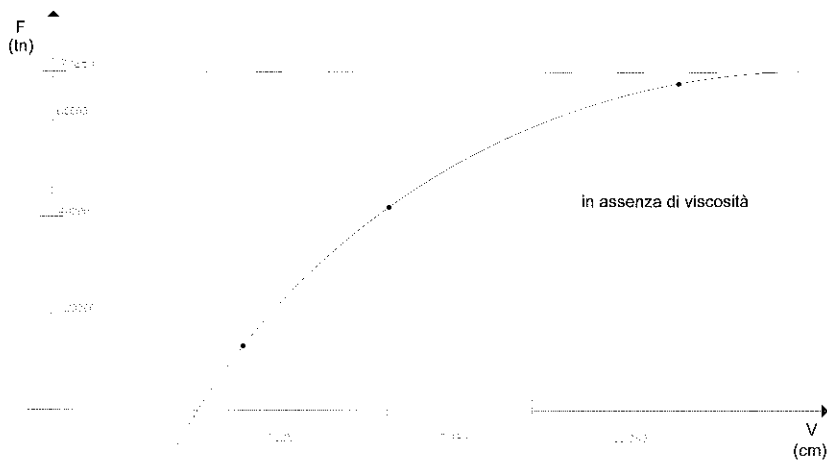


Fig. 2

Si considera l'effetto viscoso per $F=20000\text{tn}$ cui corrisponde nella sezione $z=1$ una tensione media

$$\sigma = \frac{20000000}{400 * 250} = 200\text{kgcm}^{-2}$$

Nel nucleo di Withney si pone $\alpha=3$ $\beta=1$, il sistema viene risolto iterativamente assumendo come prima serie di V_i la soluzione di $F=20000$ kg.

Si riporta il diagramma $V_{\text{max}}(t)$. Si evince che il fenomeno viscoso è praticamente concluso dopo 4 anni.

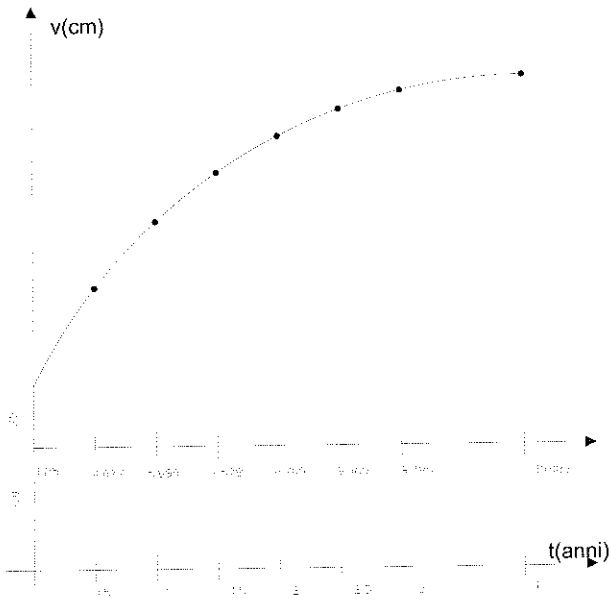


Fig. 3

Il valore massimo dello spostamento è di circa 13 cm, ovvero più di 4 volte superiore al valore iniziale comunque accettabile essendo il 4.3% della luce, si ottiene inoltre nelle sezioni $z = 1$ e $z = 0$

$$\sigma_1 = 200\text{kgcm}^{-2}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 92.5\text{kgcm}^{-2}$$

$$\sigma_{0\text{min}} = 50.8\text{kgcm}^{-2}$$

Bibliografia

- Krall G. 1947. *Statica dei mezzi viscosi e sue applicazioni*. Roma: Rendiconto Accademia Lincei.
- Franciosi V. 1950. *Contributo allo studio delle strutture iperstatiche in regime viscoso*. Milano: L'Ingegnere.
- Levi F. 1950. *L'instabilità dell'equilibrio in regime viscoso*. Giornale Genio Civile, 1.
- Franciosi V. 1951. *In tema di archi sottili in regime viscoso*. Napoli: Rendiconto Accademia Scienze Fisiche e Matematiche.
- Franciosi V. 1952. *Le aste sottili pressoinflesse in regime viscoso*. Napoli: Rendiconto Accademia Scienze Fisiche e Matematiche.
- Franciosi V. 1978. *La viscosità del conglomerato in relazione al carico di punta*. Firenze: Conferenze tenuta per la fondazione Pontello, Fondazione Pontello.
- Dipartimento di Scienza delle Costruzioni, Università degli Studi di Napoli Federico II. *Camilla D'Onofrio: Studi e Ricerche di Scienza delle Costruzioni*.

An armchair presentation of some ideas on which Aldo Bressan bases his axiomatization of Newtonian Mechanics

M. Pitteri

Introduction

The following considerations are based on the fundamental paper [1], in which Newtonian Mechanics is axiomatized in a strict sense, following ideas of (Mach and) Painlevé (see [7]).

There are two reasons for my presenting results that are not mine and, in addition, were published more than forty years ago. The first reason is of affection: we recently celebrated in Padova the eightieth birthday of Aldo Bressan. The second reason is more scientific: in spite of having been in press for a long time, the results in [1] have had a scarce penetration into the mathematical physics' community, while they had broader resonance into the communities of philosophers of science and logicians. One of the possible reasons is linguistic: [1] is written in Italian, and has not been turned into English in any later work of Bressan. Another is the intrinsic interdisciplinarity of [1]: it involves mathematical physics, logic and philosophy of science, all of which are present from its very first pages, making the reading difficult to any reader who is not familiar with all these disciplines, that is, the utmost majority of scientists. I have myself experienced this difficulty when, as a research assistant, I decided to study [1]. On the other hand I had attended Bressan's course of Rational Mechanics as a sophomore in physics. When it came to present the principles of Newtonian Mechanics to his students, Bressan replaced the traditional treatment given in the textbook by a bare-bone version of his axiomatization, deprived of almost all references to logic and philosophy of science. This presentation served later as a strong motivation to go ahead, and as a guideline, in my attempt to study [1].

Later informal discussions with colleagues convinced me that a bare-bone presentation of the ideas in [1] like the one I had as a student, focussed on the mathematical-physical aspects, could help many researchers to understand and appreciate Bressan's deep and unconventional approach to the axiomatization of mechanics. This is my goal here in presenting a version of Bressan's lecture notes for his students of Rational Mechanics; of course any deficiency or, worse, error, is my own responsibility.

There are important issues which are not, or marginally, considered here:

- Axiomatization is not simply mathematization (axioms, theorems, etc.): it aims at the *reduction of primitive concepts*; for instance, those of mass and force in Newtonian Mechanics.
- The geometry of space-time comes from physics. This idea, which is well accepted after Einstein's General Theory of Relativity, holds true in [1] for Newtonian Mechanics; roughly, the straight lines are the trajectories of free particles. Actually, a sizeable chapter of [1] is devoted to the construction of space-time geometry. Here we simplify this part drastically by assuming the usual euclidian structure of space-time from the start, and identify observers with rigid-body motions.
- Contrary to other researchers' assertion, classical and special relativistic mechanics of particles are proved to have the same primitive concepts and only differ in axioms (see [6]).
- Natural sciences are the realm of contingency. Besides 'true' and 'false', they involve concepts like 'possible' and 'necessary'. A phenomenon p , or an assertion p expressible in a physical theory (hence formed with logical, mathematical and physical terms only), is *physically possible* if it can be realized by (that is, is technically possible for) some ideal experimenters; for instance, ones having the abilities of future experimenters. This is an intuitive description, and in fact the concept of physical possibility is a primitive concept.¹ Bressan [2], [3], [4], [5]

¹Bressan [4] also shows that it is unsatisfactory to consider physical possibility as compatibility with the physical laws, because these include some constitutive quantities. For instance, in Newtonian mechanics the fundamental law of dynamics contains mass as a constitutive parameter. The motion of a given isolated particle system, from given initial conditions, depends on the values of the masses of the particles. By only changing

recommends use of explicit modal notions or a concept of possibility to improve the foundations of natural sciences. In particular, one can use the notion of physical possibility to reduce the number of primitive concepts by defining them. Such definitions characterize the related concepts strictly, and should be preferred, in studies of the foundations, to just taking those concepts as primitive, in which case their attributes can be justified on the basis of sensory experience alone; such is the case in Newtonian mechanics when mass and force are primitive.

1 Inertial spaces

We regard the universe as a particle system, in agreement with the atomistic point of view of classical mechanics. In addition, we assume the euclidean structure of classical space-time to be known. In particular, independent of the observer and of the phenomena, we have a system *Inst* of ∞^1 *instants*, and a natural system of time coordinates, determined to within the choice of origin and unit.

Given the euclidean structure, one can consider rigid-body motions, each one of which, say Σ , should be regarded as a motion of the whole space. Such motions are called *kinematic spaces*, and they, as well as the relations among them, will be regarded as independent of the (possible) motions of bodies, in agreement with the classical conception of the physical world.

We say that a system M_1, \dots, M_r of material points is *isolated* if these are 'very far' (at infinity) from all the points not included in the system. Formally, M_1, \dots, M_r are the only points having a (proper) position.

Inertial spaces are introduced following Mach and Painlevé, but with added essential conditions of physical possibility.²

Definition 1.1 *The kinematic space Σ is inertial if*

the values of these masses we obtain different motions, all of which are compatible with the fundamental law of dynamics. Still, only the one corresponding, so to speak, to the 'real' masses is physically possible. It is also not satisfactory to say that a sentence *S* is phys. poss. if it is *logically* compatible with the physical laws. Indeed, physical theories depend upon a theory of natural numbers through analysis, and thus contain infinitely many undecidable sentences. So, among other things, some false mathematical sentences are logically compatible with the physical laws.

²Henceforth phys. poss. shortens either physically possible or physical possibility, depending on the context.

- (a) Any isolated material point has zero acceleration with respect to Σ .
- (b) For any choice of a position P in Σ , of a (velocity) vector \mathbf{v} , and an instant θ , it is phys. poss. that at the instant θ some material point M has position P and velocity \mathbf{v} with respect to Σ , and is isolated.

Axiom 1.2 *There exists an inertial space.*

Theorem 1.3 *Let Σ be an inertial space. Then the inertial spaces are all those which translate with constant velocity with respect to Σ ; hence are ∞^3 .*

Proof. Let Σ' be an inertial space. Then, for any position P' and velocity \mathbf{v}' with respect to Σ' , and any instant θ , it is phys. poss. that some material point M has position P' and velocity \mathbf{v}' with respect to Σ' at the instant θ , and is isolated. By Def. 1.1(a), M has a vanishing acceleration with respect to both Σ and Σ' . By Coriolis' theorem on accelerations in relative motions (here we may conventionally regard Σ as fixed, and Σ' moving with respect to it) we have

$$\mathbf{a}_\tau + 2\boldsymbol{\omega}_\tau \times \mathbf{v}' = \mathbf{0}, \quad (1)$$

where \mathbf{a}_τ and $\boldsymbol{\omega}_\tau$ are the acceleration of P' and the angular velocity of Σ' with respect to Σ at the instant θ . By the independence of the relations among kinematic spaces mentioned above, (1) holds for $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, hence $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{0}$, and for arbitrary \mathbf{v}' , hence $\boldsymbol{\omega}_\tau = \mathbf{0}$. Since $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}_\tau$ for any P' and θ , Σ' translates uniformly and rectilinearly with respect to Σ .

Conversely, assume Σ' translates with respect to Σ with constant velocity \mathbf{v}_τ . Then Σ' satisfies condition (a) in Def. 1.1 by Coriolis' theorem. Concerning condition (b), let $P' \in \Sigma'$, \mathbf{v}' and θ be chosen at will, and let P be the point of Σ which overlaps to P' at the instant θ . Then, by Def. 1.1 (b) it is phys. poss. that at the instant θ some material point M has position P and velocity $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_\tau$ with respect to Σ , and is isolated. By Coriolis' theorem for velocities, M has position P' and velocity \mathbf{v}' with respect to Σ' at the instant θ , and is isolated. \square

Notice that the condition (b) of phys. poss. in Def. 1.1 is used in either part of the proof above, and one can prove that it, as well as Axiom 1.2, is essential for the validity of Theorem 1.3.³ In general, in an approach à la

³For instance, were the uniform motions along a certain line r of Σ the only phys. poss. motions of isolated material points, then the inertial spaces would include those arbitrarily rotating about r , these being ∞^∞ .

Mach-Painlevé, some assumptions of phys. poss. are as important as axioms of existence in Euclidean geometry.⁴

2 Inertial mass

Definition 2.1 μ is a mass distribution (to the material points) if it is a positive-real-valued function defined on the material points, such that, if (at the instant θ) the particle system (M, M') is isolated, and \mathbf{a} and \mathbf{a}' are the accelerations of M and M' with respect to an inertial space Σ , then

$$\mu(M)\mathbf{a} + \mu(M')\mathbf{a}' = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Axiom 2.2 (a) There exists a mass distribution.

(b) If M and M' are distinct material points, it is phys. poss. that (at some instant θ) they constitute an isolated material system and have nonvanishing accelerations with respect to the inertial spaces.

Theorem 2.3 There are ∞^1 mass distributions. If μ is one such, then they are the functions ν of the form

$$\nu(M) = b\mu(M) \quad \text{with } b > 0 \text{ a real number.} \tag{3}$$

Proof. Let μ and ν be mass distributions. By Definition 2.1 and Axiom 2.2 they both satisfy (2) for $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{a}'$, for arbitrary material points M and M' . Therefore

$$\frac{\mu(M)}{\mu(M')} = \frac{\|\mathbf{a}'\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\nu(M)}{\nu(M')}, \quad \text{hence} \quad \frac{\nu(M)}{\mu(M)} = \frac{\nu(M')}{\mu(M')}. \tag{4}$$

As a consequence, (2) holds with $b = \nu(M)/\mu(M)$.

Conversely, let μ be a mass distribution, and ν be defined by (3). Then, by Definition 2.1, both $\mu(M)$ and $\nu(M)$ are positive; and the validity of (2) and (3) imply that the analogue of (2) for ν holds, for all M, M' . Thus ν is a mass distribution too. \square

This theorem substantially says that mass is determined up to the choice of the unit. This will be fixed henceforth, as are the units of length and time.

⁴And, indeed, such assumptions are statements of existence in the unusual extensional language that was used in [1] because modal logic was not well developed at that time.

3 Effective force and the principle of action-reaction

A material point M , in motion with respect to an inertial space Σ , has some properties that are *intrinsic* (mass, electric charge, magnetic moment, temperature,...). These contrast properties like the velocity and the acceleration of M with respect to Σ , which are *extrinsic*, depending on the choice of Σ .

Let us denote by \mathcal{S} the *intrinsic (physical) state* of M , that is, the set of all the intrinsic properties at the instant θ . \mathcal{S} may be reduced to the properties that affect the motion of M in the particular theory \mathcal{T} one considers. Once \mathcal{T} is chosen, \mathcal{S} can be detailed explicitly.

For the sake of generality it is preferable to leave \mathcal{S} unspecified. Anyway, one has to keep in mind that we refer to a theory \mathcal{T} of unconstrained particle systems. By introducing constraints we obtain theories which describe the physical world more coarsely than \mathcal{T} . Nevertheless, they can be more useful in practice because they greatly simplify the treatment of certain important problems. Also, the study of (Lagrangian) constrained systems is important because of its positive effect on the theoretical developments of modern physics.

Axiom 3.1 *Relative to the arbitrary inertial space Σ (and to given units of length, time and mass) there exists a vector-valued function⁵*

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}') \quad (5)$$

of the instant θ , of the distinct points P and P' in Σ , of the velocities \mathbf{v} and \mathbf{v}' , and of the intrinsic states \mathcal{S} and \mathcal{S}' , such that, with respect to Σ ,

- (a) *if at the instant θ the points M, M_1, \dots, M_n are an isolated system and have the positions P, P_1, \dots, P_n , velocities $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ and intrinsic states $\mathcal{S}, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$, respectively, then M , assumed to have mass m , has the acceleration \mathbf{a} given by ($i = 1, \dots, n$)*

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P, P_i, \mathbf{v}, \mathbf{v}_i, \mathcal{S}, \mathcal{S}_i). \quad (6)$$

⁵For simplicity one may eliminate the dependence of \mathbf{F}_{Σ} on θ in 5 (and in the formulae following from it). This would strengthen Axiom 3.1. It is preferable to deduce the possibility of this elimination from an axiom of physical homogeneity of time, along the lines sketched in §4.

To prove the uniqueness of the function \mathbf{F}_Σ we add the following axiom of phys. poss.:

Axiom 3.2 Let θ be an instant, P, P' distinct points of the inertial space Σ , \mathbf{v}, \mathbf{v}' two velocities, and $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ two (possible) intrinsic states. Then it is phys. poss. that at the instant θ two (suitable) material points M and M' are an isolated system and have the intrinsic states $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ and the respective positions P, P' and velocities \mathbf{v}, \mathbf{v}' with respect to Σ .

Theorem 3.3 The function \mathbf{F}_Σ in Axiom 3.1 is unique.

Proof. Let condition (a) in Axiom 3.1 be satisfied by two functions \mathbf{F}_Σ and $\bar{\mathbf{F}}_\Sigma$. For any choice of $\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}'$ as specified in Axiom 3.2, the assertion of phys. poss. in it holds. Therefore condition (6) holds for both \mathbf{F}_Σ and $\bar{\mathbf{F}}_\Sigma$, (with $n = 1$ and $M_1 = M'$), so that

$$\mathbf{F}_\Sigma(\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}') = m\mathbf{a} = \bar{\mathbf{F}}_\Sigma(\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}'). \quad (7)$$

□

The function \mathbf{F}_Σ in Axiom 3.1 is the *constitutive function* of the effective force, and (5) the *constitutive equation* of the force. These are *universal*, independent of the particular material points to which they refer. Given (5), \mathbf{f} can be called *the effective force that at the instant θ is exerted by any material point having intrinsic state \mathcal{S}' and position P' and velocity \mathbf{v}' with respect to Σ , on any another point having position P , velocity \mathbf{v} and intrinsic state \mathcal{S}* . Formula (6) has the role of both *fundamental law of dynamics* and *law of composition of forces*.

In (6) the force is obtained from its constitutive equation, and this is important to give a content to the fundamental law of dynamics. In fact, known physics textbooks claim that the equation

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

resembles a definition rather than a law. To consider it a definition deprives it of any physical content. This is one of the critiques often addressed to Newton's treatment of the foundations of classical mechanics. Also, the way it treats the concepts of mass and force is often regarded as 'circular'. One can object that Newton characterizes them intuitively, treating them essentially

as primitive. The above formulation, which is based on the point of view of Mach and Painlevé, completely meets the objections just mentioned.

We must stress the importance of the axioms of phys. poss., and of various assumptions of phys. poss. introduced in the definitions above; these have not been considered by either Mach or Painlevé, or the authors of textbooks of mechanics that came after them, whose treatments are thus not rigorous.⁶ This is far from unexpected, because in their times theories of modal logic, that is, the logic of possibility, were insufficiently developed.

In the above treatment the definitions of inertial space, mass and force *reduce the number of primitive concepts but not the laws*, which are written more explicitly as *axioms involving essential assumptions of phys. poss.*

It often happens that difficulties in a physical theory are due to an insufficient development of corresponding theories in analysis or geometry. Axiomatic foundations of mechanics (or physics) à la Mach–Painlevé may be the only case in which logic takes the role of the two mentioned disciplines.

Theorem 3.4 (*Action-reaction principle related to the resultant force*). *Assume Axioms 3.1 and 3.2. Then*

$$\mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}') = -\mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P', P, \mathbf{v}', \mathbf{v}, \mathcal{S}', \mathcal{S}). \quad (8)$$

Proof. By Axiom 3.2 it is phys. poss. that at the instant θ two (suitable) material points M and M' constitute an isolated system while having the respective intrinsic states \mathcal{S} and \mathcal{S}' , positions P and P' , and velocities \mathbf{v} and \mathbf{v}' with respect to Σ . In this case, by Axiom 3.1, equation (6) can be used to find the accelerations \mathbf{a} of M and \mathbf{a}' of M' (at the instant θ):

$$\mu(M)\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}'), \quad \mu(M)\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P', P, \mathbf{v}', \mathbf{v}, \mathcal{S}', \mathcal{S}). \quad (9)$$

Since M and M' constitute an isolated system, the condition stated in Definition 2.1 implies (2) which, in turn, together with (9), implies (8). \square

Axiom 3.5 (*Action-reaction principle related to the resultant torque*). *We have*

$$\mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}') \parallel PP'. \quad (10)$$

Notice that (only) in the case $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ this assertion can be proved as a consequence of the physical indistinguishability of inertial spaces defined below.

⁶Among the followers of Painlevé in Italy we mention A. Signorini and B. Finzi.

4 Physical indistinguishability of inertial reference frames

Consider a (euclidean) 4-frame \mathcal{F} which is co-moving with respect to the kinematic space Σ : this is a map

$$\mathcal{F} : (\theta, P) \mapsto (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4, P \in \Sigma, \theta \in Inst; \quad (11)$$

related to given units of time and length, $t (= x_0)$ is a natural time abscissa of θ and x_1, x_2, x_3 are the coordinates of P in a given cartesian system co-moving with Σ . We call \mathcal{F} inertial if so is Σ .

Let $S = \{M_1, \dots, M_n\}$ be an isolated particle system, and $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ a time interval. We denote by $\rho = P_{\mathcal{F}}\mathcal{P}$, and call *representation in \mathcal{F} of the (actual) process \mathcal{P} of S* , the following system of functions defined for t in a suitable time interval \mathcal{I} and $i = 1, \dots, n, r = 1, 2, 3, :$

$$x_{i,r} = \hat{x}_{i,r}(t), \mathcal{S}_i = \hat{\mathcal{S}}_i(t); \quad (12)$$

here, for any $t \in \mathcal{I}$, $x_{i,r}$ is the r -th coordinate in \mathcal{F} of the position in Σ occupied by M_i at the instant θ of abscissa t , and \mathcal{S}_i is the intrinsic state of M_i at the same instant.

If \mathcal{F}' is another euclidean 4-frame, the space-time transformation $T_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}$ from \mathcal{F} to \mathcal{F}' allows us to construct the analogues $\hat{x}'_{i,r}$ for \mathcal{F}' of the $\hat{x}_{i,r}$:

$$\rho' = P_{\mathcal{F}'}\mathcal{P} = \{x'_{i,r} = \hat{x}'_{i,r}(t), \mathcal{S}_i = \hat{\mathcal{S}}_i(t), t \in \mathcal{I}'\}. \quad (13)$$

We may identify the actual process \mathcal{P} with the function (same symbol for simplicity) $\mathcal{P} : \mathcal{F} \mapsto P_{\mathcal{F}}\mathcal{P}$, which can be extended as follows. Consider an arbitrary choice ρ of mathematical functions of the form (12), and a 4-frame \mathcal{F} . Then, for any 4-frame \mathcal{F}' , the transformation $T_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}$ can be used to construct the corresponding functions ρ' . We call the function $\mathcal{P} : \mathcal{F}' \mapsto \rho'$ an *admissible (or conceivable) process for S* , so that we can still write $\rho' = P_{\mathcal{F}'}\mathcal{P}$. We can also write $\mathcal{P} = \Pi_{\mathcal{F}}\rho$ to denote the admissible process represented by the functions ρ in the 4-frame \mathcal{F} . The functions $P_{\mathcal{F}}$ and $\Pi_{\mathcal{F}}$ are in a sense one the inverse of the other: $\mathcal{P} = \Pi_{\mathcal{F}}\rho \Leftrightarrow \rho = P_{\mathcal{F}}\mathcal{P}$.

If the 4-frames \mathcal{F} and \mathcal{F}' differ, so do in general the respective representations $\rho = P_{\mathcal{F}}\mathcal{P}$ and $\rho' = P_{\mathcal{F}'}\mathcal{P}$ of one and the same process \mathcal{P} ; so do also the admissible processes $\mathcal{P} = \Pi_{\mathcal{F}}\rho$ and $\mathcal{P}' = \Pi_{\mathcal{F}'}\rho$ having in them the same representation ρ .

Definition 4.1 *The 4-frames \mathcal{F} and \mathcal{F}' , for instance co-moving with two different kinematic spaces Σ and Σ' , are physically equivalent if, for any choice of a particle system S and of two admissible processes \mathcal{P} and \mathcal{P}' for S which have the same representation in \mathcal{F} and \mathcal{F}' ($P_{\mathcal{F}}\mathcal{P} = \rho = P_{\mathcal{F}'}\mathcal{P}'$), \mathcal{P} is phys. poss. for the isolated system S if and only if so is \mathcal{P}' .*

Axiom 4.2 *Any two inertial 4-frames, related to the same choice of units and to the same orientation of space, are physically equivalent.*

By adding natural assumptions of (local) existence and regularity of motions of material points one obtains the following

Theorem 4.3 *If Axioms 3.5 and 4.2 hold, and units are given, the constitutive equation (5) becomes*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{F}_{\Sigma}(\theta, P, P', \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathcal{S}, \mathcal{S}') \\ &= \Psi(\|PP'\|, (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \frac{PP'}{\|PP'\|}, \|\mathbf{v}' - \mathbf{v}\|, \mathcal{S}, \mathcal{S}')PP', \end{aligned} \quad (14)$$

where Ψ is a (universal) scalar function of the indicated arguments.

References

For extensive references to A. Bressan's interdisciplinary work involving mathematical physics, logic and philosophy of science, see section 5 and the related references of

M. Pitteri, *On certain weak phase transformations in multilattices*. Preprint Series, n. 100 (2002) of TMR network "Phase Transitions in Crystalline Solids".

Also Rapporto Tecnico DMMMSA n. 88, 2/12/2002.

Available at

www.dmsa.unipd.it/tmr/public_html/PreprintDMMMSA.pdf

References

- [1] A. Bressan. Metodo di assiomatizzazione in senso stretto della meccanica classica. Applicazione di esso ad alcuni problemi di assiomatizzazione non ancora completamente risolti. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 32:55–212, 1962.
- [2] A. Bressan. *A general interpreted modal calculus*. Yale University Press, New Haven-London, 1972. Foreword by N. D. Belnap, Jr., 327 pages.
- [3] A. Bressan. On the usefulness of modal logic in the axiomatization of physics. In K. Shaffner and R. Cohen, editors, *Proceedings of the 1972 biennial meeting of the Philosophy of Science Association, Lansing, Michigan*, pages 285–303, Dordrecht and Boston, 1974. Reidel Publishing Co.
- [4] A. Bressan. (a) On physical possibility and (b) Supplement: a much used notion of physical possibility and Gödel's undecidability theorem. In M. Dalla Chiara Scabbia, editor, *Italian Studies in Philosophy of Science*, pages 197–210 and 211–214. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981.
- [5] A. Bressan. Substantial uses of physical possibility in principles or definitions belonging to well known classical theories of continuous media. *Atti Accad. Naz. Lincei, Memorie Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), Fis.*, 17:137–162, 1983.
- [6] A. Bressan and A. Montanaro. Axiomatic foundations of the kinematics common to classical physics and special relativity. *Rend. Sem. Mat. Padova*, 68:163–182, 1982.
- [7] P. Painlevé. *Les axiomes de la mécanique*. Gauthier-Villars, Paris, 1922.

Turbulent channel flow analysis by a statistical method

Amilcare Pozzi* Renato Tognaccini†

Abstract

A method for the theoretical study of a fluid in turbulent conditions is presented. It is based on the probability equation studied by Hopf and others in the first half of the 20th century. This equation defines the probability of each of the infinite possible velocity fields. The method looks for the solution by a suitable series expansion. The problem is reduced to the solution of a non linear algebraic homogeneous system, derived here in the case of a two dimensional turbulent channel flow.

1 Introduction

The analysis of turbulent flows for any Reynolds number is well known to be still a very challenging task. A work of Spalart (2000) summarizes the status of the art in this field. Today only the RANS methods, based on the solution of the Reynolds Averaged Navier-Stokes equations, enable us to solve high Reynolds number flows of practical interest. The computational time of such methods are feebly influenced by the Reynolds number of the flow, but the closure models that the RANS require are strongly empirical. Spalart foresees that more accurate methods such LES (Large Eddy Simulation) and DNS (Direct Numerical Simulation) will be ready in 2045 (LES) and 2080 (DNS) for practical applications, therefore deterministic methods different than RANS will be not ready for industrial applications in the next decades.

A possible alternative is given by stochastic methods. During the last years interesting results were found in the field of general properties of turbulence; in particular techniques that use experimental or numerical data for a proper analysis of turbulence are available. We recall the Proper Orthogonal Decomposition (POD), also known as Karhunen-Loeve decomposition introduced by Lumley (1967) and, subsequently, developed by others: see for example Moin & Moser (1989). The velocity is represented by a sum of products of solenoidal fields with the coefficients depending on time; these coefficients can be calculated by the analysis of numerical or experimental data. However accurate methods not relying on empirical results and sufficiently fast are still missing.

A formulation that does not require empirical data is based on the statistical analysis and performed in the first part of the last century by Hopf and improved by others: this theory can be found in many books, for example Stanisic

*Dipartimento di Progettazione Aeronautica, Università di Napoli Federico II, tel. +390817682185, email pozzi@unina.it.

†Dipartimento di Progettazione Aeronautica, Università di Napoli Federico II, tel. +390817682179, email rtogna@unina.it.

(1985), Frisch (1998), Mc Comb (1991). Stanisic writes: "Remains much more to learn in functional calculus in connection with computer technology; and we hope that in the near future such technical difficulties in computer technology will overcome. If this occurs, then probably among all the others only Hopf's formulation of turbulence will be retained, since this is the only exact formulation in the entire field of turbulence". Berkooz et al. (1993) mentioned the connection between POD approach and the theory developed by Hopf. In particular they noted that "The invariant measure in functional space is an object of great interest; if one could obtain it explicitly one would have a solution to turbulence...".

Hopf started from the observation that there is a relation between the probability P_i of finding a given velocity field at a given time ($t = 0$) and that at the generic time t (P^t). Therefore only the spatial probability at given time needs to be studied. If one assumes a representation similar to that of the POD methods in order to obtain all infinite possible velocity fields, the coefficients that characterize a particular velocity field are constant: the probability that the velocity field \underline{V} occurs is given by $P_i(\underline{V})$. The problem reduces to the identification of the spatial distribution of P_i , once all infinite velocity fields are represented. Hopf introduced a characteristic functional F , related to P_i (and therefore to P^t) and, in the frame of the functional analysis, derived an equation, the Hopf's equation, subsequently also reformulated by other authors. The unknown in this equation is the characteristic functional. Hopf (and others) studied the fundamental properties of this equation and also found some particular solutions. Hopf looked for the possibility to derive a series expression for F , but, unlikely, the equation for the n -th approximation depended on the approximation $n + 1$, the typical problem of the method based on the Reynolds stress requiring an additional closure relation. In particular Hopf proved that the first order approximation of his problem reduced to the classical RANS equations. Therefore, until now, no solution has been found for the Hopf's equation.

In this paper we propose a method of solution of this equation. We assume, as functional unknown, the probability distribution function instead of its characteristic functional. By considering a particular type of distribution, the normal one (this assumption can be removed) in terms of random variables characterizing the space the functional problem can be transformed in an algebraic one.

As example of application of the method we consider the flow in a 2D channel and 2D turbulence. By using suitable expansions we reduce the problem to a homogeneous system of algebraic second degree equations whose coefficients have been analytically obtained. Moreover the minimum number of phases required to obtain non trivial solutions has also been found.

2 Probability equation

We consider the motion of a viscous fluid, with constant properties, in a region R of a three dimensional $\underline{x}(x_1, x_2, x_3)$ space, bounded by a surface B , governed by the Navier-Stokes equation that in a non dimensional form can be written in the form

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{\nabla} p = \underline{Q}(\underline{V}), \quad (1)$$

where $Q = \nabla^2 \underline{V} / Re - \underline{V} \cdot \nabla \underline{V}$, Re is the Reynolds number and \underline{V} is a solenoidal vector (the velocity vector).

In order to find the solution of this equation we apply the Hopf statistical theory of turbulence, see e.g. (Stanisic, 1985).

Following Hopf we consider the phase space Ω whose elements (phases) are all the velocity vectors $\underline{V}(\underline{r})$ that, at a given time t , are solenoidal in R and satisfy the prescribed boundary conditions on B . The time evolution of the flow is given by the path of a single phase in Ω .

The left hand side of eq. (1) represents the sum of a solenoidal and a gradient vector. The Helmholtz theorem states that this decomposition is unique: therefore it is uniquely determined by the instantaneous phase \underline{V} .

The evolution of the flow is governed by a single-valued functional operation T^t defined on Ω , i.e., given an initial phase at $t = 0$, $\underline{V}(\underline{r}, 0) = \underline{V}_i(r)$, the phase $\underline{V}(\underline{r}, t)$ is uniquely determined: $\underline{V}(\underline{r}, t) = T^t(\underline{V}_i)$. By assuming stationary boundary conditions, T^t is invariant under a translation of the time origin.

In a statistical approach an instantaneous phase distribution is completely characterized by its probability function in Ω . If $P^t(A)$ denotes the probability that the instantaneous phase $\underline{V}(\underline{r}, t)$ lies in the region A of Ω , then, $P^t(A) \geq 0$, ($P^t(\Omega) = 1$).

If A_i denotes the subset of Ω at $t = 0$ which maps into the subset A at time t (i.e. $\underline{V}_i \in A_i \rightarrow \underline{V} \in A$), and P_i denotes the probability function at $t = 0$, then

$$P^t(A) = P_i(A_i) . \tag{2}$$

If dP denotes the "differential" of the probability function P then, by definition

$$\bar{F}(\underline{V}) = \int_{\Omega} F(\underline{V}) dP \tag{3}$$

is the statistical average, or expectation, of any functional of the phase $F(\underline{V})$. The right hand side of eq. (3) is a Lebesgue-Stieltjes integral. The average \bar{F} is only defined with respect to a given phase distribution P .

A phase distribution is called stationary if $\forall t$ and $\forall A \in \Omega$

$$P^t(A) = P_i(A) . \tag{4}$$

Only if the phase distribution is stationary \bar{F} does not depend on time. Instead, in general we have (Hopf's identity):

$$\bar{F} = \int_{\Omega} F(\underline{V}_i) dP^t = \int_{\Omega} F(\underline{V}) dP_i . \tag{5}$$

The scalar product of two real vectors $\underline{V}(\underline{r})$ and $\underline{g}(\underline{r})$ in R is defined as

$$(\underline{V} \cdot \underline{g}) = \int_R \underline{V}(\underline{r}) \cdot \underline{g}(\underline{r}) d\underline{r} , \tag{6}$$

then the phase functional, $\Phi(\underline{g})$, is defined as

$$\Phi(\underline{g}) = \exp [\mathbf{i}(\underline{g} \cdot \underline{V}_i)] , \tag{7}$$

where $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, for any arbitrary continuous function \underline{g} in $R \cup B$. The average of this phase functional, denoted by $F(\underline{g}, t)$ and called characteristic functional

of the phase distribution, is then given by

$$F(\underline{g}, t) = \bar{\Phi} = \int_{\Omega} \exp(\mathbf{i}a_i) dP^t = \int_{\Omega} \exp(\mathbf{i}a) dP_i, \quad (8)$$

where $a_i = (\underline{g} \cdot \underline{V}_i)$, $a = (\underline{g} \cdot \underline{V})$. By using eq. (8) we obtain

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mathbf{i} \int_{\Omega} b \exp(\mathbf{i}a) dP_i, \quad (9)$$

where

$$b = \int_R \underline{g} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} d\underline{x} = \int_R \underline{g} \cdot (\underline{Q} - \nabla p) d\underline{x}. \quad (10)$$

If vectors \underline{g} are solenoidal with vanishing normal component on B we have

$$\int_R \underline{g} \cdot \nabla p d\underline{x} = \int_R \nabla \cdot (p\underline{g}) d\underline{x} = \int_B (\underline{g} \cdot \underline{n}) p dS = 0, \quad (11)$$

therefore b can be written as

$$b = \int_R \underline{g} \cdot \underline{Q} d\underline{x}. \quad (12)$$

In the case of stationary turbulence the phase distribution is stationary and hence for all times $P^t(A) = P_i(A) = P(A)$, $\partial F/\partial t = 0$ and eq. (9) becomes

$$\int_{\Omega} b \exp(\mathbf{i}a_i) dP = 0; \quad (13)$$

this is the probability equation for stationary phase distributions to be solved.

3 The normal probability distribution

In order to solve eq. (13) the first step is to describe the phase space by representing all velocity vectors that are solenoidal in R and satisfy the prescribed boundary conditions on B . This problem can be solved by means of a suitable expansion in R in terms of the three variables of \underline{r} ; this expansion leads to ∞^3 coefficients C_{ijk} that enable us to obtain all required velocity vectors, if the expansion is complete. Such coefficients are the random variables of our statistical approach. We assume here that the C_{ijk} are independent variables and that the pertinent distribution functions are normal; these assumptions can be removed to derive a more general method by using usual statistical techniques.

A random variable x is normally distributed if its probability distribution function $P(x)$ is given by

$$P^+(x^+) = \exp[-(x^+ - \mu^+)^2], \quad (14)$$

where $P^+ = P/(\sigma\sqrt{2\pi})$, $\mu^+ = \mu/(\sigma\sqrt{2})$, $x^+ = x/(\sigma\sqrt{2})$ and μ and σ are the mean (or average statistical or expectation) value and the standard deviation of the random variables. If there are n independent random variables P

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_k P_k(x_k), \quad (15)$$

where any $P_k(x_k)$ has the form (14). In this way the probability P is function of the random variables C_{ijk} . If C_{ijk}^+ denotes $C_{ijk}/(\sigma_{ijk}\sqrt{2})$

$$dP = \prod_{i,j,k} P_{i,j,k}^+(C_{i,j,k}^+) d\Omega^+, \tag{16}$$

where Ω^+ is the space whose elements are the $C_{i,j,k}^+$ and the stationary probability equation becomes

$$\int_{\Omega^+} b \exp(ia) dP^+ = 0. \tag{17}$$

4 Flow in a 2D channel

We consider the flow of a viscous fluid with constant properties in a 2D channel of height $2h$; the flow rate is q . In this case R is the strip $-h \leq y \leq h$, $-\infty < x < \infty$. Let h and $3q/4$ be the reference length and the reference streamfunction. \underline{V}, ψ and p are non dimensional velocity vector, streamfunction and pressure; x and y are non dimensional cartesian coordinates.

The basic solution of Poiseuille is given by: $u_0 = 1 - y^2, v_0 = 0, \psi_0 = y - y^3/3$. It is convenient to write $\underline{V} = \underline{V}_0 + \underline{V}_1, \psi = \psi_0 + \psi_1, p = p_0 + p_1$, where

$$\psi_1(x, y) = \sum_{r=0}^{m_t} h_r(x) F_r(y), \quad h_r(x) = \sum_{t=0}^{n_t} C_{tr} H_t(x). \tag{18}$$

In order to satisfy the boundary conditions at the walls $F_r(\pm 1) = F'_r(\pm 1) = 0$ (the flow rate associated to ψ_1 is vanishing). $H_t(x)$ denote Hermite polynomials with orthogonality weight $\exp(-x^2/2)$. $F_r(y)$ are related to Legendre polynomials as we shall show later. For $m_t \rightarrow \infty$ and $n_t \rightarrow \infty$ we obtain a complete description of the phase space.

4.1 Some properties of $H_t(x)$ and $P_n(y)$.

The orthogonality properties of the polynomial $H_t(x)$, of Hermite, and $P_n(y)$, of Legendre, are

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m \exp(-x^2/2) dx = \sqrt{2\pi} n! \delta_{n,m}; \quad \int_{-1}^1 P_n P_m dy = 2\delta_{n,m}/(2n+1), \tag{19}$$

where δ_{ij} is the Kronecker symbol ($\delta_{ij} = 0$ if $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$). Moreover (Abramowitz & Stegun, 1956):

$$H'_n = xH_n - H_{n+1}; \quad H_{n+1} = xH_n - nH_{n-1};$$

$$H'_n = nH_{n-1}; \quad H''_n = n(n-1)H_{n-2};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_j H_k \exp(-x^2/2) dx = \sqrt{2\pi} r_{n,j,k};$$

$$H'_n = xH_n - H_{n+1}; \quad H_{n+1} = xH_n - nH_{n-1};$$

$$r_{n,j,k} = \frac{n!j!k!}{[(s-n)!(s-j)!(s-k)!]}; \quad 2s = n + j + k; \quad P_n(1) = 1;$$

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n; \quad (n+1)P_{n+1} = (2n+1)yP_n - nP_{n-1}.$$

4.2 The vectors \underline{g} and \underline{Q} ; the scalar a and b

The vector \underline{g} is solenoidal and its normal (to B) component is vanishing on B . Such properties are satisfied by the set of vectors whose cartesian components g_1 and g_2 are:

$$g_{1mn}(x, y) = g'_m(y)H_n(x) \exp(-x^2/2); \quad g_{2mn}(x, y) = g_m(y)H_{n+1}(x) \exp(-x^2/2), \quad (20)$$

where $g_m(y)$ is a continuous function, defined later, with $g_m(\pm 1) = 0$.

Eqs. (18) enable us to write the expressions of $Q_1 = \nabla^2 u_1/Re - uu_x - vv_y$ and $Q_2 = \nabla^2 v/Re - uv_x - vv_y$ in terms of the functions $H_n(x), F_n(y)$ and of the random variables C_{tr} . The scalar a depends on the vector \underline{g} defined by means of eqs. (20); therefore a depends on m and n ; we write a as a_{mn} ; thus in non dimensional form it is

$$a_{mn} = \int_R \underline{V} \cdot \underline{g}_{mn} \, d\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 (ug_{1mn} + vg_{2mn}) dy dx . \quad (21)$$

Also the scalar b depends on m and n , therefore we write b as b_{mn} :

$$b_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 (Q_1 g_{1mn} + Q_2 g_{2mn}) dy dx . \quad (22)$$

Then, if

$$K_{0mr} = \int_{-1}^1 g_m F_r dy; \quad K_{2mr} = \int_{-1}^1 g'_m F'_r dy , \quad (23)$$

it is

$$a_{mn}/\sqrt{2\pi} = \sum_{r=0}^{m_t} \left[n! C_{nr} K_{2mr} - (n+2)! K_{0mr} C_{n+2,r} \right] . \quad (24)$$

The main difficulty in managing eq. (17) is due to the expression of a_{mn} , defined by eq. (21), that depends on all infinite phases: if it is given by a not simple expression it is difficult to handle its exponential. Therefore it is important to write a_{mn} in the simplest possible form. By present definition, due to the orthogonality of the Hermite polynomials, only two random variables C_{tr} appear for each a_{mn} , with the first index, as eq. (24) shows, given by $t = n$ and $t = n + 2$.

4.3 The functions $F_r(y)$ and $g_m(y)$

In order to satisfy the conditions for $F_r(y)$ and $g_m(y)$ and to obtain a property of "little" orthogonality we define

$$F_r = a_r(P_{r+2} - P_r) - (P_{r+4} - P_{r+2}) = -a_r P_r + (1 + a_r)P_{r+2} - P_{r+4} , \quad (25)$$

where $a_r = (2r + 7)/(2r + 3)$. By using eqs. (??) we obtain

$$F'_r = (2r + 7)(P_{r+1} - P_{r+3}); \quad F''_r = (2r + 5)(2r + 7)P_{r+2} . \quad (26)$$

If

$$g_m = P_{m+2} - P_m; \quad g'_m = (2m + 3)P_{m+1} , \quad (27)$$

g_m has the same parity of P_m and all required conditions are satisfied.

The choice of the functions F_r , defined by eq. (25), reduces the number of variables C_{tr} in a_{mn} . Indeed the assumed linear combination of Legendre polynomials, leads to the following expressions for K_{0mr} and K_{2mr} , in eq. (23):

$$K_{0mr} = \sum_{i=0}^1 (-1)^i \frac{2}{2m + 4i + 1} \left[a_r \delta_{r,m+2i} - (1 + a_r) \delta_{r,m-2(i-i)} + \delta_{r,m-2(2-i)} \right], \tag{28}$$

$$K_{2mr} = (4r + 14)(\delta_{r,m} - \delta_{r,m-2}). \tag{29}$$

These equations show that $K_{0mr} \neq 0$ only if $r = m - 4, r = m - 2, r = m, r = m + 2$; $K_{2mr} \neq 0$ only if $r = m$ and $r = m - 2$. Then eq. (24) can be written in the form

$$a_{mn}/\sqrt{2\pi} = n! \sum_{\xi=-1}^0 b_\xi X_{m_\xi} + (n + 2)! \sum_{\xi=-2}^1 c_\xi Y_{m_\xi}, \tag{30}$$

where $m_\xi = m + 2\xi$, $X_{m_\xi} = C_{n,m_\xi}$; $Y_{m_\xi} = C_{n+2,m_\xi}$; $b_0 = 4m + 14$; $b_{-1} = -4m - 6$; $c_{-2} = 2/(2m + 1)$; $c_{-1} = -2/(2m + 5) - 2(1 + a_{m-2})/(2m + 1)$; $c_0 = 2a_m/(2m + 1) + 2(1 + a_m)/(2m + 5)$; $c_1 = -2a_{m+2}/(2m + 5)$.

4.4 b_{mn} in terms of random variables

It is now possible to write b_{mn} in terms of C_{tr} by means of eqs. (22): we use for the product of two finite series the following expression:

$$S(a_i, b_i) = \sum_{i=0}^I a_i \sum_{i=0}^I b_i = \sum_{w=0}^I a_w b_w + \sum_{j=0}^{I-1} \sum_{t=j+1}^I (a_t b_j + a_j b_t), \tag{31}$$

$I = n_t$ when we consider index t of eq. (18) and $I = m_t$ when we consider r . Moreover we define

$$A_w(r, s, f_{qw}) = \sum_{w=0}^{n_t} C_{wr} C_{ws} f_{qw}; \quad B_{tj}(r, s, f_{tj}) = \sum_{j=0}^{n_t-1} \sum_{t=j+1}^{n_t} C_{tr} C_{js} f_{tj};$$

$$B_{jt} = \sum_{j=0}^{n_t-1} \sum_{t=j+1}^{n_t} C_{jr} C_{ts} f_{jt}; \quad B(k, f_{tj} + f_{jl}) = B_{tj}(k, k, f_{tj}) + B_{jt}(k, k, f_{jl}) \tag{32}$$

Then, from eq. (18) $h_r h_s = S(C_{wr} H_w, C_{ws} H_w)$ and after multiplying for $H_q \exp(-x^2/2)$ and integrating over x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_q h_r h_s \exp(-x^2/2) dx = \sqrt{2\pi} \left[A_w(r, s, r_{qw}) + B_{tj}(r, s, r_{qtj}) + B_{jt}(r, s, r_{qtj}) \right]. \tag{33}$$

Similar relations hold for $\int_{-\infty}^{\infty} H_q h'_r h'_s \exp(-x^2/2) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} H_q h_r h'_s \exp(-x^2/2) dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} H_q h'_r h_s \exp(-x^2/2) dx$. Moreover, due to the continuity equation, $uv_x + vu_y = (uv)_x + (vu)_y = (2u_0 u_1 + u_1 u_1)_x + (vu)_y$ and $wv_x + vv_y = (wv)_x + (vu)_y$ and, after some manipulations we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'_m H_n (2u_0 u_1 + u_1 u_1)_x \exp(-x^2/2) dx = g'_m \int_{-\infty}^{\infty} (2u_0 u_1 + u_1 u_1) H_{n+1} \exp(-x^2/2) dx, \tag{34}$$

again similar relations are obtained for the terms with the same structure.

We can write

$$b_{mn} = b_{mnL} + b_{mnNL} , \tag{35}$$

where b_{mnL} is linear in C_{tr} and b_{mnNL} is not linear in C_{tr} ; moreover b_{mnL} can be written as $b_{Re} + b_{co}$, where b_{Re} is the sum of terms that have as coefficient $1/Re$, whereas b_{co} arises from convective terms in which $u_0(y)$ is present. It results

$$b_{mnL} = \sum_{\xi=0}^4 e_{4-\xi}^* (\xi + n)! \sum_{r=0}^{m_t} C_{\xi+n,r} K_{4-\xi,m,r} \tag{36}$$

where $e_0^* = e_4^* = 1/Re$, $e_1^* = -e_3^* = 1$, $e_2^* = 2/Re$, $K_{1mr} = \int_{-1}^1 u_0 g_m F_r dy$, $K_{3mr} = \int_{-1}^1 u_0 (2g'_m F'_r + g''_m F_r) dy$, $K_{4mr} = -\int_{-1}^1 g'_m F_r''' dy$. Hence:

$$\begin{aligned} \frac{b_{mnNL}}{\sqrt{2\pi}} &= -\sum_{k=0}^{m_t} \left[A_w(k, R_1) + B(k, RB) \right] - \\ &\quad - \sum_{r=0}^{m_t-1} \sum_{s=r+1}^{m_t} \left[A_w(r, s, R_2) + B_{tj}(r, s, RD_{tj}) + B_{jt}(r, s, RD_{jt}) \right] , \end{aligned} \tag{37}$$

where the expressions of the terms R_1 , RB , R_2 , RD_{tj} and RD_{jt} have been analytically obtained.

5 The probability equation in terms of μ and σ

In order to obtain the probability equation in terms of μ_{tr} and σ_{tr} (mean values and standard deviations of the random variables) we must calculate the integral of the product $b_{mn} \exp(\mathbf{ia}_{mn})$ over the variables C_{tr} , as indicated by eq. (17), by using b_{mn} given by eq. (22) and a_{mn} given by eq. (30). Then, eq. (17) can be written in the form

$$\int_{\Omega^+} b_{mn} \exp(\mathbf{ia}_{mn} - N^{rs} - N^X - N^Y) d\Omega_{rs}^+ d\Omega_2^+ d\Omega_4^+ = 0 , \tag{38}$$

where Ω_2^+ is the set of the variables X_r^+ , Ω_4^+ is the set of the variables Y_r^+ and Ω_{rs}^+ is the set of variables C_{rs} , different than X_r^+ and Y_r^+ (defined by eq. (30)). Moreover

$$N^{rs} = C_{rs}^+ - \mu_{rs}^+; \quad N^X = \sum_{\xi=-1}^0 (X_{m_\xi}^+ - \mu_{n,m_\xi}^+)^2; \quad N^Y = \sum_{\xi=-2}^1 (Y_{m_\xi}^+ - \mu_{n+2,m_\xi}^+)^2 . \tag{39}$$

We obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_{rs} \exp(-N^{rs2}) dN^{rs} = \mu_{rs}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} C_{rs}^2 \exp(-N^{rs2}) dN^{rs} = \mu_{rs}^2 + \sigma_{rs}^2 \tag{40}$$

5.1 Integration over Ω_{rs} , Ω_2 and Ω_4

Taking into account eqs. (40) we have

$$\int_{\Omega_{rs}^+} b_{mn} \exp(-N^{rs}) d\Omega_{rs}^+ = b_{mn}^0 , \tag{41}$$

where b_{mn}^0 is obtained from b_{mn} when μ_{rs} and $\mu_{rs}^2 + \sigma_{rs}^2$ take the place of C_{rs} and C_{rs}^2 respectively. We also obtain

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_r \exp(-\xi_r^2) d\xi_r = \mu_{n,r} + i\sigma_{n,r} b_r^*; \quad \int_{-\infty}^{\infty} X_r^2 \exp(-\xi_r^2) d\xi_r = \mu_{n,r}^2 + \sigma_{n,r}^2 - b_r^{*2} \sigma_{n,r}^2 + i b_r^* \mu_{n,r} \sigma_{n,r}, \quad (42)$$

(similar expressions hold for the variable Y_r) where

$$\xi_r = X_r^+ - \mu_{n,r}^+ - i b_r / \sqrt{p_i} \sigma_{nr}; \quad \eta_r = Y_r^+ - \mu_{n+2,r}^+ + i c_r / \sqrt{\pi}; \quad (43)$$

$$N_1^X = \sum_{\xi=-1}^0 \xi_{m\xi}^2; \quad N_1^Y = \sum_{\xi=-2}^1 \eta_{m\xi}^2. \quad (44)$$

Then

$$\int_{\Omega_2^+ + \Omega_4^+} b_{mn}^0 \exp(-N_1^X - N_1^Y) d\Omega_2^+ d\Omega_4^+ = b_{mn}^t, \quad (45)$$

where b_{mn}^t is obtained from b_{mn}^0 by substitutions similar to those of b_{mn}^0 , taking into account eqs. (42).

The probability equation now can be written as

$$b_{mn}^t = 0. \quad (46)$$

6 The system of real algebraic equations

b_{mn}^t , given by eq. (45), is a complex polynomial of degree two, with 2 integer parameters, m and n (defined by means of the vector \underline{g}_{mn}): the unknowns are μ_{rs} and σ_{rs} . Therefore from eq. (46) it is possible to obtain two real algebraic equations that lead to a system that determines the unknowns (by using the number of m and n that it is necessary).

These equations can be written by separating the linear part (arising from the b_{mnL}) from the nonlinear one (arising from b_{mnNL}) as follows:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=0}^4 e_{4-\xi} (\xi + n)! \sum_{r=0}^{m_i} \mu_{\xi+n,r} K_{4-\xi,m,r} &= B_R(m, n, \mu, \sigma), \\ n! e_4 s_{i_0,1}(K_{4,m,m_{\xi_0}}) - e_2 (n+2)! s_{i_2,1}(K_{2,m,m_{\xi_2}}) &= B_C(m, n, \mu, \sigma), \end{aligned} \quad (47)$$

where $e_i = \sqrt{\pi} c_i^*$ and

$$s_{i_0,q}(R) = \sum_{\xi_0=-1}^0 [(\sigma_{n,m_{\xi_0}} b_{\xi_0}^*)^q R]; \quad s_{i_2,q}(R) = \sum_{\xi_2=-2}^1 [(\sigma_{n+2,m_{\xi_2}} c_{\xi_2}^*)^q R], \quad (48)$$

where $m_{\xi_i} = m + 2\xi_i$, B_R and B_C are two real polynomials of second degree in the variables μ_{rs} and σ_{rs} .

The system of equations to be solved is homogeneous and its coefficients have been analytically derived. This feature can be useful to better understand the physics of the problem. In particular to important questions can be analyzed:

- Do non trivial solutions exist?
- What values of the numerical parameters (Re for instance) do provide solutions of physical relevance?

Once the unknowns μ_{tr} and σ_{tr} are obtained, the physical problem is solved from a statistical viewpoint since the PDF for each phase are known (for instance, the mean velocity field in the channel can be computed).

The structure of the system enable us to look for analytical solution. First of all μ_{tr} can be determined independently of σ_{tr}^2 . In addition, there are some singular equations due to the truncation of the infinite series: they provide a non homogeneous, closed, linear system. Other unknowns can be obtained by linear subsets of equations.

The first step of our analysis has been to verify the number of independent phases necessary to obtain non trivial solutions (the trivial solution corresponds to the base Poiseuille flow). We wrote the system adopting $m_t = 1$ and $n_t = 1$, corresponding to a phase space defined by 4 phases and we verified that the system is incompatible with non trivial solutions. By adopting $m_t = 2$, $n_t = 2$, (9 phases), we found, again, that the system is incompatible with non trivial solutions. Finally, with $m_t = 3$, $n_t = 3$ (16 phases) we found that the system admits non trivial solution.

7 Conclusions

We presented a theoretical statistical method for solving turbulence flows that does not require empirical information. This method is based on the exact probability functional equation found by Hopf, in the first half of past century, starting from Navier-Stokes equations. The Hopf approach requires the representation of all infinite possible velocity fields connected with the chaotic turbulent flow; the functional equation gives the probabilities associated to all these fields, the unknown of the equation is the probability distribution function (PDF) or the related characteristic functional F .

The method has been applied to derive the equations for a 2D channel flow and 2D turbulence.

In order to represent all solenoidal velocity fields, we considered, for the streamfunction, an expansion in terms of orthogonal polynomials (a complete system): in particular Hermite functions along the x axis and a suitable linear combination of Legendre polynomials (satisfying the boundary conditions) along the y axis. The free coefficients of the expansion are the random variables.

The PDF has been assumed "normal", i.e. characterized by two parameters, the mean value μ and the standard deviation σ ; the random variables were assumed independent. Thus in this approach we have ∞^2 unknowns μ and σ .

The application of the method needs the solution of a system of algebraic real equations of second degree, whose coefficients were obtained analytically. We found the minimum number of phases (16) providing non trivial solution.

In the present paper we made three basic assumptions: two-dimensional turbulence, the random variables are independent, the PDF is normal. All these assumption can be removed in a more general approach. For the 3D flow the potential vector can be considered instead of the streamfunction and an expansion can also be added in z direction by means of Hermite polynomials. It is also possible to assume non "normal" PDF by using the classical methods of statistical analysis.

Aknowledgement

This work has been supported by MIUR (Ministero Istruzione Università e Ricerca)

References

- Abramowitz M., Stegun, I.A. 1965. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- Berkooz G., Homels P., Lumley J. 1993. *The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol 25, pag. 557.
- Frisch U. 1998. *Turbulence*, Cambridge.
- Lumley, J.L. 1967. *The Structure of Inhomogeneous turbulence*. "Atmospheric Turbulence and Wave Propagation" pp. 166-178- Nauka- Mosca.
- Mc Comb W. D. 1991. *The Physics of Fluid Turbulence*, pp. 167-176 Oxford.
- Moin P., Moser R.D. 1989. *Characteristic-Eddy Decomposition of Turbulence in a Channel*, J. Fluid Mech. 200, pp. 471-509.
- Spalart P.R. 2000. *Strategies for turbulence modelling and simulations* Int. J. of Heat and Fluid Flow, vol. 21 pp. 252-263.
- Stanisic M.M. 1985. *The Mathematical Theory of Turbulence*, Springer- Verlag.



L'alleanza Ingegneria-Economia



Mario Raffa

DIEG, Dip. di Ingegneria Economico Gestionale

L'ingegnere gestionale in Europa

- L'Ingegnere Gestionale è un fatto innovativo anche nel contesto europeo, frutto di una più rapida e attenta risposta del nostro sistema universitario all'evoluzione delle esigenze formative e culturali dell'Ingegneria
- In Europa diverse università stanno introducendo percorsi formativi riconducibili a quello dell'Ingegneria Gestionale.

Alcuni esempi:

- Svizzera: CdL simile al Gestionale, orient. sistemi produttivi (Politecnico Zurigo)
- Spagna: Laurea 5 anni, come il Gestionale (Univ. Politecnica di Catalunya)
- Francia: l'Ingénieur Entrepreneur
- Germania: Curriculum "misto" ingegneria-economia (Aachen)
- Olanda: Curriculum in tecnologia e system policy (Delft)

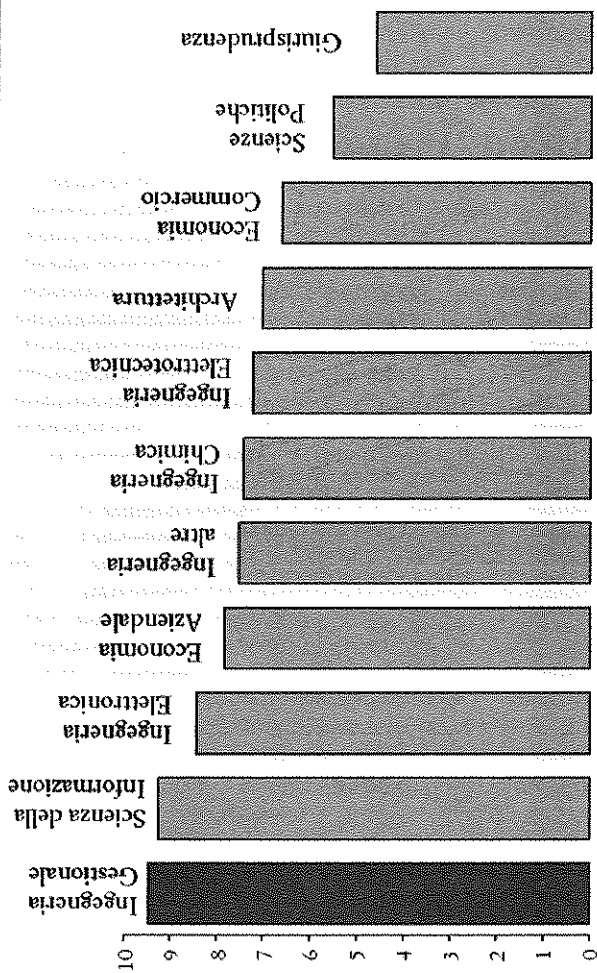
La risposta degli studenti e l'evoluzione dell'offerta didattica (1)

- **Fine anni '70:**
avvio del Corso di Laurea in Ingegneria delle Tecnologie Industriali ad indirizzo economico-organizzativo (presso l'Università della Calabria e l'Università di Udine)
- **Inizio anni '80:**
graduale diffusione nei principali Atenei (a partire dal Politecnico di Milano e dall'Università di Palermo)
- **Inizio anni '90:**
viene attivato il Corso di Laurea in Ingegneria gestionale

La risposta degli studenti e l'evoluzione dell'offerta didattica (2)

- **A.A. 1999/2000: il CdL in Ingegneria gestionale**
 - attivo in 17 Atenei, nei quali rappresenta in molti casi uno dei primi corsi di laurea
 - rappresenta il 10% delle matricole e più del 7% del totale degli iscritti di Ingegneria
- **A.A. 2001/2002: la Laurea di primo livello "gestionale"**
 - attiva in 25 Atenei (in alcuni casi su più sedi)
 - circa 4.700 matricole pari a quasi il 15% degli immatricolati in Ingegneria di tali Atenei

Gli sbocchi professionali (1)



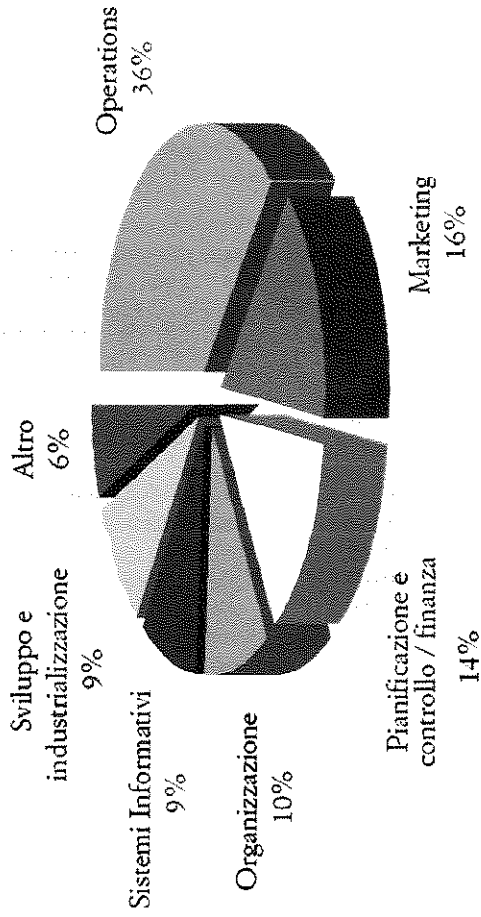
Fonte: "Il filo di Arianna" - Fondazione Agnelli (<http://www.fondazione-agnelli.it/arianna/>)

Indicatore globale che tiene conto di:

- a) tempo di attesa rispetto alla prima occupazione, b) stabilità dell'occupazione, c) numero di laureati occupati a tre anni dalla laurea, ...

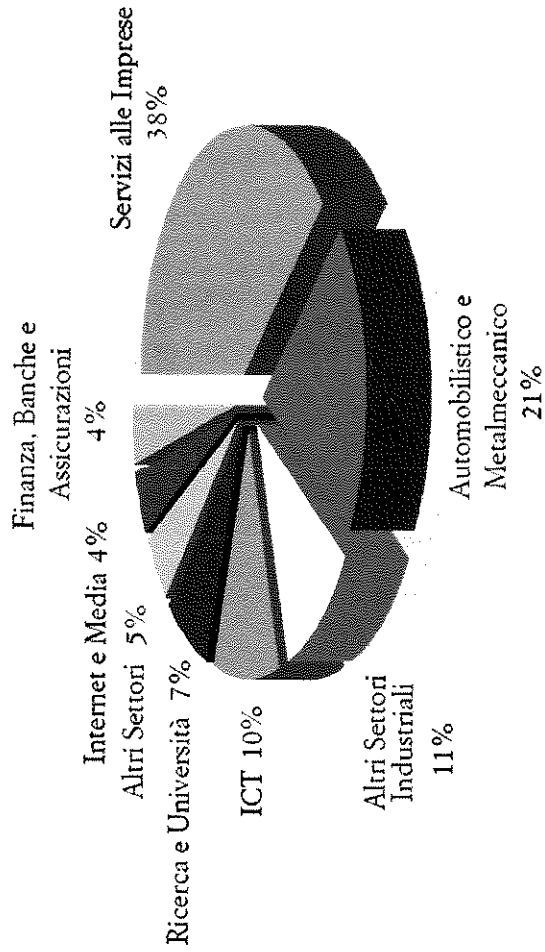
Gli sbocchi professionali (2)

*Campi di attività degli ingegneri gestionali
(Laureati del Politecnico di Milano)*

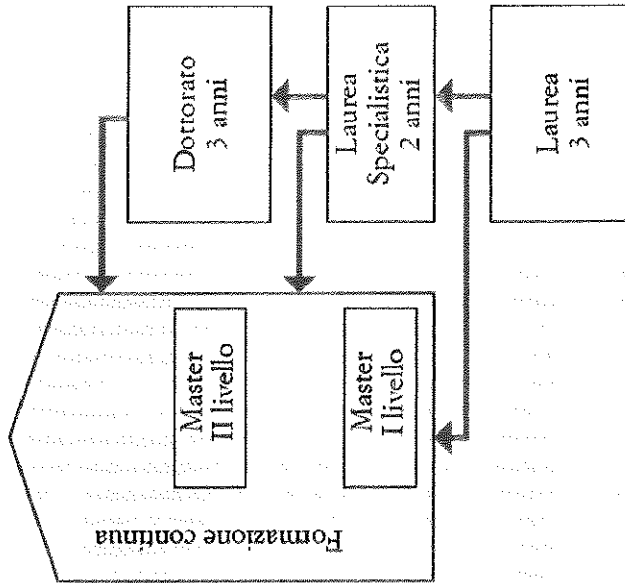


Gli sbocchi professionali (3)

*Settori di impiego degli ingegneri gestionali
(Laureati del Politecnico di Torino)*



Gli elementi della Riforma



- Articolazione dell'offerta formativa di base
- Principi di autonomia e flessibilità
- Utilizzo dei crediti formativi

Aspetti critici

- **Laurea di primo livello:**
 - Figura meno trasversale, interdisciplinare del laureato quinquennale
 - Denominazione della laurea in relazione all'indirizzo:
 - Soluzione interclasse
- **Laurea specialistica:**
 - Deve ricostruire la trasversalità dell'Ingegnere Gestionale
- **Intreccio formazione – lavoro**
 - Ruolo delle imprese:
 - attrarre i laureati definendo percorsi di carriera e possibilità formative on the job
 - Ruolo delle università:
 - prevedere meccanismi di rientro, predisporre iniziative formative adeguate in termini di lauree specialistiche, master di I e II livello, dottorato
- **Importanza del ruolo delle imprese e delle istituzioni**
- **Necessità di confronto e collaborazione continua tra le università e le imprese**

Per il successo della riforma l'Università non può operare da sola !

On the Dynamics of the Brusselator System

Salvatore Rionero

Università di Napoli Federico II

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"

Complesso Universitario Monte S. Angelo. Via Cinzia, 80126 Napoli - ITALIA

E-mail: rionero@unina.it

1 Introduction

Let C_i ($i = 1, 2$) be the concentration of two chemical products in an autocatalytic reaction. According to the Prigogine-Brusselator model [1-6], the behaviours of the activator C_1 and the inhibitor C_2 are governed by the system

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = a - (b+1)C_1 + \gamma_1 \Delta C_1 + C_1^2 C_2 \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = bC_1 + \gamma_2 \Delta C_2 - C_1^2 C_2 \end{cases} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

under suitable boundary conditions, where a, b, γ_1, γ_2 are positive constants and $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded smooth domain. Our aim is to study the long time behaviour of the solutions of (1). Precisely, since $S = (\bar{C}_1, \bar{C}_2)$, with

$$\bar{C}_1 = a, \quad \bar{C}_2 = \frac{b}{a} \quad (2)$$

is an equilibrium solution of (1) under the Robin boundary data

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{\beta_*} \nabla C_1 \cdot \mathbf{n} = a \\ C_2 + \frac{1}{\beta_*} \nabla C_2 \cdot \mathbf{n} = \frac{b}{a} \end{cases} \quad \text{on } \Sigma = \partial\Omega \quad (3)$$

(β_* = positive constant, \mathbf{n} outward unit normal) our aim is precisely to study the long time behaviour of the solutions through the stability-instability of S . In particular, since S is solution of the kinetic equations [14], our goal is to put in evidence the stabilizing-destabilizing effect of diffusion, via the methodology introduced in [12-14].

The plan of the paper is the following. Section 2 is devoted to preliminaries. In Section 3, two theorems of linear stability are obtained while in the

subsequent Sections conditions guaranteeing diffusion driven stability (Section 4) and diffusion driven instability (Section 5) are obtained. Successively in Section 6 a theorem of nonlinear local asymptotic stability is proved. The last Section (Section 7) is devoted to the global nonlinear asymptotic stability and absorbing sets.

2 Preliminaries

We assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be an open bounded set with (at least) C^2 boundary Σ [7, 11, 17], having the interior cone property (that is, there exists a fixed cone Γ_Ω such that each $\mathbf{x} \in \Omega$ is the vertex $\Gamma_\Omega(\mathbf{x}) \subset \bar{\Omega}$ and congruent to Γ_Ω). To (1)-(3) we append the initial data

$$\begin{cases} C_1(\mathbf{x}, 0) = C_1^*(\mathbf{x}) \\ C_2(\mathbf{x}, 0) = C_2^*(\mathbf{x}). \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4)$$

We remark that

- i) S is the unique constant solution of (1), (3);
- ii) the perturbations equations are given by

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = (b-1)U + a^2V + \gamma_1 \Delta U + f \\ \frac{\partial V}{\partial t} = -bU - a^2V + \gamma_2 \Delta V - f \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} U + \frac{1}{\beta_*} \nabla U \cdot \mathbf{n} = 0 \\ V + \frac{1}{\beta_*} \nabla V \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad \text{on } \Sigma \quad (6)$$

with

$$\begin{cases} f = \frac{b}{a}U^2 + 2aUV + U^2V \\ U = C_1 - \bar{C}_1, \quad V = C_2 - \bar{C}_2; \end{cases} \quad (7)$$

- iii) denoting by $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\Sigma$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ respectively the $L^2(\Omega)$ and $L^2(\Sigma)$ norms and their scalar products and setting $(\alpha, \beta$ positive scalings to be

chosen later)

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \alpha u, \quad V = \beta v, \quad \mu = \frac{\alpha}{\beta} \\ b_{11} = b - 1 - \bar{\alpha}\gamma_1, \quad a_{12} = a^2 \\ a_{21} = -b, \quad b_{22} = -(a^2 + \bar{\alpha}\gamma_2) \\ 0 < \bar{\alpha} = \min_{W^{1,2}(\Omega, \beta_*)} \frac{\|\nabla\varphi\|^2 + \beta_*\|\varphi\|_{\Sigma}^2}{\|\varphi\|^2}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$W^{1,2}(\Omega, \beta_*)$ being the subspace of $W^{1,2}(\Omega)$ constituted by the functions φ verifying (11)₂ (**space of the kinematic admissible perturbations**) one obtains

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = b_{11}u + \frac{a_{12}}{\mu}v + f^* + \frac{1}{\alpha}f(U, V) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu a_{21}u + b_{22}v + g^* - \frac{1}{\beta}f(U, V) \end{array} \right. \quad (9)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} f^* = \gamma_1(\Delta u + \bar{\alpha}u) \\ g^* = \gamma_2(\Delta v + \bar{\alpha}v) \end{array} \right. \quad (10)$$

iv) $\bar{\alpha}$ is the lowest eigenvalue of the spectral problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi + \frac{1}{\beta_*}\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Sigma \end{array} \right. \quad (11)$$

v) problem (11) admit a sequence $\{\alpha_n\}$ of eigenvalues such that [8 – 11, 17]

$$0 < \bar{\alpha} = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$$

and the associate eigenfunctions $\{\varphi_n\}$ constitute a orthogonal system, complete in $W^{1,2}(\Omega, \beta_*)$.

3 Linear stability

Theorem 1 - Let

$$b < 1 + \bar{\alpha}\gamma_1. \tag{12}$$

Then S is linearly stable with respect to the perturbations $(U, V) \in [W^{1,2}(\Omega, \beta_*)]^2$.

Proof. Let us introduce the functional [9,10,11]

$$W = \frac{1}{2} \left[A(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \|b_{11}v - \mu a_{21}u\|^2 + \left\| \frac{1}{\mu} a_{12}v - b_{22}u \right\|^2 \right] \tag{13}$$

which time derivative, along the solutions of (9), is given by

$$\frac{dW}{dt} = AI(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \Psi + \Psi^* \tag{14}$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} I = b_{11} + b_{22} = b - [1 + a^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\bar{\alpha}] \\ A = b_{11}b_{22} - a_{12}a_{21} = -(b - 1 - \bar{\alpha}\gamma_1)(a^2 + \bar{\alpha}\gamma_2) + a^2b \\ \Psi = \langle \alpha_1u - \alpha_3v, f^* \rangle + \langle \alpha_2v - \alpha_3u, g^* \rangle \\ \Psi^* = \frac{1}{\alpha} \langle \alpha_1u - \alpha_3v, f(U, V) \rangle + \frac{1}{\beta} \langle \alpha_2v - \alpha_3u, -f(U, V) \rangle \\ \alpha_1 = A + \mu^2 a_{21}^2 + b_{22}^2, \quad \alpha_2 = A + b_{11}^2 + \frac{1}{\mu^2} a_{12}^2 \\ \alpha_3 = \mu b_{11} a_{21} + \frac{1}{\mu} a_{12} b_{22}. \end{array} \right. \tag{15}$$

By virtue of (12), it follows that

$$b_{11}b_{22}a_{12}a_{21} = (b - 1 - \bar{\alpha}\gamma_1)(a^2 + \bar{\alpha}\gamma_2)a^2b < 0 \tag{16}$$

hence choosing

$$\mu = \bar{\mu} = \sqrt{\left| \frac{a_{12}b_{22}}{a_{21}b_{11}} \right|} \tag{17}$$

it follows that $\alpha_3 = 0$ and therefore (8)₈ implies $\Psi \leq 0$. Neglecting Ψ^* , (14) gives

$$\frac{dW}{dt} < AI(\|u\|^2 + \|v\|^2). \tag{18}$$

In view of (12)-(13), it follows that

$$\begin{cases} I < 0, & A > 0 \\ k_1 W < \|u\|^2 + \|v\|^2 < k_2 W \end{cases} \quad (19)$$

with $k_1 < k_2$ positive constants. Setting

$$d = |I|Ak_1 \quad (20)$$

it follows that

$$W \leq W_0 e^{-dt}. \quad (21)$$

Theorem 2 - Let $b \geq 1 + \bar{\alpha}\gamma_1$ and

$$b < b_c = \min \left[1 + a^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\bar{\alpha}, (1 + \bar{\alpha}\gamma_1) \left(1 + \frac{a^2}{\bar{\alpha}\gamma_2} \right), \frac{\gamma_1}{\gamma_2} a^2 + 1 + 2\gamma_1\bar{\alpha} \right]. \quad (22)$$

Then S is (linearly) stable with respect to the perturbations

$$\begin{cases} u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}) \\ v = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (23)$$

with (23) derivable, term by term, one time with respect to t and two times with respect to the spatial variables.

Proof. (23) imply

$$\begin{cases} \Delta u = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}) \\ \Delta v = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Y_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (24)$$

hence, linearizing (9), it turns out that

$$\begin{cases} \frac{dX_n}{dt} = (b - 1 - \alpha_n\gamma_1)X_n + \frac{a^2}{\mu}Y_n \\ \frac{dY_n}{dt} = -\mu bX_n - (a^2 + \alpha_n\gamma_2)Y_n. \end{cases} \quad (25)$$

Setting $(I_1 = I, A_1 = A, \alpha_1 = \bar{\alpha})$

$$\begin{cases} I_n = b - 1 - a^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)\alpha_n \\ A_n = -\alpha_n\gamma_2b + (1 + \alpha_n\gamma_1)(a^2 + \alpha_n\gamma_2) \end{cases} \quad (26)$$

it easily follows that (22) implies

$$I_n < 0, \quad A_n > 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

and hence the eigenvalues of the matrix $B = \begin{pmatrix} b - 1 - \alpha_n & \frac{a^2}{\mu} \\ -\mu b & -(a^2 + \alpha_n\gamma_2) \end{pmatrix}$

have negative real part, $\forall n$.

Theorem 3 - *Let either*

$$b > 1 + a^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\bar{\alpha} \quad (28)$$

or there exists at least one $n \in \mathbb{N}$ such that

$$b > (1 + \alpha_n\gamma_1) \left(1 + \frac{a^2}{\alpha_n\gamma_2} \right). \quad (29)$$

Then S is (linearly) unstable.

Proof. Either (28) or (29) imply that the matrix B has one eigenvalue with positive real part for at least an $n \in \mathbb{N}$.

4 Diffusion driven stability

It is easily seen that S is an equilibrium solution also in the absence of diffusion ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). In that case the linearized version of (9) is

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b - 1)u + \frac{a^2}{\mu}v \\ \frac{dv}{dt} = -\mu bu - a^2v. \end{cases} \quad (30)$$

By virtue of

$$\begin{cases} I_0 = b - (1 + a^2) \\ A_0 = -a^2(b - 1) + a^2b = a^2 \end{cases} \quad (31)$$

it turns out that

i) $b > 1 + a^2 \Rightarrow$ (linear) instability;

ii) $b < 1 + a^2 \Rightarrow$ (linear) stability.

Then, in view of Theorem 1, it immediately follows that

Theorem 4 - *Let*

$$a^2 < b - 1 < \bar{\alpha}\gamma_1. \tag{32}$$

Then S (unstable in the absence of diffusion) is stabilized by diffusion.

5 Diffusion driven instability (Turing effect)

Theorem 5 - *Let*

$$\begin{cases} \gamma_1 \neq \gamma_2, & 1 < b < 1 + a^2 \\ \gamma_1 < \frac{b-1}{\bar{\alpha}}, & \gamma_2 > \frac{a^2(1 + \bar{\alpha}\gamma_1)}{(b-1 - \bar{\alpha}\gamma_1)\bar{\alpha}}. \end{cases} \tag{33}$$

Then S (stable in the absence of diffusion) is destabilized by diffusion.

Proof. Let us look for

$$A_1 = A = \gamma_1\gamma_2\bar{\alpha}^2 + [\gamma_1a^2 + (1-b)\gamma_2]\bar{\alpha} + a^2 < 0. \tag{34}$$

Obviously (34) can be verified only if

$$\gamma_1a^2 + (1-b)\gamma_2 < 0. \tag{35}$$

Therefore cannot be $\gamma_1 = \gamma_2$, since then (35) reduces to $b > 1 + a^2$ which implies the instability of S in the absence of diffusion. Analogously by virtue of

$$A = -(b-1 - \bar{\alpha}\gamma_1)(a^2 + \bar{\alpha}\gamma_2) + ba^2 \tag{36}$$

it follows that only for $b > 1 + \bar{\alpha}\gamma_1$ one can have $A < 0$. Then solving (36) with respect to γ_2 , (33)₄ immediately follows.

Remark 1 - *The diffusion driven instability is called Turing instability, since Alan Turing in 1952 argued this phenomenon in [12].*

6 Nonlinear Stability

Theorem 6 - *Let (12) hold. Then S is stable and locally attractive with respect to the uniformly bounded perturbations.*

Proof. We begin by following the procedure used for showing Theorem 1 of [13].

For any constant $\bar{\varepsilon}$ such that

$$0 < \bar{\varepsilon} < \inf \left(\frac{|I|}{2\bar{\alpha}}, \frac{A}{\bar{\alpha}|I|}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 + \frac{1-b}{\bar{\alpha}} \right), \tag{37}$$

setting

$$\begin{cases} \bar{b}_{11} = b_{11} + \bar{\alpha}\bar{\varepsilon}, & \bar{b}_{22} = b_{22} + \bar{\alpha}\bar{\varepsilon} \\ \bar{\gamma}_i = \gamma_i - \bar{\varepsilon}, & (i = 1, 2) \end{cases} \tag{38}$$

it easily turns out that ¹

$$\begin{cases} \bar{I} = \bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} < 0 \\ \bar{A} = \bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \end{cases} \tag{39}$$

Then, in view of (15) we obtain

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \bar{b}_{11}u - \frac{a_{12}}{\mu}v + \bar{f}^* + \frac{1}{\alpha}f(U, V) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu a_{21}u + \bar{b}_{22}v + \bar{g}^* - \frac{1}{\beta}f(U, V) \end{cases} \tag{40}$$

with

$$\begin{cases} \bar{f}^* = \bar{\gamma}_1(\Delta u + \bar{\alpha}u) + \bar{\varepsilon}\Delta u \\ \bar{g}^* = \bar{\gamma}_2(\Delta v + \bar{\alpha}v) + \bar{\varepsilon}\Delta v. \end{cases} \tag{41}$$

¹In fact, in view of $I < 0$, it follows that

$$\begin{cases} 0 < \bar{\varepsilon} < \frac{|I|}{2\bar{\alpha}} \Rightarrow \bar{I} = I + 2\bar{\alpha}\bar{\varepsilon} < 0 \\ 0 < \bar{\varepsilon} < \frac{A}{\bar{\alpha}|I|} \Rightarrow \bar{A} = A + (\bar{\alpha}\bar{\varepsilon})^2 + \bar{\alpha}\bar{\varepsilon}I > 0. \end{cases}$$

Then, using the substitution

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & a_{12} & a_{21} & \bar{b}_{22} & \bar{f}^* & \bar{g}^* & f \\ b_{11} & a_{12} & a_{21} & b_{22} & f^* & g^* & f \end{pmatrix} \tag{42}$$

from (19)-(21) we obtain that, along the solutions of (40), it turns out that

$$\frac{d\bar{W}}{dt} = \bar{A}\bar{I}(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \bar{\Psi}^* + \bar{\Psi} \tag{43}$$

with

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \left[\bar{A}(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \|\bar{b}_{11}v - \mu a_{21}u\|^2 + \left\| \frac{1}{\mu} a_{12}v - \bar{b}_{22}u \right\|^2 \right] \tag{44}$$

and

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_1 = \bar{A} + \mu^2 a_{21}^2 + \bar{b}_{22}^2, \bar{\alpha}_2 = \bar{A} + \bar{b}_{11}^2 + \frac{1}{\mu^2} a_{12}^2, \\ \bar{\alpha}_3 = \mu \bar{b}_{11} a_{21} - \frac{1}{\mu} a_{12} \bar{b}_{22} \\ \bar{\Psi} = \langle \bar{\alpha}_1 u - \bar{\alpha}_3 v, \bar{f}^* \rangle + \langle \bar{\alpha}_2 v - \bar{\alpha}_3 u, \bar{g}^* \rangle \\ \bar{\Psi}^* = \frac{1}{\alpha} \langle \bar{\alpha}_1 u - \bar{\alpha}_3 v, f(U, V) \rangle - \frac{1}{\beta} \langle \bar{\alpha}_2 v - \bar{\alpha}_3 u, f(U, V) \rangle. \end{cases} \tag{45}$$

By virtue of

$$\bar{b}_{11} \bar{b}_{22} a_{12} a_{21} < 0 \tag{46}$$

choosing

$$\mu = \bar{\mu} = \sqrt{\left| \frac{a_{12} \bar{b}_{22}}{\bar{b}_{11} a_{21}} \right|} \tag{47}$$

one obtains

$$\begin{cases} \bar{\Psi} = \bar{\alpha}_1 \langle u, \bar{f}^* \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle v, \bar{g}^* \rangle \\ \bar{\Psi}^* = \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha} \langle u, f(U, V) \rangle - \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha} \bar{\mu}^* \langle v, f(U, V) \rangle. \end{cases} \tag{48}$$

It easily follows that

$$\begin{cases} \langle u, \bar{f}^* \rangle < -\bar{\varepsilon} \|\nabla u\|^2 \\ \langle v, \bar{g}^* \rangle < -\bar{\varepsilon} \|\nabla v\|^2 \end{cases} \tag{49}$$

hence

$$\bar{\Psi} \leq -\delta_1(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \tag{50}$$

with

$$\delta_1 = \varepsilon \inf(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2). \tag{51}$$

If there exists a positive constant m such that

$$|U|, |V| < m \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{52}$$

in view of (48)₂, it turns out that there exists a positive constant $m^* = m^*(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, m, \bar{\mu}^*)$ such that

$$|\bar{\Psi}^*| \leq M\alpha(1, |u^*|^3 + |v^*|^3 + u^{*2}|v^*| + |u^*|v^{*2}) \tag{53}$$

with $M = M(m, \bar{\mu})$. By virtue of the Hölder's and Sobolev inequalities [7, 16-17]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi_1| \varphi_2^2 d\Omega &\leq \|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_2^2\| \\ \|\varphi_2^2\| &\leq c(\Omega)[\|\varphi_2\|^2 + \|\nabla \varphi_2\|^2] \end{aligned} \tag{54}$$

with c positive constant, one obtains

$$|\bar{\Psi}^*| \leq c\alpha \left[(\|u^*\|^2 + \|v^*\|^2)^{1/2} (\|\nabla u^*\|^2 + \|\nabla v^*\|^2) + (\|u^*\|^2 + \|v^*\|^2)^{3/2} \right] \tag{55}$$

and hence (δ_2 positive constant)

$$\frac{d\bar{W}}{dt} \leq -(d - \delta_2\alpha\bar{W}^{1/2})\bar{W} - (\delta_1 - \alpha\delta_2\bar{W}^{1/2})(\|\nabla u^*\|^2 + \|\nabla v^*\|^2). \tag{56}$$

Therefore

$$\alpha\delta_2\bar{W}_0^{1/2} = \bar{\delta} < \inf(d, \delta_1) \tag{57}$$

(by recursive argument) implies

$$\frac{d\bar{W}}{dt} \leq -(d - \bar{\delta})\bar{W} \tag{58}$$

i.e.

$$\bar{W} \leq \bar{W}_0 e^{-(d-\bar{\delta})t}. \tag{59}$$

7 Absorbing sets and global nonlinear asymptotic stability

Theorem 7 - Let (12) and (52) hold. Then

$$\delta_1 < \delta \tag{60}$$

with

$$\begin{cases} \delta = 2 \inf(1 + \bar{\alpha}\gamma_1 - b, a^2 + \bar{\alpha}\gamma_2) \\ \delta_1 = 2m \left[(1 + \bar{\mu}^2 m) \frac{b}{a} + 2a \right], \quad \bar{\mu}^2 = \frac{a^2}{b} \end{cases} \tag{61}$$

guarantees the global asymptotic exponential stability of S .

Proof. Choosing

$$\mu = \bar{\mu} = \frac{a}{\sqrt{b}} \tag{62}$$

in view of (9)-(10) it turns out that

$$\frac{d}{dt}(\|u\|^2 + \|v\|^2) < -\delta(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \Psi^{**} \tag{63}$$

with

$$\Psi^{**} = \frac{2}{\alpha^2} \langle U - \bar{\mu}^2 V, f(U, V) \rangle \leq \delta_1(\|u\|^2 + \|v\|^2) \tag{64}$$

and hence

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \leq (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2) e^{-(\delta - \delta_1)t} \tag{65}$$

immediately follows.

Let (12), (52), (61)₁ and (62) hold. Then in view of

$$\begin{aligned} \Psi^{**} &\leq \frac{2}{\alpha} \left[\langle u, f(U, V) \rangle - \bar{\mu} \langle v, \frac{b}{a} U^2 + 2aUV \rangle \right] \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \left[\langle |u|, \left(\frac{b}{a} + 2a + 1 \right) m^2 \rangle + \langle |v|, \left(\sqrt{b} + \frac{a^2}{\sqrt{b}} \right) \rangle \right] \end{aligned}$$

setting

$$M = m^2 |\Omega|^{1/2} \max \left(\frac{b}{a} + 2a + 1, \sqrt{b} + \frac{a^2}{\sqrt{b}} \right) \tag{66}$$

one obtains

$$\Psi^{**} \leq \frac{2}{\alpha} M (\|u\| + \|v\|) \tag{67}$$

which implies

$$\Psi^{**} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\alpha} M(\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}. \quad (68)$$

On the other hand, for any $0 < \varepsilon < 1$, one obtains

$$\frac{2\sqrt{2}}{\alpha} M(\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2} \leq \varepsilon\delta(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{2M^2}{\alpha^2\varepsilon\delta} \quad (69)$$

and (63) implies

$$\frac{d}{dt}(\|U\|^2 + \|\bar{\mu}V\|^2) \leq -\delta(1 - \varepsilon)(\|U\|^2 + \|\bar{\mu}V\|^2) + \frac{2M^2}{\varepsilon\delta}. \quad (70)$$

Then immediately it follows that

$$\|U\|^2 + \|\bar{\mu}V\|^2 \leq \|U_0\|^2 + \|\bar{\mu}V_0\|^2 e^{-\delta(1-\varepsilon)t} + \frac{2M^2}{\delta^2\varepsilon(1-\varepsilon)} \left(1 - e^{-\delta(1-\varepsilon)t}\right) \quad (71)$$

and the following theorem holds.

Theorem 8 - Let (12) and (52) hold. Then in the phase plane, measuring the distance between $S = (\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ and $(C_1 = \bar{C}_1 + U, C_2 = \bar{C}_2 + V)$ through $(\|U\|^2 + \|\bar{\mu}V\|^2)^{1/2}$, any circle (centered at S) of radius $R > \frac{2\sqrt{2}M}{\delta}$, absorbs the perturbations.

Proof. Let

$$R = \eta \frac{2\sqrt{2}}{\delta} M \quad (72)$$

with $\eta > 1$. Then for $\varepsilon = \frac{1}{2}$, it follows that

$$R > \frac{\sqrt{2}M}{\delta\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}} = \frac{2\sqrt{2}M}{\delta}. \quad (73)$$

By virtue of (72), one obtains

$$\|U\|^2 + \|\bar{\mu}V\|^2 \leq (\|U_0\|^2 + \|\bar{\mu}V_0\|^2)e^{-\delta(1-\varepsilon)t} + \frac{2M^2}{\delta^2\varepsilon(1-\varepsilon)}. \quad (74)$$

Then for any $t > \bar{t}$ with \bar{t} such that

$$(\|U_0\|^2 + \|\bar{\mu}V_0\|^2)e^{-\delta(1-\varepsilon)\bar{t}} + \frac{2M^2}{\delta^2\varepsilon(1-\varepsilon)} = \eta^2 \cdot \frac{8M^2}{\delta^2} \quad (75)$$

i.e.

$$e^{-\delta(1-\varepsilon)t} = \frac{2M^2}{\delta^2} \left(4\eta^2 - \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right) \quad (76)$$

it follows that $P = (\bar{C}_1 + U(t), \bar{C}_2 + \bar{\mu}V(t))$ belongs to the circle centered at (\bar{C}_1, \bar{C}_2) of radius $R > \frac{2\sqrt{2}}{\delta}M$.

Remark 2 - We remark that if m remains bounded when $\delta \rightarrow \infty$, then

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} R = 0. \quad (77)$$

Acknowledgements

This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (P.R.I.N. 2005): "Nonlinear Propagation and Stability in Thermodynamical Processes of Continuous Media".

References

- [1] I. Prigogine, R. Lefever, *Symmetry breaking instabilities in dissipative systems*. I. J. Chem. Phys. 48 (4), 1965 (1968).
- [2] T. Erneux, E.L. Reiss, *Brusselator isolas*. SIAM J. Appl. Math. (43), n.6 (1983).
- [3] K.J. Brown, F.A. Davidson, *Global bifurcation in the Brusselator system*. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications (24), n. 12 (1995).
- [4] Rui Peng, Mingxin Wang, *Pattern formation in the Brusselator system*. Journal of Mathematical Analysis and Application (309), 151-166 (2005).
- [5] B. Straughan, *The energy method, stability, and nonlinear convection*. Appl. Math. Sci. Ser. Vol. 91, Springer-Verlag, Second edition. (2004)
- [6] S. Lombardo, G. Mulone, M. Trovato, *A general analytical procedure to obtain optimal Lyapunov functions in reaction-diffusion system*. Rend. Circolo Matematico di Palermo Serie II, Supl. 78, pp. 173-185 (2006).
- [7] Lawrence C. Evans, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 19, AMS, (2002).
- [8] Courant-Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. Intersciences publishers, Inc. 1953, vol. I.
- [9] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag (1967).

- [10] Anton Zettl, *Sturm-Liouville theory*. Math. Surveys and Monograph, vol. 121, AMS (2005).
- [11] R.S. Cantrell, C. Cosner, *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, (2004) ISBN 0-471-49301-5.
- [12] S. Rionero, *A rigorous reduction of the L^2 -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es. to the stability of the solutions to a linear binary system of O.D.Es.*, Journal of Mathematical Analysis and Application **319**, Issue 2, 377 (2006).
- [13] S. Rionero, *A nonlinear stability analysis for two-species population dynamics with dispersal*, Math. Biosc. Eng. **3**, n.1, 189 (2006).
- [14] S. Rionero, *L^2 -stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es.*, Rend. Accademia dei Lincei. Fasc.4, 227-238 (2006).
- [15] J.N. Flavin, S. Rionero, *Qualitative Estimates for Partial Differential Equations. An Introduction*. CRC Press, Boca Raton, Fl (1996).
- [16] Robert A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press (1975).
- [17] K. Rektoris, *Variational Methods in Mathematics, Sciences and Engineering*. D. Reidal Publ. Co. (1980).

The general law of dynamics in nonlinear manifolds and Noether's theorem

Giovanni Romano¹, Marina Diaco², Raffaele Barretta²

¹ Dipartimento di Scienza delle Costruzioni, University of Naples Federico II, via Claudio 21, 80125 - Naples, Italy - romano@unina.it

² diaco@unina.it, rabarret@unina.it

Summary. The theory of continuous dynamical systems, undergoing motions in a nonlinear configuration manifold, is formulated and developed with a coordinate-free variational approach. The starting point is a new formulation of HAMILTON's action principle in the velocity-time phase-space in which piecewise regularity of the trajectory is assumed and testing variations which are infinitesimal isometries of the trajectory are allowed for. It is shown that localization yields a new general differential law of dynamics and the related jump conditions at singular points. An extended version of Noether's theorem follows as a simple corollary. The LAGRANGE's law is recovered by assuming a torsion-free connection on the configuration manifold.

1 Introduction

Calculus on manifolds is the suitable mathematical tool in the dynamics of continuous systems undergoing motions in a nonlinear configuration manifold. The basic concepts, due to MARIUS SOPHUS LIE, HENRI POINCARÉ and ELIE CARTAN, are extension of the theory originated by EULER, LEGENDRE, LAGRANGE, POISSON, HAMILTON and JACOBI, inspired by earlier ideas of FERMAT and HUYGENS in optics. We premise an abstract general statement of the action principle on a manifold and the relevant basic localization results, in which REYNOLDS transport theorem, the AMPÈRE-HANKEL-KELVIN transform, usually dubbed STOKES's formula, and its expression in terms of differential forms due to POINCARÉ, CARTAN's magic formula and PALAIS' formula for the exterior derivative of a differential one-form, are the playmates. Attention is then turned towards continuum dynamics, according to the lagrangian description, in the velocity-time phase-space. The starting point is a new statement of HAMILTON's action principle in which arbitrary infinitesimal isometries of the trajectory are allowed for. On this basis, the localization result provided for the abstract action principle is applied to get the differential condition in terms of the exterior derivative of the lagrangian one-form and the related jump conditions at singular points on the trajectory. The differential law of dynamics in a nonlinear configuration manifold is derived by

specializing to the dynamical context the abstract result which provides the explicit expression of the exterior derivative of the one-form. The key property is PALAIS' formula [2] which, by the tensoriality of the exterior derivative of a differential form, may be applied by envisaging an expedient extension of the time-speed of the trajectory at the actual configuration-velocity point in the velocity phase-space. The differential law of dynamics stated here is not quoted in the literature and provides the most general formulation of the governing law in terms of the lagrangian of the system. A generalized version of EMMY NOETHER's theorem [1] on symmetry of the Lagrangian and invariance along the trajectory is implied as a simple corollary. The references, on dynamics of abstract systems in nonlinear manifolds, most strictly related to the present approach, are the books [4], [7], [9], [10] and the article [6]. In all these treatments the subject is developed in modern geometrical form but in the spirit of classical rigid-body dynamics, the context in which the basic principles were originally developed by the old masters, and recourse to coordinates is always made in the decisive steps. A main innovative feature of the analysis developed in the present paper is the explicit introduction of the rigidity constraint from the very beginning. This is in the spirit of the definition of dynamical equilibrium as stated by JOHANN BERNOULLI in 1717 in a famous letter to VARIGNON. To take account of the rigidity constraint, it is compelling to state principles and laws of dynamics in variational form and this leads, in addition, to develop a completely general and coordinate-free theory. We consider continuous systems under potential force systems so that the dynamics is completely described in terms the Lagrangian functional.

2 Calculus on manifolds

Let us consider a differentiable manifold \mathbb{M} modeled on a BANACH's space E . The basic theory can be found in [5], [7], [8], [9], [10], [13], [15]. The collection of tangent spaces $T_x\mathbb{M}$ is the tangent bundle $T\mathbb{M}$ to \mathbb{M} . The cotangent bundle $T^*\mathbb{M}$ to \mathbb{M} is the collection of the dual cotangent spaces $T_x^*\mathbb{M}$. An exterior k -form is an alternating k -linear scalar-valued function defined on a tangent space to a n D manifold, with $n > k$. Differential k -forms are differentiable fields of exterior k -forms. Volume-forms are n -forms on a n D manifold. On a differentiable manifold integrals of n -forms over compact n D submanifolds can be performed. The contraction of a k -form ω^k with a vector \mathbf{v} is the $(k-1)$ -form $\omega^k\mathbf{v}$ defined by taking \mathbf{v} as the first argument of the form ω^k . Vectors in distinct tangent spaces can be compared if a connection and the related parallel transport is defined. We denote by $\varphi\uparrow$ and $\varphi\downarrow$ the push-forward and its inverse, the pull-back, of scalar, vector and tensor fields due to a diffeomorphism $\varphi \in C^1(\mathbb{M};\mathbb{M})$. A dot \cdot and a crochet \langle, \rangle denote respectively linear dependence on the subsequent argument and the duality pairing. The variational analysis performed in this paper is based on the following tools of calculus on manifolds. The first tool is the POINCARÉ-

STOKES' formula which states that the integral of a differential $(k - 1)$ -form ω^{k-1} on the boundary chain $\partial\Sigma$ of a k D submanifold Σ of \mathbb{M} is equal to the integral of its exterior derivative $d\omega^{k-1}$, a differential k -form, on Σ i.e.

$$\int_{\Sigma} d\omega^{k-1} = \oint_{\partial\Sigma} \omega^{k-1}.$$

The second tool is LIE's derivative of a vector field $\mathbf{w} \in C^1(\mathbb{M}; \text{TM})$ along a flow $\varphi_{\lambda} \in C^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ with velocity $\mathbf{v} = \partial_{\lambda=0} \varphi_{\lambda} \in C^1(\mathbb{M}; \text{TM})$:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = \partial_{\lambda=0} (\varphi_{\lambda} \downarrow \mathbf{w}),$$

which is equal to the antisymmetric LIE-bracket: $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}]$ defined by: $d_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]} f = d_{\mathbf{v}} d_{\mathbf{w}} f - d_{\mathbf{w}} d_{\mathbf{v}} f$, for any $f \in C^2(\mathbb{M}; \mathcal{R})$. The LIE derivative of a differential form $\omega^k \in C^1(\mathbb{M}; \Lambda^k(\text{TM}))$ is similarly defined by $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega^k = \partial_{\lambda=0} (\varphi_{\lambda} \downarrow \omega^k)$. The third tool is the extrusion formula

$$\partial_{\lambda=0} \int_{\varphi_{\lambda}(\Sigma)} \omega^k = \int_{\Sigma} (d\omega^k) \mathbf{v} + \int_{\partial\Sigma} \omega^k \mathbf{v},$$

which by REYNOLDS' transport formula:

$$\int_{\varphi_{\lambda}(\Sigma)} \omega^k = \int_{\Sigma} \varphi_{\lambda} \downarrow \omega^k \implies \partial_{\lambda=0} \int_{\varphi_{\lambda}(\Sigma)} \omega^k = \int_{\Sigma} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega^k,$$

yields CARTAN's magic formula (or homotopy formula): $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega^k = (d\omega^k) \mathbf{v} + d(\omega^k \mathbf{v})$. The homotopy formula may be readily inverted to get PALAIS formula for the exterior derivative. Indeed, by LEIBNIZ rule for the LIE derivative, we have that, for any two vector fields $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in C^1(\mathbb{M}; \text{TM})$:

$$d\omega^1 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \omega^1) \cdot \mathbf{w} - d(\omega^1 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = d_{\mathbf{v}} (\omega^1 \mathbf{w}) - \omega^1 \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{w}] - d_{\mathbf{w}} (\omega^1 \mathbf{v}).$$

The expression at the r.h.s. of PALAIS formula fulfills the tensoriality criterion, as quoted in [8], [15] and thus its value at a point depends only on the values of the argument vector fields at that point. The exterior derivative of a differential one-form is thus a differential two-form. The same algebra may be repeatedly applied to deduce PALAIS formula for a k -form.

3 The abstract action principle

Let a status of the system be described by a point of the *phase space* \mathbb{M} , a differentiable manifold. According to HAMILTON's point of view, the evolution of the system is governed by a variational condition on the signed-length of the trajectory $\Gamma \in C^1(I; \mathbb{M})$, evaluated according to a differential one-form $\omega^1 \in C^1(\mathbb{M}; \text{T}^*\mathbb{M})$ dubbed the *action one-form*.

The signed-length $\int_{\Gamma} \omega^1$ is called the *action integral* at Γ . To provide a general statement of the action principle, we call *virtual flows* in \mathbb{M} the elements of a suitably defined one-parameter subfamily of $C^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$. Vector fields which are velocities of virtual flows are dubbed *virtual velocities*. The test-subbundle $V_{\text{RIG}} \subset \mathbb{T}\mathbb{M}$ is a subbundle of the bundle of virtual velocities, and $V_{\text{RIG}}(\Gamma)$ denotes the restriction of the test-subbundle to Γ .

Proposition 1 (Action principle). *At a trajectory $\Gamma \subset \mathbb{M}$ of the system the action integral meets the variational condition:*

$$\partial_{\lambda=0} \int_{\varphi_{\lambda}(\Gamma)} \omega^1 = \int_{\partial\Gamma} \omega^1 \cdot \mathbf{v},$$

for all virtual flows $\varphi_{\lambda} \in C^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ with initial velocity $\mathbf{v} \in C^1(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma))$.

This means that the initial rate of increase of the ω^1 -length of the trajectory Γ along a rigid virtual flow is equal to the outward flux of the virtual velocities at the end points. Denoting by \mathbf{x}_1 and \mathbf{x}_2 the initial and final end points of Γ , we have that $\partial\Gamma = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ (a 0-chain) and the boundary integral may be written as $\int_{\partial\Gamma} \omega^1 \cdot \mathbf{v} = (\omega^1 \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_2) - (\omega^1 \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_1)$. The stationarity of the action integral is a problem of *calculus of variations* on a nonlinear manifold. Necessary and sufficient local conditions for a path to be a trajectory are provided by the next proposition which considers piecewise regular paths with non-fixed end points on a nonlinear manifold and is stated in coordinate-free terms. The classical local result of EULER and LAGRANGE is formulated in coordinates and considers regular paths with fixed end points. We will denote by $\mathcal{T}(\Gamma)$ an open regularity partition of Γ and by $\mathcal{I}(\Gamma)$ the corresponding set of singularity interfaces.

Proposition 2 (Local conditions). *A path $\Gamma \subset \mathbb{M}$ is a trajectory if and only if the tangent vector field $\mathbf{v}_{\Gamma} \in C^1(\mathcal{T}(\Gamma); \mathbb{T}\Gamma)$ meets, in each element of a regularity partition $\mathcal{T}(\Gamma)$, the pointwise differential condition*

$$d\omega^1 \cdot \mathbf{v}_{\Gamma} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in C^0(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma)),$$

and, at the singularity interfaces $\mathcal{I}(\Gamma)$, the jump conditions

$$[[\omega^1 \mathbf{v}]] = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in C^0(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma)).$$

Proof. By applying the extrusion formula to each element of the regularity partition, we get

$$\partial_{\lambda=0} \int_{\varphi_{\lambda}(\Gamma)} \omega^1 - \int_{\partial\Gamma} \omega^1 \mathbf{v} = \int_{\mathcal{T}(\Gamma)} (d\omega^k) \mathbf{v} - \int_{\mathcal{I}(\Gamma)} [[\omega^1 \mathbf{v}]],$$

so that the action principle writes

$$\int_{\mathcal{T}(\Gamma)} (d\omega^1) \mathbf{v} = \int_{\mathcal{I}(\Gamma)} [[\omega^1 \mathbf{v}]], \quad \forall \mathbf{v} \in C^0(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma)).$$

Let the path Γ be parametrized by $s \in I$ and $\mathbf{v}_\Gamma \in C^1(\Gamma; \mathbb{T}\Gamma)$ be the velocity field along the path. Then:

$$\int_{\mathcal{T}(\Gamma)} (d\omega^1)\mathbf{v} - \int_{\mathcal{I}(\Gamma)} [[\omega^1\mathbf{v}]] = \int_{\mathcal{T}(I)} d\omega^1 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\Gamma ds - \int_{\mathcal{I}(\Gamma)} [[\omega^1\mathbf{v}]].$$

If the differential and jump conditions are fulfilled, the action principle holds. Conversely, if $d\omega^1 \cdot \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{v} \neq 0$ at a point inside an element of the regularity partition, by continuity of $d\omega^1 \cdot \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{v}$, we could take $\mathbf{v} \in C^0(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma))$ such that $d\omega^1 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\Gamma > 0$ on an open segment U_Γ around that point and $d\omega^1 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\Gamma = 0$ on $\Gamma \setminus U_\Gamma$. Hence $\int_{\mathcal{T}(\Gamma)} (d\omega^1)\mathbf{v} > 0$, contrary to the assumption. The vanishing of the jumps follows by a simple argument.

The next two results are due to the first author.

Proposition 3 (Palais-Romano condition). *The differential condition fulfilled by a trajectory $\Gamma \subset \mathbb{M}$ may equivalently be written as*

$$d_{\mathbf{v}_\Gamma}(\omega^1 \cdot \mathbf{v}) = d_{\mathbf{v}}(\omega^1 \cdot \mathbf{v}_\Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in C^0(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma)),$$

where $\mathbf{v} \in C^0(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ is an extension of the virtual velocity $\mathbf{v} \in C^0(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma))$ and $\mathbf{v}_\Gamma \in C^0(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ is the extension of $\mathbf{v}_\Gamma \in C^0(\Gamma; V_{\text{RIG}}(\Gamma))$ performed by pushing it along the flow $\varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ generated by $\mathbf{v} \in C^0(\mathbb{M}; \mathbb{M})$.

Proof. The result follows from proposition 2 by a direct application of PALAIS formula: $d\omega^1 \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\Gamma = d_{\mathbf{v}}(\omega^1 \cdot \mathbf{v}_\Gamma) - d_{\mathbf{v}_\Gamma}(\omega^1 \cdot \mathbf{v}) - \omega^1 \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{v}_\Gamma]$. Indeed, by tensoriality, the r.h.s. is independent of the extensions of \mathbf{v} and \mathbf{v}_Γ . Moreover the special extension of \mathbf{v}_Γ implies that $[\mathbf{v}, \mathbf{v}_\Gamma] = 0$.

As a simple corollary we infer that:

Proposition 4 (Abstract Noether's theorem). *If the action one-form $\omega^1 \in C^1(\mathbb{M}; \mathbb{T}^*\mathbb{M})$ enjoys the property: $d_{\mathbf{v}}(\omega^1 \cdot \mathbf{v}_\Gamma) = 0$, then the functional $\omega^1 \cdot \mathbf{v}$ is constant along the trajectory $\Gamma \subset \mathbb{M}$.*

4 Continuum vs rigid-body dynamics

The theory developed for the abstract action principle, may be applied to continuum mechanics by envisaging a suitable phase-space. A continuous body is identified with an open, connected, reference manifold $\mathbb{B} \subset \mathbb{S}$ embedded in the euclidean space $\{\mathbb{S}, \mathbf{g}\}$ with metric tensor $\mathbf{g} \in BL(\mathbb{T}\mathbb{S}^2; \mathcal{R})$ and canonical connection ∇ .

The configurations $\chi \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{S})$ of the continuous body $\mathbb{B} \subset \mathbb{S}$ are injective maps with the property of being diffeomorphic transformations onto their ranges. The configuration-space \mathbb{C} is assumed to be a differentiable manifold endowed with the topology inherited by a model BANACH space.

The velocity phase-space is the tangent bundle $\mathbb{T}\mathbb{C}$ and the momentum phase-space is the cotangent bundle $\mathbb{T}^*\mathbb{C}$. The velocity-time phase-space is $\mathbb{T}\mathbb{C} \times I$, is the cartesian product of the velocity-space $\mathbb{T}\mathbb{C}$ and an open time interval I , and the momentum-time phase-space is $\mathbb{T}^*\mathbb{C} \times I$. These two phase-spaces are respectively adopted in the Lagrangian and Hamiltonian descriptions of dynamics. Vectors tangent to the velocity-time phase-space $\mathbb{T}\mathbb{C} \times I$ are in the bundle $\mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{C} \times \mathbb{T}I$ whose elements are pairs $\{\delta\mathbf{v}, \delta t\} \in \mathbb{T}_v\mathbb{T}\mathbb{C} \times \mathbb{T}_t I$. Denoting by $\pi \in C^1(\mathbb{T}\mathbb{C}; \mathbb{C})$ the projector on the base manifold, the velocity of the configuration $\pi(\mathbf{v}) \in \mathbb{C}$, corresponding to the tangent vector $\delta\mathbf{v} \in \mathbb{T}_v\mathbb{T}\mathbb{C}$ is provided by the tangent to the projector: $\pi \uparrow \delta\mathbf{v} := d\pi(\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} \in \mathbb{T}_{\pi(\mathbf{v})}\mathbb{C}$.

Rigidity constraint

Two configurations $\chi_1 \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{S})$ and $\chi_2 \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{S})$ are metric-equivalent if $\chi_2 \downarrow \mathbf{g} = \chi_1 \downarrow \mathbf{g}$. Here $\chi \downarrow \mathbf{g}$ is the pull back along $\chi \in C^1(\chi(\mathbb{B}); \mathbb{S})$ of the metric tensor: $(\chi \downarrow \mathbf{g})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{g}(\chi \uparrow \mathbf{a}, \chi \uparrow \mathbf{b})$ for all $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{T}\mathbb{S}$.

Then the diffeomorphic map $\chi_2 \circ \chi_1^{-1} \in C^1(\chi_1(\mathbb{B}); \chi_2(\mathbb{B}))$ is a metric-preserving (or rigid) transformation of the configuration $\chi_1 \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{S})$ into the configuration $\chi_2 \in C^1(\mathbb{B}; \mathbb{S})$. By the metric-equivalence relation so introduced, the manifold \mathbb{C} is partitioned into a family of disjoint connected rigidity-classes \mathbb{C}_R which are submanifolds of \mathbb{C} .

The elements of the tangent space $\mathbb{T}_\chi \mathbb{C}_R$ to a rigidity-class \mathbb{C}_R at $\chi \in \mathbb{C}_R$ are the infinitesimal isometries, that is, the vector fields $\mathbf{v} \in C^1(\chi(\mathbb{B}); \mathbb{S})$ fulfilling the EULER-KILLING condition [15]: $\mathcal{L}_v \mathbf{g} = 2\mathbf{g}(\text{sym } \nabla \mathbf{v}) = 0$.

The LIE derivative of the metric tensor is defined by: $\mathcal{L}_v \mathbf{g} := \partial_{\lambda=0} \chi_\lambda \downarrow \mathbf{g}$ where $\chi_\lambda \in C^1(\chi(\mathbb{B}); \mathbb{S})$ is the flow generated by $\mathbf{v} = \partial_{\lambda=0} \chi_\lambda$. In rigid-body dynamics the body is assumed to evolve in a fixed rigidity-class \mathbb{C}_R so that at each configuration test vector fields and trajectory velocities belong to the same tangent space $\mathbb{T}_\chi \mathbb{C}_R$.

5 Hamilton's action principle

In the *lagrangian description*, the phase-space is the *velocity phase space*, that is, the tangent bundle $\mathbb{T}\mathbb{C}$ to the configuration manifold. The state variables are then pairs formed by a configuration and a velocity vector based at that configuration. The projector $\pi \in C^1(\mathbb{T}\mathbb{C}; \mathbb{C})$ maps the velocity phase space onto the configuration space so that $\mathbf{v} = \{\chi, \mathbf{v}_\chi\} \in \mathbb{T}\mathbb{C}$ and $\pi(\mathbf{v}) = \chi \in \mathbb{C}$. The *Lagrangian* of the system is a time-dependent functional $L_t \in C^1(\mathbb{T}\mathbb{C}; \mathcal{R})$ on the velocity phase space.

The usual expression of the Lagrangian is $L_t = K_t \circ \text{DIAG} + P_t \circ \pi$ where $\text{DIAG} \in C^1(\mathbb{T}\mathbb{C}; \mathbb{T}\mathbb{C}^2)$ is the diagonal map, defined by $\text{DIAG}(\mathbf{v}) := \{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}$, $K_t(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in C^1(\mathbb{T}\mathbb{C}^2; \mathcal{R})$ is the positive definite quadratic kinetic energy and $P_t(\pi(\mathbf{v})) \in C^1(\mathbb{C}; \mathcal{R})$ is the force potential.

The fiber-derivative $d_{\mathbb{F}}L_t \in C^1(\mathbb{TC}; \mathbb{T}^*\mathbb{C})$ of the Lagrangian associates to any velocity $\mathbf{v} \in \mathbb{TC}$ the one-form $d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}) := \partial_{\lambda=0}L_t(\psi_\lambda(\mathbf{v}))$ where $\psi_\lambda \in C^1(\mathbb{TC}; \mathbb{TC})$ is a configuration-preserving flow, that is such that $\pi(\psi_\lambda(\mathbf{v})) = \pi(\mathbf{v})$, $\forall \lambda \in \mathcal{R}$. In the the tangent bundle \mathbb{TC} to the configuration manifold, the fiber-derivative plays the role of the partial derivative with respect to the base point due to the linearity of the tangent fiber. No analogue of the partial derivative with respect to the vectorial part of tangent vectors is available in a nonlinear configuration manifold, unless a connection is defined. Being $L_t(\mathbf{v}) = K_t(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + P_t(\pi(\mathbf{v}))$, the fiber-derivative of the Lagrangian and of the kinetic energy are equal and have the mechanical meaning of kinetic momentum. Let us now consider an open time interval I , a time-parametrized path $\gamma \in C^1(I; \mathbb{C})$ in the configuration space. The velocity $\mathbf{v}_t = \{\gamma(t), \partial_{\tau=t}\gamma(\tau)\} \in \mathbb{T}_{\gamma(t)}\gamma$ along γ at time $t \in I$ spans a lifted trajectory $\mathbf{I} \in C^1(I; \mathbb{TC})$ in the phase-space. To provide the classical statement of HAMILTON's principle, the kinetic energy $K_t \in C^1(\mathbb{TC}; \mathcal{R})$, which makes sense only on the trajectory $\mathbf{I} \in C^1(I; \mathbb{TC})$, must be extended to a functional on the velocity phase space \mathbb{TC} , at least in a neighbourhood of the trajectory. In continuum dynamics, although never stated explicitly, the extension is performed by assuming that the mass-form be dragged by the virtual flow. Let us denote by $\mathbf{m} = \rho \boldsymbol{\mu}$ the mass-form, with ρ the density and $\boldsymbol{\mu}$ the volume-form in $\{\mathbb{S}, \mathbf{g}\}$. Under the action of a flow $\varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$, a configuration $\boldsymbol{\chi}_t \in \mathbb{C}$ is changed into $\varphi_\lambda \circ \boldsymbol{\chi}_t \in \mathbb{C}$ and the kinetic energy $K_t \in C^1(\mathbb{TC}; \mathcal{R})$ at the point $\mathbf{v}_t \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\chi}_t}\mathbb{C}$ on the trajectory is transformed into

$$K_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) := \frac{1}{2} \int_{(\varphi_\lambda \circ \boldsymbol{\chi}_t)(\mathbb{B})} \|\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t\|^2 \varphi_\lambda \uparrow \mathbf{m},$$

where $(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{m})(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{a}_1, \varphi_\lambda \uparrow \mathbf{a}_2, \varphi_\lambda \uparrow \mathbf{a}_3) = \mathbf{m}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ for all $\mathbf{a}_i \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\chi}_t}\mathbb{B}$.

Accordingly, the standard statement of HAMILTON's principle in the dynamics of continuous bodies is the following.

Proposition 5 (Standard form of Hamilton's principle). *A dynamical trajectory of a continuous mechanical system in the configuration manifold is a time-parametrized path $\gamma \in C^1(I; \mathbb{C})$ fulfilling the stationarity condition*

$$\partial_{\lambda=0} \int_I L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) dt = 0.$$

for any flow $\varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ in the configuration manifold whose velocity field $\mathbf{v}_\varphi = \partial_{\lambda=0} \varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{TC})$ is an infinitesimal isometry at each point of γ and vanishes at the end points of the path.

In the literature HAMILTON's principle is usually stated in the special context of rigid body dynamics [7], [10], [12]. Then the stationarity condition is required to hold for any flow $\varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}_R; \mathbb{C}_R)$, in a rigidity class $\mathbb{C}_R \subset \mathbb{C}$ of the configuration manifold, whose velocity field $\mathbf{v}_\varphi \in C^1(\mathbb{C}_R; \mathbb{TC}_R)$ vanishes at the end points of the path.

The basic step towards the formulation of a general law of dynamics consists in a suitable modification of the statement of HAMILTON's principle to drop out the condition that the virtual velocity fields vanish at the end points of the path. The proper way to perform the modification is suggested by the discussion of the action principle illustrated in section 3, when specialized to velocity phase space of lagrangian dynamics.

6 The action one-form

A new formulation of HAMILTON's action principle is inferred from the abstract theory of section 3. To this end we have to express HAMILTON's principle in terms of the integral of an action one-form over the trajectory \mathbf{F}_I in the *velocity-time phase-space*, the cartesian product $\mathbb{TC} \times I$. Let us consider a time-parametrized path $\gamma \in C^1(I; \mathbb{C})$ in the configuration manifold \mathbb{C} and the corresponding lifted path $\mathbf{F} := \mathbb{T}\gamma \in C^1(I; \mathbb{TC})$ in the velocity phase-space, setting $\mathbf{v}_t = \{\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\} \in \mathbb{T}\gamma \subset \mathbb{TC}$. We denote by $\psi_\lambda := \varphi_\lambda \uparrow = d\varphi_\lambda \circ \pi \in C^1(\mathbb{TC}; \mathbb{TC})$ the tangent flow induced, in the velocity phase-space, by the flow $\varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ in the configuration manifold, so that $\pi \circ \psi_\lambda = \varphi_\lambda \circ \pi$ and

$$\psi_\lambda(\mathbf{v}) := d\varphi_\lambda(\pi(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{TC}.$$

Denoting by $d\pi(\mathbf{v}) \in BL(\mathbb{T}_v\mathbb{TC}; \mathbb{T}_{\pi(\mathbf{v})}\mathbb{C})$ the differential of the projector $\pi \in C^1(\mathbb{TC}; \mathbb{C})$ and setting $\mathbf{v}_\psi = \partial_{\lambda=0} \psi_\lambda$ we have that

$$\begin{aligned} d\pi(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}) &= d\pi(\mathbf{v}) \cdot \partial_{\lambda=0} \psi_\lambda(\mathbf{v}) = \partial_{\lambda=0} (\pi \circ \psi_\lambda)(\mathbf{v}) \\ &= \partial_{\lambda=0} (\varphi_\lambda \circ \pi)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{TC}. \end{aligned}$$

Taking the time-derivative of $\pi(\mathbf{v}_t) = \gamma(t)$ and denoting by $\{\dot{\mathbf{v}}_t, 1\} \in \mathbb{T}_{\mathbf{v}_t}\mathbb{TC} \times \mathbb{T}_t I$ the time-speed along of the trajectory \mathbf{F}_I at the point $\{\mathbf{v}_t, t\} \in \mathbf{F}_I$, we get the relation: $d\pi(\mathbf{v}_t) \cdot \dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{v}_t$ which is a special case of the one reported above. The basic tool to reach the goal is LEGENDRE transform which defines the *energy* of the system $E_t \in C^1(\mathbb{TC}; \mathcal{R})$ as the conjugate of the *Lagrangian*, according to the relation:

$$L_t(\mathbf{v}_t) + E_t(\mathbf{v}_t) = \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_t \rangle = \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), d\pi(\mathbf{v}_t) \cdot \dot{\mathbf{v}}_t \rangle,$$

and the differential one-form $\theta_{L_t} \in C^1(\mathbb{TC} \times I; \mathbb{TTC} \times \mathbb{TI})$ by the identity

$$\theta_{L_t}(\{\mathbf{v}, t\}) \cdot \{\delta\mathbf{v}, \delta t\} := \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}), d\pi(\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} \rangle,$$

for all $\{\delta\mathbf{v}, \delta t\} \in \mathbb{T}_v\mathbb{TC} \times \mathbb{T}_t I$. Then, noting that

$$E_t(\mathbf{v})dt \cdot \{\delta\mathbf{v}, \delta t\} = E_t(\mathbf{v})\langle dt, \delta t \rangle,$$

and defining the differential one-form $\omega_L^1 \in C^1(\mathbb{TC} \times I; \mathbb{TTC} \times \mathbb{TI})$ by

$$\omega_L^1(\{\mathbf{v}, t\}) = \theta_{L_t}(\{\mathbf{v}, t\}) - E(\mathbf{v}, t)dt,$$

we have that

$$\omega_L^1(\{\mathbf{v}_t, t\}) \cdot \{\dot{\mathbf{v}}_t, 1\} = \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_t \rangle - E_t(\mathbf{v}_t)\langle dt, 1 \rangle = L_t(\mathbf{v}_t),$$

and also

$$\begin{aligned} \omega_L^1(\{\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t, t\}) \cdot \{\psi_\lambda \uparrow \dot{\mathbf{v}}_t, 1\} &= L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) \\ \omega_L^1(\{\mathbf{v}_t, t\}) \cdot \{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\} &= \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}), d\pi(\mathbf{v}_t) \cdot \mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t) \rangle \\ &= \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_t)) \rangle. \end{aligned}$$

We may thus conclude that

$$\int_{\varphi_\lambda \uparrow \Gamma_I} \omega_L^1 = \int_I \omega_L^1(\{\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t, t\}) \cdot \{\psi_\lambda \uparrow \dot{\mathbf{v}}_t, 1\} dt = \int_I L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) dt,$$

and

$$\int_{\partial \Gamma_I} \omega_L^1(\{\mathbf{v}_t, t\}) \cdot \{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\} = \int_{\partial I} \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_t)) \rangle dt.$$

The action principle for the action one-form $\omega_L^1 \in C^1(\mathbb{T}\mathbb{C} \times I; \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{C} \times \mathbb{T}I)$ in the *velocity-time phase-space* is then expressed by the variational condition:

$$\partial_{\lambda=0} \int_{\varphi_\lambda \uparrow \Gamma_I} \omega_L^1 = \int_{\partial \Gamma_I} \omega_L^1 \cdot \{\mathbf{v}_\psi, 0\},$$

for any flow $\varphi_\lambda \in C^1(\gamma; \mathbb{C})$ in the configuration manifold whose velocity field $\mathbf{v}_\varphi = \partial_{\lambda=0} \varphi_\lambda \in C^1(\gamma; \mathbb{T}\mathbb{C})$ is an infinitesimal isometry at each point of γ . The boundary term vanishes if $\mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_t)) = 0$ at the end points of Γ_I , which means that the initial and final configurations are hold fixed by the flow. This is the assumption made in all the previous literature on dynamics in formulating the action principle (see e.g. [7]). The abstract action principle for the action one-form $\omega_L^1 \in C^1(\mathbb{T}\mathbb{C} \times I; \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{C} \times \mathbb{T}I)$ leads to the following statement of HAMILTON's principle.

Proposition 6 (New statement of Hamilton's principle). *A dynamical trajectory of a continuous mechanical system in the configuration manifold is a time-parametrized path $\gamma \in C^1(I; \mathbb{C})$ fulfilling the variational condition*

$$\partial_{\lambda=0} \int_I L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) dt = \int_{\partial I} \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_t)) \rangle dt.$$

for any flow $\varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ in the configuration manifold whose velocity field $\mathbf{v}_\varphi = \partial_{\lambda=0} \varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{T}\mathbb{C})$ is an infinitesimal isometry at each point of γ .

This general statement of HAMILTON's principle is equivalent to the standard one (proposition 5) in the case of regular motions. Indeed both principles are equivalent to the same differential law of dynamics.

6.1 Differential and jump conditions

By theorem 2, the action principle in the *velocity-time phase-space* is equivalent to the differential condition:

$$d\omega_{L_t}^1(\mathbf{v}_t, t) \cdot \{\dot{\mathbf{v}}_t, 1\} \cdot \{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\} = 0,$$

at regular points and to the jump condition

$$[[\omega_{L_t}^1(\mathbf{v}_t, t)]] \cdot \{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\} = 0,$$

at singular points along the trajectory. Recalling the definition of the one-form $\omega_{L_t}^1$, the jump condition writes: $\langle [[d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t)]] , \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_t)) \rangle = 0$ and the differential condition takes the expression:

$$d\theta_{L_t}(\mathbf{v}_t, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}_t \cdot \mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t) = d(E(\mathbf{v}_t, t) dt) \cdot \{\dot{\mathbf{v}}_t, 1\} \cdot \{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\}.$$

To perform the exterior derivatives we apply PALAIS's formula, extending the vector $\dot{\mathbf{v}}_t \in \mathbb{T}_{\mathbf{v}_t}\mathbf{F}$ to a vector field $\dot{\mathbf{v}} \in C^1(\mathbb{TC}; \mathbb{TTC})$ by pushing it along the phase-flow $\psi_\lambda \in C^1(\mathbb{TC}; \mathbb{TC})$, so that $\dot{\mathbf{v}}(\psi_\lambda(\mathbf{v}_t)) := \psi_{\lambda*} \dot{\mathbf{v}}_t$. Then the r.h.s. becomes

$$\begin{aligned} d(E_t(\mathbf{v}_t) dt) \cdot \{\dot{\mathbf{v}}_t, 1\} \cdot \{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\} &= d_{\{\dot{\mathbf{v}}_t, 1\}} \langle E_t(\mathbf{v}_t) dt, \{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\} \rangle \\ &\quad - d_{\{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t), 0\}} \langle E_t(\mathbf{v}_t) dt, \{\dot{\mathbf{v}}_t, 1\} \rangle \\ &\quad + \langle E_t(\mathbf{v}_t) dt, \{(\mathcal{L}_{\mathbf{v}_\psi} \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}_t), 0\} \rangle \\ &= -d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} E_t(\mathbf{v}_t). \end{aligned}$$

Accordingly, the differential condition writes:

$$d\theta_{L_t}(\mathbf{v}_t, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}_t \cdot \mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t) = -d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} E_t(\mathbf{v}_t).$$

Applying again PALAIS formula and taking into account that the LIE derivative $\mathcal{L}_{\mathbf{v}_\psi} \dot{\mathbf{v}}$ vanishes identically, the l.h.s. becomes:

$$\begin{aligned} d\theta_{L_t}(\mathbf{v}_t, t) \cdot \dot{\mathbf{v}}_t \cdot \mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t) &= d_{\dot{\mathbf{v}}_t} (\theta_{L_t} \cdot \mathbf{v}_\psi)(\mathbf{v}_t) - d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} (\theta_{L_t} \cdot \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}_t) \\ &\quad + (\theta_{L_t} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{v}_\psi} \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}_t) \\ &= d_{\dot{\mathbf{v}}_t} (\theta_{L_t} \cdot \mathbf{v}_\psi)(\mathbf{v}_t) - d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} (\theta_{L_t} \cdot \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}_t), \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} d_{\dot{\mathbf{v}}_t} (\theta_{L_t} \cdot \mathbf{v}_\psi)(\mathbf{v}_t) &= \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau), d\pi(\mathbf{v}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_\tau) \rangle \\ &= \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_\tau)) \rangle, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} (\theta_{L_t} \cdot \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}_t) &= d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}), d\pi(\mathbf{v}) \cdot \dot{\mathbf{v}} \rangle = d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \\ &= d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} L_t(\mathbf{v}_t) + d_{\mathbf{v}_\psi(\mathbf{v}_t)} E_t(\mathbf{v}_t). \end{aligned}$$

Hence we get the general expression of the law of dynamics. The differential part is a specialization to mechanical systems of the abstract condition provided in proposition 3.

Theorem 1 (The law of dynamics). *A trajectory of the system is a time-parametrized path $\gamma \in C^1(I; \mathbb{C})$ in the configuration manifold \mathbb{C} , fulfilling the differential condition:*

$$\partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}} L_{\tau}(\mathbf{v}_{\tau}), \mathbf{v}_{\varphi}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_{\tau})) \rangle = d_{\mathbf{v}_{\psi}(\mathbf{v}_t)} L_t(\mathbf{v}_t),$$

and the jump conditions

$$\langle [[d_{\mathbb{F}} L_t(\mathbf{v}_t)]], \mathbf{v}_{\varphi}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle = 0,$$

for all flows $\varphi_{\lambda} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ whose velocity $\mathbf{v}_{\varphi}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t))$ at the actual configuration $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t) \in \mathbb{C}$ is an admissible infinitesimal isometry. The r.h.s. of the differential condition may also be written as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\psi}} L_t(\mathbf{v}_t) &= \partial_{\lambda=0} L_t(\psi_{\lambda}(\mathbf{v}_t)) \\ &= \partial_{\lambda=0} \langle d_{\mathbb{F}} L_t(\psi_{\lambda}(\mathbf{v}_t)), \psi_{\lambda}(\mathbf{v}_t) \rangle - d_{\mathbf{v}_{\psi}(\mathbf{v}_t)} E_t(\mathbf{v}_t). \end{aligned}$$

The differential law of dynamics states that the time-rate of increase of the virtual power of the momentum along the trajectory is equal to the rate of variation of the Lagrangian along any flow whose velocity at the actual configuration fulfils the rigidity property. In the authors' knowledge, the differential and jump laws of dynamics in a non-linear configuration manifold contributed above, are not quoted in the literature. They provide the most general formulation of the rules of dynamics in terms of the Lagrangian.

Remark 1. In expressing the differential law of dynamics, it is compelling to assign the flows $\varphi_{\lambda} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ at least in a neighborhood of $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t) \in \gamma$ and not just the initial velocity $\mathbf{v}_{\varphi}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t))$ at the actual configuration $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t) \in \gamma$. By tensoriality, the flows $\varphi_{\lambda} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ leading to the same value of $\mathbf{v}_{\psi}(\mathbf{v}_t) \in \mathbb{T}_{\mathbf{v}_t} \mathbb{T}\mathbb{C}$ are equivalent.

Remark 2. The new statement of HAMILTON's principle of proposition 6, which takes into account arbitrary variations, permits a direct derivation of the differential and jump law of dynamics. Indeed, by applying the fundamental theorem of integral calculus, the principle may be rewritten as

$$\int_I \partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_{\lambda} \uparrow \mathbf{v}_t) dt = \int_{\mathcal{I}(I)} \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}} L_{\tau}(\mathbf{v}_{\tau}), \mathbf{v}_{\varphi}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_{\tau})) \rangle dt.$$

Then, the arbitrariness of the flow $\varphi_{\lambda} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ and the piecewise continuity of the integrands, yield the result.

Remark 3. In the variational expression of the law of dynamics the test fields $\mathbf{v}_\varphi \in C^1(\gamma; \mathbb{T}\mathbb{C})$ are assumed to be infinitesimal isometries at each point of the trajectory γ . This rigidity constraint has a basic physical meaning since it reveals that the dynamical equilibrium at a given configuration is independent of the material properties of the body.

The evaluation of the equilibrium configuration requires in general to take into account the constitutive properties of the material and hence to get rid of the rigidity constraint. This task can be accomplished in complete generality by the method of LAGRANGE multipliers, which, in continuum mechanics, provide the stress field in the body [14].

Remark 4. In analogy to the abstract result of proposition 4, the general expression of the law of dynamics implies, as a trivial corollary, a statement which extends to continuum dynamics EMMY NOETHER's theorem as formulated in [1], [7], [9] in the context of rigid-body dynamics and finite dimensional configuration spaces. Indeed from the law of dynamics we infer that

$$\partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) = 0 \implies \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}} L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_\tau)) \rangle = 0,$$

while NOETHER's theorem consists in the weaker statement:

$$L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) = L_t(\mathbf{v}_t) \implies \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}} L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_\tau)) \rangle = 0,$$

for all flows $\varphi_\lambda \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ whose velocity $\mathbf{v}_\varphi := \partial_{\lambda=0} \varphi_\lambda$ is an infinitesimal isometry at each point of γ .

7 Dynamics in a manifold with a connection

Let us assume that the configuration manifold \mathbb{C} be endowed with an affine connection ∇ and with the associated parallel transport. We denote by $\mathbf{c}_{\tau,t} \uparrow$ the parallel transport along a curve $\mathbf{c} \in C^1(I; \mathbb{C})$ from the point $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{C}$ to the point $\mathbf{c}(\tau) \in \mathbb{C}$, setting $\mathbf{c}_{t,\tau} \downarrow := \mathbf{c}_{\tau,t} \uparrow$. The covariant derivative of a vector field $\mathbf{v} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{T}\mathbb{C})$ is expressed in terms of parallel transport as:

$$\nabla_{\dot{\mathbf{c}}_t} \mathbf{v} = \partial_{\tau=t} \mathbf{c}_{\tau,t} \downarrow \mathbf{v}(\mathbf{c}(\tau)).$$

The parallel transport of a covector field $\boldsymbol{\omega} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{T}^*\mathbb{C})$ is defined so that the duality-pairing be invariant:

$$\langle \mathbf{c}_{\tau,t} \uparrow \boldsymbol{\omega}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{v}(\mathbf{c}(\tau)) \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{c}_{\tau,t} \downarrow \mathbf{v}(\mathbf{c}(\tau)) \rangle, \quad \forall \mathbf{v}(\mathbf{c}(\tau)) \in \mathbb{T}_{\mathbf{c}(\tau)} \mathbb{C}.$$

Accordingly, the covariant derivative of a covector field $\boldsymbol{\omega} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{T}^*\mathbb{C})$ is given by

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\dot{\mathbf{c}}_t} \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_t \rangle &= \partial_{\tau=t} \langle \mathbf{c}_{\tau,t} \downarrow \boldsymbol{\omega}(\mathbf{c}(\tau)), \mathbf{v}_t \rangle \\ &= \partial_{\tau=t} \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{c}(\tau)), \mathbf{c}_{\tau,t} \uparrow \mathbf{v}_t \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_t \in \mathbb{T}_{\mathbf{c}(t)} \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Let us then consider the vector field $\mathbf{v}_\gamma \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{T}\mathbb{C})$, extension of the velocity $\mathbf{v}_t := \partial_{t=0} \gamma(t)$ of the trajectory by dragging it along the flow $\varphi_\lambda \in C^2(\mathbb{C}; \mathbb{C})$: $\mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\pi(\mathbf{v}_t))) := \varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t$ so that $\mathbf{v}_\gamma(\pi(\mathbf{v}_t)) = \mathbf{v}_t$.

We observe that

$$\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t = \varphi_\lambda \uparrow \varphi_\lambda \downarrow \varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t = \varphi_\lambda \uparrow \varphi_\lambda \downarrow \mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\pi(\mathbf{v}_t))).$$

The *base derivative* of a functional $f \in C^1(\mathbb{TC}; \mathcal{R})$ at $\mathbf{v} \in \mathbb{TC}$ along a vector $\mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v})) \in \mathbb{T}_{\pi(\mathbf{v})}\mathbb{C}$ is then defined by:

$$\langle d_B f(\mathbf{v}), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v})) \rangle := \partial_{\lambda=0} f(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}),$$

where $\mathbf{v}_\varphi = \partial_{\lambda=0} \varphi_\lambda$. The definition is well-posed since the r.h.s. depends linearly on $\mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v})) \in \mathbb{T}_{\pi(\mathbf{v})}\mathbb{C}$ for any fixed $\mathbf{v} \in \mathbb{TC}$. The base derivative provides the rate of change of the functional $f \in C^1(\mathbb{TC}; \mathcal{R})$ when the base point $\pi(\mathbf{v}) \in \mathbb{C}$ is dragged by the flow while the velocity $\mathbf{v} \in \mathbb{TC}$ is parallel transported along the flow. Let $\text{TORS} \in BL(\mathbb{TC}; BL(\mathbb{TC}; \mathbb{TC}))$ be the linear operator defined by

$$\text{TORS}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \text{TORS}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{T}_x \mathbb{C},$$

where $\text{TORS}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - [\mathbf{v}, \mathbf{u}] \in \mathbb{TC}$ is the evaluation of the torsion tensor in the connection ∇ . The definition is well-posed by tensoriality of the torsion. The next result provides the special form taken by the differential law of dynamics when the configuration manifold is endowed with a connection.

Proposition 7 (Special form of the law of dynamics). *In a configuration manifold \mathbb{C} endowed with an affine connection ∇ the differential law of dynamics takes the special form*

$$\langle \partial_{\tau=t} d_F L_\tau(\mathbf{v}_t) + \nabla_{\mathbf{v}_t} d_F L_t + d_F L_t(\mathbf{v}_t) \text{TORS}(\mathbf{v}_t) - d_B L_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_t)) \rangle = 0,$$

for any virtual velocity field $\mathbf{v}_\varphi = \partial_{\lambda=0} \varphi_\lambda \in C^1(\gamma; \mathbb{TC})$ which is an admissible infinitesimal isometry at the configuration $\pi(\mathbf{v}_t)$. If the connection ∇ is torsion-free, we get LAGRANGE's differential condition:

$$\langle \partial_{\tau=t} d_F L_\tau(\mathbf{v}_t) + \nabla_{\mathbf{v}_t} d_F L_t - d_B L_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_\varphi(\pi(\mathbf{v}_t)) \rangle = 0.$$

Proof. Being $\partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) = \partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_\lambda \uparrow \varphi_\lambda \downarrow \mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\pi(\mathbf{v}_t))))$, by the LEIBNIZ rule we get:

$$\partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) = \partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_\lambda \uparrow \mathbf{v}_t) + \partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_\lambda \downarrow \mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\mathbf{v}_t))),$$

and, by definition of the covariant derivative in terms of the parallel transport:

$$\nabla_{\mathbf{v}_\varphi} \mathbf{v}_\gamma(\pi(\mathbf{v}_t)) := \partial_{\lambda=0} \varphi_\lambda \downarrow \mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\pi(\mathbf{v}_t))),$$

being $\varphi_\lambda \downarrow \mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\pi(\mathbf{v}_t))) \in \mathbb{T}_{\pi(\mathbf{v}_t)}\mathbb{C}$, we have that

$$\partial_{\lambda=0} L_t(\varphi_\lambda \downarrow \mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\pi(\mathbf{v}_t)))) = \langle d_F L_t(\mathbf{v}_t), \nabla_{\mathbf{v}_\varphi} \mathbf{v}_\gamma(\pi(\mathbf{v}_t)) \rangle.$$

Hence, by definition of the *base derivative* $d_B L_t(\mathbf{v}_t) \in C^1(\mathbb{TC}; \mathbb{T}^* \mathbb{C})$, we get

$$\partial_{\lambda=0} L_t(\mathbf{v}_\gamma(\varphi_\lambda(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)))) = \langle d_{\mathbb{B}}L_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle + \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \nabla_{\mathbf{v}_\varphi} \mathbf{v}_\gamma(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle.$$

On the other hand, denoting by $\chi_{\tau,t} := \gamma_\tau \circ \gamma_t^{-1} \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ the flow along the trajectory, we may write

$$\partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_\tau)) \rangle = \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \chi_{\tau,t} \uparrow \chi_{\tau,t} \downarrow \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_\tau)) \rangle,$$

and applying the LEIBNIZ rule:

$$\begin{aligned} \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_\tau)) \rangle &= \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \partial_{\tau=t} \chi_{\tau,t} \downarrow \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_\tau)) \rangle \\ &\quad + \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \chi_{\tau,t} \uparrow \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle. \end{aligned}$$

Finally, by definition of the covariant derivatives, we have:

$$\begin{aligned} \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \partial_{\tau=t} \chi_{\tau,t} \downarrow \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_\tau)) \rangle &= \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \nabla_{\mathbf{v}_\gamma} \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle, \\ \partial_{\tau=t} \langle d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau), \chi_{\tau,t} \uparrow \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle &= \langle \partial_{\tau=t} d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{\mathbf{v}_t} d_{\mathbb{F}}L_t, \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle. \end{aligned}$$

The general law of dynamics may then be written as

$$\begin{aligned} &\langle \partial_{\tau=t} d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_t) + \nabla_{\mathbf{v}_t} d_{\mathbb{F}}L_t, \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle + \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \nabla_{\mathbf{v}_\gamma} \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle \\ &= \langle d_{\mathbb{B}}L_t(\mathbf{v}_t), \mathbf{v}_\varphi(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle + \langle d_{\mathbb{F}}L_t(\mathbf{v}_t), \nabla_{\mathbf{v}_\varphi} \mathbf{v}_\gamma(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}_t)) \rangle. \end{aligned}$$

From the expression: $\text{TORS}(\mathbf{v}_\varphi, \mathbf{v}_\gamma) := \nabla_{\mathbf{v}_\varphi} \mathbf{v}_\gamma - \nabla_{\mathbf{v}_\gamma} \mathbf{v}_\varphi - [\mathbf{v}_\varphi, \mathbf{v}_\gamma]$ being $[\mathbf{v}_\varphi, \mathbf{v}_\gamma] = 0$ by definition of the vector field $\mathbf{v}_\gamma \in C^1(\mathbb{C}; \mathbb{TC})$, we infer that $\nabla_{\mathbf{v}_\varphi} \mathbf{v}_\gamma = \nabla_{\mathbf{v}_\gamma} \mathbf{v}_\varphi$ if the torsion vanishes, and the statements are proven.

The standard connection associated with the distant parallel transport by translation in the model BANACH space is torsion-free. Indeed any pair of vector fields generated by translation of a given pair of tangent vectors at a point, has a vanishing LIE bracket and vanishing covariant derivatives of each of them with respect to the other one. Since the torsion tensor is natural with respect to diffeomorphic transformations, the connection induced on the manifold \mathbb{C} by a system of coordinates is still torsion-free. It follows that the differential law of dynamics takes LAGRANGE's form when written in coordinates. In rigid body dynamics, all virtual velocities being rigid, the differential law reduces to LAGRANGE's equation of dynamics:

$$\partial_{\tau=t} d_{\mathbb{F}}L_\tau(\mathbf{v}_\tau) = d_{\mathbb{B}}L_t(\mathbf{v}_t).$$

The special forms of the differential law of dynamics hide however the direct implication of EMMY NOETHER's theorem.

8 Conclusions

About two centuries have passed away since LAGRANGE's and HAMILTON's genial discoveries, while an extended formulation of HAMILTON's action principle was at hand to provide a general form of the differential law of dynamics and of the jump conditions at singular points of the trajectory. One century after the publication of EMMY NOETHER's celebrated theorem, the extension of HAMILTON's principle contributed in this paper reveals that NOETHER's theorem follows, as a direct corollary from the differential law of dynamics. In short NOETHER's theorem states that *if $\mathbf{a} = 0$ then $\mathbf{b} = 0$* , while the differential law of dynamics states that $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. It should be noted that the translation of HAMILTON's action principle in geometrical differential terms, gave us the idea of how to rewrite it and opened the way for the direct proof of the general law of dynamics. Remarkably, the proof of this more general result is definitely simpler than the classical one of the special LAGRANGE's law of dynamics in coordinates.

References

1. Noether E.A.: Invariante Variationsprobleme, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse (1918), 235-257; English translation: M.A. Tavel, Transport Theory and Statistical Mechanics 1(3), 183-207 (1971).
2. Palais, R.: Definition of the exterior derivative in terms of the Lie derivative, Proc. Am. Math. Soc.; 5: 902-908 (1954).
3. Synge, J.L.: Classical Dynamics, Handbuch der Physik, Band III/1, Springer, Berlin (1960).
4. Abraham R., Marsden J.E.: Foundations of Mechanics, Benjamin, NY (1967).
5. Choquet-Bruhat, Y.: Géométrie Différentielle et Systèmes extérieurs, Travaux et recherches mathématiques, Collège de France, Dunod, Paris (1970).
6. Deschamps G.A.: Exterior differential forms, in Mathematics Applied to Physics, Ed. Roubine É., pp. 111-161, Springer-Verlag, Berlin (1970).
7. Arnold V.I.: Mathematical methods of classical mechanics, Mir, Moscow (1979).
8. Spivak M.: A comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol.I-V, Publish or Perish, Inc., Berkeley (1979).
9. Marsden J.E., Hughes T.J.R.: Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice-Hall, Redwood City, Cal. (1983).
10. Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T.: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, second edition, Springer Verlag, New York (1988).
11. Petersen P.: Riemannian Geometry, Springer, New York (1998).
12. D'Anna, A., Renno, P.: Elementi di Meccanica Razionale, CUEN, Napoli, (2001).
13. Bossavit, A.: Applied Differential Geometry (A compendium), available on the web 1-30 (2002).
14. Romano, G., Diaco M.: A Functional Framework for Applied Continuum Mechanics, New Trends in Math. Physics, World Scientific, 193-204 (2004).
15. Romano, G.: Calculus on Manifolds and Nonlinear Continuum Mechanics, Research Report, University of Naples Federico II, Italy (2005).

Mixture of Gases with Multi-temperature:

Identification of a macroscopic average temperature

Tommaso Ruggeri *

Department of Mathematics and Research Center of Applied Mathematics (C.I.R.A.M.)

University of Bologna, Via Saragozza 8, 40123 Bologna, Italy.

Srboljub Simić

Department of Mechanics, Faculty of Technical Sciences

University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovica 6, 21000 Novi Sad, Serbia.

Abstract

In this paper we present the model of a mixture of gases in which each constituent has its own temperature. We review some recent results, in particular concerning the global existence of smooth solutions. Then we deduce a solution of the differential system under the assumption that the fields depend only on time. In this way, we are able to identify a possible natural *macroscopic average temperature*.

*Dedicato a Pasquale Renno con amicizia e stima

1 The Mixture Theory

The description of simple homogeneous mixtures in the context of rational thermodynamics [1] relies on the postulate that each constituent obeys the same balance laws as a single fluid. They express rates of change of mass, momentum and energy with appropriate production terms due to mutual

interaction of the constituents:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= \tau_\alpha \\ \frac{\partial(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{t}_\alpha) &= \mathbf{m}_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 + \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 + \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \right) \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{t}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha \right\} &= e_\alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

being ρ_α the density, \mathbf{v}_α the velocity, ε_α the internal energy, \mathbf{t}_α the stress tensor and \mathbf{q}_α the heat flux of the α constituent of the mixture. The production terms must satisfy the following relations:

$$\sum_{\alpha=1}^n \tau_\alpha = 0; \quad \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{m}_\alpha = \mathbf{0}; \quad \sum_{\alpha=1}^n e_\alpha = 0, \quad (2)$$

due to the global conservation of mass, momentum and energy of the mixture.

In fact, one may obtain from (1) the conservation laws of total mass, total momentum and total energy of the mixture through summation of the corresponding balance laws (1), after the introduction of following quantities:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha && \text{total mass density,} \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha && \text{mixture velocity,} \\ \varepsilon &= \varepsilon^I + \frac{1}{2\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha u_\alpha^2 && \text{internal energy,} \\ \mathbf{t} &= \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{t}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha) && \text{stress tensor,} \\ \mathbf{q} &= \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \mathbf{q}_\alpha + \rho_\alpha \left(\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 \right) \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{t}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right\} && \text{flux of internal energy,} \\ \mathbf{u}_\alpha &= \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v} \quad \left(\sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{0} \right) && \text{diffusion velocity,} \\ \varepsilon^I &= \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha \varepsilon_\alpha && \begin{array}{l} \text{intrinsic} \\ \text{internal energy.} \end{array} \end{aligned} \quad (3)$$

The conservation laws read as the ones of a single fluid:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0; \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{t}) &= \mathbf{0}; \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) \mathbf{v} - \mathbf{t} \mathbf{v} + \mathbf{q} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

In ordinary thermodynamics of mixtures, the state of the mixture is determined by $n + 4$ fields: the mass densities ρ_α , the mixture velocity \mathbf{v} and the common temperature T . Therefore, $n + 4$ field equations have to be chosen to describe thermodynamic processes. These are balance laws of mass $(1)_1$ and conservation laws of momentum and energy $(4)_{2,3}$. Usually, one of the balance laws $(1)_1$ is replaced by the conservation law $(4)_1$. Consequently, one may choose ρ , \mathbf{v} , T and $n - 1$ independent concentration variables c_α as field variables, where:

$$c_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho}; \quad \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha = 1. \quad (5)$$

This model is characterized by an important shortcoming due to its constitutive assumptions (see [2], Chapter 5): it predicts infinite speed of propagation of disturbances in concentration also when viscosity and heat conductivity are neglected.

This problem has been successfully solved by the Rational Extended Thermodynamics [2] that describes thermodynamic processes by the $4n + 1$ fields of mass densities ρ_α , constituent velocities \mathbf{v}_α , and common single temperature T (ST model). The field equations are thus the balance laws of mass and momentum $(1)_{1,2}$ and the conservation law of energy $(4)_3$. Like in the previous case, conservation laws of mass and momentum $(4)_{1,2}$ may replace the corresponding balance laws for one constituent. Thus, one may choose ρ , \mathbf{v} , T , and $n - 1$ independent concentrations c_α and diffusion velocities \mathbf{u}_α as field variables. Finally, one may consider a model of a mixture in which each constituent has its own temperature. This assumption leads to a multi-temperature model of the mixture (MT model). In such a situation we have $5n$ variables ρ_α , \mathbf{v}_α and T_α and all the $5n$ balance laws (1) are needed for the description of the thermodynamic processes. Using the same idea as in previous cases, balance laws for one of the constituents, say n , could be replaced by conservation laws (4).

With this choice, the governing equations for the n -component mixture read:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0; \\
\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{t}) &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) \mathbf{v} - \mathbf{t} \mathbf{v} + \mathbf{q} \right\} &= 0; \\
\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b \mathbf{v}_b) &= \tau_b; \\
\frac{\partial(\rho_b \mathbf{v}_b)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_b \mathbf{v}_b \otimes \mathbf{v}_b - \mathbf{t}_b) &= \mathbf{m}_b; \\
\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho_b v_b^2 + \rho_b \varepsilon_b \right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho_b v_b^2 + \rho_b \varepsilon_b \right) \mathbf{v}_b - \mathbf{t}_b \mathbf{v}_b + \mathbf{q}_b \right\} &= e_b \\
b &= 1, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{6}$$

In a recent paper [3] we have proved that requiring the Galilean invariance for the system (6) the production terms in (6) depend explicitly on velocity \mathbf{v} through:

$$\begin{aligned}
\tau_b &= \hat{\tau}_b; \\
m_b^j &= \hat{\tau}_b v^j + \hat{m}_b^j; \\
e_b &= \hat{\tau}_b \frac{v^2}{2} + \hat{m}_b^k v_k + \hat{e}_b.
\end{aligned} \tag{7}$$

where the hat indicates the corresponding internal counterparts independent of the velocity (objective quantities).

We consider now the simple case of a mixture of Eulerian perfect ideal fluids, i.e. neither viscous nor heat-conducting, i.e.:

$$\mathbf{t}_\alpha = -p_\alpha \mathbf{I}, \quad \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{0} \quad ; \quad (\alpha = 1, \dots, n). \tag{8}$$

$$p_\alpha = \frac{k}{m_\alpha} \rho_\alpha T_\alpha; \quad \varepsilon_\alpha = \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha (\gamma_\alpha - 1)}; \quad (\alpha = 1, \dots, n), \tag{9}$$

where k is the Boltzmann constant, m_α is the atomic mass of the α -constituent, p_α is the pressure of the α -constituent.

As a consequence of this assumption the stress tensor and the heat flux (3) are reduced to:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= -p \mathbf{I} - \sum_{\alpha=1}^n (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha); \\
\mathbf{q} &= \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \rho_\alpha \left(\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 \right) + p_\alpha \right\} \mathbf{u}_\alpha,
\end{aligned} \tag{10}$$

where

$$p = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \tag{11}$$

is the total pressure.

The compatibility with the entropy principle permits to determine explicitly the internal productions [3]:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_b &= - \sum_{c=1}^{n-1} \varphi_{bc} \left(\frac{\mu_c - \frac{1}{2}u_c^2}{T_c} - \frac{\mu_n - \frac{1}{2}u_n^2}{T_n} \right); \\ \hat{\mathbf{m}}_b &= - \sum_{c=1}^{n-1} \psi_{bc} \left(\frac{\mathbf{u}_c}{T_c} - \frac{\mathbf{u}_n}{T_n} \right); \quad \hat{\epsilon}_b = - \sum_{c=1}^{n-1} \theta_{bc} \left(-\frac{1}{T_c} + \frac{1}{T_n} \right), \end{aligned} \tag{12}$$

where $\mu_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} - T_{\alpha}S_{\alpha} + p_{\alpha}/\rho_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, n$ are chemical potentials of the constituents, while φ_{bc} , ψ_{bc} and θ_{bc} are positive definite matrix.

2 Qualitative Analysis

The MT model for mixtures is a particular case of a system of balance laws

$$\frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial x} = \mathbf{F}; \tag{13}$$

where \mathbf{F}^0 , \mathbf{F}^i and \mathbf{F} are \mathbf{R}^N vectors. The system (13) is dissipative due to the presence of the productions that satisfy the entropy principle. On the other hand the system (6) is of mixed type since five equations are conservation laws while the rest of the system consisted of true balance laws

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

For this class of systems the coupling condition of Shizuta and Kawashima (K-condition) [4] can ensure the global existence of smooth solutions, meaning that dissipation in balance laws prevails the hyperbolicity of conservation laws. Actually, the K-condition reads: *In the equilibrium manifold any characteristic eigenvector is not in the null space of $\nabla \mathbf{F}$* , i.e.

$$\nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}^{(i)} \Big|_E \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N. \tag{14}$$

where $\mathbf{d}^{(i)}$ are the right-eigenvectors of the hyperbolic system (13):

$$(\mathbf{A}_n - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{d} = 0, \tag{15}$$

$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}^i n_i$, $\mathbf{A}^i = \nabla \mathbf{F}^i$, $\mathbf{u} = \mathbf{F}^0$, $\nabla = \partial/\partial \mathbf{u}$, $\mathbf{n} \equiv (n_i)$ is a generic unit vector and E stands for the equilibrium state.

It has been proven recently that if the system of balance laws (13) is endowed with a convex entropy law, and it is dissipative, then the K-condition becomes a sufficient condition for the existence of global smooth solutions provided that the initial data are sufficiently smooth [5, 6]. Furthermore, Ruggeri and Serre [7] proved the stability of constant states in one-dimensional case.

After an extensive calculation [3] it has been shown that K-condition is satisfied for the MT model (6) of mixtures together with the entropy convexity and that, according to above mentioned results, the following statement is valid:

If the initial data of the MT model are perturbations of equilibrium state, smooth solutions exist for all time and tends to the equilibrium constant state.

However, this nice behavior is not valid for the ST model [8, 9, 10] and this is another important indication that the MT model is more realistic with respect to the ST one.

Moreover in [3] we have show that ST model, within the framework of hyperbolic systems, represents a *principal subsystem* of the MT model in the sense of a definition due to Boillat and Ruggeri [11].

3 Binary mixture

Let us consider the simple case of a binary mixture without chemical reaction $\tau_\alpha = 0$. To understand the difference between the ST model and the MT model we consider solutions of (1) in which the fields depend only on time. With these assumptions balance laws (1) read:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = 0; \quad \frac{d\rho_2}{dt} = 0; \quad (16)$$

$$\rho_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{m}_1; \quad \rho_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -\mathbf{m}_1; \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 \varepsilon_1 \right) = e_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \rho_2 \varepsilon_2 \right) = -e_1. \quad (18)$$

From (16) and (17) we have:

$$\rho_1 = \text{const.}; \quad \rho_2 = \text{const.}; \quad \rho \mathbf{v} = \text{const.}$$

and the constant velocity $\mathbf{v} = 0$ can be chosen without loss of generality due to Galilean invariance.

From (18) and (9) we obtain:

$$\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \frac{k}{m_1} \frac{\rho_1 T_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{k}{m_2} \frac{\rho_2 T_2}{\gamma_2 - 1} = E = \text{const.} \quad (19)$$

Taking into account that in equilibrium $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$, $T_1 = T_2 = T_0$, the following value of the constant E in (19) is obtained:

$$E = k \left(\frac{1}{m_1} \frac{\rho_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{1}{m_2} \frac{\rho_2}{\gamma_2 - 1} \right) T_0. \quad (20)$$

From (19) and (20) follows that there exists an *average diffusive temperature* T which remains constant during the process:

$$T = T_0 = \frac{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \frac{k}{m_1} \frac{\rho_1}{\gamma_1 - 1} T_1 + \frac{k}{m_2} \frac{\rho_2}{\gamma_2 - 1} T_2}{\frac{k}{m_1} \frac{\rho_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{k}{m_2} \frac{\rho_2}{\gamma_2 - 1}}. \quad (21)$$

Furthermore, if processes not far from the equilibrium state are to be considered, diffusive quadratic terms in (21) could be neglected and the following average temperature is obtained:

$$T = T_0 = \frac{\rho_1 m_2 (\gamma_2 - 1) T_1 + \rho_2 m_1 (\gamma_1 - 1) T_2}{\rho_1 m_2 (\gamma_2 - 1) + \rho_2 m_1 (\gamma_1 - 1)}. \quad (22)$$

Therefore (22), at least for this kind of processes, permits to identify a possible natural *macroscopic average temperature* that coincides with the one of ST model and remains constant for all time.

Linearizing equations (16-18) in the neighborhood of an equilibrium state and taking into account (12), one obtains:

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_v} \mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_v} \mathbf{v}_2, \quad (23)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = -\frac{1}{\tau_T} (T_1 - T_0); \quad \frac{dT_2}{dt} = -\frac{1}{\tau_T} (T_2 - T_0)$$

with

$$\tau_T = \frac{k\rho_1\rho_2 T_0^2}{\theta_{11}^0 (\rho_1 m_2 (\gamma_2 - 1) + \rho_2 m_1 (\gamma_1 - 1))}, \quad \tau_v = \frac{\rho_1 \rho_2 T_0}{\rho \psi_{11}^0} \quad (24)$$

(θ_{11}^0 and ψ_{11}^0 indicate the constant equilibrium values of θ_{11} and ψ_{11} respectively). Initial data $\mathbf{v}_1(0)$, $\mathbf{v}_2(0)$ are taken in accordance with constraint $\mathbf{v} = 0$, i.e.

$$\rho_1 \mathbf{v}_1(0) + \rho_2 \mathbf{v}_2(0) = 0 \quad (25)$$

while (22) provides the value of equilibrium temperature T_0 in terms of $T_1(0)$ and $T_2(0)$:

$$T_0 = \frac{\rho_1 m_2 (\gamma_2 - 1) T_1(0) + \rho_2 m_1 (\gamma_1 - 1) T_2(0)}{\rho_1 m_2 (\gamma_2 - 1) + \rho_2 m_1 (\gamma_1 - 1)}. \quad (26)$$

Consequently the solution of (23) reads:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(0) e^{-\frac{t}{\tau_v}}; \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(0) e^{-\frac{t}{\tau_v}}; \quad (27)$$

$$T_1 = T_0 + (T_1(0) - T_0) e^{-\frac{t}{\tau_T}}; \quad T_2 = T_0 + (T_2(0) - T_0) e^{-\frac{t}{\tau_T}}; \quad (28)$$

with (25) and (26). One may conclude that for t large, \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 tend to zero with relaxation time τ_v , while T_1 and T_2 tend to the equilibrium temperature T_0 with relaxation time τ_T .

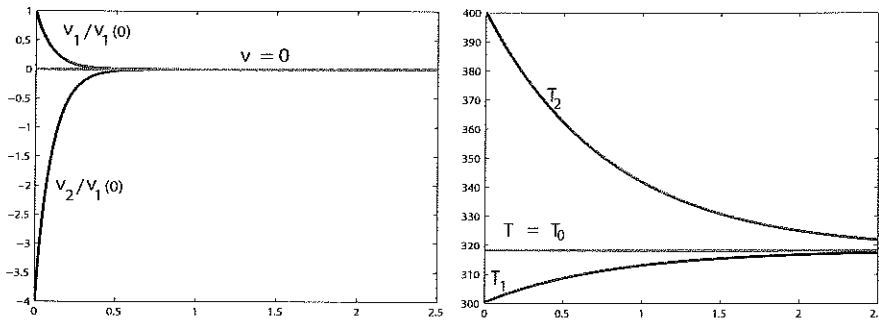


Fig. 1: The behavior of normalized velocities and temperatures of the constituents versus time ($m_2/m_1 = 1.14$, $T_1(0) = 300$ K, $T_2(0) = 400$ K, $c = \rho_1/\rho = 0.8$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 7/5$, $\tau_v = 0.1$).

To compare the relaxation times τ_v and τ_T the following relations from the kinetic theory may be recalled [12]:

$$\theta_{11} = \frac{3m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} k T_0^2 \Gamma'_{12}, \quad \psi_{11} = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Gamma'_{12} \quad (29)$$

where Γ'_{12} is the number of collisions per unit of volume. From (24) and (29) one obtains:

$$\frac{\tau_T}{\tau_v} = \frac{2}{3} \frac{(m_1 + m_2) \rho}{m_1 (\gamma_1 - 1) \rho_2 + m_2 (\gamma_2 - 1) \rho_1}. \quad (30)$$

For the mixture of monatomic gases, $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$, we have:

$$\frac{\tau_T}{\tau_v} = \frac{\rho(m_1 + m_2)}{\rho_1 m_2 + \rho_2 m_1} \geq 1 \quad (31)$$

leading to $\tau_T \geq \tau_v$. This inequality indicates that diffusion processes are attenuated faster than the temperature difference, providing another proof of superiority of the MT model to the ST one. The Fig.1 represents the sketch of the solutions (27) and (28) for data corresponding to the air constituted by 80% of Nitrogen and by 20% of Oxygen.

The necessity for a macroscopic temperature comes from the fact that it is practically impossible to measure the temperatures of the constituents. That was probably the main reason for the domination of the ST model in literature. Nevertheless, the ST model—as we have seen—cannot be regarded as realistic one, in particular when the atomic masses of each constituent are different. Therefore we can use the more realistic MT model and choose T given by (22) as possible *average macroscopic temperature*.

Observe that in the case of a generic n -component mixture (22) is generalized to:

$$T = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \frac{\rho_{\alpha}}{m_{\alpha}(\gamma_{\alpha} - 1)} T_{\alpha}}{\sum_{\beta=1}^n \frac{\rho_{\beta}}{m_{\beta}(\gamma_{\beta} - 1)}}. \quad (32)$$

As in the case of a binary mixture, (32) is obtained by requirement that the global intrinsic internal energy of MT theory is equal to the one of the ST theory:

$$\varepsilon_{MT}^I = \varepsilon_{ST}^I. \quad (33)$$

In the class of solutions in which the fields depend only on time, the choice of (32) seems to be natural. The macroscopic average temperature so obtained remains constant for processes not far from the equilibrium, being in agreement with the ST theory and the physical expectation as well. Of course, for generic processes depending on space and time there are in principle several other possibilities to define an average temperature and the choice (32) has to be compared with them and to be tested if in agreement with experiments.

Acknowledgment: This paper was supported in part (T.R.) by fondi MIUR Progetto di interesse Nazionale *Problemi Matematici Non Lineari di Propagazione e Stabilità nei Modelli del Continuo* Coordinatore T. Ruggeri, by the GNFM-INdAM, and (S.S.) by the Ministry of Science and Environmental Protection of Serbia within the project *Contemporary Problems of Mechanics of Deformable Bodies*.

References

- [1] C. Truesdell, *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill Series in Modern Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York (1969).
- [2] I. Müller, T. Ruggeri, *Rational Extended Thermodynamics*, 2nd ed., Springer Tracts in Natural Philosophy **37**, Springer-Verlag, New York (1998).
- [3] T. Ruggeri, S. Simić, *On the Hyperbolic system of a mixture of Eulerian fluids: a comparison between single- and multi-temperature models*, Math. Meth. Appl. Sci., (in press), Published online DOI: 10.1002/mma.813 (2006).
- [4] Y. Shizuta, S. Kawashima, *Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J. **14**, 249 (1985).
- [5] B. Hanouzet, R. Natalini, *Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy*, Arch. Rational Mech. Anal. **163**, 89-117 (2003).
- [6] W.A. Yong, *Entropy and global existence for Hyperbolic balance laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **172**, 247-266 (2004).
- [7] T. Ruggeri, D. Serre, *Stability of constant equilibrium state for dissipative balance laws system with a convex entropy*, Quart. Appl. Math. **62**(1), 163-179 (2004).
- [8] T. Ruggeri, *Global Existence, Stability and Non Linear Wave Propagation in Binary Mixtures*, Proceedings of the International Meeting in honour of the Salvatore Rionero 70th Birthday, Napoli 2003; Eds. P.Fergola, F. Capone, M. Gentile and G. Guerriero; World Scientific - Singapore, 205-214 (2004).
- [9] T. Ruggeri, *Some Recent Mathematical Results in Mixtures Theory of Euler Fluids*, Proceedings WASCOM 2003; Eds. R. Monaco, S. Pennisi, S. Rionero and T. Ruggeri; World Scientific - Singapore, 441-454 (2004).
- [10] J. Lou, T. Ruggeri, *Acceleration waves and weaker Kawashima-Shizuta condition*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II **78**, 187-200 (2006).

- [11] G. Boillat, T. Ruggeri, *Hyperbolic Principal Sybsystems: Entropy Convexity and Subcharacteristic Conditions*, Arch. Rational Mech. Anal. **137**, 305-320 (1997).
- [12] T.K. Bose, *High Temperature Gas Dynamics*, Springer, Berlin, (2003).

PROBLEMI DI CONTORNO MOBILE NELLA REATTORISTICA SOLIDO-GAS
NON CATALITICA: APPLICAZIONE ALLA COMBUSTIONE DI PARTICELLE
CARBONIOSE IN LETTO FLUIDO

Piero Salatino

Dipartimento di Ingegneria Chimica – Università degli Studi di Napoli Federico II
Istituto di Ricerche sulla Combustione – Consiglio Nazionale delle Ricerche
Piazzale Tecchio 80 – 80125 Napoli (Italy)

Introduzione

La necessità di diversificare le fonti di approvvigionamento energetico e di fornire risposte adeguate ad impellenti problematiche ambientali ha indotto a considerare l'impiego in processi di conversione energetica (combustione, gassificazione) di combustibili di natura biogenica non fossile in aggiunta e/o in sostituzione di tradizionali combustibili di origine fossile (carbone, prodotti petroliferi, gas naturale). Biomassa derivante da colture *ad hoc*, scarti e sottoprodotti selezionati derivanti da lavorazioni industriali, residui selezionati provenienti da cicli di produzione e consumo vengono sempre più di frequente adottati quali combustibili alternativi in processi di combustione e gassificazione, talora in combinazione e/o parziale sostituzione di combustibili fossili tradizionali. Ne derivano vantaggi, oltre che di natura economica, di natura ambientale, collegati alla riduzione di emissioni di gas serra connessa con l'impiego di combustibili biogenici ed alla possibilità di dare un destino ecologicamente compatibile a residui o sottoprodotti non altrimenti impiegabili o riciclabili.

La tecnologia della combustione a letto fluidizzato ha da tempo dimostrato di possedere caratteristiche che la rendono particolarmente idonea alla implementazione di processi di combustione o gassificazione di combustibili biogenici o di miscele di questi con combustibili fossili tradizionali. In estrema sintesi, tale tecnologia consiste nel far avvenire il processo di combustione o gassificazione di particelle carboniose in una sospensione densa solido-gas mantenuta in uno stato di fluidizzazione. Lo stato di fluidizzazione, ottenuto imponendo un flusso ascendente di opportuna entità della corrente gassosa attraverso il letto granulare, impartisce alla sospensione solido-gas caratteristiche di mobilità estremamente attraenti in relazione alla possibilità di condurre processi reattivi veloci e fortemente esotermici.

L'allargamento dello spettro delle applicazioni della tecnologia della combustione a letto fluidizzato a combustibili di nuova generazione ha comportato un rinnovato impegno di comprensione ed inquadramento della fenomenologia e di modellazione dei complessi percorsi di reazione ad essa collegati. In particolare ha assunto una rilevanza significativa la modellazione dei processi dettagliati che interessano la singola particella carboniosa in letto fluidizzato in relazione alle condizioni di processo ed alle proprietà chimico-fisiche del combustibile. La modellazione della combustione di una singola particella carboniosa dischiude una straordinaria ricchezza e varietà di comportamenti, in relazione alla forte non linearità dei fenomeni coinvolti ed all'ampia variabilità delle caratteristiche chimico-fisiche dei combustibili e delle condizioni di processo. Tale ricchezza, che si manifesta in varietà di regimi di reazione e di comportamenti dinamici e biforcuzionali, rappresenta ancora oggi un campo di straordinario interesse negli studi di reattoristica eterogenea.

Inquadramento fenomenologico dei processi di combustione di particelle carboniose in letto fluidizzato

La combustione di una particella combustibile carboniosa in letto fluidizzato avviene attraverso una sequenza di processi chimico-fisici attivati dalla temperatura elevata e dalla atmosfera gassosa ossidante.

All'atto dell'immissione nel reattore a letto fluidizzato il rapido riscaldamento della particella attiva processi di decomposizione termica di natura pirolitica che sono responsabili della emissione, in forma di gas, della frazione volatile del combustibile. Tale processo, noto come devolatilizzazione, lascia un residuo solido (char) composto prevalentemente da carbonio (associato a frazioni minoritarie di altri componenti) e da ceneri e caratterizzato da stabilità termica relativamente elevata.

L'ulteriore conversione del char a valle della devolatilizzazione avviene per effetto dell'attacco eterogeneo dell'ossigeno alla matrice carboniosa. Per semplicità, e senza compromettere la generalità della trattazione, si trascurerà il contributo alla ossidazione delle specie minoritarie e si assumerà che il processo ossidativo a carico del carbonio proceda a decorso completo secondo la seguente stechiometria:



La combustione del char coinvolge i seguenti processi:

- a. diffusione dell'ossigeno attraverso lo strato limite circostante la particella;
- b. diffusione intraparticellare (ovvero nella matrice porosa della particella di char) dell'ossigeno;
- c. reazione in fase eterogenea tra l'ossigeno ed il char;
- d. controdiffusione dei prodotti di reazione attraverso la matrice porosa della particella e attraverso lo strato limite;
- e. scambio termico radiativo/conduittivo all'interno della particella;
- f. scambio termico radiativo/convettivo tra la particella e l'ambiente esterno.

L'ossidazione del carbonio (processo c) si compone, ad una analisi più dettagliata, di ulteriori processi elementari in serie e/o parallelo: adsorbimento dell'ossigeno su siti attivi ed associata formazione di complessi superficiali ossidati di differente natura, interazione dei complessi superficiali con il reagente gassoso, mobilità superficiale ed "hopping" tra siti, desorbimento di prodotti di reazione, per citarne alcuni. Ai fini dell'analisi che segue si adotterà, per semplicità, un approccio di tipo macrocinetico impiegando espressioni cinetiche di tipo globale (*lumped kinetics*) derivanti da regressione di dati sperimentali. Il carattere irreversibile del processo c e valutazioni per ordine di grandezza sulla rilevanza della controdiffusione dei prodotti ai fini del trasporto diffusivo dell'ossigeno (Stefan flow) inducono a trascurare l'influenza della controdiffusione della CO_2 (processo d) ai fini del decorso del processo reattivo.

E' molto importante considerare il ruolo svolto dalla componente inerte (ceneri) sul destino della particella di char. Possono darsi due casi:

Matrice a ceneri incoerenti: le ceneri sono costituite da inclusioni minerali non connesse, disperse nella matrice carboniosa continua.

Matrice a ceneri coerenti: le ceneri costituiscono una matrice minerale continua e coerente interdispersa con la matrice carboniosa combustibile.

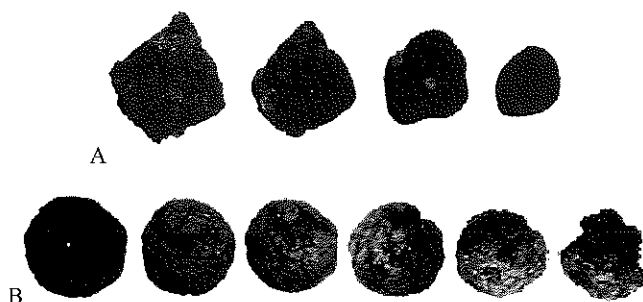


Figura 1: Fenomenologia della conversione di particelle carboniose di varia natura: A) carbone bituminoso (matrice di ceneri incoerenti); B) fanghi di depurazione essiccati e granulati (matrice di ceneri coerenti).

La fenomenologia macroscopica associata alla conversione di particelle carboniose è significativamente diversa nei due casi sopra menzionati:

Matrice a ceneri incoerenti: Il progredire della reazione di combustione nella struttura porosa della particella è associato ad incremento della porosità della matrice carboniosa che può spingersi fino al punto in cui si determina perdita di connettività della matrice stessa. In assenza di una struttura coerente di ceneri, la perdita di connettività della matrice carboniosa si manifesta come frammentazione periferica della particella, ovvero distacco di frammenti parzialmente inconvertiti dalla particella madre. Questa particolare tipologia di frammentazione è denotata come frammentazione percolativa, denominazione suggerita dal fatto che essa viene comunemente analizzata con l'ausilio degli strumenti concettuali della Teoria della Percolazione [1-4]. La presenza di sollecitazioni meccaniche di natura abrasiva che interessano la superficie della particella, indotte dallo stato di fluidizzazione, fa sì che la frammentazione periferica possa avvenire già a livelli del grado di conversione del carbonio, e quindi del grado di vuoto della particella, ben inferiori a quelli ai quali corrisponde la condizione di collasso percolativo. I processi di abrasione meccanica di particelle combustibili in corso di combustione sono stati dettagliatamente studiati da Massimilla e collaboratori [5] i quali sono pervenuti alla formulazione di un quadro meccanicistico della cosiddetta *Combustion Assisted Mechanical Attrition (CAMA)*. In questo quadro trovano composizione gli effetti di progressiva labilizzazione della struttura porosa della particella carboniosa legati al progredire della combustione e le sollecitazioni meccaniche dovute ai fenomeni di abrasione meccanica indotte dal solido fluidizzato. La rilevanza dei fenomeni CAMA sul decorso dei processi di combustione e gassificazione in letto fluidizzato è stata inoltre ampiamente dimostrata.

Per particelle carboniose caratterizzate da matrice incoerente di ceneri la conversione si manifesta macroscopicamente con una riduzione progressiva delle dimensioni della particella associata al rilascio continuo nel tempo di frammenti carboniosi e di inclusioni minerali.

Matrice a ceneri coerenti: La fenomenologia della conversione si modifica significativamente nel caso in cui le ceneri presentino una struttura coerente. La conversione del carbonio e l'incremento del grado di vuoto della particella che ne consegue non risultano in questo caso nel raggiungimento di una condizione di collasso percolativo, in virtù della presenza di una struttura resistente associata alla frazione minerale della particella. Rimane peraltro possibile l'asportazione di strati superficiali della particella (a prevalente contenuto inorganico) per effetto dei fenomeni abrasivi indotti dal moto del solido fluidizzato. Gli effetti di enfaticizzazione della abrasione da parte della combustione,

propri del meccanismo CAMA, risultano in questo caso meno accentuati. Nel caso in esame la particella presenta un nucleo interno alla particella, ancora ricco di carbonio inconvertito, racchiuso da uno strato esterno di ceneri coerenti. Il decorso della combustione induce la riduzione progressiva delle dimensioni del nucleo inconvertito. I fenomeni abrasivi sono invece responsabili della riduzione delle dimensioni della particella e del corrispondente rilascio di frammenti a prevalente componente inorganica.

La Figura 1 esemplifica le diverse fenomenologie associate alla presenza di ceneri coerenti o incoerenti. In Figura 1A è rappresentata la fenomenologia della conversione di una particella di char derivante da un carbone fossile bituminoso, caratterizzata da ceneri incoerenti, con evidenza di fenomeni abrasivi corrispondenti al meccanismo CAMA. Si riconoscono agevolmente le variazioni morfologiche e dimensionali associate al decorso della combustione. In Figura 1B viene rappresentata l'evoluzione nel tempo della morfologia di una particella di char derivante da un combustibile ottenuto per essiccamento e granulazione in letto fluidizzato di fanghi da depurazione di acque civili (Granulated Sewage Sludge). In questo caso la presenza di uno scheletro coerente di ceneri determina la sostanziale costanza della morfologia e delle dimensioni della particella per larga parte della conversione.

Formulazione del modello di conversione di singola particella

La modellazione della combustione della particella carboniosa in presenza di frammentazione periferica (indotta da frammentazione percolativa, abrasione puramente meccanica ovvero CAMA) viene affrontata in questa sede adottando opportune ipotesi semplificative. La particella carboniosa, supposta sferica, è rappresentata in un sistema di riferimento polare avente origine al centro della particella. Il decorso del processo è caratterizzato attraverso la determinazione dei profili spazio-temporali delle seguenti variabili: C, valore locale della concentrazione di ossigeno; X, valore locale del grado di conversione del carbonio; T, valore locale della temperatura; nonché del raggio esterno r_s della particella carboniosa.

I bilanci materiali sull'ossigeno e sul carbonio nella particella forniscono:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_e \frac{\partial C}{\partial r} \right) - \mathfrak{R} \\ \rho_{co} \frac{\partial X}{\partial t} = \mathfrak{R} \end{cases} \quad (2)$$

in cui:

$$\mathfrak{R} = k(T)A(X)C \quad (3)$$

è la velocità di combustione per unità di volume della particella carboniosa, espressa in maniera fattorizzata come funzione della temperatura T, del grado di conversione del carbonio X e con dipendenza lineare dalla concentrazione di ossigeno C. Nel sistema di equazioni 2, ε è il valore locale del grado di vuoto della particella, ρ_{co} è la concentrazione massica di carbonio nella particella inconvertita e:

$$D_e = D_e(X) \quad (4)$$

è il coefficiente di diffusione effettivo dell'ossigeno nella matrice porosa della particella. Il sistema di equazioni 2 è da integrare con le seguenti condizioni ai limiti:

$$\begin{cases} \forall r, t = 0: C = 0, X = 0 \\ r = 0, \forall t: \frac{\partial C}{\partial r} = 0 \\ r = r_s(t), \forall t: D_e \frac{\partial C}{\partial r} = k_g (C_\infty - C) \end{cases} \quad (5)$$

in cui C_∞ è la concentrazione di ossigeno nel letto fluidizzato e k_g è il coefficiente di scambio di materia tra la particella e il letto.

Il bilancio energetico sulla particella combustibile fornisce:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k_e \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \Re \Delta H \quad (6)$$

in cui ρ è la densità della particella, c_p ne è il calore specifico, k_e la conducibilità effettiva (inclusiva del contributo del trasporto radiativo che si sviluppa in seno alla matrice porosa della particella), ΔH l'entalpia di reazione connessa con l'ossidazione completa del carbonio secondo la stechiometria 1. L'equazione 6 è da integrare con le relative condizioni ai limiti:

$$\begin{cases} \forall r, t = 0: T = T_\infty \\ r = 0, \forall t: \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ r = r_s(t), \forall t: k_e \frac{\partial T}{\partial r} = h(T_\infty - T) \end{cases} \quad (7)$$

in cui T_∞ è la temperatura del letto fluidizzato e h è il coefficiente di scambio termico tra la particella ed il letto.

La presenza di condizioni ai limiti date in corrispondenza di un contorno mobile, ovvero a $r = r_s(t)$, nella equazione di bilancio materiale sull'ossigeno e in quella di bilancio energetico conferisce al problema il carattere di problema a contorno mobile (Stefan problem).

La legge con cui varia la posizione del contorno mobile è dettata da condizioni esterne alla particella. Coerentemente con il quadro meccanicistico di abrasione meccanica assistita dalla combustione (CAMA) di cui si è già riferito e per particelle a matrice incoerente di ceneri si possono adottare, in prossimità della soglia di frammentazione percolativa, opportune equazioni di scala del tipo:

$$R = - \frac{dr_s}{dt} = \frac{a}{(X^* - X_s)^2} \quad (8)$$

in cui X_s è il grado di conversione del carbonio in corrispondenza della superficie esterna della particella (esposta all'azione abrasiva del letto), a è una costante dipendente dalla natura e dalla entità delle sollecitazioni meccaniche di natura abrasiva impartite alla particella e l'esponente α dipende da caratteristiche geometriche e topologiche della struttura porosa della particella. R diverge all'approssimarsi di X a X^* , ovvero al raggiungimento della condizione limite di frammentazione puramente percolativa.

Per particelle caratterizzate da matrice coerente di ceneri l'espressione funzionale di R viene modificata per incorporare il contributo alla resistenza meccanica esibita dalla componente inorganica, oltre che a quella carboniosa, della particella:

$$R = -\frac{dr_s}{dt} = \frac{a}{b + (X^* - X_s)^\alpha} \quad (9)$$

Tale espressione è caratterizzata da valori finiti di R , ancorchè crescenti, per valori di $X_s \in [0,1]$.

L'analisi dimensionale del sistema delle equazioni 2 e 6 porta alla definizione, tra gli altri, di due numeri adimensionali. Il modulo di Thiele, definito come:

$$\varphi = \frac{d}{6} \frac{1}{X_s} \sqrt{2k(T) \int_0^{X_s} \frac{X}{A(X)D_c(X)} dX} \quad (10)$$

assume il significato di rapporto tra la scala temporale della diffusione intraparticellare e la scala temporale associata al decorso del processo reattivo. La temperatura di Prater:

$$\beta = \frac{D_c C_s |\Delta H|}{k_c T_s} \quad (11)$$

definisce invece l'entità della differenza di temperatura che si stabilisce tra la particella combustibile ed il letto fluidizzato per effetto della termicità del processo reattivo. Entrambi questi gruppi determinano la struttura della risoluzione nonché le caratteristiche generali del comportamento dinamico e biforcuzionale del sistema.

Valutazioni per ordine di grandezza dei termini presenti nelle equazioni di bilancio materiale ed energetico suggeriscono che, con riferimento a condizioni di reazione usuali, possa adottarsi di norma l'ipotesi di pseudo-stazionarietà ($\frac{\partial}{\partial t} \cong 0$) con riferimento all'equazione di bilancio materiale sull'ossigeno ed alla equazione di bilancio di energia.

Metodologia e problematiche risolutive: caso generale.

Nella sua formulazione più generale il modello matematico, costituito dal sistema di equazioni 2 e 6 con le relative condizioni ai limiti, dalle equazioni 8 ovvero 9 per la velocità di riduzione del raggio della particella, delle equazioni costitutive per la cinetica di reazione e per l'espressione dei coefficienti di trasporto, si configura come un sistema di equazioni differenziali non lineari con contorno mobile.

La risoluzione numerica del problema generale è stata affrontata con successo da Salatino e Massimilla [6] con riferimento alla combustione di una particella carboniosa a ceneri incoerenti in presenza di significativa asportazione di materiale per abrasione con meccanismo CAMA. L'integrazione delle equazioni di bilancio materiale e di bilancio di energia è stata affrontata adottando una tecnica di collocazione ortogonale su intervalli finiti [7-9]. Il dominio di integrazione spaziale è stato preventivamente "immobilizzato" ricorrendo ad una opportuna ridefinizione del sistema di assi coordinati ed alla corrispondente trasformazione di coordinate spaziali. L'integrazione nel dominio temporale è stata affrontata con una tecnica di integrazione al passo di Runge Kutta del 4° ordine, nei casi non *stiff*, con il metodo di Gear per condizioni *stiff*. Coerentemente con le ipotesi alla base del meccanismo CAMA, gli autori hanno adottato una

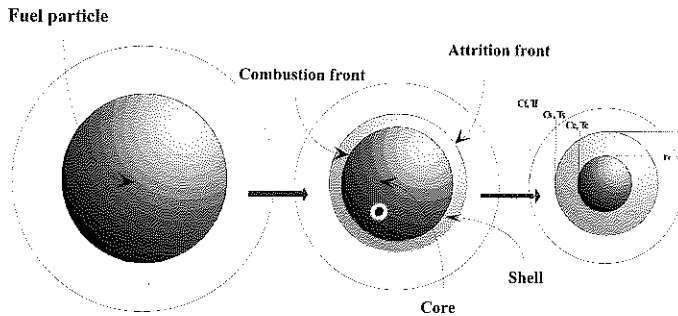


Figura 2: Modello di conversione di particelle carboniose caratterizzate da matrice coerente di ceneri: regime asintotico a controllo misto cinetico-diffusionale.

espressione costitutiva per la velocità di regressione della superficie esterna della particella per effetto della abrasione conforme alla equazione 8, ottenuta mediante regressione di dati sperimentali. La natura della forma funzionale della 8, ed in particolare il valore dell'esponente di scala α , giocano un ruolo non secondario nel determinare l'efficacia degli schemi di risoluzione numerica delle equazioni di modello. In particolare valori di α elevati possono indurre *stiffness* pronunciata del modello differenziale, comportando la necessità di avvalersi di metodi di integrazione di tipo adattivo. D'altra parte è stato evidenziato come il valore di α presenti ampia variabilità in funzione della tipologia del combustibile, del grado di vuoto e delle caratteristiche topologiche della struttura porosa del char. Char derivanti dalla devolatilizzazione di combustibili ad alto tenore di volatili, quali biomasse lignocellulosiche, presentano di norma valori di α significativamente più elevati di quelli relativi a strutture di char generati dalla devolatilizzazione di carbone fossile [10]. Queste considerazioni fanno comprendere come sia necessario talora particularizzare le strategie risolutive in relazione alle specifiche caratteristiche delle particelle combustibili e delle condizioni di processo assunte a riferimento.

L'analisi delle soluzioni numeriche e quella biforcuzionale riferite al caso generale suggeriscono l'esistenza di molteplicità di regimi quasi-stazionari in corrispondenza di valori del modulo di Thiele prossimi all'unità e per valori elevati della temperatura di Prater (condizione quest'ultima corrispondente a termicità elevate del processo reattivo e conducibilità termiche modeste della particella combustibile). Per valori elevati del modulo di Thiele il sistema presenta una soluzione stabile.

Metodologia e problematiche risolutive: regimi asintotici a controllo misto cinetico-diffusionale.

Formulazioni semplificate del modello possono essere sviluppate con riferimento a regimi di conversione selezionati. In particolare una classe di problemi di ricorrente interesse applicativo è rappresentato dai regimi di combustione corrispondenti ad elevati valori del modulo di Thiele. Tali regimi sono caratterizzati dalla modesta estensione della regione interna alla particella carboniosa nella quale il processo reattivo decorre apprezzabilmente, quando comparata con il volume compressivo della particella. Tale proprietà è da ascrivere alla inefficacia dei processi di diffusione intraparticellare quando comparati con la velocità con cui decorre il processo reattivo in fase eterogenea. In tali regimi il controllo della cinetica di reazione è assunto congiuntamente dalla diffusione intraparticellare e dalla cinetica intrinseca di reazione.

Una soluzione analitica è disponibile nel limite $\varphi \rightarrow \infty$ per particelle carboniose a matrice incoerente di ceneri e nel caso di frammentazione periferica dominata dalla frammentazione puramente percolativa [11]:

$$-\frac{dr_s}{dt} = R = \frac{1}{\rho_{co} \sqrt{\frac{2}{k(T)} \int_0^{X^*} \frac{X}{A(X)D_c(X)} dX}} \cdot C_s = \frac{k_c}{\rho_{co}} \cdot C_s \quad (12)$$

in cui X^* rappresenta, come già precedentemente indicato, il valore limite del grado di conversione del carbonio corrispondente alla soglia percolativa e C_s la concentrazione di ossigeno valutata alla superficie della particella ($r=r_s$).

Salatino e Massimilla [12] hanno presentato una formulazione del modello ed una risoluzione semplificata per $\varphi \rightarrow \infty$ nel caso in cui la particella sia soggetta a frammentazione periferica dominata dal meccanismo CAMA. Anche in questo caso la modellazione è stata rivolta a particelle carboniose a matrice incoerente di ceneri con una opportuna definizione della equazione costitutiva per la velocità di regressione della superficie esterna in funzione del valore locale del grado di conversione del carbonio.

Recentemente Canò et al. [13] hanno sviluppato un modello semplificato di conversione di particelle carboniose caratterizzate da matrice coerente di ceneri. Il modello è valido nelle condizioni limite di valore elevato del modulo di Thiele. In considerazione della limitata estensione dello spessore del fronte di reazione interno alla particella, che si scala con $1/\varphi$, il modello assume che il fronte di reazione si identifichi con una superficie sferica che delimita un nucleo (*core*) interno alla particella e sostanzialmente inconvertito. Il *core*, di raggio r_c , è racchiuso da una regione esterna costituita da ceneri coerenti (Figura 2). L'espressione 12, con opportuna ridefinizione di talune variabili che in essa compaiono, viene assunta valida per esprimere la velocità di propagazione della superficie del nucleo inconvertito, ovvero la derivata temporale di r_c . Parallelamente viene introdotta una espressione funzionale, del genere della 9, per esprimere la velocità di regressione della superficie esterna della particella, ovvero la derivata temporale del raggio della particella r_s . Il modello risultante è riducibile ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine risolvibile, salvo casi particolari, con metodi numerici validi per problemi di condizioni iniziali non *stiff*. La risoluzione delle equazioni e la discussione dei risultati di modello è stata presentata dagli autori con riferimento alla combustione in letto fluidizzato di un combustibile biogenico consistente in fango da depurazione essiccato e granulato. Risultati esemplificativi sono riportati in Figura 3, ove sono documentati *loci* spazio-temporali delle concentrazioni di ossigeno e delle temperature all'interno della particella carboniosa al procedere

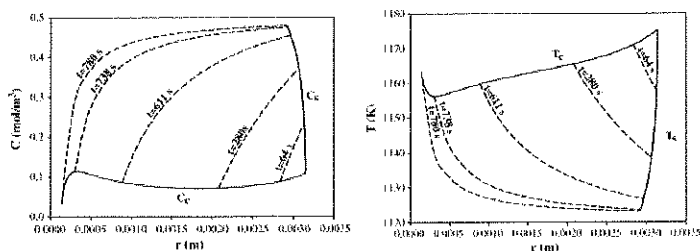


Figura 3: Modello di conversione di particelle carboniose caratterizzate da matrice coerente di ceneri; *loci* della concentrazione di ossigeno e della temperatura al procedere della conversione.

della conversione. Le condizioni di processo sono riferite ad una particella da 5mm di diametro convertita in letto fluidizzato a 850°C ed in atmosfera alla concentrazione di ossigeno pari a 4.5% su base volumetrica. Di particolare interesse risultano i profili che esprimono le concentrazioni C_c e C_s e le temperature T_c e T_s che si determinano rispettivamente alla superficie del nucleo inconvertito ed alla superficie esterna della particella durante la conversione. Sono evidenti le forti disuniformità di tali variabili determinate per un verso dalla significatività delle resistenze diffusionali al flusso di ossigeno verso il fronte di reazione, per altro verso alla significativa termicità della reazione ed alla modesta conducibilità termica della matrice di ceneri coerenti.

Conclusioni

La reattoristica chimica dei processi reattivi solido-gas non catalitici rappresenta una miniera inesauribile di modelli differenziali con contorno mobile, ricchi di varietà dinamiche e biforcionali in relazione alle specificità delle condizioni di processo prese in esame. Si è fornita in questo contributo una breve esemplificazione di problemi di contorno mobile propri di questo settore di indagine scientifica con specifico riferimento ai processi di combustione in letto fluidizzato di particelle carboniose di varia natura.

Ringraziamenti

Ho cominciato a cimentarmi con le tematiche di cui si riferisce in questo contributo quale giovane ricercatore ai tempi del Dottorato di Ricerca. In quello stesso periodo ho conosciuto Pasquale Renno, mio docente del Corso di Matematica Avanzata per gli allievi di Dottorato di Ricerca. Pasquale Renno mi introduceva ai metodi raffinati dell'analisi dei modelli differenziali del continuo ed il suo insegnamento entrò immediatamente e mirabilmente in risonanza con l'interesse che suscitavano in me i temi di ricerca ai quali mi dedicavo. Questo mio tributo a Pasquale Renno rappresenta l'occasione per ritornare indietro con il ricordo a quei tempi, con viva ed immutata gratitudine.

Riferimenti bibliografici

1. A.R. Kerstein, S. Niksa, *Twentieth Symposium (International) on Combustion*. The Combustion Institute, Pittsburgh, p. 941 (1984).
2. S. Reyes, K.F. Jensen, *Chem. Eng. Sci.* 41 333 (1986).
3. P. Salatino, L. Massimilla, *Twenty-Second Symposium (International) on Combustion*. The Combustion Institute, Pittsburgh, p. 29 (1988).
4. F. Miccio, P. Salatino, *Twenty-Fourth Symposium (International) on Combustion*. The Combustion Institute, Pittsburgh, p.1145 (1992).
5. R. Chirone, L. Massimilla, P. Salatino, *Progr. in Energy and Combust. Sci.* 17 297 (1991).
6. P. Salatino, L. Massimilla, *Chem. Eng. Sci.* 44 1091 (1989).
7. J. Villadsen, M.L. Michelsen, *Solution of differential equation models by polynomial approximation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
8. M.P. Dudukovic, H.S. Lamba, *Chem. Eng. Sci.* 33 303 (1978).
9. O. Garza-Garza, M.P. Dudukovic, *Comp. Chem. Eng.* 6 2 (1982).
10. P. Salatino, F. Scala, R. Chirone, *Twenty-Seventh Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Institute, Pittsburgh, p. 3103 (1998).
11. G. Gavalas, *Combust. Sci. Technol.* 24 197 (1981).
12. P. Salatino, L. Massimilla, *Chem. Eng. Sci.* 40 1905 (1985).
13. G. Canò, P. Salatino, F. Scala, *Fuel Proc. Technol.* 88 577 (2007).

On the bifurcation problem for periodic differential equations *

Luigi Salvadori

In honor of my friend and colleague Pasquale Renno for his 70th birthday

Abstract

A previous paper [8] concerning the bifurcation problem for periodic differential equations is revisited and enriched.

Keywords: invariance, bifurcation, stability properties of sets.

1. Introduction.

Let $\dot{x} = f(t, x)$ be a differential equation in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ with f smooth and periodic in t for some constant $\omega > 0$. Let M be an invariant ω -periodic s -compact set in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ (see Sec, 2). Assume the existence of a smooth invariant manifold Φ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ containing M and such that M is uniformly asymptotically stable with respect to the perturbations lying on Φ . In a previous paper [8] it has been analyzed the influence of the stability properties of Φ "near M " on the unconditional stability properties of M . We have found that M is stable [asymptotically stable] if and only if Φ is stable [asymptotically stable] near M . The "if" part is a generalization of some classic results concerning the particular case that M is an equilibrium and the linear part of f satisfies sufficient conditions for the existence and the asymptotic stability of Φ near M (see for instance [2], [3],[4],[6]).

By using the results in [8] we revisit here the problem treated in [7]. This problem deals with the bifurcation from an equilibrium to periodic s -compact sets for a family of periodic equations depending on a scalar parameter μ . Some generalizations are obtained by assuming the existence of invariant manifolds Φ_μ and appropriate stability behaviors concerning the equilibrium and each Φ_μ , without the specification of any particular condition on f ensuring these properties.

We remark that the present paper is a preliminary version of a joint paper with F. Visentin in which complete proofs will be given and where the general results will be illustrated through the discussion of particular cases.

2 Preliminaries.

Denote by $\|\cdot\|$ the Euclidean norm in \mathbf{R}^n and by ρ the induced distance. Let C be a nonempty set in \mathbf{R}^n and for $a > 0$ let $B^n(C, a) = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(x, C) < a\}$, $B^n[C, a] = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(x, C) \leq a\}$. Consider a set A in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. We say that A is s -nonempty if any section $A(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : (t, x) \in A\}$ is nonempty. A set N in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ is said to be an s -neighborhood of an s -nonempty set A if for any

*Work supported by the Italian CNR (GNFM).

$t \in \mathbf{R}$ the section $N(t)$ is a neighborhood of $A(t)$. If A is s -nonempty and there exists a compact set Q in \mathbf{R}^n such that $A(t) \subseteq Q$ for all $t \in \mathbf{R}$, then A is said to be s -bounded. If A is s -bounded and each $A(t)$ is compact, we say that A is s -compact. When the mapping $t \rightarrow A(t)$ is ω -periodic, $\omega > 0$, or in particular t -independent, we say that A is ω -periodic or t -independent respectively.

Consider the system of differential equations

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (\dot{}) = \frac{d}{dt} \tag{2.1}$$

where $f \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ and f is ω -periodic in t for some constant $\omega > 0$. Moreover f is supposed to be such that (2.1) admits an invariant ω -periodic s -compact set M in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. For any $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ let us denote by $x(t, t_0, x_0)$ the solution through (t_0, x_0) and by $j^+(t_0, x_0), j^-(t_0, x_0)$ its maximal intervals of existence in the future and in the past respectively.

Let now A be an invariant set which is the kernel of a function $F \in C(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+)$. The stability concepts of A are supposed to be known. Assuming that M is contained in A , we recall now some stability properties of A "near M " in the sense specified in [8]:

Definition 2.1 For any $\nu > 0$ let $I[M, \nu] = \{(t, x) : t \in \mathbf{R}, x \in B^n[M(t), \nu]\}$. Then we will say that A has a stability property near M if there exists $\nu > 0$ such that the property is satisfied with respect to the perturbations $(t_0, x_0) \in I[M, \nu]$. For instance, A is said to be: (i) stable near M if there exists $\nu > 0$ such that for any $t_0 \in \mathbf{R}$ and $\varepsilon > 0$ one may find $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ with the property that $x_0 \in B^n[M(t_0), \nu]$ and $\rho(x_0, A(t_0)) < \delta(t_0, \varepsilon)$ imply $\rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) < \varepsilon$ for any $t \in j^+(t_0, x_0)$; (ii) attracting near M if there exists $\nu > 0$ such that for any $t_0 \in \mathbf{R}$ one may find $\alpha(t_0) > 0$ for which $x_0 \in B^n[M(t_0), \nu]$ and $\rho(x_0, A(t_0)) < \alpha(t_0)$ imply $j^+(t_0, x_0) = [t_0, +\infty)$ and $\rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$. Similarly one may define the other stability properties of A near M .

Remark 2.1 Since M is contained in A , and then $\rho(x_0, A(t_0)) \leq \rho(x_0, M(t_0))$ for any $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, the uniform attractivity of A near M may be defined as follows: There exists $\nu > 0$ such that $t_0 \in \mathbf{R}$ and $x_0 \in B^n[M(t_0), \nu]$ imply that $x(t, t_0, x_0)$ exists for all $t \geq t_0$ and satisfies $\rho(x(t, t_0, x_0), A(t)) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$, uniformly in (t_0, x_0) .

We need some results given in [8] expressed here by the following theorem.

Theorem 2.1 Let assume that for some integer $m \in [1, n)$ there exists for system (2.1) an invariant set in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ defined by

$$\Phi = \{(t, y, z) : t \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^m, z \in \mathbf{R}^{n-m}, z = g(t, y)\},$$

with $g \in C^2$ and ω -periodic in t . Moreover suppose that M is contained in Φ and is uniformly asymptotically stable on Φ (that is with respect to the perturbations $(t_0, x_0) \in \Phi$). Then M is stable [asymptotically stable] if and only if Φ is stable [asymptotically stable] near M .

We conclude the section by specifying the type of bifurcation problem that we will treat. Consider the one-parameter family of differential systems

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad (\dot{}) = \frac{d}{dt}, \tag{S}_\mu$$

with $f \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n)$ and periodic in t for some constant $\omega > 0$. Moreover we assume $f(t, x, \mu) \equiv 0$ so that $(S)_\mu$ admits the null solution for every $\mu \geq 0$. We denote by M_0 the so-called null set, $M_0 = \{(t, x) : t \in \mathbf{R}, x = 0\}$. Given any $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ and $\mu > 0$ let us denote by $x_{(S)_\mu}(t, t_0, x_0)$ the solution of $(S)_\mu$ through (t_0, x_0) and by $j^+(t_0, x_0, \mu)$, $j^-(t_0, x_0, \mu)$ its maximal intervals of existence in the future and in the past respectively.

Definition 2.2 We say that $\mu = 0$ is a bifurcation value on the right for the family $\{(S)_\mu\}$ if there exist $\mu^* > 0$ and a family $\{M_\mu\}$, $\mu \in (0, \mu^*)$, of s -compact subsets of $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) - M_0$ having the following properties:

- (a) for each $\mu \in (0, \mu^*)$, M_μ is an ω -periodic invariant set of $(S)_\mu$;
- (b) $M_\mu(t) \rightarrow \{0\}$ as $\mu \rightarrow 0$ uniformly in t .

3 Bifurcation from equilibrium to s-compact sets.

Consider the one-parameter family $\{(S)_\mu\}$ of differential systems, defined in Section 2. We need the following lemma.

Lemma 3.1 Suppose that $x = 0$ is asymptotically stable for $\mu = 0$ and completely unstable (i.e. asymptotically stable in the past) for $\mu > 0$. Then $\mu = 0$ is a bifurcation value on the right. Precisely there exist $\mu^* > 0$ and an s -compact neighborhood H of M_0 such that for each $\mu \in (0, \mu^*)$ the largest s -compact invariant set of $(S)_\mu$, contained in $H - M_0$, say M_μ , is nonempty, ω -periodic, and the family $\{M_\mu\}$ satisfies (b) in Definition 2.1. Moreover each M_μ is asymptotically stable under $(S)_\mu$.

Proof (Outline). Let r, r' be two numbers such that $0 < r < r'$. For each $\mu \geq 0$ consider the family of systems

$$\dot{x} = f(t, x, \mu)\alpha(x), \tag{S'}_\mu$$

where $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n, [0, 1])$ is such that $\alpha(x) = 1$ for $\|x\| < r$ and $\alpha(x) = 0$ for $\|x\| \geq r'$. Because of the local character of our problems, and because for each μ system $(S')_\mu$ coincides with $(S)_\mu$ in $B^n(r)$, the new family satisfies all the stability assumptions in Lemma 3.1 and $\{(S')_\mu\}$ may replace the original family $\{(S)_\mu\}$. For any $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ and $\mu \geq 0$ let us denote by $x_{(S')_\mu}(t, t_0, x_0)$ the solution of $(S')_\mu$ through (t_0, x_0) . This solution clearly exists for all t in \mathbf{R} . The proof is divided into four steps.

(i) Since the origin is an asymptotically stable solution of $(S')_0$ there exists a number $\gamma \in (0, r)$ and a function $V \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, ω -periodic in t , such that

$$a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|), \tag{3.1}$$

$$\dot{V}_{(S')_0}(t, x) \leq -c(\|x\|), \tag{3.2}$$

for all $t \in \mathbf{R}$ and $x \in B^n(\gamma)$. Here a, b, c are continuous strictly increasing functions from \mathbf{R}^+ into \mathbf{R}^+ with $a(0) = b(0) = c(0) = 0$, and the left hand side of (3.2) is the derivative of V along the solutions

of $(S')_0$. By choosing a number $\lambda \in (0, a(\gamma))$, from (3.1), (3.2) and the expression of \dot{V} along the solutions of $(S')_\mu$ for $\mu > 0$, we easily see that the set

$$H = \{(t, x) : \|x\| \leq \gamma, V(t, x) \leq \lambda\},$$

has the following properties: (1) each section $H(t)$ is a compact neighborhood of $x = 0$ and is contained in the open ball $B^n(\gamma)$; (2) there exists $\mu^* > 0$ such that for any $\mu \in (0, \mu^*)$ H is asymptotically stable and invariant only in the future; (3) the region of attraction of H contains a fixed neighborhood H^* of H and we will choose $H^* = \{(t, x) : \|x\| \leq \gamma, V(t, x) \leq \lambda^*\}$, for some $\lambda^* > \lambda$; (4) H is ω -periodic, that is $H(t) = H(t + \omega)$.

(ii) For any fixed $t_0 \in \mathbb{R}$ and $\mu \in (0, \mu^*)$ consider the map $\pi := \pi_{t_0\mu} : Z \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ defined by $\pi(i, x) = x_{(S')_\mu}(t_0 + i\omega, t_0, x_0)$. Clearly we have $\pi(0, x) = x$ and $\pi(i_1 + i_2, x) = \pi(i_1, \pi(i_2, x))$ for every $i_1, i_2 \in Z$ and $x \in \mathbb{R}^n$. Hence π defines an autonomous discrete dynamical system depending on t_0, μ . For $x \in \mathbb{R}^n$ let $J^+(x) := J_{t_0\mu}^+(x)$, $J^-(x) := J_{t_0\mu}^-(x)$ be the positive and the negative prolongational limit set of x under π . Precisely:

$$J^+(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \text{there exist two sequences } (i_n), i_n \rightarrow +\infty, (x_n), x_n \rightarrow x \text{ such that } \pi(i_n, x_n) \rightarrow \xi\},$$

$$J^-(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \text{there exist two sequences } (i_n), i_n \rightarrow -\infty, (x_n), x_n \rightarrow x \text{ such that } \pi(i_n, x_n) \rightarrow \xi\}.$$

The set $H(t_0)$ is a uniform attractor under π and the region of uniform attraction contains $H^*(t_0)$. Therefore by using a well known property concerning the region of uniform attractivity of a compact set (see for instance [1]), one has that $x \in H^*(t_0)$ implies $J^+(x) \neq \emptyset$ and $J^+(x) \subseteq H(t_0)$. Let $\phi := \phi_{t_0\mu}$ be the largest invariant set of π contained in $H(t_0)$ and denote by $A^-(0) := A_{t_0\mu}^-(0)$ the region of negative attraction of the origin of \mathbb{R}^n under π . In our assumptions, $A^-(0)$ is an open neighborhood of $x = 0$ invariant under π and then $A^-(0) \subset \phi$. Define now the set M_μ with the condition that its section at any time $t_0 \in \mathbb{R}$ is $M_\mu(t_0) = \phi - A^-(0)$. We will prove that the family $\{M_\mu\}$ satisfies all the requirements in Lemma 3.1. Clearly M_μ is the largest s -compact invariant set of π contained in $H - M_0$. Moreover $M_\mu(t_0)$ is a uniform attractor under π and the region of uniform attractivity contains $H^*(t_0) - \{0\}$. This is easily proved by showing that $x \in H^*(t_0) - \{0\}$ and $y \in J^+(x)$ imply $y \notin A^-(0)$. Since $H(t_0) = H(t_0 + \omega)$ and π remains unchanged when t_0 is replaced by $t_0 + \omega$, we have $M_\mu(t_0) = M_\mu(t_0 + \omega)$. Then M_μ is a ω -periodic set in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. It is immediate to recognize that $M_\mu(t) \rightarrow \{0\}$ as $\mu \rightarrow 0$ uniformly in t .

(iii) M_μ is invariant under $(S')_\mu$ and then it is the largest invariant set contained in $H - M_0$. Clearly it is sufficient to show that for each t_0 the set $M_\mu(t_0)$ is the image of $M_\mu(0)$ under the flow generated by $(S')_\mu$. Let $G = x_{(S')_\mu}(t_0, 0, M_\mu(0))$. It is easily proved that $\pi(i, G) = G$ for any $i \in Z$. Thus G is a compact invariant set of π not containing the origin. Therefore $G \subseteq M_\mu(t_0)$. Similarly we find that $M_\mu(0) \supseteq W$, where $W = x_{(S')_\mu}(0, t_0, M_\mu(t_0))$. Hence $M_\mu(t_0) = x_{(S')_\mu}(t_0, 0, W) \subseteq G$ and then $G = M_\mu(t_0)$.

(iv) Finally we prove that M_μ is asymptotically stable under $(S')_\mu$. It is sufficient to prove that M_μ is uniformly attracting under $(S')_\mu$. By using continuity arguments this follows easily from the invariance of M_μ and the property that $M_\mu(t_0)$ is a uniform attractor under π .

The proof is complete. ■

Coming back to the original family $\{(S)_\mu\}$, assume now that for an integer $m \in (0, n)$ each $(S)_\mu$ admits an $(m + 1)$ -invariant manifold

$$\Phi_\mu = \{(t, y, z) : z = g(t, y, \mu)\}, \quad (y, z) = x, y \in \mathbf{R}^m, z \in \mathbf{R}^{n-m}, \quad (3.3)_\mu$$

where g is C^2 , ω -periodic in t and $g(t, 0, \mu) \equiv 0$. Let $u = z - g(t, y, \mu)$. In terms of y, u system $(S)_\mu$ may be written as

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Y(t, y, u, \mu), \\ \dot{u} &= U(t, y, u, \mu), \end{aligned} \quad (S)_\mu$$

where Y, Z are continuous and locally Lipschitzian in (y, u) , $Y(t, 0, 0, \mu) \equiv 0$, $U(t, y, 0, \mu) \equiv 0$. Moreover in the (t, y, u) -space the manifolds Φ_μ coincide all with the manifold

$$\Psi = \{(t, y, u) : u = 0\}. \quad (3.4)$$

For the solutions of $(S)_\mu$ lying on Ψ the y -parts are the solutions of the m -dimensional system

$$\dot{y} = Y(t, y, 0, \mu). \quad (S_y)_\mu$$

We set $M_0 = \{(t, y, u) : t \in \mathbf{R}, y = 0, u = 0\}$, and $m_0 = \{(t, y) : t \in \mathbf{R}, y = 0\}$.

Theorem 3.1 *Suppose that: (1) the solution $y = 0$ of $(S_y)_\mu$ is asymptotically stable if $\mu = 0$ and completely unstable if $\mu > 0$ small; (2) Ψ is asymptotically stable near the origin of \mathbf{R}^n . Then $\mu = 0$ is a bifurcation value on the right for the family $\{(S)_\mu\}$. Precisely there exist $\mu^* > 0$ and an s -compact neighborhood H of M_0 such that for each $\mu \in (0, \mu^*)$ the largest s -compact invariant set of $(S)_\mu$ contained in $H - M_0$, say M_μ , is nonempty, lies on Ψ , is ω -periodic, asymptotically stable, and the family M_μ satisfies (b) in Definition 2.1.*

Proof (Outline). By a suitable redefinition of (Y, U) outside of a neighborhood of $(0, 0)$ (as indicated in the proof of Lemma 3.1), we may assume without loss of generality that for any μ the solutions of $(S)_\mu$ are globally existing for all $t \in \mathbf{R}$. This redefinition does not modify the invariant character of Ψ (see the proof of Theorem 3.2 in [8]). By virtue of Theorem 2.1 it is easily seen that the asymptotic stability of Ψ near $(0, 0)$ is uniform. We denote by ν_1 the number ν in Remark 2.1 relative to the uniform attractivity of Ψ near the origin $(0, 0)$. From assumptions (1), (2) and using again Theorem 2.1 it follows that $(0, 0)$ is asymptotically stable for $(S)_\mu$. As in the proof of Lemma 3.1, now applied to the two families $\{(S)_\mu\}$ and $\{(S_y)_\mu\}$, we then recognize the existence of a number $\gamma \in (0, \nu_1)$ and of two s -compact sets H, h in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ respectively, such that: (i) H is an s -compact neighborhood of $(0, 0)$ whose sections are contained in the ball $B^n(\gamma)$ and is invariant only in the future for each $(S)_\mu$; (ii) h is an s -compact neighborhood of $y = 0$ whose sections are contained in the ball $B^m(\gamma)$ and is invariant only in the future for each $(S_y)_\mu$. Moreover for each t we may obtain that $\{(y, u) : y \in h(t), u = 0\} = H(t) \cap \Psi$. If $\mu^* > 0$ is sufficiently small then for all $\mu \in (0, \mu^*)$ the sets H, h are asymptotically stable respectively for any $(S)_\mu$ and for any $(S_y)_\mu$, and their regions of attractions contain fixed neighborhoods H^*, h^* of H, h respectively.

By virtue of Lemma 3.1, applied to the family $\{(S_y)_\mu\}$, it is recognized that if $\mu^* > 0$ is sufficiently small, then for each $\mu \in (0, \mu^*)$ the largest s -compact invariant set of $(S_y)_\mu$ contained in $h - m_0$, say m_μ , is nonempty, ω -periodic, and asymptotically stable. Thus if $\mu \in (0, \mu^*)$ the set

$$M_\mu = \{(t, y, u) : (t, y) \in m_\mu, u = 0\}$$

is nonempty, contained in $H - M_0$, ω -periodic, invariant and asymptotically stable with respect to the solutions of $(S)_\mu$ lying on Ψ . Since for every t in \mathbf{R} the section $M_\mu(t)$ is contained in $B^n(\gamma)$, we have that Ψ is asymptotically stable near M_μ . By using again Theorem 2.1 and taking into account our choice of γ , it follows that M_μ is (unconditionally) asymptotically stable for $(S)_\mu$ and the region of uniform attractivity contains H^* . Moreover $M_\mu \rightarrow M_0$ as $\mu \rightarrow 0$. To prove that the family $\{M_\mu\}$, $\mu \in (0, \mu^*)$, satisfies all the requirements in Theorem 3.1 it remains only to prove that each M_μ is the largest invariant compact set of $(S)_\mu$ contained in $H - M_0$. For any fixed $t_0 \in \mathbf{R}$ and $\mu \in (0, \mu^*)$ consider as in the proof of Lemma 3.1 the autonomous discrete dynamical system $\Pi := \Pi_{t_0\mu} : Z \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ relative now to system $(S)_\mu$. Clearly it is sufficient to prove that any section $M_\mu(t_0)$ is the largest compact invariant set of Π contained in $H(t_0) - \{0, 0\}$, and consequently in $H(t_0) - A^-(\{0, 0\})$. Here $A^-(\{0, 0\}) := A_{x_0}^-(\{0, 0\})$ is the region of negative attraction of $(0, 0)$ under Π . Let $x_0 = (y_0, u_0) \in H(t_0) - A^-(\{0, 0\})$ and $x_0 \notin M_\mu(t_0)$. Suppose ab absurdo that the complete orbit of x_0 under Π is contained in $H(t_0) - A^-(\{0, 0\})$. Denote by $\Lambda^-(x_0)$ the negative limit set of x_0 under Π . The set $\Lambda^-(x_0)$ is nonempty, contained in $H(t_0) - A^-(\{0, 0\})$, invariant under Π , and compact. Clearly $\Lambda^-(x_0) \cap M_\mu(t_0) = \emptyset$ otherwise $M_\mu(t_0)$ could not be stable. Let $\delta > 0$ be the distance between the two compact sets $\Lambda^-(x_0)$, $M_\mu(t_0)$ and let ξ be any point in $\Lambda^-(x_0)$. Because of the invariance of $\Lambda^-(x_0)$ we have

$$\rho(\Pi(i, \xi), M_\mu(t_0)) \geq \delta \quad \text{for every integer } i \geq 0. \quad (3.5)$$

Since $M_\mu(t_0)$ is asymptotically stable under Π , it follows that $\Lambda^+(\xi) \subseteq M_\mu(t_0)$, a contradiction. The proof is complete. ■

References

- [1] N.P. Bathia, G.P. Szëgo, *Stability theory of dynamical systems*, Springer Verlag, 1970.
- [2] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer, 1981.
- [3] S.N. Chow, J.K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer, 1982.
- [4] A. Kelley, *Stability of the center-stable manifold*, J. Math. Anal. Appl. **18**, 336-344, 1967.
- [5] Liapunov, M.A., "Problème général de la stabilité du mouvement", Photo-reproductions in Annals of Mathematics, Studies n 17, Princeton University Press, Princeton, 1949 (1907 French translation of the Russian paper of Lyapunov published in Comm. Soc. Math., Kharkov, 1892).
- [6] V.A. Pliss, *Principal reduction in the theory of the stability of motion (in Russian)*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Mat Ser., **28**, 1297-1324, 1964.
- [7] L. Salvadori, *Bifurcation and stability problems for periodic differential systems*, *Proceedings of Nonlinear Oscillations for Conservative Systems*, A. Ambrosetti Ed, Pitagora, Bologna, 1985.

- [8] L. Salvadori, F. Visentin, Conditional and unconditional stability properties of time dependent sets, *Scientiae Japonicae*, **62**, 381-392, 2005.

Author address:

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale, Università di Trento, Via Mesiano 77, 38100 Trento, Italy.

e-mail: luigi.salvadori@ing.unitn.it

Some Analytical Results for Acoustic Scattering through a Periodic Array of Elastic Membranes

Edoardo Scarpetta

D.I.I.M.A., University of Salerno, 84084 Fisciano (SA), Italy

Mezhlum A. Sumbatyan

Faculty of Mechanics and Mathematics,

Rostov State University, 344090 Rostov-on-Don, Russia

Abstract

In the context of wave propagation through acoustic media, an analytical approach is developed to study the (normal) incidence of a pressure wave into a periodic array of (thin) elastic membranes. The frequency of this wave is assumed in a range implying the so-called *one-mode* (far field) propagation, so that mild approximations holding in this range can be employed. Thus, the problem is reduced to some integral equations based on the opening between adjacent membranes and independent on frequency. By means of (analytical) solution of such equations, an explicit formula for the transmission coefficient is set up and reflected in some figures for concrete values of the various parameters involved. The peculiarities of the scattering structure are discussed.

1 Introduction

The problems on solid-fluid interaction are very important in aeroacoustics, dynamics of aircrafts, architectural acoustics, active and passive noise control, as well as in many other fields of engineering science concerning vibrations of flexible constructions in a contact with fluids and gases.

In this ambit, analytical methods certainly deserve great attention, since they only can provide explicit representations for the relevant unknown fields with respect to the geometrical or physical parameters involved.

The foundations of dynamics of elastic constructions, in their interactions with fluids or gases, were posed by scientists in the theory of hydro-aero-elasticity (for a survey see, e.g., [1–3]). Several qualitatively interesting phenomena were discovered and studied, both in stationary and transient cases. Mathematically, the problems of such a kind are described by some system of integro-differential equations. Transient problems require application of the Laplace transform with respect to time.

Practical applications of sound-elastic interaction are involved in noise control and sound insulation of buildings (see [4], Chapter 33). The theoretical basis for investigation on these matters, including the theory of sound transmission through thin elastic slabs, plates and membranes, can be found in [5 – 7]. A survey of simple analytical solutions and some aspects of direct numerical treatment by FEM, as well as a comparison with experiments, are presented in [8].

Noise control problems similar to those described above, arise also in aeroacoustics in the ambit of reduction of noise generated by sound fields (see, for example [9], Chapter 14). To this aim, some authors propose to apply linear arrays of membrane liners. Even simple impedance estimates show a wide range for efficient noise cancellation. More advanced theoretical investigations discover the so-called *frequency cuts* for the transmitted acoustic energy. This gives an alternative way to obtain noise control and sound insulation, along with application of traditional absorbing materials. Mathematically, the "frequency cut" is related to sudden decreasing of certain transmission coefficients when sound propagates through an acoustic medium containing some obstacles. Sound absorbers in the form of periodic collinear structures in room acoustics are called *resonant absorbers*. A special chapter is devoted to such absorbers in the leading book of Cremer and Müller [10], Chapter IV.9. The authors give many frequency-depending graphs basing their method on some simple approximate theories. They point out the relation of this approach with the theory of Helmholtz resonators.

An advanced analytical method for scattering problems through periodic structures of (thin) screens has been developed in our previous papers [11,12], where we were able to arrive at explicit representations of the scattered field, including transmission and reflection

coefficients, in the case of absolutely rigid screens. In this connection, the main purpose of the present paper is to spread our method to the case of thin *elastic* screens (namely, *membranes*), in order to evaluate how significant can be the influence on the scattering of the flexibility of such (non-rigid) obstacles. Through mild approximations involving the range of frequency in concern, the problem is reduced to certain integral equations - independent on frequency - originated by continuity assumptions and based on the opening between adjacent membranes; such equations are then analytically solved and some related integrals calculated, so as to provide an explicit formula for the transmission coefficient with respect to frequency. The results are reflected in several figures for concrete values of the geometrical and physical parameters. The wave properties of the scattering structure are finally discussed. In an Appendix the main technical transformations are reported.

2 Formulation of the problem and reduction to integral equations

We consider an unbounded acoustic medium of density ρ_a in which there is a periodic distribution of coplanar parallel (thin and flat) elastic membranes, each one subjected to the same (given) biaxial tension. If z denotes the axis along which such (infinite) membranes run, **Figure 1** shows the section of the structure with (any) normal plane xy . The period of the array is $2a$, while the width of each membrane is $2b$ ($b < a$).

In the harmonic regime, we assume that a plane pressure wave of given amplitude p_0 and circular frequency ω ,

$$p_{inc} = p_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.1)$$

is incident from $x = -\infty$ onto the membranes' array, giving rise to scattered waves on the left ($x < 0$) and right ($x > 0$) sides of the structure. Above, k is the wave number, and ω/k gives the (constant) wave speed in the medium. Throughout the sequel, the time dependence factor $e^{-i\omega t}$ is common and will be often omitted.

Thanks to the natural symmetry and periodicity, the problem can be restricted to the typical strip $|y| < a$, in which the (section of a) membrane occupies the segment $|y| < b$ at $x = 0$. By the same reason, the following Fourier representations can be given for the total

field in the two main regions of the structure:

$$p_{left}(x, y) = p_0 e^{ikx} + p_0 R e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{q_n x} \cos \frac{\pi n}{a} y, \quad x < 0, \quad (2.2a)$$

$$p_{right}(x, y) = p_0 T e^{ikx} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-q_n x} \cos \frac{\pi n}{a} y, \quad x > 0, \quad (2.2b)$$

where all capital letters denote unknown constants and

$$q_n = \sqrt{(\pi n/a)^2 - k^2}, \quad , n = 1, 2, \dots , \quad (2.2c)$$

in order that each wave mode in the series above be a trivial solution of the governing (Helmholtz) equation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0. \quad (2.3)$$

In such series, we prefer to extract the terms with $n = 0$, putting $A_0 = p_0 R$, $B_0 = p_0 T$; $q_0 = -ik$ by a radiation condition. As it is due, $\partial p/\partial y = 0 \forall x$ at $y = \pm a$.

Taking ω in the range such that

$$(0 <)k < \pi/a \quad (2.4)$$

implies $q_n > 0 \forall n \geq 1$, and thus guarantees the so-called *one-mode* (far field) propagation, since with distance from the membranes only the wave modes of order zero will remain non vanishing in Eqs.(2.2). In this case, the corresponding (non-dimensional) coefficients R and T are referred to as the *scattering parameters* of the structure.

The (linear) motion of an elastic membrane surrounded by a pressure field p is governed by the following equation [7,8]:

$$\tau \nabla^2 \hat{w} = \rho_e \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} + p \quad (2.5)$$

where \hat{w} is the (out-of-plane) displacement field, while τ and ρ_e are positive constants which denote the given biaxial tension (force per unit length, here along z) and material density (mass per unit area) of the membrane, respectively.

Of course, in the present context the pressure wave field interacts with the membranes imposing a vibrating motion of harmonic type with the same circular frequency ω [7, 8]. As

a consequence, the (stationary) governing equation for the x -component (only non-trivial) of the displacement field of the typical membranc, $\hat{w}(y, t) = e^{-i\omega t}w(y)$, reads now as

$$\tau \frac{d^2}{dy^2}w(y) + \rho_e \omega^2 w(y) = p_{right}(0, y) - p_{left}(0, y) \quad , \quad |y| < b. \quad (2.6a)$$

By the symmetry, $w(y)$ is an even function.

The membrane is clamped at $|y| = b$, so that as boundary condition we have

$$w(\pm b) = 0. \quad (2.6b)$$

Moreover, the pressure field on the membrane should be coupled with the motion of the membrane by equating the x -components of the velocities at $x = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{w}(y, t) = v_a(y, t) \quad , \quad |y| < b, \quad (2.7)$$

where that component of the velocity field in the acoustic medium, v_a , is here governed by the equation

$$\rho_a \frac{\partial v_a}{\partial t} = -e^{-i\omega t} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} . \quad (2.8)$$

Such a coupling clearly implies

$$\left. \frac{\partial p_{left}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial p_{right}}{\partial x} \right|_{x=0} \quad , \quad |y| < b, \quad (2.9)$$

which, along with an obvious property of continuity for the above derivatives on $b < |y| < a$, finally enables us to put

$$\left. \frac{\partial p_{left}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial p_{right}}{\partial x} \right|_{x=0} \quad , \quad |y| < a. \quad (2.10)$$

Recalling Eqs.(2.2), Eq.(2.10) and the orthogonality properties of cosines in $|y| < a$ directly imply

$$1 - R = T \quad , \quad B_n = -A_n. \quad (2.11)$$

Now, let us go back to Eq.(2.6a), and substitute $p_{right}(0, y) - p_{left}(0, y)$ from Eqs.(2.2) taking into account Eqs.(2.11); we get

$$\frac{d^2}{dy^2}w(y) + \frac{\rho_e \omega^2}{\tau}w(y) = (2p_0/\tau)(T - 1) + (2/\tau) \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cos \frac{\pi n}{a}y \quad , \quad |y| < b, \quad (2.12)$$

which implies the (even) solution

$$w(y) = c_1 \cos \Omega y - \frac{2}{\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{s_n^2} \cos \frac{\pi n}{a} y + \frac{2p_0}{\rho_e \omega^2} (T - 1) \quad , \quad |y| < b, \quad (2.13a)$$

where we put

$$\Omega = \sqrt{\rho_e \omega^2 / \tau} \quad , \quad s_n = \sqrt{(\pi n / a)^2 - \Omega^2} . \quad (2.13b)$$

By using Eq.(2.6b), we obtain the following explicit expression for the displacement field of the membrane:

$$w(y) = \frac{2p_0}{\rho_e \omega^2} (T - 1) + \left[\frac{2p_0}{\rho_e \omega^2} (1 - T) + \frac{2}{\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{s_n^2} \cos \frac{\pi n}{a} b \right] \frac{\cos \Omega y}{\cos \Omega b} - \frac{2}{\tau} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{s_n^2} \cos \frac{\pi n}{a} y \quad , \quad |y| < b. \quad (2.14)$$

In the assumed harmonic regime, substituting Eq.(2.7) into Eq.(2.8) and considering Eq.(2.10) give

$$w(y) = \frac{1}{\rho_a \omega^2} \frac{\partial p_{right}}{\partial x}(0, y) \quad , \quad |y| < b. \quad (2.15)$$

Now, the idea is to define a new unknown function $g(y)$ on the opening $b < |y| < a$, as follows

$$w(y) - \frac{1}{\rho_a \omega^2} \frac{\partial p_{right}}{\partial x}(0, y) = \begin{cases} g(y) & , \quad b < |y| < a \\ 0 & , \quad |y| < b \end{cases} \quad (2.16)$$

where by $w(y)$ on the opening we mean the function on the right-hand side of Eq.(2.14) accordingly extended. Clearly, $g(y)$ is even.

Let us put

$$G(n) = \int_b^a g(t) \cos \frac{\pi n}{a} t dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad G = G(0) \left(= \int_b^a g(t) dt \right) . \quad (2.17)$$

By using Eq.(2.2b), we can integrate Eq.(2.16) over the total width $|y| < a$ to obtain the following formula for coefficient T (in terms of B_n):

$$p_0 \left[\frac{1}{\rho_e} \left(1 - \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \right) - \frac{ik}{2\rho_a} \right] T = \frac{\omega^2}{2a} \left[G + \frac{2ap_0}{\rho_e \omega^2} \left(1 - \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \right) + \frac{2a}{\tau} \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{s_n^2} \cos \frac{\pi n}{a} b \right] . \quad (2.18)$$

Repeating the integration of Eq.(2.16) after multiplying by $\cos(\pi my/a)$, $m = 1, 2, \dots$, gives

$$\left(\frac{aq_m}{2\rho_a\omega^2} - \frac{a}{\tau s_m^2}\right) B_m = G(m) + \frac{2\Omega \sin \Omega a}{\rho_e\omega^2 \cos \Omega b} \frac{(-1)^m}{s_m^2} p_0(1-T) + \frac{2\Omega \sin \Omega a}{\tau \cos \Omega b} \frac{(-1)^m}{s_m^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{s_n^2} \cos \frac{\pi n}{a} b \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

The series above can be substituted from Eq.(2.18), so that we can also deduce a formula for coefficients B_n (in terms of T), as follows

$$\left(\frac{aq_n}{2\rho_a\omega^2} - \frac{a}{\tau s_n^2}\right) B_n = G(n) + \frac{(-1)^n}{s_n^2} \left(\Omega^2 G + \frac{2ap_0}{\tau}\right) + \frac{a}{\tau} \frac{(-1)^n}{s_n^2} \left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a}\right) p_0 T \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

Of course, inserting Eq.(2.20) into Eq.(2.18) would give a final formula containing only T versus the integrals (2.17) of function g , which thus remains the main unknown of the problem.

3 Integral equation. *Quasi-one-mode* approximation

An integral equation to be satisfied by function g arises from the assumption of continuity for the pressure field along the opening, as follows:

$$p_{right}(0, y) = p_{left}(0, y) \quad , \quad b < |y| < a. \quad (3.1)$$

By using Eqs.(2.2,2.11), we easily deduce

$$\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cos \frac{\pi n}{a} y = p_0(1-T) \quad , \quad b < |y| < a, \quad (3.2)$$

in which one could imagine to substitute B_n, T from system (2.18,2.20). This would lead to an (exact) integral equation which of course could be directly submitted to standard numerical algorithms for arbitrary values of the geometrical and physical parameters. However, this paper aims to remain in a full-analytical context, and to this end we accept to make the following approximation: recalling the range of frequency in concern (2.4), we assume to be

negligible each term containing $(ak)^2$ when compared with $(\pi n)^2 \quad \forall n = 1, 2, \dots$; this implies that

$$q_n \simeq \frac{\pi n}{a}, \quad s_n \simeq \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, \dots^1 \tag{3.3}$$

(In some power expansions, the term Ωa will be retained till to the third power included.)

As a consequence, formulas for B_n, T become

$$B_n \simeq \frac{2\rho_a \omega^2}{\pi} \left[\frac{G(n)}{n} + \frac{2a^3 p_0 (-1)^n}{\tau \pi^2 n^3} - \frac{a^3 (-1)^n}{\tau \pi^2 n^3} \left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) p_0 T \right], \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{a^3 - 3ab^2}{3\tau} - \frac{aik}{\rho_a \omega^2} \right) p_0 T \simeq G + \frac{a^3 - 3ab^2}{3\tau} p_0 - \frac{2a^3}{\tau \pi^2} \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{n^2} \cos \frac{\pi n}{a} b. \tag{3.5}$$

In Eq.(3.5) we can substitute B_n from Eq.(3.4), to get

$$\begin{aligned} & \left[A - \frac{aik}{\rho_a \omega^2} - BC\rho_a \omega^2 \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) \right] p_0 T = \\ & = G + Ap_0 - B\rho_a \omega^2 \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{G(n)}{n^3} \cos \frac{\pi n}{a} b - 2BC\rho_a \omega^2 \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} p_0 \end{aligned} \tag{3.6a}$$

where for convenience we have put

$$A = \frac{a^3 - 3ab^2}{3\tau}, \quad B = \frac{4a^3}{\tau \pi^3}, \quad C = \frac{a^3}{\tau \pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5} \cos \frac{\pi n}{a} b, \tag{3.6b}$$

three structural constants which are free of frequency.

The dependence on frequency in the above formula remains implicit in the terms involving (the integrals of) function g .

By substituting (only) B_n from Eq.(3.4), Eq.(3.2) gives an integral equation for g as follows:

$$\begin{aligned} & \int_b^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n}{a} t \cos \frac{\pi n}{a} y \right) g(t) dt = \frac{\pi p_0}{2\rho_a \omega^2} (1 - T) + \\ & + \frac{a^3 p_0}{\tau \pi^2} \left[\left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) T - 2 \right] \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^3} \cos \frac{\pi m}{a} y, \quad b < y < a. \end{aligned} \tag{3.7}$$

¹In the strict *one-mode* approximation, similar positions are made only for $n \geq 2$ [11,12]; this justifies the terminology used in the section's title.

For technical reasons (connected to solution of the forthcoming auxiliary integral equations), we prefer to base Eq.(3.7) over the whole opening $(-d, +d)$, where $d = a - b$. Thus, by shifting the x-axis till to $y = a$ and an even extension of function g from $(-d, 0)$ to $(-d, +d)$, Eq.(3.7) becomes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-d}^d \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n(t-y)}{a} \right) g(t) dt &= \frac{\pi p_0}{2\rho_a \omega^2} (1-T) + \\ &+ \frac{a^3 p_0}{\tau \pi^2} \left[\left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) T - 2 \right] \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3} \cos \frac{\pi m}{a} y \quad , \quad |y| < d, \end{aligned} \tag{3.8}$$

keeping for simplicity the same symbols for g, t, y .

Of course, after this transformation, in Eq.(3.6a) for T it holds

$$G = \frac{1}{2} \int_{-d}^d g(t) dt \quad , \quad G(n) = \frac{(-1)^n}{2} \int_{-d}^d g(t) \cos \frac{\pi n}{a} t dt . \tag{3.9}$$

Moreover, in the kernel above we can put $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n(t-y)}{a} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\pi(t-y)}{2a} \right|$.

Now, it is clear that if one solves the following *auxiliary* integral equations

$$-\frac{1}{2} \int_{-d}^d \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(t-y)}{2a} \right| g_m(t) dt = \cos \frac{\pi m y}{a} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad |y| < d \quad (d < a), \tag{3.10}$$

each one free of any frequency parameter, then, by linearity, solution of Eq.(3.8) can be constructed as

$$g(t) = \frac{\pi p_0}{2\rho_a \omega^2} (1-T) g_0(t) + \frac{a^3 p_0}{\tau \pi^2} \left[\left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) T - 2 \right] \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3} g_m(t) \quad , \quad |t| < d. \tag{3.11}$$

This gives for constants $G, G(n)$ in Eqs.(3.9) the expressions

$$G = \frac{\pi p_0}{2\rho_a \omega^2} (1-T) G_0^0 + \frac{a^3 p_0}{\tau \pi^2} \left[\left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) T - 2 \right] \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3} G_m^0 \tag{3.12a}$$

$$G(n) = \frac{\pi p_0}{2\rho_a \omega^2} (1-T) G_0^n + \frac{a^3 p_0}{\tau \pi^2} \left[\left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) T - 2 \right] \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3} G_m^n \tag{3.12b}$$

where we have introduced the constants

$$G_m^n = \frac{(-1)^n}{2} \int_{-d}^d g_m(t) \cos \frac{\pi n}{a} t dt \quad , \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.12c}$$

which are free of frequency. Going back to Eq.(3.6a) and substituting there $G, G(n)$ from (3.12), we finally have a formula for the *transmission coefficient* T in which dependence on frequency appears in explicit form:

$$\begin{aligned} \left[A - \frac{aik}{\rho_a \omega^2} - BC \rho_a \omega^2 \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) \right] T = A + \frac{\pi/2}{\rho_a \omega^2} (1 - T) G_0^0 + \\ + \frac{a^3}{\tau \pi^2} \left[\left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) T - 2 \right] \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3} G_m^0 - B \rho_a \omega^2 \frac{\sin \Omega a}{\Omega a \cos \Omega b} \{ 2C + \\ + \frac{\pi/2}{\rho_a \omega^2} (1 - T) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} G_n^0 \cos \frac{\pi n}{a} b + \frac{a^3}{\tau \pi^2} \left[\left(2 - ik \frac{\rho_e}{\rho_a} \right) T - 2 \right] \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^3 n^3} G_m^n \cos \frac{\pi n}{a} b \}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

4 Analytical solution of auxiliary integral equations and calculation of constants G_m^n

Let us firstly introduce the new functions

$$\hat{\psi}_m(y) = \int_{-d}^y g_m(t) dt, \quad \hat{\psi}_m(-d) = 0, \quad \hat{\psi}_m(d) = 2G_m^0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.1}$$

and apply integration by parts in Eq.(3.10); we get

$$-\ln \left| 2 \sin \frac{\pi(d-y)}{2a} \right| G_m^0 + \frac{\pi}{4a} \int_{-d}^d \cot \frac{\pi(t-y)}{2a} \hat{\psi}_m(t) dt = \cos \frac{\pi m y}{a}, \quad |y| < d. \tag{4.2}$$

By the change of variables

$$z = e^{\pi i y/a}, \quad \tau = e^{\pi i t/a} \quad (i\pi dt = a d\tau/\tau), \tag{4.3}$$

it holds

$$\begin{aligned} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(d-y)}{2a} \right| &= \ln(e^{i\pi d/a} - z) - \frac{i\pi}{2} \left(1 + \frac{d}{a} \right) - \frac{1}{2} \ln z \\ \cot \frac{\pi(y-t)}{2a} &= i \frac{z + \tau}{z - \tau}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

so that Eq.(4.2) can be rewritten in complex form as

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi_m(\tau)}{\tau - z} d\tau = F_m(z), \quad z \in L(\alpha, \beta), \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{4.5a}$$

$$F_m(z) \equiv \frac{\Psi_m}{2a} + \frac{2C_m^0}{i\pi} \left[\ln(\beta - z) - \frac{i\pi}{2} \left(1 + \frac{d}{a} \right) - \frac{1}{2} \ln z \right] + \frac{1}{i\pi} (z^m + z^{-m}), \quad (4.5b)$$

where $\psi_m(\tau$ or $z) = \hat{\psi}_m(t$ or $y)$, $\Psi_m \equiv \int_{-d}^d \hat{\psi}_m(t) dt = \frac{a}{i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \psi_m(\tau) d\tau/\tau$, and the contour $L(\alpha, \beta) = \{z = e^{i\phi}, |\phi| < \pi d/a\}$ is an open part of the unit circle in the complex plane; $\alpha = e^{-i\pi d/a}$, $\beta = e^{i\pi d/a} = \alpha^{-1}$, and the symbol $\int_{\alpha}^{\beta}(\dots)$ means throughout integral over such a contour.

According to the classical theory of singular integral equations of Cauchy type [13], the general solution of Eq.(4.5) can be given as

$$\psi_m(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{(z - \alpha)(\beta - z)}} \left[C + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F_m(\xi) \sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}}{\xi - z} d\xi \right], \quad z \in L(\alpha, \beta), \quad (4.6)$$

where C is an arbitrary constant while Ψ_m, C_m^0 appear as unknown constants inside $F_m(\cdot)$.

By requiring boundedness of solution (4.6) as $z \rightarrow \alpha$, we get a particular value for constant C ,

$$C = - \int_{\alpha}^{\beta} F_m(\xi) \sqrt{\frac{\beta - \xi}{\xi - \alpha}} d\xi, \quad (4.7)$$

so that Eq.(4.6) itself becomes:

$$\psi_m(z) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{z - \alpha}{\beta - z}} \int_{\alpha}^{\beta} F_m(\xi) \sqrt{\frac{\beta - \xi}{\xi - \alpha}} \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad z \in L(\alpha, \beta). \quad (4.8)$$

Imposing also boundedness of (4.8) as $z \rightarrow \beta$, gives the following condition

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{F_m(\xi)}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} d\xi = 0 \quad (4.9)$$

which actually implies a linear relation between the two unknowns Ψ_m, C_m^0 . Another linear relation can be obtained by dividing Eq.(4.8) by z and integrating over $L(\alpha, \beta)$; the result is

$$\frac{\pi}{a} \Psi_m = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F_m(\xi) d\xi}{\xi \sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}}, \quad (4.10)$$

where integral (A.5) has been used (see Appendix) and Eq.(4.9) taken into account.

It is clear that, after substituting $F_m(\cdot)$ from Eq.(4.5b), Eqs.(4.9, 4.10) represent a 2×2 linear algebraic system to determine Ψ_m, G_m^0 . To render it explicit implies evaluation of several integrals, as shown in the Appendix - see integrals (A.b, A.1, A.2, A.6, A.7, A.8, A.9).

One finally gets

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2a} \Psi_m + \frac{2G_m^0}{i} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi d}{2a} \right) - \frac{\pi i d}{2a} \right] + \frac{J_m + J_{m-1}}{\pi i} = 0, \\ \frac{\pi}{2a} \Psi_m - \frac{2G_m^0}{i} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi d}{2a} \right) + \frac{\pi i d}{2a} \right] - \frac{J_m + J_{m-1}}{\pi i} = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

whose solution is easily given by

$$G_m^0 = -\frac{J_m + J_{m-1}}{2\pi \ln \left(\sin \frac{\pi d}{2a} \right)}, \quad \Psi_m = 2d G_m^0 = -\frac{d(J_m + J_{m-1})}{\pi \ln \left(\sin \frac{\pi d}{2a} \right)}. \quad (4.12)$$

By integration by parts and change of variables (4.3), the main constants G_m^n in Eqs.(3.12c) and (3.13), can be expressed as follows

$$\begin{aligned} (-1)^n G_m^n &= G_m^0 \cos \frac{\pi n d}{a} + \frac{\pi n}{2a} \int_{-d}^d \hat{\psi}_m(t) \sin \frac{\pi n t}{a} dt \\ &= G_m^0 \cos \frac{\pi n d}{a} - \frac{n}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \psi_m(\tau) (\tau^{n-1} - \tau^{-n-1}) d\tau. \end{aligned} \quad (4.13)$$

On using Eqs.(4.8, 4.9), it is not difficult to get

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi_m(\tau) \left(\frac{\tau^{n-1}}{\tau^{-n-1}} \right) d\tau = \frac{1}{i\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F_m(\xi)}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} \begin{pmatrix} N_{n-1}(\xi) \\ N_{-n-1}(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.14)$$

where the integrals

$$\begin{aligned} N_{n-1}(\xi) &\equiv \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(\tau - \alpha)(\beta - \tau)}}{\xi - \tau} \tau^{n-1} d\tau = \\ &= - \left(\sum_{j=0}^{n-2} \right)' \xi^{n-2-j} I_j + \pi \xi^n - \pi \xi^{n-1} \cos \frac{\pi d}{a}, \end{aligned} \quad (4.15a)$$

$$N_{-n-1}(\xi) \equiv \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(\tau - \alpha)(\beta - \tau)}}{\xi - \tau} \tau^{-n-1} d\tau = -(1/\xi) N_{n-1}(1/\xi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.15b)$$

are calculated in the Appendix (see (A.10,11)); the brackets with prime around the summation above mean that such a term is absent when $n = 1$ (also in forthcoming Eq.(4.16)).

Equation (4.13), by using Eqs.(4.14, 4.15) and substituting $F_m(\cdot)$ from (4.5b), leads to

$$\begin{aligned}
 (-1)^n G_m^n &= G_m^0 \cos \frac{\pi n d}{a} - \frac{n}{4\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F_m(\xi)[N_{n-1}(\xi) - N_{-n-1}(\xi)]}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} d\xi = \quad (4.16) \\
 &= G_m^0 \cos \frac{\pi n d}{a} + \frac{n}{4\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{\Psi_m}{2a} + \frac{2G_m^0}{i\pi} \left[\ln(\beta - \xi) - \frac{i\pi}{2} \left(1 + \frac{d}{a} \right) - \frac{1}{2} \ln \xi \right] + \frac{\xi^m + \xi^{-m}}{i\pi} \right\} \times \\
 &\times \left[\left(\sum_{j=0}^{n-2} \right)' (\xi^{n-j-2} + \xi^{j-n+1}) I_j - \pi(\xi^n + \xi^{-n-1}) + \pi(\xi^{n-1} + \xi^{-n}) \cos \frac{\pi d}{a} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}}.
 \end{aligned}$$

Besides to integrals of type $J_{\pm k}$ (see (A.b, A.1) of Appendix), the new integrals with logarithmic integrand which now appear,

$$P_{\pm k} = \int_{\alpha}^{\beta} \xi^{\pm k} \frac{\ln(\beta - \xi)}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} d\xi, \quad Q_{\pm k} = \int_{\alpha}^{\beta} \xi^{\pm k} \frac{\ln \xi}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} d\xi \quad (4.17)$$

are calculated in the Appendix, see (A.12, A.18, A.20, A.21).

As a result of all previous calculations, the (analytic) expression of G_m^n can be used in formula (3.13).

5 Wave properties of the structure

To reflect the results of our analytical approach, several examples of propagation have been considered by giving various values to geometrical and physical parameters involved. Since we focused our attention upon dependence with respect to size and tension of the membranes, we have assumed three values for their (relative) width b/a : $b/a = 0.1, 0.5, 0.9$; and four values for (non-dimensional) parameter $\hat{\tau} \equiv k^2/\Omega^2 = \tau/(\rho_e c^2)$, which gives a (relative) measure of the tension assigned to the membrane: $\hat{\tau} = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$. Thus, many lines for transmission coefficient $|T|$ as a function of frequency parameter ka - in the one-mode range $(0, \pi)$ - have been constructed operating by means of Eqs.(3.13), (4.16). For all of them, we assumed a fixed value of the ratio $\rho_e/(a\rho_a)$ ($= 10$), meeting a typical example for

the (elastic and acoustic) materials involved along with the period of the scattering structure (See Figures 2 - 5). Of course, in view of the approximation implied by Eqs.(3.3), the lines are more meaningful in the first half of the range. In this connection, the approximation can be estimated (to a certain extent) by taking for comparison the results shown in [11], which correspond to absolutely rigid screens. Actually, when we have now built up a line for the reflection coefficient $R (= 1 - T : \text{see Eq.(2.11)}_1)$ by using a limitly large value for tension $\hat{\tau}$ (and an equivalent geometry), we practically found the same line marked with n.3 in Fig.2 of that paper, which reflects a well-known (analytical) approach developed by Lamb and Miles: see the remarks and references therein reported.

Looking at the figures, we can observe first of all that the transmission increases with the tension given to the membrane, whatever be its width and frequency of the incident wave. Transmission also appears to increase with respect to membrane's width, except for the case of (relatively) small tension ($\hat{\tau} = 10^{-4}$ or 10^{-3}), in which the membrane with $b/a = 0.1$ allows more transmission than the membrane with $b/a = 0.5$ (but less than the membrane with $b/a = 0.9$). Moreover, as reasonably expected, with small membranes the transmission is less sensitive to tension's values.

In any case, with a view to the possible applications in problems of noise control (see Introduction), the more efficient attenuation of the transmission seems to occur for membranes occupying about an half of the period in the structure ($b/a = 0.5$) and preloaded with (relatively) small tension : see line 2 in Fig.2. On the contrary, the greatest transmission is given by wide and well-stretched membranes : see line 3 in Fig.5.

6 Appendix

We will use the following tabular integrals (see [14]) :

$$\begin{aligned}
 I_k &= \int_{\alpha}^{\beta} \xi^k \sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)} d\xi = & \text{(A.a)} \\
 &= \frac{\pi^2 (-1)^k (\beta - \alpha)^2}{(k + 1)(k + 2)} \sum_{\ell=0}^k \frac{\alpha^{\ell} \beta^{k-\ell}}{\ell!(k - \ell)! \Gamma(-\frac{1}{2} - \ell) \Gamma(-\frac{1}{2} + \ell - k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_k &= \int_{\alpha}^{\beta} \xi^k \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}} = & (A.b) \\
 &= \pi^2 (-1)^k \sum_{\ell=0}^k \frac{\alpha^{\ell} \beta^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)! \Gamma(\frac{1}{2}-\ell) \Gamma(\frac{1}{2}+\ell-k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

$$\int_0^a x^{\lambda-1} (a-x)^{\mu-1} \ln(a-x) dx = a^{\lambda+\mu-1} \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} [\ln a + \psi(\mu) - \psi(\lambda+\mu)] \quad (A.c)$$

$$\int_0^a \frac{\ln(a-cx)}{\sqrt{x(a-x)}} dx = 2\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-c}}{2} + \pi \ln a \quad (A.d)$$

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{x}} \ln(d+cx) dx = \pi a \ln \frac{d+\sqrt{d(d+ac)}}{2} + \frac{\pi a}{2} \frac{\sqrt{d}-\sqrt{d+ac}}{\sqrt{d}+\sqrt{d+ac}} \quad (A.e)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{\xi-\alpha}{\beta-\xi}} d\xi = \frac{\pi}{2} (\beta-\alpha) \quad , \quad \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{\xi-\alpha}{\beta-\xi}} \frac{d\xi}{\xi} = -\pi(\sqrt{\alpha/\beta}-1) \quad (A.f)$$

In some of them, the (Euler's) *Gamma function* appears: $\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$; useful properties of this function are

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z).$$

The logarithmic derivative of $\Gamma(z)$ gives rise to so-called *psi-function*:

$$\Gamma'(z)/\Gamma(z) \equiv \psi(z) = \psi(z+1) - 1/z;$$

$-\psi(1) = 0.577216$ is Euler's constant. Such special functions can be evaluated by means of their well-known analytical approximations [14].

By the change $\xi = 1/\zeta$, we deduce from (A.b) that

$$J_{-k} = J_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (A.1)$$

note also that

$$J_0 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}} = \pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{\xi \sqrt{(\xi-\alpha)(\beta-\xi)}} = J_{-1} \quad (A.2)$$

The integral used in Eq.(4.10) is calculated as follows ($\xi \in L(\alpha, \beta)$) :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}} \frac{dz}{z(\xi-z)} = \frac{1}{\xi} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}} \frac{dz}{z} + \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}} \frac{dz}{(\xi-z)} \right]; \tag{A.3}$$

the first integral in brackets is given by (A.f)₂, while the second is

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}} \frac{dz}{(\xi-z)} = (\xi-\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}(\xi-z)} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}} = -\pi, \tag{A.4}$$

since the first integral in the right-hand side is zero [14, n.2.2.6.8] and the second is J_0 . Thus

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-z}} \frac{dz}{z(\xi-z)} = -\frac{\pi}{\xi}(\sqrt{\alpha/\beta} - 1) - \frac{\pi}{\xi} = -\frac{\pi}{\xi} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \xi \in L(\alpha, \beta). \tag{A.5}$$

Then, by using (A.d) with $a = \beta - \alpha, c = 1, x = \xi - \alpha$, we have

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln(\beta - \xi) d\xi}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} = \int_0^{\beta-\alpha} \frac{\ln(\beta - \alpha - x)}{\sqrt{x(\beta - \alpha - x)}} dx = \pi \ln \frac{\beta - \alpha}{4}. \tag{A.6}$$

By the same, but with $c = (\alpha - \beta) / \alpha$, it holds

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln \xi d\xi}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} &= \int_0^{\beta-\alpha} \frac{\ln(\alpha + x)}{\sqrt{x(\beta - \alpha - x)}} dx = \int_0^{\beta-\alpha} \frac{\ln[\alpha/(\beta - \alpha)] + \ln[\beta - \alpha - x(\alpha - \beta)/\alpha]}{\sqrt{x(\beta - \alpha - x)}} dx = \\ &= \pi \ln \frac{\alpha}{\beta - \alpha} + 2\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (\alpha - \beta)/\alpha}}{2} + \pi \ln(\beta - \alpha) = 2\pi \ln \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Putting $\xi = 1/\zeta$ and recalling: (A.6) with $\beta - \xi = \zeta - \alpha$, (A.2), (A.7), - we get

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln(\beta - \xi) d\xi}{\xi \sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln(\zeta - \alpha) - \ln \alpha - \ln \zeta}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\beta - \zeta)}} d\zeta = \\ &= \pi \ln \frac{\beta - \alpha}{4} - \pi \ln \alpha - 2\pi \ln \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2} = \pi \left[\ln \frac{\beta - \alpha}{\alpha} - 2 \ln(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \right]; \end{aligned} \tag{A.8}$$

moreover, putting $\xi = 1/\zeta$ and recalling (A.7):

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln \xi d\xi}{\xi \sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln \zeta d\zeta}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\beta - \zeta)}} = -2\pi \ln \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}. \tag{A.9}$$

Then, we need to calculate integrals $N_k(\xi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (see Eqs.(4.15)). Let us begin with $N_0(\xi)$; it holds

$$\begin{aligned} N_0(\xi) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(\tau - \alpha)(\beta - \tau)}}{\xi - \tau} d\tau = (\beta - \xi) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\tau - \alpha}}{\beta - \tau} \frac{d\tau}{\xi - \tau} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\tau - \alpha}}{\beta - \tau} d\tau = \\ &= (\beta - \xi)(-\pi) + \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha) = \pi(\xi - \cos \frac{\pi d}{a}), \end{aligned} \tag{A.10}$$

thanks to integrals (A.4), (A.f)₁. For $k = 1, 2, \dots$, writing

$$\frac{\tau^k}{\xi - \tau} = \frac{\xi^k}{\xi - \tau} - \sum_{j=0}^{k-1} \xi^{k-j-1} \tau^j, \quad ,$$

we have

$$N_k(\xi) = \xi^k N_0(\xi) - \sum_{j=0}^{k-1} \xi^{k-j-1} I_j, \quad , \quad k = 1, 2, \dots \tag{A.11}$$

Let us pass to integrals in Eq.(4.17), for $k = 1, 2, \dots$; writing

$$\xi^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\xi - \alpha)^{k-j} \alpha^j, \quad ,$$

and using (A.c) with $a = \beta - \alpha$, $x = \xi - \alpha$, $\lambda = 1/2 + k - j$, $\mu = 1/2$, - we get

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^j \int_{\alpha}^{\beta} \ln(\beta - \xi) (\xi - \alpha)^{k-j-1/2} (\beta - \xi)^{-1/2} d\xi = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^j (\beta - \alpha)^{k-j} \times \\ &\times \left\{ \frac{\Gamma(1/2 + k - j)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1 + k - j)} [\ln(\beta - \alpha) + \psi(1/2) - \psi(1 + k - j)] \right\} \end{aligned} \tag{A.12}$$

To calculate Q_k , let us introduce the following notations

$$T_k = \int_{\alpha}^{\beta} \xi^k \sqrt{\frac{\beta - \xi}{\xi - \alpha}} \ln \xi d\xi, \quad R_k = \int_{\alpha}^{\beta} \xi^k \sqrt{\frac{\xi - \alpha}{\beta - \xi}} \ln \xi d\xi, \quad S_k = \int_{\alpha}^{\beta} \xi^k \sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)} \ln \xi d\xi \tag{A.13}$$

In particular, putting $\xi = x + \alpha$, it holds

$$\begin{aligned} T_0 &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{\beta - \xi}{\xi - \alpha}} \ln \xi d\xi = \int_0^{\beta - \alpha} \frac{(\beta - \alpha - x)}{\sqrt{x}} \ln(\alpha + x) dx = \\ &= \pi(\beta - \alpha) \left[\ln \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right], \end{aligned} \tag{A.14}$$

thanks to (A.c) with $a = \beta - \alpha, d = \alpha, c = 1$. We easily get

$$2Q_k = (\alpha + \beta)Q_{k-1} + (R_{k-1} - T_{k-1}) ; \tag{A.15}$$

moreover, by suitable integration by parts in T_k , we can deduce that

$$T_k = -2k S_{k-1} - 2I_{k-1} + R_k, \tag{A.16}$$

where integrals of type (A.a) appear. It holds

$$S_{k-2} = \int_{\alpha}^{\beta} \xi^{k-2} \frac{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\beta - \xi)}} \ln \xi \, d\xi = -Q_k + (\alpha + \beta)Q_{k-1} - Q_{k-2}, \tag{A.17}$$

so that Eqs.(A.15,16,17) finally give an iteration formula for Q_k from $k \geq 2$:

$$2kQ_k = (2k - 1)(\alpha + \beta)Q_{k-1} - (2k - 2)Q_{k-2} + 2I_{k-2}. \tag{A.18a}$$

The starting values are (see (A.7,14)):

$$Q_0 = 2\pi \ln \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}, \quad Q_1 = -T_0 + \beta Q_0. \tag{A.18b}$$

Going on, we have (putting $\xi = 1/\zeta$ and then $\zeta - \alpha = \beta - \eta$) :

$$\begin{aligned} P_{-k} &= \int_{\alpha}^{\beta} \zeta^{k-1} \frac{\ln(\zeta - \alpha) - \ln \alpha - \ln \zeta}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\beta - \zeta)}} \, d\zeta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [(\alpha + \beta) - \eta]^{k-1} \frac{\ln(\beta - \eta)}{\sqrt{(\eta - \alpha)(\beta - \eta)}} \, d\eta - (\ln \alpha)J_{k-1} - Q_{k-1}. \end{aligned} \tag{A.19}$$

The first integral on the right-hand side is calculated by expanding the term in power $k - 1$, so that we easily get:

$$P_{-k} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\alpha + \beta)^{k-j} (-1)^j P_j - (\ln \alpha)J_{k-1} - Q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{A.20}$$

Moreover, it holds (putting $\xi = 1/\zeta$) :

$$Q_{-k} = -Q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{A.21}$$

Acknowledgment - This paper has been supported by "Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica" of the Italian "INdAM", and - in part - by the "Russian Foundation for Basic Researches" (Grant 05-01-00155).

References

- [1] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, R.L. Halfman, "Aeroelasticity", Addison-Wesley, Cambridge (Massachusetts), 1955.
- [2] A.H. Flax, Aero and hydro-elasticity, in: "Structural Mechanics". Proc. 1-st Symp. Naval Struct. Mech. (ed. J.N. Goodier, N.J. Hoff), Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [3] H.H. Bleich, Dynamics interaction between structures and fluids, in: "Structural Mechanics". Proc. 1-st Symp. Naval Struct. Mech. (ed. J.N. Goodier, N.J. Hoff), Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [4] C.M. Harris, "Handbook of Acoustical Measurements and Noise Control" (3-rd ed.), Acoust. Soc. America, Woodbury (NY), 1998.
- [5] A.D. Pierce, "Acoustics", Acoust. Soc. America, Woodbury (NY), 1998.
- [6] M.C. Junger, Acoustic fluid-elastic structure interactions: basic concepts, *Computers and Structures* **65** (1997) 287-293.
- [7] M.C. Junger, D. Feit, "Sound, Structures and their Interaction", MIT Press, Massachusetts, 1986.
- [8] S. Kukathasan, S. Pellegrino, Vibration of prestressed membrane structures in air, *AIAA* 2002-1368, 1-11.
- [9] "Aeroacoustics of Flight Vehicles", vol.2 (ed. H.H. Hubbard), Acoust. Soc. America, Woodbury (NY), 1995.
- [10] L. Cremer, H.A. Müller, "Principles and Applications of Room Acoustics", vol.1,2, Applied Science, London, 1982.
- [11] E. Scarpetta, M.A. Sumbatyan, Explicit analytical results for one-mode normal reflection and transmission by a periodic array of screens, *J. Math. Anal. Appl.* **195** (1995) 736-749.

- [12] E. Scarpetta, M.A. Sumbatyan, Explicit analytical results for one-mode oblique penetration into a periodic array of screens, *IMA J. Appl. Math.* **56** (1996) 109-120.
- [13] F.D. Gakhov, "Boundary Value Problems", Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [14] A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev. "Integrals and Series" vol.2, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1986.

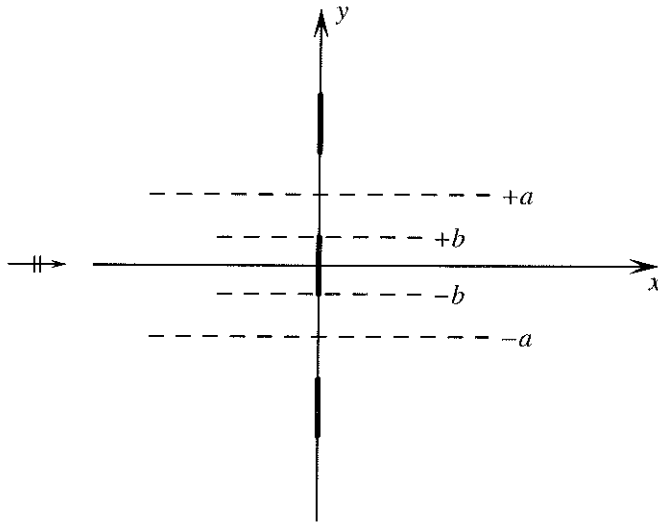


Fig. 1 - Normal incidence of a pressure wave into a periodic array of elastic membranes (of width $2b$) in acoustic medium. The period is $2a$.

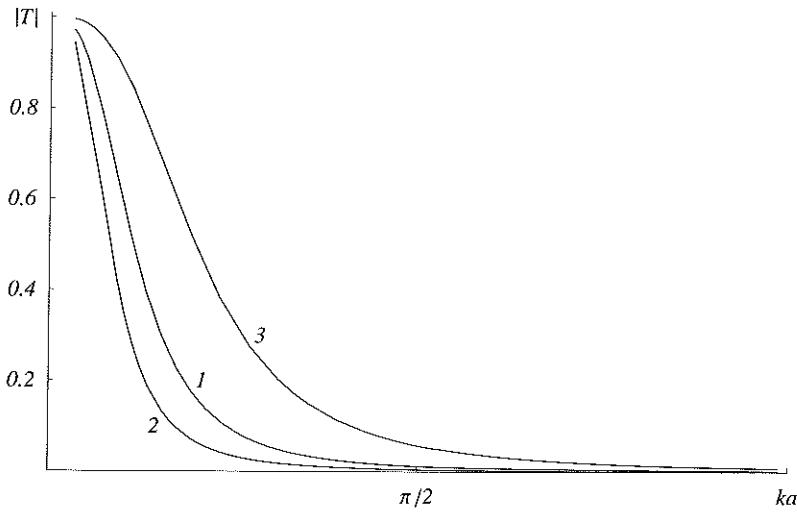


Fig.2 - Transmission coefficient vs. frequency parameter $ak < \pi$, for (relatively) very small tension of membranes: $\hat{\tau} \equiv \tau / (\rho_e c^2) = 10^{-4}$. Line 1: $b/a = 0.1$; line 2: $b/a = 0.5$; line 3: $b/a = 0.9$.

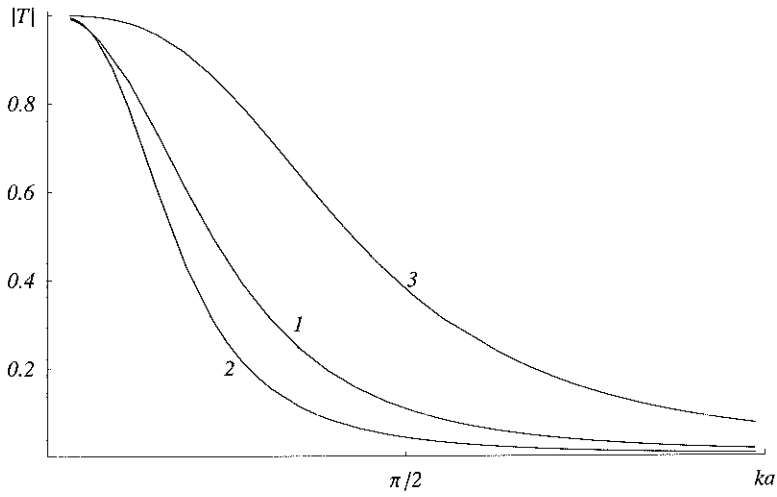


Fig.3 - Transmission coefficient vs. frequency parameter $ak < \pi$, for (relatively) small tension of membranes: $\hat{\tau} \equiv \tau / (\rho_e c^2) = 10^{-3}$. Line 1: $b/a = 0.1$; line 2: $b/a = 0.5$; line 3: $b/a = 0.9$

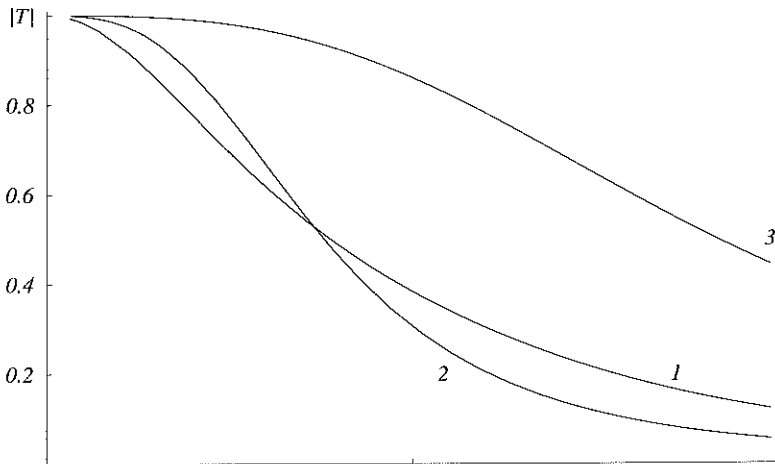


Fig.4 - Transmission coefficient vs. frequency parameter $ak < \pi$, for (relatively) large tension of membranes: $\hat{\tau} \equiv \tau / (\rho_e c^2) = 10^{-2}$. Line 1: $b/a = 0.1$; line 2: $b/a = 0.5$; line 3: $b/a = 0.9$.

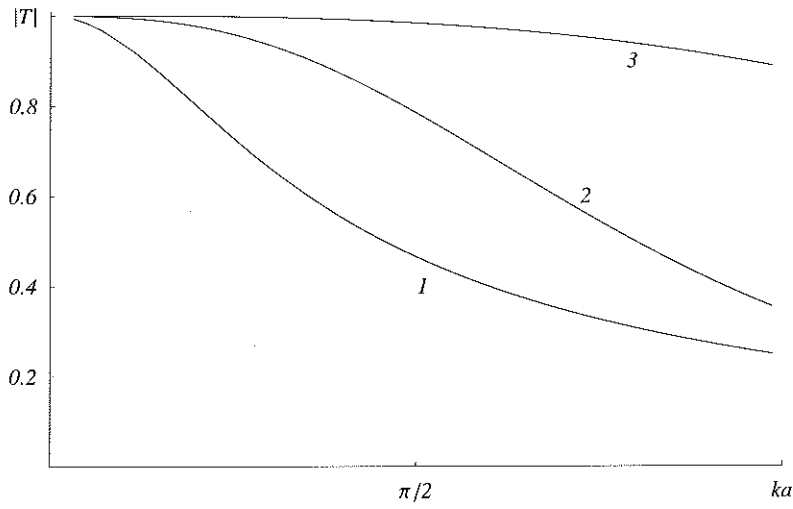


Fig.5 - Transmission coefficient vs. frequency parameter $ak < \pi$, for (relatively) very large tension of membranes: $\hat{\tau} \equiv \tau / (\rho_e c^2) = 10^{-1}$. Line 1: $b/a = 0.1$; line 2: $b/a = 0.5$; line 3: $b/a = 0.9$.

Acceleration waves in porous media

B. Straughan

Department of Mathematical Sciences,
Durham University, DH1 3LE, UK

March 11, 2007

Abstract

We examine models for acoustic wave propagation in porous media. Attention is also focussed on the case where we consider propagation of a thermal wave. We begin by examining equivalent fluid models where the motion of the elastic matrix is neglected. Motion of the elastic matrix is later incorporated by considering a theory of elastic materials with voids. A uniqueness theorem of Dario Graffi is extended to cover the adiabatic model for poroacoustic wave motion.

To Pasquale Renno, and in memory of our
great friend and mentor, Dario Graffi

1 Introduction

The motion of sound waves in porous media is something which affects everyone today. Use of porous media to reduce sound in the interior of a car, or porous fillings between walls are well known examples of mundane situations where sound propagation in porous media has a huge impact on today's environment. Ciarletta & Straughan [8, 10] and Ciarletta *et al.* [11] highlight three very important areas where wave motion in porous media is paramount. They note that sound wave motion in building materials, such as bricks, concrete, plasterboard, is widely studied, e.g. Fausti *et al.* [19], Garai & Pompoli [23], Sakai *et al.* [47]. The problem is pronounced in seismic zones where buildings have to be constructed with much lighter porous

materials and as a consequence have thinner walls. Ciarletta & Straughan [8, 10] and Ciarletta *et al.* [11] note that there is much need to study the acoustic properties of porous materials including the nature of the solid elastic matrix and the gas filling the pores, and the influence of thermodynamics on these quantities, and they observe that experimental measurements are being made of acoustic and thermal properties of many porous materials, such as aluminium foams, polyester fibre materials, see e.g. Maysenhölder *et al.* [36], Garai & Pompoli [23], Wilson [52].

In addition, Ciarletta *et al.* [11] highlight the application of sound waves in porous media to acoustic microscopy where the presence of voids creates a major problem, see Ouelette [40], Diebold [14], and the website at the Office of Basic Energy Sciences [38]. Another area of application of waves in porous media noted by Ciarletta *et al.* [11] is to wave motion in ceramics. Saggio-Woyansky *et al.* [46] and Raiser *et al.* [44] describe processing of ceramics and related work such as that where experiments are performed on ceramics to investigate microcracking along grain boundaries due to compressive waves.

This article examines several models for wave propagation in porous media, together with results for acceleration waves and uniqueness.

2 The Jordan - Darcy model

Accurate theoretical modelling of wave propagation in porous media requires a suitable theory. Fellah & Depollier [20] describe an equivalent fluid theory where the motion of the elastic matrix is fixed and the fluid properties are modified to account for the presence of the matrix. They introduce a Darcy modification to the equations for a perfect fluid. A more general model including the Forchheimer effect and adiabatic motion is given by De Ville [13].

Jordan [29, 30] generalizes the (equivalent fluid) model of Fellah & Depollier [20] to include nonlinear effects. A thermodynamic derivation of Jordan's model is given by Ciarletta & Straughan [8]. They begin with the equations for fluid or gas flow in an elastic solid as developed by Eringen [16].

Ciarletta & Straughan [8] study nonlinear acceleration wave motion in

the Jordan - Darcy model for which the equations are

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - k v_i, \tag{2}$$

where $p = p(\rho)$ and $k = \mu\chi/K$, with μ, χ, K being dynamic viscosity, porosity and permeability, respectively. It is clear that equations (1), (2) are those for a perfect, barotropic fluid, see Fabrizio [17], equations (64), but with the $-k v_i$ term added to the momentum equation. This term is effectively a friction term due to the gas movement through the porous matrix. It arises naturally as an interaction term from the theory of mixtures, cf. Caviglia [3], Ciarletta & Straughan [8], Eringen [16].

Jordan [29] reduces system (1), (2), by introducing the velocity potential ϕ , for an irrotational flow, so that

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

to the equation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \delta \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + (\beta - 1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\},$$

where $\epsilon = V/c_0$ is the Mach number of the flow. His approximation neglects terms of $O(\epsilon^2)$. Jordan writes his equation in terms of $u = \partial \phi / \partial x$, $s = -\epsilon \partial \phi / \partial t$ and then studies wave motion for the hyperbolic system

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\epsilon}{\{1 - 2(\beta - 1)s\}} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &+ \frac{2\epsilon u}{\{1 - 2(\beta - 1)s\}} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\delta s}{\{2(\beta - 1)s - 1\}}. \end{aligned}$$

Ciarletta & Straughan [8] develop a complete nonlinear acceleration wave analysis for the fully nonlinear theory (1), (2).

3 Acceleration waves

Acceleration waves have recently been employed with much success in various theories of Continuum Mechanics, see e.g. Boillat & Ruggeri [2], Christov & Jordan [5], Christov *et al.* [6], Eremeyev [15], Fabrizio & Morro [18], chapter 8, Fu & Scott [21, 22], Iesan [27], Jaisaardsuetrong & Straughan [28], Jordan [29, 30], Jordan & Christov [31], Jordan & Puri [32], Kameyama & Sugiyama [33], Lou & Ruggeri [35], Ostoja-Starzewski [39], Puri & Jordan [41], Quintanilla & Straughan [42], Rai [43], Ruggeri & Sugiyama [45], Straughan [48], chapters 7 and 8, Su *et al.* [49], Sugiyama [50], Valenti *et al.* [51].

We follow Ciarletta & Straughan [8] and for system (1), (2) we define an acceleration wave to be a singular surface \mathcal{S} across which the velocity v_i and the density ρ are continuous in both x_i and t , while their first and higher derivatives in both x_i and t , in general, possess finite discontinuities. We also, like Ciarletta & Straughan [8], restrict attention to the one-dimensional version of equations (1), (2), although details for the three-dimensional case may be found in the book by Straughan [48].

In this paper we restrict attention to a polytropic gas so that $p = a\rho^\gamma$, which is very similar to the adiabatic model of De Ville [13]. In one dimension with $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$ and a wave moving along the x -axis, with $p = a\rho^\gamma$, equations (1), (2) are

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial x} - ku. \quad (4)$$

Let $+$ denote the region ahead of \mathcal{S} and let $-$ denote the region behind the wave. The amplitudes $A(t)$ and $B(t)$ of the acceleration wave are defined as

$$A(t) = [u_x] = u_x^- - u_x^+,$$

and

$$B(t) = [\rho_x].$$

By taking the jumps of equations (3), (4) and using the Hadamard relation, see e.g. Boillat [1], Chen [4], Fabrizio & Morro [18], equation (8.60), or Straughan [48], equation (7.8), one now shows

$$(u - V)^2 = a\gamma\rho^{\gamma-1},$$

where V is the wavespeed. Hence, the wavespeed V is given in terms of the density and velocity ahead of the wave as

$$V = u \pm \sqrt{a\gamma} \rho^{(\gamma-1)/2} = u \pm \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

The amplitude equation is calculated from (3) and (4) by differentiating with respect to x and then taking the jump. One uses the Hadamard relation and the product relation, cf. Straughan [48] equation (7.13), and one finds

$$\frac{\delta A}{\delta t} + bA + a_1 A^2 = 0, \tag{5}$$

where $\delta/\delta t$ is the intrinsic derivative (i.e. the derivative at the wavefront, effectively, the rate of change of a function as seen by an observer travelling on the wave). The coefficients a_1 and b are given by

$$a_1 = \frac{3 + \gamma}{2}$$

and

$$b = 2u_x^+ + \frac{a}{2\rho} \left(1 + \frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{\gamma p}} \right) - \frac{\rho_x^+ \sqrt{\gamma p}}{\rho^{3/2}} - \frac{a\gamma^{1/2}(\gamma - 2)\rho^{\gamma-3/2}\rho_x^+}{p^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} \log \left(\frac{\sqrt{\gamma p}}{\rho^{3/2}} \right).$$

Full details of calculations like that leading to equation (5) are given in the book of Straughan [48], chapters 7 and 8.

In the case where the fluid is at rest and the density is constant in the porous medium ahead of the wave, then $u^+ \equiv 0$ and $\rho^+ \equiv \text{constant}$. Then equation (5) has solution

$$A(t) = \frac{A(0)}{e^{bt} + A(0)a_1 b^{-1}(e^{bt} - 1)}.$$

This solution represents the evolutionary behaviour of the wave amplitude of an acceleration wave moving into a porous medium.

Ciarletta & Straughan [8] show that the presence of the porous medium has a very strong effect on sound wave attenuation. For example, they show that for a typical brick material blow - up of the wave amplitude will not occur if $|A(0)| < 1.90298 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \dots 2.47123 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$. This attenuation is entirely down to the presence of the porous medium.

4 Uniqueness

We have employed an adiabatic (polytropic) Jordan - Darcy model to describe sound wave propagation in porous media. However, we wish to know if the problem posed by the differential equation system governing the model is well posed. A key ingredient in well posedness is uniqueness. Thus, we now investigate uniqueness.

In a series of papers which have had a major influence on many subsequent writers, Professor Dario Graffi developed a novel method for deriving uniqueness theorems in Continuum Mechanics. In particular, papers [12], [16], [19] - [22], of the selected works of Graffi [24] are appropriate here. The selected works of Graffi [24] are conveniently presented in the beautiful volume edited by Professors Fabrizio, Grioli and Renno. In this article we rely heavily on paper [22] of Graffi [24], and when we refer to Graffi [24] we mean paper [22], pages 273 - 280, of the selected works.

The basic equations of concern here are

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -a\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{k}{\rho} v_i, \end{aligned} \tag{6}$$

where $1 < \gamma < 2$. This system is the system studied in section 3. It includes the polytropic gas expression of Graffi [24] and the Darcy term $-kv_i/\rho$. We employ Graffi's [24] notation and conditions throughout. The spatial domain D is unbounded in \mathbb{R}^3 and in particular we employ Graffi's conditions (a) - (g). Of these we note

(a) v_i, ρ and their first derivatives are uniformly bounded.

(f) $|\nabla \rho|/\rho$ is bounded.

(g) $\rho \geq c/R^\beta$, $\beta \geq 0$, for R sufficiently large, $c > 0$.

The last condition is of particular mention. It states that the fluid density tends to zero as $R \rightarrow \infty$, but it cannot decay too rapidly. In fact, the only difference of our uniqueness proof for equations (6) is the inclusion of the term $-kv_i/\rho$. However, this is not a trivial extension to the remarkable theorem of Graffi [24]. Since condition (g) holds this means we allow a term on the right of equations (6)₂ which may grow like $R^\beta v_i$. Handling this term

is tricky and we have to argue carefully to incorporate Graffi's [24] weighted function for the density.

We now employ Graffi's [24] notation and let ρ, v_i and $\rho + \rho_1, v_i + v_i^1$ be two solutions to equations (6). With $b = a\gamma$ we find the equations for ρ_1 and \mathbf{v}_1 are

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho + \rho_1)(v_i + v_i^1) - \rho v_i] = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^1}{\partial t} + v_j^1 \frac{\partial (v_i + v_i^1)}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_i^1}{\partial x_j} \\ = -b [(\rho + \rho_1)^{\gamma-2} \frac{\partial (\rho + \rho_1)}{\partial x_i} - \rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}] - k \left[\left(\frac{v_i + v_i^1}{\rho + \rho_1} \right) - \frac{v_i}{\rho} \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

We only outline the additional changes necessary from Graffi's [24] proof. These involve the last term in (8). We follow Graffi's proof and so multiply (7) by ρ_1 , (8) by v_i^1 and integrate over S (the intersection of D and the ball of radius R), and then integrate twice over the time interval $(0, h)$. The last term in (8) leads to the following term added to the right hand side of Graffi's [24] equation (22) (although we have integrated twice over $(0, h)$),

$$\begin{aligned} - \int_0^h dt \int_S \frac{hk v_1^2}{(\rho + \rho_1)} dx + kh \int_0^h dt \int_S \frac{\rho_1 v_i^1 v_i}{\rho(\rho + \rho_1)} dx \\ \leq hk \int_0^h dt \int_S \frac{v^2 \rho_1^2}{4\rho^2(\rho + \rho_1)} dx \end{aligned} \tag{9}$$

where we have used the arithmetic-geometric mean inequality and $v_1 = |\mathbf{v}_1|$, $v = |\mathbf{v}|$.

To handle the right hand side of (9) we need to bound v and so we observe that from equation (6)₂

$$k v_i = -\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - b \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

Now, employ Graffi's [24] (a), (f) hypotheses to see that there exist constants \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 such that

$$k v \leq \tilde{c}_1 \rho + \tilde{c}_2 \rho^\gamma.$$

Then, there are clearly constants c_1, c_2, A_1, A_2, A_3 such that

$$\frac{v}{\rho} \leq c_1 + c_2 \rho^{\gamma-1},$$

$$\frac{v^2}{\rho^2(\rho + \rho_1)} \leq \frac{A_1 + A_2\rho^{\gamma-1} + A_3\rho^{2\gamma-2}}{(\rho + \rho_1)}. \quad (10)$$

We now insert (10) in (9). To handle the right hand side of (10) we employ Young's inequality and then the *left hand side* of Graffi's [24] inequality (23) is replaced by

$$\begin{aligned} & \int_0^h dt \int_S (1 - M_3h)v_1^2 dx \\ & + \int_0^h dt \int_S \rho^{\gamma-3} \left(\frac{b}{2} - \left[M_2h + M_1h\rho^{\gamma-1} \right. \right. \\ & \quad + \frac{hA_2(2-\gamma)\beta^{(3-\gamma)/(2-\gamma)}}{(3-\gamma)} \rho^{(3-\gamma)/(2-\gamma)} \\ & \quad \left. \left. + \frac{hA_3(2-\gamma)\alpha^{(3-\gamma)/(2-\gamma)}}{(3-\gamma)} \rho^{\gamma(3-\gamma)/(2-\gamma)} \right] \right) dx \\ & + \int_0^h dt \int_S (\rho + \rho_1)^{\gamma-3} \left(\frac{b}{2} - \left[M_2h + M_1h(\rho + \rho_1)^{\gamma-1} \right. \right. \\ & \quad + \frac{hA_2}{(3-\gamma)\beta^{(3-\gamma)}} + \frac{hA_3}{(3-\gamma)\alpha^{(3-\gamma)}} \\ & \quad \left. \left. + hA_1(\rho + \rho_1)(2-\gamma) \right] \right) dx \leq \dots \end{aligned}$$

where the right hand side is the same as that of Graffi [24], inequality (23), and $\alpha > 0, \beta > 0$ are constants at our disposal.

We now argue as in Graffi [24] and select h sufficiently small, recalling we have α, β at our disposal. We may then show that (24) of Graffi [24] holds. The remainder of the uniqueness proof then follows as in Graffi [24]. Full details of the proof of uniqueness for a system more general than (6) which also incorporates the Forchheimer effect (see De Ville [13]) are contained in the book by Straughan [48].

5 Further theories for poroacoustic waves

Temperature effects on the model of section 3 employing classical thermodynamics are covered by Straughan [48]. Temperature effects which employ the Green & Laws [25] theory of thermodynamics are investigated in detail by Ciarletta & Straughan [9]. These writers begin with the equations of

Lindsay & Straughan [34] modified by a Darcy law term. Their theory thus provides an equivalent fluid theory for a porous medium, but one which also allows for the propagation of temperature waves. Ciarletta & Straughan [9] show that the wavespeed V satisfies the fourth order equation

$$(V^2 - U_T^2)(V^2 - U_M^2) + \kappa V^2 = 0.$$

This shows there are two waves, one which may be interpreted as a sound wave, the other as a temperature wave. Ciarletta & Straughan [9] further derive the amplitude equation fully and present an explicit solution.

An equivalent fluid theory for a porous medium which employs the relatively recent thermodynamics of Green & Naghdi [26] is derived by Straughan [48]. The thermodynamic development of Green & Naghdi [26] is an area of much interest today as may be witnessed by the references in Straughan [48] and Jaisaardsuetrong & Straughan [28]. Straughan [48] employs the thermal displacement variable

$$\alpha = \int_0^t \theta(\mathbf{x}, s) ds$$

of Green & Naghdi [26]. Straughan [48] studies acceleration waves and derives a fourth order wavespeed equation not unlike that described above. The amplitude equation is also derived and solved. It is worth noting that the original theory of Green & Naghdi [26] in a rigid heat conductor is analysed by Jaisaardsuetrong & Straughan [28].

We complete this article by briefly mentioning work where the motion of the elastic matrix is also accounted for in an acceleration wave analysis. Nunziato & Cowin [37] developed the basic theory of elastic materials with voids and acceleration waves in the isothermal case are studied there. Temperature effects on acceleration waves in the theory of elastic materials with voids were first studied by Professor Dorin Iesan, and details may be found in the very nice book of Iesan [27].

Ciarletta & Straughan [10] have studied acceleration waves in the theory of elastic materials with voids which employs the thermodynamics of Green & Laws [25]. In fact, the basic theory is due to Ciarletta & Scarpetta [7]. The equations employed by Ciarletta & Straughan [10] are the equations of balance of momentum, balance of void fraction, and balance of energy, as

given by e.g. Iesan [27], so that

$$\begin{aligned}\rho \ddot{x}_i &= \frac{\partial p_{Ai}}{\partial X_A} + \rho F_i, \\ \rho k \ddot{v} &= \frac{\partial h_A}{\partial X_A} + g + \rho \ell, \\ \rho \dot{\epsilon} &= -\frac{\partial Q_A}{\partial X_A} + p_{Ai} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_A} + h_A \frac{\partial \dot{v}}{\partial X_A} - g \dot{v} + \rho r.\end{aligned}$$

Ciarletta & Straughan [10] employ the constitutive theory of Ciarletta & Scarpetta [7] and they work with the amplitudes

$$a_i = [\dot{x}_i], \quad B = [\dot{v}], \quad C = [\dot{\theta}].$$

They show that the wavespeed satisfies the sixth order equation

$$(U_N^2 - U_M^2)(U_N^2 - U_P^2)(U_N^2 - U_T^2) - (U_N^2 - U_P^2)U_N^2 K_1 - (U_N^2 - U_M^2)K_2 = 0, \quad (11)$$

for appropriate terms U_M, U_P, U_T, K_1 and K_2 . Their interpretation is that there are three coupled waves corresponding to an elastic wave, a temperature wave, and a wave connected with the voids.

Ciarletta *et al.* [11] study acceleration wave motion in a theory of elastic materials with voids which is developed using the thermodynamics of Green & Naghdi [26]. In fact, the basic theory employed by Ciarletta *et al.* [11] is developed by De Cicco & Diaco [12]. Ciarletta *et al.* [11] show the wavespeed equation is similar to (11). Again, there are three waves which may be interpreted as an elastic wave, a thermal displacement wave connected to the variable α , and a voids wave.

We conclude by remarking that the topics covered in section 5 are described in much greater detail in the book by Straughan [48], where many other applications of wave motion and stability are presented.

Acknowledgments

I should like to thank Drs M. Ciarletta, M. Fabrizio, P.M. Jordan, A. Zampoli and V. Zampoli for discussions which have helped with this work. I am indebted to Drs Armando d'Anna, Monica de Angelis, and Alfonso Maio for the invitation to talk at the beautiful meeting in honour of Professor Pasquale Renno.

References

- [1] Boillat, G. 1965 *La propagation des ondes*.
- [2] Boillat, G. & Ruggeri, T. 1997 Hyperbolic principal subsystems: entropy convexity and subcharacteristic conditions. *Arch. Rational Mech. Anal.* **137**, 305–320.
- [3] Caviglia, G., Morro, A. & Straughan, B. 1992 Reflection and refraction at a variable porosity interface. *J. Acoustical Soc. Amer.* **92**, 1113–1119.
- [4] Chen, P.J. 1973 Growth and decay of waves in solids. In *Handbuch der Physik* (ed. S. Flügge & C. Truesdell), vol. VIa/3, pp. 303–402. Berlin: Springer.
- [5] Christov, C.I. & Jordan, P.M. 2005 Heat conduction paradox involving second sound propagation in moving media. *Physical Review Letters* **94**, 154301-1–154301-4.
- [6] Christov, I., Jordan, P.M. & Christov, C.I. 2006 Nonlinear acoustic propagation in homentropic perfect gases: a numerical study. *Physics Letters A* **353**, 273–280.
- [7] Ciarletta, M. & Scarpetta, E. 1989 Some results in a generalised thermodynamic theory for elastic materials with voids. *Rev. Roum. Sci. Tech., Mec. Appl.*, **34**, 113–119.
- [8] Ciarletta, M. & Straughan, B. 2006 Poroacoustic acceleration waves. *Proc. Roy. Soc. London A*, **462**, 3493–3499.
- [9] Ciarletta, M. & Straughan, B. 2007 Poroacoustic acceleration waves with second sound. Manuscript.
- [10] Ciarletta, M. & Straughan, B. 2007 Thermo-poroacoustic acceleration waves in elastic materials with voids. *J. Math. Anal. Appl.*, in the press.
- [11] Ciarletta, M., Straughan, B. & Zampoli, V. 2007 Thermo-poroacoustic acceleration waves in elastic materials with voids without energy dissipation. Manuscript.
- [12] De Cicco, S. & Diaco, M. 2002 A theory of thermoelastic materials with voids without energy dissipation. *J. Thermal Stresses* **25**, 493–503.

- [13] De Ville, A. 1996 On the properties of compressible gas flow in a porous media. *Trans. Porous Media*, **22**, 287–306.
- [14] Diebold, A.C. 2005 Subsurface imaging with scanning ultrasound holography. *Science* **310**, 61–62. Also see website: <http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/310/5745/61>
- [15] Eremeyev, V.A. 2005 Acceleration waves in incompressible elastic media. *Doklady Physics* **50**, 204–206.
- [16] Eringen, A.C. 1994 A continuum theory of swelling porous elastic soils. *Int. J. Engng. Sci.* **32**, 1337–1349.
- [17] Fabrizio, M. 1994 *Introduzione alla meccanica razionale e ai suoi metodi matematici*. Second edition, Zanichelli, Bologna.
- [18] Fabrizio, M. & Morro, A. 2003 *Electromagnetism of continuous media*. Oxford University Press.
- [19] Fausti, P., Pompoli, R. & Smith, R.S. 1999 An intercomparison of laboratory measurements of airborne sound insulation of lightweight plaster-board walls. *Building Acoustics* **6**, 127–140.
- [20] Fellah, Z.E.A. & Depollier, C. 2000 Transient acoustic wave propagation in rigid porous media: a time-domain approach. *J. Acoust. Soc. Am.* **107**, 683–688.
- [21] Fu, Y.B. & Scott, N.H. 1988 Acceleration wave propagation in an inhomogeneous heat conducting elastic rod of slowly varying cross section. *J. Thermal Stresses* **15**, 253–264.
- [22] Fu, Y.B. & Scott, N.H. 1991 The transition from acceleration wave to shock wave. *Int. J. Engng. Sci.* **29**, 617–624.
- [23] Garai, M. & Pompoli, F. 2005 A simple empirical model of polyester fibre materials for acoustical applications. *Applied Acoustics* **66**, 1383–1398.
- [24] Graffi, D. 1999 *Opere Scelte*, ed. by M. Fabrizio, G. Grioli and P. Renno. C.N.R. Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, Bologna.
- [25] Green, A.E. & Laws, N. 1972 On the entropy production inequality. *Arch. Rational Mech. Anal.* **45**, 47–53.

- [26] Green, A.E. & Naghdi, P.M. 1991 A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proc. Roy. Soc. London A* **432**, 171–194.
- [27] Iesan, D. 2004 *Thermoelastic models of continua*. Kluwer.
- [28] Jaisaardsuetrong, J. & Straughan, B. 2007 Thermal waves in a rigid heat conductor. *Phys. Lett. A*, in the press.
- [29] Jordan, P.M. 2005 Growth and decay of acoustic acceleration waves in Darcy-type porous media. *Proc. Roy. Soc. London A* **461**, 2749–2766.
- [30] Jordan, P.M. 2006 Finite - amplitude acoustic traveling waves in a fluid that saturates a porous medium: acceleration wave formation. *Phys. Lett. A* **355**, 216–221.
- [31] Jordan, P.M. & Christov, C.I. 2005 A simple finite difference scheme for modelling the finite-time blow-up of acoustic acceleration waves. *J. Sound Vibration* **281**, 1207–1216.
- [32] Jordan, P.M. & Puri, A. 2005 Growth/decay of transverse acceleration waves in nonlinear elastic media. *Phys. Letters A* **341**, 427–434.
- [33] Kameyama, N. & Sugiyama, M. 1996 Analysis of acceleration waves in crystalline solids based on a continuum model incorporating microscopic thermal vibration. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **8**, 351–359.
- [34] Lindsay, K.A. & Straughan, B. 1978 Acceleration waves and second sound in a perfect fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.* **68**, 53–87.
- [35] Lou, J. & Ruggeri, T. 2006 Acceleration waves and the weak Shizata - Kawashima condition. *Rend. Circolo Matem. Palermo* **78**, 187–200.
- [36] Maysenhölder, W., Berg, A. & Leistner, P. 2004 Acoustic properties of aluminium foams - measurements and modelling. *CFA/DAGA'04*, Strasbourg, 22–25/03/2004. See also www.ibp.fhg.de/ba/forschung/aluschaum/aluschaum.pdf
- [37] Nunziato, J.W. & Cowin, S.C. 1979. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Arch. Rational Mech. Anal.* **72**, 175–201.

- [38] Office of Basic Energy Sciences, Metals and Ceramics Division. 2006 Acoustic harmonic generation by microstructures. <http://mfnl.xjtu.edu.cn/gov-doc-ornl/bes/bes/welcome.htm#top%20of%20page>
- [39] Ostoja-Starzewski, M. & Trebicki, J. 1999 On the growth and decay of acceleration waves in random media. *Proc. Roy. Soc. London A* **455**, 2577–2614.
- [40] Ouellette, J. 2004 Seeing with sound. Acoustic microscopy advances beyond failure analysis. *American Institute of Physics Website* <http://www.aip.org/tip/INPHFA/vol-10/iss-3/p14.html>
- [41] Puri, P. & Jordan, P.M. 2004 On the propagation of plane waves in type-III thermoelastic media. *Proc. Roy. Soc. London A* **460**, 3203–3221.
- [42] Quintanilla, R. & Straughan, B. 2004 Discontinuity waves in type III thermoelasticity. *Proc. Roy. Soc. London A*, **460**, 1169–1175.
- [43] Rai, A. 2003 Breakdown of acceleration waves in radiative magnetic fluids. *Defence Science Journal*, **53**, 425–430.
- [44] Raiser, G.F., Wise, J.L., Clifton, R.J., Grady, D.E. & Cox, D.E. 1994 Plate impact response of ceramics and glasses. *J. Appl. Phys.* **75**, 3862–3869.
- [45] Ruggeri, T. & Sugiyama, M. 2005 Hyperbolicity, convexity and shock waves in one-dimensional crystalline solids. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**, 4337–4347.
- [46] Saggio-Woyansky, J., Scott, C.E. & Minnear, W.P. 1992 Processing of porous ceramics. *American Ceramic Society Bulletin*, **71**, 1674–1682.
- [47] Sakai, H., Sato, S., Pompoli, R. & Prodi, N. 2001 Measurement of regional environmental noise by use of a PC-based system: an application to the noise near the airport ‘G. Marconi’ in Bologna. *J. Sound Vibration*, **241**, 57–68.
- [48] Straughan, B. 2007 *Stability and wave motion in porous media*. Springer, New York, in the press.

- [49] Su, S., Dai, W., Jordan, P.M. & Mickens, R.E. 2005 Comparison of the solutions of a phase-lagging heat transport equation and damped wave equation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **48**, 2233–2241.
- [50] Sugiyama, M. 1994 Statistical mechanical study of wave propagation in crystalline solids at finite temperatures. *Current Topics in Acoustics Research*, **1**, 139–158.
- [51] Valenti, G., Curro, C. & Sugiyama, M. 2004 Acceleration waves analysed by a new continuum model of solids incorporating microscopic thermal vibrations. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **16**, 185–198.
- [52] Wilson, D.K. 1997 Simple, relaxational models for the acoustic properties of porous media. *Applied Acoustics*, **50**, 171–188.

.....

Phase-locked linear response and the optimal feedback control of near-wall turbulence

Paolo Luchini

Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Salerno
luchini@unisa.it

1 Introduction

1.1 Active-feedback drag reduction

One of the means that are being studied worldwide to reduce the drag of a turbulent flow is active feedback control. The typical problem under investigation is illustrated in figure 1: one wall (or both) of a plane channel occupied by a turbulent flow is tiled with an array of actuators and sensors electrically connected to a controller. The construction of such walls is being considered in the scope of the technology of micro-electro-mechanical systems (MEMS), but for the purposes of theoretical analysis the discrete array can be replaced by a continuum where one or all three components of velocity at any point in the wall can be controlled as a function of one or all three components of stress at any other point and their history. Insofar as the analysis is restricted to a linear controller, its effect can be represented in full generality by a convolution integral of the form

$$u(t, x, z) = \int y(t', x', z')k(t - t', x - x', z - z')dt'dx'dz'$$

where k denotes a convolution kernel to be determined and homogeneity of the problem in time and two spatial directions has been taken into account.

1.2 A brief history of active-feedback drag reduction

- Instantaneous feedback control (“opposition” control) of a turbulent flow: Choi, Moin & Kim (JFM, 1994)

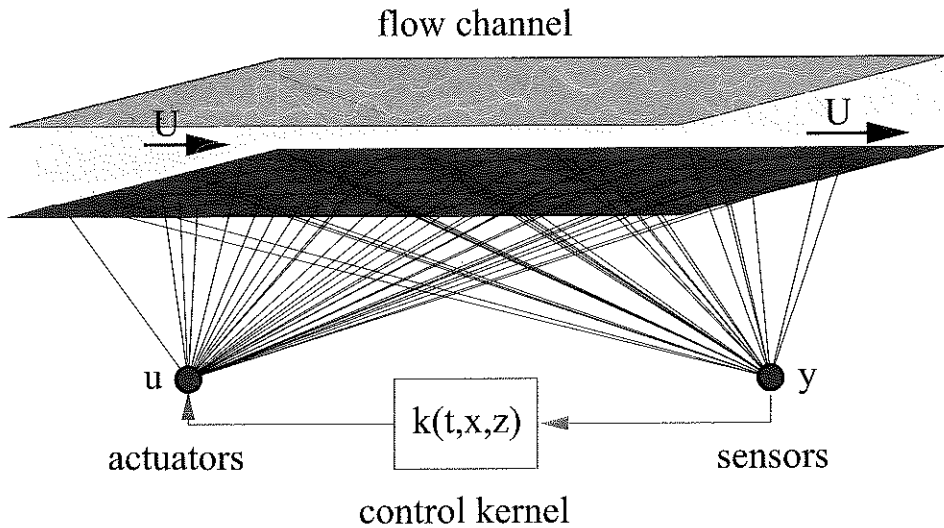


Figure 1:

- Spatially localized convolution kernel through “modern” (Kalman-filter based) optimal control applied to the linearized Navier-Stokes equations: Högberg & Bewley (unpublished, 2001); Högberg, Bewley & Henningson (Physics of Fluids 2003).
- Start of our project to embody a larger amount of physical information in the controller by replacing the linearized Navier-Stokes problem with a mean linear response of the full turbulent flow to external disturbances (2001)
- First phase-locked computation (“numerical measurement”) of such mean linear response from a DNS: Quadrio & Luchini (9th Eur. Turbulence Conference, 2002)
- Determination of the state estimator necessary to complement the full-state-feedback controller based on the linearized NS equations using the wavenumber (but not frequency) distribution of actual turbulent fluctuations (Höpffner, Chevalier, Bewley & Henningson, J. Fluid Mech. 2005).
- First IMC controller based on the phase-locked linear response and Wiener-filter theory (Luchini, Bewley & Quadrio, APS Division of Fluid Dynamics Meeting 2005)

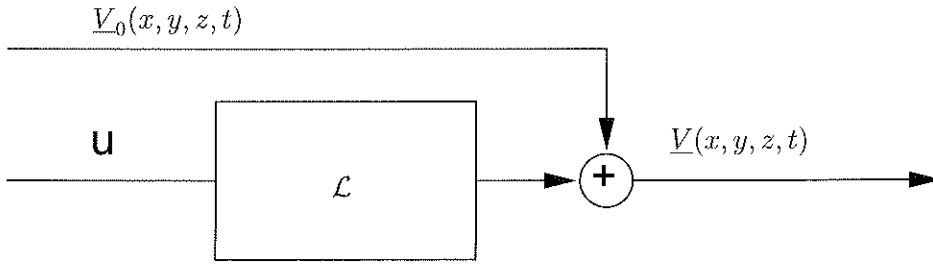


Figure 2:

- Complete characterization of the phase-locked linear response (Luchini, Quadrio & Zuccher, European Drag Reduction Meeting 2006)
- Characterization and test of the turbulent-response-based controllers (ongoing)

1.3 Linear model of a turbulent flow?

Practically all the efforts enterprised until today and described above are based on the theory of optimal control of a linear system; but of course a turbulent flow is a largely nonlinear dynamical system. Therefore the question immediately comes to mind whether the whole approach is at all justified, and any doubts in this respect must be eliminated before elaborating further. Fortunately, there is a precise range of problems in which the control may be dealt with linearly, and is when the control amplitude itself is assumed as a small parameter. If the total velocity field is written as the sum of an uncontrolled turbulent flow, nonlinear in its time evolution but fixed, and a small perturbation excited by a correspondingly small actuator velocity at the wall, the latter may be considered as a linear functional of the actuation:

$$\underline{V}(x, y, z, t) = \underbrace{\underline{V}_0(x, y, z, t)}_{\text{uncontrolled turbulent flow}} + \underbrace{\mathcal{L} \underbrace{u}_{\text{control input}}}_{\text{small perturbation}}$$

The block representation of the system becomes then the one given in figure 2, which represents a linear system whose dynamics is provided by the linear response of the velocity field to the controller, whereas the unperturbed turbulent flow plays the role of additive noise. The purpose of the control becomes then to reduce as much as possible this noise by a suitable feedback kernel.

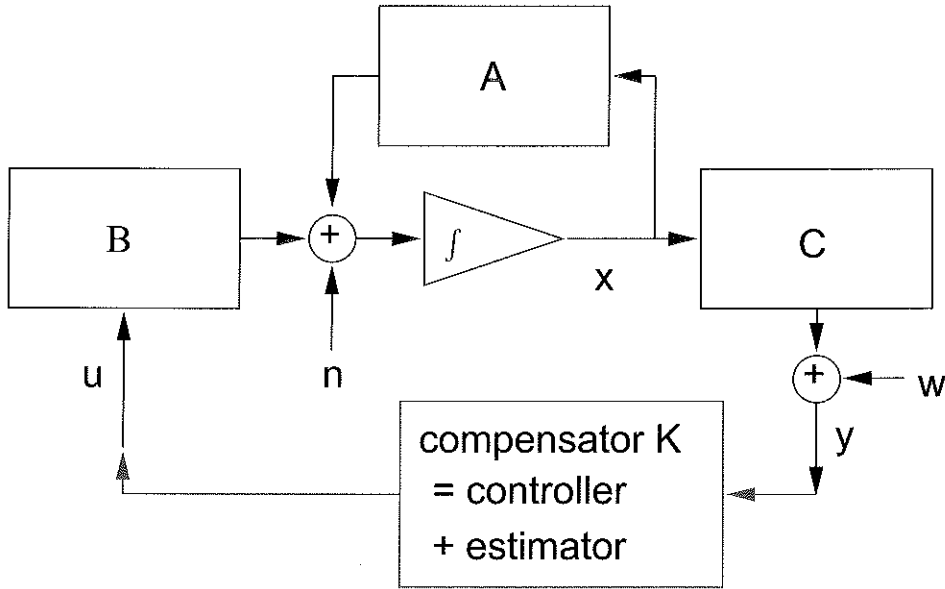


Figure 3: “Modern” (state-model based) LQG control

Many different approaches suit this picture, but differ for their assumptions about the linear dynamics. In fact, the linear operator \mathcal{L} can represent:

1. the linearized NS problem about the instantaneous flow (the solution diverges in time!)
2. the linearized NS problem about a mean profile (used by Högberg & Bewley)
3. the phase-locked mean linear response (introduced by us and explained in a following section)

2 State-model vs. input-based representation

The typical representation of a control problem used in optimal control theory is illustrated in figure 3. A system whose equations or motion can be expressed in normal form is represented by the dynamical matrix \mathbf{A} , input matrix \mathbf{B} and output matrix \mathbf{C} . The control problem is defined as that of optimizing the feedback dynamical system \mathbf{K} (which has its own internal dynamics and can be shown to share the dynamical matrix of the controlled

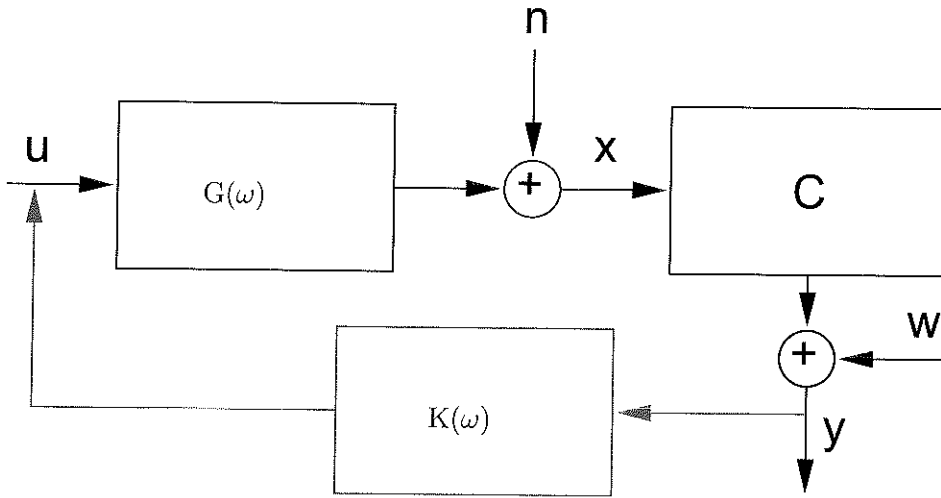


Figure 4: Input-response based LQ(no G) control

system) in such a way as to optimally damp the effects of the state noise n and measurement noise w . In typical applications to a turbulent flow, matrix \mathbf{A} contains the linearized Navier-Stokes equations and \mathbf{n} is a white noise. \mathbf{y} is a vector containing any or all wall stress components, and \mathbf{u} a vector containing any or all wall velocity components.

The “effects” to be minimized are represented by a quadratic objective function $x^*Qx + u^*Ru$ involving both the state and the control input with suitable weights (typically, the mean kinetic energy).

By contrast, the representation that will be adopted in this paper is input-based: the linear system is not represented through its state equations but through a convolution kernel or frequency-response function (Fourier transform of the convolution kernel). Whereas it is always possible to derive a response function from state equations, the converse is not always possible in exact form, and to obtain approximate state equations may be a delicate and time-consuming process when the response function is itself the result of an approximation. Rather than trying such a transformation, we have reformulated the control problem in an input-based representation.

According to figure 4, $G(\omega)$ is the (possibly measured) mean linear response of the turbulent flow, whereas vector \mathbf{y} can still contain any or all wall stress components, and \mathbf{u} any or all wall velocity components. \mathbf{n} is the measured turbulent-flow fluctuation.

The objective function is still a quadratic one of the form $x^*Qx + u^*Ru$ but may be chosen to be different from kinetic energy. Summarizing, the

improvements we in 2001 set up to add to the state of the art of active control of a turbulent flow were:

1. to replace the linearized Navier-Stokes equations about some mean flow by the mean linear response of the turbulent flow itself;
2. to replace the white-noise statistics implicit in the standard Kalman-filter model by the actual statistics of the turbulent flow;
3. to develop a suitable optimal-control framework that could enable the previous two improvements;
4. to choose a physically more relevant objective function.

3 The mean linear response

3.1 Conceptual definition

Our first step, realized during 2001-2002, was the determination and numerical “measurement” of the mean linear response of a turbulent flow. We realized, in fact, that a mean linear response can be defined by a conceptual process in which an infinitesimal external input is added to different realizations of a turbulent flow and then an ensemble average is taken. Whereas in each realization the perturbation induced by the external input is negligible compared to the turbulent fluctuations and inobservable, after the average fluctuations disappear and a response remains which for small enough external inputs must be linear in the input itself. The induced perturbation thus can be described in the frequency domain as the response $G(\omega)$ to sinusoidal forcing of varying angular frequency ω , or in the time domain as the impulse response $g(t)$ to a Dirac function $\delta(t)$.

The numerical determination of either response function requires the use of perturbations small enough that the behaviour is linear, but large enough that turbulent fluctuations may be averaged out using a finite and feasible number of samples.

The conceptual solution of this problem is phase-locked averaging (either with impulsive or sinusoidal forcing) to extract the deterministic part of our numerical signal out of turbulent noise, much as is done in the signal post-processing of many physical experiments. Our main difficulty was how to obtain a sufficiently good signal-to-noise (S/N) ratio with a reasonable computation time.

It should be remarked that Hussain & Reynolds, (*JFM*, 1970-1972) had already measured (in a real experiment, not a simulation) the evolution of

small (t -sinusoidal, z -uniform, x -impulsive) disturbances applied at the wall of a turbulent channel flow, at 4 discrete frequencies, by averaging over, typically, 100.000 cycles.

It would be completely impractical to average numerical results over a similar number of samples; while our first attempts proved it possible to obtain the linear response to a sinusoidal forcing with a larger amplitude and a smaller (*i.e.*, affordable) sampling, we were still confronted with the unaffordable task of repeating the whole procedure over a three-dimensional grid of points in frequency-wavenumber space in order to characterize the complete response.

The adoption of impulse forcing was in principle capable to provide the complete response in one shot, but the amplitudes required for linearity were so low that we could never achieve a reliable averaging.

3.2 Our solution: forcing with a random signal

A standard result of signal theory is that when a **white noise** is passed through a linear filter, the **correlation between input and output** is proportional to the impulse response of the system:

$$R_{io}(t, x, z) = \int R_{ii}(t', x', z')g(t - t', x - x', z - z')dt'dx'dz'$$

- If $R_{ii} = \delta(t, x, z)$ then $R_{io} = g(t, x, z)$.

We thus realized that, by adopting a random noise as our forcing input, turbulent fluctuations would be averaged out just as in phase-locking, but forcing power would be uniformly distributed (in a statistical sense) over time and space; the amplitude required for linearity could then be as large as for sinusoidal forcing, but the whole response was obtained at once.

3.3 Response-function results

3.3.1 Computational parameters

DNS with b.c. for V_i at one wall drawn out of a (space-time) white random distribution with given amplitude.

- Turbulent channel flow at $Re_\tau = 180$
- Standard domain size: $L_x = 4\pi h$, $L_y = 2h$ and $L_z = 4.2h$
- Standard spatial resolution: $N_x = 192$, $N_y = 128$ and $N_z = 128$
- *Averaging time $\sim 10 - 100$ times larger than generally used to collect turbulence statistics.*

3.3.2 Computational tools

- DNS pseudo-spectral code
- Parallel strategy to exploit commodity hardware (Luchini & Quadrio J. Comp. Phys. 2006)
- The “Personal Super-computer”: Dedicated system with 128 Opteron CPUs, 100GB RAM, 4TB disk



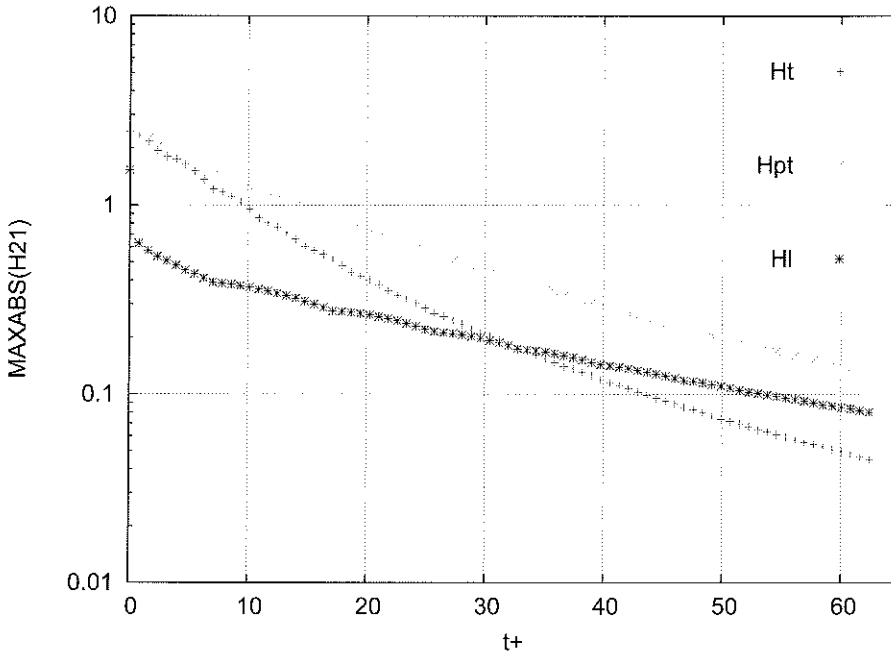
3.4 The H_v response at $t = 0$

An analytical solution

- Laplace eq. in 3d for potential $\varphi(x, y, z)$
- Decouples for each wavevector after Fourier transformation
- Simple b.c. in Fourier space: $\widehat{\varphi}_y(0) = 1$, $\widehat{\varphi}_y(2) = 0$
- Solution:

$$\widehat{\varphi}(y) = -\frac{\cosh[\kappa(2-y)]}{\kappa \sinh(2\kappa)} \quad \kappa = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

3.5 Comparison between turbulent and linearized-NS response

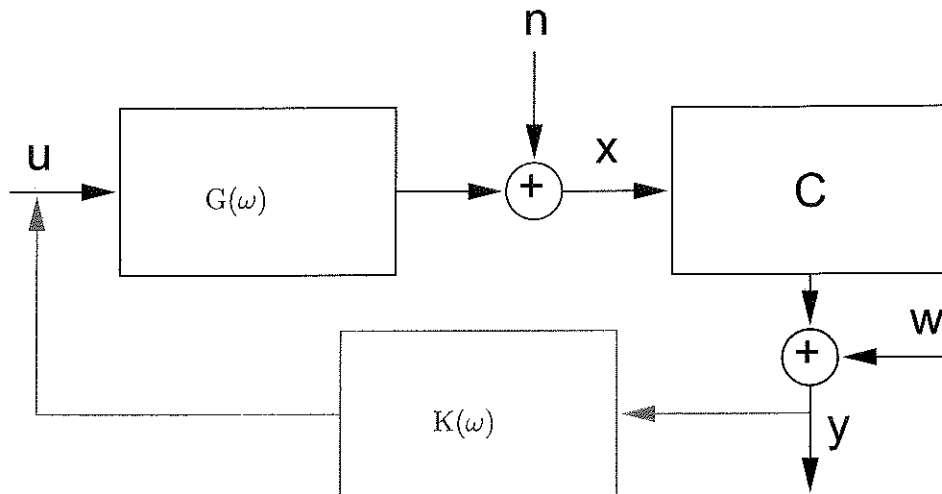


4 The optimal controller

As will be remembered from the introduction, the use of the mean response function is incompatible with the standard optimal-control approaches. In 2005 we eventually achieved a suitable design of the optimal controller.

Unlike most classical control problems, in which a finite number of state variables are functions of time only, in the present case the unknowns are functions of space and time. After Fourier transformation, however, the space structure becomes trivial: wavenumbers decouple. Time dynamics is the true difficulty, because even if the problem can formally be posed in frequency space, **causality** has to be enforced. Our objective can thus be summarized in the following

Problem: to find $K(\omega)$ such that $x^*Qx + u^*Ru$ is a minimum when $x = Gu+n$; $y = Cx+w$; $u = Ky$, w is a white measurement noise and n has the statistics of the actual, measured, turbulent-flow fluctuations (where it is understood that we are treating one spatial wavenumber at a time, and that all transfer functions in the frequency domain must be Fourier transforms of



causal responses).

4.1 The standard solution: state-model based LQG control

The standard LQG control has at its origin the so-called separation principle: the problem can be split into dual *control* and *estimation* problems, each of which can be separately solved through a Kalman filter. The solution is thus composed of the following steps:

- The problem is split into dual *control* and *estimation* Kalman-filter problems.
- Each of the control and estimation problems is solved by a codified technique based on the solution of an algebraic Riccati equation.
- The outcome is an instantaneous input matrix for a *controller* and one for an *estimator* based on the same state equations as the original system.

However the standard approach has a number of limitations:

- The standard solution requires a state-variable description (*i.e.*, a system of differential equations in normal form) and does not apply to an input-output formulation.

- The standard solution constrains the fluctuations to having the same statistics as the control.

The solution we actually need is a controller with independent dynamics.

4.2 The estimation problem: Wiener versus Kalman optimal filtering

The Kalman filter, central tool of the approach described above, solves the following problem:

Kalman (1960): to find an instantaneous K such that $(x - \tilde{x})^*Q(x - \tilde{x})$ is a minimum with $dx/dt = Ax + KC\tilde{x}$; $d\tilde{x}/dt = A\tilde{x} + n$ and n a white gaussian noise.

The formulation of the problem leads to a so-called matrix Riccati equation, the numerical solution of which is a standard control-theory algorithm. However, it should be recalled that Kalman's filter problem is equivalent to the earlier problem formulated by

Wiener (1939): to find a causal $K(\omega)$ such that $(x - \tilde{x})^*Q(x - \tilde{x})$ is a minimum with $x = KC(\tilde{x} + n)$, where \tilde{x} is a signal and n a noise, both of known but arbitrary (and unrelated) spectrum.

The solution of Wiener's problem led to the development of the Wiener-Hopf method, based on properties of the analytical continuation of the Fourier transform in complex ω . It should be noted that the original formulation of the Wiener-Hopf method only applies to a S.I.S.O. (single-input-single-output) system, but for such a system lends itself to a very fast numerical implementation using Fast Fourier Transforms with an $O(N \log N)$ time of computation. In fact, one of the biggest merits of Kalman's approach was to be applicable to a M.I.M.O (multiple-input-multiple-output) system; however, it should be noted that a more recent numerical variant of Wiener's problem, known as the Levinson algorithm, achieves an $O(N^2)$ computation time for M.I.M.O. time-invariant systems. In addition, even under the most general conditions the calculation of Wiener's filter, insofar as the optimization of a quadratic function, is a linear problem which can be solved by a standard LU decomposition in a time $O(N^3)$. This makes for a relatively slow but straightforward solution that can be used in the preliminary development and testing stages.

5 I/O based controller: IMC + Wiener optimization

Whereas the Wiener filter is equivalent to a Kalman filter but uses an input-output formulation directly, in order to solve the control problem we still need an equivalent of the separation principle: a tool to convert the feedback-control problem into a filter problem. Such a tool (which we actually rediscovered independently) is described under the name of Internal-Model Control (IMC) in the book by Morari & Zafriou (Prentice Hall 1998). As illustrated in figure 5, every feedback control with kernel K is equivalent to a feedforward problem with kernel K' , related to K as $K = (1 + K'CG)^{-1}K'$. Therefore it is sufficient to compute K' , which is a standard Wiener filter problem, and then K is obtained by this algebraic relation. It can be proved that if K' is causal, K is causal too (Youla 1978).

We are thus led to the following Wiener optimization:

1. The feedforward controller K' obeys a **quadratic** optimization problem; setting its gradient to zero yields a **linear system**. K is **causal** if and only if K' is. The closed-loop system is stable if and only if K' is (Youla 1978).
2. Enforcing causality of K' is a **Wiener-Hopf** problem: the relevant SISO or MIMO methodology can be applied.

6 Quantifying drag reduction

6.1 Can a drag reduction be defined for a linear model?

The quadratic objective function generally adopted as the optimization objective in flow control is the *kinetic energy* (integral squared velocity). Skin friction of a real turbulent flow is a complicated nonquadratic function and cannot directly be adopted as the optimization objective.

However

- Dissipation is a quadratic function that is exactly proportional to skin friction in the mean unperturbed flow.
- Dissipation, in a controlled flow, exactly equals the net energy balance between the work done by skin friction and the work done by the controller, and is thus an objective function directly related to the physical objective.

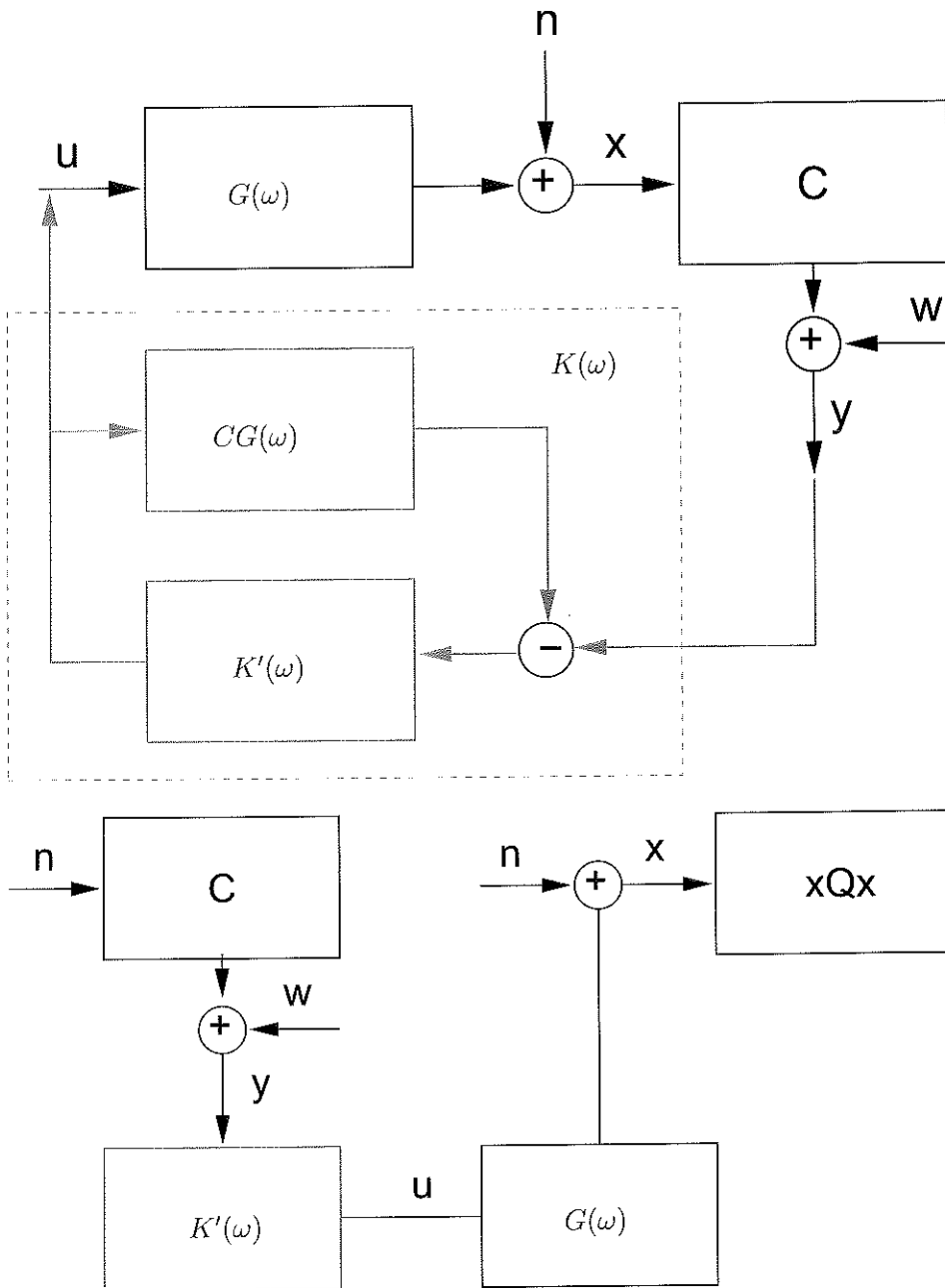


Figure 5: IMC controller and equivalent open-loop system

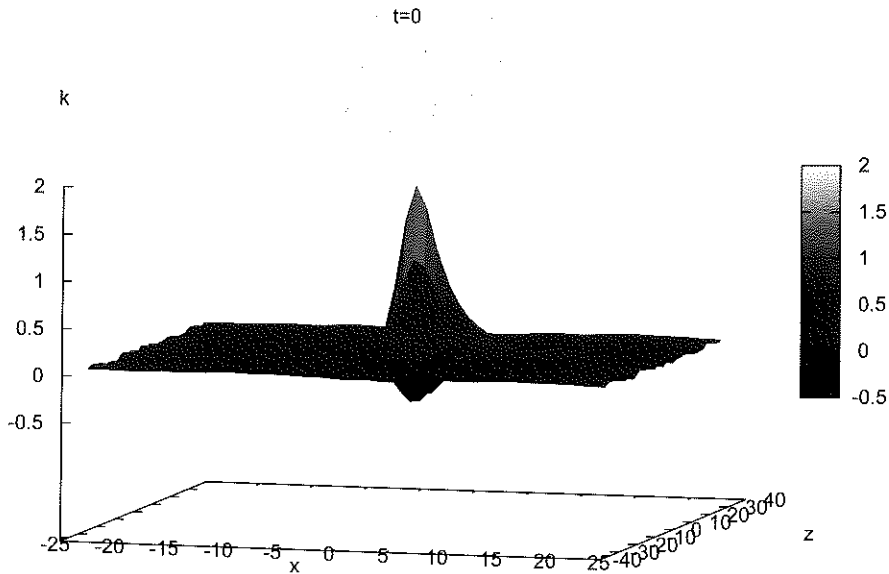
- Dissipation can be modified, and its modification verified, even in a linear model of turbulence control.

6.2 A control-kernel example

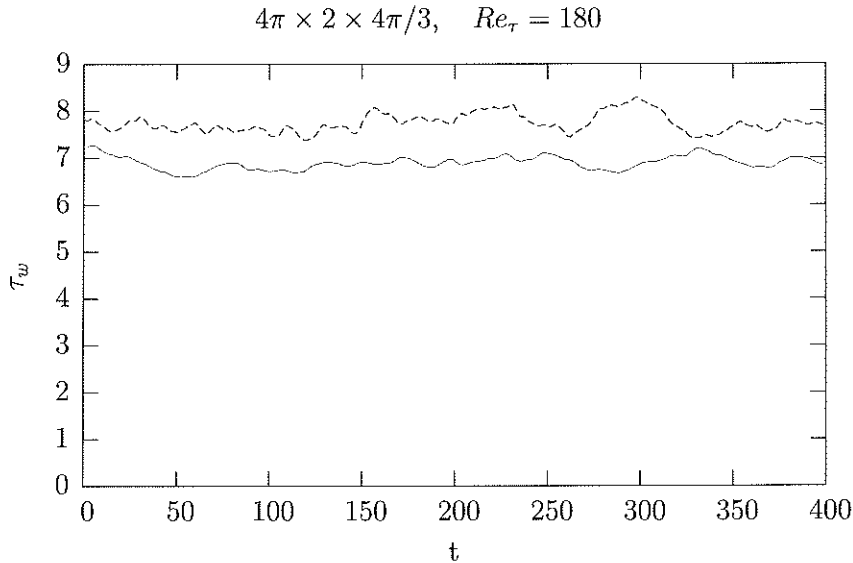
- Sensor y : **all three stress components** (can be any or all wall stress components). The longitudinal skin-friction component is displayed.
- Actuator u : **wall-normal velocity** (can be any or all wall velocity components).
- Objective function: **dissipation** (can be kinetic energy, weighted kinetic energy, dissipation).

Dissipation is a quadratic function that even in the full nonlinear problem exactly equals external work (difference of skin-friction gain and energy spent to operate the actuators).

- Control cost $R = 0.1$; measurement noise $W = 0.1$.
 R and W play a double role as smoothing factors.



6.3 Test run



Drag reduction: 12 %

7 Conclusions

7.1 State of the art

- The mean linear response of a turbulent flow to wall actuators has been determined in all of its components.
- Wiener-based IMC optimization provides the optimal drag-reducing feedback kernel based on the linear response and on actual turbulence statistics.

7.2 Ongoing work

- Classification of the different combinations of velocity and stress components in terms of drag reduction produced.
- Quantitative comparison of dynamic and instantaneous controllers.
- "Robustification" of the controller: whereas the linear model responds exactly as expected, the controller becomes unstable when applied to the complete turbulent flow unless an empirically determined control

cost R and measurement noise W is applied. This should be done in an optimal way (e.g., H_∞ control).

- The maximum achievable drag reduction has not been determined yet.

7.3 Potential developments

- **Nonlinear optimization** is possible: the present linear procedure can become the linearization step of a Newton algorithm.
- **High-Reynolds number controller design**: the controller can be designed based on two-point correlations between internal velocity and wall stress or external forcing measured in a real experiment rather than in a DNS.

References

- [1] H. CHOI, P. MOIN & J. KIM 1994 Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.* **262**, 75-110
- [2] M. HGBERG, T.R. BEWLEY & D. S. HENNINGSSON 2003 Relaminarization of $Re_\tau = 100$ turbulence using gain scheduling and linear state-feedback control. *Phys. Fluids* **15**, 3572 M. QUADRIO & P. LUCHINI 2002 The linear response of a turbulent channel flow. 9th European Turbulence Conference, Southampton 2-5 July 2002
- [3] J. Höpfner, M. Chevalier, T.R. Bewley & D.S. Henningsson 2005 State estimation in wall-bounded flow systems. Part 1. Perturbed laminar flows. *J. Fluid Mech.* **534**, 263-294
- [4] P. LUCHINI, T. BEWLEY & M. QUADRIO 2005 An optimal feedback controller for the reduction of turbulent energy in 3D plane-duct flow. 58th Annual Meeting of the American Physical Society - Division of Fluid Dynamics, Chicago 20-22 Nov. 2005. *Bull. Am. Phys. Soc.* **50-9**, 58.
- [5] P. LUCHINI, M. QUADRIO & S. ZUCCHER 2006 Phase-locked linear response of a turbulent channel flow. European Drag Reduction and Flow Control Meeting, Ischia 10-13 April 2006. *Phys. Fluids* **18**, 121702(1-4).